UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Para Liana,
como recordação das
horas e dos anos de estudo
em conjunto.

Vânia maio/85

SOBRE A PROPRIEDADE DO GOING DOWN

VANIA KRAEMER JAEGER

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PORTO ALEGRE, DEZEMBRO DE 1984

Dissertação realizada sob a orientação da Prof. Dra. Ada Maria de S. Doering e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Ada Maria por toda a paciência, dedicação e eficiência que sempre me foram dispensadas durante a execução deste trabalho.

Agradeço também ao Beto e ao Mauro pela compreensão e ajuda inestimáveis.

SUMARIO

INTRODUÇÃO -- 5

1. GOING DOWN EM EXTENSÕES INTEIRAS ------------------------ 8

2. GOING DOWN E 1-GOING DOWN ------------------------------22

3. GOING DOWN EM ANÉIS DE POLINÔMIOS ----------------------41

RESUMO --53

BIBLIOGRAFIA --55

INTRODUÇÃO

É bem conhecido que se um domínio T é uma extensão inteira de um domínio inteiramente fechado R, então a extensão $R \hookrightarrow T$ satisfaz a propriedade do going down. Este trabalho apresenta, em três capítulos, um estudo sobre extensões $R \hookrightarrow T$ que possuem a propriedade do going down, onde R e T são domínios e T está contido no corpo de frações K de R.

No primeiro capítulo, trabalhamos com extensões inteiras. Um primeiro resultado mostra que se R é um domínio qualquer e R' seu fecho inteiro então o fato de $R \hookrightarrow R'$ ser uma extensão que satisfaz going down implica que qualquer extensão inteira de R também satisfaz going down (teorema 1.1). Outro resultado importante deste capítulo mostra que, sendo R um domínio Noetheriano, então a extensão inteira $R \hookrightarrow T$ satisfaz going down se e somente se todo ideal primo P de R, de altura maior que um, possuir exatamente um ideal primo de T sobre si, isto é, se P for um ideal primo não ramificado em T (teorema 1.2). Ainda neste capítulo apresentamos um exemplo de um domínio local Noetheriano R, cujo fecho inteiro R' é ainda Noetheriano, de modo que a extensão $R \hookrightarrow R'$ é ramificada e não satisfaz a propriedade do going down, embora a extensão $R \hookrightarrow T = R'_{M_2}$, onde M_2 é um ideal maximal de R', seja não ramificada e satisfaça going down (exemplo 1.1).

No segundo capítulo trabalhamos com extensões $R \hookrightarrow T$, onde T está contido no corpo K de frações de R, que satisfaçam a propriedade do 1-going down. Mostramos que o fato da extensão $R \hookrightarrow T$ satisfazer a propriedade do going down é equivalente ao fato dela satisfazer 1-going down (teorema 2.4). Mostramos também que se $R \hookrightarrow T$ satisfizer a propriedade do going down, então todo ideal primo de R, de altura maior que um, terá no máximo um ideal primo de T sobre si (teorema 2.1).

No terceiro e último capítulo estudamos a propriedade do going down para extensões $R[X] \hookrightarrow T[X]$, onde R é um domínio qualquer, e T está contido no fecho inteiro R' de R. Mostramos que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ satisfaz a propriedade do going down se e somente se for não ramificada (teorema 3.1). Por último apresentamos um contra exemplo que mostra ser indispensável a hipótese de T estar contido em R'; mais precisamente mostramos que, tomando R e T como no exemplo 2.1, a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ não satisfará a propriedade do going down, apesar de ser não ramificada e de $R \hookrightarrow T$ satisfazer a propriedade do going down.

Em nosso trabalho, todos os anéis serão comutativos com unidade e um ideal primo será sempre diferente do anel todo. Além disso, o símbolo $\subseteq$ será usado para denotar a inclusão e $\subset$ para a inclusão própria.

Apresentaremos a seguir algumas definições que serão utilizadas ao longo do trabalho. Sejam então R, T domínios tais que $R \subset T$. Diremos que a extensão $R \hookrightarrow T$ possui a propriedade do <u>lying over</u> se dado qualquer ideal primo I de R, existe um ideal primo I' de T que está acima de I, isto é, $I' \cap R = I$. Diremos que a extensão $R \hookrightarrow T$ possui a propriedade do <u>going up</u> sempre que dados P, Q dois ideais primos de R de modo que $P \subset Q$ e dado um ideal primo P' de T que está acima de P, existir um ideal primo Q' de T que contém P' e está acima de Q, isto é, $P' \subset Q'$ e $Q' \cap R = Q$. A extensão $R \hookrightarrow T$ possuirá a propriedade do <u>going down</u> se dados dois ideais primos P e Q de R onde $P \subset Q$ e dado um ideal primo qualquer Q' de T que está acima de

Q, existir um ideal primo P' de T contido em Q' e que está acima de P, isto é, $P' \subset Q'$ e $P' \cap R = P$. Um ideal primo P de R será <u>não ramificado em T</u> se existir exatamente um ideal primo P' de T tal que $P' \cap R = P$, e diremos que a extensão $R \subsetneq T$ é <u>não ramificada</u> se cada ideal primo de R for não ramificado em T.

Finalmente, se u é um elemento do corpo de frações de R então definiremos o <u>condutor de u em R</u> como sendo o conjunto dos elementos r de R para os quais r.u está em R, ou seja, notando por I_u este conjunto temos $I_u = \{r \in R; ru \in R\}$. Notemos que como $u = a/b$ onde a, b estão em R e $b \neq 0$, podemos concluir que b está em I_u, uma vez que $b.u = a \in R$. Assim este ideal não é nulo.

1. GOING DOWN EM EXTENSÕES INTEIRAS

Nosso primeiro objetivo, neste capítulo, é mostrar que uma extensão inteira qualquer $R \hookrightarrow T$ satisfaz a propriedade do going down desde que a extensão $R \hookrightarrow R'$ satisfaça a mesma propriedade, onde R é um domínio e R' seu fecho inteiro. Este resultado é mostrado no seguinte teorema.

Teorema 1.1 [7, teorema 1] - Se R é um domínio e R' seu fecho inteiro, então a extensão $R \hookrightarrow R'$ possui a propriedade do going down se e somente se a extensão $R \hookrightarrow T$ possui a mesma propriedade, qualquer que seja o domínio T, inteiro sobre R.

A fim de provarmos este teorema, enunciaremos e provaremos um lema bastante útil.

Lema 1.1 [7, lema 1] - Sejam R, S, T domínios tais que $R \subset S \subset T$.
i) Se a propriedade do going down vale para as extensões $R \hookrightarrow S$ e $S \hookrightarrow T$ então ela também valerá para a extensão $R \hookrightarrow T$.
ii) Se a extensão $R \hookrightarrow T$ possui a propriedade do going down e a extensão $S \hookrightarrow T$ possui a propriedade do lying over então a extensão $R \hookrightarrow S$ possuirá going down.

Prova: (i) Sejam P e Q dois ideais primos de R e Q'' ideal primo de T tais que $P \subset Q$ e $Q'' \cap R = Q$. Queremos mostrar que existe um ideal primo P'' de T que está contido em Q'' e acima de P.

Sabemos que a extensão $R \hookrightarrow S$ possui going down e $Q'' \cap S$ é um ideal primo de S que está acima de Q. Segue daí que existe um ideal primo P' de S tal que $P' \subset Q'' \cap S = Q'$

e $P'\cap R = P$.

Por outro lado, $S \subsetneq T$ possui going down, consequentemente como $P' \subset Q'$ são ideais primos de S e Q'' está acima de Q', existe um ideal primo P'' de T tal que $P'' \subset Q''$ e $P''\cap S = P'$.

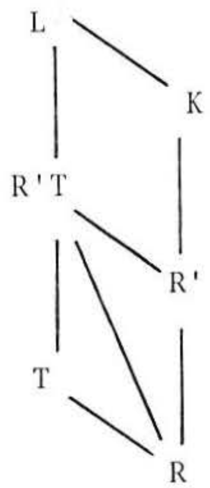
Observemos que, sendo $Q' = Q''\cap S$ e $Q = Q'\cap R$, temos $Q = Q'\cap R = (Q''\cap S)\cap R = Q''\cap R$. Obtivemos então um ideal primo P'' de T, contido em Q'' com $P''\cap R = (P''\cap S)\cap R = P'\cap R = P$, o que conclui a prova deste ítem.

(ii) Para provar a segunda parte deste lema, vamos igualmente supor que são dados dois ideais primos P e Q de R com $P \subset Q$ e que existe um ideal primo Q' de S acima de Q, isto é, $Q'\cap R = Q$. Queremos mostrar a existência de um ideal primo P' de S que satisfaz $P' \subset Q'$ e $P'\cap R = P$.

Mas dado tal Q' de S, podemos garantir a existência de um ideal primo Q'' de T que está acima de Q', uma vez que a extensão $S \subsetneq T$ possui lying over. É claro que Q'' está acima de Q, pois $Q''\cap R = (Q''\cap S)\cap R = Q'\cap R = Q$. Então, pelo going down, que vale para $R \subsetneq T$, segue a existência de um ideal primo P'' de T tal que $P'' \subset Q''$ e $P''\cap R = P$. Mas, $P''\cap S$ é um ideal primo de S e $P''\cap S \subset Q''\cap S = Q'$, logo existe um ideal primo $P' = P''\cap S$ de S, contido em Q', que está acima de P, uma vez que $P'\cap R = (P''\cap S)\cap R = P''\cap R = P$, o que completa a prova de validade da propriedade do going down para $R \subsetneq S$. Δ

<u>Prova do teorema 1.1</u>: Suponhamos primeiro que a extensão $R \subsetneq R'$ possua a propriedade do going down e consideremos um domínio T de forma que $R \subsetneq T$ seja uma extensão inteira. Queremos provar que tal extensão possui going down.

Sendo K o corpo de frações de R, consideremos um corpo L que contenha K e T. Segue daí que $R'T$ está em L e seus elementos são do tipo $\sum_{i \in I} r_i' t_i$, onde $r_i' \in R'$, $t_i \in T$ e I é finito.



Vamos primeiro mostrar que a extensão $R' \hookrightarrow R'T$ é inteira, para o que basta provar que um elemento do tipo $r't$ de $R'T$ é inteiro sobre R'. Com efeito, desde que, por hipótese, temos $R \hookrightarrow T$ uma extensão inteira e $t \in T$, podemos garantir a existência de um polinômio mônico $f(X)$ de $R[X]$ que anula t, isto é, $f(t) = 0$. Mas R' contém R, portanto todos os coeficientes de $f(X)$ estão em R'. Segue daí que encontramos um polinômio mônico em $R'[X]$ que anula t, ou seja, t é inteiro sobre R'. Como $r' \in R'$ temos que r' é inteiro sobre R', segue então que o produto $r't$ é inteiro sobre R', o que prova nossa primeira afirmação. Deste fato, conclui-se imediatamente que a extensão $R' \hookrightarrow R'T$ possui a propriedade do going down, por ser R' um domínio inteiramente fechado [1, teorema 5.16, pag. 64].

Segue do lema 1.1 parte (i) que a extensão $R \hookrightarrow R'T$ possui a propriedade do going down.

Vamos mostrar agora que $R \hookrightarrow T$ possui going down, utilizando a parte (ii) do mesmo lema 1.1, o que concluirá um lado da prova. Para usar tal fato, basta considerar as extensões $R \hookrightarrow T$ e $T \hookrightarrow R'T$ e mostrar que $T \hookrightarrow R'T$ satisfaz lying over. Com efeito, como $R \hookrightarrow R'$ e $R' \hookrightarrow R'T$ são extensões inteiras, $R \hookrightarrow R'T$ é também uma extensão inteira, e conseqüentemente a extensão $T \hookrightarrow R'T$ satisfaz lying over por ser igualmente inteira.

O outro lado da prova é evidente, visto que, se por hipótese vale going down para toda extensão inteira $R \hookrightarrow T$ em particular valerá para $R \hookrightarrow R'$, isto é, quando $T = R'$. Δ

Vamos supor agora que R seja um domínio Noetheriano e que T seja um domínio compreendido entre R e seu fecho inteiro R'. Sob tais hipóteses, estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que a extensão $R \hookrightarrow T$ possua going down. Tal resultado é de grande importância no nosso trabalho e é estabelecido no seguinte teorema.

<u>Teorema 1.2</u> [7, teorema 2] - Se R é um domínio Noetheriano e T um domínio entre R e seu fecho inteiro R' então a extensão $R \hookrightarrow T$ possui a propriedade do going down se e somente se cada ideal primo P de R de altura maior que um for não ramificado em T.

