Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO: PROPRIEDADES E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO EM 1-D

por

ANA MARIA CODEN SILVA

Porto Alegre, setembro de 2003

Dissertação submetida por Ana Maria Coden Silva* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. Leonardo Prange Bonorino
Dr. João Batista da Paz Carvalho

Data de Defesa: 26 de setembro de 2003.

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos meus pais Mario e Terezinha. De vocês recebi o dom mais precioso: a vida. Já por isso seria infinitamente grata, mas vocês não se contentaram em presentear-me apenas com ela; revestiram minha existência de amor, carinho e dedicação; abrindo as portas do meu futuro. Hoje, procuro entre as palavras, aquela que gostaria que seus corações ouvissem do meu, e só encontro uma, simples e sincera: obrigado.

Quero expressar minha gratidão ao meu orientador Prof. Paulo Ricardo Zingano, assim como todos os demais professores de Programa de Pós-Graduação em Matemática que tive oportunidade de conhecer, Prof. Jaime Bruck Ripoll, Prof. Ivan Edgar Pan Perez, Profa. Ada Maria de Souza Doering, Profa. Elisabeth Ferreira da Costa Gomes, Profa. Sara Carmona, Prof. Eduardo Brietzke, Prof. Leonardo Bonorino, Prof. João Batista Carvalho.

Gostaria de agradecer também a Prof. Nires Metilde Colletto e ao Prof. Alcibiades Gazzoni, pelo incentivo recebido durante o curso e também pela credibilidade ao ingressar nessa instituição.

Aos meus amigos, Magali e Marlon, pelas dificuldades divididas e pela alegria das vitórias; Cleber, Virginia, Lineia e Ismael pelo apoio e amizade; e também aos demais colegas da Pós pela solidariedade e companheirismo.

Aos meus irmãos, Adriane e Wagner; e a minha sobrinha Emily, pelo simples fato de existirem.

Resumo

Neste trabalho, são obtidas diversas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= (\,a(u)\,u_x\,)_x, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), && u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

onde f, a são suaves, com $a(u)$ uniformemente positiva, seguindo resultados recentes apresentados em [15], [17]. Em particular, é examinado o comportamento de $\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ao $t \to \infty$, mostrando-se que

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \left|\,\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx\,\right|$$

ao $t \to \infty$. Outras propriedades de interesse são também discutidas.

Abstract

In this work we present a detailed derivation of several fundamental properties for the solutions $u(\cdot,t)$ of the initial value problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= (\,a(u)\,u_x\,)_x, \qquad & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad & u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

where f, a are assumed smooth, with $a(u)$ uniformly positive for all u concerned. This discussion follows [15], [16] very closely, filling in many details not included in these references. Particular attention is given to the large time behavior of the L^1-norm of $u(\cdot,t)$, showing that

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \left| \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx \right|$$

as $t \to \infty$. Other properties of interest are also discussed.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, derivamos diversas propriedades importantes para soluções $u(\cdot,t)$ de equações de evolução da forma

$$u_t + f(u)_x = \Big(a(u)\, u_x\Big)_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1.1}$$

correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0)$ integráveis (no sentido de Lebesgue), ou seja,

$$u(.,0) \in L^1(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Em (1.1), como no resto do texto, variáveis subscritas indicam derivadas com respeito a elas, por exemplo

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad f(u)_x = \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)),$$

e assim por diante. As funções f, a são supostas conhecidas, com f, a suaves na região considerada; para as questões aqui investigadas é suficiente que f, a sejam duas vezes continuamente diferenciáveis (i.e., $f, a \in C^2$), com ademais

$$a(u) \geq \mu > 0 \tag{1.3}$$

para todo valor de u envolvido, onde $\mu > 0$ é constante. Em alguns resultados do Capítulo 4, precisamos também que $f''(u)$ seja Hölder contínua em $u = 0$, ou seja,

$$|\, f''(u) - f''(0)\,| \leq \Gamma\, |\, u\,|^{\alpha} \tag{1.4}$$

numa vizinhança de $u = 0$, onde Γ, α denotam constantes positivas. Para o problema (1.1), (1.2), é sabido existir uma solução única $u(\cdot,t)$ em

$C^0([0,\infty[\ ,\ L^1(\mathbb{R}))$ que é limitada em $\mathbb{R}\times[t_0,\infty[$ para cada $t_0>0$ dado e satisfaz a equação (1.1) no sentido clássico para $t>0$, verificando a condição inicial (1.2) por se ter $u(\cdot,t)\to u(\cdot,0)$ em $L^1(\mathbb{R})$ ao $t\to 0$, ou seja,

$$\|\, u(\cdot,t)-u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0 \qquad \text{ao} \qquad t\to 0. \tag{1.5}$$

Ademais, para cada compacto $E\subseteq\ ]\,0,+\infty\,[$, tem-se

$$u(x,t),\ u_x(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ u_t(x,t)\to 0 \quad ao \quad x\to\pm\infty \tag{1.6}$$

uniformemente em $t\in E$, ver e.g. [7], [14].

Várias propriedades importantes das soluções $u(\cdot,t)$ podem ser encontrados na literatura, ver e.g. [1], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [15], [17] e [18]. Nas aplicações, $u(\cdot,t)$ representa a densidade de uma certa grandeza $U(t)$, cuja quantidade (ou "massa") num dado intervalo $[a,b]$ e instante t é dada por

$$U(a,b;t)=\int_a^b u(x,t)\,dx, \tag{1.7}$$

sendo a massa total invariante no tempo,

$$m=\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx=\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx \qquad \forall\, t>0. \tag{1.8}$$

Ademais, $u(\cdot,t)$ decai no tempo em várias normas; de fato, mostra-se que

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\sqrt{6}\,\|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\,(\mu\, t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \tag{1.9}$$

para todo $t>0$ e $p>1$, desenvolvendo a análise em [15], [17] em detalhe. Aqui, $\|\,\mathsf{u}\,\|_{\mathsf{L^p(\mathbb{R})}}$ denota a quantidade

$$\|\,\mathsf{u}\,\|_{\mathsf{L^p(\mathbb{R})}}=\Big(\int_{\mathbb{R}}|\,\mathsf{u}(x)\,|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

para $\mathsf{u}\in\mathsf{L^p}(\mathbb{R})$, $p\ge 1$ finito, enquanto, para $p=\infty$,

$$\|\,\mathsf{u}\,\|_{\mathsf{L^\infty(\mathbb{R})}}=\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{x}\in\mathbb{R}}|\,\mathsf{u}(x)\,| \tag{1.11}$$

para $\mathsf{u}\in\mathsf{L^\infty}(\mathbb{R})$, ver [11], [12]. O caso $p=1$ é especial; por se ter

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\ge\Big|\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx\Big|=|\,m\,| \tag{1.12}$$

para todo $t > 0$, vê-se que $u(\cdot,t)$ não pode decair em $L^1(\mathbb{R})$ a menos que tenha massa nula, i.e., $m = 0$. De fato, mostra-se, seguindo [17], que vale

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\, m \,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty \tag{1.13}$$

onde m é a massa da solução, cf. (1.8) acima.

Outras propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ são também examinadas, em particular a monotonicidade em t de $\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})}$ para cada $1 \leq p \leq \infty$,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{1.14}$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Para $p = 1$, tem-se também contratividade,

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) - \tilde{u}(\cdot,t_0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{1.15}$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$, onde $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$ são soluções quaisquer de (1.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0)$, $\tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$. Esta propriedade é extremamente útil na obtenção de várias propriedades fundamentais de (1.1), (1.2), como por exemplo sua monotonicidade

$$u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t) \qquad \forall\, t > 0, \tag{1.16}$$

e decrescimento (no tempo) da variação total,

$$TV_{\mathbb{R}}[\, u(\cdot,t) \,] \leq TV_{\mathbb{R}}[\, u(\cdot,0) \,] \qquad \forall\, t > 0 \tag{1.17}$$

onde $TV_{\mathbb{R}}[\mathsf{u}\,]$ denota a variação de $\mathsf{u} \in \mathsf{BV}(\mathbb{R})$ dada por

$$TV_{\mathbb{R}}[\mathsf{u}\,] = \sup \sum_{\mathsf{i}=1}^{\mathsf{n}} |\, \mathsf{u}(x_i) - u(x_{i-1}) \,|, \tag{1.18}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções de pontos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, para todo $n \geq 1$, ver [4], [12], [16]. Em [18], (1.15) é utilizada para examinar o caso em que $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p > 1$, $n \geq 1$.

Uma propriedade menos conhecida de (1.1), (1.2), obtida cuidadosamente nos Capítulos a seguir ao se detalhar a análise em [15], [17], é o fato de se ter

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty, \tag{1.19}$$

onde $v(\cdot,t)$ é a solução da equação

$$v_t + f'(0)\, v_x + f''(0)\, v\, v_x = a(0)\, v_{xx} \tag{1.20}$$

com $v(\cdot,0) = u(\cdot,0)$ ou, mais geralmente, qualquer estado $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ com mesma massa que $u(\cdot,0)$,

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx. \tag{1.21}$$

Casos particulares importantes da equação (1.20) são dados pela equação clássica do calor,

$$v_t = \mu\, v_{xx} \tag{1.22}$$

e a equação de Burgers [2]

$$v_t + b\, v\, v_x = \mu\, v_{xx}, \tag{1.23}$$

que são consideradas em detalhe nos Capítulos 2 e 3, onde são obtidas, entre outras propriedades,

$$\| v(\cdot,t) - \tilde{v}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{ao} \quad t \to +\infty \tag{1.24}$$

para duas soluções quaisquer correspondentes a estados iniciais $v(\cdot,0)$, $\tilde{v}(\cdot,0)$ em $L^1(\mathbb{R})$ com mesma massa. De (1.19), segue então a mesma propriedade para as soluções $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$ de (1.1), (1.2),

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{ao} \quad t \to +\infty \tag{1.25}$$

quando transportam a mesma massa. Em conseqüência, (1.13) pode ser facilmente obtida.

Nas várias estimativas que são apresentadas nos Capítulos a seguir, vamos denotar constantes quase sempre pela letra C, que em cada instância particular poderá denotar um valor diferente. Quando C depende de certos parâmetros, digamos $p_1, p_2, \cdots, p_n$, isso será indicado ao se escrever a constante na forma $C(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. Novamente, diferentes ocorrências do mesmo símbolo $C(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ podem envolver valores distintos, como por exemplo ao se escrever $C(p,q) = p + 2\,C(p,q)$, e assim por diante.

Equação do Calor

2.1 Introdução

Neste capítulo, derivamos várias propriedades importantes das soluções $u(\cdot,t)$ da equação de difusão linear

$$u_t = \mu\, u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2.1}$$

onde $\mu > 0$ é constante, correspondente a estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$,

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_0 \in L^p(\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Como é bem sabido (ver Teorema 2.1, Seção 2.2 a seguir), existe uma única solução (clássica) em $C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ para o problema (2.1),(2.2), que é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\,\mu\,t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\, u(y,0)\, dy \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R},\ t > 0$. Esta solução é objeto de investigação neste capítulo.

De (2.3), segue que $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$, satisfaz (2.1) no sentido clássico, e além disso

$$\|\, u(\cdot,t) \, - \, u_0 \,\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to 0. \tag{2.4}$$

Assim, (2.2) é satisfeita no sentido de se ter $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \to 0$; quando u_0 for também contínua, tem-se ademais $u(x,t) \to u_0(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, uniformemente sobre compactos, ver e.g. [6], [9], [10].

Introduzindo $K : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por

$$K(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{\xi^2}{4\mu t}} \tag{2.5}$$

para $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$ quaisquer, tem-se $K(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e então (2.3) pode ser escrita como

$$u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u(\cdot, 0) \qquad \forall t > 0 \tag{2.6}$$

onde $*$ denota o produto convolutivo em $L^1(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$, i.e.,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)\, g(y)\, dy \tag{2.7}$$

para $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, ver e.g. [11], [12].

Na Seção 2.2 abaixo, derivamos várias propriedades importantes das soluções $u(\cdot, t)$ de (2.1), (2.2) usando a representação (2.3), (2.6), como por exemplo a contratividade em $L^p(\mathbb{R})$,

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot, 0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall t > 0, \tag{2.8}$$

a propriedade de monotonicidade

$$u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0) \;\Rightarrow\; u(\cdot, t) \leq v(\cdot, t) \qquad \forall t > 0, \tag{2.9}$$

onde $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u(\cdot, 0)$, $v(\cdot, t) = K(\cdot, t) * v(\cdot, 0)$ denotam as soluções de (2.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $v(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ dados, e várias outras propriedades.

Em particular, tem-se $u(\cdot, t) \in L^r(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e para cada $p \leq r \leq \infty$, com

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot, t_0) \|_{L^r(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0, \tag{2.10}$$

para cada $t_0 > 0$ dado. Na Seção 2.3, mostra-se que $u(\cdot, t)$ decai em $L^r(\mathbb{R})$ para cada $r > p$, isto é,

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{ao} \quad t \to \infty, \quad r > p \tag{2.11}$$

e vale a estimativa

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(\mu, p)\, \| u(\cdot, 0) \|_{L^p(\mathbb{R})}\, t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.12}$$

para cada $r \geq p$. O comportamento assintótico ($t \to +\infty$) de $\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})}$ é menos óbvio. Adaptando um argumento apresentado em [18], tem-se

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{ao} \quad t \to +\infty \tag{2.13}$$

quando $p > 1$, mas o caso $p = 1$ é mais complicado, sendo examinado na Seção 2.4, seguindo [1], [8], [17]. Obtém-se neste caso

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\, m \,| \quad \text{ao} \quad t \to \infty \tag{2.14}$$

onde m é a *massa* da solução $u(\cdot,t)$,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx. \tag{2.15}$$

2.2 Alguns Resultados Básicos

Nesta seção, derivamos algumas propriedades básicas das soluções de (2.1), (2.2) que serão úteis nas seções seguintes. Estes resultados são obtidos de modo simples a partir da representação (2.3), (2.6) para $u(\cdot,t)$,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)\, u(y,0)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{2.16}$$

onde $K(\cdot,t)$ é dada em (2.5) acima. Nosso primeiro passo será mostrar que $u(\cdot,t)$ dada em (2.16) acima é a única solução de (2.1), (2.2) no espaço $C^o([\,0,+\infty\,[, L^p(\mathbb{R})\,)$.

Teorema 2.1 [Unicidade de Solução] *Para o problema (2.1), (2.2) acima, existe somente uma solução em* $C^o([\,0,+\infty\,[, L^p(\mathbb{R})\,)$, *dada por (2.16).*

Prova. Sendo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{t} > 0$ dados, fixos no que segue, e $u(x,t)$ em $C^o([\,0,+\infty\,[,\ L^p(\mathbb{R})\,)$ solução de (2.1), (2.2), vamos mostrar que

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,\mu\,\bar{t}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\bar{x}-y)^2}{4\,\mu\,\bar{t}}}\, u(y,0)\, dy. \tag{2.17}$$

Para isso, tomemos, para $\epsilon \in]\,0, \bar{t}\,[$, $\ R > |\,\bar{x}\,|$ dados, $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\,]-\infty, \bar{t}\,[)$ dada por

$$v(x,t) = K(\bar{x} - x, \bar{t} - t) \tag{2.18}$$

onde $K(\xi, \tau)$ satisfazendo

$$\zeta_R = \begin{cases} 1, & |\,x\,| \leq R \\ 0, & |\,x\,| \geq R+1. \end{cases} \tag{2.19}$$

com $\|\,\zeta_R'\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$, $\ \|\,\zeta_R''\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$ para $M > 0$ fixo, independente de R.

Como $v_t = -\mu\, v_{xx}$ e $u_t = \mu\, u_{xx}$ para todos $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < \bar{t}$, obtemos

$$(\,u\,\zeta_R\, v)_t + \mu\,(u\,(\zeta_R\, v)_x - \zeta_R\, v\, u_x\,)_x = \mu\, u(2\,\zeta_R'\, v_x + \zeta_R''\, v). \tag{2.20}$$

Integrando em $[-R-1,\ R+1\,] \times [\,\epsilon,\ \bar{t} - \epsilon\,]$, obtém-se, integrando por partes,

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x, \bar{t}-\epsilon)\,\zeta_R(x)\, v(x, \bar{t}-\epsilon)\, dx - \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\,\zeta_R(x)\, v(x,\epsilon)\, dx =$$

$$= \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{-R-1}^{R+1} u\,(\,2\,\zeta_R'\, v_x + \zeta''{}_R\, v\,)\; dxdt$$

visto que $\zeta_R(x) = \zeta_R'(x) = 0$ se $|\,x\,| \geq R+1$; como tem-se também $\zeta_R'(x) = \zeta_R''(x) = 0$ se $|\,x\,| \leq R$,

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x, \bar{t}-\epsilon)\,\zeta_R(x)\, v(x, \bar{t}-\epsilon)\, dx - \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\,\zeta_R(x)\, v(x,\epsilon)\, dx =$$

$$= \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{R \leq |\,x\,| \leq R+1} u\,(\,2\,\zeta_R'\, v_x + \zeta''{}_R\, v\,)\; dxdt \tag{2.21}$$

Como $u \in C^{o}(\,[\,0, +\infty\,[,\ L^p(\mathbb{R}))$, segue pela Desigualdade de Hölder (A.4) que

$$u\, v_x,\ u\, v\ \ \in\ \ L^1(\mathbb{R} \times [0,\, \bar{t} - \epsilon]\,),$$

portanto

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{R \leq |\,x\,| \leq R+1} u\,(\,2\,\zeta_R'\, v_x + \zeta''{}_R\, v\,)\; dxdt = 0 \tag{2.22}$$

Por outro lado, ao $R \to +\infty$, obtém-se

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x,\bar{t}-\epsilon)\,\zeta_R(x)\,v(x,\bar{t}-\epsilon)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} u(x,\bar{t}-\epsilon)\,v(x,\bar{t}-\epsilon)\,dx$$

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\,\zeta_R(x)\,v(x,\epsilon)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} u(x,\epsilon)\,v(x,\epsilon)\,dx$$

de modo que, por (2.18), (2.21), (2.22), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,\bar{t}-\epsilon)\,K(\bar{x}-x,\epsilon)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,\epsilon)\,K(\bar{x}-x,\bar{t}-\epsilon)\,dx$$

.

