

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Simulação do Movimento Sangüíneo na Artéria  
Carótida usando Diferenças Finitas**

por

Lessa De Carli Beleza

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli,  
Orientador

Porto Alegre, Setembro de 2003.

UFRGS  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

De Carli Beleza, Lessa

Simulação do Movimento Sangüíneo na Artéria Carótida usando Diferenças Finitas / Lessa De Carli Beleza.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2003.

57 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2003.

Orientador: De Bortoli, Álvaro Luiz

Dissertação: Matemática Aplicada  
Modelo, Dissertação

# Simulação do Movimento Sangüíneo na Artéria Carótida usando Diferenças Finitas

por

Lessa De Carli Beleza

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli,

Banca examinadora:

Prof. Dr. Dalcídio Moraes Claudio  
DMAT/PUCRS

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin  
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
setembro de 2003.

Prof. Vilmar Trevisan  
Coordenador

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	VI
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	VIII
RESUMO . . . . .	IX
ABSTRACT . . . . .	X
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
1.1 Importância do estudo do fluxo sangüíneo na artéria carótida . . . . .	5
1.2 Hemodinâmica: conceitos fundamentais . . . . .	10
1.3 O sangue como um pseudoplástico e viscoelástico . . . . .	12
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES . . . . .	14
2.1 Equações para as velocidades . . . . .	14
2.2 Equação para a pressão . . . . .	15
2.3 Equações adimensionais . . . . .	17
3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO . . . . .	19
3.1 Escolha pelo método numérico . . . . .	19
3.2 Escolha apropriada da malha . . . . .	20
3.3 Transformação de coordenadas . . . . .	22
3.4 Diferenças finitas . . . . .	25
3.5 Condições de contorno e iniciais . . . . .	29
3.6 Métodos de solução e critério de convergência . . . . .	30
3.7 Fluxograma do código computacional . . . . .	33
4 RESULTADOS . . . . .	35
4.1 Regime Permanente . . . . .	35
4.1.1 Duto Simples . . . . .	35

---

4.1.2 Duto Curvo . . . . .	37
4.1.3 Artéria Carótida . . . . .	39
4.2 Regime transiente . . . . .	44
<b>5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>BIBLIOGRAFIA . . . . .</b>	<b>52</b>

---

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Etapas para a obtenção da solução numérica de um problema de fluidos . . . . .	3
Figura 1.2	Fluidos não newtonianos independentes do tempo . . . . .	4
Figura 1.3	Localização anatômica da artéria carótida humana. . . . .	7
Figura 1.4	Espécies de bifurcação da artéria carótida [10] . . . . .	7
Figura 1.5	Fluxo sanguíneo em função do tempo (Ku, 1983 [23] ) . . . . .	9
Figura 1.6	Efeito do hematócrito na viscosidade[19]. . . . .	11
Figura 1.7	Variação da viscosidade com a taxa de deformação . . . . .	12
Figura 3.1	Arranjo co-localizado (centrado no nó) das variáveis na malha .	21
Figura 3.2	Transformação de coordenadas do plano físico para o computacional . . . . .	22
Figura 3.3	Domínio discretizado . . . . .	26
Figura 3.4	Condições de contorno para a artéria carótida. . . . .	30
Figura 3.5	Fluxograma do código computacional . . . . .	34
Figura 4.1	Ampliação da malha (a) e campo de velocidades (b) através do duto simples, 31x31 pontos . . . . .	36
Figura 4.2	Comparação dos perfis de velocidade:(-)analítica(o) numérica . .	36
Figura 4.3	Perfil de velocidades para o duto simples[15] . . . . .	37
Figura 4.4	Malha para o duto curvo,110x31 pontos . . . . .	38
Figura 4.5	Vetores velocidade para o duto curvo, $Re=790$ . . . . .	38
Figura 4.6	Comparação dos perfis de velocidade: (-) McDonald (o) numérico	39
Figura 4.7	Malha para a carótida,93x31 pontos . . . . .	40
Figura 4.8	Campo de velocidade(a) e linhas de corrente(b) para a carótida, $Re=250$ . . . . .	41
Figura 4.9	Comparação de perfis de velocidade:(-)Van de Vosse, (o) obtido, $t/T=0.0$ . . . . .	43
Figura 4.10	Curva do ciclo pulsátil . . . . .	44

Figura 4.11	Comparação de perfis de velocidade:(-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente; $t/T=0.08$ . . . . .	46
Figura 4.12	Comparação de perfis de velocidade:(-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente; $t/T=0.16$ . . . . .	47
Figura 4.13	Comparação de perfis de velocidade:(-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente; $t/T=0.32$ . . . . .	48
Figura 4.14	Comparação de perfis de velocidade:(-) Van de Vosse, (o) obtido, $t/T=0.0;t/T=1$ . . . . .	49

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A, B$	matrizes
$H$	metade da altura do duto
$J$	Jacobiano
$p$	pressão
$p_0$	pressão característica
$Q$	vazão
$R$	resíduo
$Re$	número de Reynolds
$t$	tempo
$T$	tempo de referência
$u$	componente longitudinal da velocidade
$v$	componente transversal da velocidade
$V_0$	velocidade de referência
$W$	vetor das variáveis convectivas
$x, y$	direções horizontal e vertical, respectivamente, no plano cartesiano

### Símbolos especiais

$\alpha$	coeficiente temporal do método de Runge-Kutta
$\dot{\gamma}$	taxa de deformação
$\rho$	massa específica
$\tau$	tensor tensão
$\tau_0$	tensão de cisalhamento
$\nu$	viscosidade
$\xi, \eta$	métricas da transformação de coordenadas
$\phi$	função qualquer
$\omega$	parâmetro de relaxação para a equação da pressão
$\Delta t$	passo de tempo
$\Delta x, \Delta y$	espaçamentos na direções $x$ e $y$ , respectivamente
$\nabla^2$	laplaciano
$\frac{\partial}{\partial}$	derivada parcial

### Sobrescritos

$t$	indica nível iterativo atual
$t + \Delta t$	indica iteração posterior
$0$	indica condição inicial ou passo anterior

### Subscritos

$i, j$	indicadores de referência de um ponto da malha
$t, x, y$	derivada parcial em relação a variável
$\xi, \eta$	derivada parcial em relação a variável

## RESUMO

Artérias contêm curvas ou bifurcações, de tamanho pequeno a grande, que são comumente afetadas pela aterosclerose, doença que atinge milhares de pessoas. Pesquisas indicam que a predisposição ao aparecimento da lesão é consequência do comportamento do fluido, que apresenta características peculiares nestas regiões.

No presente trabalho, realiza-se a simulação numérica do fluxo sangüíneo na bifurcação da artéria carótida. Para escoamentos completamente desenvolvidos, com altas taxas de cisalhamento, como ocorre na região da bifurcação da artéria carótida, o sangue assume comportamento de um fluido newtoniano incompressível com massa específica e viscosidade um pouco acima da água. Observa-se a ocorrência de uma interação fluido-parede na artéria; por ser o fluxo de natureza pulsátil, as paredes detentoras de propriedades elásticas respondem à este processo das fases de sístole e diástole do coração. O modelo utilizado considera o escoamento como bidimensional, newtoniano, incompressível, viscoso e com paredes rígidas e fornece informações válidas a respeito do escoamento em questão, detectando as zonas de recirculação e o aumento da tensão de cisalhamento na artéria carótida.

O modelo matemático utilizado tem como base as equações de Navier-Stokes, em coordenadas generalizadas com condições de contorno específicas. Adota-se o método de solução de diferenças finitas baseado no processo de integração temporal de Runge-Kutta de três estágios com aproximações espaciais e temporais de segunda ordem. Resultados numéricos são apresentados para o escoamento em três geometrias: duto simples, duto curvo e o interior da artéria carótida; eles comparam adequadamente com resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura.

## ABSTRACT

Arteries have curves or bifurcations, from small to big size in which can appear atherosclerosis, a disease common in many people. Researches indicate that the lesion surgement is a consequence of fluid behavior, which presents special characteristics in this region.

The present work develops the numerical simulation of blood flow trough the carotid artery bifurcation. For fully developed flow, with high strain rates, common in the carotid artery bifurcation region, the blood behaves as an incompressible non-Newtonian fluid with density and viscosity little times greater than that of water. There appear fluid and arteries wall interaction; as the flow is pulsatile, the walls answer the sistole/diastole of heart cycle. The model employed considers the flow as two-dimensional, Newtonian, incompressible, viscous and for rigid walls and give valuable information to the flow analysis, detecting the recirculation zones presence and shear strain increase in the carotid artery.

The mathematical model used follows the Navier-Stokes equations, in generalized coordinates with special boundary conditions. The finite differences based on the second order Runge-Kutta time-stepping scheme of three-stages is adopted. Numerical results are presented for three geometries: simple duct, curved duct and the carotid artery; they compare very well with numerical/analytical results found in the literature.

# 1 INTRODUÇÃO

Fluidos e suas propriedades vêm sendo pesquisados desde a Antigüidade. Em toda a natureza eles sempre estiveram presentes: no ar, com o vento; na água, com as correntes e marés, e no corpo humano, com a circulação sangüínea. Os estudos, principalmente referentes ao comportamento da água e do ar, eram eminentemente experimentais, pois não havia ainda uma teoria física que explicasse o movimento e as propriedades do fluido.

Já no século XIX, com a obtenção das equações de Navier-Stokes, e os trabalhos pioneiros dos franceses Claude Navier [32], Simeon Poisson [37] e do inglês George Stokes [44], a combinação entre as considerações teóricas sobre o escoamento de fluidos e os métodos experimentais permitiu o desenvolvimento tecnológico em muitas áreas da ciência.

Somente com o advento da computação digital, após a década de 1960, surgiu uma terceira aliada para a compreensão dos fenômenos relacionados ao movimento de fluidos, a simulação numérica, que complementaria os estudos nos quais as análises teóricas e as técnicas experimentais não eram suficientes, por razões de complexidade, custo e/ou tempo. Problemas reais normalmente requerem métodos computacionais, onde é possível a otimização do projeto, reduzindo os custos operacionais devido à facilidade de alteração de parâmetros como geometria, temperatura e velocidade, já que estes são apenas “dados de entrada” para o simulador.

Para que seja realizado um estudo de qualquer fenômeno físico é necessário modelar o problema, determinando de que maneira a temperatura, pressão, massa específica, etc. afetam o sistema físico [14]. Os modelos resultantes da aplicação de princípios físicos, descritos por leis de conservação adequadas ao fenômeno, como conservação de massa, energia e quantidade de movimento, são expressos por equações que relacionam as grandezas relevantes entre si, para um contínuo no espaço e tempo.

As soluções analíticas, freqüentemente, são obtidas somente com simplificações do modelo utilizado. Quantificar a confiabilidade ou a precisão das simulações em dinâmica de fluidos tem recebido crescente atenção por parte de pesquisadores [34]. A validação de uma simulação em dinâmica de fluidos computacional é realizada pela comparação do resultado obtido numericamente com resultados experimentais ou analíticos, ou ainda, com outros resultados numéricos que já tenham comprovada a sua validação.

Para tratar o modelo computacionalmente é necessário expressar, de forma adequada, as equações e o domínio em que elas são válidas. O domínio é discretizado, e ao conjunto de pontos discretos do domínio denomina-se malha. A distribuição adequada dos pontos no domínio é fundamental para obter-se uma solução numérica representativa do escoamento. Os termos que aparecem nas equações são escritos em função dos valores das incógnitas em pontos discretos adjacentes, resultando num conjunto de equações algébricas, geralmente lineares. Nessa etapa, são introduzidas as condições de contorno do problema, normalmente modificando-se apropriadamente as equações para pontos perto das fronteiras. As condições de contorno, juntamente às condições iniciais, as propriedades físicas do fluido e os parâmetros do escoamento especificam o problema a ser tratado.

Finalmente, as equações algébricas são resolvidas, fornecendo a solução do problema, a qual deve ser analisada para verificar se está correta. As técnicas de visualização científica têm papel fundamental nessa etapa. Comparando-se os resultados numéricos com dados experimentais, por exemplo, pode-se ajustar o modelo matemático até que o mesmo reflita a física do problema (figura 1.1).

Fluido pode ser definido como uma substância que não resiste a forças que causam tensões de cisalhamento, que provocam ruptura do material [45]. Em resposta a essas tensões, os fluidos se deformam e escoam. Uma característica importante no escoamento de fluidos é a viscosidade ( $\nu$ ), que é definida como uma medida de resistência ao fluido quando este se move. Os fluidos podem ser classificados como newtonianos, que obedecem uma relação linear entre a tensão de cisa-

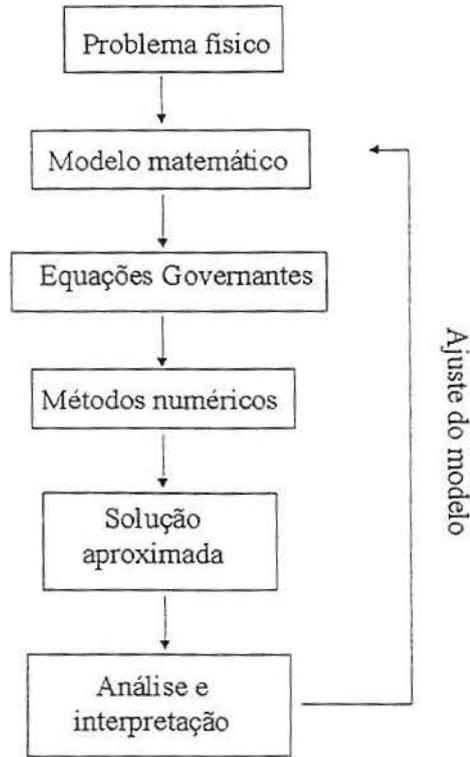


Figura 1.1: *Etapas para a obtenção da solução numérica de um problema de fluidos*

lhamento ( $\tau$ ) e a taxa de deformação ( $\dot{\gamma}$ ), e não newtonianos, onde esta relação não é linear. Estes podem ser classificados, de acordo com o comportamento em fluxo, como [48]: não newtonianos independentes do tempo, na qual a taxa de deformação em algum ponto é função da tensão naquele ponto (incluem-se os pseudoplásticos, dilatantes, plásticos e viscoplásticos, como mostrado na figura 1.2), não newtonianos dependentes do tempo, sendo mais complexos onde a relação entre tensão e deformação depende também do tempo em que o fluido está sendo cisalhado (incluindo tixotrópicos e reopéticos) e viscoelásticos, que apresentam características viscosas e elásticas.

