

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**UM MODELO PARA A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA AÇÃO DO
VENTO SOBRE SEÇÕES DE PONTE**

Alexandre Luis Braun

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA

Área de Concentração: Estruturas

Porto Alegre

Abril, 2002

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Armando Miguel Awruch
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia civil

BANCA EXAMINADORA

- Professor Marcelo Maia Rocha
Dr. Techn. – Univ. Innsbruck, Áustria
- Professora Maria Ângela Vaz dos Santos
Dr. – CPGEC/UFRGS
- Professor Álvaro Luiz de Bortoli
Dr. – Dr. UFSC

“Pedi, e dar-se-vos-á; buscai, e encontrareis; batei, e abrir-se-vos-á. Porque, aquele que pede, recebe; e, o que busca, encontra: e, ao que bate, se abre”.

(S. Mateus, 7,7-8)

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas que colaboraram para a realização deste trabalho e não poderia deixar de mencioná-las.

Não posso iniciar sem agradecer ao Professor Armando Miguel Awruch pela orientação prestada, sem a qual esta dissertação não seria possível.

Quero agradecer também ao Professor Acir Mércio Loredou-Souza pela confiança em mim depositada. Espero ter correspondido à altura.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (*CESUP*) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, mais precisamente aos funcionários André, Magalí e Luiz, por todo o suporte e assistência prestados.

Ao doutorando e amigo Martin Kessler pela imprescindível colaboração durante todo o trabalho.

Um agradecimento especial ao meu pai Décio e minha irmã Daiane e de forma muito carinhosa à minha mãe Ivone, falecida durante a realização deste trabalho e a quem dedico esta dissertação. Que Deus a ilumine e guarde. Também ao meu avô João, pelo apoio nas horas difíceis. Ao meu padrinho Oscar, tia Lise, primos Sadi e Fernando pela confiança e incentivo constantes. Aos tios Chico e Iracy e madrinha Vera, sempre prontos para estender a mão. Enfim, a toda família, que é grande e seria necessário várias páginas para citar toda ela.

E, finalmente, termino agradecendo Àquele em quem confio e deposito toda a minha esperança: a Deus, que me ilumina e me conduz pelos caminhos da vida. Concluo, em forma de agradecimento, citando algumas palavras de Nosso Senhor Jesus Cristo: *“Eu sou a luz que vim ao mundo, para que todo aquele que crê em mim não permaneça nas trevas. E, se alguém ouvir as minhas palavras, e não crer, eu não o julgo: porque eu vim não para julgar o mundo, mas para salvá-lo”* (S. João 12,46-47).

Este trabalho é especialmente dedicado à memória de minha mãe, Ivone Braun.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
RESUMO.....	xii
ABSTRACT.....	xiii

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC)	1
1.3 Dinâmica das Estruturas Computacional (DEC)	3
1.4 Problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE)	4
1.5 Objetivos e Motivação do Presente Trabalho	5
1.6 Organização da Dissertação.....	6

CAPÍTULO 2

2 AS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DOS FLUIDOS	7
2.1 As Equações Gerais	7
2.2 As Equações da Dinâmica dos Fluidos para um Fluido Levemente Compressível num processo Isotérmico	10

CAPÍTULO 3

3 SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS.....	14
3.1 Introdução.....	14
3.2 Os Modelos de Turbulência Baseados na Hipótese de O. Reynolds	15
3.3 Simulação Direta da Turbulência e Simulação Direta de Grandes Vórtices com Modelos para Escalas Inferiores à Resolução da Malha	22

CAPÍTULO 4

4 FORMULAÇÃO DO ALGORITMO PARA A ANÁLISE DO ESCOAMENTO DE FLUIDO VISCOSO QUASE-INCOMPRESSÍVEL NUM PROCESSO ISOTÉRMICO	31
4.1 O Método Explícito de Dois Passos.....	31
4.2 Expansão das Equações de Conservação da Quantidade de Movimento em Séries de Taylor.....	33
4.3 Formulação do Método dos Elementos Finitos e do Algoritmo de Solução	36
4.4 O Processo de Suavização do Campo de Pressões	44

CAPÍTULO 5

5 ANÁLISE DA ESTRUTURA E DE SEU ACOPLAMENTO COM O FLUIDO	46
---	-----------

5.1 Análise da Estrutura.....	46
5.2 O Acoplamento do Fluido com a Estrutura. Condições de Compatibilidade e Equilíbrio.....	48
5.3 O Método de Newmark para Resolver a Equação de Equilíbrio Dinâmico da Estrutura.....	55
5.4 Cálculo de Valores e Coeficientes Característicos do escoamento e da Estrutura.....	58
5.5 Atualização Automática da Malha.....	61

CAPÍTULO 6

6 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	66
6.1 Apresentação.....	66
6.2 Exemplos-Teste.....	67
6.2.1 Análise do Escoamento em Cavidade Bidimensional.....	67
6.2.1.1 Cavidade 2D: Reynolds 100.....	69
6.2.1.2 Cavidade 2D: Reynolds 1000.....	72
6.2.1.3 Cavidade 2D: Reynolds 10000.....	75
6.2.1.4 Cavidade 2D: Observações Finais.....	78
6.2.2 Análise do Escoamento sobre um Cilindro Circular.....	81
6.2.2.1 Cilindro Circular Fixo: Reynolds 40.....	82
6.2.2.2 Cilindro Circular Fixo: Reynolds 1500.....	87
6.2.2.3 Cilindro Circular Móvel: Reynolds 1193.....	94
6.2.2.3 Cilindro Circular: Observações Finais.....	101
6.2.3 Análise do Escoamento Sobre um Cilindro Retangular.....	102
6.2.3.1 Cilindro retangular móvel: Reynolds 1000.....	102
6.2.3.1 Cilindro Retangular Móvel: Observações Finais.....	109
6.3 Ensaios Numéricos em uma Seção de Ponte.....	111
6.3.1 Seção Estacionária.....	112
6.3.2 Análise Aeroelástica.....	117
6.3.2.1 Drapejamento ou “Flutter”.....	117
6.3.3 Ensaios Numéricos em uma Seção de Ponte: Observações Finais....	122

CAPÍTULO 7

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	124
---	------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	126
--	------------

APÊNDICE A UMA BREVE REVISÃO SOBRE A AEROELASTICIDADE EM PONTES.....	134
A.1 Drapejamento ou “Flutter”.....	134

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 - Elemento isoparamétrico quadrilátero bi-linear. (a) Plano físico; (b) Plano computacional	36
Figura 4.2 - Pontos de integração utilizados no elemento quadrilátero isoparamétrico: coordenadas locais e fatores de “peso”	43
Figura 5.1 - Modelo de estrutura, constituído por um corpo rígido restringido por molas e amortecedores translacionais e rotacionais	46
Figura 5.2 - Movimento de corpo rígido. Os sub-índices “g” e “l” referem-se a quantidades medidas em relação a eixos globais e locais, respectivamente	49
Figura 5.3 - Elemento do domínio do fluido em contato com o corpo sólido	51
Figura 5.4 - Desenho esquemático do movimento da malha	64
Figura 6.1 - Cavidade 2D: geometria e condições de contorno.....	67
Figura 6.2 - Cavidade 2D: malha 50x50 elementos	69
Figura 6.3 - Cavidade 2D, Reynolds 100: campo de velocidades obtido	70
Figura 6.4 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 100: (a) presente trabalho; (b) Ghia et al. (1982).....	70
Figura 6.5 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 100: (a) presente trabalho; (b) Ramaswamy (1993)	71
Figura 6.6 - Cavidade 2D, Reynolds 100: perfis de velocidade; (a) perfil de V1 em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de V2 em $x_2 = 0.5$ m	72
Figura 6.7 - Cavidade 2D: malha 100x100 elementos	73
Figura 6.8 - Cavidade 2D, Reynolds 1000: campo de velocidades obtido	73
Figura 6.9 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 1000: (a) presente trabalho; (b) Ghia et al. (1982).....	74
Figura 6.10 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 1000: (a) presente trabalho; (b) Ramaswamy (1993)	74
Figura 6.11 - Cavidade 2D, Reynolds 1000: perfis de velocidade; (a) perfil de V1 em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de V2 em $x_2 = 0.5$ m	75
Figura 6.12 - Cavidade 2D, Reynolds 10000: campo de velocidades obtido	76
Figura 6.13 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 10000: (a) presente trabalho; (b) Ghia et al. (1982).....	76
Figura 6.14 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 10000: (a) presente trabalho; (b) Ramaswamy (1993)	77
Figura 6.15 - Cavidade 2D, Reynolds 10000: perfis de velocidade; (a) perfil de V1 em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de V2 em $x_2 = 0.5$ m	78
Figura 6.16 - Cilindro fixo, Reynolds 40: geometria e condições de contorno.....	82
Figura 6.17 - Cilindro fixo, Reynolds 40: malha utilizada.....	83
Figura 6.18 - Cilindro fixo, Reynolds 40: Linhas de corrente e campo de pressões ao longo do tempo; (a) $t = 2.20$ s, (b) $t = 4.00$ s, (c) $t = 6.50$ s, (d) $t = 9.00$ s.....	85
Figura 6.19 - Cilindro fixo, Reynolds 40: Detalhe das linhas de corrente em torno do cilindro em $t = 9.00$ s.....	85
Figura 6.20 - Histórico do coeficiente de arrasto (CD) sobre cilindro circular, Reynolds 40	86
Figura 6.21 - Resultados para coeficiente de pressão (CP) na superfície de cilindros circulares, Reynolds 40.....	87

Figura 6.22 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: geometria e condições de contorno.....	87
Figura 6.23 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: malha utilizada.....	88
Figura 6.24 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: Linhas de corrente e campo de pressões ao longo do tempo; (a) $t = 1.50$ s, (b) $t = 3.00$ s, (c) $t = 6.20$ s, (d) $t = 9.00$ s.....	90
Figura 6.25 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: Detalhe das linhas de corrente em torno do cilindro; (a) $t = 2.40$ s, (b) $t = 3.20$ s, (c) $t = 3.40$ s	91
Figura 6.26 - Histórico de V_2 a $1/5D$ após o cilindro, Reynolds 1500	92
Figura 6.27 - Histórico do coeficiente de arrasto (CD) sobre cilindro circular, Reynolds 1500.....	92
Figura 6.28 - Histórico do coeficiente de sustentação (CL) sobre cilindro circular, Reynolds 1500.....	93
Figura 6.29 - Histórico do coeficiente de momento (CM) sobre cilindro circular, Reynolds 1500.....	93
Figura 6.30 - Resultados para coeficiente de pressão (CP) na superfície de cilindros circulares, Reynolds 1500.....	94
Figura 6.31 - Cilindro móvel: geometria e condições de contorno.....	94
Figura 6.32 - Cilindro móvel: linhas de corrente e campo de pressões; (a) $t = 2.50$ s, (b) $t = 9.90$ s, (c) $t = 15.00$ s.....	96
Figura 6.33 - Cilindro móvel: detalhe das linhas de corrente e campo de pressões próximo ao cilindro em $t = 9.90$ s	97
Figura 6.34 - Histórico de V_2 a $1/5D$ após o cilindro, Reynolds 1193	97
Figura 6.35 - Cilindro móvel: históricos de CD para diferentes esquemas de análise	99
Figura 6.36 - Histórico de deslocamento transversal em cilindro móvel.....	100
Figura 6.37 - Resultados para coeficiente de pressão (CP) na superfície de cilindros circulares móveis, Reynolds 1193	100
Figura 6.38 - Cilindro retangular: geometria e condições de contorno usadas	103
Figura 6.39 - Cilindro retangular: malha utilizada.....	103
Figura 6.40 - Cilindro retangular: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração para as duas direções da seção.....	105
Figura 6.41 - Resultados de resposta da estrutura obtidos por Sarrate et al. (2001)	106
Figura 6.42 - Cilindro retangular, campos de pressão e linhas de corrente obtidas; (a) $t = 439$; (b) $t = 442$ e (c) $t = 448$	108
Figura 6.43 - Campos de pressão apresentados por Sarrate et al. (2001)	109
Figura 6.44 - Cilindro retangular: situação da malha de elementos finitos em $t = 448$	109
Figura 6.45 - Características gerais da ponte de Great Belt East: (a) seção; (b) elevação	111
Figura 6.46 - Great Belt East: geometria e condições de contorno para o caso estático	112
Figura 6.47 - Great Belt East: malha de elementos finitos usada.....	113
Figura 6.48 - Great Belt East: históricos de CD , CL e CM para diferentes ângulos de ataque.....	114
Figura 6.49 - Great Belt East: resultados numéricos e experimentais de coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de ataque	115
Figura 6.50 - Great Belt East: histórico de V_2 em $1/5$ de B após a seção.....	115
Figura 6.51 - Great Belt East: linhas de corrente para diferentes ângulos de ataque; (a) presente trabalho, (b) Kuroda (1997)	117

Figura 6.52 - Great Belt East: históricos de deslocamento angular para diferentes valores de velocidade reduzida.....	120
Figura 6.54 - Coeficiente de drapejamento obtido para a ponte de Great Belt East.....	121
Figura 6.55 - Resultados do método direto de análise de “flutter” para a ponte de Great Belt East.....	121
Figura A.1 - Características gerais de uma seção típica de ponte	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Constantes utilizadas na análise da cavidade segundo os casos de escoamento.....	68
Tabela 6.2 - Valores dos contornos de pressão transcritos do trabalho de Ramaswamy (1993)	71
Tabela 6.3 - Cilindro fixo, Reynolds 40: constantes físicas e geométricas usadas ...	83
Tabela 6.4 - Resultados para coeficiente de arrasto (CD) sobre cilindros circulares, Reynolds 40	86
Tabela 6.5 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: constantes físicas e geométricas usadas.....	88
Tabela 6.6 - Resultados para número de Strouhal em escoamento sobre cilindros, Reynolds 1500	92
Tabela 6.7 - Resultados para (CD), (CL) e (CM) sobre cilindros circulares, Reynolds 1500	93
Tabela 6.8 - Cilindro móvel: constantes utilizadas	95
Tabela 6.9 - Cilindro móvel: dados da estrutura.....	95
Tabela 6.10 - Resultados de número de Strouhal para cilindros móveis, Reynolds 1193	98
Tabela 6.11 - Resultados médios de CD para cilindros móveis, Reynolds 1193	99
Tabela 6.12 - Cilindro retangular: constantes usadas para o fluido e para a estrutura.....	104
Tabela 6.13 - Great Belt East: constantes usadas para o caso estático	113
Tabela 6.14 - Resultados de St para a ponte de Great Belt East.....	116
Tabela 6.15 - Great Belt East: constantes usadas para o fluido no estudo da instabilidade por “flutter”	119
Tabela 6.16 - Great Belt East: propriedades da estrutura usadas no estudo da instabilidade por “flutter”	119
Tabela 6.17 - Great Belt East: resultados da análise do modo de torção	120
Tabela 6.18 - Resultados de velocidade crítica de “flutter” para a ponte de Great Belt East.....	122

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas Minúsculas

α, δ	Coeficientes de ajuste do método de Newmark
δ_{ij}	Componentes do Delta de Kroenecker
ζ	Fonte interna de calor por unidade de volume
ε	Dissipação de energia turbulenta
ξ, η	Eixos de coordenadas naturais do domínio de Gauss-Legendre
θ	Componente angular do vetor de deslocamento da estrutura
$\dot{\theta}$	Componente angular do vetor de velocidade da estrutura
$\ddot{\theta}$	Componente angular do vetor de aceleração da estrutura
λ	Viscosidade volumétrica por unidade de massa específica do fluido
μ	Viscosidade dinâmica do fluido
μ_t	Viscosidade dinâmica turbulenta do fluido
ν	Viscosidade cinemática do fluido
ν_t	Viscosidade cinemática turbulenta do fluido
ρ	Massa específica do fluido
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões totais
τ_{ij}	Componentes do tensor de tensões viscosas
χ	Viscosidade volumétrica do fluido
ω_n	Freqüência circular natural da estrutura

Letras Gregas Maiúsculas

Γ_p	Contorno contendo condição de contorno de Dirichlet para a pressão
------------	-------	--

Γ_v	Contorno contendo condição de contorno de Dirichlet para a velocidade
Γ_{v_s}	Contorno sólido com condições de contorno de Dirichlet para a velocidade
Γ_{v_a}	Contorno aberto com condições de contorno de Dirichlet para a velocidade
Γ_σ	Contorno contendo condição de contorno de Neumann
Δ_i	Dimensão do filtro na direção do eixo x_i
Φ	Quantidade escalar genérica
Φ_i	Função de interpolação para o nó i
$\tilde{\Phi}$	Matriz-linha das funções de interpolação
$\tilde{\Omega}$	Domínio de análise

Letras Romanas Minúsculas

a_t	Número de Prandtl turbulento
a_0, \dots, a_7	Constantes usadas no método de Newmark
b_t	Constante adimensional usada no modelo de turbulência
c	Velocidade de propagação do som no fluido
c_p	Coeficiente de calor específico à pressão constante
c_v	Coeficiente de calor específico a volume constante
c_{ii}	Componentes da matriz de amortecimento da estrutura
e	Energia total
f_i	Componentes do vetor de forças de volume
f_n	Freqüência natural da estrutura
f_v	Freqüência de desprendimento de vórtices
k	Energia cinética específica do movimento das flutuações de velocidade
k_{ii}	Componentes da matriz de rigidez da estrutura
l_i	Projeção da distância entre o centróide do corpo a um ponto qualquer da sua superfície na direção do eixo x_i

m_i	Componentes da diagonal da matriz de massa da estrutura
n_j	Componentes do cosseno diretor
p	Pressão
t	Tempo
u	Energia interna específica
u_i	Componente do vetor de deslocamentos da estrutura na direção i
\dot{u}_i	Componente do vetor de velocidades da estrutura na direção i
\ddot{u}_i	Componente do vetor de acelerações da estrutura na direção i
v_i	Componente do vetor de velocidades do fluido na direção i
x_i	Componentes de coordenadas/eixos cartesianos
w_i	Componente do vetor de velocidades de malha na direção i

Letras Romanas Maiúsculas

A_i^*	Coeficientes de drapejamento ("flutter derivatives") na direção torcional da seção
$C_{\sim E}$	Matriz de amortecimento da estrutura
C_S	Coeficiente de Smagorinsky
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
C_M	Coeficiente de momento aerodinâmico
C_P	Coeficiente de pressão
F_j	Vetor de variáveis de fluxo
F_j^{ALE}	Vetor de variáveis de fluxo para uma descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana
$G(\tilde{x})$	Função filtro
G_j	Vetor de termos difusivos e de condutibilidade térmica

H_i^*	Coeficientes de drapejamento (“flutter derivatives”) na direção transversal da seção
J	Matriz jacobiana
K	Matriz de rigidez da estrutura
K_{ij}	Componentes do tensor de condutibilidade térmica
$(K_{ij})_t$	Componentes de difusividade turbulenta de calor ou massa
L	Matriz de translação
L_0	Dimensão de referência
L_{ij}	Componentes do termo de Leonard
M	Número de Mach
M	Matriz de massa da estrutura
M_x^c	Componente de momento do vetor de forças atuantes no centróide da estrutura
P	Vetor contendo os valores nodais de pressão
Q	Vetor de forças de volume e fonte (ou sumidouro) de calor
Q_E^c	Vetor de cargas atuantes no centróide da estrutura
Q_{Ei}^c	Componentes do vetor de forças sobre o centróide da estrutura
R	Constante universal dos gases ideais
Re	Número de Reynolds
S	Vetor de forças de contorno devidas à ação do fluido
St	Número de Strouhal
S_{ij}	Componentes do tensor de deformações
T	Temperatura
T	Matriz de translação expandida ao número de nós em contato com o corpo
$T'(\dot{\theta})$	Derivada da matriz de translação com relação a θ
U	Vetor de variáveis de campo
U	Vetor de deslocamento da estrutura

$\dot{\tilde{U}}_E$	<i>Vetor de velocidade da estrutura</i>
$\ddot{\tilde{U}}_E$	<i>Vetor de aceleração da estrutura</i>
\tilde{V}_i	<i>Vetor contendo os valores nodais de velocidade do fluido na direção i</i>
V_0	<i>Velocidade de referência</i>
V_α	<i>Velocidade não perturbada</i>
\tilde{X}_i	<i>Vetor contendo as coordenadas nodais na direção i</i>

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo formular e aplicar um modelo numérico para a análise aeroelástica de seções de ponte. O escoamento em torno de uma seção de ponte rígida, sem movimento, assim como o escoamento em torno de uma seção que possui deslocamentos verticais, horizontais e rotações devidas a efeitos de torção, são investigados para obter os coeficientes aerodinâmicos e o número de Strouhal. Procura-se também determinar as cargas devido ao vento que atuam sobre a estrutura, assim como a velocidade do vento que provoca o fenômeno de instabilidade dinâmica denominado “flutter”. Para a análise do escoamento bidimensional levemente compressível, utiliza-se um método explícito de dois passos com uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE). A turbulência é simulada diretamente para as grandes escalas, sendo que o modelo simples de Smagorinsky é incluído para simular as escalas de turbulência menores que a malha utilizada. O método dos elementos finitos é empregado para a discretização espacial. A estrutura é considerada como um corpo rígido com restrições elásticas segundo as componentes de deslocamento horizontais e verticais e segundo a rotação torcional. O acoplamento entre o fluido e a estrutura é efetuado aplicando as condições de compatibilidade e de equilíbrio na interface. A análise dinâmica da estrutura é efetuada através do método clássico de Newmark.

ABSTRACT

Formulation and application of a numerical model for aeroelastic analysis of bridge girder cross-sections is the mean of this work. The flow around stationary cross-sections, as well as cross-sections undergoing cross-wind vertical and horizontal (bending) displacements and rotatory (torsional) motion, are investigated for assessment of aerodynamic coefficients and Strouhal number. Determination of forced wind loads and flutter wind speed are also investigated. The two-dimensional of a slightly compressible fluid is analysed using an explicit two-step method and a Arbitrary Lagrangian-Eulerian (*ALE*) formulation. The turbulence is simulated using Large Eddy Simulation (*LES*). Smagorinsky's model is included as a sub-grid scale model. The finite element method is used for space discretization. The structure is considered as a rigid body with elastic restrains for horizontal and vertical displacement components and for torsional rotation. Coupling between fluid and stucture is accomplished by applying compatibility and equilibrium conditions at the fluid-solid interface. The structural dynamic analysis is performed using the classical Newmark's method.

1 INTRODUÇÃO

1.1 ASPECTOS GERAIS

Levando-se em conta que o objetivo final deste trabalho é o de formular e aplicar um modelo numérico para a análise aeroelástica de seções de pontes, o mesmo envolve várias áreas da Mecânica Aplicada e Computacional tais como:

- (a) Dinâmica dos Fluidos Computacional (*DFC*),
- (b) Dinâmica Estrutural (*DE*),
- (c) Interação Fluido-Estrutura (*IFE*).

Cada um destes campos é, considerando os mesmos individualmente, bastante complexo e engloba outras sub-áreas; conseqüentemente, pode-se imaginar o grau de dificuldade que significa tratar de simular problemas em que todas estas áreas atuam conjuntamente.

Pretende-se, inicialmente, proporcionar uma breve revisão sobre cada um dos campos mencionados anteriormente para, posteriormente, fazer referência ao problema específico que motiva este trabalho.

1.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL (*DFC*)

Na área da Dinâmica dos Fluidos Computacional, os métodos tradicionalmente usados são o Método das Diferenças Finitas (*MDF*) e o Método dos Volumes Finitos (*MVF*). Entretanto, após a publicação do primeiro trabalho de aplicação do Método dos Elementos Finitos (*MEF*), realizado por *Zienkiewicz & Cheung* (1965), numerosos trabalhos foram publicados utilizando esta técnica. Outro método que é empregado na simulação de escoamentos é o Método dos Elementos de Contorno (*MEC*), embora este seja mais recente e provavelmente menos popular.

Atualmente, esta área tem adquirido um desenvolvimento extraordinário em função da evolução dos algoritmos numéricos, da arquitetura dos computadores e das ferramentas de pré e pós-processamento, a tal ponto que sofisticados códigos comerciais foram implementados; entre eles, pode-se mencionar como exemplos, *FLUENT* (1998) e *ANSYS/FLOTRAN* (1992), nas áreas de volumes finitos e elementos finitos, respectivamente, sem desmerecer outros igualmente potentes.

Devido ao fato de que historicamente o *MEF* tem sido usado como ferramenta de análise de escoamentos no *PPGEC/UFRGS* e no *PROMECA* (González, 1993; Petry, 1993; Dos Santos, 1993; Teixeira, 1996; Burbridge, 1999; Azevedo, 1999; Rossa, 2000; Trapp, 2000; Teixeira, 2001) e à popularidade desta técnica na área da Mecânica Estrutural, campo no qual esta instituição teve e tem grande destaque, este trabalho também empregará o *MEF*, aproveitando experiências anteriores.

Considerando a meta fixada para este trabalho, é de interesse a simulação (através do *MEF*) de escoamentos de fluidos viscosos e incompressíveis. Seria extremamente longa uma relação de trabalhos que tratam deste tema, usando diversos enfoques, e que vem sendo apresentados desde o início dos anos 70. Entretanto, pode-se mencionar dois textos relativamente recentes, de excelente nível e que contém uma extensa bibliografia sobre o tema; são eles os livros de Reddy & Gartling (1994) e Gresho & Sani (1998).

Nesta dissertação, a análise do escoamento de fluidos incompressíveis e viscosos em regime transiente é efetuado através do enfoque da pseudo-compressibilidade, cujas idéias iniciais foram apresentadas por Chorin (1967). A consideração da pseudo-compressibilidade conduz a uma equação de conservação de massa que contém o termo da derivada da pressão no tempo. Este enfoque tem uma argumentação física no fato de que a condição de incompressibilidade total é ideal e que escoamentos reais apresentam algum nível de compressibilidade que resultam de uma velocidade de propagação do som que não é infinita.

Este enfoque foi usado, entre outros, por vários autores, com diversas variantes, tais como: Ramshaw & Mousseau (1990 e 1991), Ramshaw & Messina (1991), Kawahara & Hirano (1983), Petry & Awruch (1992), González & Awruch (1995) e Azevedo (1999).

Como os objetivos deste trabalho impõem trabalhar com escoamentos turbulentos com altos números de Reynolds, partiu-se para a simulação direta das grandes escalas e a implementação de um modelo simples para as pequenas escalas (de dimensões menores à resolução da malha). Foi adotado o modelo de *Smagorinsky* (1963), pela sua simplicidade de implementação computacional e pelo fato de que não requer uma significativa capacidade de memória adicional nem um tempo de processamento excessivo. Na terminologia em inglês, este enfoque é denominado de “*Large Eddy Simulation*” (*LES*).

Um dos inconvenientes do modelo aqui adotado é que a constante de *Smagorinsky*, como será visto mais adiante, permanece constante no tempo e espaço, quando na realidade foi constatado o contrário. O interesse por esta abordagem tem crescido significativamente nos últimos anos e numerosos trabalhos têm sido apresentados, e seria muito tedioso fazer uma relação destes. Como exemplos ilustrativos da crescente motivação na área podem ser mencionados os resultados do “*Workshop on LES of Flows Past Bluff Bodies*” realizado em Tegernsee (Alemanha) e publicados por *Rodi et al.* (1997) e os trabalhos do “*1st and 2nd ERCOFTAC Workshop on Direct and Large Eddy Simulation*” realizados em Guildford, Surrey, Reino Unido (1994) e em Grenoble, França (1997), respectivamente.

Convém mencionar que os modelos de turbulência tradicionais estavam baseados na hipótese de O. Reynolds (*Hinze*, 1975) e referências a respeito podem ser encontradas nos trabalhos de *Launder e Spalding* (1972), *Rodi* (1980) e *Markatos* (1986). Uma comparação entre diferentes modelos tradicionais e *LES*, em suas diferentes versões, é apresentado por *Murakami* (1997). No *PROMEC/UFRGS* o modelo clássico de *Smagorinsky* foi aplicado por *Petry & Awruch* (1997).

1.3 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS COMPUTACIONAL (*DEC*)

Esta área compartilha com a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*DFC*) muitos aspectos em comum no que se refere à evolução dos algoritmos, da arquitetura dos computadores e das ferramentas de pré e pós-processamento. Também neste campo, existem códigos comerciais altamente sofisticados e potentes, entre os quais pode-se mencionar, entre outros, *ANSYS* (1992),

MSC/NASTRAN (1998) e *ABAQUS* (1998). Um número extraordinário de trabalhos, abordando diferentes tópicos, têm sido publicados em periódicos e apresentados em eventos científicos. Por esta razão, não há muito sentido em enumerar os mesmos. Entretanto, já existem vários livros de texto com uma ampla referência bibliográfica tratando especificamente sobre Dinâmica das Estruturas Computacional; entre outros, pode-se mencionar os livros de *Clough & Penzien* (1993), *Petyt* (1990), *Argyris & Mlejneck* (1991) e *Paz* (1986).

Nesta dissertação, o modelo computacional para a estrutura será muito simples, sendo a mesma tratada como um corpo rígido com restrições elásticas de deslocamento e rotação torcional. Assim sendo, a análise dinâmica do corpo é relativamente menos importante, do ponto de vista da sua implementação, do que a análise do escoamento e da forma de implementar o acoplamento entre o corpo sólido e o fluido.

1.4 PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA (IFE)

O termo “interação fluido-estrutura” refere-se tanto a fluidos contidos em estruturas como o caso de estruturas imersas em fluidos. Nesta dissertação, apenas o segundo caso será analisado.

Como a natureza das equações que governam a Mecânica dos Sólidos e a Dinâmica dos Fluidos são diferentes, os primeiros códigos foram desenvolvidos especialmente para um ou outro campo, separadamente, e os problemas de *IFE* eram resolvidos como dois problemas mutuamente independentes. Este enfoque justifica-se em casos em que a estrutura é muito pesada e rígida de forma que não se mova nem se deforme sob a ação de um escoamento transiente. Entretanto, este enfoque pode conduzir, em alguns casos, à predição de cargas erradas atuando sobre a estrutura, sendo necessário analisar o problema levando em conta a interação conjunta entre o corpo e o fluido.

Diversos grupos de pesquisa em Universidades e Laboratórios têm analisado vários tipos de problemas de interação fluido-estrutura usando métodos numéricos considerando a estrutura como um meio deformável, incluindo os efeitos da não-linearidade geométrica. Uma boa pesquisa bibliográfica a respeito pode ser

encontrada em Azevedo (1999). Entretanto, como o enfoque do presente trabalho é diferente, serão mencionados apenas aqueles que serviram de antecedente ao mesmo.

Um dos primeiros trabalhos que analisaram a interação do fluido com a estrutura, estudando as vibrações induzidas por vórtices e considerando a estrutura como rígida com restrições elásticas, foi o de *Hirano et al.* (1984). A interação é implementada através da imposição das condições de equilíbrio e de compatibilidade na interface. Outros trabalhos na mesma linha foram apresentados por *Huerta & Liu* (1988), *Nomura & Hughes* (1992) e *Nomura* (1994). Todos eles estão baseados em pequenas rotações torcionais. Recentemente, *Sarrate et al.* (2001) implementaram um modelo no qual é considerada a dependência não-linear com respeito às rotações torcionais. No PPGEC/UFRGS, problemas com este tipo de enfoque foram apresentados por *González* (1993) e *Petry* (1993).

1.5 OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

O principal objetivo deste trabalho é implementar e aplicar um modelo numérico para analisar seções de pontes sujeitas à ação do vento. Com este modelo, pretende-se calcular os coeficientes aerodinâmicos das seções considerando que as mesmas permanecem fixas ou estão sujeitas a deslocamentos e uma rotação torcional. Pretende-se também estudar situações onde o problema de instabilidade dinâmica possa apresentar-se.

Hirano et al. (1984) figuram entre os primeiros autores que estudaram numericamente o escoamento em torno de uma seção de uma ponte. Mais recentemente, este tema tornou-se objeto de estudo de numerosos pesquisadores, entre os quais pode-se mencionar alguns, tais como: *Fujiwara et al.* (1993), *Hirano et al.* (1994), *Lee et al.* (1997), *Kuroda* (1997), *Larsen & Walther* (1997) e *Selvam et al.* (1998).

Esta dissertação foi justamente motivada pela atenção que o tema vem merecendo nos últimos anos e pela possibilidade de complementar os estudos numéricos com ensaios experimentais no túnel de vento do Laboratório de Aerodinâmica das Construções (LAC) da UFRGS.

1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada da seguinte forma; depois de uma breve introdução ao tema apresentado no presente capítulo, o Capítulo 2 trata das equações da Dinâmica dos Fluidos, particularizando para as equações que serão usadas neste trabalho. No Capítulo 3 são estudados os modelos de turbulência empregados usualmente na simulação numérica de escoamentos turbulentos. No capítulo 4 é desenvolvido o algoritmo numérico que será utilizado, colocando o mesmo no contexto do Método dos Elementos Finitos (*MEF*). No Capítulo 5 é formulado o modelo de acoplamento entre o corpo sólido e o fluido e a sua incidência na análise dinâmica da estrutura. No Capítulo 6 são apresentados exemplos de aplicação. No Capítulo 7 são indicadas conclusões do trabalho, assim como sugestões para futuras pesquisas, seguida da Bibliografia referenciada no texto. Finalmente, no Apêndice A é apresentada uma breve revisão sobre o tema da aeroelasticidade aplicada a pontes.