Fazendo $\epsilon \to 0^+$, obtém-se então

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}} K(\bar{x}-x,\bar{t})\,u(x,0)\,dx$$

visto que u é contínua em $(\bar{x},\bar{t})$. Isto mostra (2.17), como foi afirmado. $\square$

Lema 2.2 *Sendo $K(\cdot,t)$ satisfazendo em (2.5), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\,dx = 1, \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.23}$$

Prova. Tomando $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\,dx$, $\gamma > 0$ tem-se pelo Teorema de Fubini [11],[12] que

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma y^2}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\gamma(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\gamma r^2} r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr \\ &= \frac{\pi}{\gamma}\int_0^{\infty} e^{-\gamma r^2}\gamma\, 2r\,dr = \frac{\pi}{\gamma}, \end{aligned}$$

de modo que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \gamma > 0. \tag{2.24}$$

Agora, tomando $\gamma = \frac{1}{4\mu t}$, óbtém-se de (2.24)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}\, dx \;=\; \sqrt{4\pi\mu\, t}$$

e daí, por (2.5),

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}\, dx = 1$$

para todo $t > 0$, conforme afirmado. $\square$

Observe que, como $K(\cdot,t)$ é positiva, obtemos de (2.23) acima que

$$\|\, K(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1 \tag{2.25}$$

Teorema 2.3 [Monotonicidade de $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) então $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ e*

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.26}$$

Prova. Temos, por (2.6) que $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u(\cdot,0)$, para todo $t > 0$. Como $K(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ e $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$, pela desigualdade de Young (A.7) temos $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ e, usando (2.25),

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|\, K(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\, \|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \;=\; \|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

o que mostra (2.26). $\square$

Analogamente, quando $p = \infty$, pode-se obter o seguinte resultado.

Teorema 2.4 [Princípio do Máximo] *Sendo $u(\cdot,0) \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se $u(\cdot,t)$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e*

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.27}$$

Prova. Como $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u(\cdot,0)$, onde $K(\cdot,t)$ é dada por (2.5), obtém-se, pela desigualdade de Young (A.7),

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \| K(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \| u(\cdot,0) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \| u(\cdot,0) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, dado que (2.25) vale.

Isto mostra (2.27), como afirmado. □

Teorema 2.5 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se*

$$u(x,0) \geq \gamma \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x,t) \geq \gamma \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\, t > 0 \tag{2.28}$$

$$u(x,0) \leq \Gamma \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x,t) \leq \Gamma \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\, t > 0 \tag{2.29}$$

Prova. Supondo $u(\cdot,0) \geq \gamma$, tem-se por (2.3) e (2.23),

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \geq \gamma \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\, dy = \gamma,$$

isto é,

$$u(x,t) \geq \gamma \qquad \forall\, t > 0,\; x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, demonstra-se (2.29). □

O resultado acima pode ser generalizado do seguinte modo.

Teorema 2.6 [Monotonicidade do Operador Solução] *Sendo $u(\cdot,t), v(\cdot,t)$ soluções da equação (2.1) com $u(\cdot,0), v(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t) \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.30}$$

Prova. Dado $t > 0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} v(y,0)\, dy \\ &= v(x,t) \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$u(x,t) \leq v(x,t) \qquad \forall\, t > 0,$$

como afirmado. $\square$

Para finalizar esta seção, citamos dois resultados referentes ao caso $p = 1$, que serão importantes posteriormente. Quando $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, a quantidade m definida por

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx, \tag{2.31}$$

chamada *massa*, é importante para a descrição do comportamento assintótico ($t \to +\infty$) de $\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})}$, ver Seção 2.4. (Teorema 2.13, Teorema 2.14).

É importante, também, observar que a *massa* de $u(\cdot,t)$ é invariante em t, conforme mostrado a seguir.

Teorema 2.7 [Conservação da Massa] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1),com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.32}$$

Prova. Dado $t > 0$, temos por (2.3) e o Teorema de Fubini [11], [12] que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\,dx \Big) u(y,0)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(y,0)\,dy.
\end{aligned}$$

em vista de (2.23). $\square$

A norma $\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{R})}$ é importante na derivação de várias propriedades adicionais, como ilustrado no resultado abaixo (ver também Capítulos 3 e 4).

Recordemos que uma função $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ter *variação limitada* se existir $M > 0$ finito tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |\, v(x_i) - v(x_{i-1}) \,| \leq M$$

para toda coleção de pontos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ e qualquer n; neste caso, define-se a *variação total* de v como sendo $TV_{\mathbb{R}}\,[v]$ dada por

$$TV_{\mathbb{R}}[v] := \sup \sum_{i=1}^{n} |\, v(x_i) - v(x_{i-1}) \,| \tag{2.33}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções de pontos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, para qualquer n.

O conjunto das funções de variação limitada em $\mathbb{R}$ é denotado por $BV(\mathbb{R})$, ou seja,

$$BV(\mathbb{R}) = \{\, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad TV_{\mathbb{R}}\,[v] < \infty \,\}. \tag{2.34}$$

Dada $v \in BV(\mathbb{R})$, define-se também a *variação positiva* de v em $\mathbb{R}$, $PV(\mathbb{R})$, e a *variação negativa* de v em $\mathbb{R}$, $NV(\mathbb{R})$, via

$$PV_{\mathbb{R}}\,[v] := sup \sum_{i=1}^{n} (\, v(x_i) - v(x_{i-1}) \,)_+ \tag{2.35}$$

$$NV_{\mathbb{R}}\,[v] := sup \sum_{i=1}^{n} (\, v(x_i) - v(x_{i-1}) \,)_- \tag{2.36}$$

onde, como antes, o supremo é tomado sobre todos as coleções de pontos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, para todo n.

Aqui, dado $a \in R$, a_+ e a_- denotam as partes positiva e negativa de a, ou seja,

$$a_+ = \frac{a + |a|}{2} = \begin{cases} a & \text{se } \; a \geq 0 \\ 0 & \text{se } \; a < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

$$a_- = \frac{-\,a + |a|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \; a \geq 0 \\ -\,a & \text{se } \; a < 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Sendo $v \in C^0(\mathbb{R})$, pode-se mostrar, ver [16], que

$$TV_{\mathbb{R}}[v] = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |\, v(x+h) - v(x)\,|\, dx \tag{2.39}$$

$$PV_{\mathbb{R}}[v] = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_+\, dx \tag{2.40}$$

$$NV_{\mathbb{R}}[v] = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_-\, dx \tag{2.41}$$

tendo-se ademais, quando $v \in BV(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$,

$$TV_{\mathbb{R}}[v] = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |\, v(x+h) - v(x)\,|\, dx \tag{2.42}$$

$$PV_{\mathbb{R}}[v] = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_+\, dx \tag{2.43}$$

$$NV_{\mathbb{R}}[v] = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_-\, dx \tag{2.44}$$

Mais geralmente, para $v \in BV(\mathbb{R})$ qualquer, tem-se

$$TV_{\mathbb{R}}[v] \geq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |\, v(x+h) - v(x)\,|\, dx \tag{2.45}$$

$$PV_{\mathbb{R}}[v] \geq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_+\, dx \tag{2.46}$$

$$NV_{\mathbb{R}}[v] \geq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, v(x+h) - v(x)\,)_-\, dx \tag{2.47}$$

ver [16].

Segue então de (2.6) o seguinte resultado fundamental sobre as soluções da equação (2.1).

Teorema 2.8 [Propriedade TVD] *Sendo $u(\cdot,0) \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, tem-se que a solução $u(\cdot,t)$ de (2.1) satisfaz*

$$TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \le TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \tag{2.48}$$

$$PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \le PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \tag{2.49}$$

$$NV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \le NV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \tag{2.50}$$

para todo $t > 0$.

Prova. Dado $t > 0$, tem-se pela desigualdade de Young e (2.6),

$$\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big| u(x+h,t) - u(x,t) \Big|\, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big| \Big(K(\cdot,t) * u(\cdot+h,0)\Big)(x) - \Big(K(\cdot,t) * u(\cdot,0)\Big)(x) \Big|\, dx \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big| K(\cdot,t) * \Big(u(\cdot+h,0) - u(\cdot,0)\Big)(x) \Big|\, dx \\
&= \frac{1}{h} \| K(\cdot,t) * \Big(u(\cdot+h,0) - u(\cdot,0)\Big) \|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{h} \| K(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, \| u(\cdot+h,0) - u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big| u(x+h,0) - u(x,0) \Big|\, dx
\end{aligned}$$

para cada $h > 0$.

Fazendo $h \to 0$, obtemos de (2.42), (2.45) acima

$$TV_{\mathbb{R}}[\,u(\cdot,t)\,] = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |\, u(x+h,t) - u(x,t)\,|\, dx \le$$

$$\le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |\, u(x+h,0) - u(x,0)\,|\, dx \le TV_{\mathbb{R}}[\,u(\cdot,0)\,],$$

o que mostra (2.48).

Analogamente, tem-se, pelo Teorema 2.4 e o Teorema 2.7 acima,

$$\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\Big(u(x+h,t)\,+\,u(x,t)\Big)_{+}dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h}\Big[\int_{\mathbb{R}} |\,u(x+h,t)\,-\,u(x,t)\,|\,dx + \int_{\mathbb{R}} u(x+h,t)\,-\,u(x,t)\,dx\Big] \\
&\leq \frac{1}{2h}\Big[\int_{\mathbb{R}} \Big|u(x+h,0)\,-\,u(x,0)\Big|\,dx + \int_{\mathbb{R}} \Big(u(x+h,0)\,-\,u(x,0)\Big)\,dx\Big] \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\Big(u(x+h,0)\,+\,u(x,0)\Big)_{+}dx
\end{aligned}
$$

para cada $h > 0$, de modo que, fazendo $h \to 0$, obtemos (2.49) usando (2.43), (2.46).

A prova de (2.50) é obtida analogamente. □

2.3 Decaimento em $L^p(\mathbb{R})$

Nesta seção, mostramos que a solução $u(\cdot,t)$ de (2.1), (2.2) decai em $L^r(\mathbb{R})$ para cada $r > p$, tendo-se ademais

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^p(\mathbb{R})}\,(\mu\,t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.51}$$

onde $C(p)$ denota uma constante positiva que depende apenas de p. Quando $p > 1$, tem-se também

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to +\infty, \tag{2.52}$$

enquanto o caso $p = 1$ será examinado na Seção 2.4.

Teorema 2.9 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) tem-se $u(.,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, com*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,p) \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.53}$$

onde $C(\mu,p) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2p}}(1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ quando $p > 1$ e $C(\mu,1) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}$ se $p = 1$.

Prova. Para $p = 1$:

Dado $t > 0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} | u(x,t) | &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} | u(y,0) | \, dy \\ &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} | u(y,0) | \, dy \\ &= C(\mu,1) \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,1) \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall\, t > 0,$$

onde $C(\mu,1) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}$.

Para $1 < p < \infty$:

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} | u(x,t) | &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} | u(y,0) | \, dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-q\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \, dy \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(y,0)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$, $\gamma > 0$, tomando $\gamma = \frac{q}{4\mu t}$, temos

$$\begin{aligned} | u(x,t) | &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \Big(\frac{4\pi\mu t}{q} \Big)^{\frac{1}{2q}} \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})} \Big(\frac{1}{q} \Big)^{\frac{1}{2q}} \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2p}} \Big(1 - \frac{1}{p} \Big)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, para cada $t > 0$,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C(\mu,p) \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}},$$

onde $C(\mu,p) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2p}}(1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$, como afirmado. $\square$

Uma conseqüência imediata é o seguinte resultado.

Teorema 2.10 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) tem-se, para cada $t > 0$, $u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R})$ para todo $r \ge p$, com*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^r(\mathbb{R})} \le C(\mu,p)^{1-\frac{p}{r}} \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\, t > 0, \quad p \le r \le \infty$$

onde $C(\mu,p)$ é a constante dada no Teorema 2.9.

Prova. Dado $t > 0$, temos $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.3 e Teorema 2.9, e então, para $p < r < \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} | u(x,t) |^r \, dx &= \int_{\mathbb{R}} | u(x,t) |^{r-p} \, | u(x,t) |^p \, dx \\
&\le \| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{r-p} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^p \, dx < \infty,
\end{aligned}$$

o que mostra que $u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R})$, tendo-se ademais

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^r(\mathbb{R})} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^r \, dx \Big)^{\frac{1}{r}} \le \Big(\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{r-p} \| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})}^{p} \Big)^{\frac{1}{r}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\| u(\cdot,t) \|_{L^r(\mathbb{R})} &\le \| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \\
&\le \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \Big(C(\mu,p) \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \Big)^{1-\frac{p}{r}} \\
&= C(\mu,p)^{1-\frac{p}{r}} \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}
\end{aligned}$$

em vista do Teorema 2.3. $\square$

Para $r = p$, sabemos do Teorema 2.3 que $\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})}$ decresce em t, tendo-se assim

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.54}$$

Quando $p > 1$, podemos usar o seguinte argumento (adaptado de [18]) para mostrar que $\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ ao $t \to \infty$, como mostrado a seguir.

Teorema 2.11 *Sendo $u(\cdot,t)$ a solução de (2.1), (2.2), tem-se*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty \tag{2.55}$$

quando $p > 1$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x| \geq R} | u(x,0) |^p \, dx \leq \epsilon^p \tag{2.56}$$

e considere $v(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned} v_t &= \mu\, v_{xx}, \qquad & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v(x,0) &= v_0(x), \qquad & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ é dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x,0), & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.10 (com $p = 1$, $r = p$), temos

$$\| v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(\mu,1)^{1-\frac{1}{p}} \| v(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})},$$

de modo que

$$\| v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty$$

visto que $p > 1$.

Portanto, pela desigualdade triangular, usando o Teorema 2.3 e (2.56)

$$\begin{aligned}
\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} + \| v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq \| u(\cdot,0) - v(\cdot,0) \|_{L^p(\mathbb{R})} + \| v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq \epsilon + \| v(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq 2\epsilon
\end{aligned}$$

para todo t suficientemente grande. □

2.4 Comportamento em $L^1(\mathbb{R})$

Nesta seção, consideramos as soluções de (2.1), (2.2) quando $p = 1$, obtendo neste caso que

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | m | \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty \tag{2.57}$$

onde m é a *massa* de $u(\cdot,t)$, ou seja,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.58}$$

Em particular, sendo $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)$ soluções de (2.1) tendo a mesma *massa*, tem-se

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty. \tag{2.59}$$

Os argumentos a seguir são adaptados de [17]. Inicialmente, vamos considerar o caso $m = 0$.

Teorema 2.12 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) com $p = 1$, e sendo $\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx = 0$, tem-se*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty. \tag{2.60}$$

Prova. Por (2.3), temos que $u(\cdot,t)$ é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $\int_{|y|\geq R} |u(y,0)|\, dy \leq \epsilon$. Então,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big[\Big| \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big| + \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big| \Big]\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y,0)|\, dy \Big)\, dx + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big|\, dx$$

Usando o Teorema de Fubini e (2.25) tem-se

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{|y|\geq R} |u(y,0)| dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big|\, dx$$

isto é,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big|\, dx, \qquad \forall\, t > 0.$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy - \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big| + \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y,0)\, dy \Big| \Big) dx$$

Como $\int_{\mathbb{R}} u(y,0)\, dy = 0$, temos que

$$\int_{-R}^{R} u(y,0)\, dy = - \int_{|y|\geq R} u(y,0)\, dy$$

e daí,

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}\, u(y,0)\, dy \;=\; -\, e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \int_{|y|\geq R} u(y,0)\, dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\, u(y,0)\, dy \Big|\, dx \\
\leq\; & \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} \Big(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \Big) u(y,0)\, dy \Big|\, dx \\
+\; & \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \Big| \int_{|y|\geq R} u(y,0)\, dy \Big|\, dx \\
\leq\; & \epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} \Big(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \Big) u(y,0)\, dy \Big|\, dx
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \;&\leq\; 2\,\epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{-R}^{R} \Big(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \Big) u(y,0)\, dy \Big|\, dx \\
&\leq\; 2\,\epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-R}^{R} \Big| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \Big| \,|\, u(y,0)\,|\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Introduzindo $\xi = \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}$, tem-se

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \;\leq\; 2\,\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-R}^{R} \Big| e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} - e^{-\xi^2} \Big| \,|\, u(y,0)\,|\, dy\, d\xi$$

.