Os escoamentos podem ser externos e internos. Os escoamentos externos são aqueles que ocorrem sobre superfícies de corpos definidos como por exemplo: aeronaves, automóveis e animais marinhos, enquanto que os internos são aqueles cu-

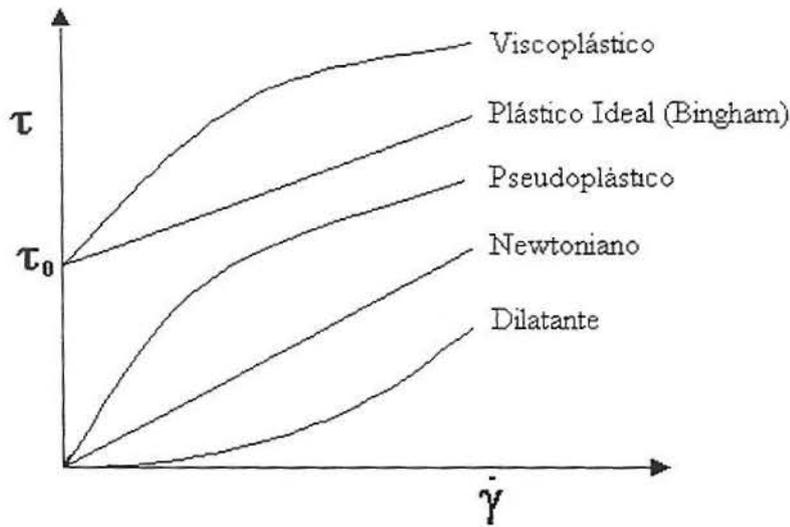


Figura 1.2: *Fluidos não newtonianos independentes do tempo*

jos contornos são formados por superfícies sólidas como no caso de dutos, tubos e artérias.

O escoamento de fluidos pode ser dividido em três tipos: laminares, transientes e turbulentos. Em 1889, Osborne Reynolds realizou experimentos nos quais três tubos com diâmetros de 1", 1/2" e 1/4" foram usados [11]. Em suas entradas os tubos foram conformados como um bocal de trompete, a fim de que o fluxo de água entrasse sem perturbações. Reynolds provou que quando as velocidades eram suficientemente baixas, a tinta que escoava juntamente com a água formava uma linha reta, mas este regime alterava-se quando a relação  $\frac{Vd}{\nu}$  (onde  $V$  era a velocidade média do escoamento,  $d$  era o diâmetro interno do tubo e  $\nu$  a viscosidade cinemática da água), excedia um determinado valor crítico. Esse valor adimensional passou, então, a ser chamado de *número de Reynolds* ( $Re$ ) [11] [39].

Escoamentos laminares são aqueles nos quais camadas muito finas de fluido deslizam umas sobre as outras. Já os escoamentos turbulentos são caracterizados pela imprevisibilidade no movimento de partículas individuais [26].

Pode-se tomar dois exemplos para ilustrar esses diferentes escoamentos: o da fumaça que sai do pavio de uma vela recém-apagada e o de uma torneira

aberta. No primeiro, observa-se que primeiramente a fumaça sobe de maneira ordenada, como uma “coluna” - laminar. Após uma certa distância, a fumaça apresenta movimentos aleatórios, caracterizados por vórtices ou redemoinhos - turbulento. No segundo, ao abrir bem pouco uma torneira, a água cai como uma “coluna de gelo” - laminar. Ao abrir mais a torneira, observa-se que essa coluna eventualmente se desfaz, dando origem a um escoamento mais complexo - turbulento [4].

Os escoamentos podem ser ainda classificados como compressíveis ou incompressíveis, permanentes ou transientes. Os escoamentos compressíveis são aqueles cuja massa específica varia significativamente conforme as variações de temperatura e principalmente da pressão; os incompressíveis são aqueles cuja variação de massa específica, sob diferentes condições de pressão e temperatura, é desprezível. No fluxo permanente nenhuma grandeza varia com o tempo em nenhum ponto do domínio, embora, em geral, as grandezas variem em função da posição no espaço. No escoamento transiente as grandezas características do fluido variam com o tempo nos pontos espaciais.

A seguir, indica-se a localização e a importância do estudo do fluxo sanguíneo na bifurcação da artéria carótida, bem como suas peculiaridades.

## 1.1 Importância do estudo do fluxo sanguíneo na artéria carótida

Na região da bifurcação da artéria carótida, devido à sua forma e assimetria, o fluxo pode apresentar recirculação, principalmente em locais que apresentam reversão de fluxo, caracterizando as “zonas de recirculação”, as quais coincidem com as regiões afetadas pela aterosclerose. Alguns pesquisadores estudaram o problema como por exemplo Salzar [40] e Zhao [53].

A aterosclerose é uma lesão na artéria e caracteriza-se pelo endurecimento (esclerose) e degeneração gordurosa (ateroma) das paredes arteriais. A pre-

sença destas lesões não é uniforme, mas estudos indicam que a região da bifurcação da artéria e seu lado interno são os mais freqüentes [52], [23]. O processo de aterosclerose torna-se causa para a doença cerebral vascular.

Para uma discussão sobre a influência da velocidade local e da distribuição da tensão de cisalhamento na parede das artérias é preciso investigar a mecânica do fluxo sangüíneo nas regiões de incidência das lesões ateroscleróticas [33], [52], [24]. Uma vez compreendido o comportamento do fluxo nesta região é possível comparar o padrão de fluxo local com as lesões, onde estas podem ser diagnosticadas, ainda em estágio inicial, pela detecção de distúrbios na velocidade do fluxo [16].

Alterações no comportamento do fluxo devido à estenose (obstrução vascular) foram estudadas por Tambasco [46] e Steinman [43], usando uma geometria para carótida tridimensional com estenose concêntrica e excêntrica. Deste obteve-se que o fluxo sofre influência devido à forma da estenose na artéria, contribuindo, assim, para o surgimento da aterosclerose.

As artérias carótidas estão localizadas na região do pescoço do corpo humano (figura 1.3 [42]), em ambos os lados e servem como suprimento principal para a cabeça e pescoço [25]. A bifurcação da artéria carótida consiste em um ramo principal, a artéria carótida comum (*acc*), que se subdivide em dois ramos, a artéria carótida interna (*aci*), responsável pelo suprimento sangüíneo do cérebro, e a artéria carótida externa (*ace*), responsável pelo suprimento sangüíneo da face. A extremidade onde o fluxo se divide é denominada de cume (vértice). A artéria carótida interna possui, ainda, um alargamento denominado sinus ou bulbo.

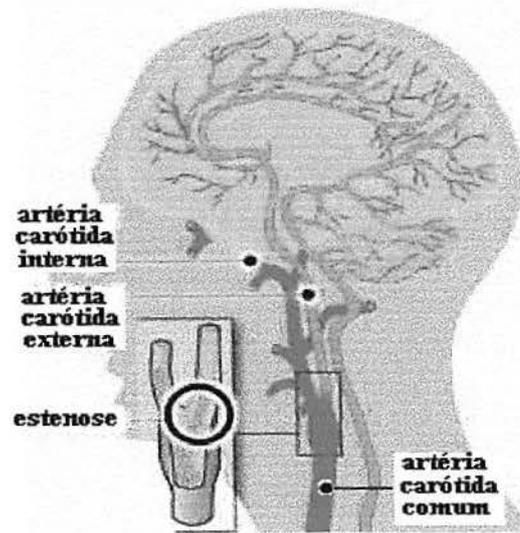


Figura 1.3: *Localização anatômica da artéria carótida humana.*

A geometria da artéria carótida possui uma grande variação entre os indivíduos. Como exemplo, toma-se os estudos de Ding et al. [10], onde 74 modelos de bifurcação de carótidas de humanos, obtidos em autópsia de adultos com faixa etária de 30-75 anos, foram fotografados. Tais fotografias revelaram que, nas carótidas internas, a parte mais próxima à curva (bifurcação) possui formas diferentes, conforme apresenta a figura 1.4.

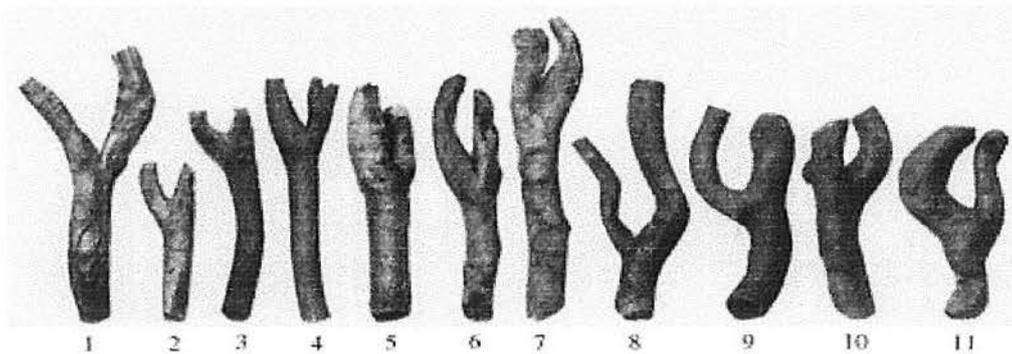


Figura 1.4: *Espécies de bifurcação da artéria carótida [10]*

Dada a figura, verifica-se que:

- a carótida interna é estreita e possui forma de Y. Este tipo representa 6 das 74 espécies (ver 1 na fig. 1.4).
- a carótida interna curva-se após o final do sinus ou bulbo. Trinta e oito espécies dos 74 possuem esta forma. (ver 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 na fig. 1.4).
- a carótida interna curva-se a partir da junção das artérias comum-interna. Trinta espécies possuem esta geometria. (ver 9, 10 e 11 na fig. 1.4).

O modelo (geometria) utilizado para a bifurcação da artéria carótida, no presente trabalho, foi aquele no qual a carótida interna curva-se após o sinus ou bulbo, geometria esta utilizada também nos estudos de van de Vosse [50] e Bharadvaj [5].

Diversas características, incluindo as propriedades reológicas do sangue, distensibilidade e geometria da parede da artéria e propriedades pulsáteis são importantes para modelar o fluxo na artéria carótida [50].

A análise completa de um fluxo pulsátil, como o fluxo sanguíneo, é extremamente complexa. O coração é uma bomba complicada e o seu comportamento é afetado por inúmeros fatores físicos e químicos. O ciclo cardíaco consiste de duas fases de pulsação: a fase sistólica, onde o fluxo acelera a uma razão aproximadamente 2,6 vezes o seu valor médio, seguido por uma desaceleração e gradualmente um fluxo permanente se desenvolve até o final da fase diastólica. A curva sístole/diástole foi indicada por Ku (1983) [23] conforme mostra a figura 1.5.

A contração cardíaca (sístole) promove a energia necessária para impulsionar o sangue através do circuito vascular (energia potencial); cada sístole ventricular impulsiona aproximadamente 70ml de sangue para dentro da aorta, produzindo uma pressão de pulso (diferença entre pressões sistólica e diastólica), que é transmitida ao resto do sistema arterial, que se propaga em direção à micro-

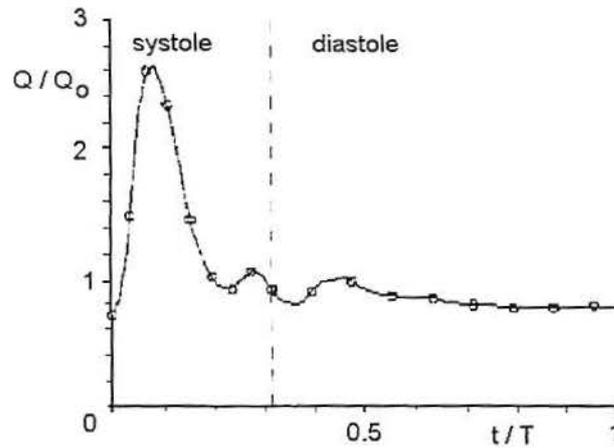


Figura 1.5: Fluxo sanguíneo em função do tempo (Ku, 1983 [23] )

circulação, onde se realiza o intercâmbio que é a principal finalidade do sistema circulatório [7].

A parede da artéria é anisotrópica e viscoelástica (Roach, 1977) [38]. O sistema de circulação do sangue é, em essência, um sistema de bombeamento a alta pressão (artérias) que distribui o fluxo através da ação de bombeamento do coração através das capilaridades para um sistema de retorno a baixa pressão (veias). O estreitamento e engrossamento de artérias possui efeitos consideráveis sobre a pressão sangüínea, a resistência e o fluxo sangüíneo. Perktold [36] analisou os efeitos da distensibilidade da parede da artéria carótida no campo de velocidade.

A resistência ao fluxo aumenta quando o raio do vaso diminui, ocasionando o aumento da fricção do fluido na parede do vaso, além da redução da circulação do fluxo sangüíneo. O desenvolvimento de uma placa (estenose) deforma a parede endotelial (camada de células que revestem internamente as estruturas do aparelho circulatório), aumentando o fluxo turbulento e a resistência. Na seqüência estuda-se os conceitos fundamentais da hemodinâmica.

## 1.2 Hemodinâmica: conceitos fundamentais

Sangue é uma suspensão de partículas (hemácias, leucócitos, plaquetas, etc.) num fluido chamado plasma e exibe comportamento não newtoniano para baixas taxas de cisalhamento, onde as partículas são aleatoriamente orientadas. Para escoamentos completamente desenvolvidos, com altas taxas de cisalhamento, como ocorre com o fluxo na região da bifurcação da artéria carótida, onde as partículas se alinham de modo que seus eixos estão orientados uniformemente na direção do fluxo, o sangue assume comportamento de um fluido newtoniano incompressível com massa específica um pouco acima da água ( $\rho \sim 1060 \text{Kg/m}^3$ ) e viscosidade cinemática na faixa de  $3$  a  $4,5 \times 10^6 \text{m}^2/\text{s}$  [50].

O processo de transporte e movimento são requerimentos importantes para a vida. No coração, as fibras do músculo individual geram forças, conduzindo a tensões nas paredes cardíacas, pressão nas cavidades ventriculares e, finalmente, injeção de sangue no sistema e circulação pulmonar [25]. A circulação do sangue é um processo interessante devido ao fato de o sistema de circulação apresentar características diferentes ao longo do caminho. A rede extremamente curva e ramificada de vasos começa na veia aorta e na artéria pulmonar com diâmetros da ordem de  $16$  a  $20\text{mm}$  em homens adultos. Ramificações conduzem a vasos menores de aproximadamente  $4$  a  $6\mu\text{m}$  (capilares). Isto significa que a taxa total de diâmetros é da ordem de  $4000$  vezes.

As pressões nas artérias mudam periodicamente. Como as paredes dos vasos possuem propriedades elásticas, com provavelmente não homogeneidades locais devido a doenças, as leis físicas que descrevem o escoamento de fluidos são suficientemente complexas. Adicionalmente, a natureza do transporte do fluido é corpuscular [8]. Para vasos cujo diâmetro é diversas vezes maior que os glóbulos vermelhos (do sangue), diferentes procedimentos de análise do escoamento são requeridos para os capilares. Desta forma, a descrição do fluxo do sangue através da

rede vascular é fortemente dependente do vaso considerado. Para o fluxo uma força motora é requerida, conduzindo à deformação do meio.

O plasma isolado tem viscosidade aproximadamente 1,2 a 1,5 vezes superior a da água (figura 1.6), sendo o sangue aproximadamente 2,4 vezes mais viscoso do que o plasma [7]. Um fator que pode afetar a viscosidade sangüínea é a concentração de células e a concentração e os tipos de proteínas plasmáticas. O hematócrito é a percentagem de sangue composta por células. Dessa forma, quando se diz que uma pessoa tem hematócrito de 40, significa que 40% do volume sangüíneo são células e o resto é plasma (o que corresponde a um adulto normal). Nesse caso, a viscosidade corresponde a 3 centipoises ( $Pa/s = Ns/m^2$ ). A viscosidade pode variar desde 1,5 centipoises (viscosidade do plasma) até um valor máximo de 10 centipoises [19].