2 AS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DOS FLUIDOS**2.1 AS EQUAÇÕES GERAIS**

As equações que governam o escoamento de um fluido viscoso compressível numa descrição Euleriana são as seguintes (*Schlichting*, 1979):

(i) Equações de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i = 0 \quad (i, j = 1,2,3) \quad (2.1.1)$$

(ii) Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \quad (2.1.2)$$

(iii) Equação de conservação da energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] - \rho \zeta = 0 \quad (i, j = 1,2,3) \quad (2.1.3)$$

(iv) Equação de estado:

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad (2.1.4)$$

(v) Equações constitutivas:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \chi \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1,2,3) \quad (2.1.5)$$

onde:

$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$: componente da velocidade na direção do eixo x_i .

$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$: massa específica.

$p = p (x_1, x_2, x_3, t)$: pressão.

$e = e (x_1, x_2, x_3, t)$: energia total.

$T = T (x_1, x_2, x_3, t)$: temperatura.

$f_i = f_i (x_1, x_2, x_3, t)$: componente da força por unidade de volume na direção do eixo x_i .

$\zeta = \zeta (x_1, x_2, x_3, t)$: fonte interna de calor por unidade de volume.

$\tau_{ij} = \tau_{ij} (x_1, x_2, x_3, t)$: componentes do tensor de tensões viscosas.

$\mu = \mu (T)$: viscosidade dinâmica.

$\chi = \chi (T)$: viscosidade volumétrica.

$K_{ij} = K_{ij} (T)$: componentes do tensor de condutibilidade térmica.

δ_{ij} : delta de Kroenecker.

Todas estas equações são válidas num domínio espacial Ω e num intervalo de tempo $[0, t_f]$, e vêm acompanhadas de condições de contorno essenciais e naturais e de condições iniciais (ou seja, para $t = 0$).

A energia total específica $e = e (x_1, x_2, x_3, t)$ é dada por:

$$e = u + \frac{1}{2} v_i v_i \quad (i = 1,2,3) \quad (2.1.6)$$

onde $u = u (x_1, x_2, x_3, t)$ é a energia interna específica e $\frac{v_i v_i}{2}$ é a energia cinética específica. Por outro lado, tem-se que:

$$u = c_v T = e - \frac{1}{2} v_i v_i \quad (i = 1,2,3) \quad (2.1.7)$$

onde c_v é o coeficiente de calor específico a volume constante.

Para gases perfeitos, a equação de estado (2.1.4) é dada por:

$$p = \rho u(\gamma - 1) \quad (2.1.8)$$

onde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, sendo c_p o calor específico a pressão constante.

Em geral, é comum utilizar a hipótese de Stokes, segundo a qual $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$.

Por outro lado, a dependência entre μ e T e entre K_{ij} e T é descrita pela lei de Sutherland, que vem dada por (White, 1991):

$$\mu = \mu_{ref} \frac{S_S + T_{ref}}{S_S + T} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{3/2} \quad (2.1.9)$$

onde μ_{ref} e T_{ref} são valores de referência para a viscosidade e a temperatura, respectivamente, e S_S é uma propriedade do fluido; para o ar, por exemplo, $S_S = 110,4^\circ \text{K}$.

Em forma compacta, as equações (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial x_j} - \tilde{Q} = 0 \quad (j = 1,2,3) \quad (2.1.10)$$

onde:

$$\tilde{U} = \begin{Bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho \\ \rho e \end{Bmatrix} ; \quad \tilde{F}_j = \begin{Bmatrix} \rho v_1 v_j + p \delta_{1j} \\ \rho v_2 v_j + p \delta_{2j} \\ \rho v_3 v_j + p \delta_{3j} \\ \rho v_j \\ v_j (\rho e + p) \end{Bmatrix} ; \quad \tilde{G}_j = \begin{Bmatrix} \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ 0 \\ \tau_{ij} v_j + K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{Q} = \begin{Bmatrix} \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ 0 \\ \rho \zeta \end{Bmatrix} \quad (j = 1,2,3) \quad (2.1.11)$$

Quando no lugar de uma descrição Euleriana utiliza-se uma descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE), a expressão (2.1.10) fica expressa da seguinte forma (*Burbridge*, 1999):

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_j^{ALE}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_j} - \tilde{Q} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.1.12)$$

onde w_j é a componente da velocidade da malha na direção da coordenada x_j , sendo:

$$\tilde{F}_j^{ALE} = \left\{ \begin{array}{l} \rho v_1 (v_j - w_j) + p \delta_{1j} \\ \rho v_2 (v_j - w_j) + p \delta_{2j} \\ \rho v_3 (v_j - w_j) + p \delta_{3j} \\ \rho (v_j - w_j) \\ \rho e (v_j - w_j) + p \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad (j=1,2,3) \quad (2.1.13)$$

2.2 AS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DOS FLUIDOS PARA UM FLUIDO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL NUM PROCESSO ISOTÉRMICO

No presente trabalho são admitidas as seguintes hipóteses:

- (a) O escoamento é bidimensional.
- (b) O escoamento se produz num processo isotérmico.
- (c) O fluido é viscoso e quase-incompressível.
- (d) Os coeficientes de viscosidade molecular μ e λ são constantes.
- (e) As forças de campo são desprezíveis.

Em função da primeira hipótese, o escoamento se produz no plano formado pelos eixos coordenados x_1 e x_2 , resultando assim que $v_3 = w_3 = 0$ em todo o domínio.

Levando em conta a segunda hipótese, pode-se eliminar a equação de conservação da energia.

A quarta hipótese não admite a dependência de μ e λ em relação à temperatura, o que é consistente com a segunda hipótese, segundo a qual a temperatura permanece constante em todo o domínio.

A quinta hipótese significa que $f_i \cong 0$.

Em relação à terceira hipótese, a equação da continuidade (2.1.2) pode ser expressa em termos da pressão, levando em conta que (*White*, 1991):

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial x_j} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \quad (2.2.1)$$

sendo c a velocidade de propagação do som no fluido que está sendo analisado.

Levando em consideração (2.1.2) e (2.2.1), tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{v_j}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2.2)$$

A expressão anterior pode também ser escrita da seguinte forma, já considerando um escoamento bidimensional (*Petry*, 1993):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2) \quad (2.2.3)$$

Numa descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE), a equação (2.2.3) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2) \quad (2.2.4)$$

Levando em conta (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.5), as equações de conservação da quantidade de movimento podem ser escritas, em forma não conservativa, como segue:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (i, j, k = 1,2) \quad (2.2.5)$$

onde $v = \frac{\mu}{\rho}$ e $\lambda = \frac{\chi}{\rho}$. Em (2.2.5) foi considerado que μ e χ são constantes e que $f_i \cong 0$.

Para uma descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana, tem-se (González, 1993):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.2.6)$$

As expressões (2.2.3) a (2.2.6) são válidas no domínio em estudo Ω e no intervalo de tempo $[0, t_f]$, e as seguintes condições iniciais devem ser adicionadas:

$$v_i(x_1, x_2, 0) = v_i^0 \quad \text{em } \Omega \quad (i = 1, 2) \quad (2.2.7)$$

$$p(x_1, x_2, 0) = p^0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.8)$$

As condições de contorno do problema são dadas por:

$$v_i = \tilde{v}_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (i = 1, 2) \quad (2.2.9)$$

$$p = \tilde{p} \quad \text{em } \Gamma_p \quad (2.2.10)$$

$$\left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \chi \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] n_j = \tilde{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.2.11)$$

onde \tilde{v}_i é a componente da velocidade na direção do eixo x_i , com um valor prescrito na parte Γ_v do contorno, \tilde{p} é o valor prescrito da pressão na parte Γ_p do contorno e \tilde{t}_i é a componente, segundo o eixo x_i , das forças de contorno num ponto do contorno Γ_σ , sendo n_j o cosseno de direção da normal a Γ_σ no ponto considerado com respeito ao eixo x_j .

As equações (2.2.3) e (2.2.5) podem ser adimensionalizadas, ficando:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \bar{x}_k} \right) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.2.13)$$

onde:

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{V_\alpha} \quad ; \quad \bar{p} = \frac{P}{\rho_\alpha V_\alpha^2} \quad ; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\alpha} \quad ; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{L_\alpha} \quad ; \quad \bar{t} = \frac{tV_\alpha}{L_\alpha}$$

$$Re = \frac{V_\alpha L_\alpha}{\nu} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{V_\alpha L_\alpha} \quad ; \quad M_\alpha = \frac{V_\alpha}{c}$$

sendo Re o número de Reynolds e M_α o número de Mach na zona não perturbada do escoamento. V_α , L_α e ρ_α são os valores de referência da velocidade, do comprimento e da massa específica, respectivamente.

3 SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS

3.1 INTRODUÇÃO

O escoamento turbulento caracteriza-se por um comportamento difusivo, dissipativo, randômico, tridimensional e transiente. A turbulência poderia ser considerada como um movimento rotativo (que se manifesta com maior intensidade quanto maior for o número de Reynolds) com um largo espectro de tamanhos de vórtices e de freqüências de flutuações de velocidade e pressão.

Num escoamento turbulento, os vetores de vorticidade alinham-se em todas as direções. Os maiores vórtices associam-se às menores freqüências de flutuação e são determinados pelas condições de contorno do escoamento, tendo dimensões que são da mesma ordem de grandeza que o domínio do escoamento. Já os vórtices menores estão associados às freqüências mais altas de flutuação e são determinados pelas forças viscosas. A largura do espectro de freqüências, ou seja, a relação entre as dimensões dos maiores e menores vórtices, cresce com o número de Reynolds.

Os grandes vórtices interagem com o escoamento principal (pois têm a mesma escala) extraindo energia cinética do mesmo e transferindo a mesma para vórtices de escala imediatamente inferior, e destes para os vórtices correspondentes à próxima escala, num processo em “cascata”, até que finalmente as forças viscosas tornam-se ativas e dissipam a energia. Contudo, é importante destacar que apesar de que o movimento de grandes escalas determina a quantidade de energia a ser dissipada, a dissipação é um fenômeno viscoso e ocorre nas menores escalas. Desta forma, quanto menor forem os efeitos da viscosidade, menor serão os efeitos dos vórtices de dissipação de energia com relação às grandes escalas de turbulência (isto se intensifica à medida que o número de Reynolds cresce).

Embora os vórtices de grande escala sejam os responsáveis pela anisotropia do fenômeno da turbulência, no processo em “cascata de energia” a sensibilidade da direção é reduzida. Quando o número de Reynolds é elevado, a diferença das

grandes e pequenas escalas cresce e as características anisotrópicas diminuem, nas pequenas escalas, de tal forma que pode-se dizer que neste nível existe uma “isotropia local” do movimento turbulento.

Como na maioria dos problemas reais de interesse em Engenharia, o sistema de equações diferenciais em derivadas parciais não linear, apresentado no capítulo anterior, não tem solução exata; deve-se então usar métodos numéricos tais como Diferenças Finitas, Volumes Finitos ou Elementos Finitos para obter uma solução aproximada, seja o escoamento laminar ou turbulento.

No caso de escoamentos turbulentos, o sistema de equações que governa o problema, e que foi apresentado no capítulo anterior, deveria fornecer uma solução universal e independente de parâmetros empíricos para todas as escalas de turbulência. Isto implicaria em resolver um problema através da “Simulação Direta da Turbulência”; entretanto, seria necessário usar malhas muito refinadas no processo numérico, dando lugar a um número muito elevado de incógnitas e intervalos de tempo muito pequenos. Este aspecto constitui ainda um desafio para os computadores mais avançados da atualidade. Por esta razão, deve-se recorrer aos modelos de turbulência.

Os modelos de turbulência têm-se tornado mais sofisticados com o passar do tempo, na medida em que foi-se obtendo mais dados experimentais para calibrar parâmetros empíricos, melhores algoritmos para a solução numérica e avanços na arquitetura dos computadores. Embora ainda hoje os mesmos sejam válidos e necessários, espera-se que, num futuro próximo, todos os problemas possam ser resolvidos através da “Simulação Direta da Turbulência”, que permite uma definição mais clara e próxima da realidade dos problemas.

3.2 OS MODELOS DE TURBULÊNCIA BASEADOS NA HIPÓTESE DE O. REYNOLDS

As pesquisas sobre modelos de turbulência iniciaram-se na década de 20 com Prandtl, que introduziu o conceito de “comprimento de mistura”, cuja hipótese relaciona os termos de transporte turbulento com os valores locais das quantidades de escoamento médio.

A partir da década de 40, o desenvolvimento de modelos de turbulência teve um grande impulso; porém, este aspecto acentuou-se a partir da década de 60 com o desenvolvimento dos computadores.

Muitos dos modelos de turbulência utilizados atualmente baseiam-se numa aproximação estatística proposta por O. Reynolds (*Hinze, 1975*). Neste enfoque, calculam-se as médias das equações que governam o problema em escalas de tempo muito maiores que aquelas envolvidas no movimento turbulento. As equações resultantes descrevem o comportamento médio da velocidade, pressão, temperatura e, eventualmente, da concentração de poluentes (que é uma quantidade escalar). Esta aproximação é adequada para escoamentos médios estacionários nos quais os detalhes das flutuações das variáveis mencionadas acima não são importantes, sendo suficiente simular seus efeitos.

O processo de média no tempo leva ao aparecimento de correlações estatísticas envolvendo as flutuações das variáveis e que estão associadas às tensões de Reynolds, que constituem novas incógnitas, não existindo uma forma direta de obter os valores destas. Os termos desconhecidos representam o transporte de quantidade de movimento, calor e massa médios devido ao movimento turbulento. Equações exatas de transporte turbulento podem ser desenvolvidas, gerando como novas incógnitas correlações de mais alta ordem, sendo que este processo ocorre de forma sucessiva. Para o fechamento das equações é necessário empregar um modelo de turbulência, o que em geral é feito com a adição de informações empíricas, que se traduzem em equações de transporte adicionais envolvendo parâmetros de turbulência, tais como: energia turbulenta, vorticidade turbulenta, viscosidade turbulenta e tensões de Reynolds.

As equações para valores médios do escoamento são obtidas aplicando-se a hipótese de Reynolds às equações de Navier-Stokes, de energia e de transporte de massa. A mesma descreve os valores instantâneos das variáveis do movimento turbulento como uma variação aleatória em torno dos valores médios no tempo, ou seja:

$$\begin{aligned}
v_i &= \bar{v}_i + v_i' \\
p_i &= \bar{p}_i + p_i' \\
\Phi &= \bar{\Phi} + \Phi' \\
\rho &= \bar{\rho} + \rho'
\end{aligned}
\tag{3.2.1}$$

onde a barra sobre a incógnita indica o valor médio e a aspa indica a flutuação instantânea em torno da média. Em (3.2.1), Φ é uma quantidade escalar que pode ser a temperatura ou a concentração de alguma substância.

Define-se o operador de média como:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \Phi dt
\tag{3.2.2}$$

onde Δt é suficientemente grande em relação ao tempo envolvido no movimento turbulento, com a média das flutuações nula, ou seja:

$$\bar{\Phi}' = 0
\tag{3.2.3}$$

Introduzindo (3.2.1) a (3.2.3) em (2.1.1) a (2.1.7), tem-se:

(i) Equações de conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \overline{v_i' v_j'}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu 2S_{ij} + \chi S_{kk} \delta_{ij}) - \\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' v_i' v_j'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' v_j' v_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' v_i' v_j'}) \right] - \bar{\rho} f_i = 0
\end{aligned}
\tag{3.2.4}$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad S_{kk} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{v}_k'}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0
\tag{3.2.5}$$

(ii) Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' v_j'}) = 0
\tag{3.2.6}$$

(iii) Equação de conservação de quantidades escalares:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j\bar{\rho}\bar{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho v'_j\Phi'}) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_{ij}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_j}\right) - \\ & \left[\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho'\Phi'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j\overline{\rho'\Phi'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho'v'_j\Phi'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho'v'_j\Phi'}) \right] - \bar{\rho}\zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Neste caso, a equação da energia foi substituída por uma equação de transporte clássica (onde o termo de dissipação viscosa da energia foi omitido).

(iv) Equação de estado (gás ideal):

$$\bar{p} = R\bar{\rho}\bar{T} = R(\bar{\rho}\bar{T}) + R(\overline{\rho'T'}) \quad (3.2.8)$$

onde R é a constante dos gases ideais.

Para um fluido incompressível, considerando-se nulas as flutuações da massa específica ρ' , os termos entre colchetes em (3.2.4) e (3.2.7) desaparecem, assim como o último termo em (3.2.6). Neste caso, tem-se o seguinte sistema de equações:

(i) Equações de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu S_{ij} + \chi S_{kk} \delta_{ij}] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho v'_i v'_j}) - \rho f_i = 0 \quad (3.2.9)$$

(ii) Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2.10)$$

O termo $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ foi incluído pensando na possibilidade de tratar um fluido quase-incompressível.

(iii) Equação de conservação de quantidades escalares:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \Phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_{jj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial(\overline{\rho v_j' \Phi'})}{\partial x_j} - \rho \zeta = 0 \quad (3.2.11)$$

onde foi considerado que $\bar{\rho} = \rho$; $\bar{v}_j = v_j$; $\bar{p} = p$.

Os termos $-\overline{\rho v_i' v_j'}$ da expressão (3.2.9) são conhecidos como componentes das tensões de Reynolds, enquanto que os termos $-\overline{\rho v_j' \Phi'}$ representam o transporte da quantidade Φ devido ao movimento turbulento.

Uma das formas de modelar as tensões de Reynolds e os termos $-\overline{\rho v_j' \Phi'}$ é usando os conceitos de viscosidade turbulenta, proposto por Boussinesq em 1877 (ver *Lauder & Spalding, 1972*), e o de difusividade turbulenta. Para uma situação geral de escoamento, o conceito de viscosidade turbulenta pode ser utilizado da seguinte forma:

$$-\overline{\rho v_i' v_j'} = \mu_t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.2.12)$$

onde μ_t é a viscosidade turbulenta e k é a energia cinética específica do movimento das flutuações.

A viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento e não do fluido, variando de ponto a ponto com valores de pelo menos três ordens de grandeza em relação à viscosidade molecular (que é uma propriedade do fluido).

Em analogia ao transporte turbulento das equações de conservação da quantidade de movimento, assume-se que o transporte turbulento de massa e de calor é proporcional ao gradiente da quantidade transportada, ou seja:

$$-\overline{\rho v_j' \Phi'} = (K_{jj})_t \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_j} \quad (3.2.13)$$

onde $(K_{jj})_t$ é a difusividade turbulenta de calor ou massa, que é uma propriedade do escoamento e que se relaciona com a viscosidade turbulenta, no caso isotrópico, da seguinte forma:

$$(K_{jj})_i = \frac{\mu_t}{\sigma_i} \quad (3.2.14)$$

sendo σ_i o número de Prandtl ou de Schmidt, dependendo se é tratado um problema de transferência de calor ou de transporte de massa, respectivamente.

O termo contendo a energia cinética específica do movimento das flutuações, utilizado em (3.2.12) e que não foi empregado por *Launder & Spalding* (1972), foi introduzido pensando nas tensões normais de Reynolds. Pode-se observar que sem este termo teria-se que:

$$\overline{\rho v_1^2} + \overline{\rho v_2^2} + \overline{\rho v_3^2} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \right) \quad (3.2.15)$$

o que indica que, num fluido totalmente incompressível, a soma das tensões normais é nula, pois a divergência da velocidade média é nula. Contudo, como as tensões normais de Reynolds são positivas, a sua soma não é nula e como cada uma equivale a duas vezes a energia cinética do movimento das flutuações, tem-se, adicionando as três componentes, que:

$$2\rho k = 3(\overline{\rho v_1^2} + \overline{\rho v_2^2} + \overline{\rho v_3^2}) \quad (3.2.16)$$

sendo que a energia cinética específica de movimento das flutuações é dada por:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) \quad (3.2.17)$$

Os processos turbulentos são dependentes do problema, sendo que em nível de grandes escalas, dependem da geometria, enquanto que, em nível de pequenas escalas, dependem dos efeitos viscosos, rotacionais e de flutuações.

A única forma de prescindir de um modelo de turbulência seria usando as equações de conservação de movimento, de massa e de transferência de calor e/ou massa no contexto de uma malha espacial e temporal que capture todas as escalas de vórtices, o que implicaria em um esforço computacional muito grande em termos de memória e de tempo de processamento, sendo que em alguns casos (especialmente quando o número de Reynolds é alto) é impossível representar todas

as escalas de vórtices com a arquitetura dos computadores atuais. Possivelmente, com a utilização do paralelismo massivo num ambiente com numerosos processadores, esta meta será atingida num breve espaço de tempo.

Os modelos de turbulência descrevem aproximadamente o escoamento e requerem um conjunto de constantes empíricas que dependem do tipo de escoamento. Os modelos de turbulência mais universais, ou seja, aqueles que contemplam um número maior de escoamentos, podem não ser úteis para um determinado tipo de fluxo e requerem, em geral, mais tempo de processamento, além de serem mais complexos. Resumindo, pode-se dizer que o melhor modelo a ser utilizado depende do problema a ser tratado.

Launder & Spalding (1972) classificaram os modelos de turbulência em três grupos principais, que são os seguintes:

- Modelos com equações algébricas de viscosidade turbulenta (usando, por exemplo, o conceito de comprimento de mistura de Prandtl ou o de similaridade de Von Kármán ou, ainda, alguma outra equação algébrica para o cálculo de μ_t).
- Modelos com equações diferenciais para o cálculo de μ_t .
- Modelos com equações diferenciais de transporte para calcular diretamente as tensões de Reynolds.

Uma outra classificação dos modelos de turbulência foi feita por *Rodi (1980)* e que é função do número de equações diferenciais utilizadas para determinar μ_t ou, diretamente, as tensões de Reynolds. Desta forma, tem-se:

- Modelos de “zero equações” ou “nenhuma equação”, que são aqueles que permitem determinar μ_t (baseado na hipótese de Boussinesq) através de expressões algébricas.
- Modelos com “uma equação”, que são aqueles que adicionam uma equação diferencial para calcular alguma variável auxiliar (por exemplo, a energia cinética específica do movimento das flutuações) que permite calcular μ_t .

- Modelos com “duas equações”, que são aqueles que adicionam duas equações diferenciais para determinar duas variáveis que são utilizadas para determinar μ_t . Entre os mais populares destes modelos pode ser mencionado o modelo “ $k - \varepsilon$ ”, que determina a energia cinética específica do movimento das flutuações (k) e a dissipação de energia turbulenta (ε) para calcular μ_t através de uma fórmula empírica envolvendo ambas as variáveis.
- Modelamento direto das tensões de Reynolds através de equações diferenciais de transporte. Estes modelos são os mais complexos e universais, porém, requerem um alto custo computacional. Por esta razão, é comum optar por um modelo que não seja tão simples como os algébricos ou tão complexo como o modelamento direto das componentes das tensões de Reynolds, motivo pelo qual os modelos com duas equações são usados com muita frequência.

Além das referências citadas anteriormente (*Lauder & Spalding, 1972*, e *Rodi, 1980*), revisões sobre os diversos modelos de turbulência podem ser encontradas no trabalho de *Markatos (1986)*.

3.3 SIMULAÇÃO DIRETA DA TURBULÊNCIA E SIMULAÇÃO DIRETA DE GRANDES VÓRTICES COM MODELOS PARA ESCALAS INFERIORES À RESOLUÇÃO DA MALHA

Conforme foi mencionado previamente, as equações de conservação da quantidade de movimento, de massa e de transferência de calor e massa constituem um modelo completo válido para qualquer escoamento e que independe de parâmetros empíricos. A solução direta deste sistema de equações diferenciais em derivadas parciais, usando uma malha computacional e uma discretização temporal no processo de integração no tempo que garante a captura de todas as escalas de vórtices, é denominada “Simulação Direta da Turbulência”. Para isto, é necessário que a malha computacional tenha suas células ou elementos com dimensões menores que os vórtices correspondentes à menor escala da turbulência e que o intervalo de tempo adotado seja pequeno, de forma a garantir a captura das flutuações de mais alta frequência.

Este enfoque, que prescindir de qualquer modelo de turbulência contendo parâmetros empíricos, envolve um número de graus de liberdade e de passos de tempo muito grandes e que eleva-se muito mais ainda à medida que o número de Reynolds cresce, tornando-se muito difícil de processar, mesmo com a utilização dos mais modernos equipamentos. Para números de Reynolds relativamente baixos, tem-se empregado a “Simulação Direta da Turbulência” com os recursos oferecidos pelos supercomputadores atuais e com as facilidades que proporcionam os processadores vetoriais e/ou a paralelização massiva.

Para se ter uma idéia prática das dificuldades existentes para aplicar a “Simulação Direta da Turbulência”, recorre-se à análise feita por *Grötzbach* (1987). Se L é a dimensão das maiores escalas da turbulência, e que são da ordem das dimensões geométricas do escoamento em um recinto de contornos fechados, e l a da menor escala, e que corresponde à espessura da sub-camada viscosa próxima das paredes ou ao diâmetro dos vórtices nos quais ocorre a maior parte da dissipação viscosa de energia, tem-se que:

$$NGL \sim \frac{L}{l} \sim Re^n \quad (3.3.1)$$

onde NGL é o número de graus de liberdade em cada direção, sendo $n \cong \frac{3}{4}$ para turbulência homogênea e $\frac{7}{8} \leq n \leq 1$ para escoamentos em canais.

Como a turbulência é basicamente um fenômeno tridimensional, tem-se que:

$$(NGL)^3 \sim (Re^n)^3 \quad (3.3.2)$$

Por outro lado, para obter uma simulação representativa do fenômeno em estudo, o tempo total a ser simulado deve ser da ordem de:

$$T \sim \frac{L}{U} \quad (3.3.3)$$

onde U é a velocidade de referência. O intervalo de tempo a ser adotado deve ser da ordem de:

$$\Delta t \sim \frac{l}{U} \quad (3.3.4)$$

Levando em conta (3.3.1), (3.3.3) e (3.3.4), tem-se que:

$$\frac{T}{\Delta t} \sim \frac{L}{l} \sim Re^n \quad (3.3.5)$$

De (3.3.2) e (3.3.5) conclui-se que o número total de operações a processar seria de:

$$(NGL)^3 \left(\frac{T}{\Delta t} \right) = Re^{4n} \geq Re^3 \quad (3.3.6)$$

Para exemplificar, se $Re = 10^4$ e $n = \frac{3}{4}$, tem-se uma previsão de 10^{12} operações. Assim, se o tempo de processamento por intervalo de tempo e por grau de liberdade for de 10^{-4} s, o tempo de processamento total seria de 10^8 s (ou seja, 3 anos com 2 meses e 2 dias!).

A consideração deste caso evidencia a limitação prática atual do emprego da Simulação Direta da Turbulência como ferramenta para a análise de Engenharia. Entretanto, verificou-se que pode ser empregada a simulação direta para a análise de escoamentos com baixos números de Reynolds e obter, assim, importantes informações para a compreensão do fenômeno da turbulência. Constatou-se também que, usando malhas mais grosseiras, é possível simular propriedades importantes das grandes escalas da turbulência, as quais permanecem inalteradas quando modelos simples são introduzidos para representar os efeitos de pequenas escalas, inferiores à menor escala possível de ser analisada pela representação computacional. Esta constatação deu origem à chamada “Simulação Direta de Grandes Vórtices”.

A “Simulação Direta de Grandes Vórtices”, com modelos para as escalas inferiores à resolução da malha, constitui uma forma de análise numérica de escoamentos turbulentos na qual os grandes vórtices são resolvidos diretamente, enquanto os efeitos dos pequenos vórtices são representados por modelos de turbulência. Isto permite trabalhar com malhas que tem um refinamento inferior ao

que teria se o problema fosse resolvido através da Simulação Direta da Turbulência, viabilizando a análise de escoamentos com números de Reynolds elevados.

Definem-se os grandes vórtices como aqueles que dominam a dinâmica local do escoamento e são os responsáveis pela maior parte do transporte da quantidade de movimento e da produção da turbulência (eles podem ter pequenas dimensões em determinados tipos de escoamento). Já os pequenos vórtices, que são os que têm pouca importância na determinação das propriedades médias do escoamento, são representados através de modelos.

A solução da simulação de escoamentos turbulentos por este caminho é mais universal que os modelos baseados nas equações médias de Reynolds, pois as grandes escalas (que são simuladas diretamente no caso de modelos de “Simulação Direta de Grandes Vórtices”) dependem profundamente das características individuais do escoamento, sendo que os vórtices que são modelados obedecem a leis mais gerais.

As equações que governam os grandes vórtices do escoamento turbulento são obtidas aplicando-se um operador de média espacial (ou filtro) às equações de Navier-Stokes, de uma maneira similar ao processo desenvolvido para obter as equações médias temporais analisadas na seção anterior e baseado nas hipóteses de Reynolds. Desta operação resultam termos não resolvidos pela malha, que correspondem a escalas de vórtices inferiores à malha (“*Sub Grid Scale*” – SGS). Estes termos são analisados a partir dos resultados dos campos de grandes escalas empregando modelos aproximados.

O primeiro passo na formulação do processo de “Simulação Direta de Grandes Vórtices” é decompor as variáveis de campo, como as componentes da velocidade v_i , numa componente correspondente às grandes escalas, \hat{v}_i , e uma outra correspondente às escalas inferiores à resolução da malha (“SGS”), v'_i , de forma que:

$$v_i = \hat{v}_i + v'_i \quad (3.3.7)$$

que, embora matematicamente seja uma expressão similar à utilizada em (3.2.1), tem um significado diferente.

Define-se $\hat{v}_i(\underline{x})$, de acordo com *Leonard* (1974), como a convolução de $\bar{v}_i(\underline{x})$ com uma função filtro $G(\underline{x})$, ou seja:

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{x}') v_i(\underline{x}') d\underline{x}' \quad (3.3.8)$$

onde $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]$.

Uma função filtro clássica usada é a função “caixa” (“box”), definida da seguinte forma:

$$G(\underline{x} - \underline{x}') = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} & \text{para } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{para } |x_i - x'_i| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (3.3.9)$$

onde Δ_i é a dimensão do filtro na direção de x_i e n refere-se à dimensão do problema.

Findikakis & Street (1982) pesquisaram, além do filtro dado em (3.3.9), uma função filtro de Gauss definido da seguinte forma:

$$G(\underline{x} - \underline{x}') = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\gamma \frac{(x_i - x'_i)^2}{\Delta_i^2}} \quad (3.3.10)$$

na qual γ é uma constante. Estes autores mostram, através da aplicação de ambos filtros à função:

$$F(\underline{x}) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{L_2}\right) \quad (3.3.11)$$

com $L_2 = \frac{L_1}{5}$ e $\Delta = \frac{L_1}{2}$, que o comportamento do filtro de Gauss é superior. Ainda assim, no presente trabalho será usado como filtro a expressão (3.3.9), que é mais simples e tem dado bons resultados em casos práticos.

Aplicando a operação de filtro aos termos convectivos (que são não-lineares), tem-se:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{\hat{v}_i \hat{v}_j} + \overline{\hat{v}_i v'_j} + \overline{v'_i \hat{v}_j} + \overline{v'_i v'_j} \quad (3.3.12)$$

onde as barras superiores indicam médias espaciais das variáveis de campo, o símbolo “^” aplica-se a uma componente da variável filtrada (ou seja, que corresponde às grandes escalas) e o apóstrofe indica que são componentes da variável inferiores à resolução da malha.

Como as variáveis filtradas não são constantes no espaço, o filtrado do produto de duas variáveis não é igual ao produto dessas duas variáveis filtradas separadamente, ou seja:

$$\overline{\hat{v}_i \hat{v}_j} \neq \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (3.3.13)$$

Esta observação foi feita por *Leonard* (1974), que propôs termos adicionais para uma melhor aproximação do termo $\overline{\hat{v}_i \hat{v}_j}$. Posteriormente, *Clark et al.* (1979) propuseram aproximações para os termos que tinham um produto de uma componente da variável filtrada com uma componente da variável inferior à resolução da malha. A combinação de ambos trabalhos permite escrever (3.3.12) da seguinte maneira:

$$\overline{v_i v_j} = \hat{v}_i \hat{v}_j + L_{ij} + \overline{v'_i v'_j} \quad (3.3.14)$$

onde, para o filtro dado em (3.3.9), o termo L_{ij} é dado por:

$$L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{12} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_k} \quad (3.3.15)$$

Levando em conta (3.3.14) e (3.3.15), as equações de conservação da quantidade de movimento para um fluido quase-incompressível podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho\hat{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\hat{v}_i\hat{v}_j) + \frac{\partial\hat{p}}{\partial x_j}\delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\hat{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{v}_i}{\partial x_j}\right) + \chi\frac{\partial\hat{v}_k}{\partial x_k} - \rho L_{ij} - \overline{\rho v'_i v'_j}\right] = 0 \quad (3.3.16)$$

Os termos $\overline{v'_i v'_j}$ são resultado dos movimentos das escalas inferiores à resolução da malha e devem ser modelados.

Os modelos para pequenas escalas constituem um substituto para o processo de dissipação de energia que ocorre fisicamente nos menores vórtices. Estes modelos têm o mesmo propósito dos modelos convencionais de turbulência, porém, é suficiente o emprego de modelos simples, tendo em vista que o modelo deve considerar apenas os efeitos de pequenas escalas, não necessitando ser válido para todas as escalas e que o mesmo não depende da geometria, pois as pequenas escalas tem uma natureza mais universal que a turbulência total.