Seja $f_t(\xi,y) \;=\; \Big| e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} - e^{-\xi^2} \Big| \,|\, u(y,0)\,|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},\; y \in [-R,R].$

Observe que para cada $\xi \in \mathbb{R}$, e para quase todo $y \in [-R,R]$ dados, temos $f_t(\xi,y) \to 0$ ao $t \to \infty$; por outro lado,

$$\begin{aligned}
|f_t(\xi,y)| \;&=\; \Big| e^{-\left(\xi^2 - \frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}} + \frac{y^2}{4\mu t}\right)} - e^{-\xi^2} \Big| \,|\, u(y,0)\,| \\
&\leq\; \Big(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2}\, e^{\frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}}}\, e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \Big) \,|\, u(y,0)\,| \\
&\leq\; \Big(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2}\, e^{\frac{2y^2}{4\mu t}}\, e^{\frac{\xi^2}{2}}\, e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \Big) \,|\, u(y,0)\,| \\
&=\; \Big(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, e^{\frac{y^2}{4\mu t}} \Big) \,|u(y,0)| \\
&\leq\; \Big(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \Big) \,|\, u(y,0)\,|
\end{aligned}$$

Para todo $t \geq \frac{R^2}{4\mu}$, temos

$$e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \leq e$$

e, portanto,

$$|f_t(\xi, y)| \leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}+1}\right) |\, u(y,0)\,| := g(\xi, y),$$

com $g \in L^1(\mathbb{R} \times [-R, R]\,)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue então que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-R}^{R} |\, f_t(\xi, y)\,|\, d\xi dy \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

de modo que

$$\|\, u(\cdot, t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 3\epsilon$$

para t suficientemente grande.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

Outras conseqüências importantes deste resultado são dadas a seguir

Teorema 2.13 *Se $u(\cdot, t)$, $v(\cdot, t)$ são soluções de (2.1), (2.2) com $p = 1$, tendo a mesma massa, i.e.,*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\, dx,$$

então

$$\|\, u(\cdot, t) \;-\; v(\cdot, t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty. \tag{2.61}$$

Prova. Sendo $\theta(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$, temos que θ satisfaz

$$\theta_t = \mu\, \theta_{xx}$$

$$\theta(.,0) = u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0) \;\in\; L^1(\mathbb{R})$$

com massa nula,

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(x,0)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx - \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\,dx = 0;$$

pelo Teorema 2.11, segue então

$$\| \theta(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty$$

ou seja,

$$\| u(\cdot,t) \ - \ v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

conforme afirmado. □

Teorema 2.14 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) com $p = 1$. Então,*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\, m \,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty \tag{2.62}$$

onde m é a massa da solução, i.e,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx. \tag{2.63}$$

Prova. Tome $v(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned} v_t &= \mu\, v_{xx} \\ v(\cdot,0) &= v_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

com v_0 dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} m & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \ , \end{cases}$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,0)\,dx = \int_0^1 m\,dx = m,$$

ou seja, $v(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ têm a mesma massa.

Observando que, pelo Teorema 2.5,
Se $m \geq 0$: $\quad v(x,t) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

se $m < 0$: $\quad v(x,t) < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
obtemos em qualquer caso

$$|\, v(x,t)\,| \,=\, (\text{ sgn } m)\, v(x,t) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

onde *sgn* m denota o sinal de m, i.e.,

$$\text{sgn }\ m = \begin{cases} 1 & \text{se }\ m > 0 \\ 0 & \text{se }\ m = 0 \\ -1 & \text{se }\ m < 0 \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \|\, v(.,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\, v(x,t)\,|\, dx \\ &= (\text{ sgn } m) \int_{\mathbb{R}} v(x,t)\, dx \\ &= (\text{ sgn } m) \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\, dx \\ &= (\text{ sgn } m)\, m \,=\, |\, m\,| \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\, v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \,=\, |\, m\,|$$

para todo $t > 0$, e em particular:

$$\|\, v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\, m\,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty.$$

Pelo Teorema 2.12,

$$\|\, u(\cdot,t) \,-\, v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

e, então

$$\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\, m\,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

pois

$$\begin{aligned} \Big|\, \|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \,-\, |\, m\,|\,\Big| &= \Big|\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \,-\, \|\, v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big| \\ &\leq \|\, u(\cdot,t) \,-\, v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0, \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$, donde segue o resultado. $\square$

Será conveniente generalizar levemente o resultado acima do seguinte modo.

Teorema 2.15 *Sendo $u(\cdot, t)$ solução do problema de valor inicial*

$$u_t + a\, u_x = \mu\, u_{xx} \tag{2.64}$$

$$u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}) \tag{2.65}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$, com $\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx = m$. Então

$$\| \, u(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | \, m \, | \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty. \tag{2.66}$$

Prova. Seja $\xi = x - at$. Introduzindo $U(\xi, t) := u(\xi + at, t)$, temos que $U(\cdot, t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} U_t &= \mu\, U_{\xi\xi} \\ U(\xi, 0) &= u(\xi, 0) \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

com $\int_{\mathbb{R}} U(\xi, 0)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} u(\xi, 0)\, d\xi = m$. Segue então, do Teorema 2.13 que

$$\| \, U(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | \, m \, | \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty.$$

Como

$$\| \, U(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} | \, U(\xi, t) \, | \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} | \, u(\xi + at, t) \, | \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} | \, u(x, t) \, | \, dx = \| \, u(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R})},$$

obtemos então

$$\| \, u(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | \, m \, | \text{ ao } t \to \infty,$$

como afirmado. □

Nos capítulos seguintes, estes resultados são estendidos a equações mais gerais que (2.1).

Equação de Burgers

3.1 Introdução

Neste capítulo derivamos algumas propriedades importantes das soluções $u(\cdot,t)$ da equação (1.1) com fluxo f quadrático e viscosidade constante, i.e., soluções da chamada Equação de Burgers, ver [2],

$$u_t + buu_x = \mu u_{xx} \tag{3.1}$$

onde b, μ são constantes, com $b \neq 0$, $\mu > 0$. Novamente, as soluções $u(\cdot,t)$ consideradas correspondem a estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$,

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_0 \in L^1(\mathbb{R}), \tag{3.2}$$

tendo-se $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times]\,0,\infty\,[)$ satisfazendo (3.1) no sentido clássico para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, enquanto (3.2) é satisfeita no sentido de se ter $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^1(\mathbb{R})$ ao $t \to 0$, i.e.,

$$\| u(\cdot,t) - u_0 \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to 0. \tag{3.3}$$

Como no caso da equação do calor, pode-se mostrar que esta solução é única no espaço $C^o(\,[\,0,+\infty[,\ L^1(\mathbb{R})\,)$.

Ademais, para cada $t_0 > 0$ tem-se $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [t_0,\infty[)$, com $u(\cdot,t)$ dada por

$$u(x,t) = -\frac{2\mu}{b}\,\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.4}$$

onde $\varphi(\cdot,t)$ é solução do problema *linear*

$$\varphi_t = \mu\,\varphi_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.5}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

com $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ dada por

$$\varphi_0\,(x) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u_0(\xi)\,d\xi} \tag{3.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A transformação dada em (3.4) acima, ou, equivalentemente,

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)\,d\xi} \tag{3.8}$$

foi descoberta independentemente por E. Hopf e J. Cole em 1950, ver [3], [5], permitindo a representação

$$u(x,t) = \frac{2\mu}{b}\,\frac{1}{\sqrt{\mu t}}\;\frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{\sqrt{4\mu t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\,\varphi_0(y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\,\varphi_0(y)\,dy} \tag{3.9}$$

para a solução $u(\cdot,t)$ do problema (3.1), (3.2) acima.

O objetivo deste capítulo é derivar propriedades importantes das soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) utilizando a transformação de Hopf-Cole; várias destas propriedades são reobtidas no Capítulo 4 por um procedimento mais geral, aplicável às equações (1.1) em geral.

Os métodos do Capítulo 4, adaptados de [4], [6], [15], [17], [18], além de obter várias propriedades aqui discutidas de modo elegante, permitem obter novas propriedades importantes para as soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2), como por exemplo a estimativa

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \;\le\; C\,\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\,(\mu\,t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.10}$$

para todo $1 \le p \le \infty$, onde $C > 0$ é uma constante pura. Por outro lado, certas propriedades da equação de Burgers, obtidas neste capítulo pela transformação de Hopf-Cole, tem papel importante no Capítulo 4, notadamente o fato de se ter

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\,m\,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty \tag{3.11}$$

onde m é a *massa* de $u(\cdot,t)$,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx. \tag{3.12}$$

Outro exemplo é dado pela *miscibilidade completa* das soluções de (3.1), (3.2): sendo $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) transportando a mesma massa, tem-se

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty. \tag{3.13}$$

Estes resultados são apresentados na Seção 4 a seguir, após a obtenção de propriedades auxiliares nas Seções 2 e 3 deste capítulo.

3.2 Alguns Resultados Básicos

Nesta seção, derivamos algumas propriedades básicas das soluções de (3.1), (3.2). Como já foi dito, estes resultados são obtidos através da Transformação de Hopf-Cole dada em (3.4), (3.8), ou seja, $\varphi(\cdot,t)$ dada por

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)\,d\xi} \tag{3.14}$$

ou, em termos de $u(\cdot,t)$,

$$u(x,t) = -\frac{2\mu}{b}\,\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)} \tag{3.15}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

A utilidade de (3.14), (3.15) é que $\varphi(\cdot,t)$ pode ser facilmente obtida, conforme o resultado abaixo.

Teorema 3.1 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), e $\varphi(\cdot,t)$ dada em (3.14), tem-se*

$$\varphi_t = \mu\,\varphi_{xx} \tag{3.16}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Prova. De (3.15), temos

$$\begin{aligned}
u_t &= -\frac{2\mu}{b}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_t = -\frac{2\mu}{b}\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x \\
u_x &= -\frac{2\mu}{b}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_x \\
u_{xx} &= -\frac{2\mu}{b}\left(\frac{\varphi_{xx}\,\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}\right)_x
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
0 &= u_t + b\,u\,u_x - \mu\,u_{xx} \\
&= -\frac{2\mu}{b}\left[\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_t - 2\mu\,\frac{\varphi_x}{\varphi}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_x - \mu\left(\frac{\varphi_{xx}\,\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}\right)_x\right] \\
&= -\frac{2\mu}{b}\left[\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x - \mu\left(\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}\right)_x - \mu\left(\frac{\varphi_{xx}\,\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}\right)_x\right] \\
&= -\frac{2\mu}{b}\left[\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x - \mu\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_x\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi_t}{\varphi} - \mu\,\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right] = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, de modo que

$$\varphi_t - \mu\,\varphi_{xx} = C(t)\,\varphi$$

para $C(t) \in \mathbb{R}$ adequada, para cada $t > 0$.

Fazendo $x \to \pm\infty$, obtemos $C(t) = 0$, e (3.16) fica demonstrada. □

Alternativamente, podemos simplesmente *definir* $\varphi(\cdot, t)$ como sendo a solução do problema

$$\varphi_t = \mu\,\varphi_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.17}$$

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,0)\,d\xi}, \tag{3.18}$$

introduzindo então $u(\cdot, t)$ via

$$u(x,t) = -\,\frac{2\,\mu}{b}\,\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)} \tag{3.19}$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, obtendo-se então que $u(\cdot,t)$ satisfaz (3.1), (3.2), com $u(\cdot,t) \in C^o([0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}))$.

Voltando, agora, a $\varphi(\cdot,t)$ dada por (3.17), (3.18), o próximo resultado estabelece o fato importante de que $\varphi(\cdot,t)$ e $1/\varphi(\cdot,t)$ são uniformemente limitadas, i.e.,

$$\varphi,\ 1/\varphi \ \in \ \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\infty[). \tag{3.20}$$

Lema 3.2 *Sendo $\varphi(\cdot,t)$ dada em (3.8) acima, tem-se*

$$e^{-\frac{|b|}{2\mu}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi(x,t) \leq e^{\frac{|b|}{2\mu}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}} \tag{3.21}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Prova. Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\Big| \int_{-\infty}^{x} u(\xi,0)\, d\xi \Big| \leq \int_{-\infty}^{x} |\, u(\xi,0)\,|\, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |\, u(\xi,0)\,|\, d\xi = \|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

e então, como

$$\varphi(x,0) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,0)d\xi},$$

obtém-se

$$e^{-\frac{|b|}{2\mu}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi(x,0) \leq e^{\frac{|b|}{2\mu}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}} \tag{3.22}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\varphi(\cdot,t)$ satisfaz a equação do calor (3.16), segue do Teorema 2.4 e (3.22) acima que (3.21) é válido para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, como afirmado. $\square$

Teorema 3.3 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$u(\cdot,0) \geq 0 \ \Rightarrow \ u(\cdot,t) \geq 0, \tag{3.23}$$

$$u(\cdot,0) \leq 0 \ \Rightarrow \ u(\cdot,t) \leq 0 \tag{3.24}$$

para cada $t > 0$.

Prova. Sendo $\varphi(\cdot,t)$ a transformada de Hopf-Cole de $u(\cdot,t)$, conforme (3.8) acima, tem-se

$$\varphi_x(x,0) = -\frac{b}{2\mu}\,\varphi(x,0)\,u(x,0)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}$; como $\varphi(x,0) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,0)\,d\xi}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se claramente, supondo $u(\cdot,0) \geq 0$ (i.e., $u(x,0) \geq 0$ quase todo $x \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned}
\varphi(\cdot,0) &> 0, \\
\varphi_x(\cdot,0) &\geq 0 \quad \text{se} \quad b < 0, \\
\varphi_x(\cdot,0) &\leq 0 \quad \text{se} \quad b > 0.
\end{aligned}$$

Lembrando, pelo Teorema 3.1, que $\varphi(\cdot,t)$ (e então $\varphi_x(\cdot,t)$) satisfaz a equação do calor, temos então pelo Teorema 2.5,

$$\begin{aligned}
\varphi(\cdot,t) &> 0, \\
\varphi_x(\cdot,t) &\geq 0 \quad \text{se} \quad b < 0, \\
\varphi_x(\cdot,t) &\leq 0 \quad \text{se} \quad b > 0.
\end{aligned}$$

Por (3.4), obtém-se então (3.23), como afirmado.

A prova de (3.24) é inteiramente análoga. □

Mais geralmente, vale a seguinte *propriedade de monotonicidade*: sendo $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \tilde{u}(\cdot,0)$ em $L^1(\mathbb{R})$, tem-se

$$u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0) \;\Rightarrow\; u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t) \tag{3.25}$$

para todo $t > 0$. Antes de podermos obter (3.25), precisamos examinar em mais detalhes o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) em $L^1(\mathbb{R})$. Para isso, vamos utilizar as chamadas *funções sinal regularizadas*, ver [6], [15]: tomando $S \in C^1(\mathbb{R})$ uma função crescente verificando

$$S(x) = 1 \quad \textit{se} \quad x \geq 1 \tag{3.26}$$

$$S(0) = 0 \quad \textit{se} \quad x = 0 \tag{3.27}$$

$$S(x) = -1 \quad \textit{se} \quad x \leq -1 \tag{3.28}$$

e, para cada $\delta > 0$, definindo $L_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ via

$$L_\delta(x) = \int_0^x S(\xi/\delta) d\xi, \tag{3.29}$$

temos $L_\delta \geq 0$, $L_\delta'' \geq 0$ e

$$L_\delta(x) \to |x| \qquad \text{ao} \qquad \delta \to 0 \tag{3.30}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$, com ademais

$$L_\delta'(x) \to \text{ sgn } x \qquad \text{ao} \qquad \delta \to 0 \tag{3.31}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, onde sgn denota a *função sinal*, i.e.,

$$\text{sgn }(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Aproximando $|\cdot|$ por meio destas funções L_δ, mostramos o seguinte resultado.

Teorema 3.4 [Monotonicidade de $\| u(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})}$] *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall t > 0. \tag{3.33}$$

Prova. Dado $\delta > 0$, seja L_δ dada em (3.29) acima. Então, usando (3.16) e integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta'\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)_t\,dx = \int_{\mathbb{R}} L_\delta'\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_t}{\varphi}\Big)_x\,dx \\
&= \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta'\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\Big)_x\,dx \\
&= -\mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)_x\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx \\
&= -\mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}\Big)\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx \\
&= -\mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\Big)^2\,dx + \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx \\
&\leq \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx
\end{aligned}$$

visto que $L_\delta'' \geq 0$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\,dx \leq \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx$$

para todo $\delta > 0$. Integrando em $[\,0, t\,]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)}\Big)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x(x,0)}{\varphi(x,0)}\Big)\,dx + \mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx\,d\tau$$

para cada $\delta > 0$. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)}\Big|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\varphi_x(x,0)}{\varphi(x,0)}\Big|\,dx$$

visto que, pelo Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\,dx\,d\tau = 0,$$

uma vez que, por (3.26) - (3.29), tem-se $L_\delta''(\xi)\,|\,\xi\,| \leq C$ para todo $\delta > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ ($C > 0$ dada por $C = \sup\{\,|\,\xi\,|\,S'(\xi) : -1 \leq \xi \leq 1\}$) e $L_\delta''(\xi)\xi \to 0$ ao $\delta \to 0$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$ dado.

Lembrando (3.15), obtém-se (3.33), como afirmado. □

Mais geralmente, pelo mesmo argumento, segue que

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\,u(\cdot,t_0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t,$$

ou seja, $\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce com t. De um modo análogo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.5 [Contratividade em $L^1(\mathbb{R})$] *Sendo $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estado iniciais $u(\cdot,0), \tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,0) - \tilde{u}(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.34}$$

Prova. Sendo L_δ dada em (3.29) acima, $\delta > 0$ arbitrário, obtém-se, usando (3.16) e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta'\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)_t\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} L_\delta'\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_t}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_t}{\tilde{\varphi}}\Big)_x\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)_x\Big(\frac{\varphi_t}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_t}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx \\
&= -\mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)_x\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx \\
&= -\mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)^2\,dx \\
&+ \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi}\Big)^2 - \Big(\frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)^2\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx
\end{aligned}$$

onde $\varphi(\cdot,t), \tilde{\varphi}(\cdot,t)$ são as transformadas de Hopf-Cole de $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot)$, respectivamente. Como $L_\delta'' \geq 0$, obtém-se então

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx \leq$$

$$\leq \mu\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dx.$$

Integrando em $[0,t]$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)} - \frac{\tilde{\varphi}_x(x,t)}{\varphi(\tilde{x},t)}\Big)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\frac{\varphi_x(x,0)}{\varphi(x,0)} - \frac{\tilde{\varphi}_x(x,0)}{\varphi(\tilde{x},0)}\Big)\,dx$$
$$+\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}} L_\delta''\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)\,dxd\tau$$

de modo que, fazendo $\delta \to 0$,

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)} - \frac{\tilde{\varphi}_x(x,t)}{\varphi(\tilde{x},t)}\Big|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\varphi_x(x,0)}{\varphi(x,0)} - \frac{\tilde{\varphi}_x(x,0)}{\varphi(\tilde{x},0)}\Big|\,dx$$

visto que, ao $\delta \to 0$,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} L''_\delta\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{\tilde{\varphi}_x}{\tilde{\varphi}}\Big)\Big(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\tilde{\varphi}_{xx}}{\tilde{\varphi}}\Big)\, dx d\tau \to 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, como no caso anterior (ver p.35). Usando, então, (3.15) acima, obtém-se (3.34), como afirmado. □

Outra observação importante é dada a seguir.