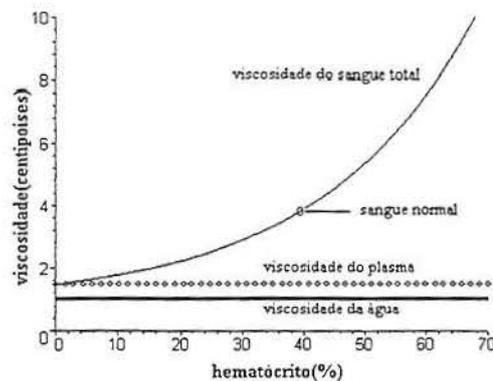


Figura 1.6: *Efeito do hematócrito na viscosidade*[19].

O fluxo através de um vaso sangüíneo é determinado por dois fatores:

- a diferença de pressão entre as duas extremidades do vaso, que é a força que empurra o sangue através do mesmo;
- impedimento ao fluxo sangüíneo através do vaso, denominado resistência vascular.

### 1.3 O sangue como um pseudoplástico e viscoelástico

Segundo Gijsen et al. [17] existe muita controvérsia sobre a influência da pseudoplasticidade e da viscoelasticidade do sangue na artéria carótida. Muitos autores entendem que essa influência é pequena, já outros entendem que ela é significativa. Sendo um pseudoplástico isto implica que a viscosidade do sangue diminui com o aumento da taxa de deformação, sendo que a altas e baixas taxas ela se aproxima de uma constante. Alguns autores consideram que o sangue está sendo cisalhado a altas taxas, por isso a influência dessa variação é pequena.

O comportamento da viscosidade de um pseudoplástico com a taxa de deformação é apresentado na figura 1.7. Nela, mostra-se uma solução experimental encontrada em Gijsen et al. [17] e a curva aproximada dada pelo modelo de Carreau-Yasuda. Outro modelo que pode ser utilizado para simular a pseudoplasticidade é o power-law, sendo que o expoente para o sangue está entre 0,7 e 0,8 [22].

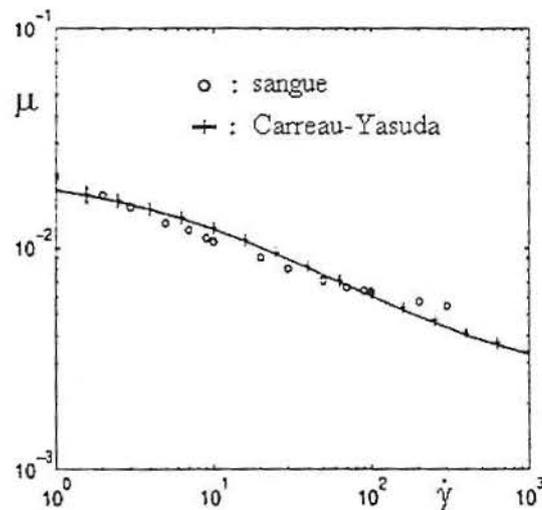


Figura 1.7: *Variação da viscosidade com a taxa de deformação*

Simulações realizadas em dutos com expoente de power-law dessa ordem fornecem resultados bem semelhantes aos newtonianos [29]. As maiores variações ocorrem nos perfis de velocidade, sendo que estes são mais achatados. No entanto, o tamanho dos vórtices fica praticamente o mesmo [30]. Assim, o fluxo de sangue

pode ser aproximado por um modelo newtoniano uma vez que para os números de Reynolds usados, na região da carótida, não surgem diferenças significativas entre sangue e um fluido newtoniano (a água). No entanto, uma análise completa do fluxo de sangue envolve a simulação deste como pseudoplástico e viscoelástico, ficando esse tema como perspectiva para trabalhos futuros.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 são apresentadas as equações governantes para um escoamento newtoniano incompressível bidimensional; no capítulo 3 mostra-se o procedimento de solução e no capítulo 4 resultados para os casos permanente e transiente. Finaliza-se com as conclusões, perspectivas e referências bibliográficas.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A obtenção da solução de qualquer problema físico requer a habilidade de criação do modelo matemático correspondente; este deve ser tal que possa ser resolvido com tempos de computação não-proibitivos e que os resultados representem adequadamente o fenômeno físico em questão.

O conjunto de equações que descreve o escoamento é fundamental para a análise do fenômeno em questão. As equações governantes do escoamento analisado neste trabalho são as de Navier-Stokes juntamente com uma equação para a pressão, que contém implicitamente a equação da continuidade.

Neste capítulo, apresentam-se as equações utilizadas para simular o escoamento: equações para as velocidades e para a pressão no sistema cartesiano de coordenadas e na sua forma adimensional.

### 2.1 Equações para as velocidades

As equações utilizadas para o cálculo das velocidades são as de conservação de quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ , também conhecidas como equações de Navier-Stokes. Estas são derivadas da Segunda Lei de Newton, a qual estabelece que o produto de massa e aceleração é igual à soma das forças externas atuando no corpo.

As equações de Navier-Stokes expressam a condição de equilíbrio, ou seja, para cada partícula há equilíbrio entre as forças de campo e as de superfície. As forças de campo (ou corpo) agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido (como exemplo tem-se a força gravitacional). Como essas forças nem sempre possuem magnitude suficiente para influenciar o escoamento, as expressões matemáticas dessas são, em geral, adicionadas como termos auxiliares (fontes) nas equações do movimento. As forças de superfície agem apenas

sobre a superfície do elemento de fluido. Decorrem da pressão exercida sobre este por um elemento exterior e das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento. Uma vez que essas forças são intrínsecas ao fluido, elas aparecem como termos constitutivos das equações do movimento [14].

As equações de Navier-Stokes sem forças de campo, escritas no sistema cartesiano de coordenadas para o escoamento incompressível (massa específica constante) nas direções  $x$  e  $y$  são dadas, respectivamente, por [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $u$  e  $v$  as componentes do vetor velocidade em cada direção,  $p$  a pressão e  $\nu$  a viscosidade.

Para que o movimento do fluido possa ser descrito completamente, é necessário definir uma equação para a pressão, uma vez que as equações do movimento já são conhecidas.

## 2.2 Equação para a pressão

A natureza segregada (equação por equação) do processo de solução requer que cada variável tenha uma equação evolutiva para ser avançada. Observando as equações para a velocidade, nota-se que as variáveis  $u$  e  $v$  podem ser avançadas pelas equações da quantidade de movimento (2.1) e (2.2) em cada direção e que a influência da pressão aparece através do seu gradiente [28].

Como a massa específica não varia com a pressão, determina-se um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origina um campo de velocidades que satisfaz a equação da continuidade. Assim, o acopla-

mento pressão-velocidade é importante, ainda que as variações da pressão sejam relativamente pequenas se comparadas com as da velocidade [2].

Para obter a equação para a pressão não basta isolar  $p$  de uma ou de outra equação do movimento; deve-se combinar os gradientes nas duas direções. Portanto, precisa-se extrair  $p$  das equações do movimento de forma que as velocidades obtidas satisfaçam a continuidade; esta passa a ser uma restrição a ser obedecida pelo campo de velocidades.

A equação para a pressão é obtida através do *Método da Pressão* na formulação incompressível [18]. Visando a sua obtenção, considere as equações de Navier-Stokes escritas da seguinte forma [35]:

$$u_t + (uu)_x + (uv)_y = -\frac{p_x}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.3)$$

$$v_t + (uv)_x + (vv)_y = -\frac{p_y}{\rho} + \nu(v_{xx} + v_{yy}) \quad (2.4)$$

Derivando (2.3) em relação a  $x$  e (2.4) em relação a  $y$ , obtém-se

$$u_{xt} + (uu)_{xx} + (uv)_{xy} = -\frac{p_{xx}}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy})_x \quad (2.5)$$

$$v_{yt} + (uv)_{xy} + (vv)_{yy} = -\frac{p_{yy}}{\rho} + \nu(v_{xx} + v_{yy})_y \quad (2.6)$$

Somando-se (2.5) e (2.6) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{p_{xx} + p_{yy}}{\rho} &= -(u_x + v_y)_t - [(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + 2(uv)_{xy} \\ &\quad + \nu[(u_{xx} + u_{yy})_x + (v_{xx} + v_{yy})_y]]. \end{aligned}$$

Observando que o lado esquerdo de (2.7) corresponde ao Laplaciano da pressão e rearranjando os termos, chega-se a

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -\rho[(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + 2(uv)_{xy} \\ &\quad - \rho(u_x + v_y)_t + \rho\nu[(u_x + v_y)_{xx} + (u_x + v_y)_{yy}]]. \end{aligned}$$

Fazendo agora

$$d = u_x + v_y, \quad (2.7)$$

obtem-se uma forma conveniente (por ser de implementação mais fácil) da equação do tipo Poisson para a pressão:

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &= -\rho[(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + 2(uv)_{xy}] \\ &\quad -\rho d_t + \rho\nu[d_{xx} + d_{yy}]\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde  $d = 0$  corresponde à continuidade (equação (2.7)). Ela reflete o princípio físico da conservação da massa: toda a massa que entra em um sistema deve sair e/ou se acumular no mesmo. Portanto, as equações (2.1) e (2.2) são utilizadas para o cálculo das componentes do vetor velocidade e a equação (2.8) para o cálculo da pressão.

Para verificar as deduções das equações mencionadas anteriormente o leitor pode consultar a bibliografia [15], [41]. No próximo item são apresentadas as equações (2.1), (2.2) e (2.8) na forma adimensional.

### 2.3 Equações adimensionais

As equações governantes são expressas na forma adimensional, pois esta permite a solução de forma generalizada. A vantagem é que o número de parâmetros que aparece no problema é reduzido quando variáveis adimensionais são empregadas. Mais precisamente, nenhum parâmetro desaparece; eles ficam representados em certas combinações adimensionais. Embora a manipulação das dimensões não possa produzir nenhuma solução analítica completa dos problemas físicos, a análise dimensional proporciona um instrumento poderoso para a solução de problemas que não permitem soluções analíticas [15].

Os métodos da análise dimensional baseiam-se no princípio da homogeneidade dimensional, formulada por Fourier em 1822, segundo o qual toda equação que exprime um fenômeno físico deve ser dimensionalmente homogênea, isto é, as dimensões em ambos os membros da equação devem ser as mesmas. A adimen-

sionalização pode ser realizada de várias maneiras, cada uma das quais confere a mesma redução no número de parâmetros que aparecem [27],[51].

Para tornar as equações (2.1), (2.2) e (2.8) adimensionais, divide-se todos os comprimentos por um comprimento de referência  $L$ , e todas as velocidades por uma velocidade de referência  $V_0$ , tomada como a velocidade da corrente livre. Torna-se a pressão adimensional dividindo-a por  $\rho V_0^2$  (duas vezes a pressão dinâmica da corrente livre). Denotando as quantidades adimensionais por asteriscos, adota-se [15]

$$x^* = x/L, y^* = y/L, t^* = tV_0/L, \rho^* = \rho/\rho_0$$

$$u^* = u/V_0, v^* = v/V_0 \text{ e } p^* = p/\rho_0 V_0^2$$

Substituindo os valores com \* nas equações (2.1), (2.2) e (2.8) (por conveniência, abandona-se o asterisco e usa-se o mesmo simbolismo para as equações na forma adimensional), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = & - \left( \frac{\partial^2 (uu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (vv)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds, dado por

$$Re = \frac{\rho L V_0}{\mu}, \quad (2.12)$$

que representa a relação entre as forças de inércia e as viscosas. Uma dedução das equações na forma adimensionalizada pode ser vista em [35].

Depois da obtenção do modelo matemático, conhecendo-se os sistemas de equações a serem resolvidos, parte-se para o procedimento de solução.

## 3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Tendo sido apresentadas as equações governantes para o escoamento, agora são feitas considerações a respeito de uma série de fatores gerais, cuja análise adequada é importante para que se obtenha uma boa solução. Tais fatores se referem, por exemplo, a tipos de métodos numéricos utilizados na implementação, à construção de uma malha computacional adequada para a obtenção da solução numérica do problema, assim como o critério de convergência, as condições de contorno, etc.

### 3.1 Escolha pelo método numérico

Os problemas físicos são geralmente analisados segundo três abordagens: experimental, teórica e numérica.

Os métodos experimentais consistem de:

- Concepção do experimento;
- Leis de similaridade;
- Qualidade dos equipamentos de medição;
- Processamento dos dados; etc.

Os métodos teóricos são descritos por:

- Leis de conservação, como quantidade de movimento, massa e energia;
- Relações constitutivas, modelos de turbulência;
- Condições iniciais e de contorno; etc.

Por último, os métodos numéricos consistem de:

- Integrações espaciais e temporais;
- Tratamento das não-linearidades e acoplamentos;

- Natureza da malha;
- Funções de interpolação;
- Método de solução dos sistemas lineares;
- Escolha do tamanho da malha;
- Critério de convergência dos diversos ciclos iterados; etc.

Os métodos numéricos são importantes na análise de fenômenos naturais por serem estes fenômenos muito complexos. As equações que os regem geralmente são altamente não-lineares, não podendo ser resolvidas analiticamente, a não ser que sejam feitas simplificações resultando num afastamento da solução fisicamente correta.

A grande maioria dos modelos matemáticos utilizados para descrever características físicas como a velocidade e a aceleração, por exemplo, são baseadas na *idéia do contínuo*. Para tal idéia, admite-se que a distância entre as partículas fluidas (ou moléculas) seja muito pequena, bem menor do que qualquer dimensão física do problema ao qual se está aplicando os princípios da Mecânica dos Fluidos. Entretanto, a idéia do contínuo só é válida para fluidos isotrópicos homogêneos que possam ser tratados macroscopicamente; um contra exemplo seria um gás rarefeito [20].

### 3.2 Escolha apropriada da malha

Para resolver numericamente as equações do escoamento em um domínio, é necessário tê-lo na forma discreta (com número finito de pontos). Esses pontos devem estar dispostos de maneira a abranger da forma mais significativa as regiões onde ocorrem as maiores variações das variáveis velocidade e pressão.

Uma boa solução numérica depende de uma malha de boa qualidade, isto é, que seja refinada em regiões nas quais os gradientes das variáveis são elevados, por exemplo. Geralmente, ou os pontos estão afastados ou aglutinados em áreas

específicas. Os pontos aglutinados estão nas áreas em que se espera que a variação espacial da propriedade seja grande. Já os pontos afastados entre si estão nas regiões nas quais a solução apresenta pequena variação espacial. Portanto, parece-nos claro que domínios complexos necessitem de malhas elaboradas com espaçamento variável entre os pontos, isto é, uma malha não-uniforme, ou a utilização de multiblocos.

As malhas utilizadas neste trabalho são do tipo estruturada, pois apresentam regularidade na distribuição espacial dos pontos. Este tipo de malha confere uma série de vantagens para a implementação do programa computacional, pois a regra de ordenação dos elementos simplifica todas as rotinas. O arranjo para a disposição das variáveis na malha é o co-localizado, pois permite economia de memória e de tempo computacional, uma vez que todas as incógnitas são armazenadas no mesmo ponto, conforme mostra a figura 3.1.

