UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Um Estudo de Modelos de Leontieff e Análise Insumo-Produto com o uso da Programação Linear

por

Ornélio João Wenzel

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeyssen
Orientador

Prof. Dr. Nelson Zang
Co-orientador

Porto Alegre, Outubro de 2003.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Wenzel, Ornélio João

Um Estudo de Modelos de Leontieff e Análise Insumo-Produto com o uso da Programação Linear / Ornélio João Wenzel.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2003.

64 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2003.
Orientador: Claeyssen, Julio César Ruiz; Co-orientador: Zang, Nelson

Dissertação: Matemática Aplicada
modelos de Leontieff, insumo-produto, programação linear

Um Estudo de Modelos de Leontieff e Análise Insumo-Produto com o uso da Programação Linear

por

Ornélio João Wenzel

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeyssen

Co-orientador: Prof. Dr. Nelson Zang

Banca examinadora:

Prof[a]. Dr[a]. Liara Aparecida dos Santos Leal
PUCRS

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo
UFPel

Prof[a]. Dr[a]. Liliane Basso Barichello
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
16 de Outubro de 2003.

Prof. Vilmar Trevisan, Ph.D.
Coordenador

SUMÁRIO

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é descrever o modelo econômico de Leontieff, que estuda o equilíbrio entre a oferta (dada pela produção de setores de atividade econômica) e a demanda (dada pelo consumo familiar e empresarial). A abordagem pode ser feita através do cálculo da matriz de Leontieff, sendo necessário o cálculo de uma matriz inversa. As dificuldades computacionais com relação à matriz inversa podem ser superadas mediante uma formulação em programação linear.

Foi realizada uma simulação com dados da atividade econômica no estado do Rio Grande do Sul, no ano de 1998, baseados no trabalho do Porsse, 2002, utilizando os programas de computador Lindo, Matlab e Excel.

ABSTRACT

The main objective of this work is to describe the Leontieff economical model, that studies the equilibrium between the economical supply (given by production of economical sectors) and demand (given by consumers). The approach can be done through the calculation of the Leontieff matrix, being necessary the calculation of an inverse matrix. The computational difficulties respect to the inverse matrix can be jumped by a linear programming formulation.

A simulation with real data of economical activity in Rio Grande do Sul state, in 1998, based on Porsse's work, 2002 was made, using computer programs: Lindo, Matlab and Excel.

1 INTRODUÇÃO

O método entrada-saída, que consiste num modelo matemático, foi desenvolvido para estudar o fluxo de bens e serviços entre os vários setores da economia. Esse método tem-se mostrado bastante útil quando da realização de previsões em que se procuram analisar e medir, em termos de fluxo monetário, as conexões entre os centros consumidores e produtores de um sistema econômico. A importância e validade da Análise de Entrada-Saída têm sido firmemente estabelecidas pela grande aceitação que teve esse método. Hoje, sejam nações desenvolvidas ou, menos desenvolvidas, utilizam esse método para o estudo das relações entre os diversos setores de sua economia. Para ilustrar, podemos afirmar que estamos bastante acostumados com uma série de slogans, como: "exportar é o que importa". "A agricultura é a grande prioridade". "A principal meta é a geração de empregos". Em termos de penúria, palpite é o que não falta. Em geral, não dá para discordar dos slogans. Afinal, quem seria contra incentivar as exportações, estimular a produção agrícola ou gerar empregos? O problema está em fazer tudo isto ao mesmo tempo ou, pelo menos, em atender as principais reivindicações numa crise. Não adianta um médico curar a dor de garganta de um paciente com um antibiótico que lhe arrebente o estômago. Também não vale gerar superávits comerciais recordes jogando a economia no buraco, para evitar que as importações aumentem. Ou dar todo tipo de incentivo a um setor gerador de empregos mas fortemente importador. Para enfrentar dilemas dessa natureza torna-se necessário algum grau de planejamento econômico. Para tanto, não basta ter ministérios e uma vasta equipe econômica. Mesmo que seja competente. Isto porque as decisões sobre se um setor deverá expandir ou contrair, quantos empregos serão gerados ou extintos, etc... são essencialmente políticos. Seria errôneo pensar que a discussão técnica ligada ao planejamento não seja importante. Apesar de insuficiente, um bom instrumental estatístico pode ser muito útil. Para tanto,em sua versão "estática", a análise de insumo-produto do Professor Leontieff trata da seguinte questão: *qual nível de produção cada uma* *das n indústrias de uma economia deve adotar para que a demanda pelos diferentes produtos seja exatamente satisfeita?*

A razão para o termo análise de insumo-produto pode-se entender de forma que para a produção de uma indústria qualquer, é necessária como um insumo em muitas outras indústrias e/ou também, posssivelmente, em si própria; portanto, o nível "correto" de produção depende das necessidades de insumo de todas as n indústrias. Por sua vez, os produtos de muitas outras indústrias entram como insumo na indústria x e, conseqüentemente, os seus níveis "corretos" de produção dependem parcialmente das necessidades de insumos daquela indústria. Em função dessa interdependência nas relações interindustriais, qualquer conjunto de níveis "corretos" de produção das n indústrias precisa ser consistente com as necessidades de insumos da economia de modo que não surjam outros pontos de estrangulamento em nenhum lugar. Sob esse ponto de vista, torna-se claro que a análise de insumo-produto deve ser de grande utilidade no planejamento da produção, como nos casos do planejamento para o desenvolvimento de um país ou de elaboração de um programa de defesa nacional.

Estritamente falando, a análise de insumo-produto não é uma forma da análise de equilíbrio geral. Embora seja enfatizada a interdependência das várias indústrias, os níveis "corretos" de produção considerados são aqueles que satisfazem relações técnicas de insumo-produto, ao invés de condições de equilíbrio de mercado. Apesar disso, o problema colocado pela análise de insumo-produto também se reduz à solução de um sistema de equações simultâneas, para o qual a álgebra matricial pode novamente ser útil.

2 MODELO ESTÁTICO DE INSUMO-PRODUTO DE LEONTIEFF

2.1 Estrutura de um Modelo de Insumo-Produto

Já que um modelo de insumo-produto normalmente abrange um grande número de indústrias, a sua estrutura é, necessariamente, complicada. Para simplificar o problema, os seguintes supostos são, em regra, adotados:

1. cada indústria produz apenas uma mercadoria homogênea (interpretado em sentido amplo, este suposto admite o caso de duas ou mais mercadorias produzidas conjuntamente, desde que elas sejam produzidas em proporções fixas entre si);
2. cada indústria usa uma razão fixa de insumos (ou combinação de fatores) para a produção de seu produto;
3. a produção em todas as indústrias está sujeita a rendimentos constantes de escala, de modo que, se todos os insumos variam na mesma proporção k, o produto varia exatamente nessa proporção. Estes supostos são, obviamente, irrealistas.

Como defesa das simplificações quanto a esse aspecto, pode-se dizer, no entanto, que, se uma indústria produz duas mercadorias diferentes ou duas diferentes combinações possíveis de fatores, então essa indústria pode pelo menos conceitualmente ser tratada como duas indústrias separadas.

Desses supostos vemos que, para a produção de uma unidade da j-ésima mercadoria, os insumos necessários da i-ésima mercadoria são, necessariamente, uma quantidade fixa, a qual denotaremos por a_{ij}. Especificamente, a produção de uma unidade da j-ésima mercadoria, para qualquer nível de produção, requer a_{1j} (quantidade) da primeira mercadoria, a_{2j} da segunda mercadoria,..., e a_{nj} da n-ésima mercadoria. (A ordem dos subscritos em a_{ij} é lembrada considerando-se o primeiro subscrito que refere-se ao insumo e o segundo ao produto, de modo que a_{ij} indica quanto da i-ésima mercadoria é usada para a produção de cada unidade da j-ésima mercadoria.) Para nossos objetivos, podemos supor que os preços são dados e, portanto, adotar "o valor em reais" de cada mercadoria como sua unidade. Então, a afirmação $a_{32} = 0{,}35$ significa que 35 centavos do valor da terceira mercadoria são requeridos como insumos para produzir o valor de um real da segunda mercadoria. O símbolo a_{ij} será chamado de coeficiente de insumo-produto.

Para uma economia contendo n indústrias, os coeficientes de insumo-produto podem ser arranjados na forma de uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, como na Tabela 2.1, na qual cada coluna especifica os requisitos de insumos para a produção de uma unidade do produto de uma indústria específica. A segunda coluna, por exemplo, afirma que, para se produzir uma unidade (valor em reais) da mercadoria II, os insumos necessários são: a_{12} unidades da mercadoria I, a_{22} unidades da mercadoria II, etc. Se nenhuma indústria usar o seu próprio produto como insumo, então os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}$ serão todos nulos.

Insumo	Produto				
	I	II	III	...	N
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
N	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nn}

Tabela 2.1: *Matriz de insumo-produto*

2.2 O Modelo Aberto de Leontieff

Se, além das n indústrias, o modelo contém um setor "aberto" (digamos famílias) que determina exogenamente uma demanda final (demanda não-intermediária) pelo produto de cada indústria e que fornece um insumo primário (digamos, serviços do trabalho) não produzido pelas n indústrias, então o chamamos de um modelo aberto.

Em face da presença do setor aberto, a soma dos elementos em cada coluna da matriz de coeficientes de insumo-produto (ou matriz de insumo-produto, para abreviar) necessita ser inferior a 1. Cada soma dos elementos de uma coluna representa o custo parcial de insumos (não incluindo o custo do insumo primário) correspondente à produção do valor de um real de uma mercadoria; se esta soma é maior ou igual a R1, 00, portanto, sua produção não é economicamente justificável. Simbolicamente, este fato pode ser formulado como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{2.1}$$

onde a soma é feita sobre i, isto é, sobre os elementos que aparecem nas várias linhas de uma coluna específica j. Avançando neste raciocínio, pode-se afirmar também que, já que o valor da produção (R\$ 1, 00) necessita ser completamente absorvido pelo pagamento de todos os fatores de produção, a diferença entre a soma da coluna de R\$ 1, 00 representa, necessariamente, o pagamento ao insumo primário do setor aberto. Portanto, o valor do insumo primário necessário à produção de uma unidade da j-ésima mercadoria deve ser $1 - \sum i1na_{ij}$.

Se a indústria I opera a um nível de produção exatamente necessário para satisfazer as necessidades de insumos das n indústrias, assim como a demanda final do setor aberto, o seu nível de produção precisa satisfazer a seguinte operação:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 \tag{2.2}$$

ou

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = d_1 \tag{2.3}$$

onde d_1 denota a demanda final pelo seu produto e $a_{1j}x_j$ representa o requisito de insumo da j-ésima indústria. Note-se que, exceto o primeiro coeficiente, $(1 - a_{11})$, os demais, presentes na última equação, são tomados diretamente da primeira linha da tabela 1.1, com a única diferença de que são precedidos por um sinal de menos.

Analogamente, a equação que corresponde à indústria II terá os mesmos coeficientes da segunda linha da tabela 1.1 (novamente, com os sinais de subtração precedendo-os), excetuando-se o da variável x_2 que terá como coeficiente $(1 - a_{22})$ no lugar de $-a_{22}$. Para o conjunto de todas as n indústrias, os níveis "corretos" de produção podem, portanto, ser resumidos pelo seguinte sistema de n equações lineares:

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= d_1 \\ -a_{21}x_2 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (1-a_{nn})x_n &= d_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

que, em notação matricial, pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ou, ainda como,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2.6}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $\mathbf{x} = [x_i]_n$ e $\mathbf{d} = [d_i]_n$. A matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ é chamada a *matriz tecnológica*, o vetor $\mathbf{x}$ o vetor das variáveis e o vetor $\mathbf{d}$ o vetor da demanda final (de termos constantes).

Se $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ é não-singular - e não existe nenhuma razão a priori para que ela o seja - então pela inversa $(\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$ na equação (2.6)anterior teremos uma solução única

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \tag{2.7}$$

2.2.1 Exemplo numérico

Com o objetivo de ilustração, suponha-se que existam três indústrias na economia e que a matriz de insumo-produto seja a seguinte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Note-se que, em $\mathbf{A}$, a soma de cada coluna é menor do que 1, como deve ser. Agora, se denotarmos por a_{0j} o valor em reais do insumo primário usado na produção do valor de um real da j-ésima mercadoria, então podemos escrever (subtraindo-se a soma de cada coluna em A acima de 1):

$$a_{01} = 0,3 \qquad a_{02} = 0,3 \quad \text{e} \quad a_{03} = 0,4. \tag{2.9}$$

O que representa a diferença entre 1 e a soma dos elementos a_{ij} Com a matriz $\mathbf{A}$ acima, o sistema aberto de insumo-produto pode ser expresso na forma $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$ como segue:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Aqui, deliberadamente não são atribuídos valores específicos às demandas finais d_1, d_2 e d_3. Desta maneira, mantendo-se o vetor $\mathbf{d}$ em forma paramétrica, nossa solução apresentará uma "fórmula" na qual podem-se substituir muitos vetores $\mathbf{d}$ específicos e, assim, obter várias soluções específicas correspondentes.

Invertendo-se a matriz tecnológica $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$, a solução do sistema aberto de insumo-produto acima pode ser achada

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1,71875 & 0,78125 & 0,625 \\ 0,88541\bar{6} & 1,61458\bar{3} & 0,625 \\ 0,546875 & 0,703125 & 1,5625 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Se o vetor específico de demanda final (por exemplo, a meta de produtos finais de um programa de desenvolvimento) for $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bilhões de reais, então a seguinte solução específica emergirá (novamente, em bilhões de reais):

$$\bar{x}_1 = 1,71875(10) + 0,78125(5) + 0,625(6) = 24,84375; \tag{2.12}$$

$$\bar{x}_2 = 0,885416\bar{6}(10) + 1,614583\bar{3}(5) + 0,625(6) = 20,677083\bar{3}; \tag{2.13}$$

e

$$\bar{x}_3 = 0,546875(10) + 0,703125(5) + 1,5625(6) = 18,359375. \tag{2.14}$$

Uma questão importante surge agora. A produção da combinação de quantidades $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ requer, forçosamente, uma quantidade determinada do insumo primário. Será essa quantidade requerida consistente com a que se encontra disponível na economia? Com base em a_{01} , a_{02} e a_{03} anteriormente considerado, pode-se calcular os insumos primários requeridos da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{0j}\bar{x}_j = 21,0 \text{ bilhões de reais.} \tag{2.15}$$

Portanto, a demanda final específica $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ será viável se e somente se a quantidade disponível do insumo primário for pelo menos 21 bilhões de reais. Se a quantidade disponível for menor, então a meta específica de produção precisará, obviamente, ser reajustada para baixo.