Precisaremos ainda de outro lema auxiliar para elaboração da prova deste teorema.

<u>Lema 1.2</u> [7, lema 2] - Sejam R um domínio, u um elemento do corpo de frações de R e I_u o condutor de u em R. Se $I_u \not\subset P$, onde P é um ideal primo de R, então existe exatamente um ideal primo de $R[u]$ que está acima de P.

<u>Prova</u>: seja X uma indeterminada sobre R e consideremos o anel de polinômios $R[X]$, bem como o homomorfismo avaliação

$$\begin{aligned} \Phi : \quad R[X] &\longrightarrow R[u] \\ f(X) &\longmapsto f(u), \end{aligned}$$

que é sobrejetivo e cujo núcleo J é o conjunto dos polinômios de $R[X]$ que se anulam em u. Pelo teorema de isomorfismos, sabemos que $R[u] \cong R[X]_{/J}$. Seja P um ideal primo de R que não contêm I_u. Queremos mostrar que existe um único ideal primo de $R[u]$ que está acima de P, considerada a extensão $R \hookrightarrow R[u]$. Mas pelo isomorfismo antes apresentado, basta mostrar que existe um único ideal primo $\mathcal{P}$ de $R[X]$ que contém o núcleo J da Φ e que está acima de P, ou seja, $\mathcal{P} \cap R = P$, considerada a extensão $R \hookrightarrow R[X]$.

A partir do fato de $I_u \not\subset P$, podemos garantir a existência de um elemento não nulo i de I_u tal que $i \notin P$. Como $i \in I_u$ temos que $iu \in R$. Seja r tal elemento iu; segue daí a igualdade $iu - r = 0$, onde $i, u \in R$. Consideremos agora o polinômio $f(X) = iX - r \in R[X]$. É claro que $f(X) \in J$ e que por ser um polinômio do 1º grau é irredutível em $cf(R)[X]$. Notando por K o corpo de frações de R, segue, por [5, teorema 36], que $J = (f(X))K[X] \cap R[X]$, isto é, $J = (iX-r)K[X] \cap R[X]$. Portanto, basta mostrar que existe um único ideal primo $\mathcal{P}$ de $R[X]$ tal que $iX-r \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} \cap R = P$.

Por outro lado, consideremos o homomorfismo sobrejetor $\pi : R[X] \longrightarrow R_{/P}[X]$, definido por $\pi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + P) X^i$, cujo núcleo é $PR[X]$ e que nos dá uma bijeção entre $\{\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}(R[X]) ; \mathcal{Q} \supseteq PR[X]\}$ e $\mathrm{Spec}(R_{/P}[X])$. Observemos também que se $\mathcal{P}$ é ideal primo de $R[X]$ tal que $\mathcal{P} \cap R = P$ então $\mathcal{P} \in \{\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}(R[X]) ; \mathcal{Q} \supseteq PR[X]\}$ e se $iX - r \in \mathcal{P}$ então $(i+P)X - (r+P) \in \pi(\mathcal{P})$. Basta mostrarmos então que existe um único ideal primo $\bar{\mathcal{P}}$ de $R_{/P}[X]$ tal que $\bar{\mathcal{P}} \cap R_{/P} = (\bar{0})$ e $(i+P)X - (r+P) \in \bar{\mathcal{P}}$.

$$
\begin{tikzcd}
R[X] \arrow[rr, "\pi"] & & (R_{/P})[X] \cong R[X]/_{P[X]} & \\
& P \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & \pi(P) \arrow[dd, dash] \\
R \arrow[uu, hook] \arrow[rr, "\pi|_R"] & & R_{/P} \arrow[uu, hook] & \\
& P \arrow[rr, dash] & & (\bar{0})
\end{tikzcd}
$$

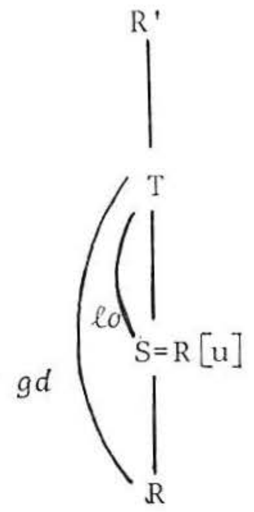
Como $\bar{i}X - \bar{r} = (i + P)X - (r + P)$ é um polinômio do 1º grau de $R_{/P}[X]$, visto que $i \notin P$, temos que $\bar{i}X - \bar{r}$ é irredutível em $(cf\ R_{/P})[X]$ e conseqüentemente $(\bar{i}X - \bar{r})(cf\ R_{/P})[X] \cap R/_P[X] = \bar{P}$ [5, teorema 36], portanto $\bar{P}$ é único, ficando assim completa a prova deste lema. Δ

<u>Prova do Teorema 1.2</u>: Vejamos primeiro que a condição é necessária, e suponhamos, por absurdo, que ela seja falsa. Então a extensão $R \subsetneq T$ possui going down e garantimos a existência de um ideal primo P de R de altura maior que um ramificado, isto é, de modo que T possui pelo menos dois ideais primos distintos que estão acima de P. Consideremos então P_1' e P_2' tais ideais primos distintos de T. Naturalmente $P_1' \cap R = P_2' \cap R = P$.

Como $P_1' \neq P_2'$, podemos escolher um elemento u que está em $P_1' \setminus P_2'$, e considerar o domínio $S = R[u]$. Chamemos $P_1 = P_1' \cap S$ e $P_2 = P_2' \cap S$. Segue daí que P_1 e P_2 são dois ideais primos de S, distintos, uma vez que $u \in P_1' \cap S = P_1$ e $u \notin P_2' \cap S = P_2$, e que estão ambos acima de P, pois

$P_i \cap R = (P'_i \cap S) \cap R = P'_i \cap R = P$, para i variando entre 1 e 2.

A extensão $S \subsetneq T$ é inteira, pois temos $R \subset S \subset T \subset R'$ e $R \subsetneq R'$ é extensão inteira. Conseqüentemente $S \subsetneq T$ possui a propriedade do lying over.



Temos então extensões $R \subsetneq S \subsetneq T$ de forma que $S \subsetneq T$ possui lying over e $R \subsetneq T$ possui going down, o que nos leva a concluir que $R \subsetneq S$ possui going down, utilizando novamente a parte (ii) do lema 1.1.

Afirmamos agora que a altura de P_1 é maior que um. De fato, por hipótese, P é um ideal primo de altura maior que um, então existe pelo menos um ideal primo Q não nulo contido em P. Além disso, P_1 é um primo de S que está acima de P, então por $R \subsetneq S$ possuir going down, podemos encontrar um ideal primo não nulo Q_1 de S, tal que $Q_1 \subset P_1$ e $Q_1 \cap R = Q$. Assim temos $(0) \subset Q_1 \subset P_1$, o que conclui a afirmação.

Sendo I_u o condutor de u em R, observamos que $I_u \subseteq P$, caso contrário, existiria um elemento $i \in I_u \setminus P$, mas neste caso teríamos $iu \in P$, pois $iu \in R \cap P_1 = P$, e consequentemente $iu \in P_2$, o que não pode acontecer, visto que $i \notin P_2$ e $u \notin P_2$. Temos então $I_u \subseteq P$ e portanto $I_u S \subseteq P_1$. Consideremos o conjunto

$$W = \{N \in Spec(S);\ \ alt\ N = 1,\ \ I_u S \subseteq N \subset P_1\}.$$

Mostraremos que se $x \in P_1 \setminus P_2$ então existe $N' \in W$ tal que $x \in N'$. Seguirá daí que $P_1 \subset P_2 \cup (\bigcup_{N \in W} N)$ e que W é não vazio.

Por outro lado, como todo elemento de W é um pri mo mínimo do ideal I_uS, e como $S = R[u]$ é um domínio Noetheriano, visto que R o é, podemos concluir que W é finito, digamos $W = \{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$. Seguirá então que $P_1 \subset P_2 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_m$ e portanto $P_1 \subset P_2$ ou $P_1 \subset N_i$, para algum i variando entre 1 e m. Como $u \in P_1 \setminus P_2$, temos que P_1 não pode estar contido em P_2 e como alt $P_1 > 1$ e alt $N_i = 1$, qualquer que seja i variando entre 1 e m, temos que P_1 não pode estar contido em N_i, qualquer que seja i variando entre 1 e m. Teremos portanto uma contradição, que provém do fato de havermos suposto P ramificado em T.

Mostremos agora que se $x \in P_1 \setminus P_2$ então existe $N' \in W$ tal que $x \in N'$. Como $x \in P_1$ e alt $P_1 > 1$, pelo teorema do ideal principal de Krull [5, teorema 142], existe um ideal primo N' tal que $x \in N'$, $N' \subset P_1$ e alt $N' = 1$. Resta-nos ver se $I_uS \subset N'$. Com efeito, observemos que $x \in N' \setminus P_2$, portanto $N' \not\subset P_2$. Sendo $N = N_1 \cap R$, é claro que $N \subset P$, visto que $N' \subset P_1$ e $P_1 \cap R = P$. Uma vez que $N \subset P$, $P_2 \cap R = P$ e a extensão $R \hookrightarrow S$ possui going down, como foi visto anteriormente, deve existir um ideal primo N'' de S tal que $N'' \subset P_2$ e $N'' \cap R = N$. É claro que N' e N'' são distintos, pois $P_2 \supset N''$ e $P_2 \not\supset N'$. Segue então do lema 1.2 que $I_uS \subset N'$ e $N' \in W$.

Para mostrar a condição suficiente, basta lembrar que como $R \hookrightarrow T$ é uma extensão inteira, por estar T contido em R', ela possui a propriedade do going up [5, teorema 44]. Além disso, por hipótese, $R \hookrightarrow T$ é não ramificada, donde se conclui facilmente que ela satisfaz going down, Δ

Exemplo 1.1 - Faremos aqui a construção de um exemplo que mostra ser falsa a recíproca da parte (i) do lema 1.1, bem como ser imprescindível a hipótese da extensão $S \hookrightarrow T$ possuir lying over na parte (ii) do mesmo lema 1.1. Este exemplo foi elaborado por Nagata em [9] e trata-se da construção de um domínio local (R, M) n-dimensional, cujo fecho inteiro R' tem exatamente dois ideais primos M_1 e M_2, onde R'_{M_1} é um domínio de valorização discreta e R'_{M_2} é um domínio local também n-dimensional tal que a extensão $R \hookrightarrow R'_{M_2}$ satisfaz going down.

Uma outra construção deste exemplo, utilizando técnicas bem mais simples, aparece em [2, secção 4, exemplo C], construção esta que passaremos a apresentar com detalhes.

Sejam k um corpo, $\{t_1, \ldots, t_m, \ldots\}$ um conjunto infinito de indeterminadas sobre k e $L = k(t_1, \ldots, t_m, \ldots)$. Seja n um número inteiro maior ou igual a um e sejam $X, Y_1, \ldots, Y_n$ indeterminadas sobre o corpo L. Vamos considerar o domínio $L[X, Y_1, \ldots, Y_n]$, os ideais primos (X) e $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, e o sistema multiplicativo $\mathfrak{S}$ definido por $\mathfrak{S} = L[X, Y_1, \ldots, Y_n] \setminus (X) \cup (Y_1, \ldots, Y_n)$. Consideremos ainda o domínio A definido por $A = L[X, Y_1, \ldots, Y_n]_{\mathfrak{S}}$ e os ideais M_1 definido por $(X)A$ e M_2 por $(Y_1, \ldots, Y_n)A$, que são ideais maximais de A.

É bastante imediato que para i tomando valores entre 1 e 2, os corpos $A_{/M_i}$ e L são isomórficos. De fato, se por exemplo tomarmos $i = 1$, teremos

$$A_{/M_1} = (k(t_1,\dots,t_m,\dots)[X,Y_1,\dots,Y_n])_{\mathcal{S}/(X)_{\mathcal{S}}} \cong (L[X,Y_1,\dots,Y_n]_{/(X)})_{\mathcal{S}'}$$

onde $\mathcal{S}'$ é o sistema multiplicativo dado por $\mathcal{S}'=\{s+(X);\ s\in \mathcal{S}\}$. Mas $L[X,Y_1,\dots,Y_n]_{/(X)}$ e $L[Y_1,\dots,Y_n]$ são domínios isomórficos, portanto se h é um isomorfismo entre tais domínios e $\mathcal{S}''$ é o sistema multiplicativo dado por $\mathcal{S}''=\{h(s');s'\in \mathcal{S}'\}$ então obtemos $(L[X,Y_1,\dots,Y_n]_{/(X)})_{\mathcal{S}'} \cong (L[Y_1,\dots,Y_n])_{\mathcal{S}''} \cong L(Y_1,\dots,Y_n) = k(t_1,\dots,t_m,\dots)(Y_1,\dots,Y_n) \cong L$. O desenvolvimento de $A_{/M_2} \cong L$ será análogo ao que acabamos de fazer.