Teorema 3.6 *Sendo $u(\cdot,t)$ a solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}) \qquad \forall\, 1 \leq p \leq \infty$$

para cada $t > 0$.

Prova. Sendo $\varphi(\cdot,t)$ a transformada de Hopf-Cole de $u(\cdot,t)$, conforme (3.8) acima, temos, pelo Teorema 3.1, que $\psi := \varphi_x$ satisfaz

$$\psi_t = \mu\, \psi_{xx}$$

com $\psi(\cdot,0) = \varphi_x(\cdot,0) = c\,\varphi(\cdot,0)\,u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, $c = -\frac{b}{2\mu}$, em vista de (3.2) e (3.20). Pelo Teorema 2.9, segue que $\psi(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$, i.e., $\varphi_x(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$, e então

$$u(\cdot,t) = -\frac{2\mu}{b}\,\frac{1}{\varphi(\cdot,t)}\,\varphi_x(\cdot,t) \quad \in \quad L^p(\mathbb{R})$$

visto que, por (3.20) acima, tem-se $1/\varphi(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

Para concluir esta seção, é importante observar a seguinte lei de conservação.

Teorema 3.7 [Conservação da Massa] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx \tag{3.35}$$

para todo $t > 0$.

Prova. Integrando (3.1) em $\mathbb{R} \times [0, t]$, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx = -b \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u\,u_x\,dx d\tau + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_{xx}\,dx d\tau = 0$$

visto que

$$\int_{\mathbb{R}} u\,u_x\,dx = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} u_{xx}\,dx = 0$$

para cada $\tau > 0$. □

3.3 Decaimento em $L^p(\mathbb{R})$

Nesta seção, mostramos, usando a transformada de Hopf-Cole, que a solução $u(\cdot, t)$ do problema (3.1), (3.2) decai em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \to \infty$ para cada $p > 1$, tendo-se ademais

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})})\, t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.36}$$

onde $C(p, \mu, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}) > 0$ denota uma constante que depende dos valores de p, μ, e $\| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}$. No Capítulo 4, mostramos por um procedimento mais geral, adaptado de [15], [17], que $C(p, \mu, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})})$ é da forma

$$C(p, \mu, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}) = \gamma^{1-\frac{1}{p}}\, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}\, \mu^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \tag{3.37}$$

onde $\gamma = 6^{3/4}$.

Teorema 3.8 *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.2), tem-se, para cada $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\, e^{\frac{|b|}{\mu} \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}}\, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}\, (\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}, \tag{3.38}$$

para cada $t > 0$, onde $C(p) = (4\,\pi)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$.

Prova. Introduzindo $\varphi(\cdot,t)$ dada por (3.8), tem-se

$$\varphi_x(\cdot,t) = -\frac{b}{2\mu}\, u(\cdot,t)\,\varphi(\cdot,t) \qquad \forall\, t > 0.$$

Como $\varphi_x(\cdot,t)$ satisfaz (3.16) e, por (3.20),

$$\varphi_x(\cdot,0) = -\frac{b}{2\mu}\, u(\cdot,0)\,\varphi(\cdot,0) \;\in\; L^1(\mathbb{R}), \tag{3.39}$$

obtém-se, pelo Teorema 2.10,

$$\|\,\varphi_x(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(p)\,\|\,\varphi_x(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\,(\mu\, t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.40}$$

onde

$$C(p) = (4\,\pi)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \tag{3.41}$$

Em particular, por (3.39) acima, tem-se

$$\begin{aligned} \|\,\varphi_x(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \frac{|\,b\,|}{2\mu}\,\|\,\varphi(\cdot,0)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{|\,b\,|}{2\mu}\, e^{\frac{|b|}{2\mu}\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}}\,\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

em vista de (3.21).

Como $u = -\frac{2\mu}{b}\frac{\varphi_x}{\varphi}$ e $1/\varphi(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, obtém-se

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{2\mu}{|\,b\,|}\left\|\,\frac{1}{\varphi(\cdot,t)}\,\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\,\varphi_x(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Usando (3.21) e (3.40), segue o resultado. □

Ademais, pode-se mostrar, procedendo analogamente à demonstração do Teorema 3.4 acima, que $\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente em t, ou seja,

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\,u(\cdot,t_0)\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{3.43}$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$.

3.4 Comportamento em $L^1(\mathbb{R})$

Nesta seção, vamos utilizar a Transformação de Hopf-Cole para obter (3.11), (3.13) acima, que são utilizadas no Capítulo 4 a seguir.

Lema 3.9 *Sejam $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1), (3.2) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa. Sendo $\varphi(\cdot,t), \tilde{\varphi}(\cdot,t)$ a transformadas de Hopf-Cole de $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$, tem-se*

$$\| \varphi(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty. \tag{3.44}$$

Prova. Seja $\zeta(\cdot,t) := \varphi(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)$. Temos que $\zeta(\cdot,0) \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $\zeta(\pm\infty,t) = 0$, visto que $u(\cdot,t)$ e $\tilde{u}(\cdot,t)$ têm a mesma massa.

Pela equação (2.3),

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \zeta(y,0)\, dy.$$

A mostrar: $\| \zeta(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \qquad$ ao $\qquad t \to \infty$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $R > 0$ tal que $| \zeta(y,0) | \leq \epsilon, \quad \forall\, |y| \geq R$.

Daí, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, tem-se

$$| \zeta(x,t) | \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} | \zeta(y,0) |\, dy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} | \zeta(y,0) |\, dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} | \zeta(y,0) |\, dy \\ &\leq \epsilon + \| \zeta(\cdot,0) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{2R}{\sqrt{4\pi\mu}} \frac{1}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

isto é,

$$\| \zeta(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \Gamma t^{-1/2} \qquad \forall\, t > 0$$

onde $\Gamma := \frac{2R(\epsilon)}{\sqrt{4\pi\mu}} \| \zeta(\cdot,0) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Então, para todo $t \geq \left(\frac{\Gamma(\epsilon)}{\epsilon}\right)^2$, obtém-se

$$\| \zeta(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\epsilon,$$

o que mostra (3.44), como afirmado . $\square$

O Lema acima será útil na derivação de (3.13), conforme mostramos a seguir.

Teorema 3.10 *Tendo $u(\cdot, 0), \tilde{u}(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$ com a mesma massa, i.e.,*

$$\int_{\mathbb{R}} u(\cdot, 0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(\cdot, 0)\, dx,$$

então as soluções $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t)$ correspondentes de (3.1) verificam

$$\| u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty. \tag{3.45}$$

Prova. Sejam $\varphi(\cdot, t), \tilde{\varphi}(\cdot, t)$ as transformadas de Hopf-Cole de $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t)$, respectivamente, isto é,

$$\varphi(x, t) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi, t)\, d\xi}, \qquad \tilde{\varphi}(x, t) = e^{-\frac{b}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} \tilde{u}(\xi, t)\, d\xi}.$$

Introduzindo $\theta(\cdot, t) := \varphi_x(\cdot, t) - \tilde{\varphi}_x(\cdot, t)$, tem-se pelo Teorema 3.1 que $\theta(\cdot, t)$ é solução do problema

$$\begin{aligned} \theta_t &= \mu\, \theta_{xx} \\ \theta(\cdot, 0) &\in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

tendo, ademais, massa nula, pois

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(x, 0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_x(x, 0)\, dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_x(x, 0)\, dx = 0$$

já que $u(\cdot, t)$ e $\tilde{u}(\cdot, t)$ têm a mesma massa.

Assim, pelo Teorema 2.12, tem-se

$$\| \theta(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

ou seja,

$$\| \varphi_x(\cdot,t) - \tilde{\varphi}_x(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

ou, em termos de $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$,

$$\| \varphi(\cdot,t)u(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty. \tag{3.46}$$

Desta forma,

$$\| u(.,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \left\| u(\cdot,t) - \frac{\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\varphi(\cdot,t)}\tilde{u}(\cdot,t) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\| \tilde{u}(\cdot,t) - \frac{\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\varphi(\cdot,t)}\tilde{u}(\cdot,t) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\varphi(\cdot,t)}\Big(\varphi(\cdot,t)u(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\tilde{u}(\cdot,t)\Big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\| \tilde{u}(\cdot,t) - \frac{\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\varphi(\cdot,t)}\tilde{u}(\cdot,t) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$= \left\| \frac{1}{\varphi(\cdot,t)}\Big(\varphi(\cdot,t)u(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\tilde{u}(\cdot,t)\Big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\| \frac{1}{\varphi(\cdot,t)}\tilde{u}(\cdot,t)\Big(\varphi(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\Big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\varphi(\cdot,t)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \| \varphi(\cdot,t)u(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$+ \left\| \frac{1}{\varphi(\cdot,t)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi(\cdot,t) - \tilde{\varphi}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Por (3.46) e pelo Lema 3.9, obtém-se então

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

conforme afirmado. □

Com o resultado acima, podemos facilmente obter (3.11):

Teorema 3.11 *Sendo* $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $u(\cdot,t)$ *solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | m | \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty, \tag{3.47}$$

onde $m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx$.

Prova. Seja $v(x,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + b\,v\,v_x &= \mu\,v_{xx} \\ v(\cdot,t) &= v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

com v_0 dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} m & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{se} \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Tem-se então, pelo Teorema 3.3, que
se $m \geq 0$ então $v(x,t) \geq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; t > 0$,
se $m \leq 0$ então $v(x,t) \leq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; t > 0$.

Logo,

$$|v(x,t)| = (\,\operatorname{sgn} m)\,v(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\; t > 0,$$

e daí, usando o Teorema 3.7,

$$\begin{aligned} ||v(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\,v(x,t)\,|\,dx \\ &= (\,\operatorname{sgn} m) \int_{\mathbb{R}} v(x,t)\,dx \\ &= (\,\operatorname{sgn} m) \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\,dx \\ &= (\,\operatorname{sgn} m)\,m = |\,m\,| \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Desta forma,

$$\Big|\,\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} - |\,m\,|\,\Big| = \Big|\,\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|\,v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big| \leq \|\,u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

de modo que, pelo Teorema 3.10,

$$\Big|\,\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} - |\,m\,|\,\Big| \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

ou seja,

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\,m\,| \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

conforme afirmado. □

Será conveniente no Capítulo 4 generalizarmos levemente os resultados desta Seção como segue.

Teorema 3.12 *Dados $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ com $\mu > 0$, sejam $u(.,t)$, $\tilde{u}(.,t)$ soluções de*

$$u_t + a\,u_x + b\,u\,u_x \;=\; \mu u_{xx} \tag{3.48}$$

com $u(.,0), \tilde{u}(.,0) \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x,0)\,dx = m. \tag{3.49}$$

Então, $u(.,t)$, $\tilde{u}(.,t)$ satisfazem

$$\|\,u(.,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\,m\,|, \quad \|\,\tilde{u}(.,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |\,m\,| \qquad ao \qquad t \to \infty, \tag{3.50}$$

e

$$\|\,u(.,t) \;-\; \tilde{u}(.,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty. \tag{3.51}$$

Prova. Mudando a variável x para $\xi = x - at$, (3.48) fica

$$U_t + b\,U\,U_\xi \;=\; \mu\,U_{\xi\xi}$$

onde $U(\xi,t) = u(\xi + at, t)$. Daí, pelo Teorema 3.11,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|U(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \Big|\int_{\mathbb{R}} U(\xi,0)\,d\xi\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}} u(\xi,0)\,dx\Big|$$

ao $t \to \infty$, e analogamente para $\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$, o que mostra (3.50). Finalmente, sendo $\tilde{U}(\xi,t) := \tilde{u}(\xi + at, t)$, tem-se, ao $t \to \infty$,

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \;=\; \|U(\cdot,t) - \tilde{U}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$$

usando (3.45). □

Equações de Advecção-Difusão

4.1 Introdução

Neste capítulo, estendemos os resultados anteriores a equações de advecção-difusão mais gerais, da forma

$$u_t + f(u)_x = \Big(a(u)\, u_x\Big)_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{4.1}$$

com $u(\cdot, t)$ satisfazendo a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

Na equação (4.1), as funções a, f são dadas com a, f duas vezes diferenciáveis na região de interesse (i.e., $a, f \in C^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo contendo os valores $u(x,t)$ em questão, para todo $x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$), tendo-se ademais

$$a(u) \geq \mu \qquad \forall\ u \in I \tag{4.3}$$

para $\mu > 0$ constante. Para alguns resultados, é preciso supor também que $f''(u)$ é Hölder contínua em $u = 0$, i.e.,

$$|\, f''(u) - f''(0)\,| \leq \Gamma\,|\,u\,|^{\alpha} \qquad |\,u\,| \leq \Omega \tag{4.4}$$

para algum $\Omega > 0$, onde Γ, $\alpha > 0$ são constantes. Novamente, (4.2) é satisfeita no sentido de se ter $u(\cdot, t) \to u_0$ em $L^1(\mathbb{R})$ ao $t \to 0$, ou seja,

$$\|\, u(\cdot, t) - u_0\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to 0, \tag{4.5}$$

existindo uma única solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^1(\mathbb{R}))$, que satisfaz (4.1) no sentido clássico, verificando ademais

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [t_0, \infty[) \tag{4.6}$$

para cada $t_0 > 0$ dado, ver e.g. [6], [7], [9], [10], [15].

Na Seção 4.2, derivamos algumas propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t)$ acima, análogas a propriedades anteriormente obtidas para a equação do calor (Capítulo 2) e de Burgers (Capítulo 3). Em particular, vemos que $\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente com t,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \tag{4.7}$$

e, mais geralmente,

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \tag{4.8}$$

para cada $p \geq 1$. Em particular, para $p = \infty$, tem-se o *Princípio do Máximo*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty \mathbb{R}} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0. \tag{4.9}$$

Ademais, tem-se contratividade em $L^1(\mathbb{R})$: sendo $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$ duas soluções quaisquer de (4.1), (4.2), elas verificam

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,0) - \tilde{u}(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{4.10}$$

Uma conseqüência importante é a seguinte propriedade de monotonicidade: supondo $u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0)$ no instante inicial $t = 0$ (ou seja, $u(x,0) \leq \tilde{u}(x,0)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$), segue que $u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ (ou seja, $u(x,t) \leq \tilde{u}(x,t)$ para $x \in \mathbb{R},\ t > 0$), i.e.,

$$u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t) \qquad \forall\, t > 0. \tag{4.11}$$

Na Seção 4.3, mostramos, seguindo [17], que $u(\cdot,t)$ satisfaz a estimativa

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \; \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, (\mu\, t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall\, t > 0 \tag{4.12}$$

onde $C = 6^{3/4}$, de modo que, interpolando (4.7) e (4.12), obtemos

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \; \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, (\mu\, t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{4.13}$$

para cada $p \geq 1$. Outros resultados são também obtidos nesta seção, em particular

$$\| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, t_0, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}) \, t^{-\frac{3}{4}} \qquad \forall \, t \geq t_0 \tag{4.14}$$

para cada $t_0 > 0$ dado, onde $C(\mu, t_0, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}) > 0$ denota uma constante cujo valor depende de t_0, do parâmetro $\mu > 0$ dado em (4.3) acima, e da magnitude de $\| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Estes resultados são utilizados na Seção 4.4 para mostrar, novamente seguindo [17], que tem-se

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow | \, m \, | \qquad \text{ao} \qquad t \rightarrow \infty \tag{4.15}$$

onde m é a *massa* de $u(\cdot, t)$, invariante no tempo,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \, dx. \tag{4.16}$$

Além disto, sendo $u(\cdot, t)$, $\tilde{u}(\cdot, t)$ soluções de (4.1), correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $\tilde{u}(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se

$$\| u(\cdot, t) \, - \, \widetilde{u}(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \qquad \text{ao} \qquad t \rightarrow \infty \tag{4.17}$$

quando possuírem a mesma massa. Estas propriedades decorrem do fato de as soluções $u(\cdot, t)$ de (4.1), (4.2) serem bem aproximadas pelas soluções $v(\cdot, t)$ do problema (estudado nos Capítulos 2 e 3)

$$v_t + f'(0) \, v_x + f''(0) \, v \, v_x = a(0) \, v_{xx} \tag{4.18}$$

$$v(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) \tag{4.19}$$

no sentido de ter-se

$$\| u(\cdot, t) \, - \, v(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \qquad \text{ao} \qquad t \rightarrow \infty. \tag{4.20}$$

4.2 Alguns Resultados Básicos

Nesta seção, derivamos algumas propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) que serão utilizadas posteriormente.

Teorema 4.1 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução do problema (4.1), (4.2), tem-se*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \tag{4.21}$$

Prova.