Uma característica importante da análise acima desenvolvida está em que, enquanto não houver mudanças nos coeficientes de insumo-produto, a inversa $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ permanecerá válida; portanto, apenas uma inversão de matriz é necessária, mesmo que se considerem cem ou mil vetores diferentes de demanda final- como um espectro de metas alternativas de desenvolvimento. Isto pode gerar economias consideráveis de esforço computacional quando comparado com o método de eliminação de variáveis, especialmente quando lidamos com sistemas de muitas equações.

2.3 O Cálculo da Inversa por Aproximação

Para sistemas que contém muitas equações, a tarefa de inverter a matriz pode ser extremamente demorada e tediosa. Embora os computadores eletrônicos possam ajudar, esquemas computacionais mais simples são, ainda assim, desejáveis. Para os modelos de insumo-produto que estão sendo considerados, existe um método de se achar a inversa $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ por aproximação que permite alcançar-se qualquer grau de precisão desejável. Torna-se possível, portanto, evitar inteiramente a inversão da matriz pelo cálculo de uma aproximação a ela.

É considerada inicialmente a seguinte multiplicação de matrizes, onde m é um inteiro positivo,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^m) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{m+1} \tag{2.16}$$

Tivesse o resultado da multiplicação sido apenas a matriz identidade $\mathbf{I}$, poderíamos ter considerado a soma de matrizes $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^m)$ como a inversa de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. É a presença do termo $-\mathbf{A}^{m+1}$ o qual exige maior atenção e cuidado no cálculo. Felizmente, no entanto, ainda resta uma alternativa não ótima - porém aceitável - pois, se puder-se fazer a matriz $\mathbf{A}^{m+1}$ tender a uma matriz nula, então $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{m+1}$ tenderá a $\mathbf{I}$ e, conseqüentemente, a soma $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^m)$ tenderá à inversa desejada $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Ao fazer $\mathbf{A}^{m+1}$ tender a uma matriz nula, portanto, pode-se obter uma aproximação à inversa pela adição das matrizes $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^m$.

Pode-se, no entanto, fazer $\mathbf{A}^{m+1}$ tender a uma matriz nula. E, se assim for, como? A resposta à primeira pergunta é sim, se - como é verdade nos modelos de insumo-produto ora considerados- os elementos em cada coluna da matriz A são números não-negativos cuja soma seja menor do que 1, como ilustrado no exemplo numérico. Nesses casos, pode-se fazer $\mathbf{A}^{m+1}$ tender a uma matriz nula, se a potência m for considerada suficientemente grande, isto é, por um processo suficientemente longo de repetidas multiplicações da matriz A por si mesma. Esquematizar-se-á a prova desta afirmação nesta seção; mas se, por enquanto, é aceita como verdadeira, o procedimento de cálculo da aproximação à inversa torna-se bastante claro: podemos simplesmente calcular as matrizes sucessivas $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, ..., até que surja uma matriz $\mathbf{A}^{m+1}$ cujos elementos, julgados por um critério predeterminado, sejam todos de uma ordem de grandeza insignificante ("tendendo a zero"). Quando isto ocorre, podemos concluir o processo de multiplicação e somar todas as matrizes já obtidas, formando a aproximação $\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^m\right)$ à inversa.

Note-se que quando a matriz $\mathbf{A}$ é tal que $\mathbf{A}^{m+1}$ tende à matriz nula à medida que m aumenta indefinidamente, a aproximação $\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^m\right)$ à inversa possui, também, a propriedade que todos os seus elementos são não-negativos. Os primeiros dois termos da soma, $\mathbf{I}$ e $\mathbf{A}$, contém, obviamente, apenas elementos não-negativos. E o mesmo também deve ocorrer com todas as potências de $\mathbf{A}$, já que a multiplicação de $\mathbf{A}$ por si mesma envolve nada mais do que a multiplicação e adição dos elementos não-negativos da própria matriz $\mathbf{A}$. Por outro lado, o vetor de demanda final $\mathbf{d}$ contém também apenas elementos não-negativos, e já que $\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{d}$, fica claro que as soluções para os níveis de produção são necessariamente não-negativas. Isto é exatamente o que desejávamos que eles fossem.

Agora esquematiza-se a prova da afirmação que dada uma matriz de coeficientes de insumo-produto não-negativos $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ cujas somas das colunas sejam todas menores do que 1, a matriz $\mathbf{A}^{m+1}$ tenderá a uma matriz nula à medida que m seja aumentado indefinidamente. Para esta demonstração, precisa-se do conceito de norma de uma matriz $\mathbf{A}$, definida como a maior das somas de colunas de $\mathbf{A}$ e denotada por $\|A\|$. Na matriz de exemplo numérico anterior, por exemplo, tem-se $\|A\| = 0,7$; esta é a soma da primeira coluna que, neste caso, é também igual à soma da segunda. Fica imediatamente claro que nenhum elemento da matriz pode exceder o valor da norma, isto é,

$$a_{ij} \leq \|\mathbf{A}\|, \quad \forall i, j. \tag{2.17}$$

No contexto de insumo-produto, tem-se $||\mathbf{A}|| < 1$ e todos $a_{ij} < 1$. Na verdade, sendo a matriz $\mathbf{A}$ não-negativa, tem-se, necessariamente,

$$0 < ||\mathbf{A}|| < 1. \tag{2.18}$$

Com relação a normas de matrizes, afirma-se que, dadas duas matrizes quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a norma da matriz produto $\mathbf{AB}$ não pode nunca exceder o produto de $||\mathbf{A}||$ e $||\mathbf{B}||$:

$$||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}||||\mathbf{B}||. \tag{2.19}$$

Esta última desigualdade, junto com um processo de indução sobre m, prova que

$$||\mathbf{A}^m|| \leq ||\mathbf{A}||^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

É sob esse ponto de vista que o fato de $0 < ||\mathbf{A}|| < 1$ adquire relevância, pois à medida que m tende a infinito $||\mathbf{A}||^m$ tende necessariamente a zero. E já que $||\mathbf{A}^m|| \leq ||\mathbf{A}||^m$, isto significa que $||\mathbf{A}^m||$ também tende a zero. Portanto, visto que nenhum elemento da matriz $\mathbf{A}^m$ pode exceder o valor de sua norma $||\mathbf{A}^m||$, ao fazer-se m suficientemente grande, impõe-se que $\mathbf{A}^{m+1}$ tenda a uma matriz nula, se a condição $0 < ||\mathbf{A}|| < 1$ é satisfeita.

2.4 O Modelo Fechado de Leontieff

Se o vetor exógeno do modelo aberto de insumo-produto for absorvido no sistema como apenas outra indústria, este último tornar-se-á um modelo fechado. Neste, a demanda final e o insumo primário não aparecem; em seu lugar aparecerão os requisitos de insumos e a produção da nova indústria concebida. Todos os bens serão de natureza intermediária, pois tudo que for produzido no sistema o será apenas com a finalidade de satisfazer os requisitos de insumos para as $n+1$ indústrias do mesmo.

À primeira vista, a conversão do setor aberto em uma indústria adicional não pareceria criar uma mudança significativa da análise. Entretanto, já que a nova indústria possui, por hipótese, coeficientes fixos de insumo-produto como as demais, a oferta do que antes era considerado o insumo primário mantém agora, necessariamente, uma proporção fixa com o que antes era considerado demanda final. Mais concretamente, isto pode significar que, por exemplo, as famílias consumirão cada mercadoria em proporções fixas aos serviços produtivos que elas fornecem. Isto certamente constitui uma mudança significativa na estrutura analítica utilizada.

Matematicamente, a eliminação das demandas finais significa que passamos a ter um sistema de equações homogêneas. Supondo-se a existência de apenas quatro indústrias (incluindo a nova, designada pelo subscrito 0), os níveis de produção "corretos" serão, por analogia com notação matricial anterior, aqueles que satisfizeram o sistema de equações

$$\begin{pmatrix} (1-a_{00}) & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{20} & -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Sendo homogêneo, este sistema de equações admite uma solução não-trivial, se e somente se, a matriz tecnológica $\left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}$ possui um determinante nulo. Esta condição é satisfeita sempre: em um modelo fechado não existe insumo primário; portanto, a soma de cada coluna na matriz de coeficientes de insumo-produto $\bar{\mathbf{A}}$ é exatamente igual (ao invés de menor do que) a 1, isto é,

$$a_{0j} + a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = 1, \tag{2.22}$$

ou

$$a_{0j} = 1 - a_{1j} - a_{2j} - a_{3j} \tag{2.23}$$

Mas isto implica que, em cada coluna da matriz $\left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}\right)$ acima, o elemento superior é sempre igual ao negativo da soma dos três outros elementos. Conseqüentemente, as quatro linhas são linearmente dependentes e $\det\left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}\right) = 0$. Isto garante que o sistema posssui soluções não-triviais; com efeito, ele possui um número infinito delas. Isto significa que em um modelo fechado, com um sistema de equações homogêneas, não existe um único nível "correto" de produção. Podemos, isto sim, determinar as proporções relativas de produção 1, ... , 4, mas não seus níveis absolutos, a não ser que restrições adicionais sejam impostas ao modelo.

2.5 Limitações da Análise Estática

Na discussão do equilíbrio estático de mercado, ou da renda nacional, o objetivo principal foi achar os valores de equilíbrio das variáveis endógenas do mercado. Um ponto fundamental que foi ignorado nessa análise é o processo real de ajustamento e reajustamento das variáveis que conduz ao estado de equilíbrio (se este for possível). Foi respondida a pergunta "onde chegar" e não "quando", ou o que ocorre ao longo do caminho.

O tipo de análise estática falha, ao não levar em consideração dois problemas importantes. O primeiro reside em que, se o processo de ajustamento envolve um período longo para se completar, então o estado de equilíbrio, determinado pelo contexto específico de análise estática, pode perder sua relevância antes mesmo de ser atingido já que as forças exógenas do modelo podem sofrer mudanças durante o período. Este é o problema de mudanças do estado de equilíbrio. O segundo reside em que, ainda que o processo de ajustamento siga o seu curso sem impedimentos, o estado de equilíbrio concebido pela análise estática pode ser inatingível. Este seria o caso do chamado "equilíbrio instável", caracterizado pelo fato de que o processo de ajustamento conduz as variáveis para posições mais distantes do equilíbrio, ao invés de aproximá-las progressivamente do mesmo. Ignorar o processo de ajustamento, portanto, implica supor ausente o problema da atingibilidade do equilíbrio.

As mudanças do estado de equilíbrio (em resposta a variações exógenas) pertencem ao tipo de análise conhecido como estática comparativa, enquanto as equações de atingibilidade e estabilidade de equilíbrio são estudadas pela análise dinâmica. Cada uma delas preenche um vazio significativo da análise estática.

3 MODELOS DINÂMICOS DE INSUMO-PRODUTO DE LEONTIEFF

Quando Leontieff enfrentou-se pela primeira vez com a análise de insumo-produto, a questão central foi: quanto deve ser produzido em cada indústria para que os requisitos de insumos de todas as indústrias e a demanda final (sistema aberto) sejam satisfeitos? O contexto era estático e o problema era resolver um sistema de equações simultâneas para achar os níveis de produção de equilíbrio de todas as indústrias. Quando são incorporadas certas considerações econômicas adicionais ao modelo, o sistema de insumo-produto pode assumir um caráter dinâmico, com o que é gerado um sistema de equações diferenciais, ou em diferenças.

Três desses elementos dinamizadores serão estudados aqui. Contudo, para manter simplicidade na exposição, usar-se-á sistemas abertos contendo apenas duas indústrias. Apesar disso, já que é empregada a notação matricial, a generalização para o caso de n indústrias não é difícil; basta mudar devidamente as dimensões das matrizes envolvidas. Visando essa generalização, será conveniente denotar as variáveis não por x_t e y_t, mas por $x_{1,t}$ e $x_{2,t}$, o que permitirá escrever $x_{n,t}$ quando for necessário. Recordando que, no contexto de insumo-produto, x_i representa o produto (medido em reais) da i-ésima indústria; o novo subscrito t acrescenta agora uma dimensão temporal a essa variável. Os símbolos dos coeficientes de insumos a_{ij} continuarão a representar o valor requerido em reais da i-ésima mercadoria para a produção de um real da j-ésima mercadoria, assim como d_1 continuará a indicar a demanda final pela i-ésima mercadoria.

3.1 Defasagem de Tempo na Produção

Em um sistema aberto e estático contendo duas indústrias, a produção da indústria I deve ser consistente com a demanda da seguinte maneira:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1. \tag{3.1}$$

Suponha, agora, que exista uma defasagem de um período na produção, de modo que o valor da demanda no período t determine a produção do período $t+1$, e não o valor da produção atual. Para representar esta situação nova, necessitamos modificar a equação acima para a forma

$$x_{1,t+1} = a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} \tag{3.2}$$

Analogamente, podemos escrever para a indústria II:

$$x_{2,t+1} = a_{21}x_{1,t} + a_{22}x_{2,t} + d_{2,t} \tag{3.3}$$

Tem-se, portanto, um sistema de equações simultâneas em diferenças; este constitui uma versão dinâmica do modelo de insumo-produto. Em notação matricial, o sistema é formado pela equação

$$\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_t \tag{3.4}$$

onde

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} d_{1,t} \\ d_{2,t} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

O exemplo a seguir ilustra um procedimento de cálculo quando o vetor de demanda $\mathbf{d}_t$ é conhecido.

3.1.1 Exemplo

Dado o vetor exponencial de demanda final

$$\mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} r^t \\ r^t \end{pmatrix}, \quad r \text{ um escalar positivo} \tag{3.6}$$

achar as integrais particulares do modelo dinâmico de insumo-produto $\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_t$. De acordo com o método de coeficientes indeterminados, devemos tentar soluções nas formas

$$\mathbf{x}_{1,t} = s_1 r^t \ \text{ e } \ \mathbf{x}_{2,t} = s_2 r^t \tag{3.7}$$

onde s_1 e s_2 são os coeficientes indeterminados. Isto é, devemos tentar

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} s_1 r^t \\ s_2 r^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} r^t \tag{3.8}$$

o que implica

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} s_1 r^{t+1} \\ s_2 r^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 r \\ s_2 r \end{pmatrix} r^t = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} r^t. \tag{3.9}$$

Se as soluções tentativas indicadas funcionam, então o sistema $\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_t$ fica

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} r^t - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} r^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r^t \tag{3.10}$$

ou, após eliminação do multiplicador escalar comum $r^t \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} r - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & r - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Supondo que a matriz de coeficientes à esquerda seja não singular, pode-se imediatamente achar s_1 e s_2 (pela regra de Cramer):

$$s_1 = \frac{r - a_{22} + a_{12}}{\Delta}, \qquad s_2 = \frac{r - a_{11} + a_{21}}{\Delta} \tag{3.12}$$

onde $\Delta = (r - a_{11})(r - a_{22}) - a_{12}a_{21}$. Já que s_1 e s_2 estão agora expressos inteiramente em termos de valores conhecidos dos parâmetros, é necessário apenas inserí-los na solução tentativa $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} r^t$ para obter as expressões definidas das integrais particulares.