Assim podemos escolher dois homomorfismos sobrejetivos do tipo $\epsilon_i : A \longrightarrow L$, cujo núcleo seja exatamente o ideal máximal M_i de A, onde i assume os valores 1 ou 2.

Consideremos finalmente o domínio R definido por $R=\{x\in A;\ \epsilon_1(x) = \epsilon_2(x)\}$ e o domínio $T = A_{M_2}$.

Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
cf(R) = K \arrow[d, dash] & & M_2A_{M_2} \arrow[d, dash] \\
R'_{M_2} = A_{M_2} = T \arrow[d, dash] & M_1 \arrow[dr, dash] & M_2 \arrow[d, dash] \\
L[X,Y_1,\dots,Y_n]_{\mathcal{S}} = R' = A \arrow[d, dash] \arrow[d, bend left, dash, "ram"] & & M = M_1 \cap M_2 \\
\{x\in A;\ \epsilon_1(x) = \epsilon_2(x)\} = R \arrow[uu, bend right=60, dash, "gd\ \ \tilde{n}\ ram"'] & &
\end{tikzcd}$$

Vamos primeiro mostrar alguns resultados referentes à extensão $R \hookrightarrow T$, resultados estes que terminam concluindo que $R \hookrightarrow T$ satisfaz a propriedade do going down. Em seguida veremos que o domínio A coincide com R', o fecho inteiro de R.

Notemos então, antes de tudo, que tanto T quanto R são ambos domínios Noetherianos. De fato, sendo L um corpo, é claro que $L[X_1, Y_1, \ldots, Y_n]$ é um domínio Noetheriano. Assim por [5, teorema 85] A é um domínio Noetheriano e consequentemente, pela mesma razão, T é Noetheriano. Mostraremos que A é um R-módulo de tipo finito, de onde concluiremos que R é também Noetheriano [3, teorema 2] ou [4, teorema A], e que $R \hookrightarrow A$ é uma extensão inteira.

Mostremos então que $A = R + Re_1 + Re_2$, onde e_1, e_2 são elementos de A. Consideremos então o homomorfismo $\epsilon : A \longrightarrow L \times L$, definido por $\epsilon(a) = (\epsilon_1(a), \epsilon_2(a))$, que é sobrejetor pelo Teorema do Resto Chinês. Sejam e_1, e_2 elementos de A tais que $\epsilon(e_1) = (\epsilon_1(e_1), \epsilon_2(e_1)) = (1,0)$ e $\epsilon(e_2) = (\epsilon_1(e_2), \epsilon_2(e_2)) = (0,1)$. É claro que $R+Re_1+Re_2 \subseteq A$. Seja então um elemento $a \in A$.

Para j=1,2, seja a_j um elemento que satisfaz $\epsilon(a_j) = (\epsilon_j(a), \epsilon_j(a))$. Pela maneira como R foi definido, claramente $a_j \in R$. Por outro lado, vale $\epsilon(a) = (\epsilon_1(a), \epsilon_2(a)) = (\epsilon_1(a), 0) + (0, \epsilon_2(a)) =$

$$= (\epsilon_1(a), \epsilon_1(a)).(1,0) + (\epsilon_2(a), \epsilon_2(a)).(o,1) =$$

$$= \epsilon(a_1)\,\epsilon(e_1) + \epsilon(a_2)\,\epsilon(e_2) = \epsilon\,(a_1e_1 + a_2e_2).$$

Segue daí que $\epsilon(a-(a_1e_1+a_2e_2)) = 0$, ou seja, que $a-(a_1e_1+a_2e_2)$ é um elemento do núcleo de ϵ que é exatamente $M_1 \cap M_2$ que por sua vez está em R. Assim existe um elemento r em R tal que $a=r+a_1e_1+a_2e_2$, donde $a \in R + Re_1+Re_2$, o que completa a prova da observação.

Outro fato a notar é que R e T possuem o mesmo corpo de frações. De fato, observemos que $cf(T) = cf(A)$, uma vez que T é a localização de A em M_2. Por outro lado, $M_1 \cap M_2$ é um ideal não nulo de A e de R simultaneamente, visto que $M_1 \cap M_2 \subseteq R$, pois se $x \in M_1 \cap M_2$ então $\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x) = 0$. Então $cf(A)=cf(R)$.

Chamamos a atenção agora de que ambos os domínios R e T são n-dimensionais. Com efeito, $\dim A = n$ uma vez que seu ideal primo de maior altura é $M_2 = (Y_1,\ldots,Y_n)A$. Como $R \hookrightarrow A$ é uma extensão inteira, temos que $\dim R = \dim A = n$ é para concluir que $\dim T = n$ basta lembrar que $T = A_{M_2}$ e $\text{alt } M_2 = n$.

Temos assim uma extensão $R \hookrightarrow T$ onde R, T são domínios Noetherianos, n dimensionais e $T \subset K$, corpo de frações de R. Vamos mostrar que tal extensão é não ramificada.

Observemos que $M_1 \cap R = M_2 \cap R = M_1 \cap M_2$, portanto R possui um único ideal máximo $M = M_1 \cap M_2$, pois $R \hookrightarrow A$ é extensão inteira e M_1 e M_2 são os únicos ideais máximos de A. Claramente $M_2A_{M_2}$ é o único ideal de T que está sobre M.

Se P é um ideal primo não máximo de R, vamos primeiramente mostrar que existe um único ideal primo P' de A sobre P. Se P' e P'' são dois ideais primos tais que $P' \cap R = P'' \cap R = P$, então $P' \cap R = P = P \cap M \subseteq P' \cap M$. Logo

$P' \cap R = P' \cap M$. Analogamente obtemos $P'' \cap R = P'' \cap M$, e portanto temos $P' \cap M = P'' \cap M$ de onde decorre $P' = P''$ [1, proposição 1.11]. Portanto P é não ramificado em A. Por outro lado, $R \hookrightarrow A$ é uma extensão inteira, portanto a propriedade do going up é válida, e como alt $M_1 = 1$, podemos garantir que $P' \subset M_2$. Decorre daí que $P'A_{M_2}$ é o único ideal primo de T sobre P. Logo a extensão $R \hookrightarrow T$ é não ramificada.

Vamos agora salientar um fato que será utilizado mais tarde, no último capítulo. Considerado o homomorfismo canônico $\Phi_{P'} : A \longrightarrow A_{/P'}$, onde P' é o único ideal primo de A situado sobre um ideal primo P não máximo de R, mostraremos que o corpo de frações de $\Phi_{P'}(R)$ é igual ao corpo de frações de $\Phi_{P'}(A) = A_{/P'}$.

Seja então um elemento a de A e escolhemos um elemento $x \in M_1 \cap M_2$ tal que $x \notin P'$. Tal escolha é possível porque $M_1 \cap M_2 \not\subset P'$. Então $xa \in R$, $\Phi_{P'}(x)$ é um elemento não nulo de $\Phi_{P'}(R)$ e $\Phi_{P'}(x)\,\Phi_{P'}(a) = \Phi_{P'}(xa) \in \Phi_{P'}(R)$. Assim, $\Phi_{P'}(a) = \Phi_{P'}(xa)/\Phi_{P'}(x) \in cf(\Phi_{P'}(R))$, ou seja, $cf(\Phi_{P'}(A)) \subseteq cf(\Phi_{P'}(R))$, e portanto a igualdade se verifica.

Mostraremos também que $\Phi_1(R) = A_{/M_1}$, onde Φ_1 é o homomorfismo canônico $\Phi_1 : A \longrightarrow A_{/M_1}$, de núcleo M_1. Seja então $a \in A$ e seja $r \in A$ tal que $\epsilon(r) = (\epsilon_1(a), \epsilon_1(a))$; segue daí que $r \in R$ e $\epsilon_1(r) = \epsilon_1(a)$, logo $r - a \in M_1$, donde $\Phi_1(r) = \Phi_1(a) = \dot{a} + M_1$. Analogamente encontramos $\Phi_2(R) = A_{/M_2}$.

Para mostrar que a extensão $R \hookrightarrow T$ satisfaz going up, vamos supor que existam dois ideais primos P, Q de R tais que $P \subset Q$ e um ideal primo P" de T sobre P. Mas $P'' \cap A$ é um ideal primo de A que está contido em M_2, então como a extensão $R \hookrightarrow A$ satisfaz going up, garantimos a existência de um ideal primo Q' de A, contido em M_2 uma vez que alt $M_1=1$, tal que $P'' \cap A \subset Q'$ e $Q' \cap A = Q$. Sejam $P' = P'' \cap A$ e $Q'' = Q'A_{M_2}$. É claro que Q" é um ideal primo de T tal que $Q'' \cap R = Q$ e $P'' \subset Q''$, visto que $P' \subset Q'$, o que conclui o fato de $R \hookrightarrow T$ satisfaz going up.

A validade do going down para a extensão $R \hookrightarrow T$ decorre facilmente do fato de $R \hookrightarrow T$ ser não ramificada e possuir going up.

Cabe ainda salientar que a extensão $A \hookrightarrow T$ não satisfaz lying over, uma vez que não existe ideal primo de T situado acima de M_1. Além disso podemos concluir que a extensão $R \hookrightarrow A$ não satisfaz going down. De fato, sendo alt $M = n$, alt $M_1 = 1$ e $M_1 \cap R = M$, podemos garantir que existe um ideal primo P de R tal que $(0) \subset P \subset M$ e não existe ideal primo de A sobre P contido em M_1.

Encontramos assim extensões $R \hookrightarrow S = A \hookrightarrow T$ de forma que $R \hookrightarrow T$ satisfaz a propriedade do going down, apesar da mesma propriedade não ser válida para a extensão $R \hookrightarrow S$, o que implica ser falsa a recíproca do lema 1.1 (i), e ser imprescindível a hipótese do lying over para $S \hookrightarrow T$ no lema 1.1 (ii).

Para concluirmos este exemplo, falta apenas observar que o fecho inteiro R' de R coincide com o domínio A. Isto ocorre por ser $R \hookrightarrow A$ uma extensão inteira, cf(R)=cf(A) e ser A um do[illegible] inteiramente fechado.

2. GOING DOWN E 1-GOING DOWN

O nosso objetivo agora é estender um pouco as hipóteses que temos sobre $R \hookrightarrow T$ e verificar se ainda esta extensão possui a propriedade do going down. Veremos que sendo R um domínio Noetheriano e T um domínio compreendido entre R e seu corpo de frações K, a extensão $R \hookrightarrow T$ possuirá going down desde que satisfaça a propriedade do 1-going down, que será logo a seguir definida. Ainda sob estas mesmas hipóteses, antes deste importante resultado, mostraremos que cada ideal primo de R de altura maior que um terá no máximo um ideal primo de T sobre si (teorema 2.1), que cada ideal primo do fecho inteiro D de R em T terá no máximo um ideal primo de T sobre si (teorema 2.2) e, finalmente, que T é uma intersecção de localizações primas de D (teorema 2.3).

Passemos então às definições que serão necessárias durante o que segue neste capítulo. Desde que estamos trabalhando com um domínio Noetheriano R e um domínio T situado entre R e K, vamos definir um ideal primo <u>pseudo não ramificado em T</u> como sendo um ideal primo P de R para o qual existe <u>no máximo um</u> ideal primo de T (possivelmente nenhum) que intercepta R em P. Diremos que a extensão $R \hookrightarrow T$ é <u>pseudo não ramificada</u> se cada primo de R for pseudo não ramificado em T. Note que quando a extensão $R \hookrightarrow T$ é inteira, satisfazendo portanto lying over, a definição de pseudo não ramificado coincide com a de não ramificado.

Uma extensão $R \hookrightarrow T$ é dita <u>algébrica</u> se cada elemento de T satisfaz um polinômio com coeficientes em R. E ainda diremos que $R \subsetneq T$ satisfaz a propriedade do <u>1-going down</u> se dados dois ideais primos P e Q de R, de modo que $P \subset Q$ e <u>alt $P = 1$</u>, e dado um ideal primo Q' de T tal que $Q' \cap R = Q$, existir um ideal primo P' de T que satisfaz $P' \subset Q'$ e $P' \cap R = P$.