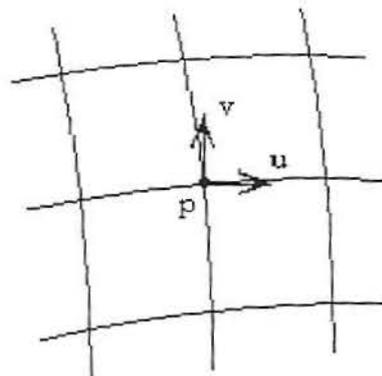


Figura 3.1: Arranjo co-localizado (centrado no nó) das variáveis na malha

A seguir, passa-se ao estudo de coordenadas generalizadas que são úteis na implementação do nosso modelo para escoamentos em geometrias complexas.

### 3.3 Transformação de coordenadas

No sistema de coordenadas generalizadas a malha se adapta à geometria do domínio físico. Linhas coordenadas,  $\xi$  e  $\eta$ , são definidas de forma que o interior da artéria carótida passe de um domínio físico para o computacional cartesiano, onde os pontos da malha são igualmente espaçados. A figura 3.2 mostra o plano (domínio) físico e o computacional.

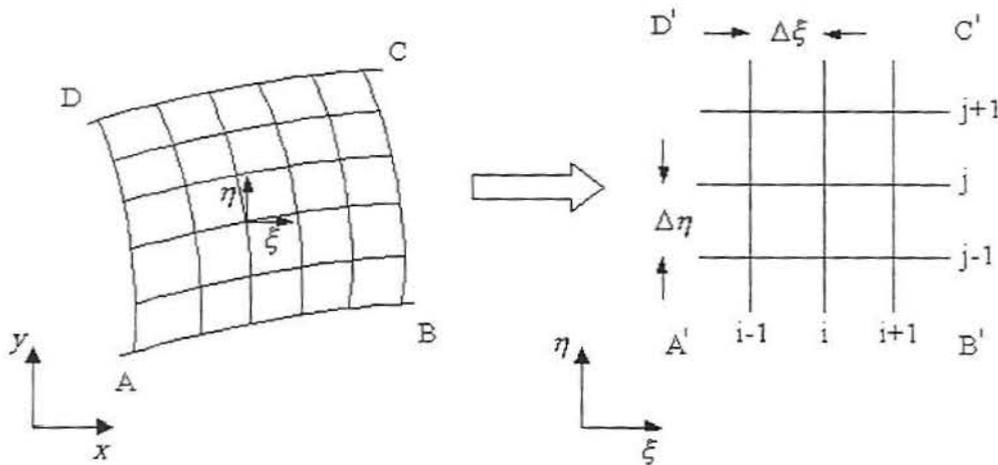


Figura 3.2: Transformação de coordenadas do plano físico para o computacional

Além disso, quando as equações governantes são resolvidas no plano computacional, elas devem ser expressas em termos das variáveis  $\xi$  e  $\eta$  ao invés de  $x$  e  $y$ , ou seja, as equações governantes devem ser transformadas de  $(x,y)$  para  $(\xi,\eta)$ . Portanto, a transformação do sistema de coordenadas cartesianas para o de generalizadas permite o mapeamento da geometria irregular, escrita no sistema cartesiano  $(x,y)$ , em uma geometria regular no sistema  $(\xi,\eta)$ .

Independente da geometria do plano físico, a geometria do plano computacional adotada será do tipo retangular para  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$ . Utiliza-se, ainda, uma normalização para  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ . Assim, as células no plano computacional têm dimensões unitárias, facilitando o trabalho de programação do algoritmo e evitando divisões desnecessárias.

Para descrever a transformação geral das equações governantes entre o plano físico e o computacional considera-se uma geometria bidimensional com variáveis independentes  $x$  e  $y$ . Quer-se transformar as variáveis no plano físico  $(x, y)$  para o computacional  $(\xi, \eta)$ , onde [13]

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}\quad (3.1)$$

e, desde que a transformação possua inversa, resulta

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta)\end{aligned}\quad (3.2)$$

A aplicação da transformação de coordenadas consiste basicamente da utilização da regra de derivação em cadeia. Assim, os termos contendo derivadas espaciais das equações (2.9), (2.10) e (2.11) para uma variável  $\phi$  genérica tornam-se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \xi_{x_i}^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \eta_{x_i}^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \xi_{x_i} \eta_{x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \xi_{x_i x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_{x_i x_i} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \xi_{x_i} \xi_{x_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \eta_{x_i} \eta_{x_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_{x_i} \eta_{x_j} + \xi_{x_j} \eta_{x_i}) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \xi_{x_i x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_{x_i x_j} \quad i \neq j\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde  $\phi$  representa as velocidades  $u$  e  $v$  e a pressão  $p$ ;  $x_i$  as direções  $x$  e  $y$  e  $\xi_{x_i}$  e  $\eta_{x_i}$  as métricas da transformação ou relações de comprimentos no domínio físico e transformado. Nas expressões referentes às derivadas de segunda ordem termos como  $\xi_{x_i x_j}$ ,  $\eta_{x_i x_j}$  e semelhantes são desprezados conforme a literatura [28].

Substituindo (3.3) na equação (2.9) obtém-se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y \right) &= \\ = - \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x \right) + \frac{1}{Re} \left( \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)\end{aligned}\quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \xi_x^2 + \xi_y^2 \\
 \beta &= \eta_x^2 + \eta_y^2 \\
 \varphi &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A equação (3.4) representa a conservação da quantidade de movimento para  $u$  (2.9) em coordenadas generalizadas. As equações (2.10) e (2.11) podem ser escritas de forma semelhante. Para a equação (2.11) resulta a forma não trivial

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 p &= - \left\{ \frac{\partial^2(uu)}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + \frac{\partial^2(uu)}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2(uu)}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\
 &+ \frac{\partial^2(vv)}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + \frac{\partial^2(vv)}{\partial \eta^2} \eta_y^2 + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2(vv)}{\partial \xi \partial \eta} \\
 &+ 2 \left[ \frac{\partial^2(uv)}{\partial \xi^2} \xi_x \xi_y + \frac{\partial^2(uv)}{\partial \eta^2} \eta_x \eta_y + \frac{\partial^2(uv)}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \right] \left. \right\} \\
 &- \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{Re} \left( \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde  $\alpha, \beta$  e  $\varphi$  são dados por (3.5).

Para obter as expressões para as métricas de transformação, consideram-se as diferenciais em cada eixo coordenado no domínio transformado [28]

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$d^T = A d^F \tag{3.7}$$

sendo as diferenciais no plano físico escritas como

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$d^F = B d^T \tag{3.8}$$

Usando as equações (3.7) e (3.8), encontra-se

$$A = B^{-1} = J \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $J$  é o jacobiano da transformação que pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} J &= \det A = \frac{1}{\det B} \\ &= [x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi]^{-1} \end{aligned}$$

Logo, as métricas são dadas por

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta \\ \xi_y &= -J x_\eta \\ \eta_x &= -J y_\xi \\ \eta_y &= J x_\xi \end{aligned}$$

Na próxima seção introduz-se o método de diferenças finitas, que será utilizado para a aproximação das equações governantes.

### 3.4 Diferenças finitas

Antes de resolver as equações diferenciais de forma numérica, é preciso encontrar, para os termos que nela aparecem (por exemplo  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ), as respectivas expressões escritas em função dos pontos da malha. Isto é feito aqui utilizando o método de diferenças finitas.

O método de diferenças finitas é largamente usado em dinâmica dos fluidos computacional [47] e consiste na substituição das derivadas que aparecem nas equações governantes por quocientes algébricos de diferenças, produzindo um sistema que pode ser resolvido para as variáveis em pontos discretos específicos na malha computacional.

A aproximação por diferenças finitas irá substituir o operador diferencial contínuo  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  por uma aproximação discreta, calculada a partir dos valores de  $u$  em um número finito de pontos. Para entender esta aproximação considera-se, por simplificação, o caso bidimensional representado na figura 3.3, onde os pontos da malha se localizam na intersecção das linhas horizontais com as verticais;  $i$  e  $j$  identificam pontos na  $i$ -ésima coluna e na  $j$ -ésima linha, respectivamente. Assim, um dado ponto  $(\xi, \eta)$  possui coordenadas  $(\xi_0 + i\Delta\xi, \eta_0 + j\Delta\eta)$ , com  $(\xi_0, \eta_0)$  representando a origem do sistema de coordenadas a menos de translações.

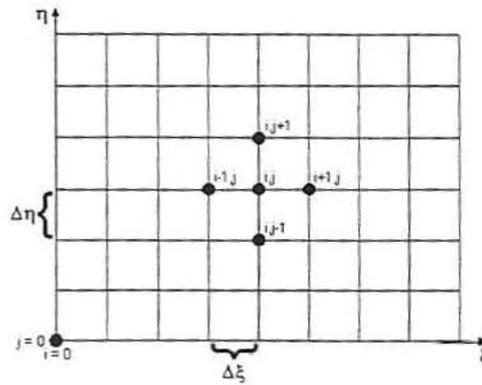


Figura 3.3: *Domínio discretizado*

O método de diferenças finitas consiste na aproximação de uma determinada função em torno de um ponto por expansões em séries de Taylor. Considere  $u_{i,j}$  a componente do vetor velocidade na direção  $x$  em um ponto  $(i, j)$ ; então a velocidade  $u_{i+1,j}$  pode ser expressa em termos de séries de Taylor conforme

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i,j} \Delta\xi + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} (\Delta\xi)^2 + \dots \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) é matematicamente exata para  $u_{i+1,j}$  se [1]:

- (a) o número de termos é infinito e a série converge,
- (b) e/ou  $\Delta\xi \rightarrow 0$ .

No entanto, computacionalmente torna-se impraticável o emprego de um número infinito de termos. Assim, a equação (3.10) é truncada. No presente

trabalho, admite-se um erro de truncamento de segunda ordem, pois os termos do tipo  $(\Delta\xi)^3$  e os de ordem mais alta são desprezados. Assim, por exemplo, o termo  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  pode ser aproximado utilizando

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta\xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta\xi)^2 \quad (3.11)$$

$$u_{i-1,j} \approx u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta\xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta\xi)^2 \quad (3.12)$$

Subtraindo (3.11) de (3.12) tem-se

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta\xi + O(\Delta\xi^2),$$

ou, onde  $O(\Delta\xi^2)$  corresponde à ordem de aproximação

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2). \quad (3.13)$$

Adicionando (3.11) e (3.12), obtém-se

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta\xi)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta\xi)^2} + O(\Delta\xi^2) \quad (3.14)$$

Como em geral se escolhe  $\Delta\xi = 1$ , as aproximações para a primeira e segunda derivada tornam-se

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} \approx u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \quad (3.16)$$

Portanto, as expressões (3.15) e (3.16) são aproximações em diferenças finitas de segunda ordem, centrais, para a primeira e segunda derivadas de  $u$ , respectivamente.

A expressão em diferenças finitas para as derivadas em relação a  $\eta$  é obtida da mesma forma; assim, os termos  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$  podem ser aproximados por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_{i,j} \approx u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \quad (3.18)$$

A aproximação para a derivada mista é obtida diretamente utilizando o mesmo raciocínio; logo, o termo  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$  pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)_{i,j} &\approx \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \approx \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2}\right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2}\right) \\ &\approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A discretização para o termo temporal  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , por exemplo, fornece relações entre valores de  $u$  em instantes sucessivos de tempo, ou seja, entre o tempo atual  $t$  e o tempo futuro  $t + \Delta t$  conforme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3.20)$$

Assim, uma variável genérica  $\phi$  pode representar as velocidades  $u$  e  $v$  e a pressão  $p$ , conforme (para  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2} \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} &= \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}\right)_{i,j} &= \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1} \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}\right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{4} \end{aligned} \quad (3.21)$$

As aproximações (3.21) são, então, substituídas nas equações governantes do escoamento e, em cada uma delas, isola-se a variável de interesse. Um exemplo é a aproximação explícita em diferenças finitas para a equação (3.4); que resulta em:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = & - u_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \xi_x + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \eta_x \right)^t \\
& - v_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \xi_y + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \eta_y \right)^t \\
& - \left( \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2} \xi_x + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2} \eta_x \right)^t \\
& + \frac{1}{Re} \left[ 2\varphi \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4} \right]^t \\
& + \frac{1}{Re} [\alpha(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \beta(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})]^t
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A seguir, apresenta-se as condições de contorno e iniciais adotadas para resolver o sistema de equações aproximadas.

### 3.5 Condições de contorno e iniciais

O sistema de equações diferenciais obtido necessita de condições de contorno e iniciais apropriadas para ser resolvido. Estas ditam a solução particular a ser obtida das equações governantes. Conhecendo-se o comportamento da solução, pode-se melhorar a estimativa inicial.

As condições de contorno são relações impostas sobre as fronteiras que em geral relacionam os valores das variáveis de estado na fronteira com os valores no interior da malha. No caso de escoamentos internos, principalmente, são necessárias condições para os campos de velocidade, pressão e temperatura (quando utilizada). A especificação das condições depende do regime do escoamento. Analisando o caso bidimensional, como por exemplo o escoamento em um canal, se o escoamento é subsônico na entrada três das quatro incógnitas são impostas e a outra é extrapolada a partir do interior do domínio. Na saída, três das incógnitas são extrapoladas e

uma é imposta. Em escoamento supersônico todas as incógnitas são impostas na entrada e extrapoladas na saída.

As condições de contorno empregadas neste trabalho são de parede, de entrada e de saída, conforme mostra a fig.3.4. Fixa-se a velocidade na entrada e a pressão na saída e extrapola-se as demais variáveis.

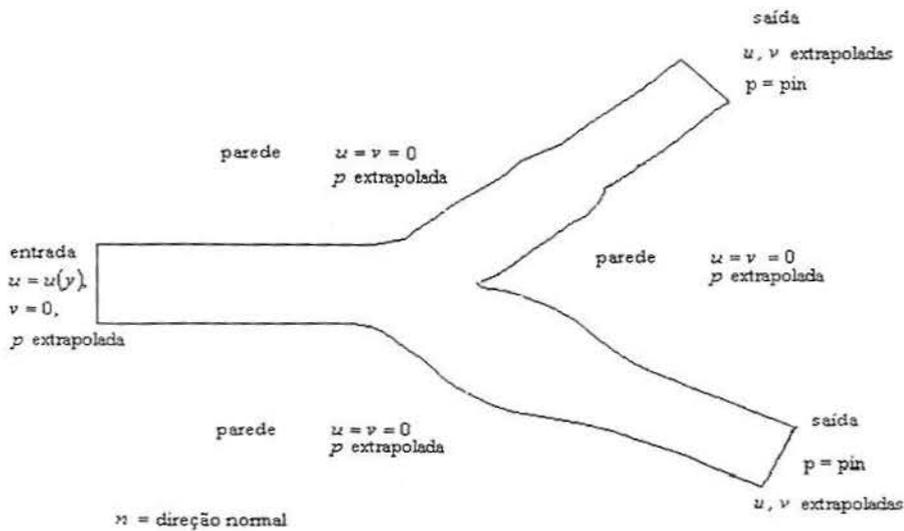


Figura 3.4: *Condições de contorno para a artéria carótida.*

Segue, na próxima seção, o método de solução e o critério de convergência utilizado no trabalho.

### 3.6 Métodos de solução e critério de convergência

São inúmeros os métodos que podem ser empregados na resolução das equações do escoamento na forma aproximada  $Ax = b$ . Cada método possui vantagens e desvantagens. A escolha do método mais apropriado para resolver um determinado sistema de equações governantes de um problema físico não é uma tarefa fácil. Porém, trabalhos encontrados na literatura indicam que métodos como SUR

(Método de Relaxações Sucessivas), MSI (“Modified Strongly Implicit Procedure”) e Runge-Kutta são de aplicação fácil e eficiente [9].