3.2 Excesso de Demanda e Ajustamento da Produção

A formulação do modelo $\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_t$ também pode surgir a partir de um suposto econômico diverso. Considere-se a situação em que o excesso de demanda de cada produto tende sempre a induzir um acréscimo de produção igual ao excesso de demanda. Já que o excesso de demanda pelo primeiro produto no período t é

$$\underbrace{a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t}}_{\text{demandado}} - \underbrace{x_{1,t}}_{\text{ofertado}} \tag{3.13}$$

e o ajustamento da produção (acréscimo) $\Delta x_{1,t}$ deve ser igualado a esse valor:

$$\Delta x_{1,t}(\equiv x_{1,t+1} - x_{1,t}) = a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} - x_{1,t}, \tag{3.14}$$

ou

$$x_{1,t+1} = a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} \tag{3.15}$$

Analogamente, a hipótese de ajustamento da produção dá uma equação idêntica a

$$x_{2,t+1} = a_{21}x_{1,t} + a_{22}x_{2,t} + d_{2,t} \tag{3.16}$$

para a segunda indústria. Resumindo, o mesmo modelo matemático pode resultar de supostos econômicos totalmente diversos.

Até aqui, o sistema de insumo-produto foi estudado apenas no contexto de tempo discreto. Para fins de comparação, coloca-se, agora, o processo de ajustamento da produção em termos de tempo contínuo.

Desta forma, o símbolo $x_i(t)$ deve substituir $x_{i,t}$ e a derivada $x_i'(t)$ deve entrar no lugar da diferença finita $\Delta x_{i,t}$. Com essas mudanças, o suposto de ajustamento da produção manifesta-se pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + d_1(t) - x_1(t) \tag{3.17}$$

$$x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + d_2(t) - x_2(t). \tag{3.18}$$

A qualquer instante $t = t_0$ do tempo, o símbolo $x_i(t_0)$ informa-nos o fluxo de produção por unidade de tempo (diga-se, por mês) que prevalece no instante em questão, enquanto $d_i(t_0)$ indica a demanda final por mês no mesmo instante. Portanto, a soma à direita nas equações indica o excesso de demanda por mês, medido em $t = t_0$. Por outro lado, a derivada $x_i'(t_0)$, à esquerda, representa o ajustamento mensal da produção necessário devido ao excesso de demanda vigente em $t = t_0$. Este ajustamento eliminará o excesso de demanda (e trará o equilíbrio) no período de um mês, mas apenas se tanto o excesso de demanda como o ajustamento da produção permanecerem em seus valores correntes. Na verdade, o primeiro variará com o tempo induzindo a mudanças no último, resultando disto um jogo (de caça) de gato e rato. Portanto, a solução do sistema, constituída pelas trajetórias temporais dos produtos x_i, é simplesmente o registro dessa caçada. Se a solução for convergente, o gato (ajustamento da produção) conseguirá pegar o rato (o excesso de demanda) assintoticamente (quando $t \longrightarrow \infty$).

Após um reagrupamento adequado, esse sistema de equações diferenciais pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{I}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{3.19}$$

onde

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Em particular, as raízes características são achadas da equação

$$\left| r\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \right| = \begin{vmatrix} r + 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & r + 1 - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

Em relação às integrais particulares, se o vetor de demanda final contém, como seus elementos, funções não-constantes do tempo, $d_1(t)$ e $d_2(t)$, faz-se necessária uma modificação do método de solução.

3.3 Formação de Capital

Outra consideração de natureza econômica que pode gerar um sistema dinâmico de insumo-produto é a possibilidade de formação de capital, incluindo a acumulação de estoques.

Na discussão estática, considera-se apenas o nível de produção de cada bem necessário para satisfazer a demanda corrente. As necessidades de acumulação de estoques ou de formação de capital foram ignoradas ou subsumidas no vetor de demanda final. Para explicitar a formação de capital, considere-se juntamente com a matriz de coeficientes técnicos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ - a matriz de coeficientes de capital

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

onde c_{ij} denota o valor requerido em reais da i-ésima mercadoria pela j-ésima indústria como novo capital (equipamento ou estoques, dependendo da natureza da i-ésima mercadoria), para um aumento na produção de R\$ 1,00 nessa indústria. Por exemplo, se um aumento de R\$ 1,00 na produção da (j-ésima) indústria de refrigerantes a induz a acrescentar o valor de R\$ 2,00 em máquinas de engarrafamento (i-ésima mercadoria), então $c_{ij} = 2$. Esse coeficiente de capital revela, portanto, um tipo de relação marginal capital-produto, sendo essa razão limitada a apenas um tipo de capital (a i-ésima mercadoria). Tal como os coeficientes de insumos a_{ij}, os coeficientes de capital são constantes por hipótese. A idéia é fazer com que a economia produza cada mercadoria em uma quantidade que satisfaça não apenas os requisitos de insumos e a demanda final, mas também os requisitos de capital.

Se o tempo é contínuo,isto é, existe um ajustamento mensal da produção necessário devido ao excesso de demanda vigente, então o acréscimo na produção é indicado pelas derivadas $x_i'(t)$; portanto, a produção de cada indústria deve ser

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + c_{11}x_1'(t) + c_{12}x_2'(t) + d_1(t) \\ x_2(t) &= \underbrace{a_{21}x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t)}_{\text{requisitos de insumos}} + \underbrace{c_{21}x_1'(t) + c_{22}x_2'(t)}_{\text{requisitos de capital}} + \underbrace{d_2(t)}_{\text{demanda}}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{C\dot{x}} + \mathbf{d} \tag{3.24}$$

ou

$$\mathbf{C\dot{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{d} \tag{3.25}$$

Se o tempo é discreto, o capital requerido no período t é baseado no acréscimo de produção $x_{i,t} - x_{i,t-1}$ ($\equiv \Delta x_{i,t-1}$); portanto, os níveis de produção devem ser

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}}_{\text{requisitos de insumos}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} - x_{1,t-1} \\ x_{2,t} - x_{2,t-1} \end{pmatrix}}_{\text{requisitos de capital}} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1,t} \\ d_{2,t} \end{pmatrix}}_{\text{demanda final}} \tag{3.26}$$

ou

$$\mathbf{I}\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{C}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{d}_t \tag{3.27}$$

Adiantando em um período o subscrito de tempo, e reagrupando os termos, pode-se escrever a equação (3.27) na forma

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{C})\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_{t+1}. \tag{3.28}$$

Os sistemas de equações diferenciais $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = -\mathbf{d}$ e o de equações em diferenças $(\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{C})\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_{t+1}$ podem ser resolvidos novamente, é claro, pelo método da seção anterior. É desnecessário dizer também que essas duas equações matriciais são ambas estendíveis para o caso de n indústrias por uma simples re-definição das matrizes e uma mudança correspondente nas dimensões das mesmas.

Discutiram-se acima como os mecanismos de ajustamento e as defasagens temporais podem gerar modelos dinâmicos de insumo-produto. Quando aplicamos esse tipo de considerações ao contexto de modelos de equilíbrio geral de mercado, estes últimos tendem a tornar-se dinâmicos, em uma forma muito parecida.

3.4 Análise de Atividade: Nível Macro

Muito do que foi dito na seção anterior também pode ser aplicado ao nível macro de análise. Ao nível da firma, cada atividade está associada a um processo diferente de produção. Ao nível nacional, podemos considerar cada atividade como representando uma indústria. De acordo com isto, o nível no qual uma atividade é operada especifica o nível de produção de uma indústria inteira. Se, além disso, se supõe que todas as indústrias são caracterizadas por rendimentos constantes de escala e por proporções fixas de insumos, a relação de insumo-produto de cada indústria pode ser resumida por um único raio de atividade, no qual um ponto situado a uma distância duas vezes maior da origem do que outro significa o dobro do produto deste último.

Já que RCE (Rendimentos Constantes de Escala) e proporções fixas de insumos são supostos comuns nos modelos de insumo-produto, podem-se interpretar estes últimos em termos de análise de atividade ou programação linear.

3.5 Limitações da Análise Dinâmica

A análise estática apresentada neste trabalho, tratou da questão referente à determinação da posição de equilíbrio sob certas condições dadas de um modelo. O principal problema foi: que valores das variáveis, se atingidos, tendem a se estabilizar? Contudo, a atingibilidade dessa posição de equilíbrio foi garantida por hipótese. Quando passou-se para o campo da estática comparativa, a questão central deslocou-se para um problema mais interessante: como muda a posição de equilíbrio em resposta a uma variação dada em um parâmetro? Porém,novamente, a questão da atingibilidade foi deixada de lado. Esta então foi encarada quando chegamos à análise dinâmica. Então, perguntamos especificamente: se,inicialmente,estamos fora de equilíbrio, irão as várias forças presentes no modelo conduzir-nos a uma nova posição de equilíbrio? Além disso, na análise dinâmica também descobrimos a natureza específica da trajetória que a variável segue em seu caminho ao equilíbrio. O significado da análise dinâmica torna-se, portanto, evidente por si mesmo. Com o objetivo de simplificar a análise, os modelos dinâmicos são freqüentemente formulados em termos de equações lineares. Já que a trajetória temporal de um modelo linear pode não servir como uma aproximação à trajetória de um modelo não-linear, precisamos ter cuidado na interpretação e aplicação dos resultados de modelos dinâmicos lineares. Outra limitação freqüentemente encontrada nos modelos econômicos dinâmicos é devida ao uso de coeficientes constantes em equações diferenciais ou em diferenças. Visto que o papel mais importante dos coeficientes é especificar os parâmetros do modelo, a constância dos primeiros- suposta com a finalidade de manter o problema matematicamente. Em outras palavras, isto significa dizer que o ajustamento endógeno do modelo é estudado em uma espécie onde não se permite que nenhum fator exógeno tenha influência. Em alguns casos, este problema não é muito sério, pois parâmetros econômicos tendem a permanecer relativamente constantes em períodos longos de tempo. E em alguns outros casos podemos efetuar uma análise dinâmica comparativa para estudar como uma mudança em certos parâmetros altera a trajetória temporal da variável. Entretanto, quando estamos interpretando uma trajetória temporal que se estende a um futuro distante, e adotamos supostos simplificadores quanto à constância dos coeficientes, devemos estar atentos para não incorrer no erro de confiar demais na validade dos segmentos mais remotos da trajetória. Na medida em que a análise dinâmica, assim como qualquer outro tipo de análise, for devidamente interpretada e aplicada, ela poderá desempenhar um papel importante no estudo de fenômenos econômicos.

4 ANÁLISE DE INSUMO-PRODUTO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Os insumos requeridos para a operação de cada atividade (indústria) são de dois tipos: um insumo primário que não é produzido por nenhuma indústria e insumos intermediários, os quais são produzidos pelas indústrias do modelo. Suponha que existe um total de n indústrias, cada qual produzindo uma mercadoria distinta, e são adotados os mesmos símbolos para os coeficientes de insumos que usamos no capítulo 2. Então, podem-se encontrar os três tipos seguintes de vetores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -a_{0j} \\ -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{0j} \\ a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

O primeiro deles fornece uma descrição completa da relação de insumo-produto da j-ésima atividade (indústria): O primeiro elemento (1) indica uma produção unitária da j-ésima mercadoria; o segundo elemento mostra o requisito de insumo primário para tanto e os demais elementos restantes indicam os requisitos de insumos intermediários. O segundo vetor, no qual o elemento unitário foi eliminado e os sinais dos a_{ij} foram invertidos, descreve apenas o lado dos insumos da indústria. E o terceiro vetor limita ainda mais a perspectiva ao listar apenas os insumos intermediários. O termo vetor de atividade é geralmente apresentado na primeira versão acima. Mas, tal como fizemos na seção anterior, reservaremos este nome para uma versão modificada a ser introduzida mais adiante.

Considere-se agora o terceiro vetor acima $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Existindo n indústrias na economia, pode-se escrever n desses vetores. Quando eles são juntados, formam a familiar matriz $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Dada esta matriz, e também um vetor do produto

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

e um da demanda final:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

a tarefa passa a ser, de acordo com a discussão anterior sobre o modelo aberto de insumo-produto, achar um vetor $\mathbf{x}$ tal que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{4.5}$$

A solução, supondo que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ seja não-singular, é simplesmente

$$\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \tag{4.6}$$

Não existe nenhum traço evidente do tipo de otimização da programação linear nessa formulação do problema, pois não há nenhuma função-objetivo a otimizar e a equação $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$, embora tenha o caráter de restrições sobre o nível de produção de cada indústria (cada indústria deve produzir o suficiente para satisfazer a demanda total), não contém nenhuma desigualdade.

Contudo, o mesmo problema de insumo-produto pode ser visto de outro ângulo. Em primeiro lugar, é fácil de perceber que, para assegurar a satisfação da demanda total, é necessário apenas que a produção de cada indústria seja não menor do que (ao invés de igual a) a demanda total pelo produto da mesma. Conseqüentemente, não é fora de propósito mudar $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$ para uma desigualdade $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$.

Entretanto, para evitar excessos não desejáveis - isto é, para evitar que a parte $>$ do sinal se torne muito grande - também devemos introduzir algum tipo de requisito de minimização nessa desigualdade. Supondo que o trabalho seja o único recurso primário, por exemplo, podemos buscar a minimização do insumo de trabalho total requerido para a produção do nível indicado acima. Isto é, podemos minimizar

$$L = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_j = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_0'\mathbf{x} \tag{4.7}$$

onde L denota o trabalho total requerido e $\mathbf{a}_0'$ denota o vetor linha dos coeficientes de insumos de trabalho. Além disso, já que os níveis de produção x_j não podem ser negativos, também é válido que imponhamos a restrição $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Sob esse ponto de vista, o modelo de insumo-produto $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$ pode ser reformulado na forma equivalente matematicamente:

$$\begin{aligned} \textbf{minimizar} \quad & L = \mathbf{a}_0'\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & (\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \\ \text{e} \quad & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.8}$$

que é meramente um programa linear comum.