Um resultado de significativa importância na elaboração das provas do que está acima proposto é dado pela proposição que afirma o seguinte.

<u>Proposição 2.1</u> [8, proposição 1] - Sejam R, S, T domínios onde R é Noetheriano, $R \subset S \subset T \subset K$ e $R \subsetneq T$ satisfaz 1-going down. Seja P um ideal primo de R de altura maior que um e suponhamos que exista um ideal primo de T que esteja sobre P. Se W for o conjunto de todos os ideais primos de S que estão sobre P então, excetuando-se apenas um, todos os ideais de W tem altura igual a um. Além disso os primos de W são dois a dois não comparáveis.

Alguns resultados auxiliares se fazem necessários na demonstração desta proposição. Passamos então a enunciar e provar tais resultados que aparecem logo a seguir na forma de quatro lemas.

<u>Lema 2.1</u> [8, lema 1] - Se R e T são domínios Noetherianos com T finitamente gerado e algébrico sobre R, então existe apenas um número finito de ideais primos de T de altura um que se contraem a ideais primos de R de altura maior que um.

<u>Prova</u>: Como T é finitamente gerado, basta fazermos a prova para o caso em que T é uma extensão simples de R. Suponhamos então que $T = R[u]$, onde u é algébrico sobre R. Consideremos uma indeterminada X sobre R e J o núcleo do homomorfismo sobrejetor Φ definido por

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & R[X] \longrightarrow R[u] \\ & f(X) \longmapsto f(u) . \end{aligned}$$

Temos então que J é um ideal primo de $R[X]$, pois $R[X]_{/J}$ é isomorfo ao domínio $R[u]$. Além disso, $J \cap R = (0)$, pois dado um polinômio $f(X)$ de $J \cap R$, então $f(X)$ será uma constante por pertencer a R e será nula por estar no núcleo da Φ. Concluímos ainda que a altura de J é igual a um [5, teorema 37]. O seguinte esquema ilustra o fato:

$$\begin{tikzcd}
J \subset R[X] \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dash] & & R[u] \cong R[X]_{/J} \arrow[dl, dash] \\
& (0) \subset R &
\end{tikzcd}$$

Queremos mostrar que existe apenas um número finito de ideais primos de $R[u]$ de altura um que se contraem a ideais primos de R de altura maior que um. Através da identificação de $T = R[u]$ com $R[X]_{/J}$, nós podemos dizer que estamos discutindo os ideais primos Q de $R[X]$ que contém J, de modo que alt $(Q_{/J}) = 1$ e alt $(Q \cap R) > 1$, e queremos mostrar que tais ideais primos Q existem apenas em um número finito.

Provaremos primeiro que existe apenas um número finito de tais ideais primos cuja altura é maior do que 2.

Seja então x um elemento de J, portanto J é um primo mínimo de (x), e sejam $J = P_1, P_2, \ldots, P_m$ todos os primos mínimos associados a (x). Se existir um número infinito de ideais primos Q de $R[X]$ tais que $Q \supset J$, $\text{alt}(Q_{/J}) = 1$ e $\text{alt}Q > 2$, como qualquer intersecção infinita desses primos é exatamente J, pois $\text{alt}(Q_{/J}) = 1$ e $R[X]$ é Noetheriano, podemos garantir que existe um tal ideal primo Q que não contém qualquer dos $P_2, \ldots, P_m$, caso contrário existiria i variando entre 2 e m tal que $P_i \subset P_1$. Para tal ideal primo Q nós temos $\text{alt}Q > 2$ e $\text{alt}(Q_{/(x)}) = \text{alt}(Q_{/J}) = 1$. Entretanto, segue daí que $\text{alt}Q \leq 2$ [5, teorema 154], o que contradiz o resultado logo antes obtido.

Para concluir a prova, basta agora mostrar que o conjunto W definido por

$$W = \{Q \in \text{Spec}(R[X]);\ J \subset Q,\ \text{alt}(Q_{/J}) = 1,\ \text{alt}(Q \cap R) > 1 \text{ e } \text{alt}Q = 2\}$$

é finito.

Suponhamos, por absurdo, que W seja infinito. Tomando um ideal Q de W, podemos afirmar que $(Q \cap R)R[X] = Q$, visto que $\text{alt}(Q \cap R) > 1$, $\text{alt}\ Q = 2$ e R é Noetheriano [5, teorema 149], consequentemente $\text{alt}(Q \cap R) = 2$.

Consideremos agora um polinômio não nulo $f(X)$ em J e o ideal I de R gerado pelos seus coeficientes. Então, dado um ideal Q de W, temos que $Q \cap R \supset I$, pois $f(X) \in J$, que por sua vez está contido em $Q = (Q \cap R)R[X]$. Como existe apenas um número finito de ideais primos de R mínimos sobre I e o conjunto $A = \{Q \cap R; Q \in W\}$ é infinito, pois $Q = (Q \cap R)R[X]$ para todo ideal Q de W, deve existir um ideal primo P de R mínimo sobre I de altura um, tal que P está contido em um número infinito de ideais primos Q de A. Como tais ideais primos Q tem altura dois e $\text{alt}\ P = 1$, temos que $\text{alt}(Q_{/P}) = 1$, portanto P é a intersecção destes primos Q, logo $\bigcap_{Q \in W}(Q \cap R) \subseteq P$, o que implica $\bigcap_{Q \in W}(Q \cap R)R[X] \subseteq PR[X]$, donde obtemos $J \subseteq \bigcap_{Q \in W} Q \subseteq PR[X]$, o que contradiz o fato de $\mathrm{alt}(PR[X]) = 1$. Δ

Nosso próximo lema necessita da seguinte definição.

Sejam Q um ideal primo de um anel R e U um subconjunto infinito do Spec(R). Diremos que o par (Q,U) é uma <u>shrub</u>, se dado um ideal Q' de U, distinto de Q, tivermos $Q' \supset Q$ e $\mathrm{alt}(Q'/Q) = 1$; além disto, a intersecção de qualquer subconjunto infinito de U deve ser exatamente igual a Q. Diremos que o ideal Q é a <u>base</u> da shrub e os elementos de U, distintos de Q, são <u>uppers</u>.

Um exemplo bastante simples de uma shrub é dado pelo par (PR[X], U), onde P é um ideal primo de um domínio R e U é o conjunto de todos os ideais primos de R[X], que estão acima de P, sendo X uma indeterminada sobre R. De fato, dado um ideal primo P de R, por [5, secção 1-5], existem infinitos ideais primos P de R[X], situados sobre P. Assim $P \supset PR[X]$, qualquer que seja P de U, $\mathrm{alt}(P/PR[X]) = 1$ por [5, teorema 39] e qualquer intersecção infinita de uppers será exatamente PR[X].

Observamos ainda que, sendo J o núcleo do homomorfismo canônico $\Phi : R[X] \longrightarrow R[u]$, se $J \subset PR[X]$ então (PR[X], U) é levada pelo homomorfismo Φ a uma shrub em R[u]. De fato, se $J \subset PR[X]$ então J está contido em cada elemento de U, isto é, em cada ideal primo de R[X] que está sobre P. E daí, pelo isomorfismo existente entre $R[X]/J$ e R[u], podemos concluir que o par (PR[u], W) é uma shrub em R[u], onde

$PR[u] = \Phi(PR[X])$ e $W = \Phi(U) = \{Q \in Spec(R[u]);\ Q \cap R = P\}$.

Lema 2.2 [8, lema 2] - Sejam R um domínio, u um elemento do corpo de frações K de R, P um ideal primo de R e W o conjunto dos ideais primos de R[u] que estão acima de P. Então:

1º) Uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) W é um conjunto finito (possivelmente vazio) e dois primos quaisquer de W são não comparáveis;

(ii) W constitui exatamente uma shrub, isto é, o par(PR[u],W) é uma shrub.

2º) Se R é inteiramente fechado em R[u], então, ou (ii) é verdadeiro ou W possui no máximo um ideal primo.

3º) Se R é Noetheriano e alt P = 1 então (ii) é falso.

Prova: Sejam X uma indeterminada sobre R e J o núcleo do homomorfismo canônico $\Phi : R[X] \longrightarrow R[u]$. Consideremos um ideal primo P de R e a shrub (PR[X], U), onde U é o conjunto dos ideais primos de R[X] que estão acima de P.

Se $J \subset PR[X]$ então, pela observação feita acima, o conjunto W dos ideais primos de R[u] que estão acima de P constitui uma shrub, portanto (ii) vale.

Se $J \not\subset PR[X]$, então J está contido no máximo em um número finito de ideais primos de U, uma vez que PR[X] é igual a qualquer intersecção infinita de elementos de U. Como os ideais primos de R[u] são aqueles que provêm, pela Φ, de ideais primos de R[X] que contém J, fica claro que W é finito.

Por outro lado, os uppers de U são dois a dois não comparáveis. De fato, se existissem dois ideais primos P e Q de U comparáveis, por exemplo $P \subset Q$, então $PR[X] \subset P \subset Q$ se ria uma cadeia de três ideais primos distintos de $R[X]$ com a mesma contração em R, o que contradiz [5, teorema 37]. Segue daí e pela identificação de $R[X]/_J$ com $R[u]$ que os primos de W são também dois a dois não comparáveis. Fica então provado o ítem (i) se $J \not\subset PR[X]$.

Para verificar que se R é inteiramente fechado em $R[u]$, então (ii) é verdadeiro ou W possui no máximo um elemento, observemos que basta mostrar para o caso R local e P seu ideal máximo. Com efeito, sendo R inteiramente fechado em $R[u]$, teremos $R_{\mathcal{G}}$ inteiramente fechado em $(R[u])_{\mathcal{G}} = R_{\mathcal{G}}[u]$ onde $\mathcal{G} = R \setminus P$. Além disto, $W_{\mathcal{G}} = \{ Q_{\mathcal{G}};\ Q \in W\}$ é o conjunto dos ideais primos de $R_{\mathcal{G}}[u]$ que se contraem a $P_{\mathcal{G}} = PR_{\mathcal{G}}$. Se $W_{\mathcal{G}}$ for uma shrub com base $P_{\mathcal{G}}$, então W será uma shrub com base $PR[u]$, pois

$$\mathrm{alt}(Q/_{PR[u]}) = \mathrm{alt}(Q_{\mathcal{G}}/_{(PR[u])_{\mathcal{G}}}) = \mathrm{alt}\ (Q_{\mathcal{G}}/_{P_{\mathcal{G}}R_{\mathcal{G}}[u]}) = 1,$$

qualquer que seja $Q \in W \setminus \{PR[u]\}$, e uma intersecção infinita de tais ideais Q será $PR[u]$, uma vez que estará contida em $P_{\mathcal{G}}R_{\mathcal{G}}[u] \cap R[u] = PR[u]$. Se $W_{\mathcal{G}}$ possuir no máximo um elemento, então W também possuirá, pois se $Q \in W$ então $Q \cap R = P$ e consequentemente $Q_{\mathcal{G}}$ é um ideal primo de $W_{\mathcal{G}}$. Consideraremos então R um domínio local e P seu ideal máximo.

Se $u \in R$ então $R = R[u]$ e portanto o conjunto W se reduz a $\{P\}$, possuindo assim no máximo um ideal primo.

Se $u \notin R$, mas $u^{-1} \in R$ então $u^{-1} \in P$. De fato, como P é o único ideal máximo de R, todo elemento fora de P é inversível em R, portanto $u^{-1} \in P$, caso contrário u pertenceria a R, que não é o caso. Decorre então que W é vazio, porque nenhum ideal primo de $R[u]$ pode se contrair a P em R. Com efeito, se existisse um ideal primo Q de $R[u]$ acima de P, então

$u^{-1} \in Q$, uma vez que $u^{-1} \in P$ e $Q \cap R = P$. Portanto a unidade seria um elemento de Q, o que não pode acontecer, pois Q é um ideal primo. Com isto mostramos que W não conteria primo algum.

Resta-nos apenas verificar o que aconteceria com o conjunto W se u e u^{-1} não fossem elementos de R. Neste caso, podemos concluir que $J \subset PR[X]$. De fato, se $u, u^{-1} \notin R$ e u satisfaz uma equação polinomial $p(X) = 0$, então seus coeficientes são todos não inversíveis em R [5, teorema 67] e portanto pertencentes a P. Como todo polinômio de J anula u, podemos dizer que todo polinômio de J está em $PR[X]$, o que mostra a afirmação.

Segue daí e pela observação feita após a definição de shrub que W constitui uma shrub.