Para $T > 0$ dado, tomando $t_0 \in]\,0,T\,]$, $R > 0$, multiplicando (4.1) por $L_\delta'(\,u(x,t))\,)$, conforme (3.26) - (3.29), e integrando o resultado em $[-R,R] \times [t_0,T]$, obtemos, integrando por partes,

$$\int_{-R}^{R} L_\delta(\,u(x,t)\,)\,dx + \int_{t_0}^{T}\int_{-R}^{R} L_\delta''(u)\,a(u)\,u_x^2\,dxdt$$

$$= \int_{-R}^{R} L_\delta(\,u(x,t_0)\,)\,dx - \int_{t_0}^{T} A(\,u(R,t)\,)\,dt + \int_{t_0}^{T} A(\,u(-R,t)\,)\,dt$$

$$+ \int_{t_0}^{T} L_\delta'(\,u(R,t)\,)\,a(\,u(R,t)\,)\,u_x(R,t)\,dt$$

$$- \int_{t_0}^{T} L_\delta'(\,u(-R,t)\,)\,a(\,u(-R,t)\,)\,u_x(-R,t)\,dt$$

onde $A(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} L_\delta'(v)\,f'(v)\,dv$. Fazendo $\delta \to 0$, e lembrando que $L_\delta'' \geq 0$, obtemos

$$\int_{-R}^{R} |\,u(x,t)\,|\,dx \leq \int_{-R}^{R} |\,u(x,t_0)\,|\,dx + \int_{t_0}^{T} |\,A(\,u(R,t)\,)\,|\,dt + \int_{t_0}^{T} |\,A(\,u(-R,t)\,)\,|\,dt$$

$$+ \int_{t_0}^{T} |\,a(\,u(R,t)\,)\,u_x(R,t)\,|\,dt + \int_{t_0}^{T} |\,a(\,u(-R,t)\,)\;u_x(-R,t)\,|\,dt$$

para todo $R > 0$, $t_0 \in]\,0,T\,[$, visto que $|\,L_\delta'\,| \leq 1$. Fazendo $R \to +\infty$, resulta então

$$\| u(\cdot,T) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

usando (1.6). Fazendo finalmente $t_0 \to 0$, obtemos (4.21), como afirmado. $\square$

Um modo abreviado de apresentar o argumento acima, que já foi usado nos Capítulos 2 e 3, pode ser apresentado como segue:

Tomando L_δ, $\delta > 0$, dada em (3.29), tem-se, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,u(x,t)\,)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,u(x,t)\,)\,u_t\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,u(x,t)\,)\,f'(u)\,u_x\,dx + \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,u(x,t)\,)\,\Big(a(u)\,u_x\Big)_x\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,u(x,t)\,)\,a(u)\,u_x^2\,dx
\end{aligned}$$

visto que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,u(x,t)\,)\,f'(u)\,u_x\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} A(u)\,dx = 0$$

onde $A(u) = \int_0^u L_\delta'(v)\,f'(v)\,dv$.

Lembrando que $L_\delta'' \geq 0$, tem-se então

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,u(x,t)\,)\,dx \leq 0,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\,(\,u(x,t)\,)\,dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} L_\delta\,(\,u(x,0)\,)\,dx$$

para cada $t > 0$, $\delta > 0$. Fazendo $\delta \to 0$, obtém-se, por (3.30),

$$\int_{\mathbb{R}} |\,u(x,t)\,|\,dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} |\,u(x,0)\,|\,dx,$$

concluindo o argumento. $\square$

A prova acima mostra, na verdade, que

$$\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \;\leq\; \|\,u(\cdot,t_0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0,$$

ou seja, $\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce com t. Este fato também é verdadeiro para qualquer $p \geq 1$, conforme mostrado a seguir.

Teorema 4.2 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução do problema (4.1), (4.2), tem-se,*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0 \tag{4.22}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Prova. Como no teorema anterior, podemos argumentar abreviadamente como segue:

Considerando primeiro $p \geq 1$ finito, tem-se, tomando as funções L_δ dadas em (3.29),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^p(\, u(x,t)\,)\, dx &= p \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-1}(\, u(x,t)\,)\, L_\delta'(\, u(x,t)\,)\, u_t\, dx \\
&= -p \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-1}(\, u(x,t)\,)\, L_\delta'(\, u(x,t)\,)\, f'(u)\, u_x\, dx \\
&+ p \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-1}(\, u(x,t)\,)\, L_\delta'(\, u(x,t)\,) \Big(a(u)\, u_x\Big)_x\, dx \\
&= -p\,(p-1) \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-2}(\, u(x,t)\,)\, (L_\delta'(\, u(x,t)\,)\,)^2\, a(u)\, u_x^2\, dx \\
&- p \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-1}(\, u(x,t)\,)\, L_\delta''(\, u(x,t)\,)\, a(u)\, u_x^2\, dx
\end{aligned}$$

visto que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{p-1}(\, u(x,t)\,)\, L_\delta'(\, u(x,t)\,)\, f'(u)\, u_x\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} A(\, u(x,t)\,)\, dx = 0$$

onde $A(u) = \int_0^u L_\delta^{p-1}\, L_\delta'(v)\, f'(v)\, dv$.

Lembrando que $L_\delta'' \geq 0$, obtém-se então

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^p(\, u(x,t)\,)\, dx \leq 0$$

para todo $t > 0$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta^p(\, u(x,t)\,)\, dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} L_\delta^p(\, u(x,t_0)\,)\, dx$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Fazendo $\delta \to 0$, obtém-se (4.22) em virtude de (3.30).

Finalmente, fazendo $p \to \infty$ em (4.22), obtém-se

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.23}$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$, concluindo o argumento. Novamente, esta derivação pode ser feita de modo rigoroso, como feito na prova do Teorema 4.1. $\square$

Uma propriedade especial da norma $\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{R})}$ é dada abaixo.

Teorema 4.3 *Sendo $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (4.1), (4.2), tem-se*

$$\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,0) - \tilde{u}(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0. \quad (4.24)$$

Prova. Tomando as funções L_δ, $\delta > 0$, dadas em (3.29), obtém-se, para $\theta(\cdot,t) := u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,\theta(x,t)\,)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,\theta(x,t)\,)\,\theta_t(x,t)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,\theta\,)\,[\,f\,]_x\,dx + \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,\theta\,)\,\Big([\,a\,]\,\tilde{u}_x\Big)_x\,dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(\,\theta\,)\,\Big(a(u)\,\theta_x\Big)_x\,dx \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} [\,a\,] &= a(\tilde{u}+\theta) - a(\tilde{u}) \\ [\,f\,] &= f(\tilde{u}+\theta) - f(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,\theta(x,t)\,)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta\,)\,[\,f\,]\,\theta_x\,dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta\,)\,[\,a\,]\,\tilde{u}_x\,\theta_x\,dx \\ &- \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta\,)\,a(u)\,\theta_x^2\,dx \end{aligned}$$

e então, lembrando que $L_\delta'' \geq 0$, resulta

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,\theta(x,t)\,)\,dx \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta(x,t)\,)[\,f\,]\,\theta_x\,dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta(x,t)\,)\,[\,a\,]\,\tilde{u}_x\,\theta_x\,dx$$

para todos t, $\delta > 0$. Integrando em $[0,t]$, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,\theta(x,t)\,)\,dx \;&\leq\; \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\,\theta(x,0)\,)\,dx \\ &+\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta(x,\tau)\,)\,(\,[\,f\,] - [\,a\,]\,\tilde{u}_x\,)\,\theta_x \; dx d\tau\end{aligned}$$

e então, fazendo $\delta \to 0$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |\,\theta(x,t)\,|\,dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} |\,\theta(x,0)\,|\,dx$$

em virtude de (3.30) e de que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} L_\delta''(\,\theta(x,\tau)\,)\,(\,[\,f\,] - [\,a\,]\,\tilde{u}_x\,)\,\theta_x \; dx d\tau \to 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. □

Outra propriedade fundamental das soluções e $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) é dada a seguir.

Teorema 4.4 [Conservação da Massa] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx \qquad \forall\, t > 0 \tag{4.25}$$

Prova. Dado $t > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)\,dx \\ &=\; -\int_{\mathbb{R}} f(u)_x\,dx + \int_{\mathbb{R}} \Big(a(u)\,u_x\Big)_x\,dx = 0,\end{aligned}$$

o que mostra (4.25). □

Dado que valem os resultados (4.24), (4.25) acima, podemos usar o argumento de M.Crandall e L.Tartar [4] para estabelecer a seguinte propriedade de monotonicidade.

Teorema 4.5 [Monotonicidade do Operador Solução] Sendo $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (4.1), (4.2), tem-se

$$u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t) \qquad \forall\, t > 0. \tag{4.26}$$

Prova. Dado $t > 0$, tem-se, pelos Teoremas 4.3 e 4.4 acima,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (u(x,t) - \tilde{u}(x,t))_+ \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \;+\; u(x,t) - \tilde{u}(x,t)}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) \;-\; \tilde{u}(x,t)|\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u(x,t) \;-\; \tilde{u}(x,t))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) \;-\; \tilde{u}(x,t)|\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u(x,0) \;-\; \tilde{u}(x,0))\, dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(x,0) \;-\; \tilde{u}(x,0)|\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u(x,0) \;-\; \tilde{u}(x,0))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big[|u(x,0) \;-\; \tilde{u}(x,0)| + u(x,0) \;-\; \tilde{u}(x,0)\Big]\, dx \;=\; 0
\end{aligned}$$

visto que $u(x,0) \leq \tilde{u}(x,0)$ quase todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$0 \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} \Big(u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\Big)_+ \, dx \;\leq\; 0,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\Big)_+ \, dx \;=\; 0,$$

de onde segue o resultado. □

Uma conseqüência imediata é a seguinte propriedade.

Teorema 4.6 [Propriedade TVD] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), com $u(\cdot,0) \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, então*

$$TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \;\leq\; TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \qquad \forall t > 0 \tag{4.27}$$

$$PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \;\leq\; PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \qquad \forall t > 0 \tag{4.28}$$

$$NV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \;\leq\; NV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)] \qquad \forall t > 0. \tag{4.29}$$

Prova. Dado $t > 0$, tem-se por (2.39), e [16] pg. 1201,

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big|u(x+h,t) - u(x,t)\Big|\, dx \\ &\leq \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big|u(x+h,0) - u(x,0)\Big|\, dx = TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)], \end{aligned}$$

visto que $\tilde{u}(x,t) := u(x+h,t)$ é solução de (4.1) com $\tilde{u}(\cdot,0) = u(\cdot+h,0)$.

Analogamente, por (2.40), obtém-se

$$PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big(u(x+h,t) - u(x,t)\Big)_+ dx$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+h,t) - u(x,t)| + (u(x+h,t) - u(x,t))}{2}\, dx$$

$$\leq \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big|u(x+h,0) - u(x,0)\Big|\, dx + \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (\, u(x+h,0) - u(x,0)\,)\, dx\Big)$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \Big(u(x+h,0) - u(x,0)\Big)_+ dx = PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,0)],$$

para cada $t > 0$.

Da mesma forma, mostra-se (4.28). $\square$

Observe da prova acima que

$$PV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] = NV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] = \frac{1}{2} TV_{\mathbb{R}}[u(\cdot,t)] \tag{4.30}$$

para todo $t > 0$.

4.3 Decaimento em $L^p(\mathbb{R})$

Nesta seção, obtemos estimativas para $u(\cdot,t)$ e algumas derivadas, que são utilizadas na Seção 4.4.

Teorema 4.7 [Desigualdade de Energia 1] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2) e $\sigma > 1/2$, tem-se*

$$T^\sigma \| u(\cdot,T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;+\; 2\,\mu \int_0^T t^\sigma \| u_x(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \;\leq$$
$$\leq\; \frac{\sigma^{3/2}}{\sigma - 1/2}\, \frac{2}{\sqrt{2\mu}} \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})}\, T^{\sigma-1/2} \tag{4.31}$$

para todo $T > 0$.

Prova. Multiplicando (4.1) por $t^\sigma\, u(\cdot,t)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [0,T]$, $T > 0$ dado, obtém-se

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} t^\sigma\, u\, u_t\, dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} t^\sigma\, u\, f(u)_x\, dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} t^\sigma\, u \Big(a(u)\, u_x\Big)_x\, dxdt.$$

Agora, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}} t^\sigma\, u\, u_t\, dxdt &= \int_{\mathbb{R}} t^\sigma \frac{u^2}{2}\Big|_0^T dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \sigma\; t^{\sigma-1} \frac{u^2}{2}\, dxdt \\
&= \frac{1}{2} T^\sigma \int_{\mathbb{R}} \Big(u(x,T)\Big)^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_0^T t^{\sigma-1} \int_{\mathbb{R}} \Big(u(x,t)\Big)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2} T^\sigma \| u(.,T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{\sigma}{2} \int_0^T t^{\sigma-1} \| u(.,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} t^\sigma\, u u_t dxdt = \frac{T^\sigma}{2} \| u(.,T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{\sigma}{2} \int_0^T t^{\sigma-1} \| u(.,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \tag{4.32}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}} u\, f(u)_x\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, f'\Big(u(x,t)\Big)\, u_x(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big[g(x,t)\Big]\, dx$$

onde

$$g(x,t) = \int_0^{u(x,t)} v\, f'(v)\, dv,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} u\, f(u)_x\, dx = 0,$$

e assim

$$\int_0^T t^\sigma \int_{\mathbb{R}} u\, f(u)_x \, dxdt = 0. \tag{4.33}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u\Big(a(u)u_x\Big)_x dx &= u\, a(u)\, u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} a(u)\, u_x^2 \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} a(u)\, u_x^2 \, dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^T t^\sigma \int_{\mathbb{R}} u\, \Big(a(u)\, u_x\Big)_x \, dxdt = -\int_0^T t^\sigma \int_{\mathbb{R}} a(u)\, u_x^2 \, dx. \tag{4.34}$$

Assim, por (4.32), (4.33) e (4.34), obtém-se

$$T^\sigma \,\|\, u(\cdot, T) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2 \int_0^T t^\sigma \int_{\mathbb{R}} a(u)\, (u_x)^2 \, dxdt = \sigma \int_0^T t^{\sigma-1} \,\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt$$

de modo que, por (4.3), tem-se

$$\begin{aligned}T^\sigma \,\|\, u(.,T) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\,\mu \int_0^T t^\sigma \,\|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt &\leq \\ \leq \sigma \int_0^T t^{\sigma-1} \,\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Usando a Desigualdade de Sobolev (A.11)

$$\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2} \,\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} \,\|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3}, \tag{4.36}$$

tem-se

$$\begin{aligned}&\int_0^T t^{\sigma-1} \,\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \\ &\leq \sqrt[3]{4} \int_0^T t^{\sigma-1} \,\|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \,\|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} \, dt \\ &\leq \sqrt[3]{4} \,\|\, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \int_0^T t^{\sigma-1} \,\|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} \, dt \\ &\leq \sqrt[3]{4} \,\|\, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \int_0^T t^{2\sigma/3 - 1} \Big(t^\sigma \,\|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \Big)^{1/3} dt\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt[3]{4}\, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \Big(\int_0^T t^{\sigma-3/2}\, dt \Big)^{2/3} \Big(\int_0^T t^{\sigma} \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \Big)^{1/3}$$

$$= \sqrt[3]{4}\, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \Big(\frac{T^{\sigma-1/2}}{\sigma - 1/2} \Big)^{2/3} \Big(\int_0^T t^{\sigma} \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \Big)^{1/3},$$

usando (4.35) e a Desigualdade de Hölder (A.4) com $p = 3/2$ e $q = 3$.

Definindo

$$E_\delta(T) := T^{\sigma} \, \| u(.,T) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\,\mu \int_0^T t^{\sigma} \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt,$$

tem-se então

$$E_\delta(T) \leq \sigma \sqrt[3]{4}\, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \Big(\frac{T^{(\sigma-1/2)}}{\sigma - 1/2} \Big)^{2/3} (2\,\mu)^{-1/3} \Big(2\,\mu \int_0^T t^{\sigma} \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \Big)^{1/3}$$

$$\leq \sigma \sqrt[3]{4}\, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \Big(\frac{T^{(\sigma-1/2)}}{\sigma - 1/2} \Big)^{2/3} (2\,\mu)^{-1/3} \Big(E_\delta(T) \Big)^{1/3},$$

de modo que

$$E_\delta(T) \leq 2\,\sigma^{3/2} \, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \frac{T^{\sigma-1/2}}{\sigma - 1/2} (2\,\mu)^{-1/2}$$

Portanto, para cada $\sigma > 1/2$,

$$T^{\sigma} \, \| u(\cdot,T) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\,\mu \int_0^T t^{\sigma} \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \leq$$

$$\leq \frac{\sigma^{3/2}}{\sigma - 1/2} \frac{2}{\sqrt{2\,\mu}} \, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, T^{\sigma-1/2}$$

para todo $T > 0$, como afirmado. □

Em particular, tomando $\sigma = 1$, obtém-se

$$T \, \| u(\cdot,T) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\,\mu \int_0^T t \, \| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, T^{1/2} \tag{4.37}$$

enquanto $\sigma = 3/2$ produz

$$T^{3/2} \| u(\cdot, T) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{3/2} \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \le$$

$$\le \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, T \tag{4.38}$$

para todo $T > 0$. De (4.38), obtém-se

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \le \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, \mu^{-1/4} t^{-1/4}. \tag{4.39}$$

Ademais, de (4.37), segue que

$$\int_0^T t \, \| u_x(., t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \le \frac{\sqrt{2}}{\mu \sqrt{\mu}} \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, T^{1/2} \tag{4.40}$$

para todo $T > 0$.

Lema 4.8 *Para cada $t_0 > 0$, existe $t_* \in [\, t_0/2, \, t_0 \,]$ tal que*

$$t_* \, \| u_x(\cdot, t_*) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \frac{2\sqrt{2}}{\mu \sqrt{\mu}} \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, t_0^{-1/2} \tag{4.41}$$

Prova. De (4.40) acima, tem-se

$$\int_{t_0/2}^{t_0} t \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt \le \frac{\sqrt{2}}{\mu \sqrt{\mu}} \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, t_0^{1/2}$$

e então, por (A.9), obtém-se (4.41). □

Uma conseqüência importante dos resultados acima é dada a seguir.

Teorema 4.9 *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (4.1), (4.2), tem-se*

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \sqrt{6} \, \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, \mu^{-1/2} \, t^{-1/2} \tag{4.42}$$

para todo $t > 0$.