No problema apresentado utiliza-se um método de Runge-Kutta [6] simplificado para o cálculo das velocidades  $u$  e  $v$ . Este é utilizado porque os seus coeficientes podem ser selecionados de forma a obter soluções de alta precisão temporal. Tratando-se de um escoamento essencialmente incompressível, escolhe-se o Runge-Kutta de 3 estágios simplificado (que requer menos memória computacional que o método de Runge-Kutta clássico) [9]:

A equação (2.9) pode ser colocada na forma

$$\frac{\partial \vec{W}_{ij}}{\partial t} + \vec{R}_{ij} = 0 \quad (3.23)$$

onde  $\vec{W} = \{u, v\}^T$  e  $\vec{R}$  é a discretização espacial dos termos convectivos e difusivos.

Então,

$$\begin{aligned} \vec{W}_{ij}^{(0)} &= \vec{W}_{ij}^{(t)} \\ \vec{W}_{ij}^{(l)} &= \vec{W}_{ij}^{(0)} - \alpha_l \Delta t \vec{R}_{ij}^{(l-1)} \\ \vec{W}_{ij}^{(t+\Delta t)} &= \vec{W}_{ij}^{(l)} \end{aligned} \quad l = 1, 2, 3$$

Os coeficientes para uma aproximação temporal de segunda ordem, para o esquema de 3 estágios, são [6]

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1. \quad (3.24)$$

Para a equação da pressão utiliza-se o SUR ao método de Gauss-Seidel, pois nesta não aparece o termo temporal para a pressão. O SUR consiste na aplicação de uma correção para os valores calculados a cada passo, onde a constante  $\varpi$  representa a relaxação. O valor de  $\varpi$  varia entre 0 e 2, sendo classificado como um processo de sobrelaxação para  $1 < \varpi < 2$  (problemas parabólicos e hiperbólicos) e como um processo de subrelaxação para  $0 < \varpi < 1$  (problemas elípticos e oscilatórios)

[9]. Como a pressão tem caráter elíptico, escolhe-se  $\varpi = 0,7$  (subrelaxação). O SUR aplicado para a pressão resulta em:

$$p_{ij}^{t+\Delta t} = p_{ij}^t + \varpi(p_{ij}^{t+\Delta t} - p_{ij}^t) \quad (3.25)$$

Uma vez escolhidos os métodos de solução das equações governantes, a seguir apresenta-se os critérios de convergência utilizadas neste trabalho.

A solução numérica de problemas de escoamento contém imprecisões, as quais podem ser indicadas pelo critério de convergência. A escolha do critério mais apropriado para interromper a execução do programa não é uma decisão fácil. Alguns problemas possuem convergência lenta e, caso a execução seja interrompida por um critério mal escolhido, pode-se estar longe da solução [9]. Por outro lado, usando um critério muito severo, pode-se manter o programa iterando sem necessidade.

Para problemas compressíveis, geralmente o critério de convergência é baseado na massa específica. Mas como a pressão varia tanto para problemas compressíveis como incompressíveis, esta pode ser usada como critério para escoamentos a qualquer velocidade [9]. Neste trabalho, por tratar-se de um escoamento incompressível, optamos por utilizar o erro relativo na pressão como critério, sendo o mesmo:

$$\varepsilon = \frac{|p - p^0|}{p} < tol \quad (3.26)$$

onde  $\varepsilon$  é o erro relativo da pressão,  $p$  a pressão na iteração atual,  $p^0$  a pressão na iteração anterior e  $tol$  é a tolerância (precisão) especificada:  $tol = 10^{-5}$ .

A seguir é apresentado o fluxograma do código computacional utilizado neste trabalho.

### 3.7 Fluxograma do código computacional

Os programas utilizados neste trabalho foram implementados em linguagem FORTRAN 90. O procedimento de solução pode ser resumido no fluxograma da figura 3.5, o qual representa o código utilizado para a solução do problema.

O primeiro passo do algoritmo é atribuir valores para as variáveis, a seguir constrói-se a malha calculando os pontos no sistema cartesiano de coordenadas; em seguida faz-se a transformação de coordenadas cartesianas para generalizadas e considera-se as condições iniciais. Após inicia-se o cálculo iterativo obtendo, em cada ponto, as componentes do vetor velocidade através do método de Runge-Kutta e a pressão pelo Gauss-Seidel com SUR. Após o cálculo das velocidades e da pressão, considera-se as condições de contorno. No estágio seguinte, avalia-se a convergência do processo; se convergiu cria-se o arquivo de dados e finaliza-se o processo e, se não convergiu, retorna-se ao cálculo iterativo para as componentes do vetor velocidade e pressão até que o critério de parada seja satisfeito ou o nível de convergência desejado seja obtido.

Uma vez apresentado o fluxograma do código computacional, mostra-se, no próximo capítulo, os resultados numéricos obtidos com a metodologia descrita até o momento.

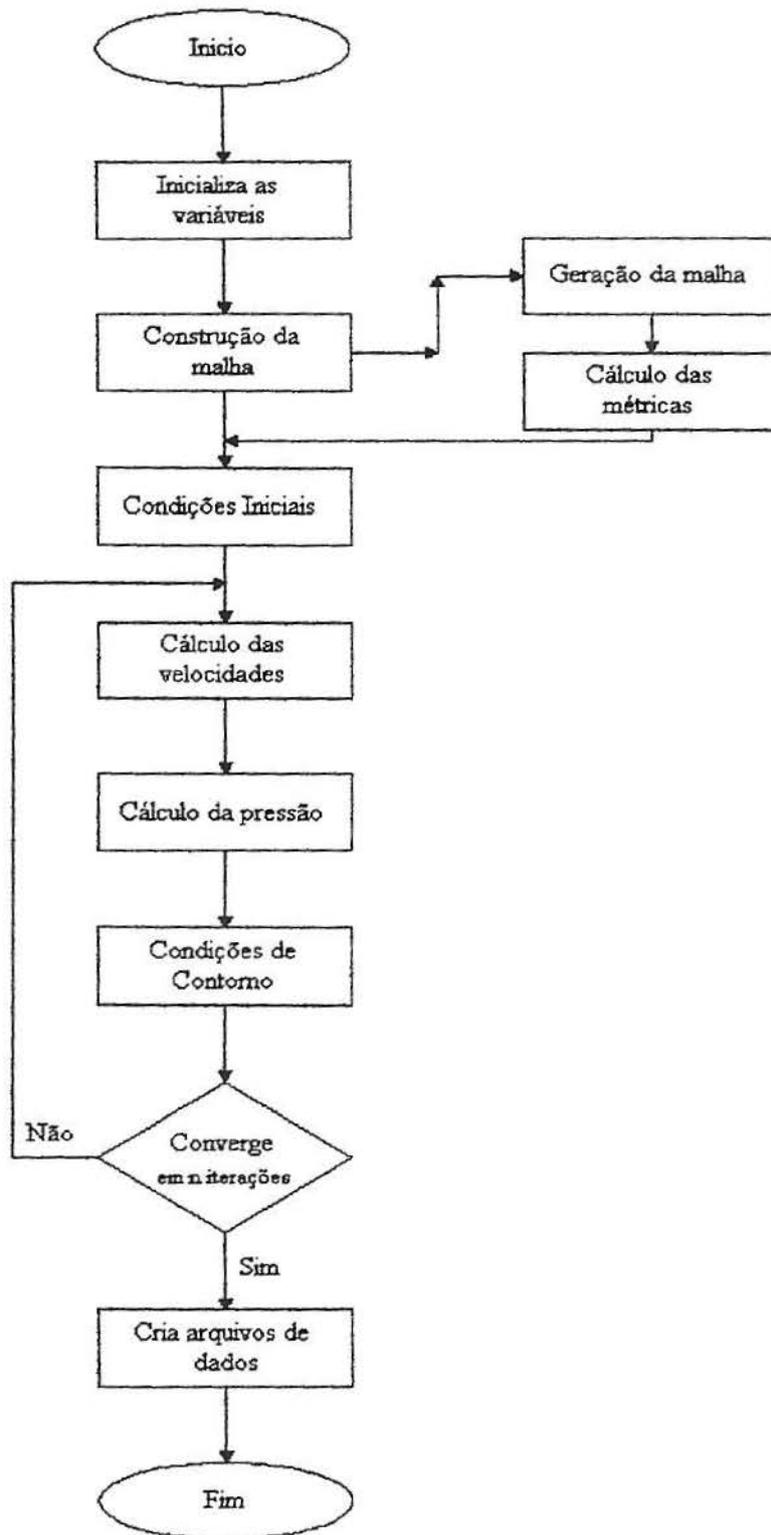


Figura 3.5: Fluxograma do código computacional

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nas simulações. A visualização desses é feita através dos softwares Visual 2D [21] e Mapple V.

### 4.1 Regime Permanente

Os primeiros resultados são os do escoamento em regime permanente através do duto simples e do duto curvo. Estas geometrias foram escolhidas com o objetivo de calibrar o código computacional. Em seguida, estuda-se o fluxo através da artéria carótida em regime permanente.

#### 4.1.1 Duto Simples

As simulações são feitas, primeiramente, para o duto simples comparando o resultado numérico obtido com a solução analítica do problema. Para a análise do escoamento no duto simples, construiu-se uma malha computacional de 31x31 pontos sem a necessidade de refinamento devido a simplicidade da geometria. A figura 4.1 a) ilustra a malha utilizada onde a largura  $2H$  do duto é de 1 e o comprimento é de 4,5.

Para esta simulação as condições de contorno empregadas foram: nas paredes os vetores velocidades são nulos ( $u = 0$  e  $v = 0$ ) e a pressão é extrapolada; na entrada perfil de velocidade parabólico e na saída do duto o vetor velocidade é extrapolado.

O campo de velocidades do escoamento plenamente desenvolvido pode ser visto na figura 4.1 b). Pode-se observar que o fluxo ocorre na direção  $x$  onde observa-se o perfil parabólico do escoamento, ou seja, a velocidade nas paredes é zero, próxima as paredes é baixa e, à medida que se aproxima do centro do duto,

esta vai aumentando. O perfil torna-se parabólico devido as forças viscosas presentes nas equações de Navier Stokes.

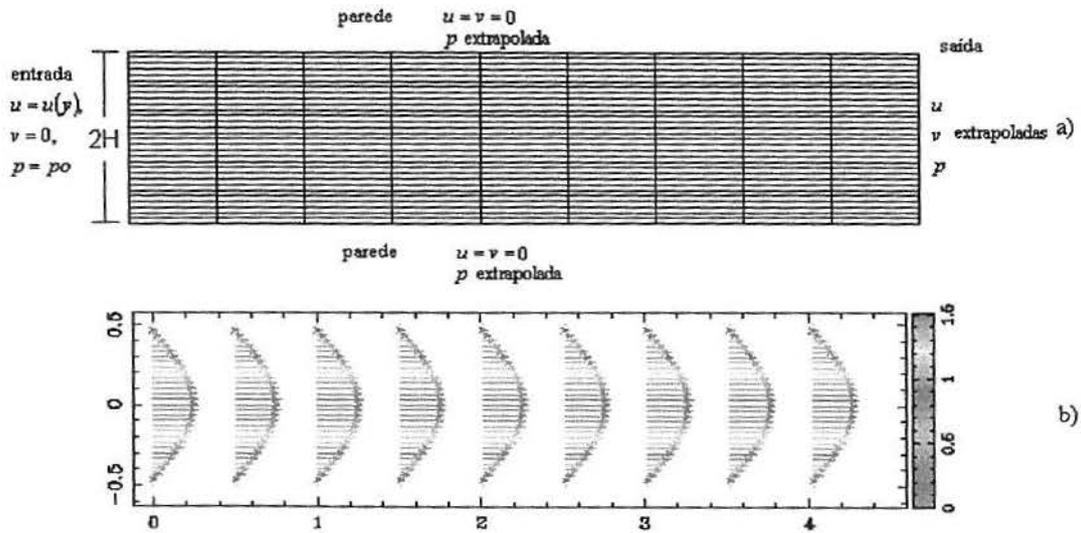


Figura 4.1: Ampliação da malha (a) e campo de velocidades (b) através do duto simples,  $31 \times 31$  pontos

Na fig. 4.2 compara-se o perfil obtido numericamente com o analítico para o escoamento plenamente desenvolvido num duto simples dado por [15]

$$u = 1,5 \left[ 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

onde  $H$  é metade da largura.

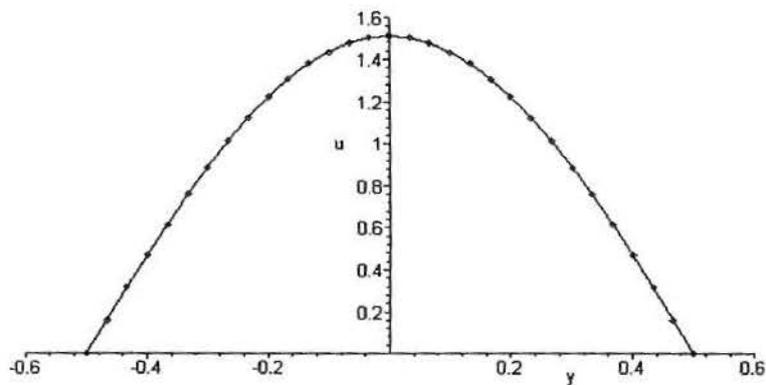


Figura 4.2: Comparação dos perfis de velocidade: (-) analítica (o) numérica

Os resultados obtidos estão de acordo com o que é apresentado na literatura [15], cujo perfil é mostrado na figura 4.3. Como o código desenvolvido apresentou resultados fisicamente consistentes para o duto simples, parte-se para o problema do duto curvo.

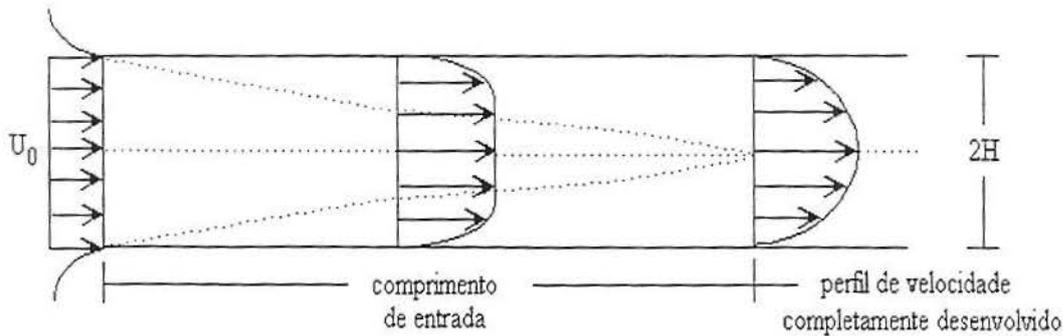


Figura 4.3: Perfil de velocidades para o duto simples[15]

#### 4.1.2 Duto Curvo

Para a análise do escoamento no duto curvo, utilizou-se uma malha de  $110 \times 31$  pontos a partir da junção de um duto simples com outro de  $60^\circ$ , como mostra a figura 4.4. Os raios interno e externo utilizados foram  $r_i = 1\text{cm}$  e  $r_e = 1,3\text{cm}$ , respectivamente, e o comprimento do duto simples é de  $L = 0,5\text{cm}$ .