Resta-nos provar que se R é Noetheriano e altP=1, então W não pode constituir uma shrub. De fato, se altP=1, sendo R Noetheriano, podemos afirmar que alt $PR[X] = 1$ [5, teorema 149]. Segue daí que o núcleo J do homomorfismo Φ não pode estar contido em $PR[X]$, estando contido portanto, apenas em um número finito de ideais primos de $R[X]$ que estão sobre P. Donde se conclui que o conjunto é finito, não podendo constituir uma shrub. Fica assim concluída a prova do lema 2.2. Δ

<u>Lema 2.3</u> [8, lema 3] - Sejam R, S, T domínios onde R é Noetheriano, $R \subset S \subset T \subset K$ e $R \hookrightarrow T$ satisfaz 1-going down. Seja P' um ideal primo de S e seja $P = P' \cap R$. Se existir um ideal primo de T que está acima de P', então uma condição necessária e suficiente para que alt $P > 1$ é que alt $P' > 1$.

<u>Prova</u>: Mostremos primeiro que a condição é necessária e suponhamos que tal ideal primo P tenha altura maior que um. Segue

daí que existe um ideal primo não nulo Q de altura um de modo que $(0) \subset Q \subset P$. Consideremos P'' o ideal primo de T que está acima de P'. É claro que $P'' \cap R = P$. Assim, podemos aplicar 1-going down para $R \hookrightarrow T$ e obter um ideal primo Q'' de T que está acima de Q e contido no ideal P'', ou seja, temos $Q'' \subset P''$ e $Q'' \cap R = Q$. Podemos portanto concluir que $(0) \subset Q'' \cap S \subset P'' \cap S = P'$ e obter uma cadeia de ideais primos $(0) \subset Q' \subset P'$ em S, onde $Q' = Q'' \cap S$, o que prova ser a altura de P' maior do que um.

Reciprocamente, se alt $P' > 1$ então existe um ideal primo Q' de S tal que alt$Q' = 1$ e $(0) \subset Q' \subset P'$ e portanto podemos escolher um elemento u em $P' \setminus Q'$. Consideremos o domínio $R[u]$ e nele encontramos dois ideais primos não nulos $Q' \cap R[u]$ e $P' \cap R[u]$ de modo que $Q' \cap R[u] \subset P' \cap R[u]$. Se alt $P = 1$ então ambos os ideais $Q' \cap R[u]$ e $P' \cap R[u]$ se contraem a P em R. De fato, $(P' \cap R[u]) \cap R) = P' \cap R = P$ e se alt $P = 1$ então $(Q' \cap R[u]) \cap R$ só pode ser (0) ou P. Mas se $(Q' \cap R[u]) \cap R$ fosse (0) então existiria uma cadeia de três ideais primos distintos em $R[X]$, $(0) \subset J \subset Q$, que se contraem a (0) em R, onde Q é o ideal primo de $R[X]$ que contém J e é levado em $Q' \cap R[u]$ pelo isomorfismo $R[X]/J \cong R[u]$. Mas isto contradiz [5, teorema 37].

Temos então dois ideais primos distintos de $R[u]$, comparáveis, que se contraem a P em R, então pelo lema 2.2 (ii), o conjunto dos ideais primos de $R[u]$ que se contraem a P é uma shrub. Entretanto, por ser R Noetheriano e alt $P = 1$, pelo mesmo lema 2.2 tal conjunto não pode constituir uma shrub. A contradição provém do fato de havermos suposto alt $P = 1$, o que conclui a condição suficiente do lema. Δ

Lema 2.4 - Sejam R, T domínios, onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \subsetneq T$ satisfaz 1-going down. Seja P um ideal primo de R tal que alt P >1 e suponhamos que exista um ideal primo P'' de T acima de P. Se u for um elemento de T e W for o conjunto dos ideais primos de R[u] que estão sobre P, então com excessão de $P'' \cap R[u]$, todos os primos de W tem altura igual a um. Além disso, os ideais primos de W são dois a dois não comparáveis.

Prova: Sejam então P e P'' como no enunciado e consideremos o ideal P' de R[u] dado por $P' = P'' \cap R[u]$. É claro que P' está em W, pois $P' \cap R = (P'' \cap R[u]) \cap R = P'' \cap R = P$, e que pelo lema 2.3, alt P' >1, uma vez que alt P >1. Segue então que tal ideal P' será a excessão estabelecida no enunciado do lema, devendo então ser provado que todos os demais ideais de W tem altura um.

Consideremos um ideal primo qualquer P_o' de W, distinto de P', e mostremos que sua altura é um. Para isso, vamos supor que $P_o' \not\subset P'$, afirmação 1, que será provada mais tarde.

Sejam I_u o condutor de u em R, $J_1, J_2, \ldots, J_n$ todos os ideais primos de altura um do domínio Noetheriano R[u] que contém $I_u R[u]$, e $J_{n+1}, J_{n+2}, \ldots, J_m$ todos os ideais primos de altura um de R[u] que se contraem a ideais primos de R de altura maior que um. Pelo lema 2.1 fica claro que estes últimos m-n ideais existem em um número finito.

Se $P_o' \not\subset P'$, nós afirmamos que $P_o' \subset J_1 \cup \ldots \cup J_m \cup P'$ (afirmação 2), e com isto concluímos que alt $P_o' = 1$. Com efeito, desde que $P_o' \not\subset P'$, podemos concluir que P_o' está contido em algum dos ideais primos $J_1, \ldots, J_m$, de altura um. Assim, $P_o' \subset J_i$ para algum i variando entre 1 e m e consequentemente alt $P'_o \leq$ alt $J_i = 1$, o que implica ser a altura de P'_o menor ou igual a um. Por outro lado, P'_o se contrai a P em R e P é não nulo, logo P'_o não pode ser o ideal nulo, tendo portanto altura maior ou igual a um, o que completa a prova.

Vamos então mostrar a afirmação 2, supondo ainda que a afirmação 1 seja válida. Suponhamos para tal que $P'_o \not\subset J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_m \cup P'$, o que nos permite escolher um elemento w de P'_o que está fora desta união. Usando o teorema do ideal principal de Krull [5, teorema 142], podemos então afirmar que existe um ideal primo P'_1 de $R[u]$ de altura um tal que $w \in P'_1 \subset P'_o$. Mas então $w \in P'_1 \setminus (J_{n+1} \cup J_{n+2} \cup \ldots \cup J_m)$, o que implica ser P'_1 diferente de J_i, qualquer que seja i variando entre n+1 e m. Se $P_1 = P'_1 \cap R$ então alt $P_1 = 1$. Isto ocorre porque $J_{n+1}, \ldots, J_m$ são todos os ideais primos de $R[u]$ de altura um que se contraem a ideais primos de altura maior que um, e porque $P'_1 \neq J_i$, qualquer que seja i variando entre n+1 e m. É claro que $P_1 = P'_1 \cap R \subset P'_o \cap R = P = P' \cap R$, portanto temos dois ideais primos $P_1 \subset P$, com alt $P_1 = 1$ e P" ideal primo de T que está acima de P. Como a extensão $R \subsetneq T$ possui 1-going down, existe um ideal primo P''_1 de T tal que $P''_1 \subset P''$ e $P''_1 \cap R = P_1$. Temos assim P'_1 e $P''_1 \cap R[u]$ dois ideais primos de $R[u]$ ambos situados sobre P_1. Por outro lado, temos que também P'_1 é distinto de J_i, qualquer que seja i variando entre 1 e n, pois $w \in P'_1$ e $w \notin J_i$. Segue daí que $I_u R[u] \not\subset P'_1$, pois $J_1, J_2, \ldots, J_n$ são os únicos ideais primos de $R[u]$ de altura 1 que contém $I_u R[u]$, donde obtemos que $I_u \not\subset P_1$. Segue então pelo lema 1.2 que P'_1 é o único ideal primo de $R[u]$ que está acima de P_1 e portanto $P'_1 = P''_1 \cap R[u]$. Assim, $w \in P'_1 = P''_1 \cap R[u]$ que está contido em P''_1, que por sua vez está em P'', donde se conclui que $w \in P'$ por estar em $P'' \cap R[u]$ que é exatamente P'. Mas isto contradiz o fato de havermos escolhido w em P'_o e fora da união $J_1 \cup \ldots \cup J_m \cup P'$, contradição esta que conclui a afirmação 2.

Passemos agora à prova da afirmação 1, para que o lema fique completamente concluído.

Suponhamos então que $P'_o \subset P'$. Como temos dois ideais primos de $R[u]$, comparáveis, que estão acima de P, pelo lema 2.2 podemos concluir que $P'_o = PR[u]$ e que o conjunto W, de ideais primos de $R[u]$ que se contraem a P, forma uma shrub de base P'_o. Seja P'_2 um upper qualquer desta shrub, $P'_2 \neq P'$. É claro que $P'_2 \not\subset P'$, caso contrário teríamos $P'_o \subset P'_2 \subset P'$ e portanto $\mathrm{alt}(P'/P'_o) \neq 1$, o que contraria a definição de shrub. Mas se $P'_2 \not\subset P'$ então, pelo mesmo raciocínio feito antes, podemos afirmar que $\mathrm{alt}\, P'_2 = 1$, basta tomar $P'_o = P'_2$. E isto contradiz o fato de ser P'_2 um upper da shrub, ou seja, de valer $(0) \subset P'_o \subset P'_2$. Logo $P'_o \not\subset P'$ e a afirmação 1 fica provada.

Resta-nos apenas salientar que como qualquer ideal de W, distinto de P', tem altura um e não está contido em P', então a não comparabilidade dos elementos de W é evidente. Δ

Antes de passarmos à prova da proposição 2.1, queremos chamar a atenção da importância que este último lema exerce na demonstração da proposição. Veremos logo a seguir que de fato, a prova da proposição se baseia enormemente na do lema e que se o domínio S for igual ao domínio $R[u]$, então os resultados são os mesmos.

Prova da proposição 2.1: Sejam P um ideal primo de R cuja altura é maior que um e P" um ideal primo de T tal que $P'' \cap R = P$. Consideremos o ideal P' de S dado por $P' = P'' \cap S$, que é obviamente um elemento do conjunto W, e cuja altura é maior que um, pelo lema 2.3. Mostraremos que tal ideal P' será o elemento excepcional de W.

Seja P'_o um ideal primo qualquer de W, distinto de P'. Vamos mostrar que alt $P'_o = 1$ e $P'_o \not\subset P'$. A não comparabilidade dos demais primos de W decorre imediatamente, uma vez que todos ideais de W terão altura um, excetuando-se P'.

Como $P'_o \neq P'$ podemos escolher um elemento u em $P'_o \setminus P'$ ou em $P' \setminus P'_o$. Consideremos então o domínio $R[u]$, que está contido em S, e os ideais primos $P'_o \cap R[u]$ e $P' \cap R[u]$, que são distintos pela nossa escolha de u. Assim podemos utilizar o lema 2.4 para concluir que os ideais $P'_o \cap R[u]$ e $P' \cap R[u]$ são não comparáveis, o que implica serem P'_o e P' também não comparáveis. Assim $P'_o \not\subset P'$.

Resta-nos mostrar que alt $P'_o = 1$. Suponhamos para isto que alt $P'_o > 1$. Podemos então tomar um ideal primo P'_1 de S com $(0) \subset P'_1 \subset P'_o$. Escolhemos agora um elemento v em $P'_o \setminus (P'_1 \cup P')$

Tal elemento v existe, pois se $P'_o \setminus (P'_1 \cup P')$ fosse vazio então teríamos $P'_o \subset P'_1 \cup P'$ o que implicaria $P'_o \subset P'_1$ ou $P'_o \subset P'$, condições estas que não ocorrem.

Consideremos então o domínio $R[v]$ e os ideais primos $P'_o \cap R[v]$ e $P' \cap R[v]$ que são distintos. Pelo lema 2.4, concluímos que tais ideais são não comparáveis e que $alt(P'_o \cap R[v]) = 1$.