Prova. Dado $t > 0$, pelo Lema 4.8 sabe-se existir $t_* \in [t/2, t]$ tal que

$$t_* \,\| \, u_x(\cdot, t_*) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}} \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \, t^{-1/2},$$

de modo que

$$\| \, u_x(\cdot, t_*) \,\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}}} \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})} \, t^{-1/4} \, t_*^{-1/2},$$

enquanto, por (4.39), tem-se

$$\| \, u(\cdot, t_*) \,\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})} \, \mu^{-1/4} \, t_*^{-1/4}.$$

Portanto, da Desigualdade de Sobolev (A.10), obtemos

$$\begin{aligned} \| \, u(\cdot, t_*) \,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\le \sqrt{2} \,\| \, u(\cdot, t_*) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \,\| \, u_x(\cdot, t_*) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \\ &\le \sqrt[4]{3\sqrt{6}} \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})} \, t^{-1/8} \, t_*^{-3/8} \, \mu^{-1/2} \\ &\le \sqrt{6} \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})} \, \mu^{-1/2} \, t^{-1/2} \end{aligned}$$

visto que $t_* \ge t/2$. Pelo Princípio do Máximo (4.23) obtém-se o resultado desejado. □

Teorema 4.10 *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (4.1), (4.2), tem-se*

$$\| \, u(\cdot, t) \,\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \,\| \, u(\cdot, 0) \,\|_{L^1(\mathbb{R})} \, (\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \qquad \forall \, t > 0 \qquad (4.43)$$

para cada $1 \le p \le \infty$, onde $C_p = 6^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$.

Prova. Os casos $p = 1, \infty$ já foram estabelecidos acima (ver Teoremas 4.1 e 4.9). Considerando $1 < p < \infty$, tem-se, para $t > 0$,

$$\| \, u(\cdot, t) \,\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \| \, u(\cdot, t) \,\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{(1-1/p)} \,\| \, u(\cdot, t) \,\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/p},$$

ver (A.8), de onde (4.43) segue imediatamente, usando (4.21) e (4.42). □

Na Seção 4.4, precisamos também de estimativas para $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$; estabelecê-las será o objetivo dos resultados a seguir. Será conveniente introduzirmos $K_1 > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K_1. \tag{4.44}$$

Teorema 4.11 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), e sendo $t_0 \geq 0$ dado, tem-se*

$$\| u_x(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} \, t^{-\frac{3}{4}} \qquad \forall\, t \geq t_0 \tag{4.45}$$

onde $C(\mu, t_0, K_1) > 0$ é uma constante que depende de μ, t_0 e K_1 acima.

Prova. Introduzindo $\psi(\cdot,t)$ via

$$\psi(x,t) := \int_0^{u(x,t)} a(v)\, dv, \tag{4.46}$$

e sendo $\Psi(u) = \int_0^u a(v)\, dv$, e Φ a inversa de Ψ, obtém-se

$$\psi_t = a(u)\, u_t, \qquad \psi_x = a(u)\, u_x,$$

de modo que $\psi(\cdot,t)$ satisfaz a equação

$$\psi_t + f'\Big(\Phi(\psi)\Big)\, \psi_x = a(\Phi(\psi))\psi_{xx}.$$

Definindo $\tilde{f}(\xi) := \int_0^\xi f'\Big(\Phi(y)\Big)\, dy$, $\tilde{a}(\xi) := a\Big(\Phi(\xi)\Big)$, tem-se então

$$\psi_t + \tilde{f}(\psi)_x = \tilde{a}(\psi)\; \psi_{xx} \tag{4.47}$$

para $x \in \mathbb{R}, t > 0$, com $\psi(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

De (4.42) e (4.46), temos

$$|\, u(x,t) \,| \;\leq\; C_0, \qquad |\, \psi(x,t) \,| \;\leq\; A_0 \tag{4.48}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0/2$, onde

$$C_0 = \sqrt{12}\; \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\; (\mu t_0)^{-1/2}, \qquad A_0 = \max_{|v| \leq C_0} |\, a(v) \,|\; C_0 \tag{4.49}$$

Em particular, de (4.46) obtém-se

$$|\psi(x,t)| \leq A_0\,|u(x,t)| \tag{4.50}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq t_0/2$, e então, de (4.42), segue que

$$\|\,\psi(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu, t_0, k_1)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\,t^{-\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, t \geq t_0/2. \tag{4.51}$$

Seja $t_* \in [\,t_0/2, t_0\,]$ dado pelo Lema 4.8. Para estimar $\|\,\psi_x(\cdot,T)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}$, $T \geq t_0$, derivamos (4.47) com relação a x, e obtemos, multiplicando a equação resultante por $2\,t^2\,\psi_x$ e integrando em $\mathbb{R}\times[t_*,T]$,

$$T^2\,\|\,\psi_x(\cdot,T)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,\psi_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \leq$$

$$\leq t_*^2\,\|\,\psi_x(\cdot,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_{t_*}^{T} t\,\|\,\psi_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + 2\int_{t_*}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}}\left|\tilde{f}'(\psi) - \tilde{f}'(0)\right|\,|\psi_x|\,|\psi_{xx}|\,dxdt$$

em vista de (4.3).

Como $\psi_x = a(u)\,u_x$, tem-se, por (4.50),

$$\|\,\psi_x(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq A_0\,\|\,u_x(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \forall\, t \geq t_*. \tag{4.52}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5) e (4.37), (4.41) acima, temos

$$t_*^2\,\|\,\psi_x(\cdot,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_{t_*}^{T} t\,\|\,\psi_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \leq C(\mu, t_0, K_1)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\,t_0^{1/2}.$$

enquanto, pela Desigualdade (A.1) com $\epsilon = \mu$ e (4.52) acima,

$$\int_{t_*}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}} 2\left|\tilde{f}'(\psi) - \tilde{f}'(0)\right|\,|\psi_x|\,|\psi_{xx}|\,dxdt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq\ \mu\int_{t_*}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}} |\,\psi_{xx}\,|^2\,dxdt + \frac{1}{\mu}\int_{t_*}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}}\left|\,\tilde{f}'(\psi) - \tilde{f}'(0)\,\right|^2 |\,\psi_x\,|^2\,dxdt \\
&\leq\ \mu\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,\psi_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_*}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}} |\,\psi\,|^2\,|\,\psi_x\,|^2\,dxdt \\
&\leq\ \mu\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,\psi_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_*}^{T} t\,\|\,\psi_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \\
&\leq\ \mu\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,\psi_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_*}^{T} t\,\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \\
&\leq\ \mu\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,\psi_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + C(\mu, t_0, K_1)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{1/2}\,,
\end{aligned}$$

tendo em vista (4.52).

Portanto, tem-se

$$T^2 \| \psi_x(\cdot,T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_*}^{T} t^2 \| \psi_{xx}(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \leq C(\mu, t_0, K_1) \, \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}}$$

para todo $T \geq t_0$, onde $C(\mu, t_0, K_1) > 0$ depende de μ, t_0, K_1.

Em particular, obtemos

$$\| \psi_x(\cdot,T) \|_{L^2(\mathbb{R})} \; \leq \; C(\mu, t_0, K_1) \, \| u(\cdot,0) \|_{L^1(\mathbb{R})} T^{-\frac{3}{4}} \qquad \forall \, T \geq t_0. \quad (4.53)$$

Ademais, como $u_x = \frac{\psi_x}{a(u)}$, segue de (4.3) que

$$| \, u_x(x,t) \, | = \left| \frac{1}{a(u)} \, \psi_x(x,t) \right| \; \leq \; \frac{1}{\mu} \, | \, \psi_x(x,t) \, |,$$

de modo que

$$\| \, u_x(\cdot,t) \, \|_{L^2(\mathbb{R})} \; \leq \; \frac{1}{\mu} \, \| \, \psi_x(\cdot,t) \, \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

obtendo-se então (4.45) usando (4.53). □

Teorema 4.12 [Desigualdade de Energia 2] *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), e $t_0 > 0$ dado, tem-se*

$$\begin{aligned} T^2 \, \| \, u_x(\cdot,T) \, \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \; + \; \mu \, \int_{t_0}^{T} t^2 \, \| \, u_{xx}(\cdot,t) \, \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \; \leq \\ \leq C(\mu, t_0, K_1) \, \| \, u(\cdot,0) \, \|^2_{L^1(\mathbb{R})} \, T^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \qquad (4.54)$$

para todo $T \geq t_0$, onde $C(\mu, t_0, K_1) > 0$ é uma constante que depende apenas de t_0 e os parâmetros $\mu, K_1 > 0$ dados em (4.3) e (4.44) acima.

Prova. Tomando $t_* \in [\frac{t_0}{2}, t_0]$ dado pelo Lema 4.8, procedemos do seguinte modo:

Derivando a equação (4.1) em relação a x, multiplicando por $2\,t^2\,u_x$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_*, T]$, tem-se:

$$2 \int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x \, u_{xt} \, dx dt + 2 \int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x \Big(f'(u) \, u_x \Big)_x \, dx dt =$$

$$= 2\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x\Big(a(u)\,u_{xx}\Big)_x\,dxdt + 2\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x\,\Big(a'(u)\,u_x^2\Big)_x\,dxdt,$$

o que fornece, integrando por partes e usando (4.3),

$$\begin{aligned}
T^2\,\|\,u_x(\cdot,T)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_*}^{T} t^2 \|\,u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \le \\
\le\;& t_*{}^2\|\,u_x(\cdot,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_{t_*}^{T} t\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \\
+\;& 2\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} \Big|f'(u) - f'(0)\Big|\,|\,u_x\,|\,|\,u_{xx}\,|\,dxdt \\
-\;& 2\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\,a'(u)\,|\,|\,u_x\,|^2\,|\,u_{xx}\,|\,dxdt.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy (A.1) com $\epsilon = \mu/3$, obtemos então

$$T^2\,\|\,u_x^2(\cdot,T)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_*}^{T} t^2 \|\,u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \le$$

$$\begin{aligned}
\le\;& t_*{}^2\|\,u_x(\cdot,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_{t_*}^{T} t\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + \frac{\mu}{3}\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \\
+\;& \frac{3}{\mu}C(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\,u(x,t)\,|^2\,|\,u_x(x,t)\,|^2\,dxdt \\
+\;& \frac{\mu}{3}\int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + \frac{3}{\mu}\hat{C}(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} t^2\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^4_{L^4(\mathbb{R})}dt. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Note que, por (4.37) e (4.41), temos

$$\begin{aligned}
t_*{}^2\|\,u_x(\cdot,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_{t_*}^{T} t\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})})\,dt \;\le \\
\le C(\mu,t_0,K_1)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{1/2}, \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

e, por (4.42),

$$\begin{aligned}
\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\,u(x,t)\,|^2\,|\,u_x(x,t)\,|^2\,dxdt \;&\le\; \int_{t_*}^{T} t^2\,\|\,u(\cdot,t)\,\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \\
&\le\; C(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} t\,\|\,u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dt,
\end{aligned}$$

de modo que, lembrando (4.37) novamente, obtemos

$$\int_{t_*}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\,u(x,t)\,|^2\,|\,u_x(x,t)\,|^2\,dxdt \le C(\mu,t_0,K_1)\,\|\,u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{\frac{1}{2}}. \quad (4.57)$$

Agora, usando a Desigualdade de Sobolev (A.12),

$$\| u_x(\cdot,t) \|_{L^4(\mathbb{R})} \leq 2 \| u_x(\cdot,t) \|^3_{L^2(\mathbb{R})} \| u_{xx}(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})},$$

tem-se, usando a desigualdade (A.1) com $\epsilon = \mu/3$,

$$\frac{3}{\mu}\, \hat{C}(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_x(\cdot,t) \|^4_{L^4(\mathbb{R})}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{3}{\mu}\, \hat{C}(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^2\, 2 \| u_x(\cdot,t) \|^3_{L^2} \| u_{xx}(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt + C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_x(\cdot,t) \|^6_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \quad (4.58)$$

onde $C(\mu, t_0, K_1) = 108\, \frac{\hat{C}(\mu,t_0,K_1)^2}{\mu^3}$, com $\hat{C} = \hat{C}(\mu, t_0, K_1)$ dada em (4.55).

Pelo Teorema 4.11, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_*}^{T} t^2 \| u_x(\cdot,t) \|^6_{L^2(\mathbb{R})}\, dt &\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^6_{L^1(\mathbb{R})} \int_{t_*}^{T} t^{-\frac{5}{2}}\, dt \\
&\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} \frac{2}{3} t_*^{-\frac{3}{2}} \\
&\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} \frac{2}{3} \Big(\frac{t_0}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}} \\
&\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} \Big(\frac{t_*}{T}\Big)^{\frac{1}{2}} t_*^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{t_*}^{T} t^2 \| u_x(\cdot,t) \|^6_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.59)$$

Segue então, por (4.58) e (4.59),

$$\frac{3}{\mu}\, \hat{C}(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^2 \|u_x\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_*}^{T} t^2 \|u_{xx}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, t_0, K_1) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \qquad (4.60)$$

Por (4.55), (4.56), (4.57) e (4.60), obtém-se (4.54), como afirmado. □

O argumento usado na prova do Teorema 4.12 acima pode ser repetido para estimar $\| u_{xx}(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}$, $\| u_{xxx}(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}$, e em geral $\| \partial_x^l u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}$ para qualquer l, quando as funções a, f em (4.1) forem suficientemente suaves ($a, f \in C^{l+1}$). Assim, por exemplo, para $l = 2$ podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 4.13 *Supondo $a, f \in C^3$, e sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), tem-se, para cada $t_0 > 0$ dado,*

$$T^3 \| u_{xx}(\cdot,T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^3 \| u_{xxx}(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq$$
$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, T \geq t_0 \tag{4.61}$$

para alguma constante $C(\mu, t_0, K_1) > 0$ dependendo apenas de μ, t_0, K_1.

Prova. Pelo Teorema 4.12, tem-se

$$\int_{\frac{t_0}{2}}^{t_0} t^2 \| u_{xx}(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq \tilde{C}(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} t_0^{\frac{1}{2}}$$

para uma constante $\tilde{C}(\mu, t_0, K_1) > 0$ que depende apenas de μ, t_0, K_1; como no Lema 4.8, existe então $t_* \in [\frac{t_0}{2}, t_0]$ tal que

$$\begin{aligned} t_*^2 \| u_{xx}(\cdot,t_*) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{\tilde{C}(\mu, t_0, k_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} t_0^{\frac{1}{2}}}{\frac{t_0}{2}} \\ &= C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} \left(\frac{t_0}{t_*}\right)^{-\frac{1}{2}} t_*^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} t_*^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de modo que, multiplicando por t_*, temos

$$t_*^3 \| u_{xx}(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot,0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} t_*^{\frac{1}{2}}. \tag{4.62}$$

Derivando (4.1) duas vezes em relação a x, multiplicando por $2\, t^3\, u_{xx}$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_*, T]$, obtém-se

$$\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} 2\, u_{xx}\, u_{xxt}\, dx dt + \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} 2\, u_{xx} \left(f'(u) u_{xx} + f''(u) u_x^2 \right)_x dx dt =$$

$$= \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} 2\, u_{xx} \Big(a(u) u_{xxx} \Big)_x \, dx dt + 2 \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} u_{xx} \left(a''(u) u_x^3 + 3a'(u)\, u_x\, u_{xx} \right)_x dx dt$$

onde $t_* \in [\frac{t_0}{2}, t_0]$ é dado em (4.62). Integrando por partes, resulta

$$T^3 \| u_{xx}(\cdot, T) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_*}^{T} t^3 \| u_{xxx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \le$$

$$\le t_*^3 \| u_{xx}(\cdot, t_*) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 3 \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt$$

$$+ 2 \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f'(u) u_{xx} u_{xxx} \, dx dt + 2 \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} \, dx dt$$

$$- 2 \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a''(u) u_x^3 u_{xxx} \, dx dt - 6 \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u) u_x u_{xx} u_{xxx} \, dx dt,$$

de modo que, usando a desigualdade (A.1) com $\epsilon = \mu/5$, tem-se

$$T^3 \| u_{xx}(\cdot, T) \|^2_{L^2(R)} + 2\mu \int_{t_*}^{T} t^3 \| u_{xxx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le t_*^3 \| u_{xx}(\cdot, t_*) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 3 \int_{t^*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt + \frac{4\mu}{5} \int_{t_*}^{T} t^3 \| u_{xxx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt$$

$$+ \frac{20}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 u_{xx}^2 \, dx dt + \frac{20}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u)^2 u_x^4 \, dx dt \tag{4.63}$$

$$+ \frac{20}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a''(u)^2 u_x^6 \, dx dt + \frac{180}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u)^2 u_x^2 u_{xx}^2 \, dx dt.$$

Podemos estimar os termos acima do seguinte modo: por (4.54) e (4.62), tem-se

$$t_*^3 \| u_{xx}(\cdot, t_*) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 3 \int_{t^*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \le$$

$$\le C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot, 0) \|^2_{L^1(\mathbb{R})} T_*^{\frac{1}{2}} \tag{4.64}$$

para uma constante $C(\mu, t_0, K_1)$ apropriada.