O modelo de *Smagorinsky* (1963) tem sido tradicionalmente empregado para simular as escalas inferiores à resolução da malha na simulação direta de grandes vórtices. Segundo este modelo, tem-se:

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t S_{ij} = \frac{1}{2}\mu_t\left(\frac{\partial\hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{v}_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.3.17)$$

onde μ_t é a viscosidade turbulenta para as escalas inferiores à malha e vem dada por:

$$\mu_t = \rho(C_s\Delta)^2(2S_{ij}S_{ij})^{1/2} \quad (3.3.18)$$

sendo C_s a constante de Smagorinsky e Δ uma escala de comprimento associado com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas. Diversos investigadores tem dado a C_s valores que variam de 0.1 a 0.22.

Petry & Awruch (1997) demonstraram, através de exemplos práticos, que os termos de Leonard, além de acrescentar o tempo de processamento em torno de 20%, têm pouca influência nos resultados e convém negligenciá-los.

Se a equação de conservação de quantidades escalares é incluída, tem-se que:

$$\frac{\partial(\rho\hat{\Phi})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\hat{v}_j\hat{\Phi}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_{jj} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_j} - \rho L_{j\Phi} - \overline{\rho v'_j\Phi'} \right) - \rho\zeta = 0 \quad (3.3.19)$$

onde:

$$L_{j\Phi} = \frac{\Delta_k^2}{12} \frac{\partial\hat{v}_j}{\partial x_k} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_k} \quad (3.3.20)$$

são os termos de Leonard e

$$-\overline{\rho v'_j\Phi'} = (K_{jj})_t \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_j} \quad (3.3.21)$$

$(K_{jj})_t$ é o coeficiente de difusão turbulenta que, de acordo com *Findikakis & Street* (1982), pode adotar-se como sendo:

$$(K_{jj})_t = \frac{\mu_t}{a_t} \quad (3.3.22)$$

onde a_t é o número de Prandtl turbulento e que é adotado na citada referência como sendo igual a 0.75, aproximadamente.

Considerando a equação de conservação da massa dada em (2.2.3), o processo de filtragem conduz à seguinte expressão:

$$\frac{\partial\hat{p}}{\partial t} + \hat{v}_j \frac{\partial\hat{p}}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial\hat{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j p'} + L_{jp} \right) = 0 \quad (3.3.23)$$

onde:

$$-L_{jp} = \frac{\Delta_k^2}{12} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_k} \quad (3.3.24)$$

e

$$-\overline{v'_j p'} = \frac{1}{\rho} (K_{pp})_t \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} = \left[\left(\frac{\mu_t}{\rho} \right) \frac{1}{b_t} \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{b_t} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} \quad (3.3.25)$$

sendo b_t uma constante adimensional de difícil determinação.

Embora atualmente existam variantes do modelo apresentado para simular diretamente a turbulência nas grandes escalas, usando C_s variável, neste trabalho será usado o modelo clássico ou original de Smagorinsky.

Comparações entre diferentes modelos de turbulência aplicados a corpos rombudos foram apresentadas por *Murakami* (1997), *Rogallo & Moin* (1984), *Ferziger* (1993), *Leschziner* (1993), entre outros, incluindo a simulação direta de grandes vórtices.

4 FORMULAÇÃO DO ALGORITMO PARA A ANÁLISE DO ESCOAMENTO DE FLUIDO VISCOSO QUASE-INCOMPRESSÍVEL NUM PROCESSO ISOTÉRMICO

4.1 O MÉTODO EXPLÍCITO DE DOIS PASSOS

As equações que governam o problema são as seguintes:

a) Equações de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] = 0$$

$$(i, j, k = 1, 2) \text{ em } \Omega \quad (4.1.1)$$

com

$$v_t = (C_s \Delta)^2 (2S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad (4.1.2)$$

sendo:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) ; \quad \Delta = (\Delta_x \Delta_y) \quad (4.1.3)$$

onde Δ_x e Δ_y são as dimensões do elemento na direção dos eixos globais x e y , respectivamente.

b) Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{b_t} \right) \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0$$

$$(j = 1, 2) \text{ em } \Omega \quad (4.1.4)$$

As condições de contorno que acompanham as expressões (4.1.1) e (4.1.4) são as seguintes:

$$v_i = w_i \quad (i = 1, 2) \text{ nos contornos s\u00f3lidos } \Gamma_{v_s} \quad (4.1.5)$$

$$\vec{v} = \tilde{\vec{v}} \text{ nos contornos "abertos" } \Gamma_{v_a} \quad (4.1.6)$$

$$p = \tilde{p} \text{ em } \Gamma_p \quad (4.1.7)$$

$$\left[\frac{-p}{\rho} \delta_{ij} + (v + v_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] n_j = \frac{\tilde{t}_i}{\rho} = S_i$$

(i, j, k = 1, 2) em Γ_σ (4.1.8)

Nestas equa\u00e7\u00f5es, v_i e p , que s\u00e3o, respectivamente, as componentes da velocidade e a press\u00e3o, s\u00e3o as inc\u00f3gnitas do problema. As viscosidades $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ e $\lambda = \frac{\chi}{\rho}$, a massa espec\u00edfica ρ e a velocidade do som no meio em estudo c , s\u00e3o propriedades do fluido. A viscosidade turbulenta $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$ depende dos gradientes das componentes da velocidade filtrada, do tamanho do elemento e da constante de Smagorinsky C_s . Para uma descri\u00e7\u00e3o puramente Euleriana, a velocidade de movimento da malha, cujas componentes s\u00e3o w_i , \u00e9 nula. J\u00e1 para uma descri\u00e7\u00e3o puramente Lagrangeana, a velocidade de movimento da malha coincide com a do fluido, ou seja, $v_i = w_i$ ($i = 1, 2$). No caso de uma descri\u00e7\u00e3o Arbitr\u00e1ria Lagrangeana-Euleriana (ALE), $\vec{w} \neq 0$ e $\vec{w} = \vec{v}$, onde \vec{w} e \vec{v} s\u00e3o os vetores velocidade de movimento da malha e do fluido, respectivamente.

Nos contornos "abertos" Γ_{v_a} e na parte do contorno Γ_p , valores prescritos \vec{v} e \tilde{p} devem ser especificados, enquanto que em Γ_σ a for\u00e7a de contorno \tilde{t} deve estar em equil\u00edbrio com as componentes do tensor de tens\u00f5es $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$. Em (4.1.8), n_j \u00e9 o cosseno de dire\u00e7\u00e3o que a normal a Γ_σ forma com o eixo coordenado x_j .

Todas estas equa\u00e7\u00f5es devem ser acompanhadas pelas condi\u00e7\u00f5es iniciais para as componentes da velocidade e para a press\u00e3o em $t = 0$.

4.2 EXPANSÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM SÉRIES DE TAYLOR

A variável v_i pode ser expandida em séries de Taylor, em relação ao tempo, da seguinte maneira:

$$v_i^{n+1} - v_i^n = \Delta v_i = \Delta t \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 v_i^n}{\partial t^2} + \dots \quad (4.2.1)$$

onde os super-índices $n+1$ e n indicam os tempos $t+\Delta t$ e t , respectivamente, sendo Δt o intervalo de tempo.

De (4.1.1), obtém-se que:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -r_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (4.2.2)$$

sendo $r_j = v_j - w_j$ e $\bar{v} = v + v_i$.

Derivando (4.2.2) em relação à t , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = & -r_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \bar{v} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \right] + \\ & \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Em (4.2.3) foi omitido o termo $\frac{\partial r_j}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, além de $\bar{v} = v + v_i$ e λ serem

considerados constantes no intervalo de tempo.

Introduzindo em (4.2.3) a expressão (4.2.2), nos termos em que aparece a derivada em relação ao tempo de uma componente de velocidade, e desprezando derivadas de terceira ordem de v_i e de segunda ordem de p , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \cong r_j r_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (4.2.4)$$

Usando (4.2.2) e (4.2.3) em (4.2.1), obtém-se que:

$$\Delta v_i = \Delta t \left\{ -r_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ -r_j \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \Delta v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} \quad (4.2.5)$$

onde $\Delta v_i = v_i^{n+1} - v_i^n$ e $\Delta p = p^{n+1} - p^n$.

A expressão (4.2.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta v_i = \Delta t \left\{ -r_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.6)$$

onde $n + \frac{1}{2} = t + \frac{\Delta t}{2}$, considerando que $v_i + \frac{1}{2} \Delta v_i = v_i^{n+\frac{1}{2}}$ e $p + \frac{1}{2} \Delta p = p^{n+\frac{1}{2}}$.

De forma inteiramente similar, pode-se proceder com a equação da continuidade (4.1.4), obtendo-se:

$$\Delta p = \Delta t \left\{ -r_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho c^2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{v_t}{b_t} \right) \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] \right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.7)$$

Observa-se que, para calcular Δv_i e Δp em (4.2.6) e (4.2.7), respectivamente, é necessário conhecer os valores das variáveis em $t + \Delta t = n + \frac{1}{2}$. Uma vez calculadas as variáveis em $n + \frac{1}{2}$, pode-se determinar os valores de v_i e p em $n + 1$ da seguinte forma:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta v_i \quad (4.2.8.a)$$

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p \quad (4.2.8.b)$$

Para obter os valores da variável v_i em $n + \frac{1}{2}$, pode-se aplicar a expansão em séries de Taylor da seguinte forma:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{2!} \frac{\partial^2 v_i^n}{\partial t^2} + \dots \quad (4.2.9)$$

Introduzindo (4.2.2) e (4.2.4) (esta última sem o termo do gradiente de pressão) em (4.2.9), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i^{n+1/2} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -r_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^n + \right. \\ \left. \left(\frac{\Delta t}{4} r_j r_k \right) \frac{\partial^2 v_i^n}{\partial x_j \partial x_k} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

O til em $v_i^{n+1/2}$ deve-se ao fato de que o mesmo foi calculado sem o segundo termo do lado direito de (4.2.4).

De forma inteiramente similar, pode-se obter a seguinte expressão para a equação da continuidade:

$$p^{n+1/2} = p^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left[-r_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_i}{b_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \right]^n + \left(\frac{\Delta t}{4} r_i r_j \right) \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_j \partial x_i} \right\} \quad (4.2.11)$$

Calculado $\left(p^{n+1/2} - p^n \right) = \Delta p^{n+1/2}$ com (4.2.11), v_i pode ser obtido de (4.2.4) e (4.2.10) com a seguinte expressão:

$$v_i^{n+1/2} = \tilde{v}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial \Delta p^{n+1/2}}{\partial x_i} \quad (4.2.12)$$

O termo $\frac{\Delta t r_j r_k}{4}$ é uma componente do “Tensor de Balanceamento Difusivo” (Gresho & Sani, 1999) e representa uma viscosidade artificial.

Resumindo, os passos a seguir para a resolução do problema são os seguintes:

- 1) Calcular $\tilde{v}_i^{n+1/2}$ através de (4.2.10).

- 2) Calcular $p^{n+1/2}$ com (4.2.11).
- 3) Calcular $\Delta p^{n+1/2} = p^{n+1/2} - p^n$.
- 4) Calcular $v_i^{n+1/2}$ através de (4.2.12).
- 5) Calcular v_i^{n+1} com (4.2.6), ou seja, $v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta v_i$.
- 6) Calcular p^{n+1} com (4.2.7), ou seja, $p^{n+1} = p^n + \Delta p$.

4.3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Neste trabalho, adota-se o elemento quadrilátero isoparamétrico bi-linear, que tem quatro nós, e que é indicado na Figura 4.1.

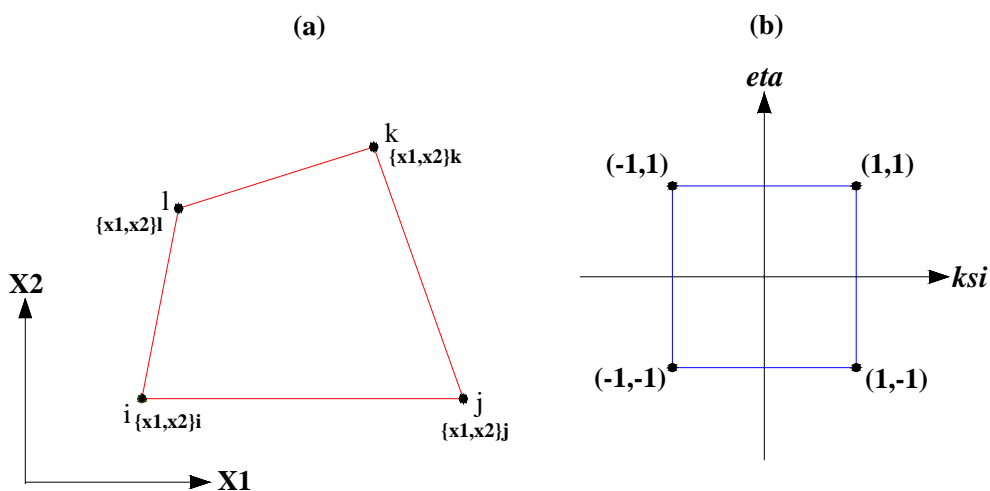


Figura 4.1 - Elemento isoparamétrico quadrilátero bi-linear. (a) Plano físico; (b) Plano computacional

Tanto as coordenadas quanto as variáveis do problema são interpoladas com respeito a seus valores nodais, de forma que:

$$x_1 = \tilde{\Phi} X_1 \quad ; \quad x_2 = \tilde{\Phi} X_2 \quad (4.3.1)$$

$$v_i = \Phi \bar{V}_i \quad ; \quad p = \Phi \bar{P} \quad (4.3.2)$$

onde $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4]$ são as funções de interpolação de cada um dos quatro nós, X_1 e X_2 são vetores que contém as coordenadas nodais x_1 e x_2 e V_i e \bar{P} são vetores que contém os valores nodais das variáveis v_i e p .

As funções de interpolação vêm dadas por:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (4.3.3.a)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (4.3.3.b)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (4.3.3.c)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (4.3.3.d)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.3.4)$$

onde J^{-1} é a inversa da matriz jacobiana J .

A matriz jacobiana vem dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} X_1 & \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} X_2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} X_1 & \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} X_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

de forma que:

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}_{11}^{-1} & \underset{\sim}{J}_{12}^{-1} \\ \underset{\sim}{J}_{21}^{-1} & \underset{\sim}{J}_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}_{22}/\det \underset{\sim}{J} & -\underset{\sim}{J}_{12}/\det \underset{\sim}{J} \\ -\underset{\sim}{J}_{21}/\det \underset{\sim}{J} & \underset{\sim}{J}_{11}/\det \underset{\sim}{J} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

onde:

$$\det \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{J}_{11}\underset{\sim}{J}_{22} - \underset{\sim}{J}_{12}\underset{\sim}{J}_{21} \quad (4.3.7)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas locais ξ e η são dadas por:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\Phi}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [-(1-\eta), (1-\eta), (1+\eta), -(1-\eta)] \quad (4.3.8.a)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\Phi}}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [-(1-\xi), -(1+\xi), (1+\xi), (1-\xi)] \quad (4.3.8.b)$$

Aplicando o princípio dos resíduos ponderados de Galerkin às expressões (4.2.10) e (4.2.11) obtém-se, em nível de cada elemento, as seguintes equações matriciais:

$$\underset{\sim}{M}_{\sim 1}^{(e)} V_{\sim 1}^{n+1/2} = \underset{\sim}{M}_{\sim 1}^{(e)} V_{\sim 1}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -\underset{\sim}{A}_{\sim 1}^{(e)} V_{\sim 1}^n + \frac{1}{\rho_{\sim 1}} \underset{\sim}{G}_{\sim 1}^{(e)} P_{\sim 1}^n - \underset{\sim}{D}_{\sim 11}^{(e)} V_{\sim 1}^n - \underset{\sim}{D}_{\sim 12}^{(e)} V_{\sim 2}^n - \frac{1}{\rho} \underset{\sim}{G}_{1c}^{(e)} P_c^n + \underset{\sim}{D}_{\sim 11c}^{(e)} V_{\sim 1c}^n + \underset{\sim}{D}_{\sim 12c}^{(e)} V_{\sim 2c}^n \right\} \quad (4.3.9)$$

$$\underset{\sim}{M}_{\sim 2}^{(e)} V_{\sim 2}^{n+1/2} = \underset{\sim}{M}_{\sim 2}^{(e)} V_{\sim 2}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -\underset{\sim}{A}_{\sim 2}^{(e)} V_{\sim 2}^n + \frac{1}{\rho_{\sim 2}} \underset{\sim}{G}_{\sim 2}^{(e)} P_{\sim 2}^n - \underset{\sim}{D}_{\sim 21}^{(e)} V_{\sim 1}^n - \underset{\sim}{D}_{\sim 22}^{(e)} V_{\sim 2}^n - \frac{1}{\rho} \underset{\sim}{G}_{2c}^{(e)} P_c^n + \underset{\sim}{D}_{\sim 21c}^{(e)} V_{\sim 1c}^n + \underset{\sim}{D}_{\sim 22c}^{(e)} V_{\sim 2c}^n \right\} \quad (4.3.10)$$

$$\underset{\sim}{M}_{\sim 2}^{(e)} P_{\sim 2}^{n+1/2} = \underset{\sim}{M}_{\sim 2}^{(e)} P_{\sim 2}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -\underset{\sim}{A}_{\sim 2}^{(e)} P_{\sim 2}^n - \rho c^2 \left(\underset{\sim}{G}_{\sim 1}^{(e)T} V_{\sim 1}^n + \underset{\sim}{G}_{\sim 2}^{(e)T} V_{\sim 2}^n \right) - \underset{\sim}{E}_{\sim c}^{(e)} P_{\sim c}^n + \underset{\sim}{N}_{\sim c}^{(e)} P_{\sim c}^n \right\} \quad (4.3.11)$$

onde:

$$\tilde{M}^{(e)} = \int_{\Omega} \left(\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} \right) d\Omega \quad ; \quad \tilde{A}^{(e)} = \int_{\Omega} \left[\left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1}^n \right) \left(\tilde{\Phi}^T \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) + \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2}^n \right) \left(\tilde{\Phi}^T \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) \right] d\Omega$$

$$\tilde{G}_{\tilde{~}i}^{(e)} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_i} \tilde{\Phi} \right) d\Omega \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{D}_{\tilde{~}11}^{(e)} = \int_{\Omega} \left[2\bar{v} + \lambda + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\bar{v} + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right) \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega$$

$$\tilde{D}_{\tilde{~}12}^{(e)} = \int_{\Omega} \bar{v} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega$$

$$\tilde{D}_{\tilde{~}21}^{(e)} = \int_{\Omega} \bar{v} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

$$\tilde{D}_{\tilde{~}22}^{(e)} = \int_{\Omega} \left[2\bar{v} + \lambda + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\bar{v} + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right) \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega$$

$$\tilde{E}_{\tilde{~}}^{(e)} = \int_{\Omega} \left[\frac{v_i}{b_i} + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{v_i}{b_i} + \frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) d\Omega +$$

$$\tilde{N}_{\tilde{~}}^{(e)} = \int_{\Omega} \left[\frac{\Delta t}{4} \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}1} \right) \left(\tilde{\Phi} R_{\tilde{~}2} \right) \right] \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^T}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega$$

$$\tilde{G}_{ic}^{(e)} = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} \tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} n_i d\Gamma \quad (i = 1, 2)$$

$$D_{\sim 11c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[2\bar{v} + \lambda + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\bar{v} + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 2})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1}) (\Phi R_{\sim \sim 2}) \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_2 + \Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_1 \right) d\Gamma$$

$$D_{\sim 12c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[\bar{v} \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_2 + \lambda \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_1 \right] d\Gamma$$

$$D_{\sim 21c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[\bar{v} \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_1 + \lambda \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_2 \right] d\Gamma$$

$$D_{\sim 22c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[2\bar{v} + \lambda + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 2})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\bar{v} + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1}) (\Phi R_{\sim \sim 2}) \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_2 + \Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_1 \right) d\Gamma$$

$$E_{\sim c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{v_t}{b_t} + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\frac{v_t}{b_t} + \frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 2})^{\sharp} \right] \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 d\Gamma$$

$$N_{\sim c}^{(e)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\Delta t}{4} (\Phi R_{\sim \sim 1}) (\Phi R_{\sim \sim 2}) \right] \left[\left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_2 + \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_1 \right] d\Gamma$$

onde $R_{\sim i} = V_{\sim i} - W_{\sim i}$ ($i = 1, 2$), Ω é o domínio do elemento e Γ seu contorno. Por outro lado, n_1 e n_2 são os cossenos de direção da normal ao contorno.

Observa-se que os termos de pressão e viscosos das equações de conservação da quantidade de movimento foram integrados por partes. O mesmo foi feito com os termos difusivos na equação da continuidade.

As equações matriciais (4.3.9) a (4.3.11) devem ser montadas, pois estão expressas em nível de elemento, e as correspondentes condições de contorno prescritas devem ser aplicadas. Desta forma, pode-se calcular $V_{\sim i}^{n+\frac{1}{2}}$ e $P_{\sim}^{n+\frac{1}{2}}$. Para evitar a necessidade de se resolver sistemas implícitos de equações algébricas,

convém trabalhar com a matriz $\tilde{M}_D^{(e)}$ diagonalizada no lugar de $\tilde{M}^{(e)}$. A matriz $\tilde{M}_D^{(e)}$ é obtida somando os termos de cada linha de $\tilde{M}^{(e)}$, colocando o resultado desta soma na posição correspondente à diagonal da mesma linha. Desta forma, o sistema é totalmente explícito e as equações correspondentes a cada nó podem ser calculadas em forma seqüencial.

O sistema de equações (4.3.9) a (4.3.11) pode ser então escrito, depois de montado, da seguinte forma:

$$(\tilde{V}_i)_k^{n+1/2} = (V_i)_k^n + \frac{\Delta t}{2(M_D)_k} (F_i)_k^n \quad (i = 1, 2), (k = 1, \dots, NTN) \quad (4.3.12)$$

$$(P)_k^{n+1/2} = (P)_k^n + \frac{\Delta t}{2(M_D)_k} (H)_k^n \quad (k = 1, \dots, NTN) \quad (4.3.13)$$

onde o sub-índice i refere-se à componente da velocidade e k refere-se a um nó qualquer. $(M_D)_k$ é o k -ésimo termo da matriz de massa diagonalizada, já montada e armazenada num vetor. $(F_i)_k$ e $(H)_k$ são os termos k -ésimos do vetor já montado, resultante dos termos entre chaves. NTN indica o número total de nós.

Calculados $\tilde{V}_i^{n+1/2}$ e $P^{n+1/2}$, as componentes da velocidade devem ser corrigidas com (4.2.12) para obter $V_i^{n+1/2}$ da seguinte forma:

$$(V_i)_k^{n+1/2} = (\tilde{V}_i)_k^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} (L_i)_k \quad (4.3.14)$$

onde novamente i refere-se à componente da velocidade e k refere-se a um nó qualquer. $(L_i)_k$ é o k -ésimo termo de um vetor já montado e, que em nível de elemento, vem dado por:

$$L_{\sim i}^{(e)} = \left[\int_{\Omega} \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \left(P^{n+1/2} - P^n \right) \quad (i = 1, 2) \quad (4.3.15)$$

Finalmente, os valores das incógnitas em $t + \Delta t = n + 1$ podem ser calculados com as seguintes expressões:

$$(V_i)_{k}^{n+1} = (V_i)^n + \frac{\Delta t}{(M_D)_k} (F_i)_{k}^{n+1/2} \quad (i = 1, 2), (k = 1, \dots, NTN) \quad (4.3.16)$$

$$(P)_k^{n+1} = (P)_k^n + \frac{\Delta t}{(M_D)_k} (H)_k^{n+1/2} \quad (k = 1, \dots, NTN) \quad (4.3.17)$$

Em (4.3.16) e (4.3.17) a difusividade adicional não é considerada no cálculo de $(F_i)_{k}^{n+1/2}$ e $(H)_k^{n+1/2}$.

Como se pode observar, o esquema tem dois passos: um é dado por (4.3.12) e (4.3.13), devendo ser corrigido o valor de $V_i^{n+1/2}$ com (4.3.14), e o outro é dado por (4.3.16) e (4.3.17). Como o esquema é totalmente explícito, resulta um sistema condicionalmente estável, sendo que a condição a ser satisfeita é:

$$\Delta t_i < \alpha \frac{\Delta x_i}{c + v_i} \quad (i = 1, \dots, NTE) \quad (4.3.18)$$

onde α (que é um real menor que a unidade) é um coeficiente de segurança, Δx_i e v_i são uma dimensão e uma velocidade características do elemento i e NTE é o número total de elementos.

Embora passos de tempo variáveis possam ser adotados (*Trapp, 2000; Teixeira & Awruch, 2001*), neste trabalho será adotado um único Δt para todo o processo e será o menor dos Δt_i obtidos em (4.3.18).

Como pode-se ver, as matrizes $\tilde{M}^{(e)}, \tilde{A}^{(e)}, \tilde{G}_i^{(e)}, \tilde{D}_{ij}^{(e)}$ e $\tilde{E}^{(e)}$ em (4.3.9) a (4.3.11) contém componentes que resultam da solução de integrais do seguinte tipo:

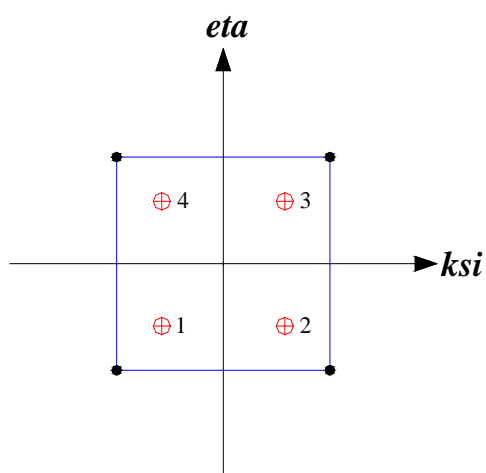
$$\int_{\Omega} f(\xi, \eta) d\Omega \quad (4.3.19)$$

Como as expressões $f(\xi, \eta)$ são bastante complexas, resolve-se as integrais do tipo (4.3.19) por integração numérica, usando a regra de Gauss-Legendre, de forma que:

$$\int_{\Omega} f(\xi, \eta) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det J d\xi d\eta \cong \sum_i^{npi} \sum_j^{npi} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j = \sum_k^{(npi)^2} f(\xi_k, \eta_k) w_k \quad (4.3.20)$$

onde $f(\xi, \eta)$ é avaliada em pontos de integração onde as coordenadas locais valem ξ_i e η_j , sendo w_i e w_j fatores de “peso”. Finalmente, npi indica o número de pontos de integração em cada direção.

Neste trabalho, adota-se 2x2 pontos de integração (dois pontos de integração em cada direção), sendo que os mesmos estão indicados na Figura 4.2.



$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$$

$$(\xi, \eta)_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$(\xi, \eta)_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$(\xi, \eta)_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$(\xi, \eta)_4 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Figura 4.2 - Pontos de integração utilizados no elemento quadrilátero isoparamétrico: coordenadas locais e fatores de “peso”

4.4 O PROCESSO DE SUAUIZAÇÃO DO CAMPO DE PRESSÕES

A suavização do campo de pressões tem como finalidade eliminar as oscilações existentes em sua distribuição pelo domínio de análise e melhorar, assim, a visualização e interpretação dos resultados obtidos.

Inicialmente, é obtida a pressão no centro de cada elemento a partir dos valores nodais não suavizados segundo a equação:

$$p_0 = \frac{1}{4} \sum_{N=1}^4 p_N \quad (4.4.1)$$

sendo p_0 a pressão no centro de um determinado elemento E e p_N os valores nodais de pressão não suavizados.

Através do princípio dos mínimos quadrados, apresenta-se o seguinte funcional:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} (p^S - p_0)^2 d\Omega \quad (4.4.2)$$

onde p^S são os valores nodais suavizados que se deseja encontrar.

Igualando a primeira derivada de (4.4.2) a zero, obtém-se:

$$\delta\pi = \int_{\Omega_E} (p^S - p_0) \delta p^S d\Omega = 0 \quad (4.4.3)$$

Substituindo (4.4.1) em (4.4.3) e considerando ainda a aproximação $p^S = \left[\begin{matrix} \Phi \\ \sim \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} p^S \\ \sim \end{matrix} \right\}$, a equação (4.4.3) fica na seguinte forma:

$$\int_{\Omega_E} \left[\begin{matrix} \Phi \\ \sim \end{matrix} \right]^T \left(\left[\begin{matrix} \Phi \\ \sim \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} p^S \\ \sim \end{matrix} \right\} - \frac{1}{4} \sum_{N=1}^4 p_N \right) d\Omega = \{0\} \quad (4.4.4)$$

de onde surge a expressão:

$$\left[\begin{matrix} M \\ \sim \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} p^S \\ \sim \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4} \sum_{N=1}^4 p_N \int_{\Omega_E} \left[\begin{matrix} \Phi \\ \sim \end{matrix} \right]^T d\Omega \quad (4.4.5)$$

sendo $\left[\underset{\sim}{M} \right] = \int_{\Omega_E} [\Phi]^T [\Phi] d\Omega$ a já conhecida matriz de massa. Nesta equação, a matriz de massa M deve ser substituída pela matriz de massa discreta M_D , de forma a desacoplar as equações do sistema (4.45) e obter, assim, a sua resolução. Logo, em nível de elemento (E), os valores nodais de pressão suavizada vêm dados por:

$$\left\{ \underset{\sim}{p}^S \right\}_E = \frac{1}{16} \left[\underset{\sim}{M}_D \right]^{-1} \left(\sum_{N=1}^4 p_N \right) \Omega_E \quad (4.4.6)$$

Finalmente, para a obtenção dos valores nodais de pressão suavizada em nível global, utiliza-se a equação a seguir:

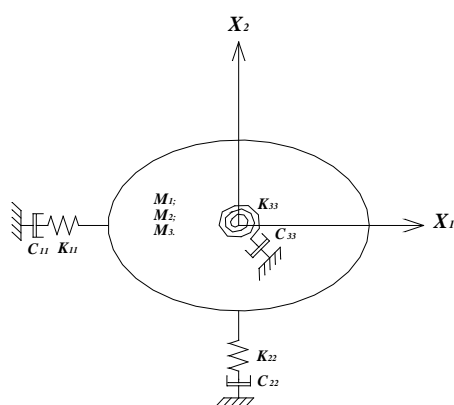
$$\left\{ \underset{\sim}{p}_i^S \right\} = \frac{\sum_{E=1}^{NE} (p_0)^E \Omega_E}{\sum_{E=1}^{NE} \Omega_E} \quad (4.4.7)$$

onde E é um índice que vai de 1 até o número de elementos concorrentes ao nó i (NE).

5 ANÁLISE DA ESTRUTURA E DE SEU ACOPLAMENTO COM O FLUIDO

5.1 ANÁLISE DA ESTRUTURA

Neste trabalho, a estrutura é considerada como um corpo rígido bidimensional (ou seja, que sua forma permanece inalterada) e que pode ter deslocamentos e rotações no seu plano, restringidos por molas e amortecedores, como se indica na Figura 5.1.



Graus de liberdade da estrutura:

u_1 : deslocamento segundo o eixo x_1

u_2 : deslocamento segundo o eixo x_2

θ : rotação em torno do eixo x_3 (normal ao plano formado pelos eixos x_1 e x_2)

Figura 5.1 - Modelo de estrutura, constituído por um corpo rígido restringido por molas e amortecedores translacionais e rotacionais

A equação de equilíbrio dinâmico da estrutura vem dada pela seguinte expressão matricial:

$$\underset{\sim E}{M} \ddot{\underset{\sim E}{U}}^c + \underset{\sim E}{C} \dot{\underset{\sim E}{U}}^c + \underset{\sim E}{K} \underset{\sim E}{U}^c = \underset{\sim E}{Q}^c \quad (5.1.1)$$

onde:

$\underset{\sim E}{M}$: matriz de massa

$\underset{\sim E}{C}$: matriz de amortecimento

$\underset{\sim E}{K}$: matriz de rigidez

$\ddot{U}_{\sim E}^c, \dot{U}_{\sim E}^c, U_{\sim E}^c$: vetores de aceleração, velocidade e deslocamentos generalizados, respectivamente.

$Q_{\sim E}^c$: vetor de cargas

O sub-índice E serve para identificar que se trata de matrizes da estrutura e o super-índice C indica que os valores correspondentes são tomados no centro de gravidade do corpo.

Se as componentes de deslocamentos generalizados estão desacopladas entre si, a expressão (5.1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{E1}^c \\ Q_{E2}^c \\ M_{x3}^c \end{Bmatrix} \quad (5.1.2)$$

Se existe acoplamento entre as componentes de deslocamentos generalizados, as matrizes $M_{\sim E}, C_{\sim E}$ e $K_{\sim E}$ deixarão de ser matrizes diagonais.

Como a estrutura é rígida, os vetores $\ddot{U}_{\sim E}^c, \dot{U}_{\sim E}^c, U_{\sim E}^c$ e $Q_{\sim E}^c$ são tomados no centro de gravidade do corpo.

A solução da equação de equilíbrio dinâmico será deixada para outra seção, já que ainda falta considerar o efeito da interação fluido-estrutura, que será incluído no sistema (5.1.2).

Convém também observar que a hipótese de uma estrutura rígida, que pode deslocar-se e rotar, é adequada quando as deformações da mesma são muito pequenas frente à magnitude dos deslocamentos e da rotação.