4.1 A SOLUÇÃO

O programa linear (4.8) pode ser resolvido por qualquer um dos dois enfoques seguintes: lendo as n restrições horizontal ou verticalmente.

Quando lidas horizontalmente, as n restrições geram n semi-espaços fechados que, conjuntamente com as condições de não-negatividade, definem uma região de viabilidade (um conjunto convexo) no quadrante não-negativo, isto é,no 1 quadrante . A função-objetivo, por outro lado, gera uma família de hiperplanos de iso-trabalho. Achar a solução ótima é selecionar um ponto na região de viabilidade que esteja no hiperplano de iso-trabalho com o valor mínimo de L. Entretanto, este ponto ($\overline{\mathbf{x}}$) será necessariamente o ponto dado em $\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$, pois se o trabalho é um insumo indispensável para a produção de todas as mercadorias, então o vetor de produto com as quantidades menores de trabalho requeridas deve ser necessariamente o que não contém nenhum excesso de produção sobre a demanda total. Isto é, o vetor ótimo de produto é necessariamente $\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$, a solução do modelo comum de insumo-produto.

Agora procede-se a lêr verticalmente as restrições. Já que a matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ consiste nos seguintes n vetores:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1-a_{22} \\ \vdots \\ -a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a_{1n} \\ -a_{2n} \\ \vdots \\ 1-a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

podem ser representados como vetores de atividade em um espaço n-dimensional. Especificamente, deve-se representá-los no espaço de demanda final (com o j-ésimo eixo indicando a demanda final por x_j) - da mesma forma como os vetores de atividade

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} \\ -a_{21} \\ -a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1-a_{22} \\ -a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \\ 1-a_{33} \end{pmatrix} x_3 \geq \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

devem ser representados no espaço de insumos (espaço KL= recursos). Esses vetores são então combinados linearmente via um conjunto de coeficientes não-negativos x_1, ..., x_n, e o conjunto de todas essas combinações não-negativas assume a forma de um cone poliédrico convexo. Uma ilustração desse cone é dada na figura 4.1 para o caso ded $n = 3$. Se as três setas indicam três vetores, então o conjunto de todas as combinações não negativas de dois desses vetores consiste em uma superfície triangular plana como F_1 e F_2, que são cones convexos bidimensionais. Se, além disso, são formadas todas as combinações não negativas possíveis dos pontos de F_1 e F_2, também será preenchido o espaço limitado pelas superfícies F_1, F_2 e F_3. Portanto, a totalidade das combinações não negativas dos três vetores dados é o conjunto dos pontos situados ou na fronteira ou no interior do sólido em forma de pirâmide da figura 4.1. Este sólido, um conjunto convexo fechado, é chamado de cone poliédrico convexo e as superfícies são chamadas de *faces* do cone. Embora o cone poliédrico convexo ilustrado na figura 4.1 está situado inteiramente no ortante não negativo, este não é o caso em um programa linear de insumo-produto.

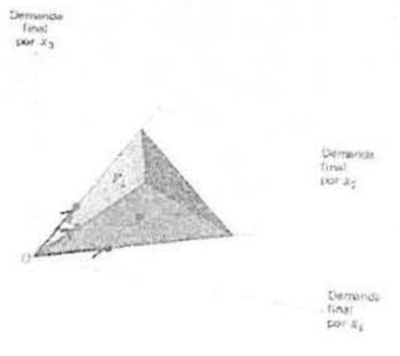

Figura 4.1: *Cone poliédrico convexo para $n = 3$*

No modelo de três indústrias, as restrições assumem a forma (4.10) (vetores de atividade) e, na medida em que todos os coeficientes a_{ij} são frações positivas ou zero, os elementos dos três vetores de atividade possuem os seguintes sinais (no caso de serem não-nulos):

$$\begin{array}{ccc} \text{vetor 1} & \text{vetor 2} & \text{vetor 3} \\ \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.11}$$

Em consequência da presença dos elementos negativos nos vetores, o raio de atividade deve situar-se fora do ortante não-negativo. Na figura 4.2(a), que apresenta uma visão desde cima do 3-espaço, vê-se que o raio 1, por exemplo, é positivo na direção x_1 mas negativo na direção x_2; na verdade, ele também é negativo na direção x_3 - isto é, ele se distancia do ponto de observação. O raio 2 deve ser interpretado de modo similar. Na figura 4.2(b), pode-se ver que esses raios geram, portanto, um cone poliédrico convexo que envolve o ortante não-negativo. É interessante notar que o ortante não-negativo é agora um subconjunto do cone poliédrico convexo, o que é uma situação exatamente oposta à da figura 4.1.

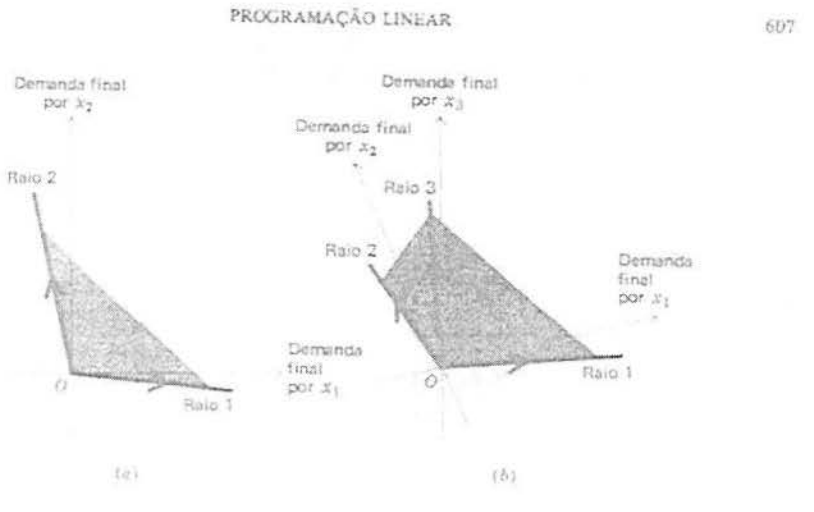

Figura 4.2: *Perspectivas superior e lateral do cone poliédrico convexo*

Portanto, as combinações não-negativas dos três vetores à esquerda de (4.10) são interpretadas como correspondendo aos pontos de um cone poliédrico convexo. Em seguida será interpretado a expressão restante $\geq \mathbf{d}$. O ponto d, com coordenadas (d_1,d_2,d_3), localiza-se diretamente acima do ponto (d_1,d_2,0) no plano na base da figura 4.3. Então, a expressão $\geq \mathbf{d}$ define um subconjunto do espaço de demanda final que satisfaz a condição de que a demanda pela i-ésima mercadoria não seja menor do que a quantidade específica d_j, $(j = 1, 2, 3)$. Se o ponto d é considerado como o novo ponto de origem e são traçados três novos eixos paralelos aos três originais, então o referido subconjunto estará, em termos de posição relativa, para o ponto d como o ortante não-negativo está para o ponto de origem. Já que o resultado se parece com uma sala de um andar superior de uma casa, é denominado d superior.

Quando a equação (4.10) é lida integralmente, a instrução é para concentrar a atenção naqueles pontos do cone poliédrico convexo que estão no d superior. Mas, já que o d superior é um subconjunto do ortante não negativo, e portanto um subconjunto do cone, só se deve levar em consideração o d superior.

Portanto, o objetivo do programa linear é, então minimizar L, embora permanecendo no ponto d superior, isto é, selecionar dentre uma família de planos de isotrabalho- ou melhor, segmentos de plano- o mais baixo deles que contenha um ponto comum com o ponto d. Já que esses segmentos de plano todos paralelos, tipicamente têm a forma do triângulo sombreado da figura 4.3, o ótimo será aquele que toca o ponto d superior no próprio ponto d.

Conseqüentemente, a restrição (4.10) deve ser uma desigualdade estrita no valor ótimo. Isto, portanto, conduz de volta à formulação (4.5) e à mesma solução encontrada anteriormente em (4.4).

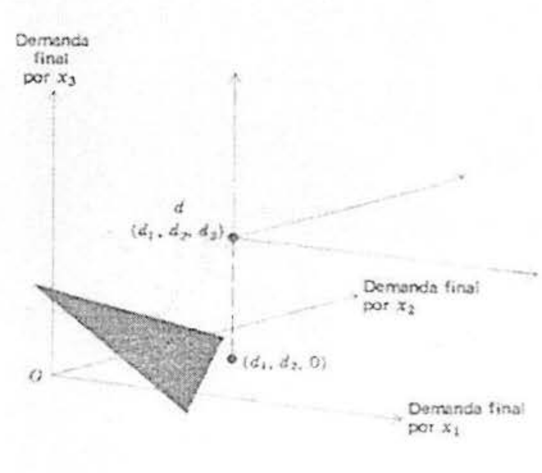

Figura 4.3: *Solução do problema para o caso de* $n = 3$

5 CASO DE ESTUDO: MATRIZ DE INSUMO-PRODUTO ESTADUAL

O material a seguir, encontra-se detalhado no artigo de Porsse, 2002 (porsse@hotmail.com,porsse@fee.tche.br), onde é apresentada "uma metodologia para a construção de um modelo de equilíbrio geral estadual, fundamentado na abordagem de insumo-produto. O objetivo é fornecer parâmetros empíricos que possam ser utilizados pelos chefes de setores no sentido de racionalizar a elaboração e implementação de políticas públicas voltadas ao planejamento econômico regional. O espaço do estudo é o Estado do Rio Grande do Sul, para o qual se construiu um modelo de insumo-produto com ano base em 1998. A partir dos resultados da matriz de insumo-produto, se calculam alguns indicadores tradicionais na abordagem de insumo-produto, os quais permitem identificar o grau de interligações setoriais da economia gaúcha, como também os efeitos de choques de demanda sobre algumas variáveis econômicas selecionadas: valor adicionado, emprego e rendimentos".

5.1 Matriz de Insumo Intersetorial para o Estado do Rio Grande do Sul

O modelo de insumo-produto desenvolvido para o RS, ao identificar as relações intersetoriais de oferta e demanda, consiste num importante instrumental para alimentar o processo decisório dos 'chefes de setores quanto à elaboração de políticas públicas voltadas para o desenvolvimento regional.

É comum a construção de indicadores ou multiplicadores que sintetizam essas relações intersetoriais, com vistas a aprender o grau de intensidade com que os setores podem estimular diferentes variáveis macroeconômicas de interesse, por exemplo, a produção e o emprego.

Essas informações podem ser utilizadas para melhorar a racionalização das políticas públicas, notadamente no que diz respeito, à sinalização de setores-chave para o desenvolvimento econômico.

A forma usual de apresentação do modelo de insumo-produto de Leontief pressupõe que as variações no consumo final dos agentes econômicos são exógenas. Porém esse pressuposto pode ser demasiadamente forte, principalmente em relação ao consumo das famílias. Isto porque, para aumentar o volume de produção, se espera também o crescimento do emprego e dos rendimentos familiares, os quais, uma vez revertidos para novas aquisições de bens e serviços, que geram estímulos adicionais na economia.

Para assimilar esses efeitos, convém considerar o consumo das famílias endógeno ao sistema e, portanto, construir o modelo fechado de Leontief. Os multiplicadores obtidos a partir desse modelo são mais completos no sentido de aproximação com o funcionamento real da economia, incorporando o efeito-renda.

Portanto, o objetivo central do estudo do Porsse, 2000, é demonstrar o mecanismo de cálculo de multiplicadores de impacto setorial com base no modelo fechado de Leontief. A estruturação metodológica do modelo é apresentada de forma a permitir sua replicação em qualquer espaço sub-regional do Brasil, desde que superadas as limitações de informações estatísticas usualmente experimentadas na construção de modelos de insumo-produto regionais.

Na matriz insumo-produto os diferentes setores econômicos são organizados sob a forma de uma matriz, o que permite apresentar nas linhas o que cada um produz para que setor e, nas colunas, o que cada um consome como insumo de que setor. Acompanhando uma linha da tabela sabemos o destino da produção e, acompanhando uma coluna teremos a origem, vale dizer, os vários insumos que compõem a produção de um determinado setor.

5.2 O Modelo Aberto de Leontieff

O modelo aberto de Leontief considera todos os componentes da demanda final como exógenos, ou seja, os spillovers resultantes do uso das remunerações dos agentes que compõem a demanda final na aquisição de produtos não são computados nas relações intersetoriais da economia. Para uma economia estadual, o modelo de insumo-produto é derivado a partir da condição de equilíbrio entre oferta agregada e demanda agregada, tal como segue abaixo:

$$X^E + M^X + M^R = (A^E + A^X + A^R)X^E + Y \tag{5.1}$$

onde

$$O = X^E + M^X + M^R, \tag{5.2}$$

$$D = (A^E + A^X + A^R)X^E + Y, \tag{5.3}$$

$$Y = S + E^X + E^R \tag{5.4}$$

sendo

- O o vetor coluna da oferta total,
- D o vetor coluna da demanda total,
- X^E o vetor coluna da oferta estadual (produção local ou doméstica)
- M^X o vetor coluna do total das importações internacionais
- M^R o vetor coluna do total das importações interestaduais
- Y o vetor coluna do total da demanda final,
- S o vetor coluna das despesas finais (somatório do consumo das famílias e do governo, formação bruta de capital fixo e variação de estoques),
- E^X o vetor coluna do total das exportações internacionais,
- E^R o vetor coluna do total das exportações interestaduais,

- A^E a matriz de coeficientes técnicos dos insumos intermediários estaduais, internacionais,
- A^X a matriz de coeficientes técnicos dos insumos intermediários internacionais,
- A^X a matriz de coeficientes técnicos dos insumos intermediários interestaduais.

A partir do modelo definido em (5.1) pode-se deduzir

$$X^E = (A^T)X^E + Y' \tag{5.5}$$

onde

$$Y' = Y - (M^X + M^R) \tag{5.6}$$

$$A^T = A^E + A^X + A^R \tag{5.7}$$

onde

- Y' é o vetor coluna da demanda final menos as importações totais,
- A^T é a matriz de coeficientes técnicos dos insumos intermediários totais.