Usando (4.42) e (4.54),

$$\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 u_{xx}^2 \, dx dt \le$$

$$\le C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^3 \| u(\cdot, t) \|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \| u_{xx}(\cdot, t) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(., 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}. \tag{4.65}$$

Por outro lado, por (4.42) e a Desigualdade de Sobolev (A.12), obtemos, pelo Teorema 4.11,

$$\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u)^2 u_x^4 \, dx dt \leq$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^3 \| u_x(\cdot, t) \|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \, dt$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} 2t^3 \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^3 \| u_{xx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \, dt$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t^{3/2} \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \| u_{xx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \, dt$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1) \int_{t_*}^{T} t \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt + \int_{t_*}^{T} t^2 \| u_{xx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt$$

de modo que, por (4.37) e (4.54), obtém-se

$$\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u)^2 u_x^4 \, dx dt \leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \tag{4.66}$$

De modo análogo, obtém-se

$$\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a''(u)^2 u_x^6(x,t) \, dx dt \leq C(\mu, t_0, K_1) \| u(\cdot, 0) \|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \tag{4.67}$$

para $C(\mu, t_0, K_1)$ apropriada. Finalmente, usando a Desigualdade de Sobolev (A.14),

$$\| u_{xx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \| u_x(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \| u_{xxx}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}},$$

obtemos, pelo Teorema 4.9 e a Desigualdade (A.1) com $\epsilon = \mu/5$,

$$\frac{180}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u)^2 \, u_x^2 \, u_{xx}^2 \, dx dt =$$

$$= -\frac{60}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u^2) \, u_x^3 \, u_{xxx} \, dx dt - \frac{120}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u) \, a''(u) \, u_x^4 \, u_{xx} \, dx dt$$

$$= -\frac{60}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u^2) \, u_x^3 \, u_{xxx} \, dx dt + \frac{24}{\mu} \int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} \left(a''(u)^2 + a'(u) \, a'''(u) \right) u_x^6 \, dx dt$$

$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_{xxx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_x(\cdot,t)\parallel_{L^6(\mathbb{R})}^6 dt.$$

Pela Desigualdade de Sobolev (A.13),

$$\parallel u_x(\cdot,t)\parallel_{L^6(\mathbb{R})}^6 \leq 4 \parallel u_x(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^4 \parallel u_{xx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

obtemos então

$$\frac{180}{\mu}\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u)^2 u_x^2 u_{xx}^2 \, dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_{xxx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_x(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^4 \parallel u_{xx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_{xxx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu,t_0,K_1)\int_{t_*}^{T} \parallel u_{xx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt,$$

de modo que, pelo Teorema 4.12, tem-se

$$\frac{180}{\mu}\int_{t_*}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} a'(u)^2 u_x^2 u_{xx}^2 \, dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_*}^{T} t^3 \parallel u_{xxx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu,t_0,K_1) \parallel u(\cdot,0)\parallel_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}. \quad (4.68)$$

para $C(\mu, t_0, K_1)$ apropriada. Usando (4.64), (4.65), (4.66), (4.67) e (4.68) em (4.63), obtém-se (4.61), como afirmado. □

Voltando ao caso $a, f \in C^2$, devemos ainda observar a seguinte propriedade, que é usada na Seção 4.4 a seguir.

Teorema 4.14 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1), (4.2), e sendo $t_0 > 0$, $\epsilon > 0$ dados, tem-se*

$$T^{3/2-\epsilon} \parallel u_x(\cdot,T)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \parallel u_{xx}(\cdot,t)\parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq$$

$$\leq C(\mu,t_0,K_1;\epsilon) \parallel u(\cdot,0)\parallel_{L^1(\mathbb{R})}^2 \quad (4.69)$$

para cada $T \geq t_0$ onde $C(\mu,t_0,K_1;\epsilon)$ é uma constante que depende apenas de μ, t_0, K_1 e ϵ.

Prova. Derivando (4.1) em relação a x, multiplicando o resultado por $2\,t^{3/2-\epsilon}\,u_x$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, obtém-se, por (4.3),

$$T^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,T)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \leq$$

$$\leq t_0^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,t_0)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + (3/2-\epsilon) \int_{t_0}^{T} t^{1/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt$$

$$+\, 2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f'(u) u_x u_{xx}\, dxdt \;-\; 2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} a'(u) u_x^2 u_{xx}\, dxdt$$

de modo que, por (4.45),

$$T^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,T)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \leq$$

$$\leq\; C(\mu,t_0,K_1)\|\, u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})} t_0^{-\epsilon} \;+\; (3/2-\epsilon) C(\mu,t_0,K_1)\|\, u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})} \int_{t_0}^{T} t^{-1-\epsilon}\, dt \;+$$

$$+2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|\, |u_x|\, |u_{xx}|\, dxdt + 2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |a'(u)|\; u_x^2\; |u_{xx}|\, dxdt. \quad (4.70)$$

Tem-se, por (4.42) e a Desigualdade (A.1),

$$2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|\; |u_x|\; |u_{xx}|\; dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(R)}\, dt + C(\mu,t_0,K_1) \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u(\cdot,t)\,\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\; \|\, u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\; \|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt + C(\mu,t_0,K_1) \int_{t_0}^{T} t^{1/2-\epsilon}\; \|\, u_x(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\; \|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt + C(\mu,t_0,K_1)\; \|\, u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})} \int_{t_0}^{T} t^{-1-\epsilon}\, dt$$

usando o Teorema 4.11 acima. Assim,

$$2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |\, f'(u) - f'(0)\,|\; |u_x|\; |u_{xx}|\; dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\; \|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|^2_{L^2(R)}\, dt + \frac{1}{\epsilon}\; C(\mu,t_0,K_1)\; \|\, u(\cdot,0)\,\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\; t_0^{-\epsilon} \quad (4.71)$$

Por outro lado, pela Desigualdade (A.1),

$$2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\int_{\mathbb{R}} |\, a'(u)\, |u_x^2|\; u_{xx}\,|\, dxdt \;\leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt \,+\, \frac{12}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\int_{\mathbb{R}} |\, a'(u)\,|^2 u_x^4\, dxdt,$$

tendo-se, por (4.42) e as Desigualdades (A.11) e (A.12),

$$\frac{12}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\int_{\mathbb{R}} |\, a'(u)\,|^2 u_x^4\, dxdt \;\leq C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,t)\,\|_{L^4(\mathbb{R})}^4\, dt \;\leq$$

$$\leq C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\,\|\, u_x(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^3\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt \,+\, C(\mu, t_0, K_1)\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^6\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt \,+\, C(\mu, t_0, K_1)\|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\int_{t_0}^{T} t^{-3-\epsilon}\, dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt \,+\, \frac{1}{\epsilon}\, C(\mu, t_0, K_1)\|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\, t_0^{-\epsilon}$$

usando (4.45). Portanto,

$$2\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\int_{\mathbb{R}} |a'(u)|\; u_x^2\; |u_{xx}|\, dxdt \;\leq$$

$$\leq \frac{2\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\;\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt + \frac{1}{\epsilon}\; C(\mu, t_0, K_1)\|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\; t_0^{-\epsilon}, \quad (4.72)$$

obtendo-se então, de (4.70), (4.71) e (4.72)

$$T^{3/2-\epsilon}\|\, u_x(\cdot,T)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu\int_{t_0}^{T} t^{3/2-\epsilon}\|\, u_{xx}(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt \;\leq \frac{1}{\epsilon}\, C(\mu, t_0, K_1)\; t_0^{-\epsilon}\;\|\, u(\cdot,0)\,\|_{L^1(\mathbb{R})}^2$$

para todo $T \geq t_0$, como afirmado. □

4.4 Comportamento em $L^1(\mathbb{R})$

Nesta seção, investigamos o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ do problema (4.1), (4.2) na norma $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$. O passo fundamental para isso é substituir a equação (4.1) por outra, mais simples, que aproxima (4.1) suficientemente bem (ao $t \to \infty$) para os nossos propósitos. Intuitivamente, na equação (4.1),

$$u_t + f'(u)\, u_x = a(u)\, u_{xx} + a'(u)\, u_x^2 \tag{4.73}$$

temos, para $t \gg 1$, que

$$u_t + \Big(f'(0) + f''(0)u + \frac{1}{2}f'''(0)u^2 + ...\Big)u_x =$$

$$\Big(a(0) + a'(0)u + ...\Big)\, u_{xx} + \Big(a'(0) + a''(0)u + ...\Big)u_x^2$$

tem a forma

$$u_t + \Big(f'(0) + f''(0)\, u\Big)\, u_x + O(t^{-2}) = a(0)\, u_{xx} + O(t^{-2})$$

visto que, de (4.42), (4.45) e (4.61), temos, para a, f suaves

$$\begin{aligned} \|\, u(\cdot,t)\, \|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1/2}) \\ \|\, u_x(\cdot,t)\, \|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1}) \\ \|\, u_{xx}(\cdot,t)\, \|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-3/2}). \end{aligned}$$

Em particular, sendo $v(\cdot,t)$ definida por

$$v_t + f'(0)\, v_x + f''(0)\, v\, v_x = a(0)\, v_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{4.74}$$

esperamos ter $v(\cdot,t)$ próxima de $u(\cdot,t)$ para $t \gg 1$, para $v(\cdot,0)$ adequada. Este fato é estabelecido no Teorema 4.16 abaixo, seguindo a discussão em [17]. É preciso, aqui, assumir que $f''(\mathsf{u})$ seja Hölder contínua em $\mathsf{u} = 0$, isto é, que se tenha

$$\|\, f''(\mathsf{u}) - f''(0)\, \| \le \Gamma\, |\, \mathsf{u}\,|^\alpha \qquad |\, \mathsf{u}\,| \le \Omega \tag{4.75}$$

para algum $\Omega > 0$, e constantes $\Gamma, \alpha > 0$. Antes de obter o Teorema 4.16, é conveniente observar o seguinte resultado.

Lema 4.15 *Para cada $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\mu, K_1, \alpha, \Gamma, \Omega, ; \epsilon) > 0$ tal que a solução $w(\cdot,t)$, $t \ge t_0$, de*

$$w_t + f'(0)\, w_x + f''(0)\, w\, w_x = a(0)\, w_{xx} \tag{4.76}$$

$$w(\cdot, t_0) = u(\cdot, t_0) \tag{4.77}$$

satisfaz:

$$\| u(\cdot, t) - w(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0. \tag{4.78}$$

Prova. Tomando $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, K_1, \Omega) \geq 1$ suficientemente grande de modo a se ter

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \Omega \qquad \forall\, t \geq \hat{t}_0 \tag{4.79}$$

e $t_0 \geq \hat{t}_0$ a ser escolhido abaixo (ver (4.92)). Seja $w : \mathbb{R} \times [t_0, \infty[\to \mathbb{R}$ a solução de (4.76), (4.77). Escrevendo (4.1) na forma

$$\begin{aligned} u_t + f'(0)\, u_x + f''(0)\, u\, u_x + [f'(u) - f'(0) - f''(0)\, u]\, u_x = \\ = a(0)\, u_{xx} + \Big((a(u) - a(0))\, u_x \Big)_x \end{aligned} \tag{4.80}$$

obtemos, subtraindo (4.76) de (4.77),

$$\theta_t + f'(0)\theta_x + f''(0)\Big(\frac{1}{2}\theta^2 + \theta w\Big)_x = a(0)\theta_{xx} - \mathcal{F}(u)u_x + \Big([a(u)]u_x\Big)_x \tag{4.81}$$

onde $\theta(\cdot, t) := u(\cdot, t) - w(\cdot, t)$ e

$$\mathcal{F}(u) = f'(u) - f'(0) - f''(0)u, \qquad [a(u)] = a(u) - a(0) \tag{4.82}$$

Observando que

$$\mathcal{F}(u) = \Big(f''(\xi) - f''(0)\Big)\, u$$

para $|\xi| \leq |u|$, obtemos, de (4.75) e (4.79),

$$|\mathcal{F}(u)| = |f''(\xi) - f''(0)|\, |u| \leq \Gamma\, |\xi|^\alpha \mid u \mid \;\leq\; \Gamma \mid u \mid^{1+\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq \hat{t}_0$, ou seja,

$$|\mathcal{F}(\, u(\cdot, t)\,)| \leq \Gamma |\, u(\cdot, t) \,|^{1+\alpha} \qquad \forall t \geq \hat{t}_0. \tag{4.83}$$

Analogamente, $[a(u)] = a(u) - a(0) = a'(\eta)\, u$, para $|\eta| \leq |u|$, de modo que

$$|\, [a(\, u(\cdot, t)\,)] \,| \leq C(\Omega) \mid u(x, t) \mid \qquad t \geq \hat{t}_0. \tag{4.84}$$

Sendo L_δ, $\delta > 0$ dada em (3.29), multiplicando (4.81) por $L'_\delta(\theta)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$ obtemos, integrando por partes,

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\theta(x,T)\Big)\,dx - f''(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L''_\delta(\theta)\theta\Big(\frac{1}{2}\theta - w\Big)\theta_x\,dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} a(0)L''_\delta(\theta)\theta_x^2\,dxdt =$$

$$= -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L'_\delta(\theta)\mathcal{F}(u)u_x\,dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L'_\delta(\theta)\Big([a(u)]u_x\Big)_x\,dxdt$$

visto que, por (4.77), temos $\theta(\cdot, t_0) = 0$.

Lembrando que $L''_\delta \geq 0$, obtemos então

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\theta(x,T)\Big)\,dx \leq \mathcal{I}(\delta) + \mathcal{J}(\delta) \qquad \forall\, \delta > 0 \tag{4.85}$$

onde

$$\mathcal{I}(\delta) = f''(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L''_\delta(\theta)\,\theta\Big(\frac{1}{2}\theta - w\Big)\theta_x\,dxdt \tag{4.86}$$

e $\mathcal{J}(\delta) = \mathcal{J}_1(\delta) + \mathcal{J}_2(\delta) + \mathcal{J}_3(\delta)$, com

$$\mathcal{J}_1(\delta) = \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)|\,|\,u_x|\,dxdt \tag{4.87}$$

$$\mathcal{J}_2(\delta) = \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |[a(u)]|\,|\,u_{xx}\,|\,dxdt \tag{4.88}$$

$$\mathcal{J}_3(\delta) = \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |a'(u)|\,|\,u_x\,|^2\,dxdt \tag{4.89}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\mathcal{I}(\delta) \to 0 \qquad \text{ao} \qquad \delta \to 0, \tag{4.90}$$

enquanto $\mathcal{J}_1(\delta)$, $\mathcal{J}_2(\delta)$, $\mathcal{J}_3(\delta)$ podem ser estimadas como segue. Por (4.42), (4.45), (4.90),

$$\mathcal{J}_1(\delta) \leq \Gamma\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |\,u\,|^{1+\alpha}|\,u_x\,|\,dxdt \leq \Gamma\int_{t_0}^{T} \|\,u(\cdot,t)\,\|^{\alpha}_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big(\int_{\mathbb{R}} |\,u\,|\,|\,u_x\,|\,dx\Big)\,dt$$

$$\leq C(\mu, K_1)\,\Gamma\int_{t_0}^{T} t^{-\frac{\alpha}{2}}\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\,u_x(\cdot,t)\,\|_{L^2(\mathbb{R})}\,dt \leq C(\mu, K_1)\,\Gamma\int_{t_0}^{T} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\alpha} C(\mu, K_1)\, \Gamma \left(t_0^{-\frac{\alpha}{2}} - T^{-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

isto é,

$$|\mathcal{J}_1(\delta)| \leq \frac{1}{\alpha} C(\mu, K_1)\, \Gamma\, t_0^{-\frac{\alpha}{2}} \qquad \forall\, \delta > 0$$

para todo $t \geq t_0$.

Analogamente, por (4.84), sendo $\eta > 0$, tem-se

$$\mathcal{J}_2(\delta) \leq C(\Omega) \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} |\, u \,||\, u_{xx} \,|\, dxdt = C(\Omega) \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} \left(t^{-\frac{3}{4}+\frac{\eta}{2}} |\, u \,| \right) \left(t^{\frac{3}{4}-\frac{\eta}{2}} |\, u_{xx} \,| \right) dxdt$$

$$\leq C(\Omega) \Big(\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} t^{-\frac{3}{2}+\eta} |\, u \,|^2\, dxdt \Big)^{1/2} \Big(\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} t^{\frac{3}{2}-\eta} |\, u_{xx} \,|^2\, dxdt \Big)^{1/2},$$

pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5). Observando que, por (4.39),

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} t^{-\frac{3}{2}+\eta} |\, u \,|^2\, dxdt = \int_{t_0}^{T} t^{-\frac{3}{2}+\eta} \|\, u(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt =$$

$$= C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} t^{-2+\eta}\, dt,$$

obtemos, escolhendo $\eta = \frac{1}{2}$,

$$|\mathcal{J}_2(\delta)| \leq C(\mu, K_1)\, C(\Omega)\, t_0^{-1/4} \qquad \forall\, \delta > 0 \tag{4.91}$$

para todo $t \geq t_0$, em virtude do Teorema 4.14.

Finalmente, de (4.89), obtemos, por (4.42) e (4.45),

$$\mathcal{J}_3(\delta) \leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} \|\, u_x(\cdot, t) \,\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\, dt$$

$$\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} t^{-\frac{3}{2}}\, dt \;\leq\; C(\mu, K1)\, t_0^{-1/2}$$

ou seja,

$$|\mathcal{J}_3(\delta)| \;\leq\; C(\mu, K_1) t_0^{-1/2} \qquad \forall\, \delta > 0$$

para todo $t \geq t_0$. Portanto, de (4.85) e as estimativas acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta\Big(\theta(x, T)\Big)\, dx \leq \mathcal{I}(\delta) + \mathcal{J}_1(\delta) + \mathcal{J}_2(\delta) + \mathcal{J}_3(\delta)$$

$$\leq \mathcal{I}(\delta) + \frac{1}{\alpha} C(\mu, K_1)\, \Gamma\, t_0^{-\alpha/2} + C(\mu, K_1)\, C(\Omega)\, t_0^{-1/2} + C(\mu, K_1) t_0^{-1/2}$$

para todo $T \geq t_0$, $\delta > 0$.

Fazendo $\delta \to 0$, obtém-se

$$\| \theta(\cdot, T) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, \alpha, \Gamma, \Omega) \, (t_0^{-\alpha/2} + t_0^{-1/4} + t_0^{-1/2}) \tag{4.92}$$

para todo $T \geq t_0$, de onde segue o resultado. □

Uma vez mostrado o Lema acima, pode-se obter o seguinte resultado fundamental.