5.2 O ACOPLAMENTO DO FLUIDO COM A ESTRUTURA. CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE E EQUILÍBRIO

Na interface sólido-fluido deve ser satisfeita a condição de compatibilidade, ou seja, deve cumprir-se que as velocidades do fluido e da estrutura sejam iguais nos nós comuns a ambos os meios. Isto pode ser representado da seguinte forma:

$$\dot{U}_{\sim E}^I = V_{\sim F}^I \quad (5.2.1)$$

onde os sub-índices E e F referem-se à estrutura e ao fluido, respectivamente, e o super-índice I refere-se à interface. Deve ser lembrado que ambos vetores em (5.2.1) têm duas componentes, que correspondem às direções dos eixos globais. Entretanto, $\dot{U}_{\sim E}^c$, que aparece em (5.1.1), tem três componentes, já que inclui a rotação em torno de um eixo normal ao plano em estudo.

Como o corpo é rígido, os valores de $\dot{U}_{\sim E}^c$ podem ser trasladados à interface sólido-fluido, ou seja, a pontos do contorno da estrutura, através de uma matriz de translação L_{\sim} , de forma que:

$$\dot{U}_{\sim E}^I = L_{\sim} \dot{U}_{\sim E}^c \quad (5.2.2)$$

onde a matriz L_{\sim} é dada por:

$$L_{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_2 \\ 0 & 1 & l_1 \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

sendo l_1 e l_2 as componentes da distância do centro de gravidade do corpo ao ponto em consideração, medida segundo os eixos globais. Para esclarecer isto, observa-se a Figura 5.2.

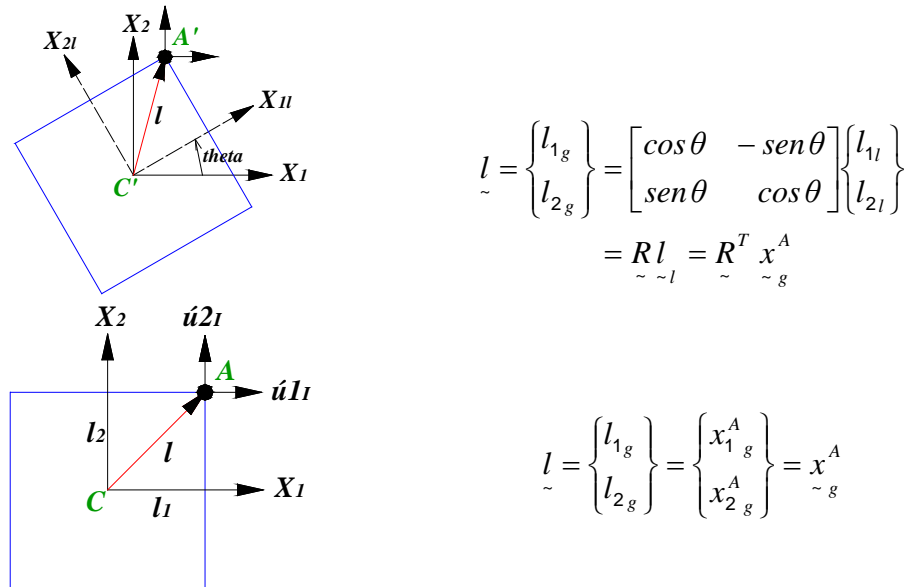


Figura 5.2 - Movimento de corpo rígido. Os sub-índices “g” e “I” referem-se a quantidades medidas em relação a eixos globais e locais, respectivamente

Da Figura 5.2 conclui-se que:

$$\begin{aligned} l_{1g} &= l_1(\theta) = x_{1g}^A \cos \theta + x_{2g}^A \sin \theta = x_{1I}^A \\ l_{2g} &= l_2(\theta) = -x_{1g}^A \sin \theta + x_{2g}^A \cos \theta = x_{2I}^A \end{aligned} \quad (5.2.4.a)$$

ou, em forma genérica:

$$\begin{Bmatrix} l_1(\theta) \\ l_2(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1g} \\ x_{2g} \end{Bmatrix} = \underset{\sim \sim g}{R}^T \underset{\sim \sim g}{x} \quad (5.2.4.b)$$

ou seja, as distâncias de um ponto da interface ao centro gravidade do corpo é função do ângulo θ .

Derivando (5.2.2) em relação ao tempo, levando em conta (5.2.3) e (5.2.4), obtém-se:

$$\underset{\sim \sim E}{\ddot{U}}^I = \underset{\sim \sim E}{L} \underset{\sim \sim E}{\ddot{U}}^c + \underset{\sim \sim E}{\dot{L}} \underset{\sim \sim E}{\dot{U}}^c = \underset{\sim \sim E}{L} \underset{\sim \sim E}{\ddot{U}}^c + \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \underset{\sim \sim E}{\dot{U}}^c \quad (5.2.5)$$

Por outro lado, pode-se observar que:

$$\frac{d\tilde{L}}{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_{1g} \cos\theta + x_{2g} \sin\theta \\ 0 & 0 & -x_{1g} \sin\theta - x_{2g} \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & -l_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

Usando (5.2.6) em (5.2.5), tem-se que:

$$\ddot{\tilde{U}}^I = \dot{\tilde{V}}^I = \tilde{L} \ddot{\tilde{U}}^c + \tilde{L}'(\dot{\theta}) \dot{\tilde{U}}^c \quad (5.2.7)$$

onde:

$$\tilde{L}'(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1 \dot{\theta} \\ 0 & 0 & -l_2 \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

As condições (5.2.2) e (5.2.7) valem para cada nó da interface.

Na interface sólido-fluido também deve ser satisfeita a condição de equilíbrio de forças, que consiste em igualar os carregamentos \tilde{Q}^c da estrutura, transladada à interface, com a carga S_i dada em (4.1.8) com sinal trocado (já que deve considerar-se a ação do fluido sobre a estrutura, enquanto (4.1.8) fornece a ação do contorno sobre o fluido). A equação de equilíbrio pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{Q}^c = - \int_{\Gamma_E} \tilde{L}^T \tilde{S} d\Gamma \quad (5.2.9)$$

onde \tilde{L}^T é a matriz transposta de \tilde{L} , dada em (5.2.3), e \tilde{S} contém as duas componentes das forças de contorno do fluido sobre a estrutura num determinado ponto do contorno Γ_E da estrutura (Γ_E representa também a interface do sólido com o fluido); estas forças \tilde{S} estão dadas em (4.1.8).

Para determinar o efeito do acoplamento entre ambos os meios sobre a estrutura no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), considera-se um elemento do domínio do fluido em contato com o corpo sólido, como se indica na Figura 5.3, onde pode observar-se que apenas os nós 1 e 2 estão em contato com a estrutura.

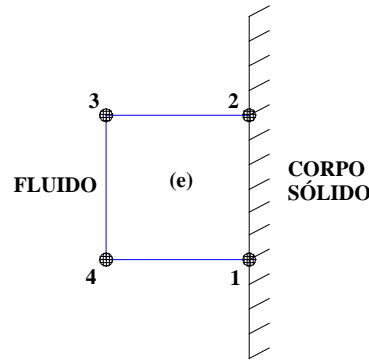


Figura 5.3 - Elemento do domínio do fluido em contato com o corpo sólido

As equações de conservação da quantidade de movimento na sua forma matricial, em nível de elemento (e) , podem ser obtidas aplicando o método de Galerkin à equação (4.1.1), escrevendo-a então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^{(e)} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{M}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{V}}_{\sim 1} \\ \dot{\tilde{V}}_{\sim 2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}^{(e)} + \tilde{D}_{\sim 11}^{(e)} & \tilde{D}_{12}^{(e)} \\ \tilde{D}_{12}^{(e)} & \tilde{A}^{(e)} + \tilde{D}_{\sim 11}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_{\sim 1} \\ \tilde{V}_{\sim 2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \tilde{G}_{\sim 1}^{(e)} \tilde{P} \\ \tilde{G}_{\sim 2}^{(e)} \tilde{P} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{\sim 1}^{(e)} \\ \tilde{S}_{\sim 2}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (5.2.10)$$

onde $\tilde{S}_{\sim 1}^{(e)}$ e $\tilde{S}_{\sim 2}^{(e)}$ contêm as integrais de contorno.

Em forma compacta, a equação (5.2.10) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\tilde{M}\tilde{M}^{(e)}\dot{\tilde{V}} + \tilde{A}\tilde{D}^{(e)}\tilde{V} = \frac{1}{\rho}\tilde{G}\tilde{P}^{(e)} + \tilde{S}^{(e)} \quad (5.2.11)$$

O significado das matrizes $\tilde{M}_{\sim 1}^{(e)}, \tilde{A}_{\sim 1}^{(e)}, \tilde{D}_{\sim 11}^{(e)}, \tilde{D}_{\sim 22}^{(e)}, \tilde{D}_{\sim 12}^{(e)}, \tilde{D}_{\sim 21}^{(e)}, \tilde{G}_{\sim 1}^{(e)}$ e $\tilde{G}_{\sim 2}^{(e)}$, assim como dos vetores $\tilde{V}_{\sim 1}, \tilde{V}_{\sim 2}$ e \tilde{P} , foram dados na seção 4.3 do capítulo anterior. A matriz $\tilde{M}\tilde{M}^{(e)}$, em (5.2.11), contém as matrizes de massa das componentes da velocidade $\tilde{V}_{\sim 1}$ e $\tilde{V}_{\sim 2}$ (que estão contidas no vetor \tilde{V}), a matriz $\tilde{A}\tilde{D}^{(e)}$ contém os termos advectivos e difusivos, o vetor $\tilde{G}\tilde{P}^{(e)}$ contém os termos correspondentes aos gradientes de pressão segundo os eixos x_1 e x_2 e $\tilde{S}^{(e)}$ é um vetor que contém as integrais de contorno que resultam de integrar por partes os termos de pressão e os termos difusivos.

A equação (5.2.11) pode ser particionada, levando em conta os nós da interface (que serão caracterizados pelo super-índice I) e os nós que não pertencem à interface (que serão caracterizados pelo super-índice F), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \tilde{MM}^{II} & \tilde{MM}^{IF} \\ \tilde{MM}^{FI} & \tilde{MM}^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\dot{V}}^I \\ \tilde{\dot{V}}^F \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{AD}^{II} & \tilde{AD}^{IF} \\ \tilde{AD}^{FI} & \tilde{AD}^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}^I \\ \tilde{V}^F \end{Bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \tilde{GP}^I \\ \tilde{GP}^F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{S}^I \\ \tilde{S}^F \end{Bmatrix} \quad (5.2.12)$$

Em (5.2.12), $\tilde{\dot{V}}^I$ e \tilde{V}^I contém as componentes da aceleração e da velocidade correspondentes aos nós 1 e 2 da Figura 5.3, enquanto $\tilde{\dot{V}}^F$ e \tilde{V}^F contém essas variáveis para os nós 3 e 4 da mesma figura. Um comentário similar pode ser feito em relação aos vetores envolvendo os gradientes de pressão $\tilde{GP}^{(e)}$ e as forças de contorno $\tilde{S}^{(e)}$. A matriz \tilde{MM}^{II} contém elementos que provém da conexão do nó 1 consigo mesmo e com o nó 2, e da conexão do nó 2 consigo mesmo e com o nó 1. A matriz \tilde{MM}^{IF} reflete a conexão do nó 1 com o nó 4 e do nó 2 com o nó 4. Comentários similares podem ser feitos em relação às matrizes \tilde{AD}^{II} e \tilde{AD}^{IF} .

Em relação à análise da estrutura, apenas a primeira equação matricial de (5.2.12) é de interesse, pois será a que contribui na montagem da equação de equilíbrio dinâmico total. Por outro lado, como a análise da estrutura e do escoamento será feita neste trabalho em forma seqüencial, o sistema constituído pelo corpo sólido e os elementos de fluido contíguos (ou seja, com um ou mais lados comuns com a interface sólido-fluido) tem prescrito os valores de \tilde{V} e \tilde{P} nos nós que não têm contato com a estrutura (e que foram calculados na análise do escoamento). Com referência à Figura 5.3, nos nós 3 e 4, os valores \tilde{V}^F e \tilde{P}^F são conhecidos. Todas estas considerações conduzem a eliminar a segunda equação de (5.2.12) quando vai-se formar a equação que governa o movimento do corpo sólido, levando em conta o efeito do acoplamento sólido-fluido.

A primeira equação de (5.2.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{M}\tilde{M}^{II}\tilde{\dot{V}}^I + \tilde{A}\tilde{D}^{II}\tilde{V}^I + \tilde{M}\tilde{M}^{IF}\tilde{\dot{V}}^F + \tilde{A}\tilde{D}^{IF}\tilde{V}^F - \frac{1}{\rho}\tilde{G}\tilde{P}^I = \tilde{S}^I \quad (5.2.13)$$

A expressão (5.2.2), com a matriz \tilde{L} dada em (5.2.3), vale para cada nó na interface. Então, quando se considera um lado comum, constituído por dois nós, a expressão (5.2.2), levando em conta (5.2.1) e (5.2.3), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^I = \tilde{V}_{\tilde{E}}^I = \tilde{T}\dot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^c \quad (5.2.14)$$

e

$$\ddot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^I = \tilde{\dot{V}}_{\tilde{E}}^I = \tilde{T}\ddot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^c + \tilde{T}'(\dot{\theta})\dot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^c \quad (5.2.15)$$

onde, em (5.2.15), foi levada em conta a expressão (5.2.7).

Sempre em referência à Figura 5.3, as matrizes \tilde{T} e \tilde{T}' são dadas por:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_2^1 \\ 0 & 1 & l_1^1 \\ 1 & 0 & -l_2^2 \\ 0 & 1 & l_1^2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{T}'(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1^1 \\ 0 & 0 & -l_2^1 \\ 0 & 0 & -l_1^2 \\ 0 & 0 & -l_2^2 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (5.2.16)$$

Observa-se que as matrizes $\tilde{M}\tilde{M}^{II}$, $\tilde{M}\tilde{M}^{IF}$, $\tilde{A}\tilde{D}^{II}$ e $\tilde{A}\tilde{D}^{IF}$ são de ordem 4x4 e que os vetores $\tilde{\dot{V}}^I$, \tilde{V}^I , $\tilde{\dot{V}}^F$, \tilde{V}^F , $\tilde{G}\tilde{P}^I$ e \tilde{S}^I são de 4x1. Observa-se também que \tilde{T} e $\tilde{T}'(\dot{\theta})$ são matrizes de dimensões 4x3 e que $\ddot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^c$ e $\dot{\tilde{U}}_{\tilde{E}}^c$ são vetores de 3x1.

A contribuição de \tilde{S}^I do lado 1-2 do elemento (e) para a carga total que atua no baricentro da estrutura, $\hat{\tilde{Q}}_{\tilde{E}}^c$, pode ser calculada como:

$$-T^T \int_{l_{1-2}} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_1 \\ \Phi_2 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \Phi_1 S_1^1 + \Phi_2 S_1^2 \\ \Phi_1 S_2^1 + \Phi_2 S_2^2 \end{cases} dl = -T^T S^I \quad (5.2.17)$$

onde $\Phi_1 = (1 - \xi)/2$ e $\Phi_2 = (1 + \xi)/2$; sendo $dl = (l_{1-2}/2)d\xi$, os limites da integral passam a ser -1 e 1 . Convém lembrar que S_1^1 e S_2^2 são os valores dos termos contidos nas integrais de contorno nos nós 1 e 2, que foram abordados no capítulo anterior.

Introduzindo (5.2.14), (5.2.15) e (5.2.17) em (5.2.13), obtém-se a seguinte contribuição do elemento (e) do domínio do fluido, e que tem um contorno comum com a estrutura, para a equação de equilíbrio dinâmico do corpo sólido:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(T^T M M^H T \right) \ddot{U}_E^c + \left(T^T A D^H T + T^T M M^H T'(\dot{\theta}) \right) \dot{U}_E^c + \right. \\ & \left. T^T \left(M M^{IF} \dot{V}^F + A D^{IF} V^F - \frac{1}{\rho} G P^I \right) \right] = -T^T S^I \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Levando em conta que:

$$\hat{Q}_E^c = \sum_{i=1}^{NTL} \left(-T^T S^I \right)_i \quad (5.2.19)$$

onde NTL é o número total de lados dos elementos de fluido em contato com a estrutura, e que são segmentos retos comuns ao contorno do corpo sólido, formando a interface sólido-fluido.

Considerando (5.1.2), (5.2.18) e (5.2.19), sendo estas duas últimas multiplicadas por ρ , a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura, levando em conta o efeito do acoplamento sólido-fluido, vem dada por:

$$\begin{aligned} & \left[M_E + \sum_{i=1}^{NTL} \left(T^T \rho M M^H T \right)_i \right] \ddot{U}_E^c + \left[C_E + \sum_{i=1}^{NTL} \left(T^T \rho A D^H T + T^T \rho M M^H T' \right)_i \right] \dot{U}_E^c + \\ & K_E U_E^c = - \left[\sum_{i=1}^{NTL} \left(T^T \rho M M^{IF} \dot{V}^F + T^T \rho A D^{IF} V^F - T^T G P^I \right)_i + Q_E^c \right] \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

A expressão matricial (5.2.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\overline{M}_{\sim E \sim E} \ddot{U}_{\sim E}^c + \overline{C}_{\sim E \sim E} \dot{U}_{\sim E}^c + \overline{K}_{\sim E \sim E} U_{\sim E}^c = \overline{Q}_{\sim E}^c \quad (5.2.21)$$

Observa-se que as matrizes $\overline{M}_{\sim E \sim E}$, $\overline{C}_{\sim E \sim E}$ e $\overline{K}_{\sim E \sim E}$ são matrizes de dimensões 3x3, enquanto que os vetores $\ddot{U}_{\sim E}^c$, $\dot{U}_{\sim E}^c$, $U_{\sim E}^c$ e $\overline{Q}_{\sim E}^c$ são de ordem 3x1.

Pode-se observar também que $\overline{C}_{\sim E \sim E}$ não é uma matriz simétrica, pois contém os termos advectivos e os termos $\left[\overline{T}^T \overline{M} \overline{M}^H \overline{T}'(\dot{\theta}) \right]$. Além disso, este último termo torna a matriz $\overline{C}_{\sim E \sim E}$ não linear.

5.3 O MÉTODO DE NEWMARK PARA RESOLVER A EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DA ESTRUTURA

Neste trabalho, não é considerado um acoplamento monolítico entre o fluido e a estrutura. O procedimento adotado consiste em analisar de forma seqüencial ambos os meios.

Em primeiro lugar, é analisado o escoamento do fluido com o algoritmo descrito no parágrafo anterior, determinando-se $V_{\sim 1}^{n+1}$, $V_{\sim 2}^{n+1}$ e P_{\sim}^{n+1} em cada nó. Entre as condições de contorno prescritas, na interface sólido-fluido, é especificada uma velocidade nula, já que se trata de um fluido viscoso, se o corpo está fixo. Entretanto, para uma estrutura flexível, que vibre devido à ação do escoamento, a velocidade do fluido é prescrita com um valor igual à velocidade da estrutura em cada nó localizado na interface, ou seja, aplicando-se a condição de compatibilidade (que já foi abordada previamente). É conveniente destacar que, para a análise do escoamento, utiliza-se um esquema explícito, que naturalmente é condicionalmente estável, limitando o tamanho do intervalo de tempo. À medida que é analisado um escoamento com um número de Reynolds maior, cresce a restrição em relação ao intervalo de tempo a ser usado. Por outro lado, como os problemas de maior interesse deste trabalho são tipicamente transientes, é necessário, por razões de

precisão, trabalhar com intervalos de tempo bastante pequenos. Isto é também recomendável em face ao modelo de turbulência adotado.

Uma vez conhecidas as variáveis do escoamento, monta-se a equação (5.2.21) para analisar a estrutura, lembrando que as mesmas foram calculadas impondo como condição valores de $\dot{U}_{\sim E}^I = V^I$, obtidas no intervalo de tempo anterior. A equação (5.2.1) é integrada no tempo utilizando-se o método de Newmark (*Bathe*, 1996), que é um esquema implícito e incondicionalmente estável em problemas lineares. Como o intervalo de tempo que é adotado é o mesmo que o do fluido (que geralmente é muito pequeno em relação ao tamanho do intervalo que poderia ser tomado usando um método implícito), considera-se que o problema é linear, usando-se em $\bar{C}_{\sim E}$ o valor de $\hat{\theta} = U_{\sim E}^c(3)$ calculado no tempo anterior. Usar um intervalo de tempo menor que o necessário na estrutura não chega a ser tão prejudicial em termos de tempo de processamento, pois o tempo para resolver a equação de equilíbrio dinâmico é insignificante comparado com o tempo de processamento de um intervalo na análise do escoamento. Integrando (5.2.21) no tempo, obtém-se $\ddot{U}_{\sim E}^c, \dot{U}_{\sim E}^c$ e $U_{\sim E}^c$ em $t + \Delta t = n + 1$, de onde, usando a matriz de translação L_{\sim} , pode-se calcular $\dot{U}_{\sim E}^I = V^I$ com (5.2.2) em cada nó da interface. Este valor é utilizado como condição prescrita para uma nova análise do escoamento.

Como foi mencionado anteriormente, para integrar no tempo (5.2.21), utiliza-se o método de Newmark. O ponto de partida do método são as seguintes expressões para a velocidade e o deslocamento da estrutura em $t + \Delta t = n + 1$:

$$\dot{U}_{\sim E}^{c\ n+1} = \dot{U}_{\sim E}^{c\ n} + \left[(1-\delta)\ddot{U}_{\sim E}^{c\ n} + \delta\ddot{U}_{\sim E}^{c\ n+1} \right] \Delta t \quad (5.3.1)$$

$$U_{\sim E}^{c\ n+1} = U_{\sim E}^{c\ n} + \dot{U}_{\sim E}^{c\ n} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}_{\sim E}^{c\ n} + \alpha \ddot{U}_{\sim E}^{c\ n+1} \right] \Delta t \quad (5.3.2)$$

onde Δt é o intervalo de tempo e δ e α são coeficientes que podem ser ajustados. Newmark obteve um esquema incondicionalmente estável utilizando $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$.

Das expressões (5.3.1) e (5.3.2), obtém-se:

$$\ddot{U}_{\sim E}^{c^{n+1}} = a_0 \left(U_{\sim E}^{c^{n+1}} - U_{\sim E}^{c^n} \right) - a_2 \dot{U}_{\sim E}^{c^n} - a_3 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} \quad (5.3.3)$$

e

$$\dot{U}_{\sim E}^{c^{n+1}} = \dot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_6 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_7 \ddot{U}_{\sim E}^{c^{n+1}} \quad (5.3.4)$$

Considerando (5.2.21), avaliada em $t + \Delta t = n + 1$, e introduzindo na mesma os valores de (5.3.3) e (5.3.4), tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(a_0 \overline{M}_{\sim E} + a_1 \overline{C}_{\sim E} + K_{\sim E} \right) U_{\sim E}^{c^{n+1}} &= \overline{Q}_{\sim E}^{c^{n+1}} + \overline{M}_{\sim E} \left(a_0 U_{\sim E}^{c^n} + a_2 \dot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_3 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} \right) + \\ \overline{C}_{\sim E} \left(a_1 U_{\sim E}^{c^n} + a_4 \dot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_5 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} \right) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad ; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad ; \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad ; \quad a_7 = \delta \Delta t \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

A expressão (5.3.5) pode ser escrita, em forma compacta, da seguinte maneira:

$$\hat{K}_{\sim E} U_{\sim E}^{c^{n+1}} = \hat{Q}_{\sim E}^c \quad (5.3.7)$$

onde:

$$\hat{K}_{\sim E} = a_0 \overline{M}_{\sim E} + a_1 \overline{C}_{\sim E} + K_{\sim E} \quad (5.3.8.a)$$

$$\hat{Q}_{\sim E}^c = \overline{Q}_{\sim E}^{c^{n+1}} + \overline{M}_{\sim E} \left(a_0 U_{\sim E}^{c^n} + a_2 \dot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_3 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} \right) + \overline{C}_{\sim E} \left(a_1 U_{\sim E}^{c^n} + a_4 \dot{U}_{\sim E}^{c^n} + a_5 \ddot{U}_{\sim E}^{c^n} \right) \quad (5.3.8.b)$$

O sistema de equações (5.3.7) deve ser resolvido em cada passo, levando em conta (5.3.6) e (5.3.8), para obter $U_{\sim E}^{c\ n+1}$; os valores da aceleração $\ddot{U}_{\sim E}^{c\ n+1}$ e da velocidade $\dot{U}_{\sim E}^{c\ n+1}$ são obtidos com (5.3.3) e (5.3.4), respectivamente.

Observa-se que $\hat{K}_{\sim E}$ não é simétrica e deve ser atualizada em cada passo de tempo, introduzindo os valores de V_{\sim}^I e V_{\sim}^F obtidos da análise do escoamento e o valor de $\dot{\theta} = U_{\sim E}^c(3)$, obtido no passo anterior. Ainda assim, como se trata de um sistema de três equações com três incógnitas, o tempo de processamento dispendido pelo passo de tempo é bem menor que o correspondente da análise do escoamento.

5.4 CÁLCULO DE VALORES E COEFICIENTES CARACTERÍSTICOS DO ESCOAMENTO E DA ESTRUTURA

Um dos valores característicos mais importantes do escoamento é o número de Reynolds (Re). Ele é um número adimensional que pode ser interpretado como uma relação entre as forças de inércia e de viscosidade. Além disso, o número de Reynolds é um dos parâmetros que caracterizam o regime como sendo laminar, turbulento ou de transição.

Outro valor característico de um escoamento onde existam objetos imersos é o número de Strouhal (St), que está relacionado com o fenômeno de formação e desprendimento de vórtices alternados com uma frequência característica de desprendimento.

Os números Re e St podem ser calculados com as seguintes fórmulas:

$$Re = \frac{V_0 L_0}{\nu} \quad ; \quad St = \frac{f_v L_0}{V_0} = \frac{V_v L_0}{b_0 V_0} \quad (5.4.1)$$

onde V_0 é uma velocidade de referência, L_0 uma dimensão de referência, f_v a frequência de desprendimento de um par de vórtices e b_0 a projeção da distância entre dois vórtices alternados na direção do escoamento.

Em escoamentos onde existe um corpo imerso, toma-se $V_0 = V_\alpha$, ou seja, a velocidade numa região onde o escoamento não é perturbado pela presença do corpo, e L_0 é o diâmetro da seção circular, se o corpo imerso é um prisma com esta seção, ou a dimensão transversal ao escoamento, se o prisma tem seção retangular.

O número de Strouhal depende da forma da seção do prisma imerso, de sua oscilação, de seu acabamento superficial, do número de Reynolds e das características do escoamento. Fórmulas para calcular este número são apresentadas em diversas publicações e textos (por exemplo, *Schlichting*, 1979).

Conhecendo o número de Strouhal de um escoamento com uma determinada estrutura imersa, é possível determinar a velocidade V_{0R} que produzirá o fenômeno de ressonância no corpo que vibra.

Se uma determinada freqüência natural da estrutura $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ (onde f_n é a freqüência expressa em Hertz e ω_n a freqüência circular expressa em radianos/segundo) é igual à freqüência de desprendimento de vórtices f_v , produz-se o fenômeno de ressonância e grandes oscilações terão lugar no sentido transversal ao escoamento. A velocidade V_{0R} para a qual este fenômeno ocorre pode ser calculada da expressão (5.4.1), obtendo-se:

$$V_{0R} = \frac{f_v L_0}{St} = \frac{f_n L_0}{St} \quad (5.4.2)$$

A partir dos campos de velocidade e de pressões do escoamento, obtidos para instantes de tempo separados pelo intervalo de tempo Δt , é possível calcular os valores instantâneos dos coeficientes de arrasto, de sustentação e de momento torçor da estrutura imersa.

O coeficiente de arrasto C_D está relacionado com as forças que atuam sobre a estrutura na direção do escoamento, enquanto que o coeficiente de sustentação C_L está relacionado com as forças que atuam sobre a estrutura na direção transversal ao escoamento. Já o coeficiente de momento torçor C_M está relacionado com o momento torçor que atua no centro de gravidade da seção do prisma imerso. Os três coeficientes podem ser calculados usando as seguintes expressões:

$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{NTN} S_{1i}'}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 L_0} \quad (5.4.3)$$

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{NTN} S_{2i}'}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 L_0} \quad (5.4.4)$$

$$C_M = \frac{\sum_{i=1}^{NTN} (-S_{1i}' l_{2i} + S_{2i}' l_{1i})}{\frac{1}{2} \rho (V_0 L_0)^2} \quad (5.4.5)$$

onde S_{1i}' e S_{2i}' são as forças nas direções de x_1 e x_2 , respectivamente, que atuam sobre a estrutura no nó i , localizado na interface, sendo l_{1i} e l_{2i} as projeções segundo os eixos x_1 e x_2 , respectivamente, da distância do centro de gravidade do corpo ao nó i . NTN é o número total de nós localizados no contorno da estrutura (ou seja, na interface sólido-fluido).

As forças S_{1i}' e S_{2i}' são calculadas a partir das forças \tilde{S}_j' da expressão (5.2.13), ou seja, das forças que atuam sobre a estrutura em cada lado de um elemento de fluido que pertence à interface.

Para determinar as componentes de \tilde{S}_j' , atuando em cada nó, procede-se como em (5.2.17), porém, sem pré-multiplicar por $-\tilde{T}^T$, ou seja, que as componentes \tilde{S}_j^i (com $j = 1, 2$), para os nós 1 e 2 nos extremos do lado de comprimento l_{1-2} , venham dadas por:

$$\tilde{S}_j^i = \begin{Bmatrix} S_{j1}^i \\ S_{j2}^i \end{Bmatrix} = \int_{l_{1-2}} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} (\Phi_1 S_j^1 + \Phi_2 S_j^2) dl = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1+\xi)(1-\xi) \\ (1+\xi)(1-\xi) & (1-\xi)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_j^1 \\ S_j^2 \end{Bmatrix} \frac{l_{1-2}}{8} d\xi = \frac{l_{1-2}}{6} \begin{Bmatrix} 2S_j^1 + S_j^2 \\ S_j^1 + 2S_j^2 \end{Bmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (5.4.6)$$

onde:

$$S_j^l = \left[-p\delta_{ji} + (v + v_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] n_i^l \quad (i,j,k,l = 1, 2) \quad (5.4.7)$$

Montando da maneira usual o vetor S_j^l ($j = 1, 2$) da expressão (5.4.6), obtém-se as forças S_{jk}^l atuando no nó k .

A partir do campo de pressões do escoamento é possível calcular também os valores instantâneos do coeficiente de pressão de cada nó localizado na interface sólido-fluido.

O coeficiente de pressão de um nó i , C_p^i , localizado na interface, está relacionado com a pressão que atua sobre a estrutura nesse nó. Este coeficiente pode ser calculado utilizando a seguinte expressão:

$$C_p^i = \frac{P_i - P_0}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} \quad (5.4.8)$$

onde P_i é a pressão que atua no nó i e P_0 é uma pressão de referência (por exemplo, a pressão numa região não perturbada do escoamento).

Os valores instantâneos dos coeficientes servem para obter curvas do histórico dos mesmos e um valor médio num certo intervalo de tempo (González, 1993).

5.5 ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA

Levando em conta que o corpo imerso no fluido pode deslocar-se e rotar em seu plano e que o escoamento é descrito com uma descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana, é necessário uma lei que governe o movimento da malha, estabelecendo o campo de velocidades \vec{w} no domínio do fluido, de forma tal que a distorção dos elementos seja a menor possível e que respeite as condições de contorno seguintes:

$$\vec{w}|_{interface} = V_F^I \dot{U}_E^I \quad (5.5.1)$$

$$\vec{w}|_{\substack{contornos \\ externos}} = 0 \quad (5.5.2)$$

Donea et al. (1982), González (1993) e Dos Santos (1993) trabalharam com a seguinte fórmula de rezoneamento dos nós da malha, baseados numa média das velocidades dos nós vizinhos:

$$w_k^i = \frac{\sum_{j=1}^N w_k^j}{N} + \frac{0.1}{\Delta t N^2} \sum_{j=1}^N d_{ij} \sum_{j=1}^N \frac{d_j - d_i}{d_{ij}} \quad (k = 1, 2) \quad (5.5.3)$$

onde w_k^i é a componente na direção de x_k da velocidade da malha no nó i , N é o número de nós conectados ao nó i (sendo j um desses nós), Δt é o intervalo de tempo, d_{ij} é a distância entre os nós i e j e d_i^k e d_j^k são as componentes, segundo o eixo x_k , dos deslocamentos que os nós i e j sofreram na última atualização temporal. Na expressão (5.5.3), devem ser impostas as condições de contorno (5.5.1) e (5.5.2). Lamentavelmente, esta fórmula não funciona para grandes deslocamentos da estrutura imersa no fluido, pois os nós do interior do domínio não acompanham bem o movimento da interface.

Outra alternativa, referida por Boschitsch & Quackembush (1993), Davis & Bendiksen (1993) e usada por Azevedo (1999), é considerar que a componente da velocidade da malha segundo a direção do eixo x_k vem dada por:

$$w_k = w_k|_{interface} \cdot f(\delta) \quad (k = 1, 2) \quad (5.5.4)$$

onde $f(\delta)$, que é uma função analítica prescrita pelo usuário, toma um valor unitário para $\delta = 0$ e decai para zero com o aumento de δ . A maior dificuldade deste método surge quando existem diversos corpos móveis no domínio. Por outro lado, se for possível o uso da distância inicial δ em todos os instantes de tempo, este torna-se um método extremamente rápido.