Da equação (5.5) obtém-se

$$X^E = (I - A^T)^{-1}Y'. \tag{5.8}$$

O modelo definido em (5.8) é uma forma de mostrar as relações entre produção e consumo final (líquido de importações) na economia estadual, mas ainda não pode ser usado para calcular o impacto de variações na demanda final sobre, por exemplo, a produção ou importação, pois a demanda final líquida (Y') não corresponde à demanda final de produtos estaduais, na medida em que está subtraída das importações totais. Ademais, as importações de insumos são endógenas no modelo; portanto, é necessário isolar os insumos intermediários importados associados à matriz de coeficientes técnicos totais (A^T). Então, reescrevendo a equação (5.5), tem-se:

$$X^E = A^E X^E + Y' + M^{IX} + M^{IR} \tag{5.9}$$

onde

$$M^{IX} = A^X X^E, \tag{5.10}$$

$$M^{IR} = A^R X^E. \tag{5.11}$$

M^{IX} representa as importações internacionais destinadas ao consumo intermediário e M^{IR} representa as importações interestaduais destinadas ao consumo intermediário.

Observando separadamente os três últimos termos de (5.9) e usando (5.6), pode-se deduzir

$$\begin{aligned} Y' + M^{IX} + M^{IR} &= Y - \left[(M^X + M^R) - (M^{IX} + M^{IR})\right] \\ Y' + M^{IX} + M^{IR} &= Y - \left[M^{FX} + M^{FR}\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

sendo M^{FX} as importações internacionais destinadas ao consumo final e M^{FR} as importações interestaduais destinadas ao consumo final.

Note-se que o lado direito da expressão (5.12) consiste exatamente no conceito de demanda final dos produtos estaduais (Y^E), ou seja, representa o total da demanda final deduzidas as importações destinadas ao consumo final. Portanto, incorporando tal resultado em (5.9), essa equação pode ser reescrita como:

$$X^E = A^E X^E + Y^E. \tag{5.13}$$

A equação (5.13) expressa a condição de equilíbrio entre oferta e demanda de produtos estaduais. Daqui para frente, omite-se o superíndice E. Supondo que existem n grupos de setores de atividade econômica, a condição de equilíbrio no mercado de produto pode ser representada como

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.14}$$

e a análise matemática procede como na seção 2.1.

5.3 O Modelo Fechado de Leontieff

O pressuposto que todos os componentes da demanda final são exógenos não faz muito sentido econômico, notadamente no que diz respeito ao consumo das famílias, pois as remunerações recebidas pela venda de seu insumo (trabalho) são revertidas para novas aquisições de produtos, favorecendo um círculo virtuoso no sistema.

Esse círculo pode ser representado pelo fluxograma a seguir. Um choque de demanda exógeno pode ter origem nos componentes da demanda final (excluindo o consumo das famílias), estimulando a produção, o emprego e a renda (leia-se valor adicionado) da economia. Posteriormente, devido à propensão a consumir, a parcela de renda apropriada pelas famílias gera uma nova rodada de estímulos sobre a atividade econômica. As relações entre o bloco de consumo intermediário e o da produção refletem os encadeamentos direto e indireto do fluxo de aquisições intersetoriais.

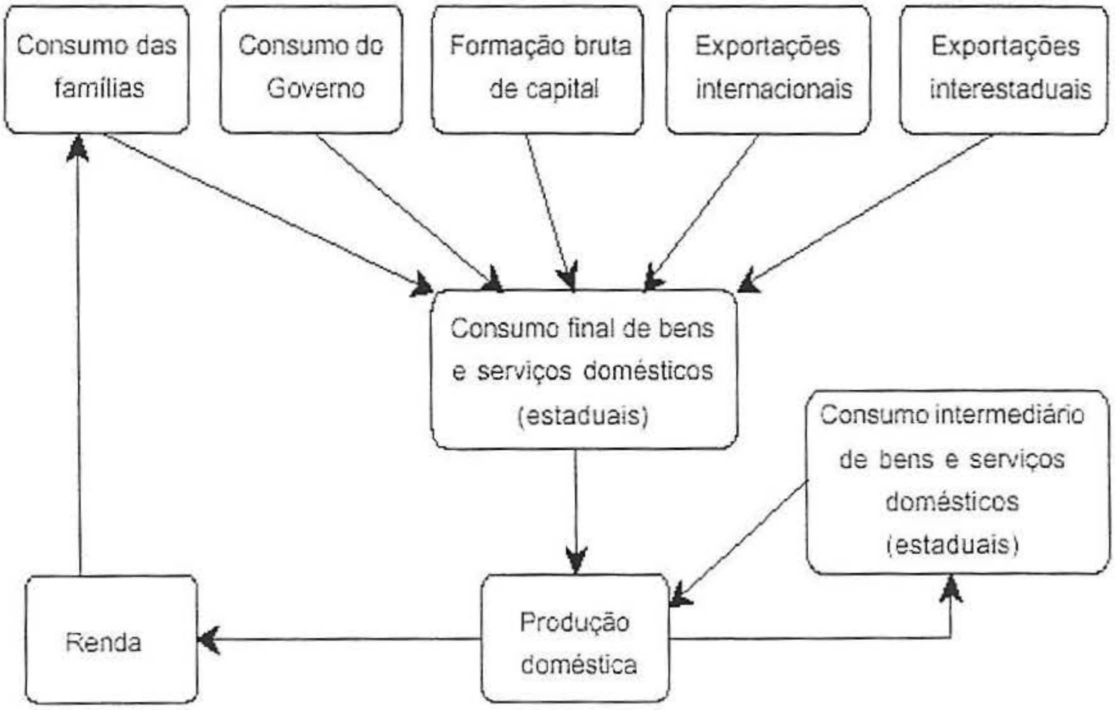

Figura 5.1: *Fluxograma da Economia Nacional*

Nesse sentido, convém endogeneizar o "setor" famílias no modelo de insumo-produto, ou seja, construir o modelo fechado de Leontieff. O mecanismo de endogeneização consiste em transportar o consumo das famílias para dentro da matriz de relações intersetoriais (A), o que envolve a abertura de uma nova linha ($n+1$) e de uma nova coluna ($n+1$) nessa matriz.

O mecanismo de endogeneização parte do pressuposto que o consumo das famílias (Y^F) é determinado endogenamente como uma função, linear e homogênea, da renda (R) da economia:

$$y_i^F = c_i R \tag{5.15}$$

onde c_i é a propensão a consumir do i-ésimo produto.

A renda da economia corresponde ao total das remunerações recebidas pelos fatores de produção (valor adicionado), o qual é concebido como uma função de proporções fixas das produções setoriais:

$$R = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \tag{5.16}$$

onde v_j é o coeficiente do valor adicionado por unidade de produto no j-ésimo setor.

Substituíndo (5.15) e (5.16) em (5.14), tem-se

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i \sum_{j=1}^{n} v_j x_j + y_i^* \tag{5.17}$$

onde y_i^* é o total do consumo final do i-ésimo produto, excluíndo o consumo das famílias.

Definindo

$$x_{n+1} = R, \tag{5.18}$$

$$a_{i,n+1} = c_i, \tag{5.19}$$

$$a_{n+1,j} = v_j, \tag{5.20}$$

o modelo por ser representado pelas seguintes expressões:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i,n+1} x_{n+1} + y_i^* = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j + y_i^* \tag{5.21}$$

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} x_j \tag{5.22}$$

ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} X \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & H_C \\ H_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y^* \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

ou

$$X = AX + Y \tag{5.24}$$

onde H_C é o vetor coluna dos coeficientes de propensão a consumir das famílias e H_R é o vetor linha dos coeficientes setoriais do valor adicionado (renda).

Diferentemente do modelo aberto clássico, aqui existem alguns "blocos" nulos na representação matricial definida em (5.23). Isso ocorre porque a contribuição das famílias e dos demais agentes que compõem a demanda final para a geração de valor adicionado já está incorporada nos n setores da matriz de relações técnicas intersetoriais. Por exemplo, as remunerações pagas pelo Governo aos trabalhadores estão contempladas no setor Administração Pública da matriz A, o qual expressa o fluxo de transações intermediárias da atividade governamental com os demais setores.

A análise matemática deste modelo fechado está descrito na seção 2.4.

5.4 Tabelas dos Setores Produtivos no Estado do Rio Grande do Sul

O cálculo da matriz de coeficientes técnicos diretos e da matriz de Leontieff é realizado com base nas tabelas de recursos e usos (TRU), com todas as informações sobre oferta e demanda valoradas a preços básicos, a fim de obter maior homogeneidade entre os valores. Maiores detalhes sobre a teoria de insumo-produto e sobre o método de cálculo da matriz de insumo-produto podem ser encontrados em Miller e Blair, 1997 e Feijó, 2001. Tais informações são geradas a partir das planilhas de equilíbrio entre oferta e demanda (balanceadas), das quais se identificam os destinos da margem de distribuição e dos impostos (imposto de importação, ICMS, IPI/ISS e outros).

Uma vez estabelecidos os destinos, as tabelas de consumo intermediário e demanda final são transformadas, retirando dos valores a preços de mercado as parcelas referentes às margens e impostos. Além disso, para obter a matriz de impacto estadual, é necessário detalhar o consumo, intermediário e final, conforme a sua origem.

Os resultados da aplicação dos procedimentos descritos em Porsse, 2002 (porsse@hotmail.com,porsse@fee.tche.br) consiste em um conjunto de 27 tabelas, das quais são escolhidas para o presente trabalho:

- Tabela 05, oferta e demanda da produção total a preço básico, 1998,
- Tabela 18, matriz dos coeficientes técnicos intersetoriais totais, matriz $D \cdot B$, 1998,
- Tabela 17, matriz de participação setorial na produção dos produtos, matriz D, 1998,
- Tabela 13, matriz dos coeficientes técnicos dos insumos totais, matriz B, 1998,
- Tabela 20, matriz de impacto intersetorial total, matriz de Leontieff, 1998.

Tabela 5.1: Oferta e demanda da produção total a preço básico
Esta tabela representa o vetor d da demanda final para determinarmos o nível de produção das n indústrias conforme solução única estabelecida na página 6.

Código	Descrição	Valor da produção	(01) Agropecuária	(02) Industrias metalúrgicas	(03) Máquinas e tratores	(04) Mat. elétrico e eletrônico	(05) Material de transporte
0101	Arroz em casca	1.650	8	0	0	0	0
0102	Soja em grão	1.340	31	0	0	0	0
0103	Milho em grão	529	369	0	0	0	0
0104	Bovinos e suínos	1.708	125	0	0	0	0
0105	Leite natural	426	19	0	0	0	0
0106	Aves vivas e ovos	595	0	0	0	0	0
0107	Demais produtos agropecuários	4.091	740	0	0	0	0
0201	Produtos metalúrgicos	3.861	0	721	625	136	108
0301	Máquinas e tratores	4.856	0	53	162	58	66
0401	Material elétrico e eletrônico	2.770	0	0	110	135	0
0501	Autoveículos e peças	6.141	0	0	0	0	590
0601	Madeira e mobiliário	2.381	0	0	0	0	0
0701	Papel, celulose, papelão e artefatos	2.187	3	8	15	9	6
0801	Adubos e fertilizantes	858	477	0	0	0	0
0802	Demais produtos químicos	1.652	299	0	0	0	0
0901	Produtos petroquímicos	2.224	0	0	0	0	0
0902	Combustíveis e demais produtos do refino	2.675	259	0	0	0	0
1001	Produtos de couro e calçados	5.200	0	0	0	0	0
1101	Arroz beneficiado	2.216	0	0	0	0	0
1102	Demais produtos vegetais beneficiados, exceto fumo	1.122	0	0	0	0	0
1201	Fabricação de produtos do fumo	1.820	0	0	0	0	0
1301	Carne bovina e suína	2.164	0	0	0	0	0
1302	Carne de aves abatidas	1.002	0	0	0	0	0
1401	Leite beneficiado e outros laticínios	1.838	0	0	0	0	0
1501	Óleos vegetais em bruto e refinados	1.558	53	0	0	0	0
1601	Demais produtos alimentares	4.404	211	0	0	0	0
1701	Demais produtos da indústria	9.315	0	0	0	32	43
1801	Serviços industriais de utilidade pública	2.504	23	33	32	5	9
1901	Produtos da construção civil	7.453	0	0	0	0	0
2001	Margem de comércio	8.575	203	54	104	40	85
2101	Margem de transporte	5.098	61	12	15	8	19
2201	Comunicações	2.255	0	0	31	8	8
2301	Seguros e serviços financeiros	4.561	46	22	24	15	24
2401	Alojamento e alimentação	1.542	0	0	0	0	0
2402	Outros serviços	1.449	0	0	0	0	0
2403	Saúde e educação mercantis	2.393	0	0	0	0	0
2404	Serviços prestados às empresas	2.478	0	0	0	0	0
2501	Aluguel de imóveis	1.991	0	0	15	0	0
2502	Aluguel imputado	5.717	0	0	0	0	0
2601	Administração pública	7.118	0	0	0	0	0
2602	Saúde pública	1.185	0	0	0	0	0
2603	Educação pública	2.493	0	0	0	0	0
2701	Serviços privados não-mercantis	328	0	0	0	0	0
Total		127.723	2.928	903	1.132	447	958

Código	(06) Madeira e mobiliário	(07) Papel e gráfica	(08) Industria química	(09) Industria petroquímica	(10) Calçados, couros e peles	(11) Beneficiamento de produtos vegetais	(12) Industria do fumo	(13) Abate de animais	(14) Industria de laticínios
0101	0	0	0	0	0	868	0	0	0
0102	0	0	0	0	0	114	0	0	0
0103	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0104	0	0	0	0	0	0	0	811	0
0105	0	0	0	0	0	0	0	0	382
0106	0	0	0	0	0	0	0	393	0
0107	280	0	0	0	0	166	393	0	0
0201	24	0	0	0	0	0	0	0	0
0301	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0401	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0501	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0601	240	0	0	0	0	0	0	0	0
0701	8	359	8	14	107	9	6	0	5
0801	0	0	169	0	0	0	0	0	0
0802	18	43	129	0	30	0	0	0	0
0901	0	0	478	708	128	0	0	0	0
0902	0	0	0	135	0	0	0	0	0
1001	0	0	0	0	983	0	0	0	0
1101	0	0	0	0	0	6	0	0	0
1102	0	0	0	0	0	69	0	0	0
1201	0	0	0	0	0	0	212	0	0
1301	0	0	0	0	414	0	0	29	0
1302	0	0	0	0	0	0	0	16	0
1401	0	0	0	0	0	0	0	0	253
1501	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1601	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1701	52	0	0	302	73	0	0	0	0
1801	18	19	25	32	28	13	9	5	7
1901	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	90	102	36	86	197	149	58	74	39
2101	21	8	7	117	41	43	25	21	9
2201	9	10	7	11	18	6	3	3	5
2301	3	5	26	15	13	13	7	5	8
2401	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2402	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2403	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2404	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2501	0	0	10	12	0	0	0	0	0
2502	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2601	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2602	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2603	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2701	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	764	546	896	1.432	2.031	1.456	713	1.357	708