Teorema 4.16 *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (4.1) correspondente a um estado inicial $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, e $v(\cdot, t)$ solução de*

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = a(0)v_{xx} \tag{4.93}$$

com $v(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa que $u(\cdot, 0)$, então

$$\| u(\cdot, t) \; - \; v(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to +\infty. \tag{4.94}$$

Prova. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema (4.15), existe $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, K_1, \alpha, \Gamma, \Omega; \epsilon) \geq 1$ tal que

$$\| w(\cdot, t) - u(\cdot, t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad\qquad \forall \, t \geq \hat{t}_0 \tag{4.95}$$

onde $w(\cdot, t)$ é solução de

$$w_t + f'(0)w_x + f''(0)w \, w_x = a(0)w_{xx} \qquad t \geq \hat{t}_0, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{4.96}$$

$$w(\cdot, \hat{t}_0) = u(\cdot, \hat{t}_0) \tag{4.97}$$

Ora, $v(\cdot, t)$ é solução de

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = a(0)v_{xx}, \qquad\qquad t > \hat{t}_0, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{4.98}$$

com $v(\cdot, \hat{t}_0) = v_0$, onde $v_0(x) = v(x, \hat{t}_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e tem a mesma massa que $w(\cdot, \hat{t}_0)$, pois, pelos Teoremas 3.7 e 4.4,

$$\int_{\mathbb{R}} v_0(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} v(x, \hat{t}_0) \, dx = \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,\hat{t}_0)\,dx = \int_{\mathbb{R}} w(x,\hat{t}_0)\,dx.$$

Lembrando o Teorema 3.12, temos então

$$\| w(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

de modo que existe $t_0 \geq \hat{t}_0$ tal que

$$\| w(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, t \geq t_0. \tag{4.99}$$

Assim, por (4.95) e (4.99), obtemos

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| u(\cdot,t) - w(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} + \| w(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$$

para todo $t \geq t_0$, o que mostra (4.94). $\square$

Lembrando os resultados das Seções 2.4 e 3.4, obtém-se imediatamente os seguintes resultados.

Teorema 4.17 *Sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (4.1) com $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0)$ em $L^1(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa, então*

$$\| u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty. \tag{4.100}$$

Prova. Sejam $v(\cdot,t)$, $\hat{v}(\cdot,t)$ soluções de (4.93) com estados iniciais $v(\cdot,0) = u(\cdot,0)$, $\hat{v}(\cdot,0) = \hat{u}(\cdot,0)$. Pelo Teorema 4.16, tem-se

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty$$

$$\| \hat{u}(\cdot,t) - \hat{v}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty$$

enquanto, pelo Teorema 3.10, tem-se

$$\| v(\cdot,t) - \hat{v}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to \infty,$$

de modo que, usando

$$\begin{aligned} \| u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} + \| v(\cdot,t) - \hat{v}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} + \\ &+ \| \hat{v}(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

obtemos (4.100), como afirmado. □

Em particular, obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 4.18 *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1) correspondente a um estado inicial $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ com massa m, então*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to | m | \qquad \textit{ao} \qquad t \to +\infty. \tag{4.101}$$

Prova. Tomando $\tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ com massa m e sem trocar de sinal (i.e., $\tilde{u}(\cdot,0) \geq 0$ se $m \geq 0$ e $\tilde{u}(\cdot,0) \leq 0$ se $m \leq 0$), temos, pelo Teorema 4.5

$$\| \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} = | m | \qquad \forall\, t \geq 0,$$

obtendo-se então (4.101) por se ter, pelo Teorema 4.17, $\| u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ ao $t \to \infty$. □

Conclusão

As perspectivas futuras são investigar os resultados acima para equações mais gerais, como, por exemplo:

Em 1-D:

$$u_t + f(x,t,u)_x = (\, a(x,t,u)\, u_x\,)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$a(x,t,u) \geq \mu > 0$$

ou

$$u_t + f(u)_x = (\, a(u)\, u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$a(u) \geq 0$$

ou

$$u_t + f(u,v)_x = (\, a(u,v)\, u_x)_x, \quad a, b \geq \mu > 0$$

$$v_t + g(u,v)_x = (\, b(u,v)\, v_x)_x$$

Em n-D:

$$u_t + div\vec{f}(u) = div(\, A(u)\, \nabla u\,), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \; t > 0$$

$$(\, A(u)\vec{\varepsilon}, \, \vec{\varepsilon}\,) \geq \mu \,|\, \vec{\varepsilon}\,|^2 \quad \forall\, \vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$$

ou

$$u_t + div\vec{f}(\underline{x}, t, u) = div(\, A(\underline{x}, t, u)\, \nabla u\,), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \; t > 0$$

$$(\, A(\underline{x}, t, u)\vec{\varepsilon}, \, \vec{\varepsilon}\,) \geq \mu \,|\, \vec{\varepsilon}\,|^2 \quad \forall\, \vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n,$$

etc,etc.

Apêndice

Teorema A.1 [Desigualdade de Cauchy] *Sendo* $a, b \geq 0$, *tem-se*

$$ab \leq \epsilon\, a^2 + \frac{1}{4\,\epsilon}\, b^2 \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{A.1}$$

Prova. Tem-se, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{2\,\epsilon}\, a)\, \frac{b}{\sqrt{2\,\epsilon}} \leq \frac{2\,\epsilon\, a^2}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{b^2}{2\,\epsilon} \\ &= \epsilon\, a^2 + \frac{b^2}{4\,\epsilon} \end{aligned}$$

visto que $2ab \leq a^2 + b^2$. □

Teorema A.2 [Desigualdade de Young: Primeira Versão] *Sendo* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tem-se*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q \qquad \forall\, a, b \geq 0. \tag{A.2}$$

Prova. Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.2) vale trivialmente. Basta então considerar $a, b > 0$. Como e^x é convexa, tem-se

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left(1/p\, \ln\,(a^p) + 1/q\, \ln\,(b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\, \exp\left(\ln\,(a^p)\right) + \frac{1}{q}\, \exp\left(\ln\,(b^q)\right) \\ &= \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q, \end{aligned}$$

como afirmado. □

Teorema A.3 [Desigualdade de Young: Segunda Versão] *Sendo $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon\, a^p \,+\, C(\epsilon)\, b^q \qquad\qquad \forall\, a, b \geq 0, \;\; \epsilon > 0 \tag{A.3}$$

onde $C(\epsilon) = \frac{1}{q\,(p\,\epsilon)^{p/q}}$.

Prova. Tem-se, para $\epsilon > 0$ dado,

$$ab \leq (p\,\epsilon)^{1/p}\, a\, \frac{b}{(p\,\epsilon)^{1/p}} \leq \epsilon\, a^p \,+\, \frac{b^q}{q\,(p\,\epsilon)^{q/p}}$$

em virtude de (A.2). □

Teorema A.4 [Desigualdade de Hölder] *Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$, e sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$\|\, fg \,\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\, f \,\|_{L^p(\Omega)}\; \|\, g \,\|_{L^q(\Omega)} \tag{A.4}$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Prova. Se $p = 1$, $q = \infty$ ou $p = \infty$, $q = 1$, a desigualdade é óbvia; se $p, q > 1$ finitos são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, procede-se do seguinte modo: se $\|\, f \,\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|\, g \,\|_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.4) é óbvia; assim, vamos supor $\|\, f \,\|_{L^p(\Omega)} > 0$ e $\|\, g \,\|_{L^q(\Omega)} > 0$.

Definindo $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$, $\tilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) \;&:=\; \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ \tilde{g}(x) \;&:=\; \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, obtêm-se

$$\|\, \tilde{f} \,\|_{L^p(\Omega)} = 1, \qquad\qquad \|\, \tilde{g} \,\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

e, pela Desigualdade de Young (A.2),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\tilde{f}(x)|\,|\tilde{g}(x)|\,dx &\leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{p}\,|\tilde{f}(x)|^p + \frac{1}{q}\,|\tilde{g}(x)|^q\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\tilde{g}(x)|^q\,dx \\
&= \frac{1}{p}\,\|\tilde{f}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\,\|\tilde{g}\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^q(\Omega)}}\int_\Omega |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq 1$$

que é a desigualdade (A.4), como afirmado. □

Teorema A.5 [Desigualdade de Cauchy-Schwarz] *Sendo* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mensurável, então*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{A.5}$$

para toda $f, g \in L^2(\Omega)$.

Prova. Resulta de (A.4) tomando $p = q = 2$. □

Teorema A.6 [Desigualdade Triangular] *Sendo* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mensurável e* f, g *em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p \leq \infty$, *tem-se*

$$\|\, f + g \,\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\, f \,\|_{L^p(\Omega)} + \|\, g \,\|_{L^p(\Omega)} \tag{A.6}$$

Prova. Se $p = 1$ ou $p = \infty$, (A.6) é óbvia; se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: se $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, a desigualdade é óbvia; se $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} > 0$ tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se, pela Desigualdade de Hölder

(A.4),

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx \\
&\le \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\,\Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)\,dx \\
&\le \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|\,f(x)\,|\,dx \;+\; \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|\,g(x)\,|\,dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)\,q}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega |\,f(x)\,|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)\,q}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega |\,g(x)\,|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\Big)^{1/q}\Big[\Big(\int_\Omega |f(x)|^p\Big)^{1/p}+\Big(\int_\Omega |g(x)|^p\Big)^{1/p}\Big] \\
&= \|f+g\|^{p/q}_{L^p(\Omega)}\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}\Big)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f+g\|^{p-p/q}_{L^p(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

que é a Desigualdade (A.6) visto que $p-\frac{p}{q}=1$. □

Teorema A.7 [Desigualdade de Young para a Convolução] *Sendo* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para algum* $1\le p\le\infty$*, tem-se* $f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{A.7}$$

Prova. Se $p=1$ ou $p=\infty$, a desigualdade é óbvia; se $1<p<\infty$, procedemos do seguinte modo: tomando $1<q<\infty$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|f*g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dx\Big|^p\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\Big]^p\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{1/q}\,|f(y)|^{1/p}\,|g(x-y)|\,dy\Big]^p\,dx \\
&\le \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|^p\,dy\Big]\,dx \\
&= \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p\,dx\Big]\,dy \\
&= \|f\|^{1+p/q}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

onde se usou a desigualdade de Hölder (A.4) e o Teorema de Fubini (ver e.g. [11]). Logo, elevando na $1/p$, obtém-se

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que é a Desigualdade (A.7) visto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Teorema A.8 [Desigualdade de Interpolação] *Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ para $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, tem-se $f \in L^p(\Omega) \quad \forall\, p_1 \le p \le p_2$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{1-\theta} \tag{A.8}$$

onde $\theta \in [0,1]$ é dado por $\frac{1}{p} = \theta \frac{1}{p_1} + (1-\theta)\frac{1}{p_2}$.

Prova. Sendo $p_2 > 1$ finito, tem-se, pela Desigualdade de Hölder (A.4), usando que $\frac{1}{\frac{p_1}{p\theta}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p(1-\theta)}} = 1$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \\
&= \int_\Omega |f(x)|^{p\theta} \, |f(x)|^{p(1-\theta)} \, dx \\
&\le \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_1} \right)^{\frac{p\theta}{p_1}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} \right)^{\frac{p(1-\theta)}{p_2}} \\
&= \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{p\theta} \, \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{p(1-\theta)},
\end{aligned}$$

o que mostra (A.8) no caso $p_2 < \infty$. Se $p_2 = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \\
&\le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-p_1} \int_\Omega |f(x)|^{p_1} \, dx \\
&= \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-p_1} \, \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{p_1},
\end{aligned}$$

mostrando (A.8) neste caso. □

Teorema A.9 *Se $f \in C^0\Big([a,b]\Big)$ e $\int_a^b f(t)\,dt \le M$, para a, b, $M \in \mathbb{R}$, $a < b$, então existe $t_* \in [a,b]$ tal que*

$$f(t_*) \le \frac{M}{b-a}. \tag{A.9}$$

Prova. Se não houvesse tal t_*, teríamos

$$f(t) > \frac{M}{b-a} \qquad \text{para todo } t \in [a,b]$$

e então teríamos de ter

$$\int_a^b f(t)\,dt > \int_a^b \frac{M}{b-a}\,dt = M,$$

contradizendo a hipótese sobre f. □

Teorema A.10 [Desigualdade de Sobolev: exemplo 1] *Sendo* $\mathsf{u} \in \mathsf{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se* $\mathsf{u} \in \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$\| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\, \| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \, \| \mathsf{u}_x \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \tag{A.10}$$

Prova. Tem-se que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5),

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}(\overline{x})^2 &= 2 \int_{-\infty}^{\overline{x}} \mathsf{u}(x)\mathsf{u}_x(x)\,\mathsf{d}x \\
&\leq 2\Big(\int_{-\infty}^{\overline{x}} (\mathsf{u}(x))^2\,\mathsf{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_{-\infty}^{\overline{x}} (\mathsf{u}_x(x))^2\,\mathsf{d}x \Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathsf{u}(x))^2\,\mathsf{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathsf{u}_x(x))^2\,\mathsf{d}x \Big)^{1/2} \\
&= 2\, \| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})} \, \| \mathsf{u}_x \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$| \mathsf{u}(\overline{x}) | \leq \sqrt{2}\, \| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \, \| \mathsf{u}_x \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{R},$$

de onde segue (A.10). □

Teorema A.11 [Desigualdade de Sobolev: exemplo 2] *Sendo* $\mathsf{u} \in \mathsf{H}^1(\mathbb{R}) \cap \mathsf{L}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2}\, \| \mathsf{u} \|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R})}^{2/3} \, \| \mathsf{u}_x \|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})}^{1/3} \tag{A.11}$$

Prova. Tem-se que

$$\begin{aligned} \| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathsf{u}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \| \mathsf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathsf{u}(x)| \, dx \right)^{1/2} = \| \mathsf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1/2} \| \mathsf{u} \|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2}, \end{aligned}$$

o que implica, por (A.10),

$$\begin{aligned} \| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \| \mathsf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1/2} \| \mathsf{u} \|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2} \\ &\leq 2^{1/4} \| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4} \| \mathsf{u}_x \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4} \| \mathsf{u} \|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2}. \end{aligned}$$

Dividindo por $\| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4}$ e elevando ambos os lados a $\frac{4}{3}$, segue o resultado. □

Teorema A.12 [Desigualdade de Sobolev: exemplo 3] *Sendo* $\mathsf{u} \in H^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\| \mathsf{u} \|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2} \, \| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^{3/4} \, \| \mathsf{u}_x \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4} \tag{A.12}$$

Prova. Tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathsf{u}\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathsf{u}(x)|^4 \, dx \\ &\leq \|\mathsf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \, \|\mathsf{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

e, então, por (A.10),

$$\|\mathsf{u}\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \leq 2 \, \|\mathsf{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^3 \, \|\mathsf{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

o que mostra (A.12), como afirmado. □

Teorema A.13 [Desigualdade de Sobolev: exemplo 4] *Sendo* $u \in H^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\| \mathsf{u} \|_{L^6(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2} \, \| \mathsf{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} \, \| \mathsf{u}_x \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \tag{A.13}$$

Prova. Tem-se, pela desigualdade (A.10),

$$\begin{aligned}\| u \|_{L^6(\mathbb{R})} &\leq \| u \|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{2/3} \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \\ &\leq \left(\sqrt{2} \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \| u_x \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\right)^{2/3} \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3},\end{aligned}$$

que é a desigualdade (A.13). □

Teorema A.14 [Desigualdade de Sobolev: exemplo 5] *Sendo* $u \in H^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\| u_x \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \| u_{xx} \|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \tag{A.14}$$

Prova. Tem-se, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\| u_x \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} u_x\, u_x\, dx = -\int_{\mathbb{R}} u\, u_{xx} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u|\, |u_{xx}|\, dx \leq \| u \|_{L^2(\mathbb{R})} \| u_{xx} \|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5) acima. □

Teorema A.15 [Desigualdade de Sobolev: caso geral] *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *e* $j, m \in \mathbb{Z}$ *com* $0 \leq j < m$ *tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{r}$$

para $a \in [j/m, 1[$. *Então, existe constante* $C > 0$ *dependendo apenas de* m, j, n, p, q, r *tal que*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D^m u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^a \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{1-a} \tag{A.15}$$

para toda $u \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$. *Quando* $m < j + \frac{n}{q}$, *(A.15) vale também no caso de se ter* $a = 1$.

Prova. Ver A.Friedman [13], PDEs, pp. 22-27 (Seção 1.9). □

Referências Bibliográficas

[1] Z. Brzezniak and B. Szafirski. *"Asymptotic behaviour of L^1 norm of solutions to parabolic,"* Bull. Proc. Polish Acad. Sci. Math.,39 (1991), 1-10.

[2] J. M. Burgers. *"Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence,"* Nederl. Akad. Wefensh. Proc., 43 (1940), 2-12.

[3] J. D. Cole. *"On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics,"* Quart. Appl. Math., 9 (1951), 225-236.

[4] M. Crandall and L. Tartar. *"Some relations between nonexpansive and order preserving mappings,"* Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 385-390.

[5] E. Hopf. *"The partial differential equation $u_t + u\,u_x = \mu\,u_{xx}$,"* Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950), 201-230.

[6] H. O. Kreiss and J. Lorenz. *"Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations,"* Academic Press, New York, 1989.

[7] Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva. *"Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,"* (transl. from Russian), American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[8] R. Rudnicki. *"Asymptotic stability in L^1 of parabolic equations,"* J. Diff. Equations, 102 (1993), 391-401.

[9] L. C. Evans. *"Partial Differential Equations,"* Amer. Math. Society, Providence, 1998.

[10] M. Taylor. *"Partial Differential Equations,"* (3 vols), Springer, New York, 1996.

[11] H. L. Royden. *"Real Analysis,"* (2nd ed.)Macmillan, New York, 1968.

[12] W. Rudin. *"Real and Complex Analysis,"* (3nd ed.) Singapore: Mcgraw-Hill, 1986.

[13] A. Friedman. *"Partial Differential Equations,"* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[14] P. R. Zingano. *"Leis de Conservação com viscosidade: uma introdução,"* Institudo de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, RS, 1994.

[15] P. R. Zingano. *"Nonlinear L^2 stability under large disturbances,"* J. Comp. Appl. Math., 103 (1999), 207-219.

[16] P. R. Zingano and S.L. Steinberg. *"On the Hardy-Littlewood theorem for functions of bounded variation,"* SIAM J. Math. Anal., 33 (2002), 1199-1210.

[17] P. R. Zingano. *"Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations,"* (a aparecer, Comm. Pure Appl. Anal., 2003.)

[18] P. R. Zingano , J. Lorenz and T. Hagstrom. *"Decay of finite-energy solutions of advection-diffusion equation,"* (submetido).