Uma outra possibilidade é suavizar a velocidade da malha resolvendo por elementos finitos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\nabla \tilde{K} \nabla w = 0 \quad (5.5.5)$$

Este método foi usado por *Löhner & Yang* (1996), que propuseram valores das componentes do tensor \tilde{K} variáveis em função da distância ao corpo, tomando valores maiores numa região próxima ao corpo e valores menores à medida que se consideram zonas mais distantes do objeto imerso.

Finalmente, uma opção intermediária entre a simplicidade e inconvenientes da alternativa descrita pela expressão (5.5.4) e o tempo que pode consumir em resolver o sistema dado em (5.5.5), consiste em usar um sistema pseudo-estrutural com comportamento dinâmico ou estático (*Farhat*, 1995). Considerando o caso mais simples, teria-se:

$$\tilde{K} x = \tilde{K}_c x \Big|_{interface} \quad (5.5.6)$$

onde \tilde{K} é uma matriz de rigidez fictícia, \tilde{K}_c é uma matriz de transferência que descreve o movimento do contorno e x representa o vetor de coordenadas nodais.

O termo \tilde{k}_{ij} de \tilde{K} , que é a rigidez de uma mola fictícia colocada no segmento que une os nós i e j , é dado por:

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \quad (5.5.7)$$

onde d_{ij} é a distância entre os nós i e j . A posição dos pontos no contorno móvel da estrutura é prescrita com um valor que surge do cálculo do movimento deste contorno, enquanto que a posição dos pontos no contorno não perturbado é mantida fixa. A cada passo de tempo a nova posição dos pontos no interior do domínio do fluido deve ser calculada com (5.5.7).

Neste trabalho, o esquema de movimento da malha é similar ao indicado pela expressão (5.5.6), e que foi usado por *Teixeira* (2001). Considere i um ponto no interior do domínio do fluido e j um nó pertencente a um contorno, como se indica na Figura 5.4.

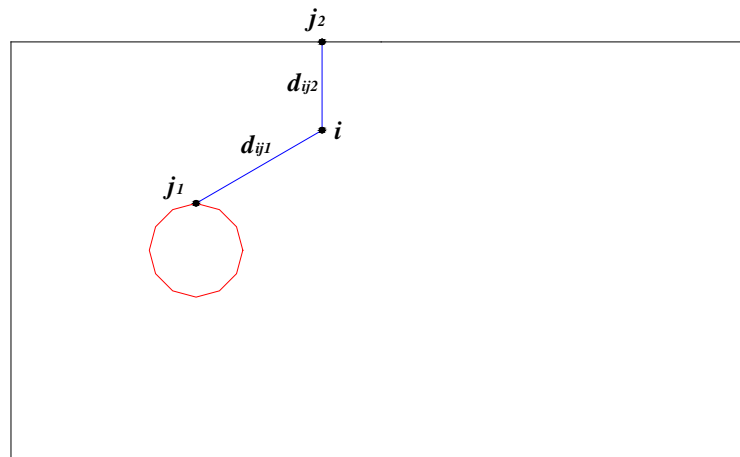


Figura 5.4 - Desenho esquemático do movimento da malha

As componentes da velocidade da malha no nó i , segundo a direção do eixo x_k , são dadas por:

$$w_k^i = \frac{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij} w_k^j}{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij}} \quad (k = 1, 2) \quad (5.5.8)$$

onde NS é o número total de nós pertencentes às linhas de contorno e os a_{ij} são os coeficientes de influência entre os pontos no interior do domínio e os das linhas de contorno, que são calculados da seguinte forma:

$$a_{ij} = \frac{1}{(d_{ij})^n} \quad (5.5.9)$$

sendo d_{ij} a distância entre i e j , e $n \geq 1$. O expoente n pode ser ajustado pelo usuário.

Observa-se que a_{ij} representa o “peso” que cada ponto j do contorno tem sobre o valor da velocidade da malha nos pontos i do interior do domínio. Um valor alto de a_{ij} significa que d_{ij} é pequeno, valorizando-se a influência dos nós mais próximos ao contorno. Quanto mais afastado esteja o ponto j do ponto i , menor será a_{ij} , ou seja, a influência do nó j na velocidade w_k^i será menor.

Um expoente n mais baixo significa que os pontos do contorno mais afastados de i têm maior influência; pelo contrário, se n é alto, somente os nós de contorno j mais próximos de i terão mais importância.

Se o movimento do corpo imerso não é muito grande, o procedimento descrito acima pode ser simplificado, adotando-se exclusivamente os pontos l e m no contorno móvel e fixo, respectivamente, mais próximos a i , ficando neste caso:

$$w_k^i = \frac{a_{il} w_k^l + a_{im} w_k^m}{a_{il} + a_{im}} \quad (k = 1, 2) \quad (5.5.10)$$

Neste caso, a dimensão do tempo computacional é significativamente menor.

6 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 APRESENTAÇÃO

No presente capítulo são apresentados os resultados obtidos pelo código numérico desenvolvido para esta dissertação, compreendendo desde os exemplos-teste até o estudo de uma seção de ponte que é, afinal, o objetivo do trabalho.

Em um primeiro momento, o programa é submetido a uma fase de testes para verificar seu desempenho frente a diferentes situações de escoamento. Para a análise particular das rotinas que calculam o fluido, isto é, os campos de velocidade e de pressão, utiliza-se um dos mais populares problemas de verificação: o escoamento em cavidade bidimensional. Posteriormente, são testados exemplos que contêm corpos imersos no fluido, observando, desta forma, as rotinas relativas ao acoplamento fluido-estrutura, além do esquema de movimento de malha empregado. Para isso, é escolhido o problema do escoamento sobre um cilindro circular, primeiramente na condição estacionária, e após, permitindo deslocamentos. Também analisa-se o caso do cilindro de seção retangular, com a ocorrência de grandes deslocamentos na direção transversal ao escoamento e na direção rotacional, simultaneamente. Finalmente, é então analisada uma seção de ponte, onde se procura realizar numericamente os ensaios usualmente executados em túneis de vento no estudo do comportamento aerodinâmico e aeroelástico das seções.

As etapas de pré-processamento e processamento foram executadas no Centro Nacional de Supercomputação (*CESUP/UFRGS*), utilizando todos os recursos disponíveis. Como ferramenta, foi tomado o gerador de malhas *MSC/PATRAN*. Para a visualização, apresentação gráfica e animação dos resultados foi empregado o programa *TECPLOT*, versão 8.0, da *Amtec Engineering Inc.*, disponível ao alunos do *CEMACOM*. Para resolver o problema das diferentes formatações de dados das fases de processo envolvidas, foram desenvolvidos pequenos programas de interface entre o código numérico e as unidades de pré e

pós-processamento. Todos os exemplos foram primeiramente compilados através do compilador *FORTRAN 90* e executados, ambos, no supercomputador *CRAY T94*, usando as técnicas usuais de vetorização (Rossa, 2000)

6.2 EXEMPLOS-TESTE

6.2.1 Análise do Escoamento em Cavityde Bidimensional

O problema se resume na análise da recirculação do escoamento de um fluido viscoso no interior de uma cavityde quadrada, induzida pelo movimento da sua parede superior a uma dada velocidade constante.

São estudadas três condições diferentes de escoamento, caracterizadas pelos seguintes números de Reynolds: 100, 1000 e 10000.

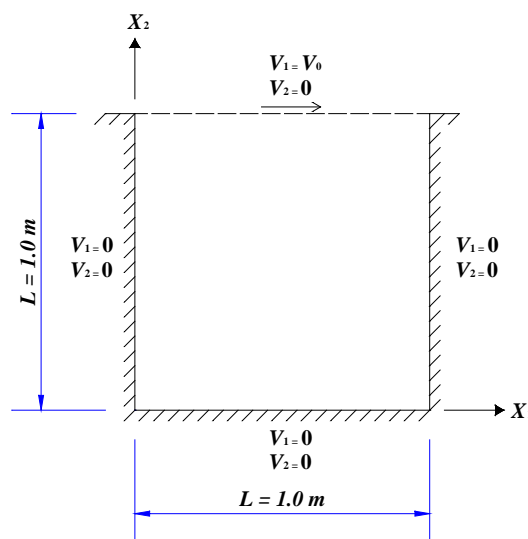


Figura 6.1 - Cavityde 2D: geometria e condições de contorno

Na Figura 6.1 pode-se observar as características geométricas e as condições de contorno utilizadas em todos os casos. Os campos de velocidade e de pressão são inicializados em repouso, seguindo com o avanço do escoamento no seu estado transiente até que seja atingido o regime estacionário. O critério de convergência usado postula que a mesma se dá quando são satisfeitas, simultaneamente, as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NTN} [(v_1^i)^n - (v_1^i)^{n-1}]^2}{\sum_{i=1}^{NTN} [(v_1^i)^n]^2}} &\leq 10^{-5} \\
\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NTN} [(v_2^i)^n - (v_2^i)^{n-1}]^2}{\sum_{i=1}^{NTN} [(v_2^i)^n]^2}} &\leq 10^{-5} \\
\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NTN} [(p^i)^n - (p^i)^{n-1}]^2}{\sum_{i=1}^{NTN} [(p^i)^n]^2}} &\leq 10^{-5}
\end{aligned} \tag{6.2.1.1}$$

onde i é o número de nós da malha de elementos finitos, que vai de um até o número total (NTN). Os superíndices n e $n-1$ referem-se às iterações atual e anterior, respectivamente.

Para todos os casos são utilizadas constantes físicas e geométricas de acordo com a Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Constantes utilizadas na análise da cavidade segundo os casos de escoamento

Constantes	Reynolds 100	Reynolds 1000	Reynolds 10000
Massa específica (ρ)	1.0 Kg/m ³	1.0 Kg/m ³	1.0 Kg/m ³
Viscosidade volumétrica (λ)	0.0 m ² /s	0.0 m ² /s	0.0 m ² /s
Velocidade do som (c)	5 m/s	5 m/s	5 m/s
Velocidade de referência/placa (V_0)	1.0 m/s	1.0 m/s	1.0 m/s
Constante de Smagorinsky (C_S)	-	-	0.2
Dimensão característica/placa (D)	1.0 m	1.0 m	1.0 m

Com base nas constantes apresentadas, a viscosidade cinemática (ν) fica definida pelo inverso do número de Reynolds (Re), conforme a equação abaixo:

$$Re = \frac{V_0 D}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{Re} \tag{6.2.1.2}$$

6.2.1.1 Cavity 2D: Reynolds 100

Para este caso é utilizada uma malha de 50x50 elementos com uma distribuição mais refinada próximo às paredes da cavidade, ficando a menor dimensão de elemento igual a 1.384×10^{-2} m, como pode ser visto na Figura 6.2.

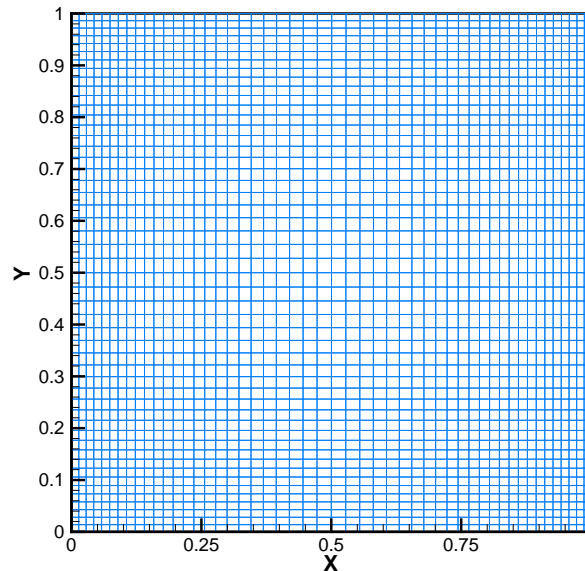


Figura 6.2 - Cavity 2D: malha 50x50 elementos

O passo de tempo empregado na integração numérica segue a equação de Courant (4.3.18), que condiciona a estabilidade do processo. Utilizando um coeficiente de segurança (α) de 1/3 e com base na malha utilizada (Figura 6.2), conduz-se a um incremento de $\Delta t = 8.0 \times 10^{-4}$ s.

A viscosidade cinemática tomada vale $\nu = 10^{-2}$ m²/s.

Na Figura 6.3, observa-se o campo de velocidades do escoamento obtido, representado por meio de vetores que reproduzem a velocidade em módulo e direção naquele ponto.

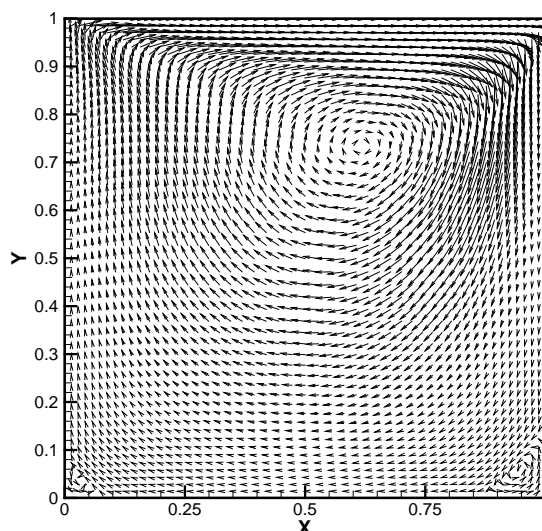
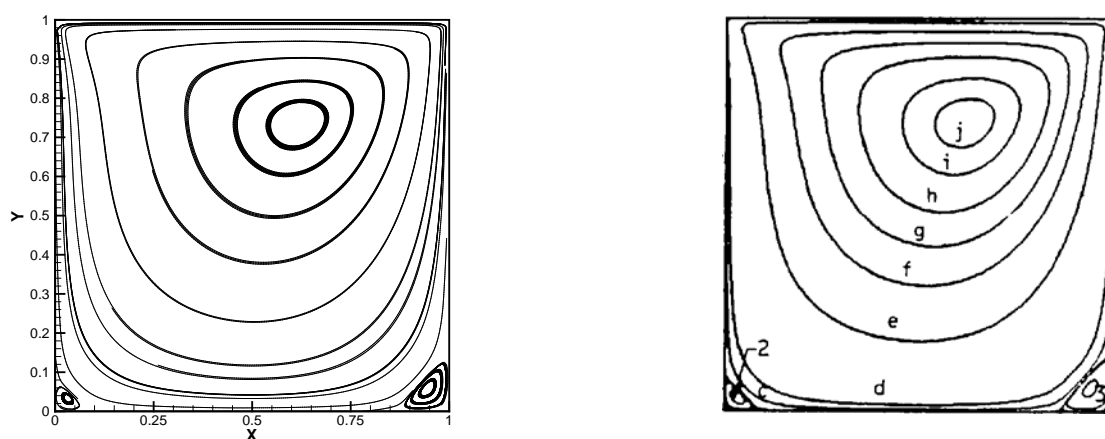


Figura 6.3 - Cavity 2D, Reynolds 100: campo de velocidades obtido

Na Figura 6.4, encontram-se as linhas de corrente do escoamento, exibindo as superfícies de mesma função de corrente. Analisando conjuntamente as duas últimas figuras, pode-se verificar a formação de um grande vórtice com um centro bem definido. Este vórtice é dito primário, pois é o que apresenta magnitude superior aos demais. Os outros vórtices, localizados nos cantos inferiores e no canto superior esquerdo da cavidade, são conhecidos como secundários e vão ficando mais pronunciados à medida que é aumentado o número de Reynolds. Os resultados são comparados aos obtidos por *Ghia et al.* (1982) (Figura 6.4 - b).



(a)

(b)

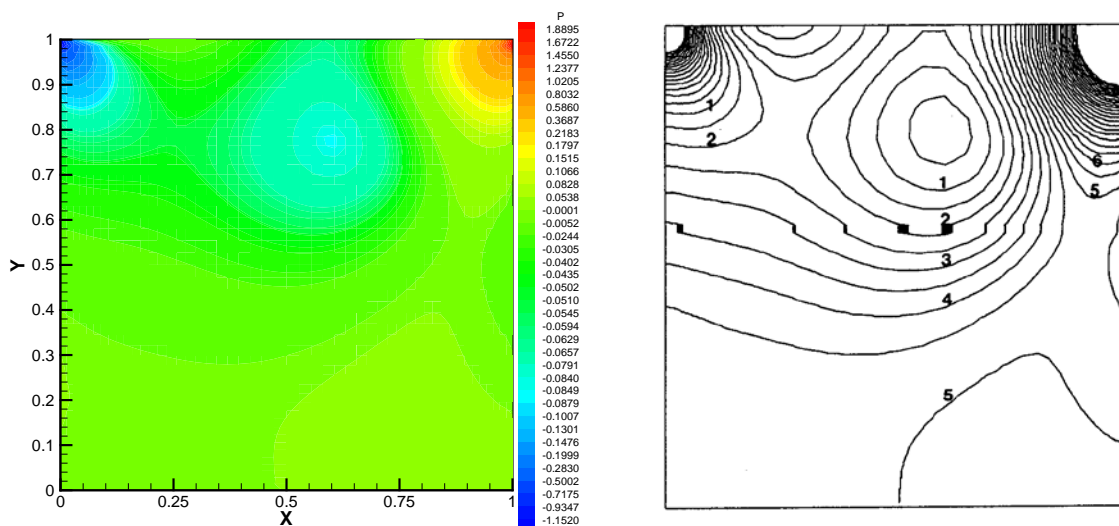
Figura 6.4 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 100:

(a) presente trabalho; (b) *Ghia et al.* (1982)

A Figura 6.5 apresenta as linhas isobáricas no interior da cavidade, onde se pode observar os bulbos de sucção e sobrepressão nos cantos superiores e a sucção gerada pelo vórtice primário. O trabalho de referência utilizado é do *Ramaswamy* (1993). Na Tabela 6.2 são transcritos os valores dos contornos de pressão, apresentados na Figura 6.5 (b), retirados da referência citada.

Tabela 6.2 - Valores dos contornos de pressão transcritos do trabalho de *Ramaswamy* (1993)

Nº contorno	Reynolds		
	100	1000	10000
1	-0.0800	-0.1000	-0.0800
2	-0.0600	-0.0800	-0.0600
3	-0.0400	-0.0600	-0.0400
4	-0.0200	-0.0400	-0.0200
5	0.0000	-0.0200	0.0000
6	0.0200	0.0000	0.0200
7	-	-	0.0400
8	-	-	0.0600
9	-	-	-



(a)

(b)

Figura 6.5 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 100:

(a) presente trabalho; (b) *Ramaswamy* (1993)

Por fim, na Figura 6.6 estão os perfis de velocidade nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade. Ao mesmo tempo, são desenhados os resultados de *Ghia et al. (1982)*, notando-se a semelhança entre ambos.

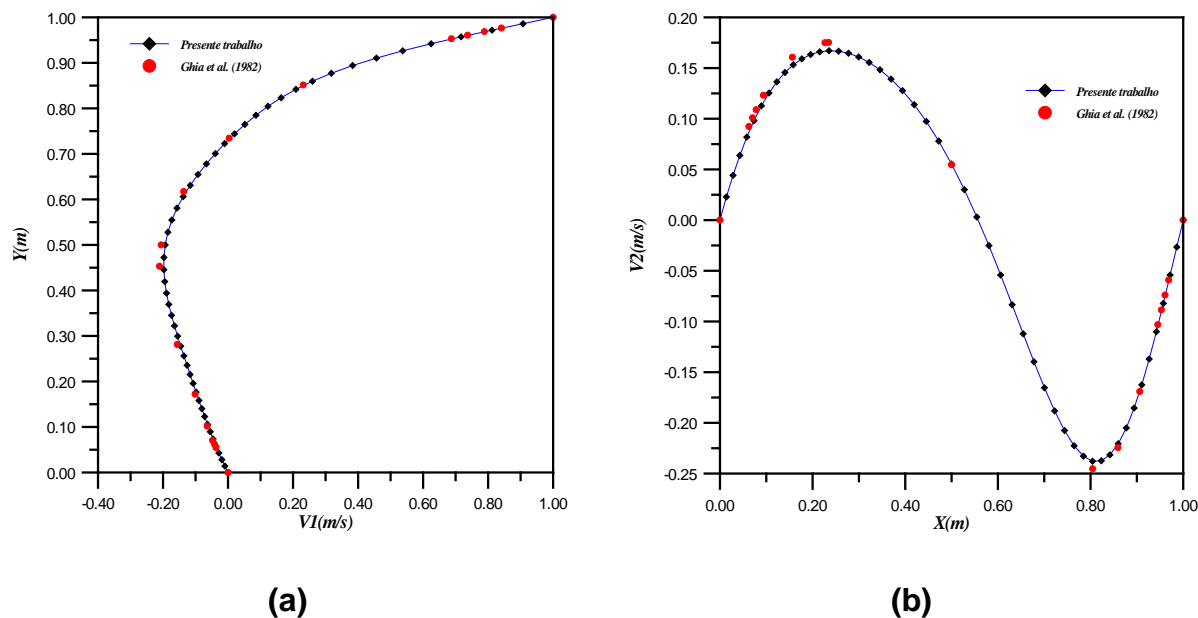


Figura 6.6 - Cavidade 2D, Reynolds 100: perfis de velocidade;
(a) perfil de $V1$ em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de $V2$ em $x_2 = 0.5$ m

6.2.1.2 Cavidade 2D: Reynolds 1000

Neste exemplo são propostas duas malhas distintas para a análise do problema, verificando as diferenças existentes particularmente nos perfis de velocidade. Além daquela exibida através da Figura 6.2, usa-se uma malha de 100×100 elementos conforme a Figura 6.7 mais abaixo, sendo que os resultados mostrados na seqüência, correspondem a este último caso.

A viscosidade cinemática, com a mudança do número de Reynolds, passa a valer $\nu = 10^{-3}$ m²/s. Os incrementos de tempo empregados na análise levam em conta os domínios computacionais usados, ficando em $\Delta t = 8.0 \times 10^{-4}$ s para a malha de 50×50 elementos e $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ s para a malha de 100×100 elementos, cuja menor dimensão encontrada é de 4.007×10^{-3} m. Em ambos os casos o coeficiente de segurança (α) usado na equação de Courant vale 1/3.

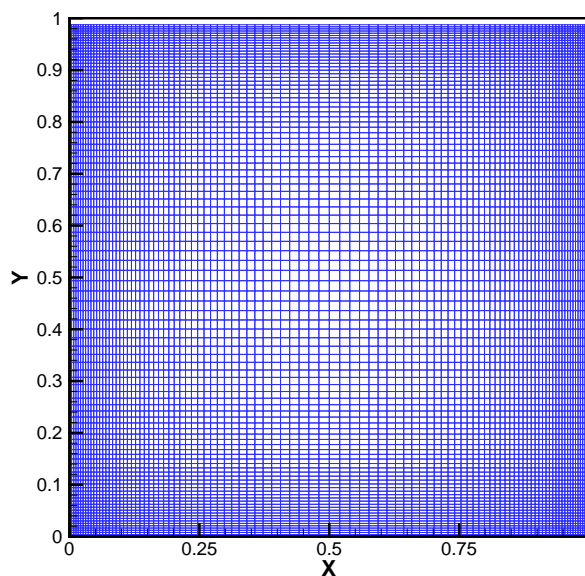


Figura 6.7 - Cavity 2D: malha 100x100 elementos

Nas Figuras 6.8 e 6.9 (a) têm-se, respectivamente, o campo de velocidades e as linhas de corrente obtidas pelo código implementado. Observa-se o avanço do núcleo do vórtice primário em direção ao centro da cavidade, além do aumento do tamanho dos vórtices secundários, como já era previsto. Na Figura 6.9 (b) estão as linhas de corrente obtidas por *Ghia et al.* (1982).

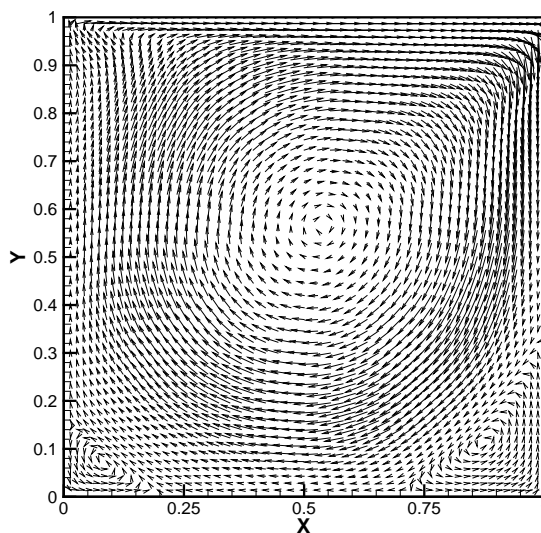
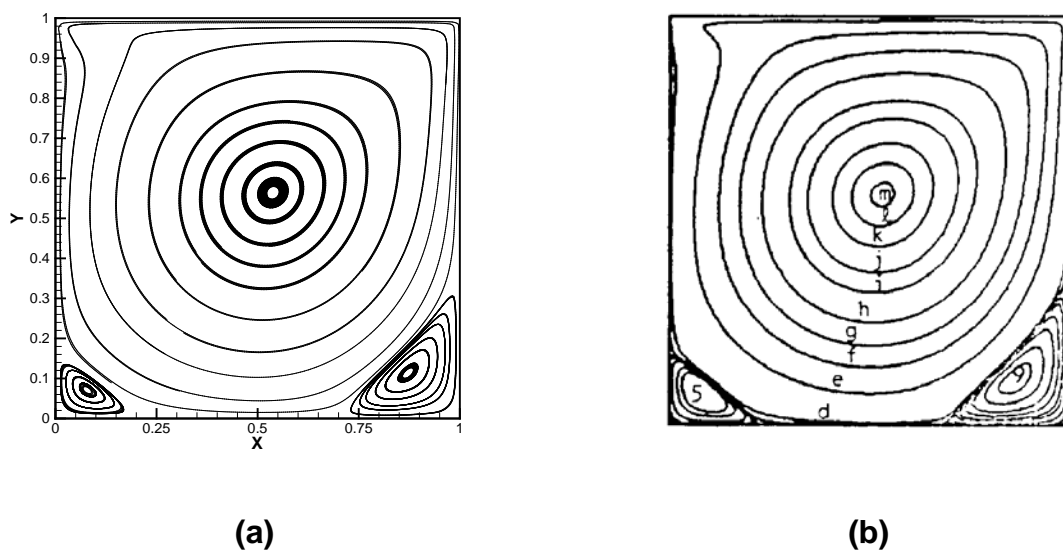
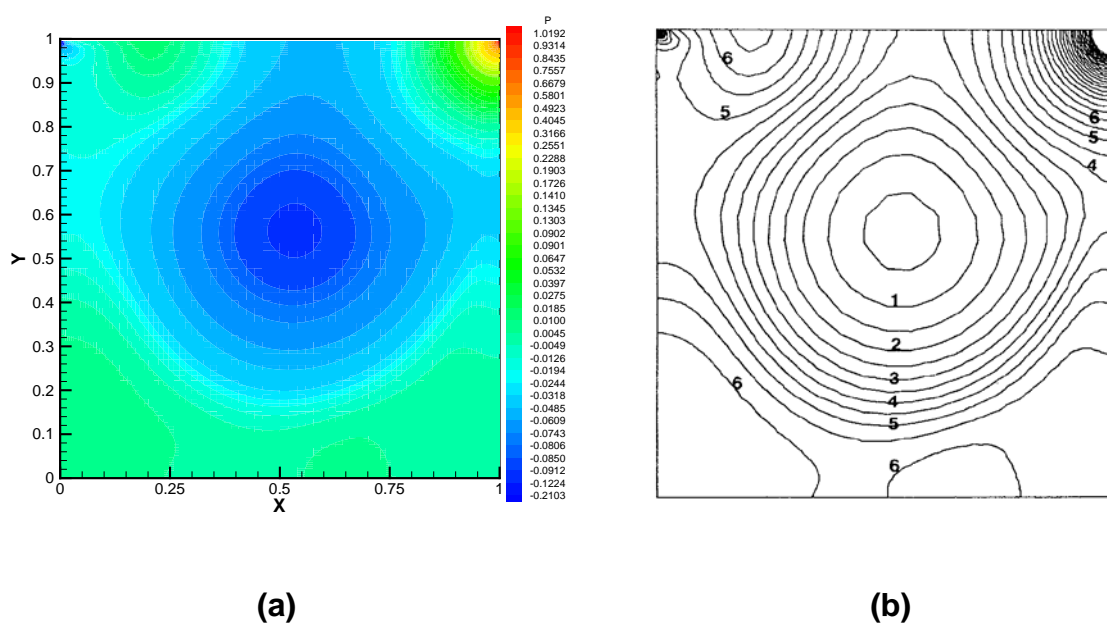


Figura 6.8 - Cavity 2D, Reynolds 1000: campo de velocidades obtido



**Figura 6.9 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 1000:
(a) presente trabalho; (b) *Ghia et al.* (1982)**

Na Figura 6.10 (a) são apresentadas as linhas isobáricas obtidas no interior da cavidade, onde se pode notar que o bulbo de pressões, relativo ao vórtice primário, toma uma forma mais definida e abrangente. Na Figura 6.10 (b) são mostradas as curvas obtidas por Ramaswamy (1993), com os valores das isobáricas sendo encontrados na Tabela 6.2, exposta anteriormente.



**Figura 6.10 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 1000:
(a) presente trabalho; (b) *Ramaswamy* (1993)**

Finalmente, na Figura 6.11 são exibidos os perfis de velocidade nas linhas médias da cavidade, obtidos pelas duas configurações de malha estudadas, juntamente com os resultados apresentados em *Ghia et al. (1982)*. Observa-se que os resultados referentes à malha menos refinada mostram-se insuficientes enquanto que, para a malha de 100x100 elementos, praticamente coincide com o trabalho de referência.

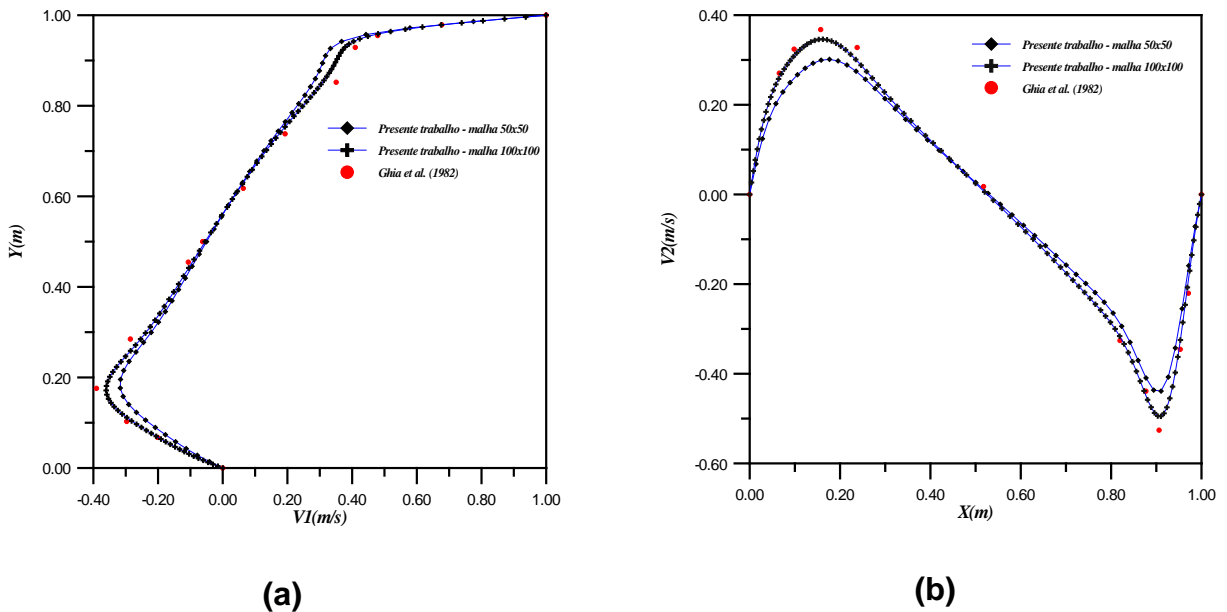


Figura 6.11 - Cavidade 2D, Reynolds 1000: perfis de velocidade;
(a) perfil de $V1$ em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de $V2$ em $x_2 = 0.5$ m

6.2.1.3 Cavidade 2D: Reynolds 10000

Neste último exemplo de cavidade, devido a sua maior complexidade resultante do aparecimento mais efetivo dos vórtices secundários, é exigida uma malha mais refinada, com ênfase nos cantos do domínio. Logo, utiliza-se a malha de 100x100 elementos, já mostrada na Figura 6.7. O passo de tempo é definido levando-se em conta a existência de uma maior restrição deste parâmetro para escoamentos turbulentos, onde a equação de Courant necessita de um coeficiente de segurança (α) menor que os usuais 1/3. Com isso, toma-se $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ s.

A viscosidade cinemática usada no presente caso é no valor de $\nu = 10^{-4}$ m²/s.

Na Figura 6.12 é apresentado o campo de velocidades obtido, onde se pode notar claramente a formação de mais um vórtice secundário no canto superior esquerdo da cavidade.