Foi utilizado um fator de refinamento somente na direção  $\xi$ . Salienta-se que, utilizando uma malha mais refinada, o resíduo da equação da continuidade seria menor e, assim, obter-se-ia uma solução mais próxima da realidade.

A figura 4.5 mostra o campo de velocidades onde o número de Reynolds utilizado foi 790 e as condições de contorno são as mesmas do caso anterior. Pode-se observar novamente o perfil aproximadamente parabólico do escoamento, ocorrendo maior velocidade no lado interno do duto (centro do domínio). No início do escoamento a velocidade no lado interno do duto é um pouco maior que do lado externo; à medida que o escoamento avança esta situação se inverte.

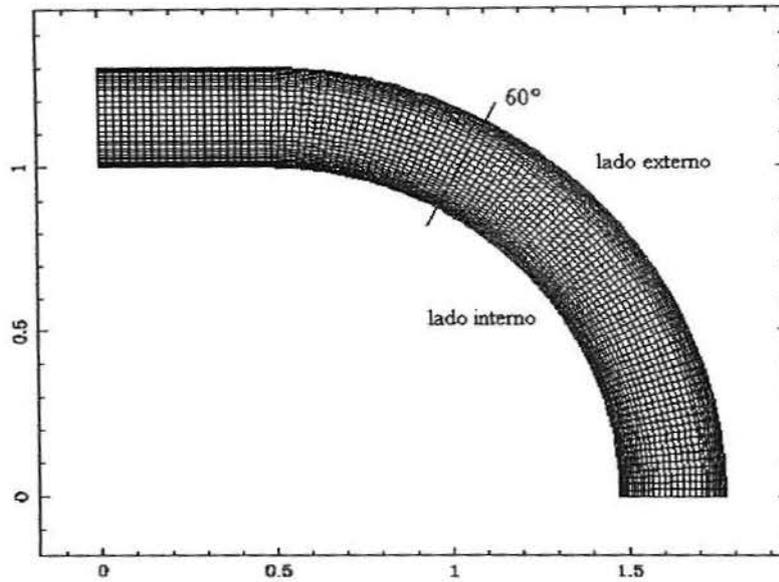


Figura 4.4: Malha para o duto curvo, 110x31 pontos

Foi comparado o perfil de velocidade a  $60^\circ$ , conforme mostra a figura 4.4. A figura 4.6 mostra a comparação entre o resultado numérico obtido no trabalho e o resultado experimental conforme McDonald [31].

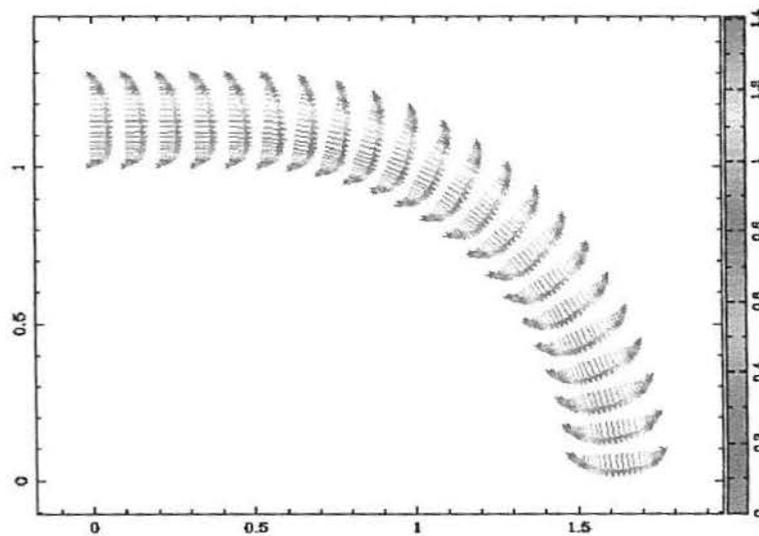


Figura 4.5: Vetores velocidade para o duto curvo,  $Re=790$

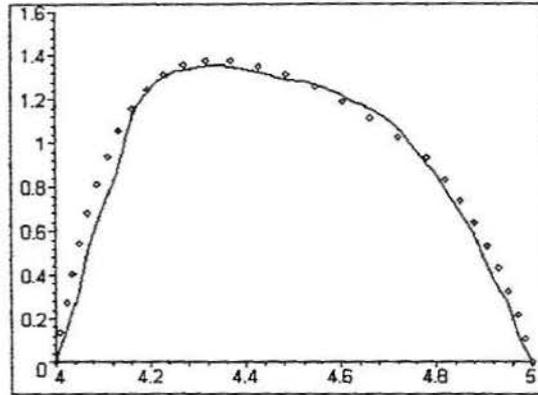


Figura 4.6: Comparação dos perfis de velocidade: (-) McDonald (o) numérico

A solução numérica assemelha-se à experimental. Percebe-se, na comparação, pequenas diferenças que podem estar associadas a diversos fatores, tais como medições imprecisas e refino da malha no lado interno do duto; de maneira global a solução é satisfatória. A seguir introduz-se o estudo da artéria carótida para o caso permanente.

#### 4.1.3 Artéria Carótida

A artéria carótida possui geometria complexa, principalmente na região do sinus (bulbo) que constitui um fator que eleva a complexidade do escoamento, como também observado por outros autores. Quanto à complexidade do escoamento, as características mais relevantes observadas na geometria da bifurcação da artéria carótida são: efeitos de curvatura nas junções das artérias carótidas comum - interna e comum - externa; alargamento do diâmetro na entrada da artéria carótida interna (sinos) que, abruptamente, se estreita na saída e assimetria quanto as ramificações das artérias carótidas interna e externa.

A malha utilizada foi obtida usando os contornos da geometria da artéria carótida analisada por van de Vosse [50] e dada por Bharadvaj et al. [5]. Na obtenção desta malha foram necessários vários refinamentos a partir dos quais verificou-se otimização da solução obtida. A figura 4.7 mostra a malha de 93x31

pontos utilizada no trabalho. É importante salientar que foi necessário uma maior concentração no sinus da carótida interna para melhor detectar as características do escoamento nessas regiões.

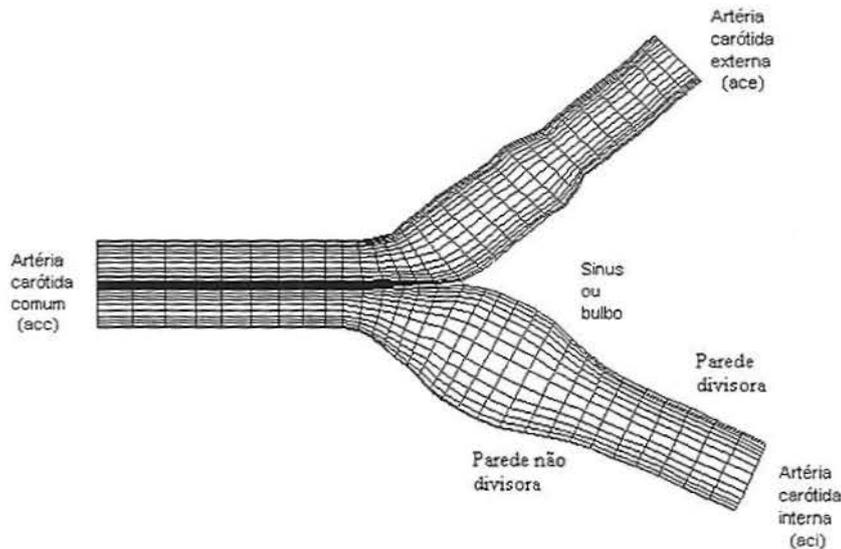


Figura 4.7: Malha para a carótida, 93x31 pontos

Para a análise do escoamento, apresenta-se inicialmente os vetores velocidade e as linhas de corrente na geometria completa da artéria carótida, para  $Re=250$ , como ilustra a figura 4.8.

Na entrada, observa-se que o perfil de velocidade axial é plenamente desenvolvido (parabólico) não havendo influência da bifurcação. Próximo à bifurcação e paredes, as velocidades diminuem devido à influência do alargamento da artéria carótida comum, resultando em pequenos gradientes de velocidades para estas paredes. Esta redução de velocidade prossegue dentro das ramificações levando à separação do fluxo. Nesta mesma região, o fluxo se divide numa proporção de 40% para a artéria carótida externa e 60% para a artéria carótida interna.

O escoamento nas ramificações torna-se mais complexo, como na entrada da artéria carótida interna. Nela, observa-se uma região de fluxo reverso na parede não divisora na junção das artérias carótidas comum-interna, que é con-

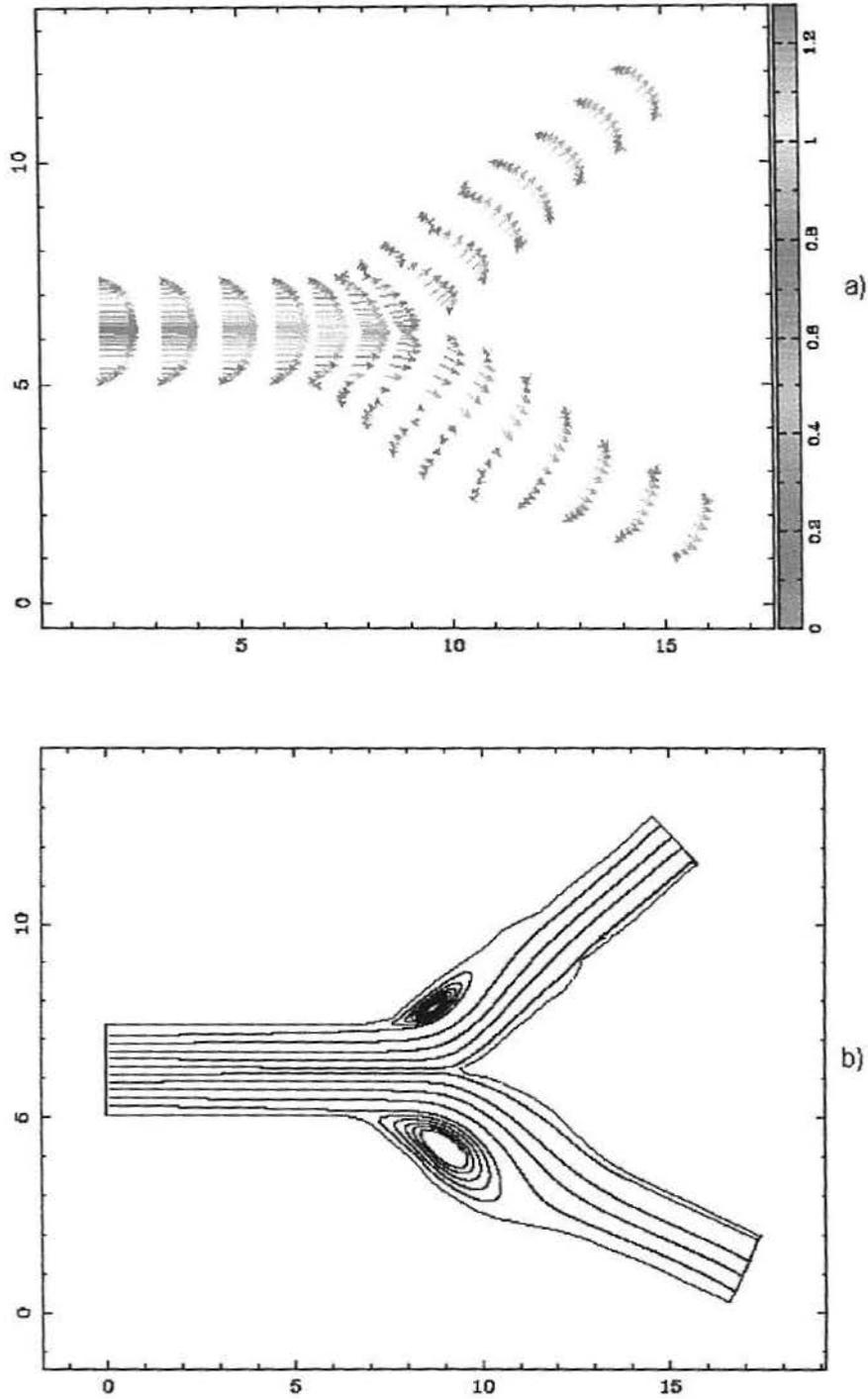


Figura 4.8: Campo de velocidade(a) e linhas de corrente(b) para a carótida,  $Re=250$

seqüência de sua geometria divergente. Fisicamente, um grande decréscimo da tensão é verificado, o que propicia o acúmulo de placas e gordura e a formação de estenose [7].

Quanto ao campo de velocidades na artéria carótida externa, este apresenta um gradiente de velocidade maior próximo à parede divisora da região da bifurcação e valores relativamente baixos no lado da parede não divisora, apresentando uma região de fluxo reverso proporcionalmente menor.

O escoamento na entrada da artéria carótida interna apresenta comportamento complexo, onde se observa: redução de velocidade devido à região do sinus; região de fluxo reverso com baixas velocidades na parede não divisora dos sinus, que é um efeito de sua geometria; velocidades maiores na parede divisora (influência do vértice de bifurcação); perfil de velocidade assimétrico com relação ao plano horizontal e mudança de velocidade axial em direção à parede divisora, devido ao efeito de forças centrífugas.

A região de fluxo reverso se deve, possivelmente, à geometria do bulbo apresentar um diâmetro maior que o da artéria carótida comum e menor vazão, situação esta que favorece ao surgimento de zonas de recirculação.

Na saída da artéria carótida interna o escoamento apresentou um aumento de velocidade devido a redução do diâmetro. Também apresentou perfil de velocidade aproximadamente parabólico, simétrico em relação ao eixo e altos gradientes de velocidade em ambas as paredes.

O perfil de velocidade axial e as tensões na parede na artéria carótida externa apresentam, ainda que de forma mais amena, as mesmas características encontradas para a artéria carótida interna, tais como: velocidade maior na parede divisora, velocidade menor na parede não divisora e assimetria no perfil de velocidade com relação ao eixo. A saída da artéria carótida externa também apresentou características semelhantes às da artéria carótida interna.

A figura 4.9 apresenta a comparação dos perfis de velocidade entre a solução numérica e os resultados de Van de Vosse em três posições para o caso permanente. As comparações foram realizadas utilizando medições, onde estipulou-se como parâmetro de escala o ponto  $(0, y_0)$ . Nesse ponto as duas soluções são iguais. Os símbolos representam a velocidade em cada ponto da malha e a linha contínua os perfis mostrados por Van de Vosse. Verifica-se boa concordância com respeito aos perfis comparados.