Por outro lado, pela escolha que fizemos de v em $P'_o \setminus (P'_1 \cup P')$, fica assegurado que $(0) \subset P'_1 \cap R[v] \subset P'_o \cap R[v]$. Com efeito, v está em P'_o e em $R[v]$, logo $v \in P'_o \cap R[v]$. Mas v não está em P'_1, portanto $v \notin P'_1 \cap R[v]$, o que conclui a inclusão própria. Para mostrar que $P'_1 \cap R[v]$ não é nulo, basta verificar que $P'_1 \cap R$ não o é. De fato, como $P'_1 \neq (0)$, dado um elemento não nulo y de P'_1, $y = a/b$ onde a e b são elementos não nulos de R. Segue daí que $a = yb$ é um elemento não nulo de P'_1. Consequentemente a é um elemento não nulo de $P'_1 \cap R$, que é portanto um ideal não nulo. E então se $P'_1 \cap R[v] = (0)$ teríamos $P'_1 \cap R = P'_1 \cap R[v] \cap R = (0)$, o que não acontece. Mas então termos $(0) \subset P'_1 \cap R[v] \subset P'_o \cap R[v]$ e $alt(P'_o \cap R[v]) = 1$ é um absurdo. Assim concluímos que $alt\ P'_o = 1$, o que completa a prova desta proposição. Δ

O lema 2.3 e a proposição 2.1 estabelecem de maneira imediata um dos primeiros resultados mencionados no início deste capítulo, que é dado pelo seguinte teorema.

<u>Teorema 2.1</u> [8, teorema 1] - Sejam R, T domínios onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \hookrightarrow T$ uma extensão que satisfaz 1-going down. Então cada ideal primo de R de altura maior que um é pseudo não ramificado em T.

<u>Prova</u>: Seja P um ideal primo de R de altura maior que um. Suponhamos que exista um ideal primo P' de T tal que $P' \cap R = P$. Então pelo lema 2.3, fazendo S = T podemos concluir que alt P' >1. Mas pela proposição 2.1 tal ideal P' é único, pois os demais ideais primos de T que estão acima de P tem altura igual a um. Logo, se este ideal P' existir ele é único, o que estabelece ser P um ideal pseudo não ramificado em T. Δ

Vejamos agora os resultados que antecedem o nosso objetivo principal, qual seja, mostrar a equivalência entre 1-going down e going down, dado no teorema 2.4.

<u>Teorema 2.2</u> [8, lema 4] - Sejam R, T domínios, onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \hookrightarrow T$ uma extensão que satisfaz 1-going down. Seja D o fecho inteiro de R em T. Então D é pseudo não ramificado em T.

<u>Prova</u>: Seja P' um ideal primo de D e suponhamos que P_1'' e P_2'' sejam ideais primos distintos de T que estão sobre P'. Se altP'>1, então pelo lema 2.3, altP>1 onde $P = P' \cap R$. Porém, sendo P_1'' e P_2'' ideais primos de T, distintos e situados sobre P', estão situados também sobre P. Resulta daí que tal ideal primo P é ra-

mificado em T, o que contradiz o teorema 2.2. Podemos então supor alt P' = 1, o que implica alt P = 1, uma vez que, novamente pelo lema 2.3, alt $P \leq 1$ e como $R \subsetneq D$ é uma extensão inteira, alt $P \neq 0$.

Escolhemos agora um elemento u que esteja ou em $P_1'' \setminus P_2''$ ou em $P_2'' \setminus P_1''$ e consideremos o domínio $D[u]$, que possuirá dois ideais primos distintos $P_1'' \cap D[u]$ e $P_2'' \cap D[u]$, ambos situados sobre P', isto porque para i assumindo valores 1 ou 2, temos $(P_i'' \cap D[u]) \cap D = P_i'' \cap D = P'$. Assim, pelo lema 2.2, como D é inteiramente fechado em $D[u]$, deve existir uma shrub W de ideais primos de $D[u]$ que estão sobre P', que por sua vez se contrai a um conjunto W^* de ideais primos de $R[u]$ que estão sobre P. Como $R[u] \subsetneq D[u]$ é uma extensão inteira e como $cf(R[u]) = cf(D[u])$, temos que W^* é um conjunto infinito [10, teorema 33.10]. Por outro lado, R é Noetheriano e altP=1, assim pelo lema 2.2, concluímos que só existe um número finito de ideais primos de $R[u]$ que se contraem a P, o que contradiz o fato de W^* ser infinito. Δ

<u>Lema 2.5</u> [8, lema 5] - Sejam R, T domínios, onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \subsetneq T$ uma extensão que satisfaz 1-going down. Seja ainda D o fecho inteiro de R em T. Se Q' é um ideal primo de T e Q é o ideal primo $Q' \cap D$ então $D_Q = T_{Q'}$.

<u>Prova</u>: Vamos mostrar primeiro que vale a igualdade entre D_Q e T_Q, onde T_Q é o domínio $T_{D \setminus Q}$, ou seja, $\{a/s;\ a \in T \text{ e } s \in D \setminus Q\}$. É claro que $D_Q \subseteq T_Q$, por termos a extensão $D \subsetneq T$. Escolhemos en

tão um elemento u do domínio T_Q e vamos supor que ele não esteja em D_Q, i.e., $u \notin D_Q$. Este primeiro passo estará concluído se chegarmos a uma contradição, considerados todos os possíveis casos. Analisemos portanto o que pode ocorrer.

Se, por um lado, tivermos u^{-1} em D_Q, então u^{-1} estará em QD_Q, caso contrário u^{-1} seria inversível em D_Q o que implicaria ser u elemento de D_Q, negado por suposição. Então, $u^{-1} \in QD_Q \subseteq Q'T_Q$, portanto $1 = uu^{-1} \in Q'T_Q$, o que é um absurdo, uma vez que $Q'T_Q$ é um ideal próprio de T_Q, visto que $Q' \cap (D \setminus Q) = \emptyset$.

Por outro lado, suponhamos que $u^{-1} \notin D_Q$. Temos então $u, u^{-1} \notin D_Q$. Além disto, D_Q é inteiramente fechado em $D_Q[u]$ e (D_Q, QD_Q) é um domínio quase local. Segue daí que $J \subset (QD_Q)[X]$, onde J é o núcleo do homomorfismo canônico $\Phi: D_Q[X] \longrightarrow D_Q[u]$ [5, teorema 67]. Consideremos então a shrub em R[X] dada por $\{\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}(R[X]) ; \mathcal{Q} \cap R = Q \cap R\}$. Como $J \subset (QD_Q)[X]$, segue que $J \cap R[X] \subset (QD_Q)[X] \cap R[X] = (Q \cap R)[X]$, logo teremos uma shrub em R[u], com base $(Q\cap R)[X]/J \cap R[X]$, formada por todos os ideais primos de R[u] que se contraem a $Q \cap R$, pela observação que segue a definição de shrub.

Agora, se alt $(Q \cap R) = 1$ então a existência desta shrub em R[u] contradiz a última parte do lema 2.2. E se, por outro lado, $\mathrm{alt}(Q \cap R) > 1$, então é o lema 2.4 que fica contradito, pois, com excessão de $(Q\cap R)[X]/J\cap R[X]$, todos os ideais primos de R[u] que se contraem a $Q \cap R$ possuem altura maior que um.

Concluímos assim a primeira parte desta prova que resulta em $D_Q = T_Q$.

Mostremos agora, para finalizar, que $T_Q = T_{Q'}$. Lembramos primeiro que, pelo teorema 2.3, Q' é o único ideal primo de T sobre Q, portanto o saturamento do sistema multiplicativo $D \setminus Q$ em T é $T \setminus Q'$. Assim podemos concluir que $T_Q = T_{Q'}$, o que completa a prova do lema. Δ

<u>Teorema 2.3</u> [8, corolário] - Sejam R, T domínios onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \hookrightarrow T$ uma extensão que satisfaz 1-going down. Seja D o fecho inteiro de R em T. Então T é uma intersecção de localizações primas de D.

<u>Prova</u>: Segue do lema 2.5 que dado M um ideal maximal qualquer de T, $T_M = D_{M \cap D}$. Assim, uma vez que $T = \bigcap T_M$ sobre todos os ideais maximais M de T, temos $T = \bigcap D_{M \cap D}$, isto é, T é uma intersecção de localizações primas de D. Δ

<u>Teorema 2.4</u> [8, teorema 2] - Sejam R, T domínios onde R é Noetheriano, $R \subset T \subset K$ e $R \hookrightarrow T$ uma extensão que satisfaz 1-going down. Então $R \hookrightarrow T$ satisfaz a propriedade do going down.

<u>Prova</u>: Seja D o fecho inteiro de R em T e consideremos Q_2'' um ideal primo de T e P_2 um ideal primo de R tais que $Q_2'' \cap R = P_2$. Seja Q_2' a contração de Q_2'' em D. Se P_1 é um ideal primo não nulo de R, tal que $P_1 \subset P_2$, nosso objetivo é mostrar que existe um ideal primo Q_1'' de T tal que $Q_1'' \subset Q_2''$ e $Q_1'' \cap R = P_1$. Vamos então supor que alt $P_2 > 1$.

Uma vez que, pelo lema 2.5, os domínios $D_{Q'_2}$ e $T_{Q''_2}$ coincidem, será suficiente encontrar um ideal primo Q'_1 de D tal que $Q'_1 \subset Q'_2$ e $Q'_1 \cap R = P_1$, e então considerar o ideal Q''_1 definido por $Q''_1 = Q'_1 D_{Q'_2} \cap T$.

Como a extensão $R \subsetneq D$ é inteira, dados tais ideais P_1 e P_2 de R, podemos garantir que existem dois ideais primos P'_1 e P'_2 de D tais que $P'_1 \subset P'_2$, $P'_1 \cap R = P_1$ e $P'_2 \cap R = P_2$, isto porque o teorema do going up vale para $R \subsetneq D$ [5, teorema 44]. Pelo lema 2.3, alt $P'_2 > 1$ e alt $Q'_2 > 1$. Segue então pela proposição 2.1 que tais ideais são iguais, ou seja, $P'_2 = Q'_2$. Chamando $Q'_1 = P'_1$, obtemos o ideal Q'_1 de D tal que $Q'_1 \subset Q'_2$.

Para concluir a prova deste teorema, vamos considerar primeiro o ideal $Q'_1 D_{Q'_2}$ em $D_{Q'_2}$, ideal este que coincide com $Q'_1 T_{Q'_2}$ e por último considerar sua contração Q''_1 em T, ou seja, $Q''_1 = Q'_1 D_{Q'_2} \cap T$. Como $Q'_1 \subset Q'_2$ temos $Q'_1 D_{Q'_2} \subset Q'_2 D_{Q'_2}$. Mas $Q'_2 D_{Q'_2} = Q'' T_{Q''_2}$ e $Q''_2 T_{Q''_2} \cap T = Q''_2$, portanto $Q''_1 = Q'_1 D_{Q'_2} \cap T \subset Q'_2 D_{Q'_2} \cap T = Q''_2$. Assim obtivemos Q''_1, que claramente é um ideal primo de T, tal que $Q''_1 \subset Q''_2$ e $Q''_1 \cap R = P_1$, pois $Q''_1 \cap R = (Q'_1 D_{Q'_2} \cap T) \cap R = (Q'_1 D_{Q'_2} \cap D) \cap R = Q'_1 \cap R = P_1$, o que completa a prova deste importante resultado. Δ

Vemos por este teorema 2.4 que, sob as hipóteses feitas para R e T, obtivemos uma condição necessária e suficiente para que a extensão $R \subsetneq T$ satisfaça going down, qual seja satisfazer apenas 1-going down.

3. GOING DOWN EM ANÉIS DE POLINÔNIOS

Vimos, nos dois capítulos precedentes, algumas condições exigidas para que a extensão $R \subsetneq T$ satisfezesse a propriedade do going down.

No capítulo que ora iniciamos, nosso propósito é estudar alguns aspectos da validade do going down para extensões entre anéis de polinômios.

O professor I. Kaplansky provou que se $R[X] \subsetneq T[X]$ é uma extensão que satisfaz going down, onde R é um domínio arbitrário, X uma indeterminada sobre R e T um domínio entre R e seu fecho inteiro R', então $R \subsetneq T$ é uma extensão não ramificada, resultado este que aparece em [6, teorema A], e que faremos no lema 3.4.

Nosso resultado central agora é mostrar que a extensão $R[X] \subsetneq T[X]$ satisfaz going down se e somente se a mesma extensão é não ramificada (teorema 3.1).

Passemos então a alguns resultados preliminares que servirão de subsídeos na prova do teorema 3.1.

Lema 3.1 [7, lema 3] - Seja T um domínio e X uma indeterminada sobre T. Suponhamos que P seja um ideal primo de $T[X]$ e que $f(X)$ seja um polinômio mônico de $T[X]$ pertencente a P. Então existe um ideal primo J de $T[X]$ que satisfaz $f(X) \in J \subset P$ e $J \cap T = (0)$.

Prova: Seja $f(X)$ o polinômio mônico de $T[X]$ tal que $f(X) \in P$ como no enunciado. Sabemos que no corpo de fatoração de $f(X)$ que contém o corpo de frações K de T, $f(X) = (X-u_1)^{e_1}(X-u_2)^{e_2}\ldots(X-u_n)^{e_n}$.