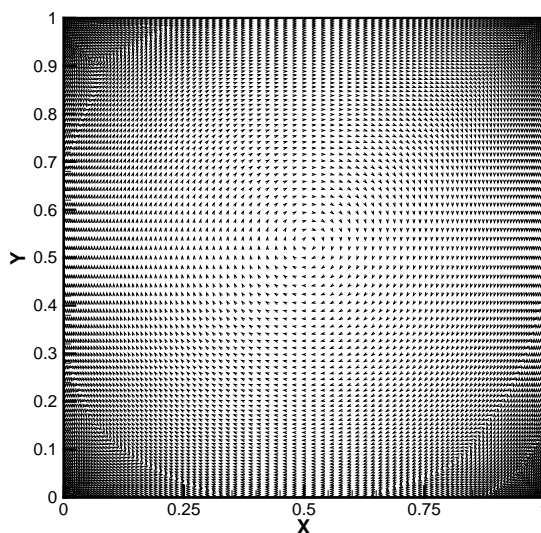
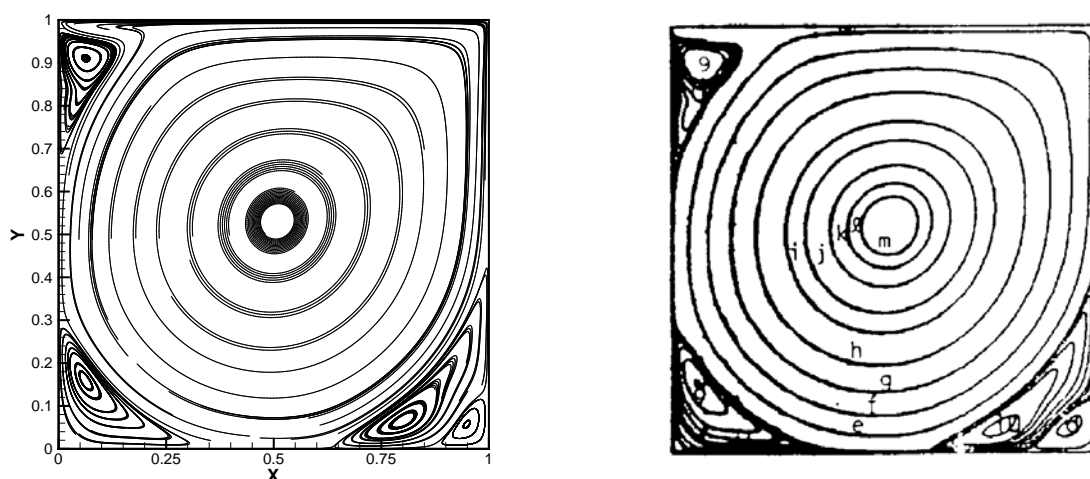


Figura 6.12 - Cavidade 2D, Reynolds 10000: campo de velocidades obtido

Na Figura 6.13, encontram-se as linhas de corrente obtidas pelo presente trabalho (a) e as obtidas por *Ghia et al.* (1982) (b), onde verifica-se a semelhança. Com esta figura, fica mais evidenciada a localização do conjunto de vórtices secundários no interior da cavidade (inferiores direito e esquerdo e superior esquerdo).



(a)

(b)

**Figura 6.13 - Linhas de corrente no interior da cavidade, Reynolds 10000:
(a) presente trabalho; (b) *Ghia et al.* (1982)**

A Figura 6.14 mostra as linhas isobáricas obtidas neste caso, onde se observa o vórtice primário estendendo sua influência por toda a região central do domínio de pressões, ficando os cantos reservados aos vórtices secundários, exceto no canto superior direito que não apresenta formação de vórtices, mas sim uma forte sobre-pressão originada pela incidência do escoamento levado pela parede superior. Na Figura 6.14 (b) são apresentados os contornos de pressão obtidos por *Ramaswamy* (1993), mostrando os mesmos aspectos observados no presente trabalho.

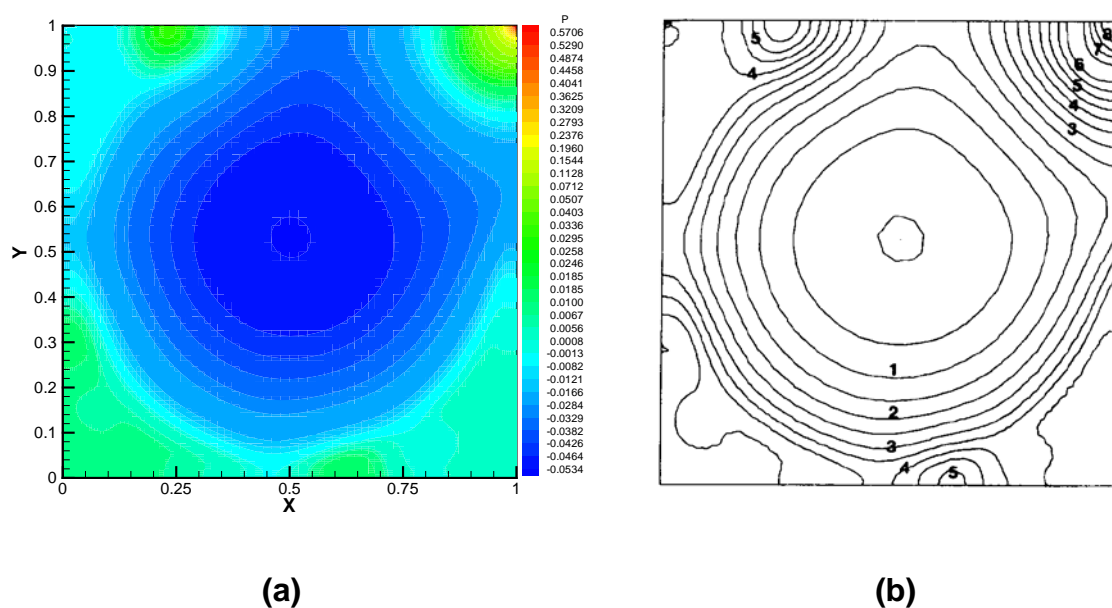


Figura 6.14 - Linhas isobáricas no interior da cavidade, Reynolds 10000:
(a) presente trabalho; (b) *Ramaswamy* (1993)

Por fim, na Figura 6.15 são colocados os perfis de velocidade nas linhas médias da cavidade, além daqueles obtidos por *Ghia et al.* (1982). Como se vê, embora os valores extremos junto às paredes laterais e no núcleo do vórtice central serem praticamente iguais, nos locais intermediários, entre o centro e as extremidades da cavidade, ocorre uma diferença entre os resultados. Esta disparidade deve-se provavelmente a alguma deficiência referente à malha de elementos finitos nestas regiões do domínio, ou ainda devido a questões de estabilidade numérica sob regimes turbulentos, que é mencionada posteriormente na seção de observações finais.

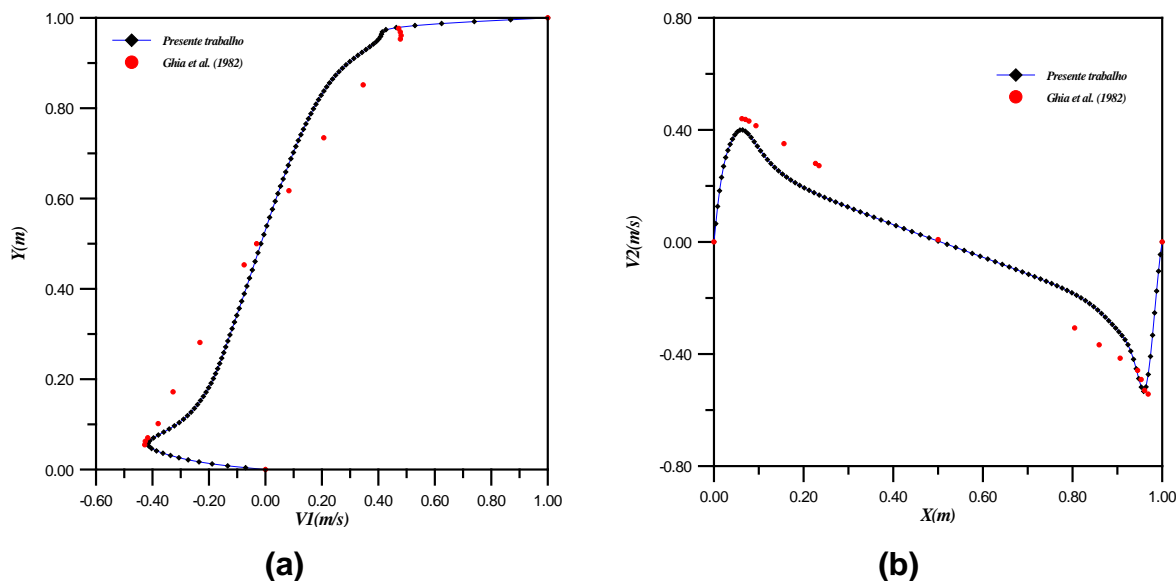


Figura 6.15 - Cavity 2D, Reynolds 10000: perfis de velocidade; (a) perfil de $V1$ em $x_1 = 0.5$ m, (b) perfil de $V2$ em $x_2 = 0.5$ m

6.2.1.4 Cavity 2D: Observações Finais

Em vista dos resultados apresentados para a análise de escoamentos em cavity, pode-se afirmar que o código numérico implementado mostrou ser capaz de simular escoamentos complexos. Além do problema da cavity, ainda foram analisados problemas mais simples como o fluxo de *Couette* e a propagação de uma onda de pressão em um canal fechado, mostrando em todos eles bons resultados, sendo estes últimos não aqui apresentados em prol do estudo da cavity, de maior importância.

Convém ser destacado ainda algumas observações importantes colhidas durante a realização dos testes em cavity. Como se sabe, formulações em elementos finitos que apresentam funções de interpolação com o mesmo grau, tanto para a pressão como para a velocidade, estão infringindo a condição de *Babuska-Brezzi*, que estabelece a necessidade de se utilizar funções interpoladoras de grau diferente para a pressão e para a velocidade para que um problema convirja para a sua solução. No presente trabalho, como foi apresentado anteriormente, ocorre este problema. Em consequência disto, foi observado que o campo de pressões apresentava fortes oscilações. Aparentemente, isto não afetou o campo de velocidades, no entanto, para Reynolds 1000, a convergência só foi possível com a

introdução do tensor de difusividade. Esta técnica é bastante utilizada por diversos autores e resume-se em adicionar uma viscosidade artificial ao sistema, produzindo uma maior estabilidade em problemas com advecção dominante.

Para resolver o problema das oscilações na pressão, foi utilizada a técnica de suavização, que por sua vez, corrigiu o erro. Por esta razão, todos os resultados apresentados são suavizados. Mais adiante, visando reduzir o tempo de execução, foi usado um valor baixo para a velocidade do som ($c = 5$ m/s), respeitando os limites de incompressibilidade. Isto fez com que as oscilações no campo de pressões desaparecessem. Esta mesma observação foi feita por *Rossa (2000)*, utilizando uma mesma formulação em elementos finitos, que analisou o escoamento em cavidade com Reynolds 100 para diferentes números de Mach, verificando que à medida que é reduzido este número, vai ficando cada vez mais necessária a suavização do campo de pressões, em virtude do aumento da amplitude das oscilações. No entanto, observa-se que para números de Reynolds mais altos ainda ocorrem oscilações no campo de pressões, embora com amplitudes menores. Ao mesmo tempo, *Rossa (2000)* concluiu que o campo de velocidades não é afetado por estas oscilações. O mesmo foi verificado no presente trabalho, uma vez que os perfis de velocidade são idênticos, independentemente do número de Mach e, logo, das oscilações na pressão.

Outra constatação diz respeito ao termo de advecção da pressão contido na equação da continuidade. Ele surge da introdução da hipótese de quase-incompressibilidade no modelo. Usando este termo, verifica-se que os valores de pressão convergem mais rapidamente para sua configuração exata. No entanto, ele causa o surgimento de um resíduo que vai sendo somado ao campo com o passar do tempo. Com isso, optou-se em desprezar esta parcela nos exemplos de cavidade, perdendo em tempo de execução, mas não sendo necessário, desta forma, corrigir periodicamente o campo de pressões.

Um aspecto muito interessante observado no estudo da cavidade é a análise sob regime turbulento com número de Reynolds 10000. Com a introdução do modelo de turbulência, verifica-se que a condição de estabilidade de Courant é afetada, uma vez que o coeficiente de segurança usado foi reduzido em comparação aos

utilizados nos casos laminares. Foi observado que tanto o campo de pressões, bem como o de velocidades, não atingiam a convergência ficando oscilantes indefinidamente. Com a redução no intervalo de tempo empregado, foi possível a obtenção dos resultados apresentados para o problema da cavidade com número de Reynolds 10000, de onde pode-se concluir que ainda existe a necessidade de redução deste parâmetro.

Concluindo, ao comprovar a eficácia do programa frente a problemas de escoamentos de fluidos, exclusivamente, foi assim atingida uma meta básica do trabalho. A próxima etapa a ser vencida é a análise de problemas de interação fluido-estrutura, com corpos imersos, estacionários e móveis.

6.2.2 Análise do Escoamento sobre um Cilindro Circular

Este problema constitui-se na análise do escoamento de um fluido viscoso gerado em um domínio restrito ao entorno de um cilindro de seção circular, podendo o mesmo estar totalmente rígido, ou vinculado elasticamente, permitindo deslocamentos em seus graus de liberdade. Deste estudo são, então, obtidas importantes informações sobre as características aerodinâmicas do corpo imerso. Coeficientes de arrasto, sustentação e momento fornecem as forças que o fluido exerce sobre o corpo. O coeficiente de pressão exibe a forma como se distribui a pressão, produzida pelo escoamento, sobre a sua superfície. Com a estrutura móvel, podem ser estudados problemas de instabilidade dinâmica, muito freqüentes em certas estruturas submetidas à ação do vento.

Particularmente, no caso de cilindros circulares, observa-se que há uma dependência entre o número de Reynolds e a configuração do escoamento à jusante do corpo. Para escoamentos com número de Reynolds até em torno de 40, ocorre a formação de dois vórtices simétricos na região de recirculação, logo após o cilindro, com exceção de valores muito baixos, onde o escoamento em torno do corpo adere à sua superfície. Este aspecto se mantém inalterado, apresentando uma esteira de características laminares. Por outro lado, para números superiores ao mencionado, o fluxo mantém-se inicialmente laminar, sendo que, após um pequeno período, inicia-se o desprendimento regular e alternado de vórtices, formando assim, a chamada esteira de vórtices de Von Kármán, que se prolonga por vários diâmetros além do cilindro. Segundo *Schlichting* (1979), este fenômeno é observado para escoamentos com número de Reynolds até 5000, sendo que acima deste valor, a esteira passa a apresentar um aspecto de mistura turbulenta.

Nas seções que seguem, são apresentados os resultados obtidos na análise do problema de interação fluido-estrutura em um cilindro circular, inicialmente fixo, com números de Reynolds 40 e 1500, propositalmente escolhidos para ilustrar o que foi dito no parágrafo anterior. Posteriormente, o cilindro é idealizado de forma a permitir deslocamentos transversais ao escoamento, com os demais graus de liberdade rígidos, caracterizando deste modo, uma situação de estudo de vibrações induzidas por desprendimento de vórtices. O número de Reynolds usado é de 1193.

6.2.2.1 Cilindro Circular Fixo: Reynolds 40

Este caso foi incluído apenas para melhor evidenciar a forma com que o fluxo se comporta para determinados intervalos de números de Reynolds e suas características ao longo do tempo.

Na Figura 6.16 é apresentado o problema proposto com o seu domínio geométrico e as condições de contorno utilizadas. Os campos de velocidade e pressão são iniciados totalmente em repouso.

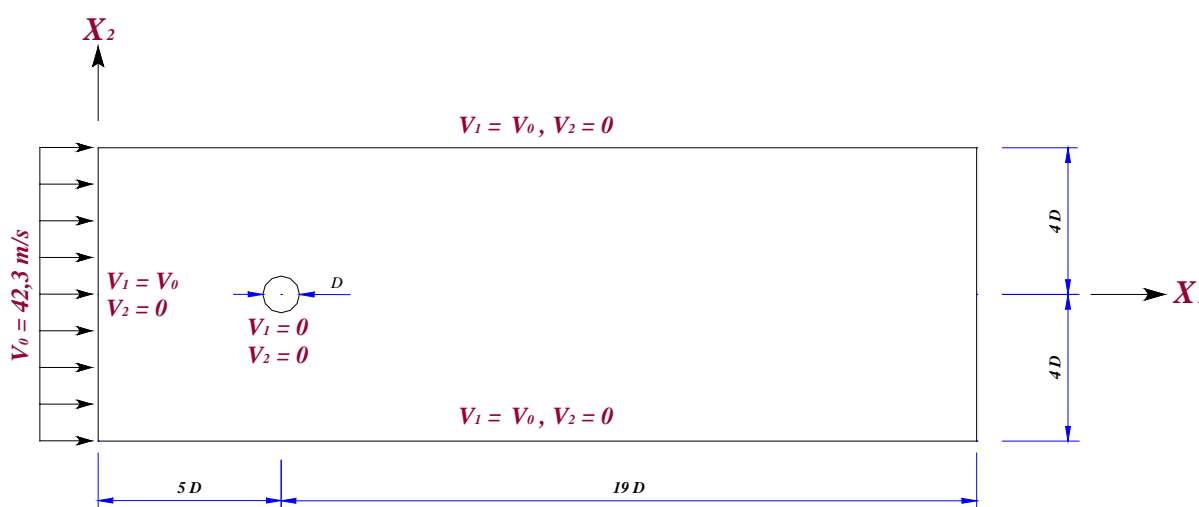


Figura 6.16 - Cilindro fixo, Reynolds 40: geometria e condições de contorno

Para este problema, emprega-se uma malha de 3380 elementos com 3515 nós, conforme a Figura 6.17 abaixo, onde se pode distinguir uma discretização mais refinada próximo ao cilindro, captando assim, com maior precisão, a região de camada limite e de altos gradientes de velocidade e pressão em torno do corpo. A menor dimensão encontrada na malha mede 2.210×10^{-1} m.

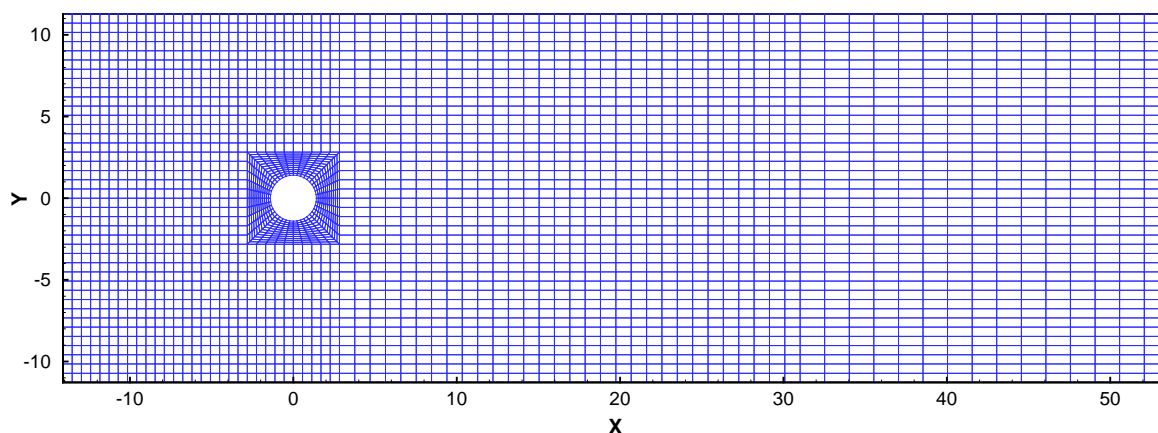


Figura 6.17 - Cilindro fixo, Reynolds 40: malha utilizada

As constantes físico-geométricas envolvidas no caso em estudo podem ser identificadas, com o auxílio da Figura 6.17, através da Tabela 6.3. Como se constata, com as constantes indicadas, chega-se ao número de Reynolds indicado por meio da conhecida expressão (6.2.1.2): $Re = \frac{V_0 D}{\nu}$.

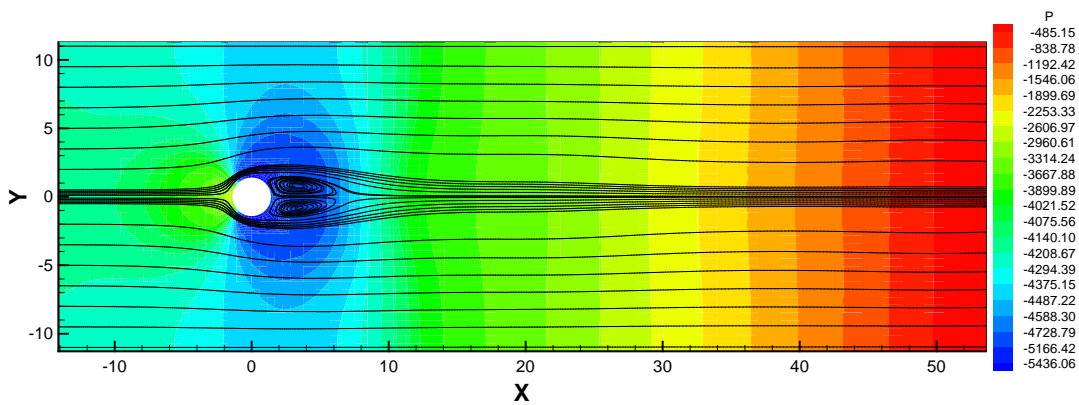
Tabela 6.3 - Cilindro fixo, Reynolds 40: constantes físicas e geométricas usadas

Constantes	Cilindro Fixo - Reynolds 40
Massa específica (ρ)	1.32 Kg/m ³
Viscosidade volumétrica (λ)	0.0 m ² /s
Viscosidade cinemática (ν)	2.98 m ² /s
Velocidade do som (c)	337.0 m/s
Velocidade de referência/entrada (V_0)	42.3 m/s
Constante de Smagorinsky (C_s)	-
Dimensão característica/diâmetro do cilindro (D)	2.82 m

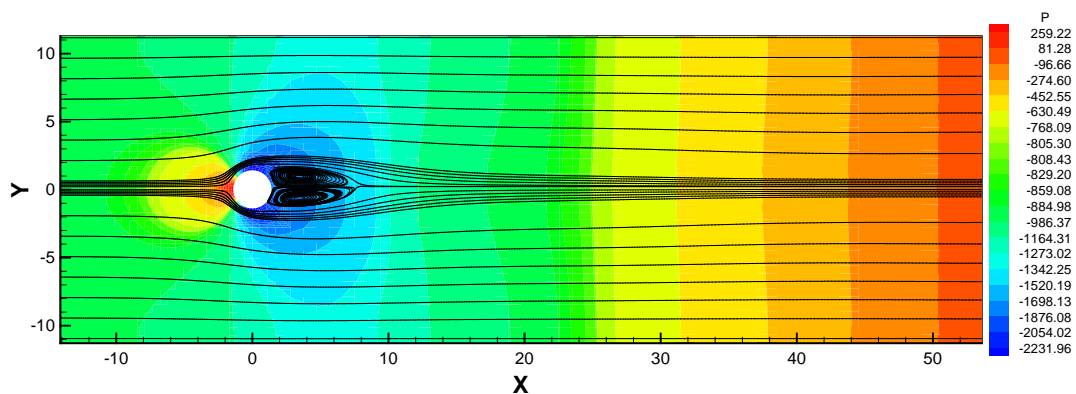
Com base na malha usada e na velocidade de entrada (V_0) e do som (c) do fluido, a equação de estabilidade de Courant (4.3.18) conduz, para $\alpha = 1/3$, a um valor de $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ s.

A evolução do escoamento em quatro instantes de tempo ($t = 2.2$ s, $t = 4.0$ s, $t = 6.5$ s e $t = 9.0$ s) pode ser observada na Figura 6.18, representada pelas linhas de corrente juntamente com a distribuição da pressão no domínio de estudo. Como era de se esperar, verifica-se a formação de dois vórtices simétricos na zona de recirculação após o cilindro, além da esteira laminar permanente. O campo de pressões apresenta uma simetria perfeita durante todo o período de observação. Na

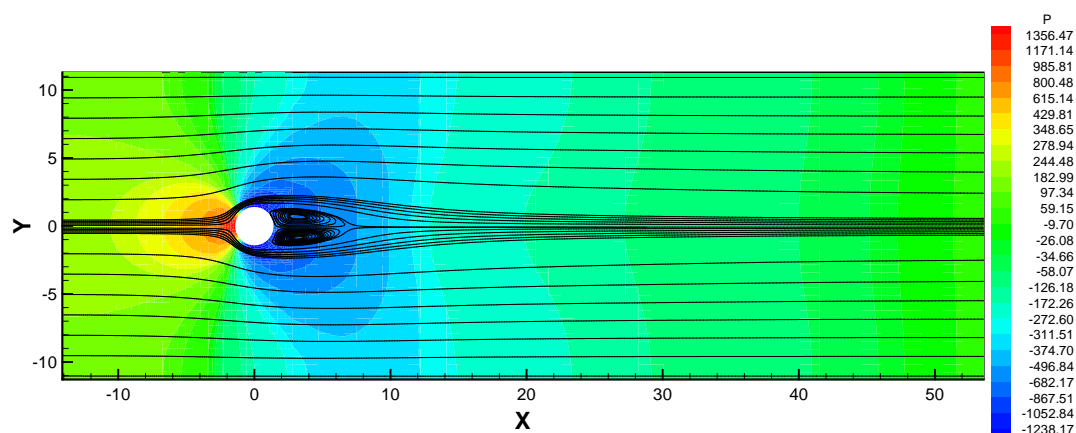
Figura 6.19 é mostrada em detalhe a região de contorno do cilindro, onde nota-se claramente a formação dos vórtices e o ponto de separação do escoamento sobre o cilindro.



(a)



(b)



(c)

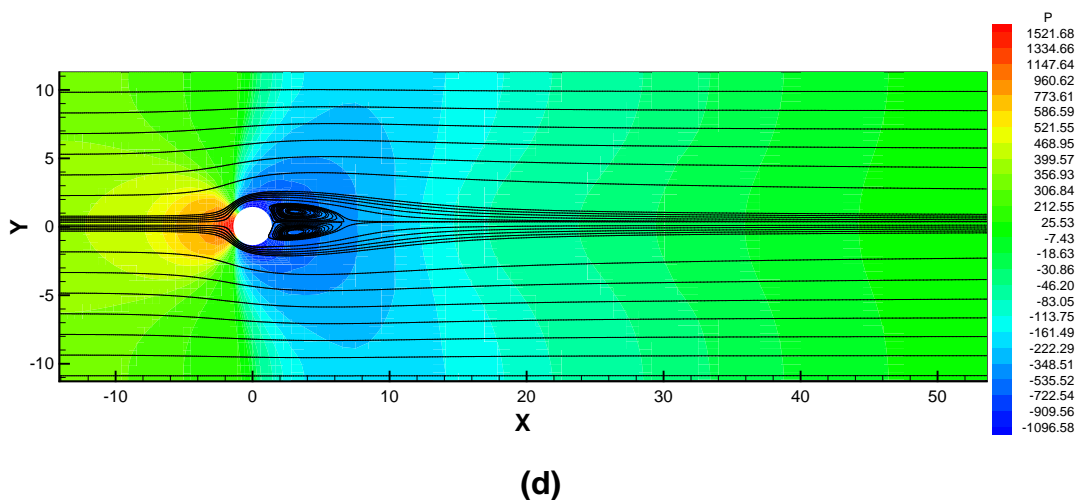


Figura 6.18 - Cilindro fixo, Reynolds 40: Linhas de corrente e campo de pressões ao longo do tempo; (a) $t = 2.20$ s, (b) $t = 4.00$ s, (c) $t = 6.50$ s, (d) $t = 9.00$ s

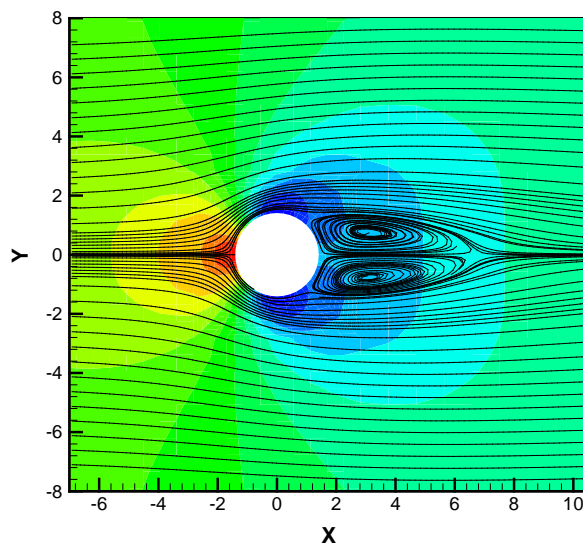


Figura 6.19 - Cilindro fixo, Reynolds 40: Detalhe das linhas de corrente em torno do cilindro em $t = 9.00$ s

Na Figura 6.20, pode ser visto o histórico do coeficiente de arrasto (C_D) obtido, enquanto que na Tabela 6.4, o resultado médio tirado do mesmo histórico é confrontado com outros trabalhos.

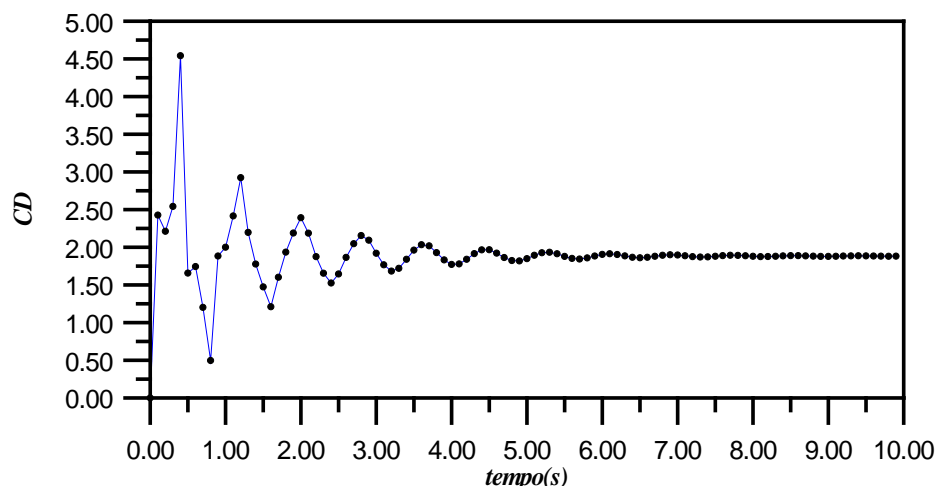


Figura 6.20 - Histórico do coeficiente de arrasto (C_D) sobre cilindro circular, Reynolds 40

Tabela 6.4 - Resultados para coeficiente de arrasto (C_D) sobre cilindros circulares, Reynolds 40

Cilindro Fixo - Reynolds 40	
Referência	C_D
<i>Presente trabalho</i>	1.88
<i>Blessmann (1990) (exper.)</i>	1.88
<i>Schlichting (1979) (exper.)</i>	2.20
<i>Wanderley & Levi (2002) (numer.)</i>	1.60

Na Figura 6.21 tem-se a distribuição do coeficiente de pressão (C_p) sobre a superfície do cilindro, obtida neste trabalho, juntamente com a referência de comparação (Rossa, 2000). Os valores apresentados são tomados da média verificada durante o período de análise.

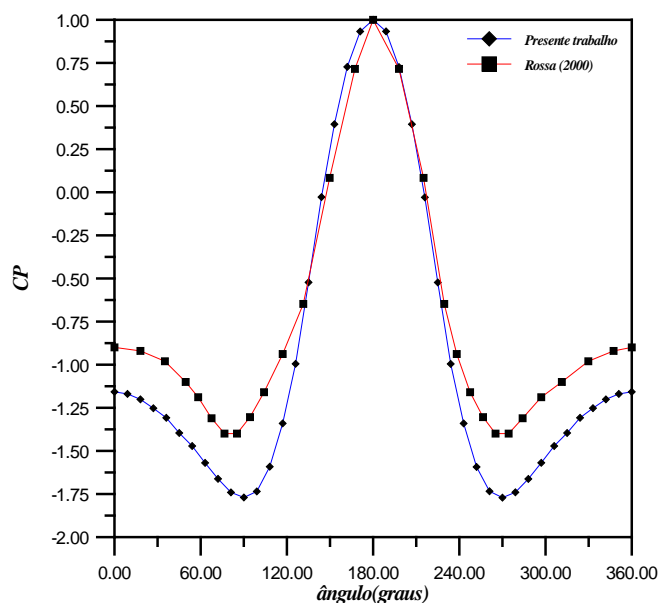


Figura 6.21 - Resultados para coeficiente de pressão (C_p) na superfície de cilindros circulares, Reynolds 40

6.2.2.2 Cilindro Circular Fixo: Reynolds 1500

Para este exemplo são utilizados um domínio e uma configuração de malha diferentes daquelas usadas anteriormente, visando captar melhor as mudanças que ocorrem no escoamento em função do aumento no número de Reynolds. Na Figura 6.22, encontra-se o novo domínio e a distribuição das condições de contorno, que por sua vez, manteve-se análoga ao último caso.