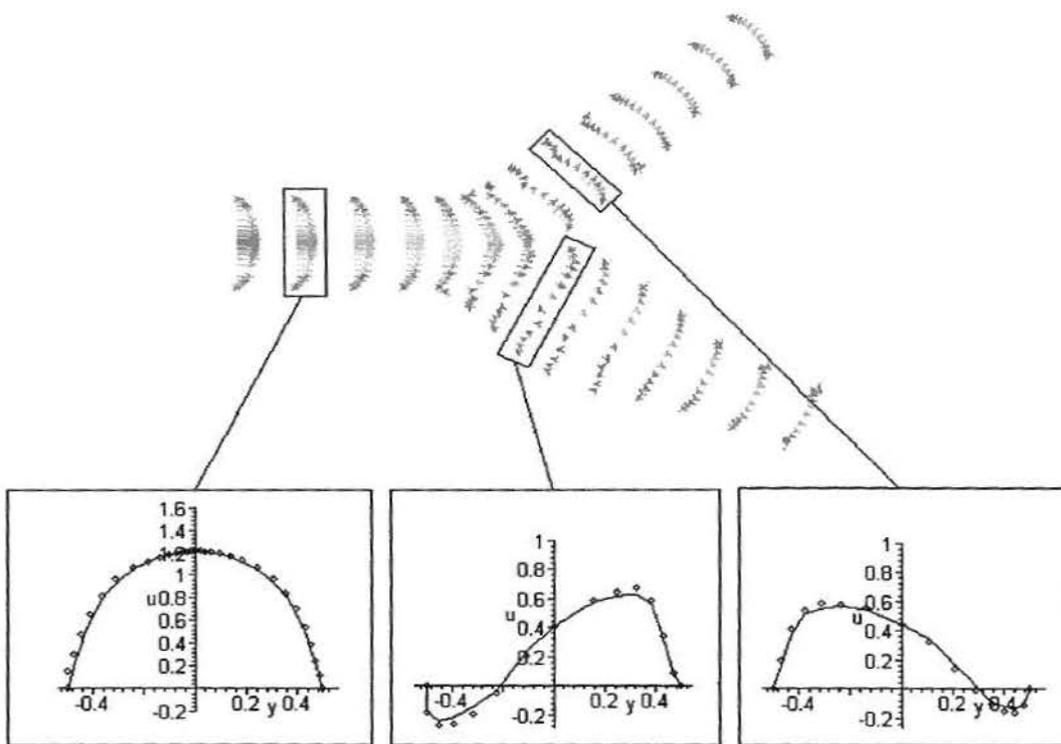


Figura 4.9: Comparação de perfis de velocidade: (-) Van de Vosse, (o) obtido,  $t/T=0.0$

Mostrados os resultados do regime permanente para a artéria carótida, segue a apresentação das soluções em regime transiente.

## 4.2 Regime transiente

O fluxo transiente na artéria carótida é caracterizado pela variação da vazão ao longo do tempo. Uma análise desse fluxo é importante, pois através da solução ao longo de um pulso pode-se verificar de forma razoável o que acontece no decorrer da pulsação sanguínea. Nesse ciclo, percebe-se diferenças significativas que ocorrem nos perfis de velocidade, com regiões de recirculação e baixa velocidade, que acabam se tornando locais com predisposição à formação de estenose. Os resultados obtidos correspondem a um ciclo pulsátil. Neles observa-se as diferenças no comportamento do fluxo para a sístole e a diástole.

Para o fluxo pulsátil as condições de entrada para as velocidades são dadas pela vazão  $Q^*$ , que depende do tempo (figura 4.10); usou-se distribuições de velocidade plenamente desenvolvidas ( $175 \leq Re \leq 693$ ). Como condição de saída, adota-se tensões livres para ambas artéria carótida externa (*ace*) e artéria carótida interna (*aci*) e condições de não deslizamento para as paredes.

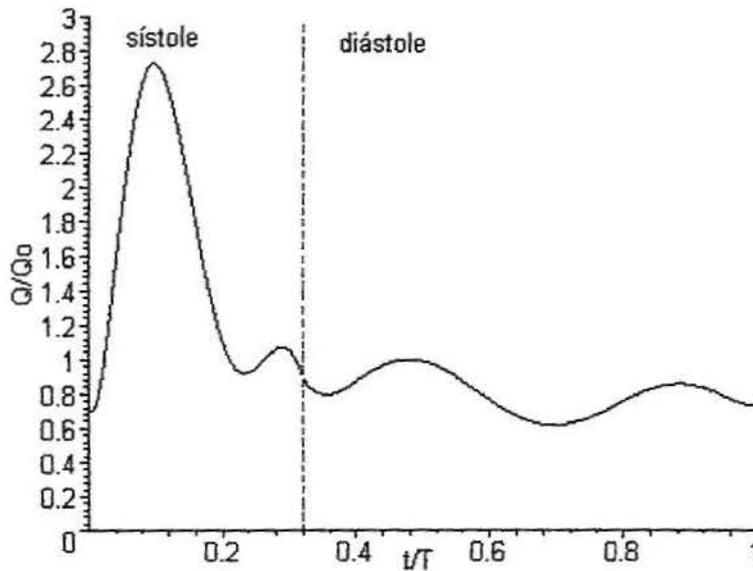


Figura 4.10: Curva do ciclo pulsátil

A solução obtida para o fluxo permanente com valores para o fim da fase diastólica foi utilizada como condição inicial para o cálculo transiente. O ciclo cardíaco, que corresponde às duas fases de pulsação (sístole/diástole), foi obtido experimentalmente por Ku (1983). Na figura 4.10 mostra-se o ciclo utilizado neste trabalho obtido via interpolação polinomial, sendo esta uma boa aproximação da curva real.

O polinômio utilizado é dado por

$$Q^* = -15.26\hat{t} + 1494.97\hat{t}^2 - 19035.93\hat{t}^3 + 95494.07\hat{t}^4 + \\ -212942.06\hat{t}^5 + 175942.14\hat{t}^6 + .74, \quad \hat{t} \leq 0,32 \quad (4.2)$$

$$Q^* = -864.69\hat{t} + 3663.76\hat{t}^2 - 7951.97\hat{t}^3 + 9344.14\hat{t}^4 \\ -5655.07\hat{t}^5 + 1382.06\hat{t}^6 + 82.51, \quad \hat{t} > 0,32 \quad (4.3)$$

onde  $Q^* = Q/Q_0$  e  $\hat{t} = t/T$ . Separou-se o polinômio interpolador do ciclo em dois intervalos a fim de evitar que o grau do polinômio seja muito elevado, o que elevaria o custo computacional. Ele foi obtido usando a interpolação polinomial de Lagrange dada por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) \quad (4.4)$$

onde

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)} \quad (4.5)$$

A seguir são apresentadas as soluções obtidas para o fluxo transiente. Na figura 4.11 compara-se os perfis de velocidade para  $t/T=0.08$  (pico da sístole). Durante a fase de aceleração sistólica, a velocidade aumenta rapidamente e o perfil de velocidade torna-se achatado para a *acc*. Na região da *aci* o fluxo reverso desaparece e os perfis estão mais ou menos arredondados, embora ainda a máxima magnitude dos perfis esteja na parede divisora. Para a *ace* os perfis de velocidade são achatados, onde não há presença de fluxo reverso.

A figura 4.12 mostra a comparação dos perfis de velocidade em  $t/T=0.16$ . Para a *acc*, na desaceleração sistólica, um pequeno trecho com fluxo reverso

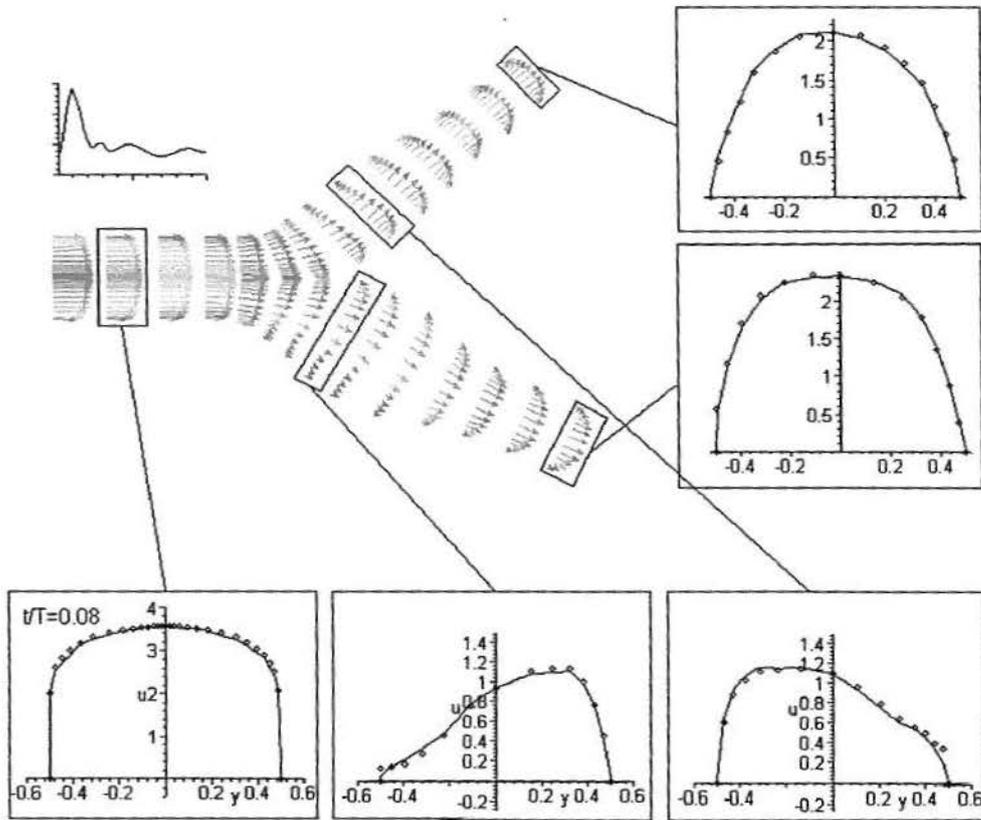


Figura 4.11: Comparação de perfis de velocidade: (-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente;  $t/T=0.08$

é observado próximo às paredes. Para *aci* percebe-se diferenças de velocidade no sinus. A região de fluxo reverso que aparece na parede não divisora ocupa em torno de 30% do diâmetro local e é associada a velocidades positivas altas na parede divisora. Seguindo o fluxo no sinus, a forma parabólica para o perfil de velocidade é retomada. Perto do fim da fase de desaceleração sistólica, os perfis de velocidade no sinus tornam-se ainda mais complicados. Na entrada do sinus, os perfis de velocidade na parede não divisora são caracterizados por uma região relativamente grande com velocidades negativas pequenas. No entanto, a região de fluxo reverso desloca-se da parede, resultando numa situação com velocidades negativas quase até o centro do sinus. Somente mais adiante o fluxo reverso retorna à parede. Durante a desaceleração sistólica, surge fluxo reverso na parede não divisora.

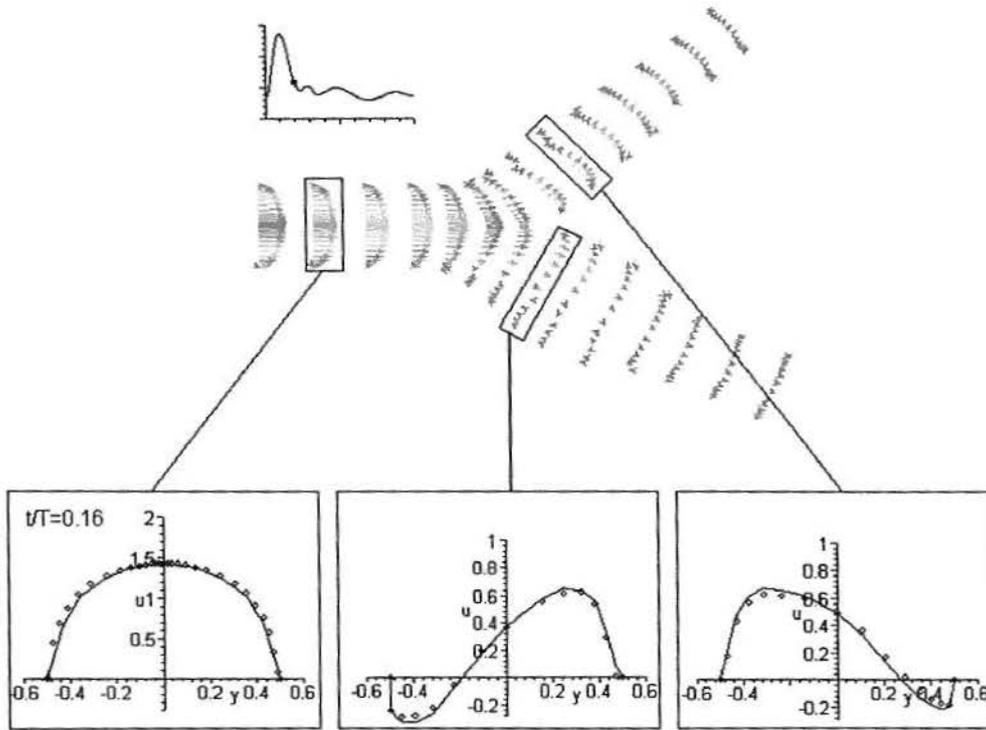


Figura 4.12: Comparação de perfis de velocidade: (-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente;  $t/T=0.16$

A figura 4.13 compara a solução para  $t/T=0.32$ . Para a *acc*, na fase diastólica, a distribuição de velocidade axial tende ao perfil parabólico novamente. Para a *aci*, no fim da fase diastólica do fluxo, a velocidade no sinus apresenta uma região com fluxo reverso (velocidades negativas baixas) na parede não divisora. Para a *ace* os perfis de velocidade mostram as mesmas características encontradas na *aci*. Fluxo reverso é encontrado na parede não divisora no fim da fase diastólica do ciclo cardíaco. Esta região, entretanto, possui proporções menores e tensões de cisalhamento mais baixas são encontradas na parede. Nota-se uma pequena discordância entre as soluções devido, possivelmente, ao refino da malha.

Finalmente, mostra-se na figura 4.14 a solução no fim da fase diastólica, que é semelhante ao início da fase sistólica do fluxo. Como o fluxo na diástole é quase estacionário, o perfil de velocidade pode ser descrito pelo transiente dos perfis dados de  $t/T=0.32$  até aqueles de  $t/T=0.00$ .