É claro que, para i variando entre 1 e n, cada elemento u_i anula o polinômio $f(X)$, sendo portanto inteiro sobre T.

Seja $S = T[u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Segue daí que S é um domínio inteiro sobre T, o que implica ser $S[X]$ inteiro sobre $T[X]$. Considerando tal extensão inteira $T[X] \subsetneq S[X]$ e sabendo que P é um ideal primo de $T[X]$, por lying over podemos garantir a existência de um ideal primo P' de $S[X]$ que está sobre P em $T[X]$, isto é, $P' \cap T[X] = P$. Sendo P' um ideal primo de $S[X]$ e valendo $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-u_i)^{e_i} \in P \subset P'$, podemos concluir que, para algum i variando entre 1 e n, $X-u_i$ está em P'. Portanto, $f(X) \in (X-u_i)S[X] \subset P'$ e $(X-u_i)S[X]$ é um ideal primo de $S[X]$.

Definimos então o ideal J por $J = (X-u_i)S[X] \cap T[X]$, que satisfaz plenamente as condições requeridas no lema. De fato, sendo $P' = P \cap T[X]$ e estando J contido em P', podemos afirmar que $J \subset P$, e sendo J a contração em $T[X]$ do ideal $(X-u_i)S[X]$, podemos garantir que J é um ideal primo e que contém $f(X)$ como seu elemento. Para mostrar que $J \cap T = (0)$, basta lembrar que os elementos do ideal $(X-u_i)S[X]$ que estão também em S são as constantes de $(X-u_i)S[X]$, ou seja, os elementos nulos. Assim temos $J \cap T = ((X-u_i)S[X] \cap T[X]) \cap T = (X-u_i)S[X] \cap S \cap T = (0) \cap T = (0)$, ou seja, J está sobre (0), considerada a extensão $T \subsetneq T[X]$. Δ

Lema 3.2 [7, lema 4] - Sejam R um domínio e T um domínio entre R e seu corpo de frações K. Se X é uma indeterminada sobre R e e J é um ideal primo não nulo de $R[X]$ tal que $J \cap R = (0)$, então J é não ramificado em $T[X]$.

Prova: Por [5, teorema 36], dado o ideal primo não nulo J de $R[X]$ tal que $J \cap R = (0)$, existe apenas um ideal primo de $K[X]$ que se contrai a J, dado por $(p(X))K[X]$, onde $p(X)$ é um polinômio mônico irredutível de $K[X]$. Segue daí que o ideal primo J é da forma $J = \{ f(X) \in R[X] ;\ p(X)$ divide $f(X)$ em $K[X] \}$. Assim sendo, como o mesmo argumento é válido para os ideais primos de $T[X]$, o único ideal primo de $T[X]$ que se contrai a J em $R[X]$ é o ideal J' definido por $J' = \{g(X) \in T[X] ;\ p(X)$ divide $g(x)$ em $K[X]\}$, o que conclui ser J um ideal não ramificado em $T[X]$. Δ

Lema 3.3 - Sejam $R \subset T \subset R'$ domínios onde R' é o fecho inteiro de R. Se P é um ideal primo de R não ramificado em T, então o ideal expansão $PR[X]$ é também não ramificado em $T[X]$.

Prova: Seja Q o único ideal primo de T tal que $Q \cap R = P$, e seja $\mathcal{Q}$ um, ideal primo qualquer de $T[X]$ tal que $\mathcal{Q} \cap R[X] = PR[X]$. Queremos mostrar que tal ideal $\mathcal{Q}$ é único, mais precisamente que $\mathcal{Q} = QT[X]$.

Mas se $\mathcal{Q} \cap R[X] = PR[X]$, então $\mathcal{Q} \cap R = PR[X] \cap R = P$. Assim, $\mathcal{Q} \cap T$ é um ideal primo de T que está sobre P e como P é não ramificado em T, podemos afirmar que $\mathcal{Q} \cap T = Q$, portanto $QT[X] \subseteq \mathcal{Q}$.

Além disso, temos $QT[X] \cap R[X] = PR[X]$, então, desde que $\mathcal{Q}$ e $QT[X]$ estão ambos sobre $PR[X]$, $QT[X] \subseteq \mathcal{Q}$ e $R[X] \hookrightarrow T[X]$

é extensão inteira, por [5, teorema 44] podemos concluir que $QT[X] = Q$, o que prova ser $PR[X]$ não ramificado em $T[X]$. Δ

Lema 3.4 - Sejam R um domínio, R' seu fecho inteiro, T um domínio entre R e R' e X uma indeterminada sobre R. Se a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ satisfaz going down, então a extensão $R \hookrightarrow T$ é não ramificada.

Prova: Seja P um ideal primo de R e suponhamos que existam dois ideais primos distintos P_1 e P_2 de T tais que $P_1 \cap R = P_2 \cap R = P$. Podemos supor que $P_1 \not\subset P_2$ e escolher um elemento p_1 em $P_1 \setminus P_2$. Observemos que para i variando entre 1 e 2 vale $(P_i,X)T[X] \cap R[X] = (P,X)R[X]$. Além disso, $(X,p_1)T[X] \subset (P_1,X)T[X]$, pois $p_1 \in P_1$. Assim temos o ideal primo I de $R[X]$ definido por $I = (X-p_1)T[X] \cap R[X]$, de modo que $I \subset (P,X)R[X]$. Como, por hipótese, a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ satisfaz doing down, e como $(P_2,X)T[X] \cap R[X] = (P,X)R[X]$, podemos afirmar que existe um ideal J de $T[X]$ tal que $J \subset (P_2,X)T[X]$ e $J \cap R[X] = I$.

O seguinte diagrama ilustra a situação:

$$\begin{tikzcd}
& T[X] \arrow[d, dash, bend left, "gd"] & J \arrow[d, dash] & \subset & (P_2,X)[X] \arrow[d, dash] \\
T \arrow[ur, hook] \arrow[dd, dash, bend left, "lo"] & R[X] & I=(X-p_1)T[X]\cap R[X] & \subset & (P,X)R[X] \\
& & & & \\
R \arrow[uur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

Tal ideal J é igual a $(X-p_1)T[X]$, uma vez que, pelo lema 3.2, I é não ramificado em $T[X]$, pois $I \cap R = (X-p_1)T[X] \cap R = (0)$. Temos então $(X-p_1)T[X] \subset (P_2,X)T[X]$, o que acarreta $p_1 \in P_2$, fato que contradiz a escolha de p_1 em $P_1 \setminus P_2$. Tal contradição provém de havermos suposto P ramificado em T, ficando assim concluída a prova do lema. Δ

Visto estes quatro lemas auxiliares, passemos ao principal resultado deste capítulo, que é dado no teorema que segue.

Teorema 3.1 [7, teorema 3] - Sejam R um domínio arbitrário e T um domínio entre R e seu fecho inteiro R'. Então, se X é uma indeterminada sobre R, a extensão $R[X] \subsetneq T[X]$ satisfaz a propriedade do going down se e somente se ela for não ramificada.

Prova: Vejamos primeiro a condição suficiente. Sabendo que a extensão $R \subsetneq T$ é inteira, temos que $R[X] \subsetneq T[X]$ também o é. Consequentemente esta última extensão satisfaz lying over e going up. Mostremos que ela também satisfaz going down. De fato, sejam P e Q dois ideais primos de $R[X]$ tais que $P \subset Q$ e seja Q' um ideal primo de $T[X]$ situado sobre Q. Uma vez que $R[X] \subsetneq T[X]$ satisfaz lying over, garantimos a existência de um ideal primo P' de $T[X]$ tal que $P' \cap R[X] = P$. Por outro lado, como $R[X] \subsetneq T[X]$ satisfaz going up, dados tais ideais P e Q de $R[X]$ e P' de $T[X]$, existe um ideal Q'' de $T[X]$ tal que $Q'' \supset P'$ e $Q'' \cap R[X] = Q$. Temos então dois ideais Q' e Q'', ambos primos de $T[X]$, situados sobre o mesmo ideal $\mathcal{Q}$. Segue do fato de, por hipótese, $R[X] \hookrightarrow T[X]$ ser não ramificada, que $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}''$. Isto conclui a condição suficiente do teorema.

Vamos agora verificar a condição necessária, assumindo que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ possui a propriedade do going down e mostrando que ela é não ramificada.

Consideremos então um ideal primo $\mathcal{P}$ de $R[X]$ e sua contração P em R, isto é, o ideal primo dado por $P = \mathcal{P} \cap R$. Podemos afirmar que tal ideal P é não ramificado em T, pelo lema 3.4. Seja então Q o único ideal primo de T que está sobre P. Observemos que $T_{R \setminus P} = T_Q$, visto que $T \setminus Q$ é o saturamento em T de $R \setminus P$. Vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é não ramificado em $T[X]$.

Se $\mathcal{P} = PR[X]$ então pelo lema 3.3 fica estabelecido que $\mathcal{P}$ é não ramificado em $T[X]$. Podemos portanto supor que $\mathcal{P}$ contém $PR[X]$ propriamente. Além disso, vamos supor que, por absurdo, $\mathcal{P}$ seja ramificado em $T[X]$, isto é, que existam dois ideais primos distintos $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ de $T[X]$ tais que $\mathcal{Q} \cap R[X] = \mathcal{Q}' \cap R[X] = \mathcal{P}$.

Evidentemente $\mathcal{Q} \cap R = \mathcal{P} \cap R = P$, donde $\mathcal{Q} \cap T = Q$. Por outro lado, $QT[X] \cap R[X] = PR[X]$ e como $PR[X]$ e $\mathcal{P}$ são distintos podemos concluir que $\mathcal{Q}$ e $QT[X]$ são também distintos. Segue daí que $QT[X] \subset \mathcal{Q}$. Da mesma forma resulta que $\mathcal{Q}' \cap T = Q$ e $QT[X] \subset \mathcal{Q}'$.

Observamos que considerados os ideais primos P, Q e $\mathcal{P}$ dados nesta prova e a extensão $R_P[X] \hookrightarrow T_Q[X]$, se o ideal $\mathcal{P}R_P[X]$ for não ramificado em $T_Q[X]$ então o ideal $\mathcal{P}$ será também não ramificado em $R[X]$. Isto de fato ocorre, uma vez que se existirem dois ideais primos distintos $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ de $T[X]$ tais que $\mathcal{Q}_1 \cap T = \mathcal{Q}_2 \cap T = Q$ e $\mathcal{Q}_1 \cap R[X] = \mathcal{Q}_2 \cap R[X] = \mathcal{P}$ então os ideais $\mathcal{Q}_1 T_Q[X]$ e $\mathcal{Q}_2 T_Q[X]$ serão também distintos e situados sobre $\mathcal{P}R_P[X]$, pois para i assumindo os valores 1 ou 2, $Q_i T_Q[X] \cap R_P[X] =$ $Q_i T_{R\setminus P}[X] \cap R_P[X] = (Q_i T[X] \cap R[X])_{R\setminus P} = P_{R\setminus P} = PR_P[X]$.

Assim, por localização em $R \setminus P$, podemos supor que P é o único ideal maximal de R e que Q é o único ideal maximal de T.

Escolhemos então um polinômio $f(X) \in T[X]$ de modo que $f(X) \in Q \setminus Q'$. Pelo fato de $QT[X] \subset Q \cap Q'$, podemos supor que tal polinômio $f(X)$ seja mônico. Com efeito, se $f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ então, como $f(X) \notin QT[X]$, podemos afirmar que para algum i variando entre 0 e n, $a_i \notin Q$, ou seja, a_i é inversível em T. Podemos supor que tal coeficiente a_i seja o primeiro coeficiente inversível. Então, o polinômio $f(X) - \sum_{j=0}^{i-1} a_j X^{n-j} \in Q \setminus Q'$ e neste caso o polinômio que tomaremos será $g(X) = a_i^{-1}(f(X) - \sum_{j=0}^{i-1} a_j X^{n-j})$, que certamente é um polinômio mônico de $T[X]$.