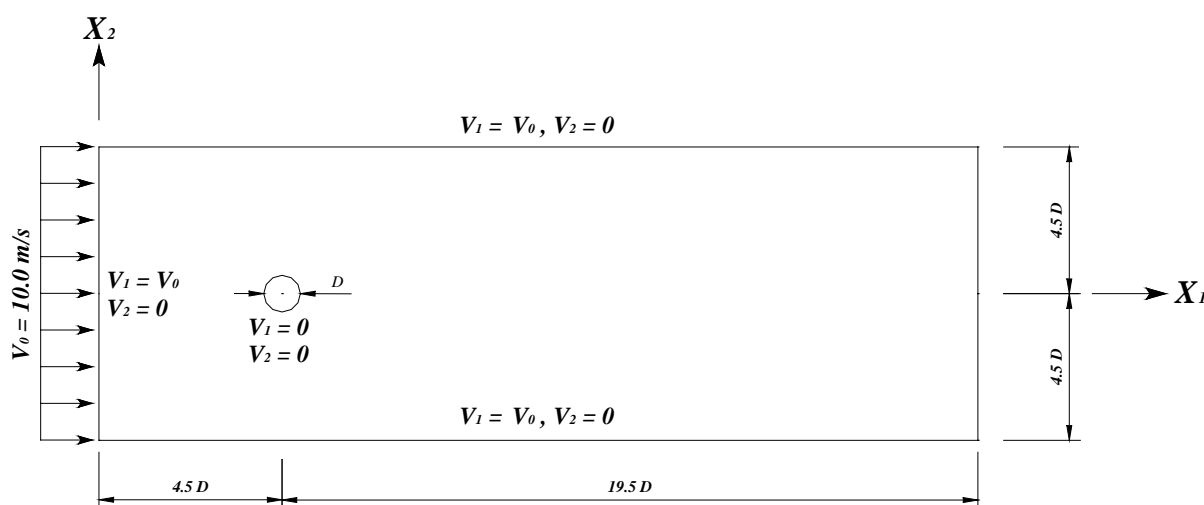


Figura 6.22 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: geometria e condições de contorno

A Figura 6.23 mostra a malha empregada (6336 elementos com 6528 nós), onde destaca-se a maior preocupação com o refinamento da região ao redor do cilindro, além da faixa central posterior, correspondente à esteira. A menor dimensão encontrada no domínio é de 3.270×10^{-2} m. Os campos de velocidade e pressão partem do repouso em todo o domínio.

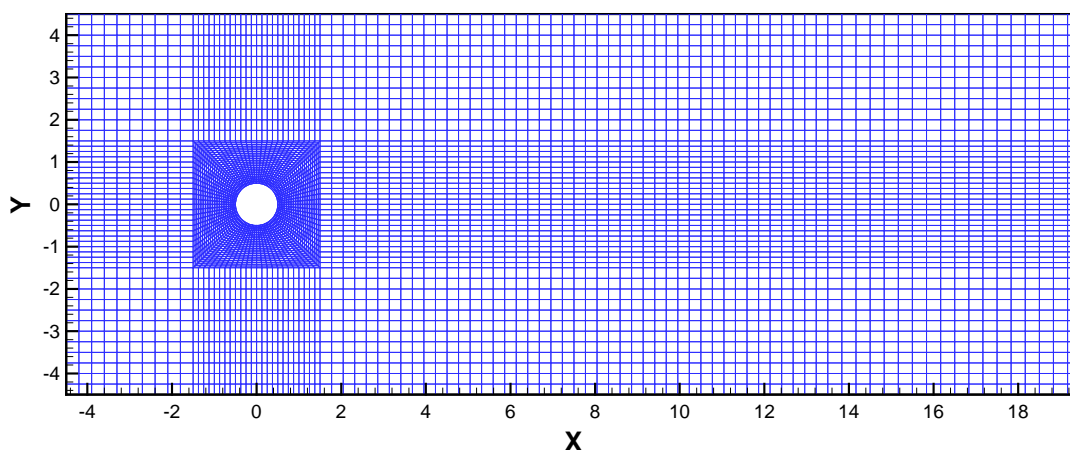


Figura 6.23 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: malha utilizada

Na Tabela 6.5, podem ser encontradas as constantes físicas e geométricas utilizadas no presente problema. Aplicando os respectivos valores à equação de Reynolds, obtém-se o valor proposto de 1500.

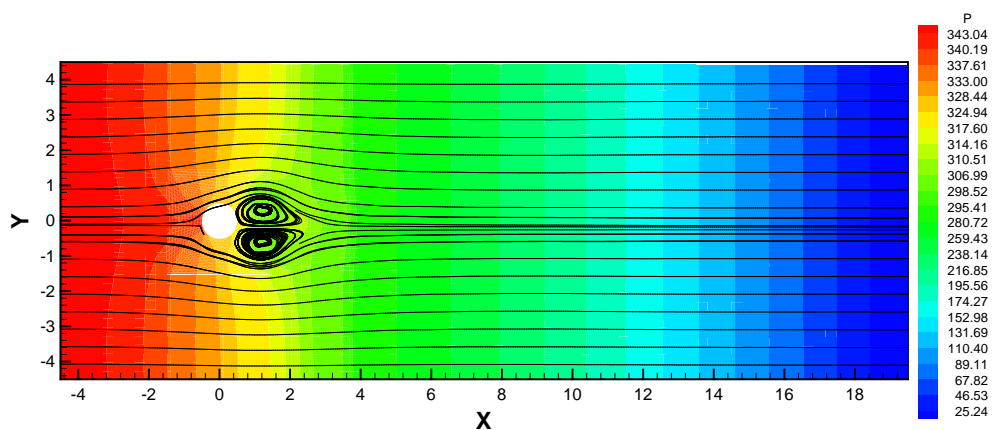
Tabela 6.5 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: constantes físicas e geométricas usadas

Constante	Cilindro Fixo - Reynolds 1500
Massa específica (ρ)	1.32 Kg/m ³
Viscosidade volumétrica (λ)	0.0 m ² /s
Viscosidade cinemática (ν)	0.00667 m ² /s
Velocidade do som (c)	337.0 m/s
Velocidade de referência/entrada (V_0)	10.0 m/s
Constante de Smagorinsky (C_s)	-
Dimensão característica/diâmetro do cilindro (D)	1.0 m

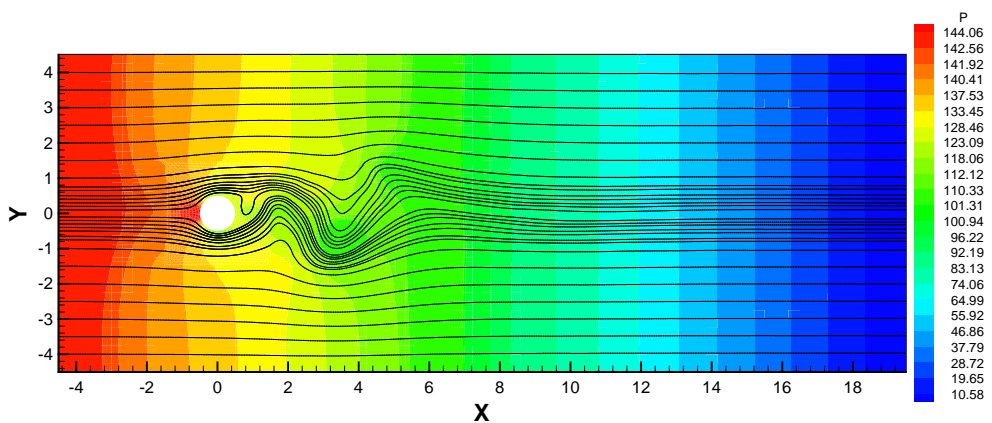
O incremento de tempo usado, segundo a condição de estabilidade usualmente empregada neste trabalho, foi de $\Delta t = 3.0 \times 10^{-5}$ s, para $\alpha = 1/3$.

As mudanças nas linhas de corrente e no campo de pressões ao longo do tempo ($t = 1.50$ s, $t = 3.00$ s, $t = 6.20$ s e $t = 9.00$ s) são visualizadas através da

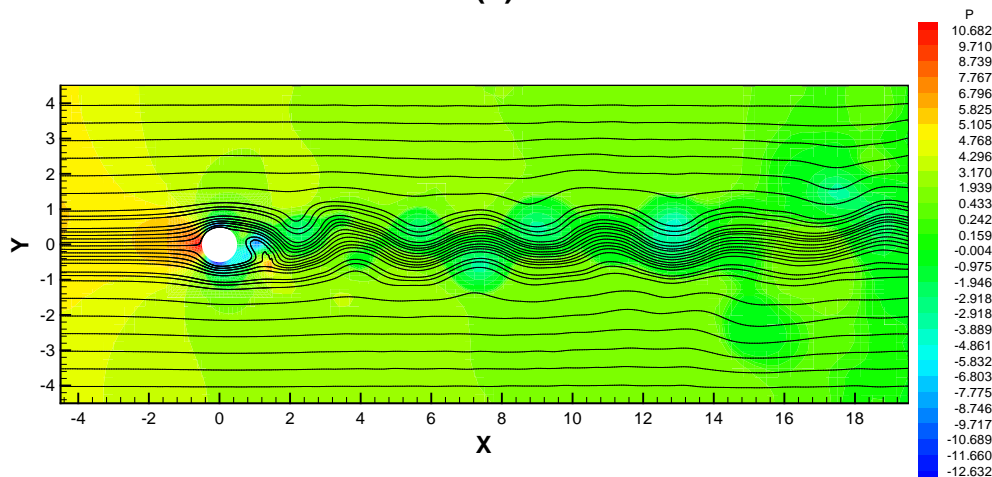
Figura 6.24. Comparando estes resultados com aqueles obtidos para Reynolds 40 (Figura 6.18), fica claro as diferenças para os casos analisados, sendo que neste último, comprova-se o surgimento da esteira de vórtices de Von Kármán depois de uma fase inicial sem perturbações. O fenômeno de desprendimento alternado de vórtices começa a ser notado em $t = 2.30$ s, aproximadamente.



(a)



(b)



(c)

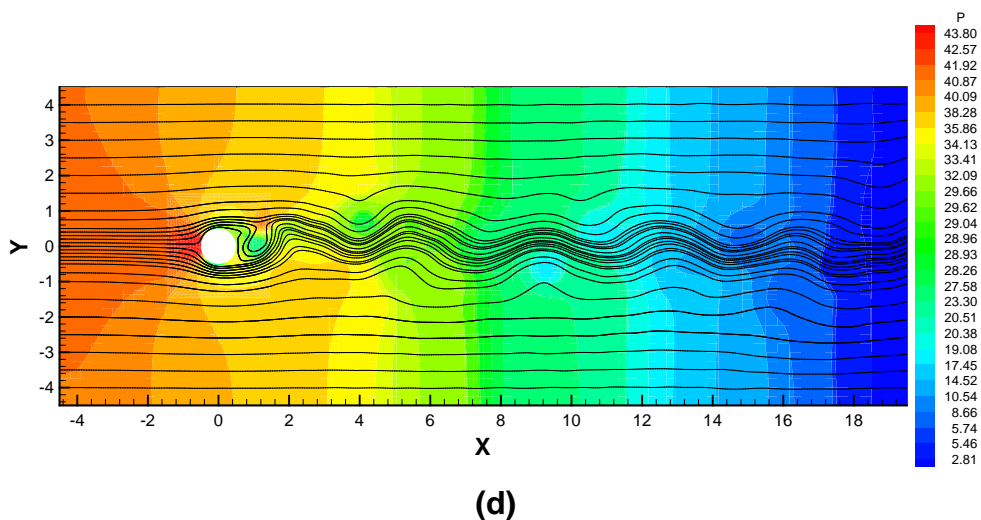
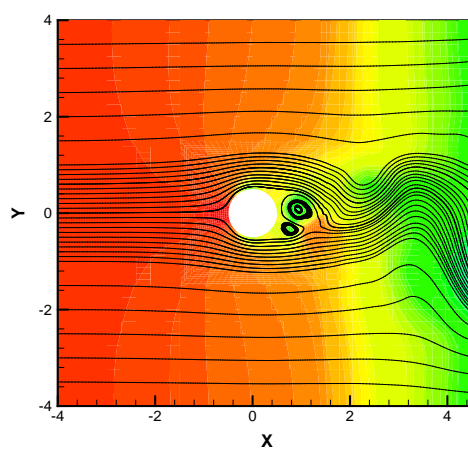
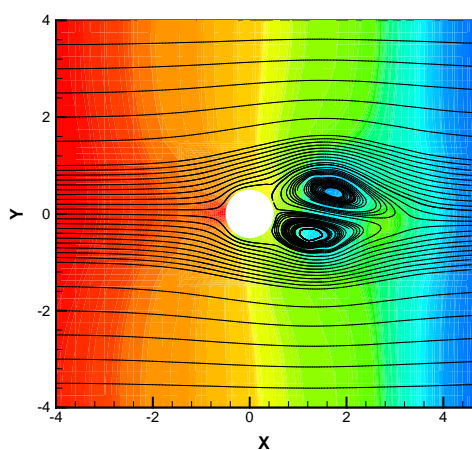
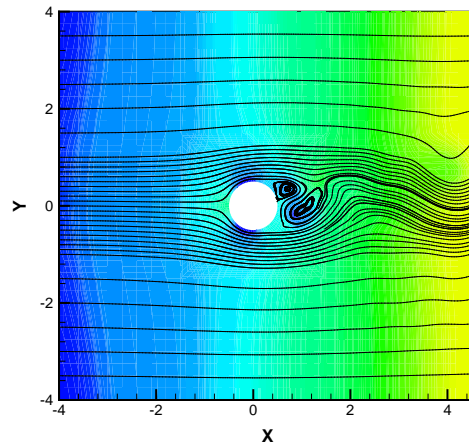


Figura 6.24 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: Linhas de corrente e campo de pressões ao longo do tempo; (a) $t = 1.50$ s, (b) $t = 3.00$ s, (c) $t = 6.20$ s, (d) $t = 9.00$ s

Na Figura 6.25 é apresentada, em uma região na vizinhança do cilindro, a situação das linhas de corrente e da pressão, simultaneamente, em instantes próximos ao início do desprendimento alternado de vórtices. Nota-se, primeiramente, o início da perda de simetria no escoamento e, mais adiante, a alternância no local de desprendimento dos vórtices durante um ciclo de oscilação.





(c)

Figura 6.25 - Cilindro fixo, Reynolds 1500: Detalhe das linhas de corrente em torno do cilindro; (a) $t = 2.40$ s, (b) $t = 3.20$ s, (c) $t = 3.40$ s

Com vistas à determinação do Número de Strouhal (St), é exibido na Figura 6.26 o histórico de velocidades verticais (V_2) em um ponto localizado a $1/5D$ após o centro do cilindro (no sentido do escoamento). Por meio deste histórico, obtém-se o período de oscilações de V_2 , que é o próprio período de desprendimento de vórtices. Analisando a figura, o período fica em 0.40 s. Logo, a frequência de desprendimento (f_v) é de 2.50 Hz. Uma vez que $D = 1.00$ m e $V_0 = 10.0$ m, o número de Strouhal vem dado por:

$$St = \frac{f_v D}{V_0} = 0.25$$

Na Tabela 6.6, o resultado é comparado com os obtidos por diferentes autores, notando-se uma perfeita concordância com os demais resultados numéricos e um valor maior do que as referências experimentais.

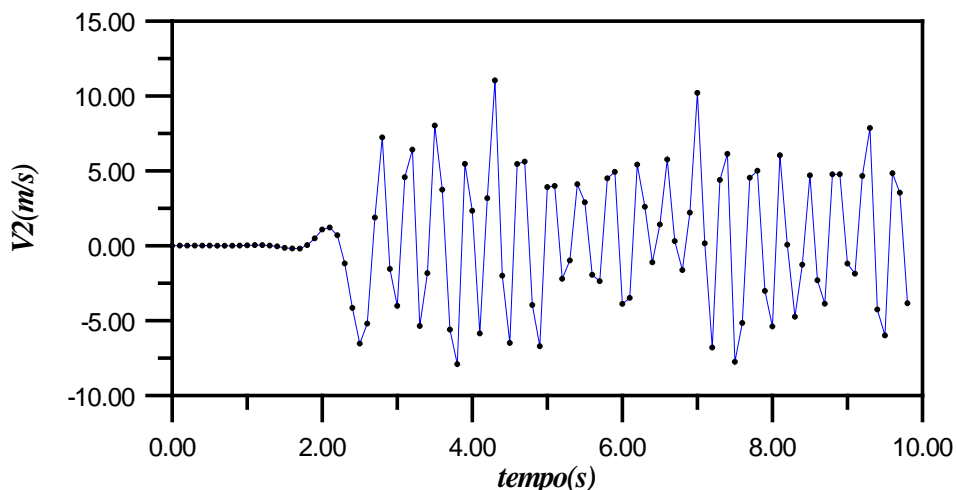


Figura 6.26 - Histórico de V_2 a $1/5D$ após o cilindro, Reynolds 1500

Tabela 6.6 - Resultados para número de Strouhal em escoamento sobre cilindros, Reynolds 1500

Referência	N° de Strouhal - Reynolds 1500
<i>Presente trabalho</i>	0.250
<i>Blessmann (1990) (exper.)</i>	0.200
<i>Schlichting (1979) (exper.)</i>	0.211
<i>González (1993) (numer.)</i>	0.250
<i>Petry (1993) (numer.)</i>	0.250

Os históricos dos coeficientes de arrasto, sustentação e momento são encontrados nas figuras 6.27, 6.28 e 6.29, respectivamente. Na Tabela 6.7 são descritos os resultados obtidos por outros trabalhos, além das médias tiradas dos históricos apresentados abaixo.

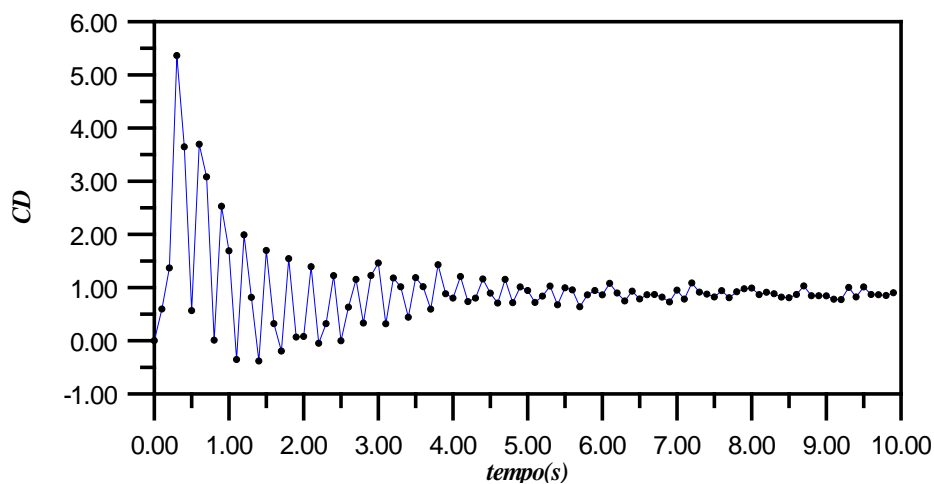


Figura 6.27 - Histórico do coeficiente de arrasto (C_D) sobre cilindro circular, Reynolds 1500

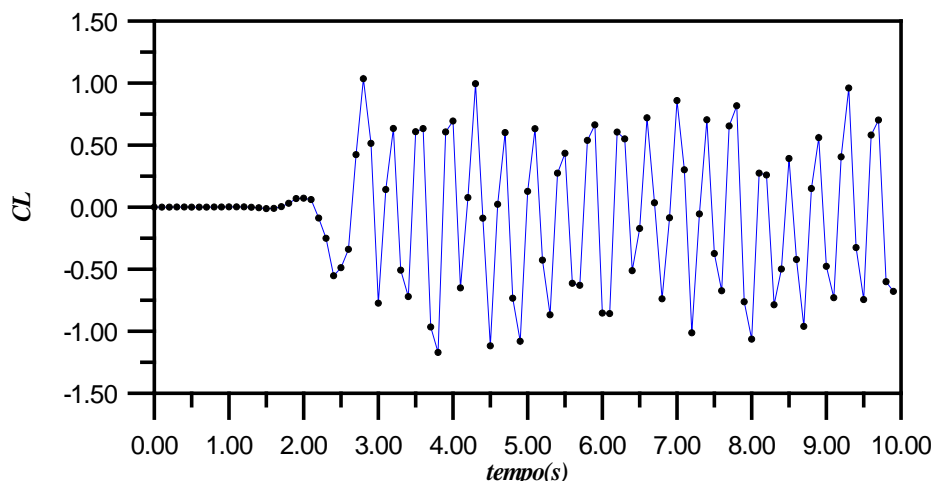


Figura 6.28 - Histórico do coeficiente de sustentação (C_L) sobre cilindro circular, Reynolds 1500

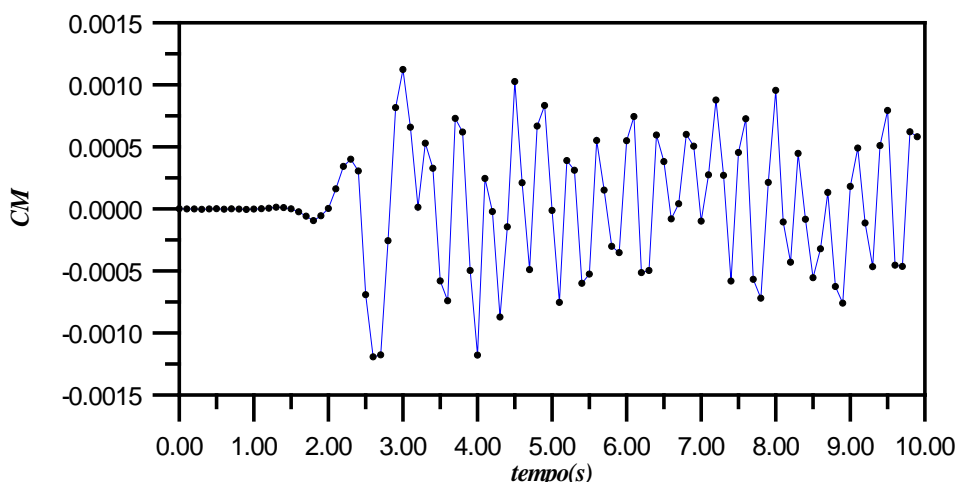


Figura 6.29 - Histórico do coeficiente de momento (C_M) sobre cilindro circular, Reynolds 1500

Tabela 6.7 - Resultados para (C_D), (C_L) e (C_M) sobre cilindros circulares, Reynolds 1500

Cilindro Fixo - Reynolds 1500			
Referência	C_D	C_L	C_M
<i>Presente trabalho</i>	0.95	0.00	0.00
<i>Blessmann (1990) (exper.)</i>	0.92	0.00	0.00
<i>Schlichting (1979) (exper.)</i>	0.95	0.00	0.00
<i>González (1993) (numer.)</i>	0.97	0.00	0.00
<i>Petry (1993) (numer.)</i>	1.00	0.00	0.00

Na Figura 6.30 é mostrada a distribuição do coeficiente de pressão (C_P) obtida sobre a superfície do cilindro, juntamente com resultados de diferentes

referências. Os valores apresentados são tomados da média verificada durante o intervalo de estudo.

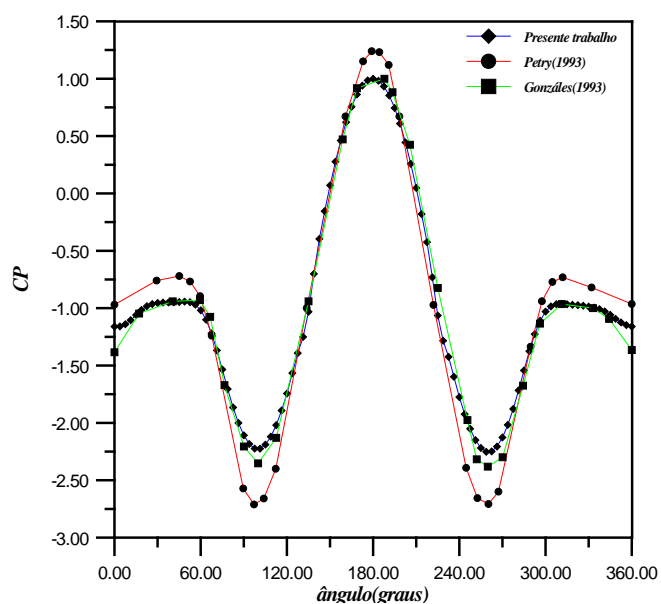


Figura 6.30 - Resultados para coeficiente de pressão (C_p) na superfície de cilindros circulares, Reynolds 1500

6.2.2.3 Cilindro Circular Móvel: Reynolds 1193

A geometria e as condições de contorno empregadas neste problema são ilustradas através da Figura 6.31. Deve ser considerado ainda que os campos de velocidade e de pressão são iniciados em repouso.

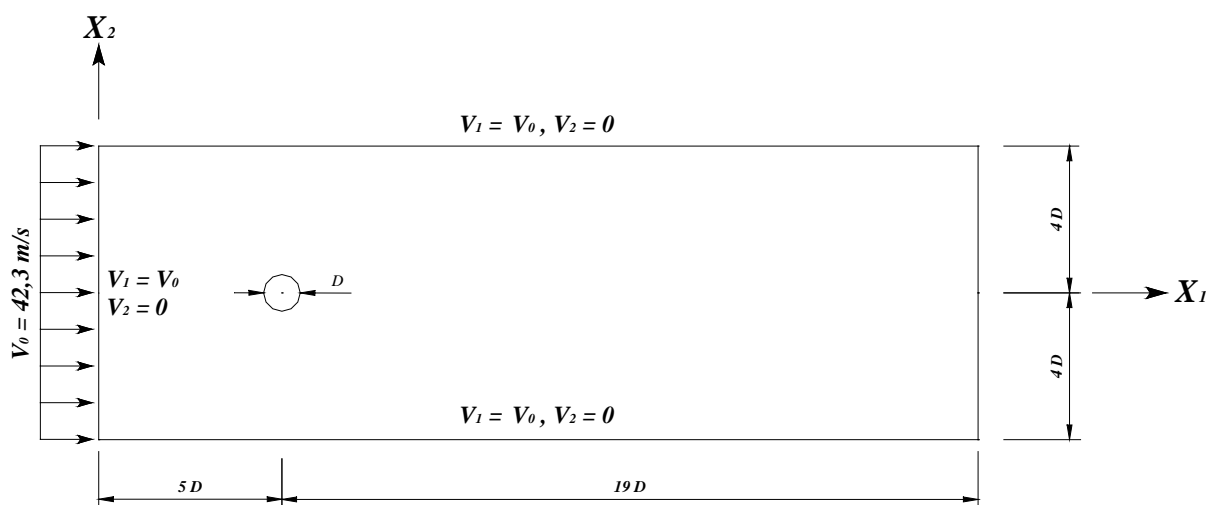


Figura 6.31 - Cilindro móvel: geometria e condições de contorno

O domínio computacional utilizado consiste em uma malha de 3380 elementos com 3515 nós. A malha é idêntica àquela usada para o exemplo do cilindro fixo com Reynolds 40, já apresentada na Figura 6.17. Esta mesma malha foi usada por *González & Awruch* (1995), obtendo bons resultados.

As constantes usadas neste exemplo encontram-se resumidas na Tabela 6.8. Com base nestes dados e na malha de elementos finitos, o incremento de tempo resultante é de $\Delta t = 10^{-4}$ s, para um coeficiente de segurança (α) de 1/3.

Tabela 6.8 - Cilindro móvel: constantes utilizadas

Constantes	Cilindro Móvel - Reynolds 1193
<i>Massa específica (ρ)</i>	0.132 Kgf.s ² /m ⁴
<i>Viscosidade volumétrica (λ)</i>	0.0 m ² /s
<i>Viscosidade cinemática (ν)</i>	0.1 m ² /s
<i>Velocidade do som (c)</i>	337.0 m/s
<i>Velocidade de referência/entrada (V_0)</i>	42.0 m/s
<i>Constante de Smagorinsky (C_s)</i>	-
<i>Dimensão característica/diâmetro do cilindro (D)</i>	2.82 m

Na Tabela 6.9 abaixo, são apresentados os valores referentes às constantes utilizadas na análise dinâmica da estrutura.

Tabela 6.9 - Cilindro móvel: dados da estrutura

Dados da Estrutura	Cilindro Móvel - Reynolds 1193
<i>Rigidez longitudinal (k_{11})</i>	3.0x10 ⁸ kgf/m
<i>Rigidez transversal (k_{22})</i>	3.0x10 ⁴ kgf/m
<i>Rigidez rotacional (k_{33})</i>	3.0x10 ⁸ kgf/m
<i>Massa longitudinal (m_{11})</i>	84.43 kgf.s ² /m
<i>Massa transversal (m_{22})</i>	84.43 kgf.s ² /m
<i>Massa rotacional (m_{33})</i>	11.0 kgf.s ² /m
<i>Amortecimento longitudinal (c_{11})</i>	1.6x10 ⁴ kgf.s/m
<i>Amortecimento transversal (c_{22})</i>	159.15 kgf.s/m
<i>Amortecimento rotacional (c_{33})</i>	5.7x10 ³ kgf.s/m

As linhas de corrente e a distribuição de pressões obtidas para os instantes $t = 2.50$ s, $t = 9.90$ s e $t = 15.00$ s podem ser observadas na Figura 6.32. Estas mesmas grandezas são observadas em detalhe, próximo ao cilindro, para o instante de tempo intermediário, na Figura 6.33. Desta última figura, fica claro o desprendimento dos vórtices do cilindro e a localização da camada limite.

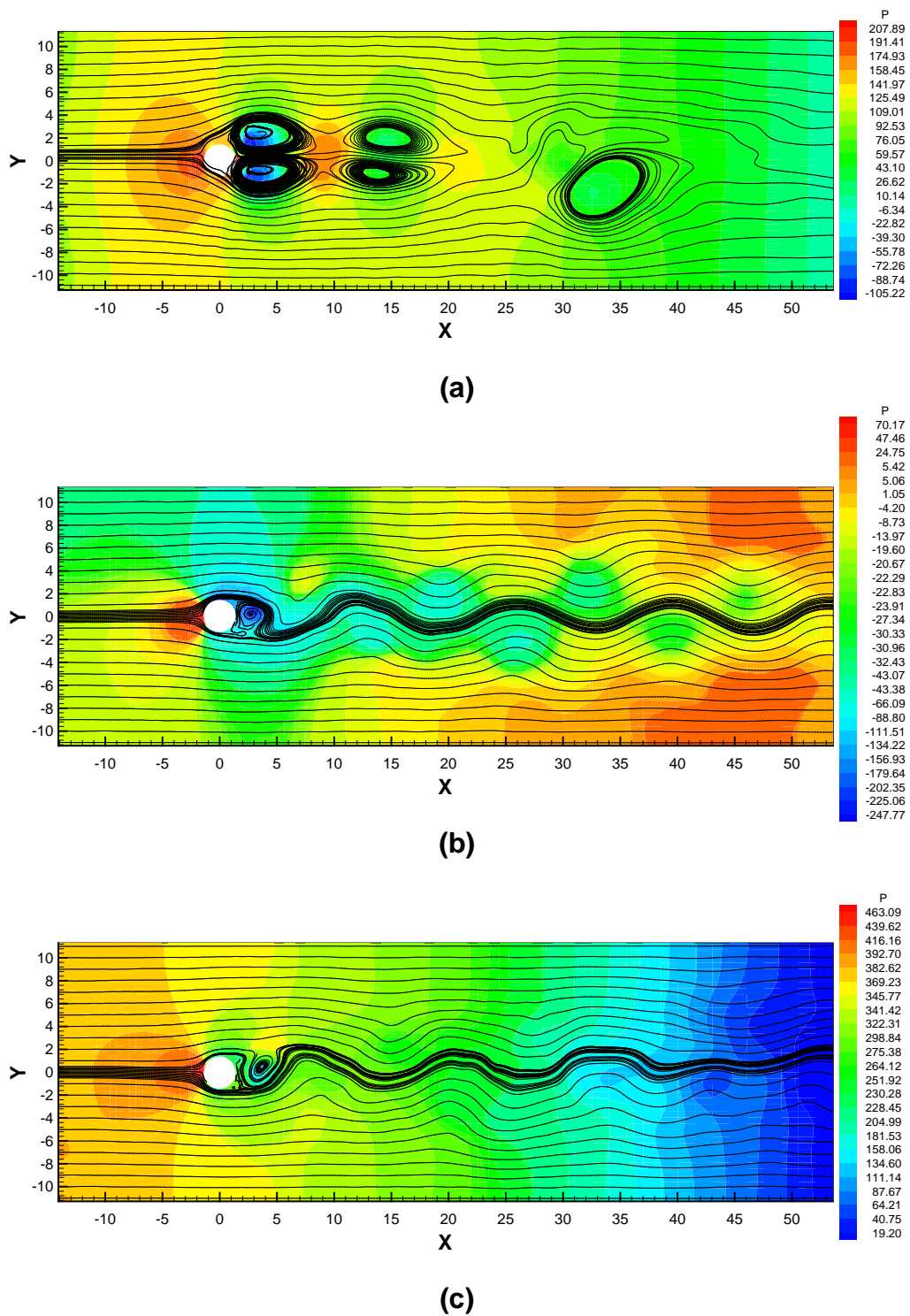


Figura 6.32 - Cilindro móvel: linhas de corrente e campo de pressões; (a) $t = 2.50$ s, (b) $t = 9.90$ s, (c) $t = 15.00$ s

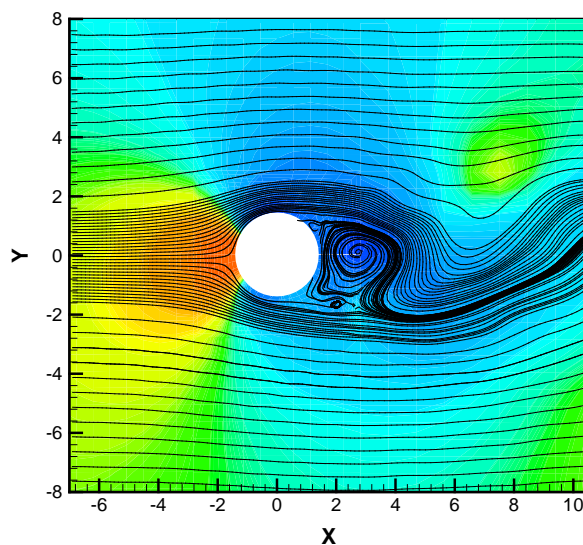


Figura 6.33 - Cilindro móvel: detalhe das linhas de corrente e campo de pressões próximo ao cilindro em $t = 9.90$ s

Na Figura 6.34, encontra-se o histórico de V_2 a uma distância igual a $1/5D$ à jusante do cilindro. Através deste, calcula-se a frequência de desprendimento de vórtices e, conseqüentemente, o número de Strouhal. Na Tabela 6.10, o resultado obtido é comparado com outras referências.