Código	(15) Fabricação de óleos vegetais	(16) Demais industrias alimentares	(17) Demais industrias	(18) Serviços industriais	(19) Construção civil	(20) Comércio	(21) Transportes	(22) Comunicações
0101	0	0	0	0	0	0	0	0
0102	48	123	0	0	0	0	0	0
0103	0	108	0	0	0	0	0	0
0104	0	0	0	0	0	0	0	0
0105	0	0	0	0	0	0	0	0
0106	0	0	0	0	0	0	0	0
0107	0	170	0	0	0	0	0	0
0201	0	0	9	0	687	0	0	0
0301	0	0	1	0	0	0	0	0
0401	0	0	0	0	264	0	0	169
0501	0	0	0	0	0	237	362	0
0601	0	0	0	0	231	0	0	0
0701	3	50	46	0	6	87	0	0
0801	0	0	0	0	0	0	0	0
0802	0	0	35	0	185	155	0	0
0901	0	0	707	0	0	0	0	0
0902	0	0	20	0	0	476	661	4
1001	0	0	0	0	0	0	0	0
1101	1	18	0	0	0	0	0	0
1102	0	241	0	0	0	0	0	0
1201	0	0	0	0	0	0	0	0
1301	0	0	0	0	0	0	0	0
1302	0	0	0	0	0	0	0	0
1401	0	0	0	0	0	0	0	0
1501	178	117	42	0	0	0	0	0
1601	0	97	0	0	0	0	69	0
1701	0	0	355	0	1.366	26	186	0
1801	3	16	46	662	0	58	16	13
1901	0	0	0	0	415	0	0	0
2001	55	94	116	0	267	144	123	16
2101	16	26	20	0	81	152	675	78
2201	3	21	29	4	19	97	73	36
2301	3	6	40	0	0	127	151	75
2401	0	0	0	0	0	0	0	0
2402	0	0	0	0	185	0	106	0
2403	0	0	0	0	0	0	0	0
2404	0	0	115	53	0	288	165	371
2501	0	0	0	0	23	201	47	40
2502	0	0	0	0	0	0	0	0
2601	0	0	0	0	0	0	0	0
2602	0	0	0	0	0	0	0	0
2603	0	0	0	0	0	0	0	0
2701	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	752	1.087	1.581	719	3.728	2.047	2.634	802

Código	(23) Instituições financeiras	(24) Serviços prestados	(25) Aluguel de imóveis	(26) Administração pública	(27) Serviços privados não mercantis	(28) Dummy financeiro	Total do Consumo intermediário
0101	0	0	0	0	0	0	876
0102	0	0	0	0	0	0	757
0103	0	0	0	0	0	0	477
0104	0	0	0	0	0	0	936
0105	0	0	0	0	0	0	401
0106	0	0	0	0	0	0	393
0107	0	169	0	31	0	0	1.949
0201	0	0	0	0	0	0	2.309
0301	0	0	0	0	0	0	341
0401	0	25	0	0	0	0	704
0501	0	276	0	15	0	0	1.480
0601	0	0	0	0	0	0	471
0701	0	22	8 0	87	0	0	1.063
0801	0	0	0	0	0	0	645
0802	0	0	0	2	0	0	894
0901	0	0	0	0	0	0	2.021
0902	0	0	0	47	0	0	1.604
1001	0	0	0	0	0	0	983
1101	0	36	0	2	0	0	63
1102	0	0	0	4	0	0	314
1201	0	0	0	0	0	0	212
1301	0	0	0	8	0	0	451
1302	0	0	0	1	0	0	17
1401	0	0	0	4	0	0	257
1501	0	0	0	0	0	0	390
1601	0	579	0	6	0	0	962
1701	35	453	0	152	0	0	3.075
1801	21	42	0	195	0	0	1.331
1901	0	0	221	0	0	0	637
2001	4	197	0	37	0	0	2.368
2101	1	91	0	31	0	0	1.579
2201	92	73	0	101	0	0	668
2301	498	0	0	39	0	2.413	3.579
2401	0	23	0	199	0	0	222
2402	190	0	0	206	0	0	687
2403	0	0	0	74	0	0	74
2404	437	210	0	718	0	0	2.357
2501	151	43	0	51	0	0	0
2601	0	0	0	0	0	0	0
2602	0	0	0	0	0	0	0
2603	0	0	0	0	0	0	0
2701	0	0	0	0	0	0	0
Total	1.431	2.446	221	2.008	0	2.413	38.140

Tabela 5.2: Matriz dos Coeficientes Técnicos Intersetoriais Totais

Esta é a tabela denominada matriz de coeficientes técnicos pois representa o produto entre uma matriz que representa a participação setorial na produção de produtos e uma matriz dos coeficientes técnicos dos insumos totais.

Código	Descrição da Atividade	(01) Agropecuária	(02) Industrias metalúrgicas	(03) Máquinas e tratores	(04) Mat. elétrico e eletrônico	(05) Material de transporte
01	Agropecuária	0,13807	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
02	Indústrias metalúrgicas	0,00000	0,33031	0,26691	0,13123	0,05852
03	Máquinas e tratores	0,00000	0,02434	0,06927	0,05603	0,03563
04	Material elétrico e eletrônico	0,00000	0,00000	0,04699	0,13075	0,00000
05	Material de transporte	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,31952
06	Madeira e mobiliário	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
07	Papel e gráfica	0,00030	0,00360	0,00621	0,00868	0,00317
08	Indústria química	0,08270	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
09	Indústria Petroquímica	0,02764	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	Calçados, couros e peles	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	Beneficiamento de produtos vegetais	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
12	Indústria do fumo	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	Abate de animais	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
14	Indústria de laticínios	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	Fabricação de óleos vegetais	0,00570	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
16	Demais indústrias alimentares	0,02227	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	Demais indústrias	0,00000	0,00000	0,00000	0,03109	0,02312
18	Serviços industriais de utilidade pública	0,00241	0,01516	0,01362	0,00502	0,00505
19	Construção civil	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
20	Comércio	0,02165	0,02470	0,04426	0,03836	0,04598
21	Transportes	0,00654	0,00559	0,00648	0,00786	0,01042
22	Comunicações	0,00000	0,00000	0,01329	0,00754	0,00420
23	Instituições financeiras	0,00492	0,01008	0,01007	0,01485	0,01280
24	Serviços prestados às famílias e empresas	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
25	Aluguel de imóveis	0,00000	0,00000	0,00638	0,00000	0,00000
26	Administração pública	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	Serviços privados não-mercantis	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(06) Madeira e mobiliário	(07) Papel e gráfica	(08) Industria química	(09) Industria petroquímica	(10) Calçados, couros e peles	(11) Beneficiamento de produtos vegetais	(12) Industria do fumo	(13) Abate de animais	(14) Industria de laticínios
01	0,18768	0,00000	0,00000	0,00000	0,01051	0,52562	0,32164	0,51581	0,31436
02	0,01579	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
03	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
04	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
05	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
06	0,16091	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
07	0,00553	0,24000	0,00588	0,00421	0,02562	0,00403	0,00530	0,00000	0,00412
08	0,01239	0,02841	0,21085	0,00000	0,00712	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
09	0,00000	0,00000	0,33932	0,26099	0,03079	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,23569	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03411	0,00000	0,00000	0,00000
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,17315	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,08864	0,00000	0,00000	0,01791	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,18930
15	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
16	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,03485	0,00000	0,00000	0,09365	0,01759	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
18	0,01228	0,01242	0,01758	0,01005	0,00669	0,00600	0,00737	0,00198	0,00537
19	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
20	0,06003	0,06791	0,02579	0,02660	0,04726	0,06811	0,04717	0,03182	0,03082
21	0,01422	0,00551	0,00503	0,03621	0,00982	0,01976	0,02038	0,00902	0,00730
22	0,00621	0,00685	0,00495	0,00334	0,00421	0,00293	0,00263	0,00123	0,00382
23	0,00203	0,00342	0,01868	0,00473	0,00303	0,00592	0,00545	0,00204	0,00615
24	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
25	0,00000	0,00000	0,00736	0,00373	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(15) Fabricação de óleos vegetais	(16) Demais industrias alimentares	(17) Demais industrias	(18) Serviços industriais	(19) Construção civil	(20) Comércio	(21) Transportes	(22) Comunicações
01	0,42131	0,19781	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00015	0,00000
02	0,00000	0,00000	0,00229	0,00000	0,09310	0,00000	0,00000	0,00000
03	0,00000	0,00000	0,00034	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
04	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03585	0,00000	0,00000	0,08828
05	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,02766	0,07316	0,00000
06	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03130	0,00000	0,00000	0,00000
07	0,00222	0,02464	0,01118	0,00000	0,00082	0,01009	0,00000	0,00000
08	0,00000	0,00000	0,00849	0,00000	0,02505	0,01802	0,00000	0,00000
09	0,00000	0,00000	0,17770	0,00000	0,00000	0,05547	0,13365	0,00213
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00094	0,12752	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	0,15360	0,05742	0,01023	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
16	0,00000	0,04718	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,01382	0,00000
17	0,00000	0,00000	0,08691	0,00000	0,18516	0,00300	0,03750	0,00000
18	0,00229	0,00808	0,01134	0,26931	0,00000	0,00675	0,00329	0,00705
19	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,05632	0,00000	0,00000	0,00000
20	0,04756	0,04643	0,02826	0,00000	0,03615	0,01680	0,02486	0,00820
21	0,01417	0,01266	0,00478	0,00000	0,01098	0,01767	0,13639	0,04071
22	0,00267	0,01017	0,00719	0,00163	0,00252	0,01130	0,01480	0,01899
23	0,00290	0,00293	0,00985	0,00000	0,00000	0,01486	0,03049	0,03912
24	0,00000	0,00000	0,02807	0,02153	0,02506	0,03364	0,05469	0,19393
25	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00309	0,02342	0,00955	0,02113
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(23) Instituições financeiras	(24) Serviços prestados	(25) Aluguel de imóveis	(26) Administração pública	(27) Serviços privados não mercantis
01	0,00000	0,02244	0,00000	0,00294	0,00000
02	0,00000	0,02244	0,00000	0,00294	0,00000
02	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
03	0,00000	0,02244	0,00000	0,00294	0,00000
02	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
03	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
04	0,00000	0,00327	0,00000	0,00000	0,00000
05	0,00000	0,03538	0,00000	0,00134	0,00000
06	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
07	0,00000	0,02923	0,00000	0,00810	0,00000
08	0,00000	0,00000	0,00000	0,00016	0,00000
09	0,00000	0,00000	0,00000	0,00440	0,00000
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00000	0,00458	0,00000	0,00053	0,00000
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00080	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00036	0,00000
15	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
16	0,00000	0,07350	0,00000	0,00057	0,00000
17	0,00766	0,05811	0,00000	0,01404	0,00000
18	0,00455	0,00541	0,00000	0,01803	0,00000
19	0,00000	0,00000	0,02870	0,00000	0,00000
20	0,00092	0,02527	0,00000	0,00339	0,00000
21	0,00029	0,01168	0,00000	0,00283	0,00000
22	0,02027	0,00940	0,00000	0,00934	0,00000
23	0,10920	0,00000	0,00000	0,00362	0,00000
24	0,13763	0,02992	0,00000	0,11088	0,00000
25	0,03317	0,00556	0,00000	0,00473	0,00000
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 5.3: Matriz de Impacto Intersetorial Total - Matriz de Leontieff
Esta matriz representa portanto a inversa de uma matriz denominada Tecnológica, ou seja,é a inversa da diferença entre uma matriz identidade de ordem n e uma matriz dos Coeficientes Técnicos Intersetoriais Totais.