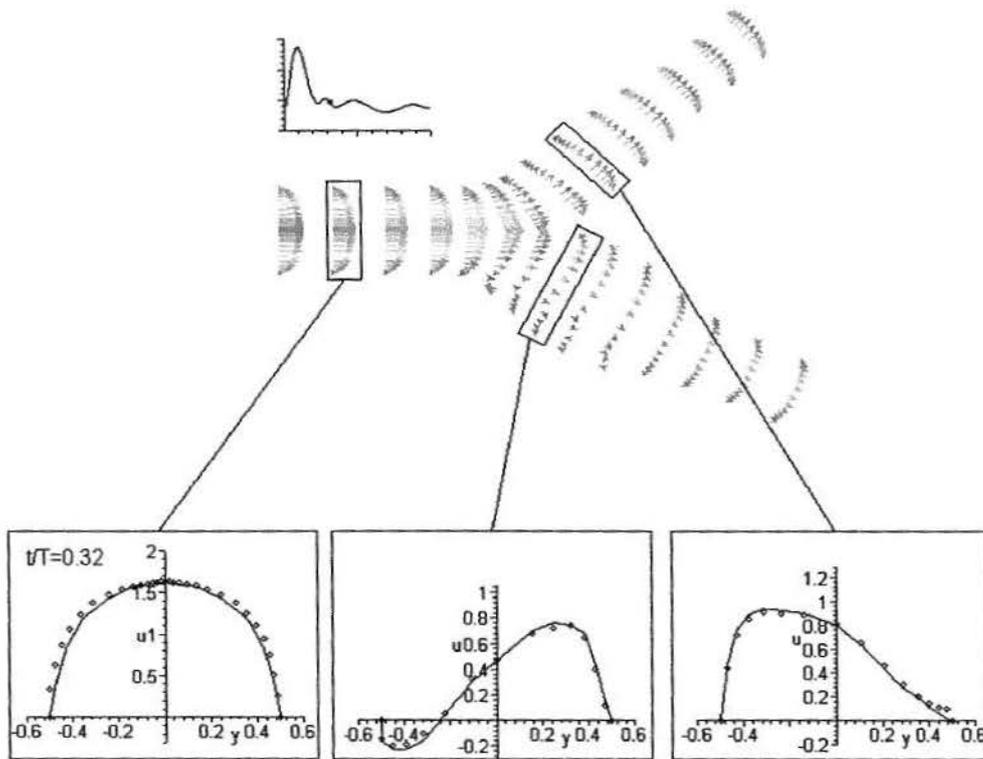


Figura 4.13: Comparação de perfis de velocidade: (-) Van de Vosse, (o) obtido numericamente;  $t/T=0.32$

Observa-se, nas comparações dos resultados, boa concordância em relação à forma dos perfis de velocidade para os diferentes instantes apresentados. Alguma não conformidade pode ser atribuída à diferença dos métodos utilizados, assim como devido à aproximação do ciclo pulsátil e a malha utilizada.

Se o fluxo fosse analisado como um pseudoplástico, não se esperaria diferenças significativas entre a solução pseudoplástica e a newtoniana obtida neste trabalho. Todavia, para o caso viscoelástico, espera-se uma diminuição no tamanho dos vórtices que ocorrem na carótida [17].

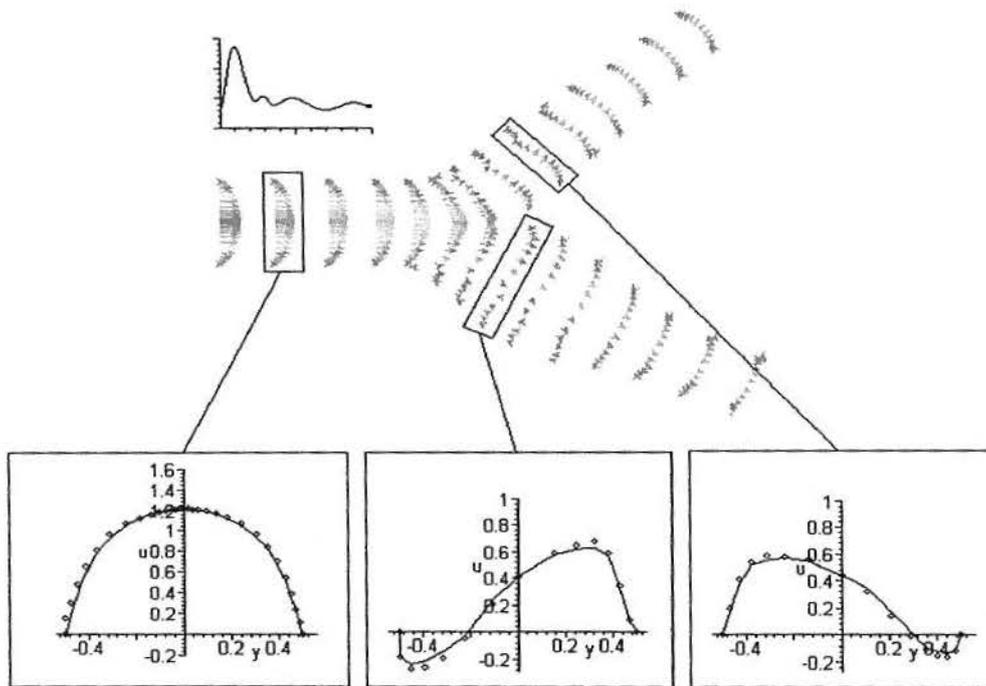


Figura 4.14: Comparação de perfis de velocidade: (-) Van de Vosse, (o) obtido,  $t/T=0.0; t/T=1$

Apresentados os resultados, parte-se para as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O presente trabalho teve como objetivo obter uma representação adequada do fluxo sanguíneo na bifurcação da artéria carótida e toda sua complexidade numa geometria bidimensional com paredes rígidas.

Verifica-se que o método numérico utilizado para o modelo em questão apresentou boa concordância com os resultados obtidos na literatura. Escolheu-se os trabalhos da tese de doutorado de van de Vosse em elementos finitos e experimentais para a comparação e validação deste trabalho.

Visando a calibração do código computacional, o fluxo em geometrias mais simples foi, primeiramente, analisado. No duto simples, cuja solução analítica é do tipo parabólica, as soluções encontradas estão em conformidade com o esperado, onde pode-se concluir que, para este escoamento, plenamente desenvolvido, não é necessário utilizar malha mais elaborada; devido à perda de carga ser mínima, a velocidade do fluido é praticamente constante ao longo do duto e o perfil é simétrico em relação ao eixo, onde não há nenhum tipo de recirculação.

Para o duto curvo, observa-se que uma malha mais refinada é necessária; verifica-se também que não há nenhum tipo de recirculação, sendo que o perfil é aproximadamente parabólico. Uma comparação entre o perfil de velocidade obtido e o da literatura a  $60^\circ$  no duto verifica o resultado.

Para a carótida, na entrada da *acc*, a influência da bifurcação não é percebida e o fluxo é plenamente desenvolvido. Os perfis de velocidade axial são aproximadamente parabólicos no fim da fase diastólica, achatam-se levemente no pico da sístole e gradualmente retornam à forma parabólica durante a desaceleração da sístole e a fase diastólica do fluxo. A parte mais próxima à bifurcação é caracterizada por um alargamento da artéria, o que representa diminuição da tensão de cisalhamento na parede, causando uma região de fluxo reverso com maior intensidade no fim da diástole.

Características com maior complexidade do fluxo são observadas no sinus da *aci*. Neste local, três fatores geométricos são importantes. Primeiro, no sinus existe um alargamento e posterior afunilamento da artéria. Segundo, a transição da *acc* para a *aci* exhibe propriedades de um tubo curvo. Finalmente, o fluxo é influenciado pela divisão do fluxo na bifurcação. No final da diástole, o fluxo é quase estacionário.

Observa-se que, devido à separação do fluxo e às características da transição da *acc* para a *aci*, os perfis de velocidade axial possuem máximo próximo à parede divisora do sinus e, portanto, nesta região a tensão de cisalhamento é maior. Os efeitos do alargamento e posterior estreitamento da artéria no sinus é mais claramente apresentado na parede não divisora, onde todas as características anteriores induzem à baixas e até mesmo negativas velocidades nesta região. Após o sinus, os perfis de velocidade axial são mais ou menos achatados no pico da sístole, onde não se encontra fluxo reverso. Nesta região da *aci*, gradualmente é retomado o fluxo plenamente desenvolvido como observado na *acc*.

O fluxo na *ace* apresenta características similares ao da *aci*, porém com menor intensidade, onde na parede não divisora fluxo reverso é observado no fim da desaceleração da sístole.

Como perspectivas para a continuação desse trabalho estão a inclusão de modelos para simular o sangue como um fluido não newtoniano, para artérias onde a aproximação de fluxo newtoniano não é válida. Um dos modelos a ser implementado é o convectivo de Maxwell para comportamento viscoelástico [49]. Para representar a viscoelasticidade, diversos modelos são usados na literatura [12].

O estudo ainda pode ser aprofundado com a análise da elasticidade das paredes da artéria, embora seu efeito no perfil de velocidade local seja pequeno. Espera-se também simular o fluxo usando uma geometria tridimensional a fim de representar de forma mais precisa o fenômeno físico, incluindo a detecção de estenose em determinadas regiões.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSON, J. D., DEGREZ, G., DICK, E., AND GRUNDMANN, R. *Computational Fluid Dynamics - An Introduction*. John F. Wendt - A Von Karman Institute Book - Springer, Germany, 1995.
- [2] ARAUJO, D. R. Considerações numéricas relativas à solução de escoamentos incompressíveis externos baseadas no método de Runge-Kutta. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2002.
- [3] BEJAN, A. *Transferência de Calor*. Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [4] BEJAN, A. *Convection and heat transfer*. John Wiley Sons, New York, 1995.
- [5] BHARADVAJ, B. K., MABON, R. F., AND GIDDENS, D. P. Steady flow in a model of the human carotid bifurcation. *J. Biomech. vol. 15* (1982), pp. 349–362.
- [6] BUTCHER, J. C. *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley-Interscience, Oxford University Press, New York, 1987.
- [7] CARVALHO, S. Uma simulação numérica do escoamento na artéria carótida. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 1998.
- [8] DAMASK, A. C. *Medical Physics*. Academic Press, New York, 1978.
- [9] DE BORTOLI, A. L. *Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [10] DING, Z., WANG, K., AND CONG, X. Flow field and oscillatory shear stress in a tuning-fork-shaped model the average human carotid bifurcation. *J. of Biomechanics vol. 34* (2001), pp. 1555–1562.

- [11] DRAZIN, P. G., AND REID, W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981.
  - [12] FERGUSON, J., AND KEMBLOWKI, Z. *Applied Fluid Rheology*. Elsevier, Cambridge, 1991.
  - [13] FLETCHER, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, vol. 1,2. Springer-Verlag, New York, 1988.
  - [14] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo, 2000.
  - [15] FOX, R. W., AND McDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 1998.
  - [16] GIDDENS, D. P., ZARINS, C. K., AND GLAGOV, S. The role of fluid mechanics in the localization and detection of atherosclerosis. *ASME J. Biomech. Engineering* vol. 115 (1993), pp. 588–594.
  - [17] GIJSEN, F. J. H., VAN DE VOSSE, F. N., AND JANSSEN, J. D. The influence of non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model. *Journal of Biomechanics* 32 (1999).
  - [18] GRESHO, P. M., AND SANI, R. L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 7, 10 (1987), 1111–1145.
  - [19] GUYTON, A. C. *Fisiologia Humana*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1996.
  - [20] HUGHES, W. F., AND BRIGHTON, J. A. *Dinâmica dos Fluidos*. Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1974.
  - [21] JUSTO, D. A. R. Geração de malhas, condições de contorno e discretização de operadores para dinâmica de fluidos computacional. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2001.
-

- [22] KIM, S., I., C. Y., JEON, A. H., HOGENAUER, B., AND KENSEY, K. R. A new method for blood viscosity measurement. *J. Non-Newtonian Fluid Mech. , Annals of Biomedical Engineering* 94 (2000), 47–56.
- [23] KU, D. N. *Hemodynamics and atherogenesis at the human carotid bifurcation*. Phd. thesis, Georgia Inst. Techn., Georgia, 1983.
- [24] KU, D. N., GIDDENS, D. P., ZARINS, C. K., AND GLAGOV, S. Pulsatile flow and atherosclerosis in the human carotid bifurcation. *ARTERIOSCLEROSIS vol. 5* (1985), pp. 293–302.
- [25] LAZZARETTI, R. S. Estenose carotídea hemodinamicamente significativa e assintomática em indivíduos com obstrução grave: prevalência e fatores de risco. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 1996.
- [26] LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids : stochastic and Numerical Modelling*. Cambridge University Press, Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [27] LIN, C. C., AND SEGEL, L. A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1974.
- [28] MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, Rio de Janeiro, 1995.
- [29] MANICA, R. Simulação de escoamentos incompressíveis não newtonianos em dutos com expansão brusca. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- [30] MANICA, R., AND DE BORTOLI, A. L. Simulation of incompressible non-newtonian flows through channels with sudden expansion using the power-law model. *Revista Tema* (2003).
- [31] MCDONALD, H., AND BRILEY, W. R. Some observations on numerical solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations. *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic flow* (1981), 99–120.

- [32] NAVIER, C. L. M. H. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France t. VI*. Paris, 1822.
- [33] NEREM, R. M. Vascular fluid mechanics, the arterial wall and atherosclerosis. *ASME J. Biomech. Engineering vol. 114* (1992), pp. 274–282.
- [34] OBERKAMPF, W. L., AND BLOTTNER, F. G. Issues in computational fluid dynamics code verification and validation. *AIAA Journal vol. 36 nr 5* (1998), pp. 687–695.
- [35] PEDROSO, C. A. Simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre superfícies móveis. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, janeiro 2001.
- [36] PERTKOLD, K., AND RAPPITSCH, G. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model. *J. Biomechanics 28* (1995), 845–856.
- [37] POISSON, S. D. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluids. *Journal de l'Ecole Polytechnique xiii*, 1 (1829).
- [38] ROACH, M. R. Biophysical analyses of blood vessel walls and blood flow. *Annual Review of Physiology 39* (1977), 51–71.
- [39] ROTT, N. Note on the History of Reynolds number. *Annu. Rev. Fluid Mech. vol. 22* (1990), pp. 1–11.
- [40] SALZAR, R. S., THUBRIKAR, M. J., AND EPPINK, R. T. Pressure-induced mechanical stress in the carotid artery bifurcation: a possible correlation to atherosclerosis. *J. Biomechanics 28* (1995), 1333–1340.
- [41] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [42] SITE:. [http://www.medem.com/medlb/article\\_detailb.cfm?article\\_id=zzz94llsiac&sub\\_cat=189](http://www.medem.com/medlb/article_detailb.cfm?article_id=zzz94llsiac&sub_cat=189), 2003.

- [43] STEINMAN, D. A., POEPPING, T. L., TAMBASCO, M., RANKING, R. N., AND HOLDSWORTH, D. W. Flow patterns at the stenosed carotid bifurcation: Effect of concentric versus excentric stenosis. *Annals of Biomedical Engineering* 28 (2000), 415–423.
- [44] STOKES, G. G. *On the theory of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids*, Cambridge ed., vol. 8-287. Trans. Cambridge Phil. Society, Inglaterra, 1845.
- [45] STREETER, V. L. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [46] TAMBASCO, M., AND STEINMAN, D. A. Transit times of shear exposed fluid elements in stenosed carotid artery bifurcation models. *Bioengineering Conference ASME* 50 (2001).
- [47] TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., AND PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2 ed. Taylor & Francis, Washington, 1997.
- [48] TANNER, R. I. *Engineering Rheology*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [49] TICHY, J. A. Non-newtonian lubrication with the Convected Maxwell Model. *Journal of Tribology* vol. 118 (1996), pp. 344–348.
- [50] VAN DE VOSSE, F. N. Numerical analysis of carotid artery flow. PhD Thesis, University of technology, Eindhoven, 1987.
- [51] VENNARD, J. K., AND STREET, R. L. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1978.
- [52] ZARINS, C. K., GIDDENS, D. P., BHARADVAJ, B. K., SOTTIURAI, V. S., AND MABON, R. F. Carotid bifurcation atherosclerosis quantitative correlation of plaque localization with flow velocity profiles and wall shear stress. *Circulation Research* vol. 53 (1983), pp. 502–514.

- [53] ZHAO, S. Z., XU, X. Y., HUGES, A. D., THOM, S. A., STANTON, A. V., ARIFF, B., AND LONG, Q. Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation. *Journal of Biomechanics* 33 (2000), 975–984.