Escolhido então um polinômio mônico $f(X)$ em $Q \setminus Q'$, observamos que ele não pode ser uma constante, pois neste caso $f(X)$ seria igual a um, portanto não pertenceria a Q. Assim, pelo lema 3.1 obtemos um ideal primo J de $T[X]$ tal que $f(X) \in J$, $J \subset Q$ e $J \cap R = (0)$. Consideremos agora o ideal I definido por $I = J \cap R[X]$. É claro que $I \cap R = (0)$ e como, pelo lema 3.2, I é não ramificado em $T[X]$, segue que J é o único ideal primo de $T[X]$ que está sobre I. Como $J \subset Q$ temos que $I = J \cap R[X] \subset Q \cap R[X] = P$. Em suma, temos dois ideais primos I e P de $R[X]$ tais que $I \subset P$ e um ideal Q' de $T[X]$ tal que $Q' \cap R[X] = P$. Como, por hipótese, a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ possui going down, garantimos a existência de um ideal primo de $T[X]$ contido em Q' e que está sobre I, ideal este que só pode ser J, uma vez que este é o único ideal primo de $T[X]$ situado sobre I. Segue daí que $J \subset Q'$. Entretanto

$f(X) \in J$ e $f(X) \notin Q'$, A contradição completa a prova de ser P um ideal não ramificado em $T[X]$, concluindo assim o teorema. Δ

Uma generalização deste teorema é apresentada em [7, teorema 4], sendo sua prova basicamente dada pelo teorema 3.1.

Teorema 3.2 [7, teorema 4] - Sejam R um domínio e T um domínio entre R e seu fecho inteiro R'. Se X_1, X_2, ... são indeterminadas sobre R, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $R[X_1] \hookrightarrow T[X_1]$ possui going down;

(ii) $R[X_1] \hookrightarrow T[X_1]$ é uma extensão não ramificada;

(iii) $R[X_1, X_2, \ldots, X_n] \hookrightarrow T[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ possui going down, qualquer que seja o inteiro $n \geq 1$;

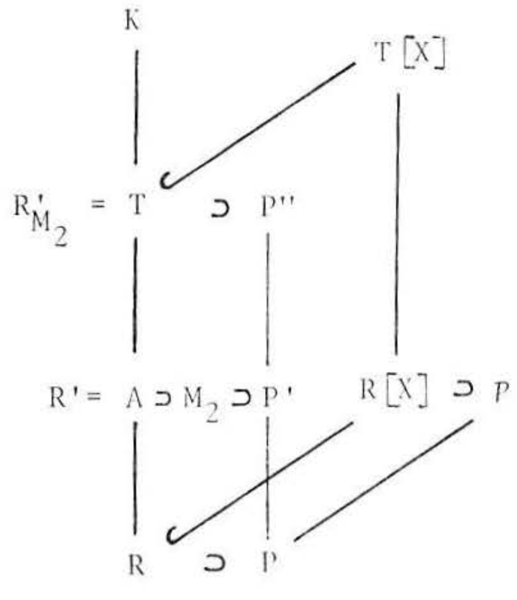
(iv) $R[X_1, X_2, \ldots, X_n] \hookrightarrow T[X_1, X_2 \ldots, X_n]$ é uma extensão não ramificada, qualquer que seja o inteiro $n \geq 1$.

Uma vez estabelecidos estes dois resultados, é bastante natural perguntar se ainda o teorema 3.1 continuará válido enfraquecendo a hipótese de T ser um domínio inteiro sobre R pela da extensão $R \hookrightarrow T$ possuir going up. Observamos que se tivermos uma extensão de domínios $R \hookrightarrow T$ onde apenas se exija que $T \subset K$, então se a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ satisfaz going down, é já conhecido que $R[X] \hookrightarrow T[X]$ é uma extensão inteira*, e portanto, pelo teorema 3.1, é não ramificada. Por outro lado, podemos verificar que mesmo que a extensão $R \hookrightarrow T$ satisfaça going up, o fato de $R[X] \hookrightarrow T[X]$ ser uma extensão não ramificada não implica que ela satisfaça going down. Para verificar tal afirmação faremos o que segue.

Sejam R, A e T os domínios construídos no exemplo 1.1. Observemos novamente que $R' = A$ e que a extensão $R \hookrightarrow T$ satisfaz going up e going down. Para mostrar que tal exemplo responde negativamente as questões formuladas, verificaremos que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ é não ramificada e não satisfaz going up nem going down.

Mostremos primeiro que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ é não ramificada.

O diagrama ilustra a situação que teremos:

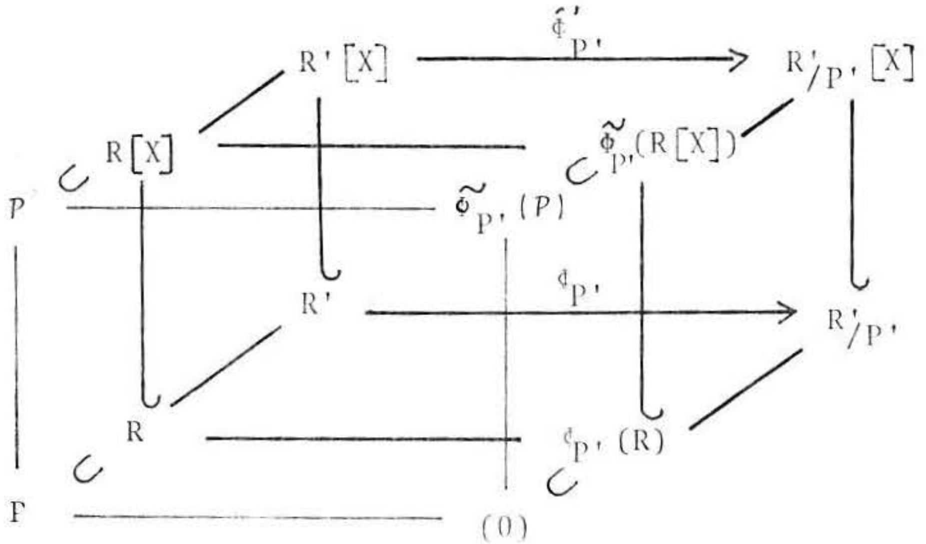


* J.DAWSON and D.E.DOBBS, On going down in polynomial rings, Canad. J. Math., 26, nº1, 1974, 177-184 - teorema 3.8, pp 181.

Seja então um ideal primo $\mathcal{P}$ de $R[X]$ e sua contração P em R, isto é, $P = \mathcal{P} \cap R$. Sabemos que a extensão $R \subsetneq T$ é não ramificada e portanto existe um único ideal primo P" de T tal que $P'' \cap R = P$. Entretanto, por construção, $T = R'_{M_2}$, então o ideal $P'' = P'R'_{M_2}$, onde P' é um ideal primo de R' e $P' \subset M_2$.

Seja $\Phi_{P''} : T \longrightarrow T/_{P''}$ e $\tilde{\Phi}_{P''}: T[X] \longrightarrow T/_{P''}[X]$ sua extensão natural. Sejam $\Phi_{P'}$ e $\tilde{\Phi}_{P'}$ suas restrições a R' e R'[X] respectivamente. É claro que $\tilde{\Phi}_{P'}(R[X]) = (\Phi_{P'}(R))[X]$.

Temos assim a seguinte situação:



Pela última observação feita no exemplo 1.1, temos $cf(\Phi_{P'}(R)) = cf(R'/_{P'})$. Observemos também que $\tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P}) \cap \Phi_{P'}(R) = \tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P}) \cap \tilde{\Phi}_{P'}(R) \subseteq \tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P} \cap R) = \tilde{\Phi}_{P'}(P) = \Phi_{P'}(P) = (0)$, portanto o ideal $\tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P})$ é um ideal primo de $\Phi_{P'}(R)[X]$ que se contrai a (0) em $\Phi_{P'}(R)$. Logo ou é o ideal nulo, que será não ramificado em $T'/_{P''}[X]$, ou pelo lema 3.2, temos que tal ideal é não ramificado em $T/_{P''}[X]$, pois $cf(\Phi_{P'}(R)) = cf(R'/_{P'}) = cf(T/_{P''})$. Portanto, se existissem dois ideais primos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de T[X] que se contraem a $\mathcal{P}$, então $\tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P}_i) \cap \tilde{\Phi}_{P'}(R[X]) = \tilde{\Phi}_{P'}(\mathcal{P}_i \cap R[X]) =$

$= \tilde{\Phi}_{P'}(P)$ e consequentemente $\tilde{\phi}'_{P'}(P)$ seria ramificado em $T_{/P''}[X]$.

Para finalizarmos o exemplo devemos mostrar que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ não satisfaz going up nem going down.

Consideremos então um elemento $y \in M_1 \setminus M_2$. Segue daí que o ideal primo $(X-y)R'[X]$ está contido propriamente em $(M_1, X)T[X]$.

Claramente obtemos então em $R[X]$, dois ideais primos $P_1 = (X-y)R'[X] \cap R[X]$ e $P_2 = (M_1, X)T[X] \cap R[X]$, onde $P_1 \subset P_2$.

Mas a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ é não ramificada, portanto podemos garantir a existência de um único ideal P_1' de $T[X]$ que está sobre P_1. Naturalmente, tal ideal P_1 é $(X-y)T[X]$. Da mesma forma, sobre P_2 existe apenas um ideal primo P_2' de $T[X]$ que é dado por $(M_2T, X)T[X]$.

A conclusão do nosso objetivo se dá pelo fato de P_1' e P_2' serem não comparáveis, o que realmente acontece. Com efeito $P_1' \not\supset P_2'$ porque $P_1' \cap R = (0)$ e $P_2' \cap R = M$. Por outro lado, se $P_1' \subset P_2'$ então o polinômio $X-y \in (M_2T, X)T[X]$, o que implicaria $y \in M_2T \cap R' = M_2$, fato que contradiz a escolha de y em $M_1 \setminus M_2$.

Uma outra questão bastante natural e interessante a ser formulada é a seguinte.

Questão: Se R e T são domínios onde $R \subset T \subset R' \subset K$ e se a extensão $R \hookrightarrow T$ satisfaz going down será que a extensão $R[X] \hookrightarrow T[X]$ satisfará também going down?

A resposta a esta questão é negativa. De fato, se considerarmos um domínio R unidimensional, R' seu fecho inteiro e um ideal máximo P de R que se ramifica em R' então, é claro que a extensão $R \hookrightarrow R'$ possui going down, e no entanto a extensão $R[X] \hookrightarrow R'[X]$ não satisfaz going down, uma vez que $R[X] \hookrightarrow R'[X]$ é ramificada. A elaboração de um tal exemplo pode ser facilmente obtida considerando o corpo L como no exemplo 1.1 e repetindo a construção de $A = L[X_1, X_2]_{(X_1) \cup (X_2)}$ e R feitas no mesmo exemplo. É claro que $A = R'$, que R é um domínio unidimensional e que a extensão $R \hookrightarrow R'$ é não ramificada.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos de maneira auto-suficiente os trabalhos de McAdam sobre o problema do Going Down para uma extensão $R \subsetneq T$, onde R e T são domínios e T está compreendido entre R e seu corpo de frações.

Demonstramos que para uma tal extensão satisfazer a propriedade do Going Down é suficiente que satisfaça a propriedade do 1-Going Down. Demonstramos ainda que se a extensão é inteira, então a extensão $R[X] \subsetneq T[X]$ possui a propriedade do Going Down se e somente se é não ramificada. Exemplos relevantes são também apresentados.

ABSTRACT

In this dissertation we present in a self-contained way the work of McAdam on the problem of Going Down for an extension $R \subsetneq T$, where R and T are domains and T lies between R and its quocient field.

We show that for such an extension to satisfy the Going Down property, it is sufficient that it satisfies the 1-Going Down property. We also show that if the extension is integral, then the extension $R[X] \subsetneq T[X]$ satisfies the Going Down property if and only if it is unibranched. Relevant examples are also presented.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Atiyah and I.Mac Donald, Introduction to Commutative Algebra, Addison - Wesley, Reading, (Massachussets, 1969).

[2] A.M.S. Doering and Y. Lequain, The gluing of maximal ideals - Spectrum of a Noetherian ring - Going up and going down in polynomial rings, Transaction of the American Math. Soc., 260, nº 2, 1980, 583-593.

[3] P., Eakin, The converse to a well known theorem on Noetherian rings, Math. Ann., 177, 1968, 278-282.

[4] M.A.P. Gonçalves, Anel dos invariantes de um grupo finito de automorfismos, Impa, 1980.

[5] I. Kaplansky, Commutative Rings, (Boston, 1970).

[6] S. Mc Adam, Going down in polynomial rings, Canad. J.Math., 23, 1971, 704-711.

[7] _____, Going down, Duke Math. J., 39, 1972, 633-636.

[8] _____, 1-going down, J. London Math. Soc. (2), 8, 1974, 674-680.

[9] M. Nagata, On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. J., 10, 1956, 51-64.

[10] _____, Local Rings, Interscience Tracts 13, (New York,1962)