Código	Descrição da Atividade	(01) Agropecuária	(02) Industrias metalúrgicas	(03) Máquinas e tratores	(04) Mat. elétrico e eletrônico	(05) Material de transporte
01	Agropecuária	1,17389	0,00040	0,00068	0,00094	0,00101
02	Indústrias metalúrgicas	0,00047	1,50984	0,44677	0,25755	0,15420
03	Máquinas e tratores	0,00016	0,03976	1,08995	0,07651	0,06081
04	Material elétrico e eletrônico	0,00028	0,00236	0,06069	1,15582	0,00431
05	Material de transporte	0,00340	0,00323	0,00475	0,00467	1,47582
06	Madeira e mobiliário	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000
07	Papel e gráfica	0,00385	0,00839	0,01317	0,01705	0,00973
08	Indústria química	0,12411	0,00131	0,00210	0,00253	0,00272
09	Indústria Petroquímica	0,10945	0,00628	0,00973	0,01894	0,02147
10	Calçados, couros e peles	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	Beneficiamento de produtos vegetais	0,00373	0,00011	0,00018	0,00019	0,00022
12	Indústria do fumo	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	Abate de animais	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
14	Indústria de laticínios	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	Fabricação de óleos vegetais	0,00996	0,00007	0,00013	0,00060	0,00060
16	Demais indústrias alimentares	0,02804	0,00063	0,00102	0,00108	0,00123
17	Demais indústrias	0,01251	0,00196	0,00489	0,04318	0,04189
18	Serviços industriais de utilidade pública	0,00957	0,03302	0,03157	0,01702	0,01694
19	Construção civil	0,00008	0,00006	0,00030	0,00010	0,00011
20	Comércio	0,03551	0,04133	0,06514	0,05915	0,07943
21	Transportes	0,01591	0,01151	0,01453	0,01594	0,02280
22	Comunicações	0,00241	0,00183	0,01699	0,01205	0,00961
23	Instituições financeiras	0,01127	0,01891	0,02099	0,02588	0,02692
24	Serviços prestados às famílias e empresas	0,00479	0,00592	0,01030	0,01066	0,01137
25	Aluguel de imóveis	0,00276	0,00206	0,00979	0,00329	0,00373
26	Administração pública	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	Serviços privados não-mercantis	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(06) Madeira e mobiliário	(07) Papel e gráfica	(08) Industria química	(09) Industria petroquímica	(10) Calçados, couros e peles	(11) Beneficiamento de produtos vegetais	(12) Industria do fumo	(13) Abate de animais	(14) Industria de laticínios
01	0,26351	0,00056	0,00135	0,00195	0,08842	0,63934	0,45719	0,61678	0,45554
02	0,02959	0,00088	0,00127	0,00172	0,00098	0,00104	0,00096	0,00060	0,00066
03	0,00113	0,00031	0,00039	0,00050	0,00033	0,00038	0,00035	0,00022	0,00024
04	0,00116	0,00119	0,00123	0,00089	0,00091	0,00068	0,00065	0,00037	0,00073
05	0,00701	0,00565	0,00674	0,00917	0,00610	0,00802	0,00744	0,00457	0,00450
06	1,19178	0,00000	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
07	0,01225	1,31807	0,01553	0,01124	0,04686	0,00902	0,01120	0,00267	0,00901
08	0,04932	0,04973	1,26986	0,00326	0,02492	0,06957	0,05011	0,06602	0,04937
09	0,05692	0,03352	0,60944	1,40493	0,08806	0,07160	0,05438	0,06289	0,04865
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,30836	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00102	0,00015	0,00028	0,00032	0,00044	1,03750	0,00161	0,00203	0,00155
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,20941	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,11809	0,00000	0,00000	1,01824	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,23350
15	0,00292	0,00012	0,00091	0,00193	0,00124	0,00552	0,00398	0,00528	0,00392
16	0,00734	0,00083	0,00160	0,00196	0,00306	0,01616	0,01188	0,01512	0,01143
17	0,05371	0,00508	0,06559	0,14802	0,03627	0,01005	0,00823	0,00801	0,00662
18	0,02586	0,02538	0,04142	0,02299	0,01690	0,01513	0,01728	0,00838	0,01367
19	0,00011	0,00010	0,00045	0,00023	0,00009	0,00012	0,00010	0,00008	0,00008
20	0,08658	0,09445	0,05472	0,04588	0,07746	0,09330	0,07438	0,05243	0,05393
21	0,02754	0,01282	0,03541	0,06153	0,02338	0,03487	0,03699	0,02011	0,01816
22	0,01036	0,01124	0,01120	0,00793	0,00840	0,00610	0,00582	0,00327	0,00678
23	0,00950	0,00897	0,03342	0,01262	0,00937	0,01564	0,01435	0,00942	0,01439
24	0,01010	0,00823	0,01370	0,01324	0,00844	0,00927	0,00849	0,00536	0,00679
25	0,00346	0,00341	0,01466	0,00758	0,00309	0,00400	0,00332	0,00255	0,00264
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(15) Fabricação de óleos vegetais	(16) Demais industrias alimentares	(17) Demais industrias	(18) Serviços industriais	(19) Construção civil	(20) Comércio	(21) Transportes	(22) Comunicações
01	0,58545	0,36503	0,00913	0,00176	0,01247	0,00272	0,01118	0,01259
02	0,00088	0,00105	0,00502	0,00028	0,16141	0,00544	0,01476	0,02550
03	0,00032	0,00037	0,00086	0,00010	0,00729	0,00205	0,00566	0,00772
04	0,00063	0,00148	0,00134	0,00039	0,04501	0,00174	0,00292	0,10538
05	0,00667	0,00662	0,00620	0,00175	0,00706	0,04697	0,13250	0,01820
06	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03954	0,00003	0,00002	0,00003
07	0,00652	0,03756	0,02069	0,00135	0,00946	0,01672	0,00786	0,01123
08	0,06344	0,04147	0,01488	0,00029	0,03978	0,02457	0,00350	0,00257
09	0,06424	0,04525	0,28574	0,00096	0,08291	0,09803	0,23785	0,02193
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00314	0,13995	0,00069	0,00047	0,00069	0,00072	0,00350	0,00338
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	1,18652	0,07440	0,01394	0,00020	0,00312	0,00051	0,00267	0,00157
16	0,01470	1,05916	0,00364	0,00245	0,00375	0,00384	0,02359	0,01783
17	0,00884	0,00695	1,12844	0,00217	0,23045	0,01893	0,08191	0,02303
18	0,00959	0,01787	0,02346	1,36897	0,01153	0,01326	0,01330	0,01499
19	0,00010	0,00010	0,00011	0,00001	1,05987	0,00079	0,00048	0,00078
20	0,07668	0,07793	0,04527	0,00134	0,06076	1,02688	0,05012	0,02507
21	0,02938	0,02762	0,02095	0,00073	0,02313	0,02749	1,17396	0,05479
22	0,00574	0,01399	0,01120	0,00268	0,00737	0,01412	0,02247	1,02515
23	0,01161	0,01099	0,01664	0,00026	0,00893	0,02083	0,04662	0,05033
24	0,00758	0,00921	0,04053	0,03111	0,04045	0,04380	0,08170	0,21706
25	0,00333	0,00328	0,00345	0,00028	0,00625	0,02611	0,01581	0,02581
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Código	(23) Instituições financeiras	(24) Serviços prestados	(25) Aluguel de imóveis	(26) Administração pública	(27) Serviços privados não mercantis
01	0,00947	0,05877	0,00036	0,01154	0,00000
02	0,00197	0,00751	0,00463	0,00146	0,00000
03	0,00062	0,00277	0,00021	0,00051	0,00000
04	0,00330	0,00540	0,00129	0,00166	0,00000
05	0,00954	0,05801	0,00020	0,00938	0,00000
06	0,00004	0,00001	0,00113	0,00001	0,00000
07	0,00742	0,04499	0,00027	0,01630	0,00000
08	0,00173	0,00955	0,00114	0,00252	0,00000
09	0,00800	0,03092	0,00238	0,01573	0,00000
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00252	0,01574	0,00002	0,00246	0,00000
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00082	0,00000
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00045	0,00000
15	0,00121	0,00682	0,00009	0,00107	0,00000
16	0,01311	0,08183	0,00011	0,01019	0,00000
17	0,02166	0,07204	0,00661	0,02530	0,00000
18	0,00955	0,01278	0,00033	0,02709	0,00000
19	0,00119	0,00023	0,03042	0,00019	0,00000
20	0,00882	0,04343	0,00174	0,01071	0,00000
21	0,00504	0,02054	0,00066	0,00704	0,00000
22	0,02549	0,01313	0,00021	0,01160	0,00000
23	1,12471	0,00510	0,00026	0,00578	0,00000
24	0,16612	1,03923	0,00116	0,11955	0,00000
25	0,03907	0,00764	1,00018	0,00623	0,00000
26	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000

5.5 Resultados Numéricos

Facilmente é observada a necessidade da utilização de um software para a manipulação dos dados apresentados nas tabelas anteriores.

Os dados foram fornecidos em Excel, sendo transportados facilmente para o Matlab. Já para utilizar o Lindo foi necessário digitar os dados da planilha junto com as variáveis envolvidas. No Lindo foi realizada uma análise de sensibilidade para a solução obtida.

Devido ao pequeno porte do sistema (27×27) foi possível utilizar o programa Excel de freqüente uso comercial, o programa Lindo de domínio público e o programa Matlab de cunho científico. Os resultados numericamente obtidos nestes três programas corresponderam ao esperado, ou seja, os níveis de produção obtidos em cada caso são correspondentes entre si, satisfazendo assim o objetivo desejado.

Conforme tabela de demanda final a seguir, são calculados os níveis de produção para os dados apresentados:

Código	Descrição da Atividade	Demanda final
01	Agropecuária	4551,176
02	Indústrias metalúrgicas	1551,210824
03	Máquinas e tratores	4515,043218
04	Material elétrico e eletrônico	2065,366351
05	Material de transporte	4660,708241
06	Madeira e mobiliário	1910,403095
07	Papel e gráfica	1123,737102
08	Indústria química	970,5827
09	Indústria Petroquímica	1275,023
10	Calçados, couros e peles	4217,034426
11	Beneficiamento de produtos vegetais	2961,48
12	Indústria do fumo	1608,305829
13	Abate de animais	2697,46
14	Indústria de laticínios	1580,427416
15	Fabricação de óleos vegetais	1168,127371
16	Demais indústrias alimentares	3441,711942
17	Demais indústrias	6240,04434
18	Serviços industriais de utilidade pública	1173,416964
19	Construção civil	6816,673346
20	Comércio	6206,928378
21	Transportes	3519,419399
22	Comunicações	1587,659052
23	Instituições financeiras	982,6769691
24	Serviços prestados às famílias e empresas	4521,462
25	Aluguel de imóveis	7113,548
26	Administração pública	10795,15
27	Serviços privados não-mercantis	328,4042839

A seguir, são apresentados os resultados obtidos por cada programa.

5.6 Resultados em Lindo

Neste programa foi necessário a digitação de todos os dados numéricos e algébricos correspondentes, sendo de muita responsabilidade do digitador, pois qualquer erro na digitação acarretará em erros no nivel de produção.

```
! Programa para calcular o nivel de produ\c{c}\~{a}o

MIN  0.68779 X1 + 0.58622 X2 + 0.51652 X3 + 0.56859 X4 + 0.48159X5
   + 0.48808 X6 + 0.63548 X7 + 0.36456 X8 + 0.55649 X9 + 0.51303 X10
   + 0.33352 X11 + 0.41691 X12 + 0.42019 X13 + 0.43877 X14 + 0.35234 X15
   + 0.46517 X16 + 0.61337 X17 + 0.70753 X18 + 0.49460 X19 + 0.76132 X20
   + 0.46766 X21 + 0.58046 X22 + 0.68631 X23 + 0.68627 X24 + 0.97130 X25
   + 0.81395 X26 + X27
SUBJECT TO
1) 0.86192545 X1  - 0.18768 X6 - 0.010506926 X10 -
   0.52562609 X11 - 0.32164 X12 - 0.51580992 X13 -0.31435438 X14 -
   0.42130942 X15 - 0.19780601 X16 - 0.0001454632 X21 -
   0.022439724 X24 - 0.0029398728 X26 >= 4551.175706
2) 0.66969 X2 - 0.26691 X3 - 0.13123 X4 - 0.05852 X5 - 0.01579 X6
  - 0.00229 X17 - 0.0931 X19 >= 1551.210824
3) -0.02434 X2 + 0.93073 X3 - 0.05603 X4 - 0.03563 X5 - 0.00034
   X17 >= 4515.043218
4) -0.04699 X3 + 0.86925 X4 - 0.03585 X19 -
   0.08828 X22 - 0.00327 X24 >= 2065.366351
5) 0.68048 X5 - 0.02766 X20 - 0.07316 X21 - 0.03538 X24 - 0.00134
   X26 >= 4660.708241
6) 0.83909 X6 - 0.0313 X19 >= 1910.403095
7) -0.0003 X1 -0.0036X2
   - 0.00621 X3 - 0.00868 X4 - 0.00317 X5 - 0.00553 X6 + 0.76 X7 -
   0.00588 X8 - 0.00421 X9 - 0.02562 X10 - 0.00403 X11 - 0.0053 X12
```

- 0.00412 X14 - 0.00222 X15 - 0.02464 X16 - 0.01118 X17 - 0.00082 X19 - 0.01009 X20 - 0.02923 X24 - 0.0081 X26 >= 1123.737102

8) -0.0827 X1 - 0.01239 X6 - 0.02841 X7 + 0.78915 X8 - 0.00712 X10 - 0.00849 X17 - 0.02505 X19 - 0.01802 X20 - 0.00016 X26 >= 970.5826589

9) -0.02764 X1 - 0.33932 X8 + 0.73901 X9 - 0.03079 X10 - 0.1777 X17 - 0.05547 X20 - 0.13365 X21 - 0.00213 X22 - 0.0044 X26 >= 1275.022578

10) 0.76431 X10 >= 4217.034426

11) 0.96589609 X11 - 0.000940576 X15 - 0.12751082 X16 - 0.0045741696 X24 - 0.0005382144 X26 >= 2961.480305

12) 0.82685 X12 >= 1608.305829

13) - 0.088643075 X10 + 0.98208992 X13 - 0.0007994628 X26 >= 2697.459507

14) 0.81070438 X14 - 0.0003583894 X26 >= 1580.427416

15) -0.0057 X1 + 0.84640000 X15 - 0.05742 X16 - 0.01023 X17 >= 1168.127371

16) -0.022275446 X1 + 0.95281683 X16 - 0.013814537 X21 - 0.073496107 X24 - 0.0005640606 X26 >= 3441.711942

17) - 0.03109 X4 - 0.02312 X5 - 0.03485 X6 - 0.09365 X9 - 0.01759 X10 + 0.91309 X17 - 0.18516 X19 - 0.003 X20 - 0.0375 X21 - 0.00766 X23 - 0.05811 X24 - 0.01404 X26 >= 6240.04434

18) -0.00241 X1 - 0.01516 X2 - 0.01362 X3 - 0.00502 X4 - 0.00505 X5 - 0.01228 X6 - 0.01242 X7 - 0.01758 X8 - 0.01005 X9 - 0.00669 X10 - 0.006 X11 - 0.00737 X12 - 0.00198 X13 - 0.00537 X14 - 0.00229 X15 - 0.00808 X16 - 0.01134 X17 + 0.73069 X18 - 0.00675 X20 - 0.00329 X21 - 0.00705 X22 - 0.00455 X23 - 0.00541 X24 - 0.01803 X26 >= 1173.416964

19) 0.94368 X19 - 0.0287 X25 >=

6816.673346

20) - 0.02165 X1 - 0.0247 X2 - 0.04426 X3 - 0.03836 X4 - 0.04598 X5 - 0.06003 X6 - 0.06791 X7 - 0.02579 X8 - 0.0266 X9 - 0.04726 X10 - 0.06811 X11 - 0.04717 X12 - 0.03182 X13 - 0.03082 X14 - 0.04756 X15 - 0.04643 X16 - 0.02826 X17 - 0.03615 X19 + 0.9832 X20 - 0.02486 X21 - 0.0082 X22 - 0.00092 X23 - 0.02527 X24 - 0.00339 X26 >= 6206.928378

21) -0.00654 X1 -0.00559 X2 -0.00648 X3 -0.00786 X4 -0.01042 X5 -0.01422 X6 - 0.00551 X7 -0.00503 X8 -0.03621 X9 -0.00982 X10 -0.01976 X11 - 0.02038 X12 - 0.00902 X13 -0.0073 X14 -0.01417 X15 -0.01266 X16 -0.00478 X17 -0.01098 X19 - 0.01767 X20 + 0.86361 X21 -0.04071 X22 -0.00029 X23 -0.01168 X24 -0.00283 X26 >= 3519.419399

22) -0.01329 X3 -0.00754 X4 -0.0042 X5 -0.00621 X6 -0.00685 X7 -0.00495 X8 -0.00334 X9 - 0.00421 X10 -0.00293 X11 -0.00263 X12 -0.00123 X13 -0.00382 X14 -0.00267 X15 -0.01017 X16 -0.00719 X17 -0.00163 X18 -0.00252 X19 -0.0113 X20 -0.0148 X21 + 0.98101 X22 -0.02027 X23 -0.0094 X24 -0.00934 X26 >= 1587.659052

23) -0.00492 X1 - 0.01008 X2 - 0.01007 X3 - 0.01485 X4 - 0.0128 X5 - 0.00203 X6 - 0.00342 X7 - 0.01868 X8 - 0.00473 X9 - 0.00303 X10 - 0.00592 X11 - 0.00545 X12 - 0.00204 X13 - 0.00615 X14 - 0.0029 X15 - 0.00293 X16 - 0.00985 X17 - 0.01486 X20 - 0.03049 X21 - 0.03912 X22 + 0.8908 X23 - 0.00362 X26 >= 982.6769691

24) -0.02807 X17 - 0.02153 X18 - 0.02506 X19 - 0.03364 X20 - 0.05469 X21 - 0.19393 X22 - 0.13763 X23 + 0.97009 X24 - 0.11087 X26 >= 4521.462417

25) - 0.00638 X3 - 0.00736 X8 - 0.00373 X9 - 0.00309 X19 - 0.02342 X20 - 0.00955 X21 - 0.02113 X22 - 0.03317 X23 - 0.00556

```
    X24 + X25 - 0.00473 X26 >= 7113.548483
26) X26 >= 10795.15318
27) X27 >= 328.4042839
```

A seguir, apresenta-se a solução fornecido pelo programa Lindo:

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      27

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)        89583.18

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1     13808.738281          0.000000
        X2      7031.696777          0.000000
        X3      5554.341309          0.000000
        X4      3265.781250          0.000000
        X5      8329.292969          0.000000
        X6      2555.004883          0.000000
        X7      2838.206299          0.000000
        X8      3459.057129          0.000000
        X9      8532.382812          0.000000
       X10      5517.439941          0.000000
       X11      3724.452637          0.000000
       X12      1945.099854          0.000000
       X13      3253.441895          0.000000
       X14      1954.221924          0.000000
       X15      1917.470459          0.000000
       X16      4641.351074          0.000000
       X17     10713.937500          0.000000
```

X18	3105.815186	0.000000
X19	7459.291992	0.000000
X20	10323.620117	0.000000
X21	5805.556152	0.000000
X22	2479.538086	0.000000
X23	2370.475342	0.000000
X24	7983.545410	0.000000
X25	7753.011719	0.000000
X26	10795.153320	0.000000
X27	328.404297	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
1)	0.000000	-1.000000
2)	0.000000	-1.000000
3)	0.000000	-1.000000
4)	0.000000	-1.000000
5)	0.000000	-1.000000
6)	0.000000	-1.000000
7)	0.000000	-1.000000
8)	0.000000	-1.000000
9)	0.000000	-1.000000
10)	0.000000	-1.000000
11)	0.000000	-1.000000
12)	0.000000	-1.000000
13)	0.000000	-1.000000
14)	0.000000	-1.000000
15)	0.000000	-1.000000
16)	0.000000	-1.000000
17)	0.000000	-1.000000

18)	0.000000	-1.000000
19)	0.000000	-1.000000
20)	0.000000	-1.000000
21)	0.000000	-1.000000
22)	0.000000	-1.000000
23)	0.000000	-1.000000
24)	0.000000	-1.000000
25)	0.000000	-1.000000
26)	0.000000	-1.000000
27)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 27

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	0.687790	INFINITY	0.851860
X2	0.586220	INFINITY	0.662326
X3	0.516520	INFINITY	0.917476
X4	0.568590	INFINITY	0.865186
X5	0.481590	INFINITY	0.677589
X6	0.488080	INFINITY	0.839087
X7	0.635480	INFINITY	0.758681
X8	0.364560	INFINITY	0.787491
X9	0.556490	INFINITY	0.711784
X10	0.513030	INFINITY	0.764310
X11	0.333520	INFINITY	0.963863

X12	0.416910	INFINITY	0.826850
X13	0.420190	INFINITY	0.982090
X14	0.438770	INFINITY	0.810704
X15	0.352340	INFINITY	0.842800
X16	0.465170	INFINITY	0.944140
X17	0.613370	INFINITY	0.886179
X18	0.707530	INFINITY	0.730471
X19	0.494600	INFINITY	0.943511
X20	0.761320	INFINITY	0.973824
X21	0.467660	INFINITY	0.851820
X22	0.580460	INFINITY	0.975470
X23	0.686310	INFINITY	0.889118
X24	0.686270	INFINITY	0.962261
X25	0.971300	INFINITY	0.999821
X26	0.813950	INFINITY	1.000000
X27	1.000000	INFINITY	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
1	4551.175781	INFINITY	11763.104492
2	1551.210815	INFINITY	4657.274902
3	4515.043457	INFINITY	5095.975586
4	2065.366455	INFINITY	2825.506836
5	4660.708008	INFINITY	5643.836426
6	1910.403076	INFINITY	2143.871826
7	1123.737061	INFINITY	2153.292236
8	970.582642	INFINITY	2723.975098
9	1275.022583	INFINITY	6073.216309
10	4217.034668	INFINITY	4217.034668

11	2961.480225	INFINITY	3589.862549
12	1608.305786	INFINITY	1608.305786
13	2697.459473	INFINITY	3195.172607
14	1580.427368	INFINITY	1584.296265
15	1168.127319	INFINITY	1616.044189
16	3441.711914	INFINITY	4382.086914
17	6240.044434	INFINITY	9494.467773
18	1173.416992	INFINITY	2268.708496
19	6816.673340	INFINITY	7037.923340
20	6206.928223	INFINITY	10053.384766
21	3519.419434	INFINITY	4945.291016
22	1587.659058	INFINITY	2418.716064
23	982.676941	INFINITY	2107.632324
24	4521.462402	INFINITY	7682.255859
25	7113.548340	INFINITY	7751.623047
26	10795.153320	INFINITY	10795.153320
27	328.404297	INFINITY	328.404297

Conforme resultados fornecidos pelo Programa Lindo, o mesmo fornece os valores dos coeficientes da função objetivo e o lado direito do programa (RHS) para os quais a solução obtida é válida. Desta forma pode-se notar que o menor nivel de produção está no item 27, ou seja, na atividade que representa os "serviços privados não- mercantis", enquanto que o maior nivel de produção está no item 1, ou seja, na atividade que representa a "Agropecuária .

5.7 Matlab

Neste Programa, trabalhou-se de duas maneiras: primeiro, calculando a inversa da matriz de coeficientes técnicos, e depois, utilizando o pacote de otimização.

Mediante o cálculo da inversa, foram obtidos os seguintes resultados para o nivel de produção:

```
1.0e+004 *

   1.38087381399789
   0.70316971217051
   0.55543411070530
   0.32657811602091
   0.83292931630164
   0.25550047532812
   0.28382064214451
   0.34590570762115
   0.85323824720124
   0.55174398163049
   0.37244529150032
   0.19450998718026
   0.32534420551701
   0.19542219433498
   0.19174706290021
   0.46413510840903
   1.07139377068453
   0.31058152361310
   0.74592921223873
   1.03236204490484
   0.58055563378413
```

```
0.24795380512231
0.23704754791577
0.79835449974862
0.77530119879592
1.07951531800000
```

e o resultado, utilizando o pacote de otimização é

```
1.0e+004 *

1.38087381399789
0.70316971217051
0.55543411070530
0.32657811602091
0.83292931630164
0.25550047532812
0.28382064214451
0.34590570762115
0.85323824720124
0.55174398163049
0.37244529150032
0.19450998718026
0.32534420551701
0.19542219433498
0.19174706290021
0.46413510840903
1.07139377068453
0.31058152361310
0.74592921223873
1.03236204490484
0.58055563378413
```

```
0.24795380512231
0.23704754791577
0.79835449974862
0.77530119879592
1.07951531800000
0.03284042839000
```

Conforme resultados obtidos, tanto pelo cálculo da inversa como pelo pacote de otimizaç ao pode ser observada a concordância numérica entre esses resultados e também com o resultado conseguido com o Lindo.

5.8 Resultados no Excel

No excel, só pode ser calculada a inversa da matriz dos coeficientes técnicos e realizada a multiplicação desta matriz inversa com o vetor de demanda final para conseguir os níveis de produção requeridos.

O resultado obtido foi:

```
13808,68285
7031,76071
5554,364761
3265,791722
8329,396412
2555,00901
2838,313029
3459,040906
8532,470767
5517,418998
3724,477158
1945,108299
```

```
3253,458849
1954,264083
1917,453689
4641,352035
10713,93961
3105,89053
7459,266473
10323,68197
5805,642783
2479,593997
2370,334251
7983,697779
7753,03646
10795,15318
328,4042839
```

Os resultados numéricos também coincidem com os anteriores.

6 CONCLUSÕES

Foi feita uma descrição do modelo econômico de Leontieff, sendo que o presente trabalho não teve a pretensão de ser exaustivo quanto às aplicações do modelo de insumo-produto. Portanto, a principal contribuição do estudo consiste na sistematização dos procedimentos metodológicos necessários para a construção de um modelo de insumo-produto consistente. Em sequência a isso foram apresentados os modelos aberto e fechado da versão estática bem como as suas abordagens mediante o cálculo aproximado da inversa da matriz dos coeficientes técnicos e a versão do problema na forma de um programa linear. O cálculo da matriz inversa requer bastante esforço computacional devido ao cálculo das potências da matriz de coeficientes técnicos. Para o programa linear, é necessária a adição de um setor de atividade fictício a partir da demanda e a utilização do fato que a oferta pode ser maior ou igual que a demanda.

Na sua versão dinâmica, o modelo de Leontieff está governado por equações em diferença ou diferenciais, dependendo se o tempo é medido de maneira discreta ou contínua, e a sua solução mostra o seguinte comportamento: os níveis de produção satisfazem a demanda atual, mas esta pode evoluir de maneira discreta ou instantaneamente para outros níveis no futuro e será necessário um novo cálculo dos níveis de produção para satisfazer esta última demanda.

O caso de estudo apresentado neste trabalho foi baseado em um documento apresentado por Alexandre Porsse, [Porsse, 2002] (porsse@hotmail.com,porsse@fee.tche.br), para a Fundação de Economia e Estatística da Secretaria de Coordenação e Planejamento do Governo do Estado do Rio Grande do Sul. Em tal documento são apresentadas tabelas sobre a atividade econômica do Rio Grande do Sul, dividida em 27 setores e 43 sub-setores. O objetivo do nosso estudo foi calcular os níveis de produção para satisfazer uma demanda final apresentada no mesmo documento.

O Lindo requer a digitação do programa linear correspondente, tomando bastante tempo no caso de modelos de pequeno porte (tamanho 27, no nosso estudo) e sendo praticamente inviável o seu uso para modelos grandes. Porém, uma vantagem significativa é que tal programa pode efetuar uma análise de sensibilidade para os coeficientes da função objetivo e para o vetor do lado direito do programa linear. O Matlab pode tratar os dados de maneira eficiente, nas duas abordagens: mediante o cálculo da inversa ou resolvendo o programa linear com um pacote especializado de otimização matemática. O Excel só permite a resolução do problema mediante o cálculo da inversa, mas tem a vantagem de ser um programa comercial e pode ser utilizado por uma maior número de usuários.

Cabe salientar que neste caso, para um modelo de tamanho 27, os resultados obtidos pelos três programas oferecem uma concordância numérica quase total, tendo apenas fracionárias diferenças em seus valores obtidos.

REFERÊNCIAS

[FEI 01] FEIJÓ, C. A, Contabilidade Social: o novo sistema de contas nacionais do Brasil, Rio de Janeiro: Campus, 2001.

[HAD 76] HADDAD, P. R. Contabilidade social e economia regional: análise de insumo- produto. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

[HAD 99] HADDAD, E. A. Regional inequality and structural changes: lessons from the brazilian experience. Aldershot: Ashgate, 1999.

[HAN 99] HANDBOOK of input-output table compilation and analysis. New York: Nações Unigas, 1999. Manuscript for editing and publication, Statistics Division.

[HIR 58] HIRSCHMAN, A. O. The strategy of economic development. New Haven: Yale University Press, 1958.

[MAT 02a] MATRIZ de insumo-produto do Rio Grande do Sul 1998. Porto Alegre: FEE, 4002. (Documentos FEE, n. 45). 62 p.

[MAT 02b] MATRIZ de insumo-produto do Rio Grande do Sul 1998. Porto Alegre: FEE, 2002a. CD-rom.

[MIL 85] MILLER, R. E.; BLAIR, P. D. Input-output analysis: foundations and extensions. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.

[MON 98] MONTOYA, M. A. (org.). Relações intersetoriais do Mercosul e da econo-mia brasileira: uma abordagem de equilíbrio geral do tipo insumo-produto. Passo Fundo: Ediuf, 1998.

[NAJ 96] NAJBERG, S.; VIEIRA, S. P. Emprego e crescimento econômico: uma contradição. Rio de Janeiro: BNDES, 1996. (Texto para Discussão, n. 48). 70 p.

[HAD 97] NAJBERG, S.; VIEIRA, S. P. Demanda setorial por trabalho: uma aplicação do modelo de geração de emprego. Pesquisa e Planejamento Econômico, Rio de Janeiro: IPEA, v. 27, n. 1, p. 113-140, 1997.

[PORS 02] PORSSE, A. A. Matriz de Insumo-Produto Estadual: Metodologia e Resultados para o Rio Grande do Sul. *Projeto Matriz de Insumo-Produto do Rio Grande do Sul, desenvolvido na Fundação de Economia e Estatística, com suporte financeiro do BRDE, BANRISUL e SEDAI, agenciamento da FAPERGS e apoio institucional da Secretaria de Coordenação e Planejamento do Estado*, 2002.

[RAS 56] RASMUSSEN, P. N. Studies in inter-sectoral relations. Amsterdam: North Holland, 1956.

[Chi 27] Chiang, Alpha C. Matemática para Economistas,Economia matemática I, Editora McGraw-Hill

[IBGE 97] Matriz de insumo-produto do Brasil. Rio de Janeiro:IBGE.(Série Relatórios Metodológicos,v.18). 49p.