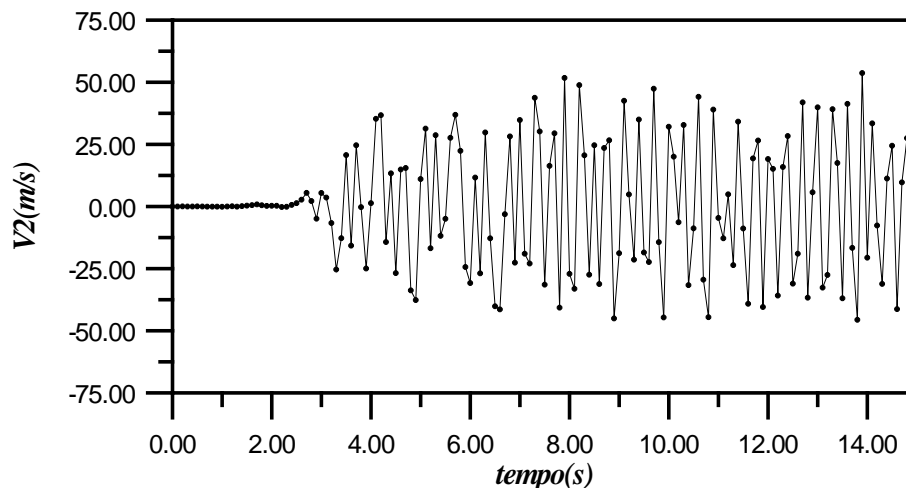


Figura 6.34 - Histórico de V_2 a $1/5D$ após o cilindro, Reynolds 1193

Tabela 6.10 - Resultados de número de Strouhal para cilindros móveis, Reynolds 1193

Referência	N° de Strouhal - Reynolds 1193
<i>Presente trabalho</i>	0.215
<i>González & Awruch (1995) (num.)</i>	0.220
<i>Petry (1993) (numer.)</i>	0.218
<i>Kawahara et al. (1984) (numer.)</i>	0.203

Para efeitos de comparação, quanto aos valores de coeficiente de arrasto, o problema é analisado com e sem movimento de malha. Além de estudar as diferenças entre os métodos, isto propicia uma melhor comparação com os resultados apresentados por *Petry (1993)*, *González & Awruch (1995)* e *Kawahara et al. (1984)*, que usaram esquemas distintos. Enquanto que *González* usa um modelo onde se considera a movimentação da malha de elementos finitos (embora diferente do aqui empregado), *Petry* e *Kawahara et al.* assumem a mesma como sendo estática.

Sendo assim, na Figura 6.35, seguem os históricos dos coeficientes de arrasto obtidos das duas formas de análise, ou seja, usando o esquema de movimento de malha proposto no Capítulo 5 e, depois disso, sem qualquer tratamento para os efeitos do movimento do corpo. Como se observa, a não existência de um modelo que leve em consideração os deslocamentos que a estrutura apresenta durante o período de investigação, acaba por superestimar os valores do arrasto sobre o cilindro. Na Tabela 6.11, encontram-se os resultados médios obtidos juntamente com outras referências. Para o caso com movimento da malha a média é tomada entre os instantes $t = 7.50$ s e $t = 15.00$ s da Figura 6.35. Para a condição de malha fixa, o período de média está entre $t = 6.00$ s e $t = 15.00$ s.

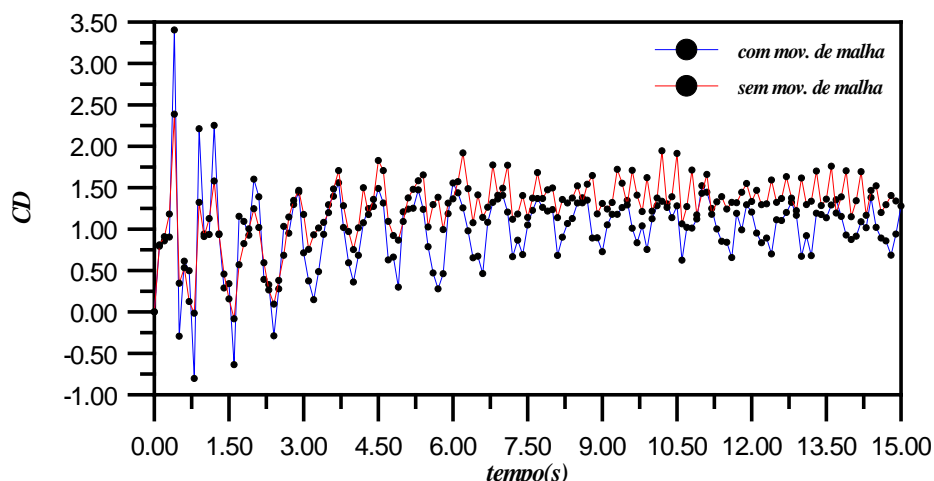


Figura 6.35 - Cilindro móvel: históricos de C_D para diferentes esquemas de análise

Tabela 6.11 - Resultados médios de C_D para cilindros móveis, Reynolds 1193

Cilindro Móvel - Reynolds 1193	
Referência	C_D
<i>Presente trabalho (sem mov. malha)</i>	1.09
<i>Presente trabalho (com mov. malha)</i>	1.41
<i>González & Awruch (1995) (num. - com mov. malha)</i>	1.21
<i>Petry (1993) (numer. - sem mov. malha)</i>	1.50
<i>Kawahara et al. (1984) (numer. - sem mov. malha)</i>	1.68

Como era esperado, os coeficientes de sustentação e momento oscilam em torno de zero, estando de acordo com o que é descrito por diversos pesquisadores.

O histórico de deslocamento transversal da estrutura para o caso estudado (com movimento de malha) é apresentado na Figura 6.36. Como se observa, o resultado se mostra coincidente com o trabalho de *Kawahara et al. (1984)*, onde os deslocamentos oscilam entre +0.055 m e -0.055 m.

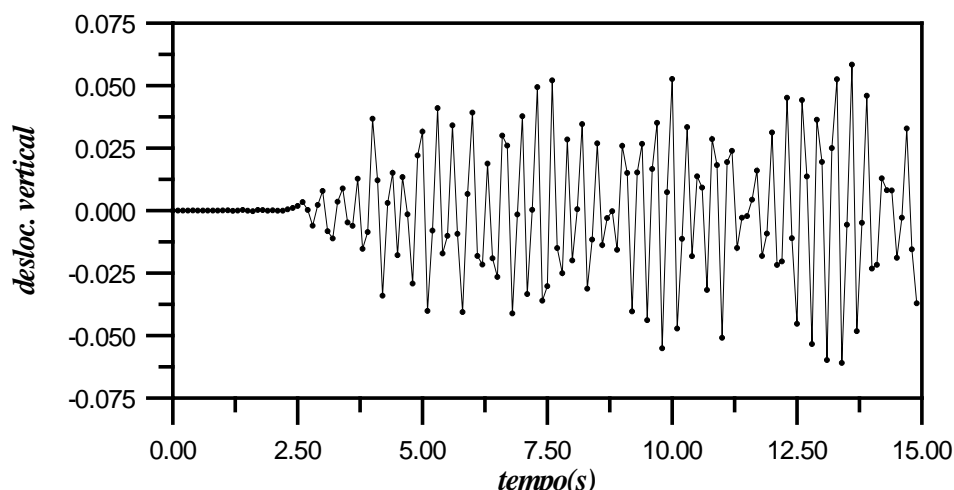


Figura 6.36 - Histórico de deslocamento transversal em cilindro móvel

Na Figura 6.37, encontram-se representadas as distribuições do coeficiente de pressão sobre a superfície do cilindro, obtidas pelo presente trabalho e pelos trabalhos de referência. Os resultados correspondem ao obtido com malha móvel, deste trabalho, além de *Petry (1993)* e *González & Awruch (1995)*. Observa-se que embora os valores de pico mostrem uma discordância, a forma da distribuição é análoga. Esta diferença citada deve-se certamente aos intervalos de tempo em que são extraídos os perfis médios. A média tomada no presente trabalho compreende todo o período de análise.

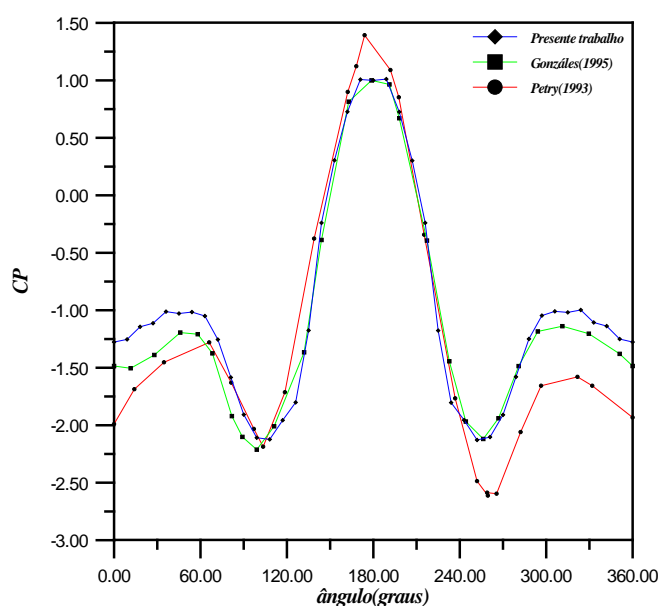


Figura 6.37 - Resultados para coeficiente de pressão (C_p) na superfície de cilindros circulares móveis, Reynolds 1193

6.2.2.3 Cilindro Circular: Observações Finais

Como pôde ser verificado, o programa implementado foi capaz de reproduzir satisfatoriamente os diferentes tipos de escoamento propostos. Os importantes aspectos relacionados ao surgimento ou não da esteira de vórtices de Von Kármán e a forma de recirculação à jusante do cilindro puderam ser observados. Resultados referentes ao corpo imerso (coeficientes aerodinâmicos, número de Strouhal, etc.) obtiveram uma razoável conformidade com as referências citadas, referendando as rotinas de interação fluido-estrutura.

Além disso, algumas observações importantes puderam ser tiradas das análises feitas para os casos de escoamentos sobre cilindro circular estudados e seria útil descrevê-las.

Mais uma vez, a questão sobre o termo de advecção, presente na equação de continuidade de massa, foi abordada. Foi constatado que, para o escoamento com número de Reynolds 40, a presença da parcela advectiva fazia com que os valores do campo de pressões não convergissem, mas sim aumentassem continuamente até estabilizar em um valor extremamente alto. Esta mesma observação pode ser vista para os casos de escoamentos com números de Reynolds mais elevados (1193 e 1500), quando o referido termo não era empregado. Com isso, conduz-se a uma clara conclusão: para casos com advecção dominante deve-se manter a advecção da pressão, enquanto que para escoamentos com números de Reynolds baixos, é necessário retirá-la para que o campo de pressões obtenha a convergência.

No que diz respeito aos resultados dos campos de pressão, foi necessário, como anteriormente, lançar mão do artifício da suavização para corrigir as oscilações presentes.

6.2.3 Análise do Escoamento Sobre um Cilindro Retangular

Este exemplo apresenta, basicamente, as mesmas características da análise do problema do cilindro oscilante, diferenciando-se no fato de que o corpo envolvido é agora um cilindro de seção retangular, tipicamente rombudo, permitindo oscilações tanto na direção transversal ao escoamento como também na direção rotacional. Através deste problema, busca-se analisar o desempenho do programa desenvolvido para casos onde ocorram grandes deslocamentos, de forma acoplada, nas duas direções principais da seção. No presente exercício, uma especial atenção é dada aos resultados referentes à resposta dinâmica da estrutura nos dois graus de liberdade da seção, além dos movimentos apresentados pela malha de elementos finitos, na medida em que é usado, neste trabalho, um esquema de tratamento da dependência não-linear, com relação à rotação da seção, que possuem as equações que regem o escoamento, através da equação de compatibilidade na interface sólido-fluido.

Uma característica importante dos corpos rombudos é a existência de fortes gradientes de pressão na sua superfície, combinado com o descolamento do escoamento em pontos bem definidos, junto às arestas. O resultado disso é uma esteira mais larga e turbulenta que a dos corpos aerodinâmicos, como o cilindro circular, por exemplo. Dependendo da relação entre as dimensões da seção, pode ocorrer o recolamento do fluxo, levando a esteira a formar-se a partir das arestas de barlavento, com uma largura bem menor.

Na seção a seguir são apresentados os resultados obtidos para um escoamento com número de Reynolds igual a 1000. A seção retangular exhibe uma relação altura-largura (h/B) de 0.2. O problema é resolvido utilizando a forma adimensional das equações que governam o fluido (equações 2.2.12 e 2.2.13). Os dados da estrutura são adimensionalizados com base na velocidade e dimensão características, já que a massa específica é considerada unitária.

6.2.3.1 Cilindro retangular móvel: Reynolds 1000

A geometria e as condições de contorno propostas para este exemplo, já na forma adimensional, são mostradas na Figura 6.41. Além disso, considera-se que os

campos de pressão e de velocidade são inicializados com o escoamento já desenvolvido.

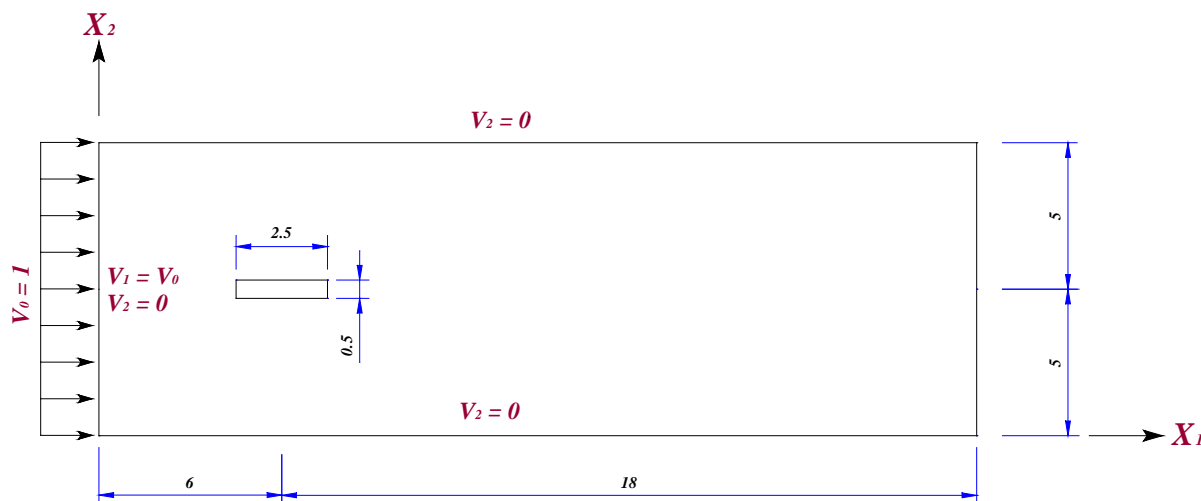


Figura 6.38 - Cilindro retangular: geometria e condições de contorno usadas

A malha de elementos finitos empregada é constituída de 5865 nós com 5700 elementos. A sua distribuição no domínio computacional pode ser vista na Figura 6.39 abaixo.

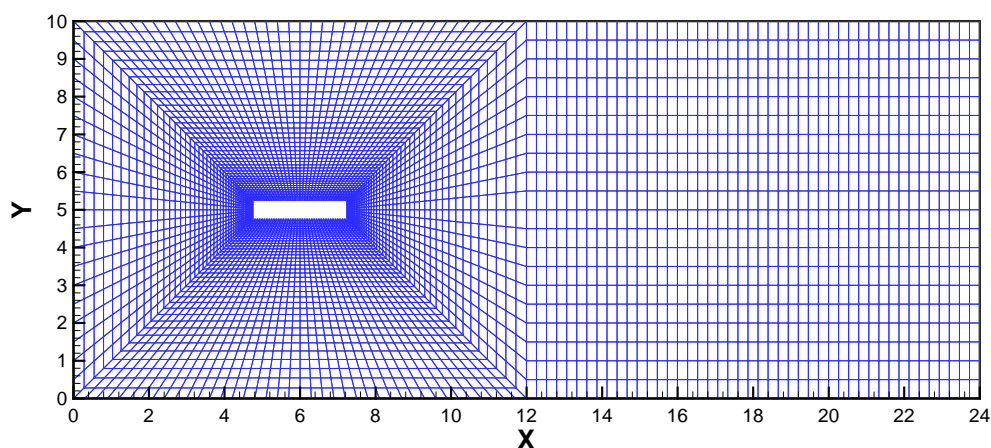


Figura 6.39 - Cilindro retangular: malha utilizada

Os dados utilizados na análise do fluido e da estrutura encontram-se na Tabela 6.12. Todos os parâmetros referentes à estrutura são adimensionais, enquanto que para o fluido, permanecem na forma dimensional. As equações

adimensionais que governam o fluido são obtidas a partir dos valores presentes na tabela abaixo.

Tabela 6.12 - Cilindro retangular: constantes usadas para o fluido e para a estrutura

Cilindro Retangular - Reynolds 1000		
Constantes	<i>Massa específica (ρ)</i>	1.0 Kg/m ³
	<i>Viscosidade volumétrica (λ)</i>	0.0 m ² /s
	<i>Viscosidade cinemática (ν)</i>	0.001 m ² /s
	<i>Velocidade do som (c)</i>	16.67 m/s
	<i>Velocidade de referência/entrada (V_0)</i>	1.0 m/s
	<i>Constante de Smagorinsky (C_s)</i>	-
	<i>Dimensão característica (D)</i>	1.0 m
Dados da Estrutura	<i>Rigidez longitudinal adimensional (k_{11}^*)</i>	3x10 ⁴
	<i>Rigidez transversal adimensional (k_{22}^*)</i>	0.7864
	<i>Rigidez rotacional adimensional (k_{33}^*)</i>	17.05
	<i>Massa longitudinal adimensional (m_{11}^*)</i>	195.57
	<i>Massa transversal adimensional (m_{22}^*)</i>	195.57
	<i>Massa rotacional adimensional (m_{33}^*)</i>	105.94
	<i>Amortecimento longitudinal adimensional (c_{11}^*)</i>	1x10 ⁷
	<i>Amortecimento transversal adimensional (c_{22}^*)</i>	0.0325
	<i>Amortecimento rotacional adimensional (c_{33}^*)</i>	0.0

A menor dimensão encontrada na malha é de 2.500x10⁻² m e, juntamente com os dados fornecidos pela Tabela 6.12, chega-se (através da condição de Courant) a um incremento de tempo adimensional de $\Delta t^* = 4.0 \times 10^{-4}$, com α de 1/3. A equação de Courant adimensionalizada pode ser obtida dividindo a menor dimensão da malha (Δx) pela dimensão característica (L_α), e a soma da velocidade de entrada (V_α) mais a do som (c), pela velocidade de entrada (característica), ficando na forma:

$$\Delta t^* = \alpha M_\alpha \frac{\Delta x^*}{1 + M_\alpha} \quad (6.2.3.1.1)$$

sendo:

$$M_\alpha = \frac{V_\alpha}{c} \quad ; \quad \Delta x^* = \frac{\Delta x}{L_\alpha}$$

Na Figura 6.40 são apresentados os históricos obtidos para deslocamento, velocidade e aceleração nas duas direções da seção. Vale lembrar que o tempo

usado nos gráficos é adimensional. Na Figura 6.41 são reproduzidos os resultados obtidos por *Sarrate et al.* (2001).

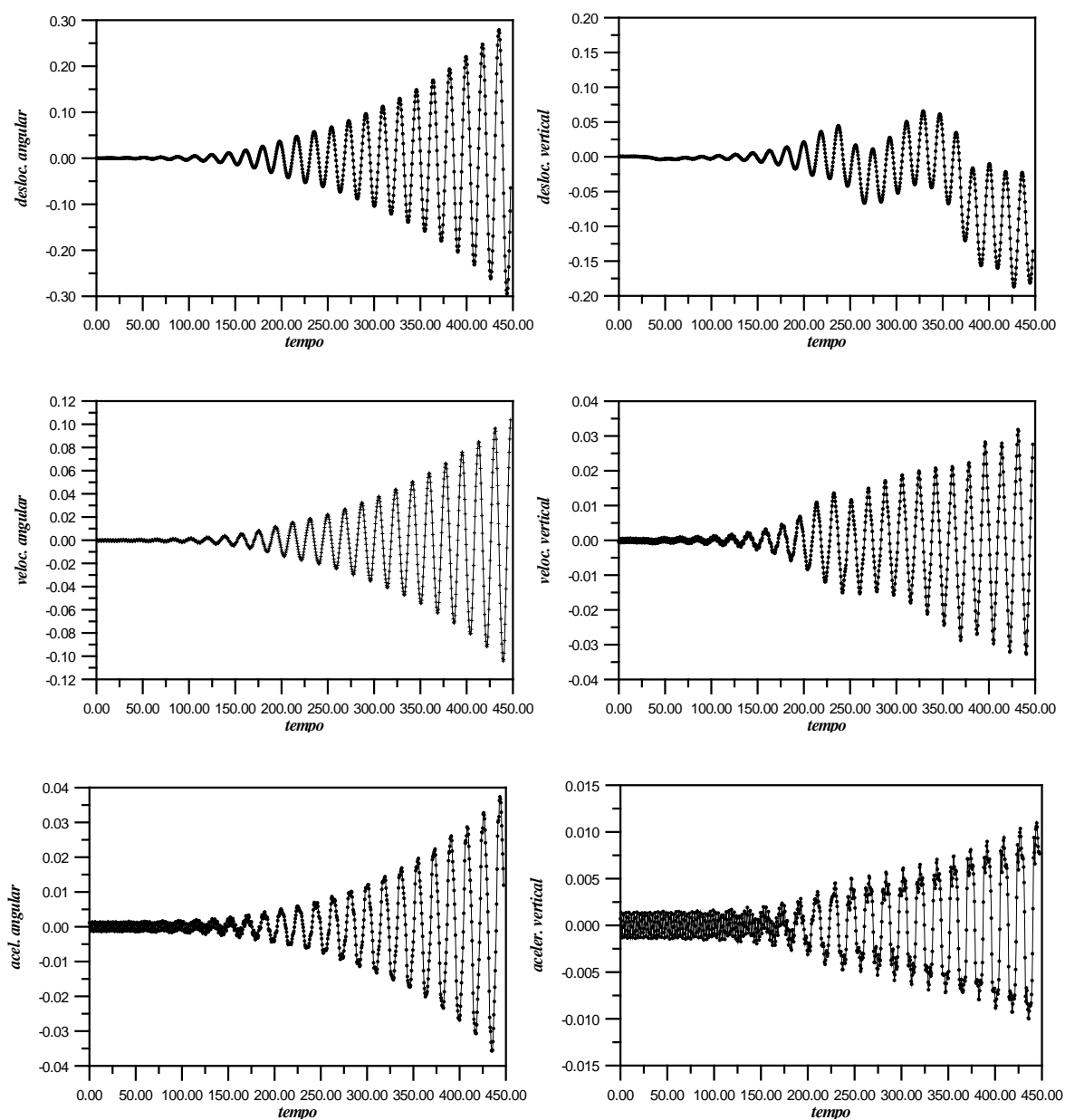


Figura 6.40 - Cilindro retangular: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração para as duas direções da seção

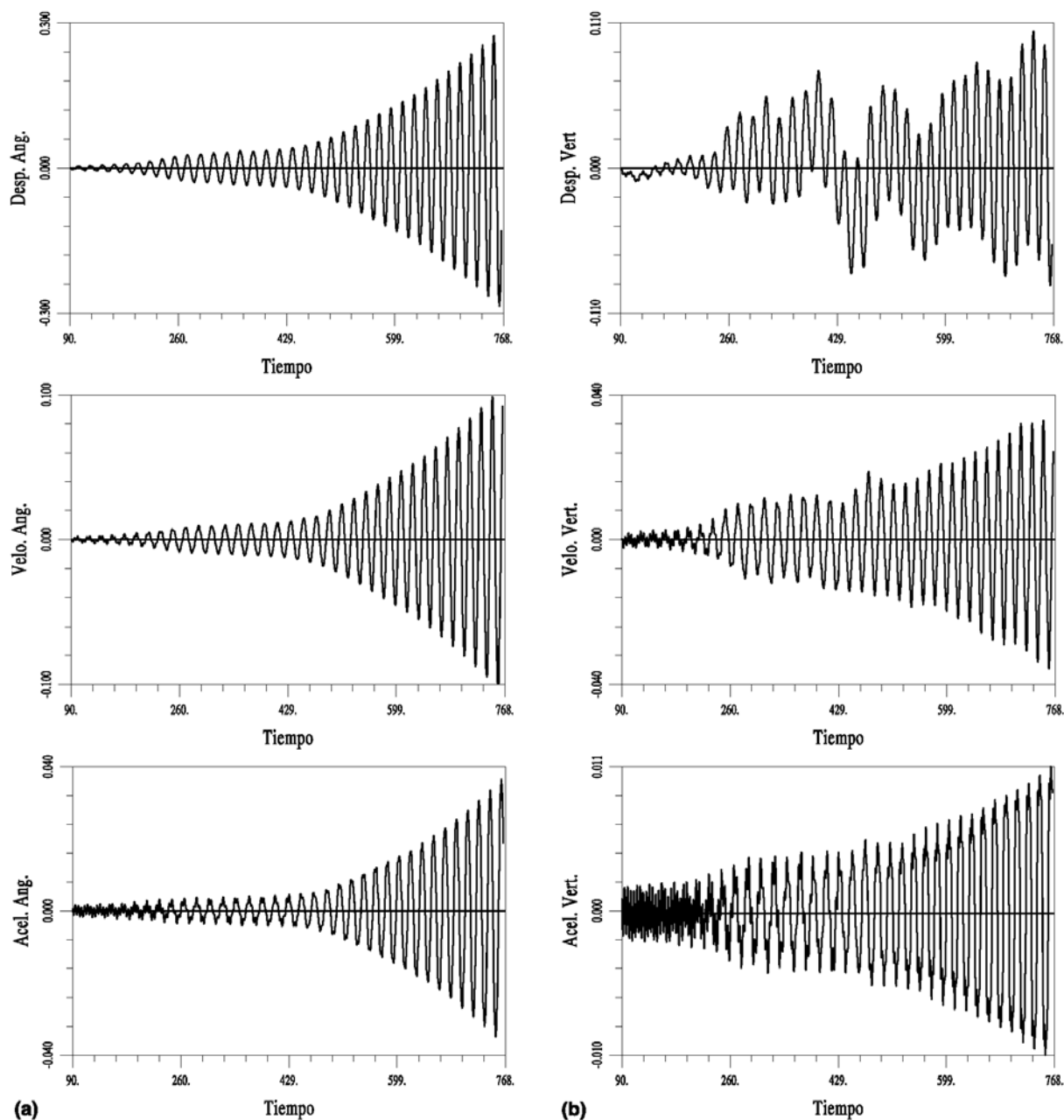
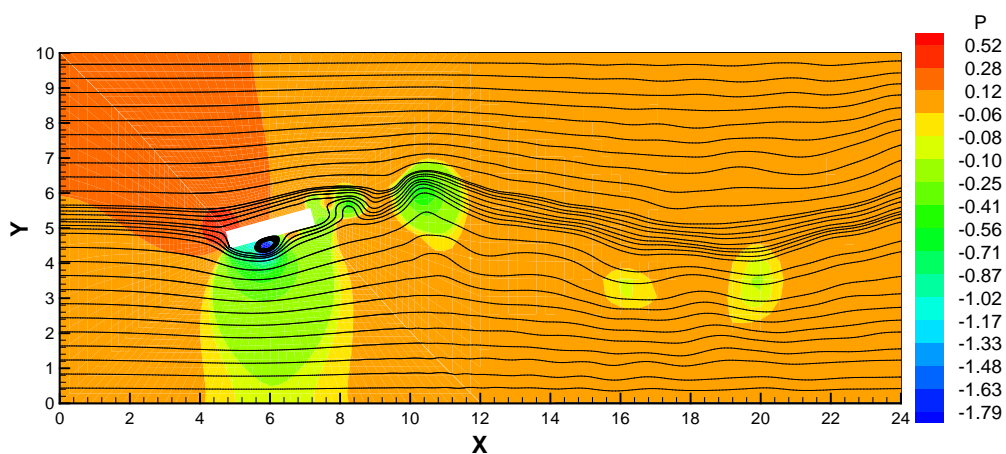


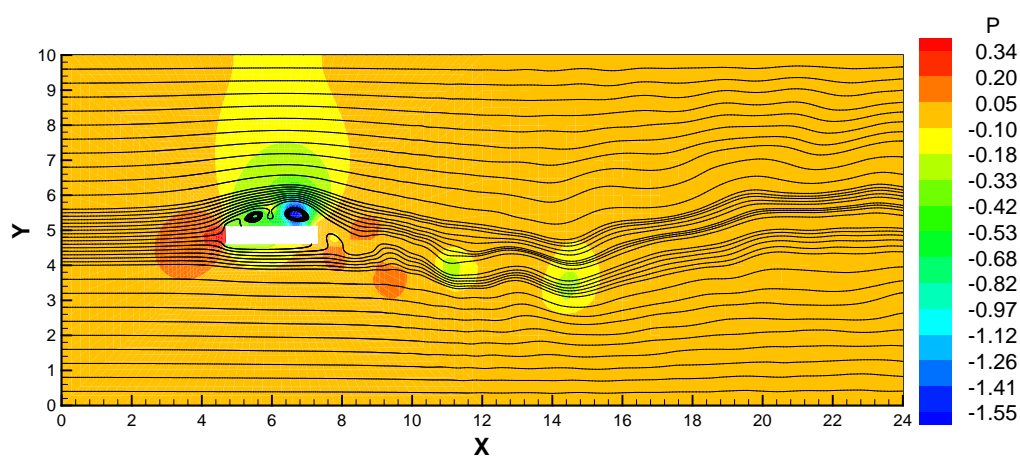
Figura 6.41 - Resultados de resposta da estrutura obtidos por Sarrate *et al.* (2001)

As linhas de corrente e os campos de pressão obtidos são encontrados na Figura 6.42, em três momentos ($t^* = 439$, $t^* = 442$ e $t^* = 448$), para instantes finais da análise. Como fora dito anteriormente, pode-se observar a presença de fortes gradientes de pressão, com a formação de grandes bolsões, alternando-se nas faces superior e inferior da seção. Através das linhas de corrente, observa-se que a orientação da seção em relação à direção do fluxo livre altera a configuração da camada limite. Isso vem ao encontro das observações feitas com respeito aos

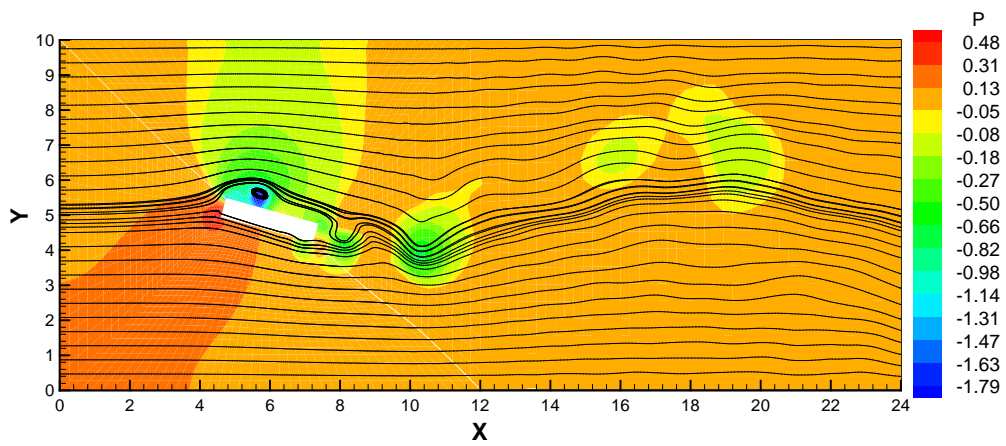
corpos rombudos, onde a dimensão na direção do escoamento é um dos parâmetros que determinam a forma da camada limite e da esteira. A Figura 6.43 mostra a distribuição de pressões obtida por *Sarrate et al.* (2001), correspondente aos momentos finais de observação. Na Figura 6.44, verifica-se a situação da malha em um instante de deslocamentos extremos da estrutura, mostrando um bom resultado.



(a)

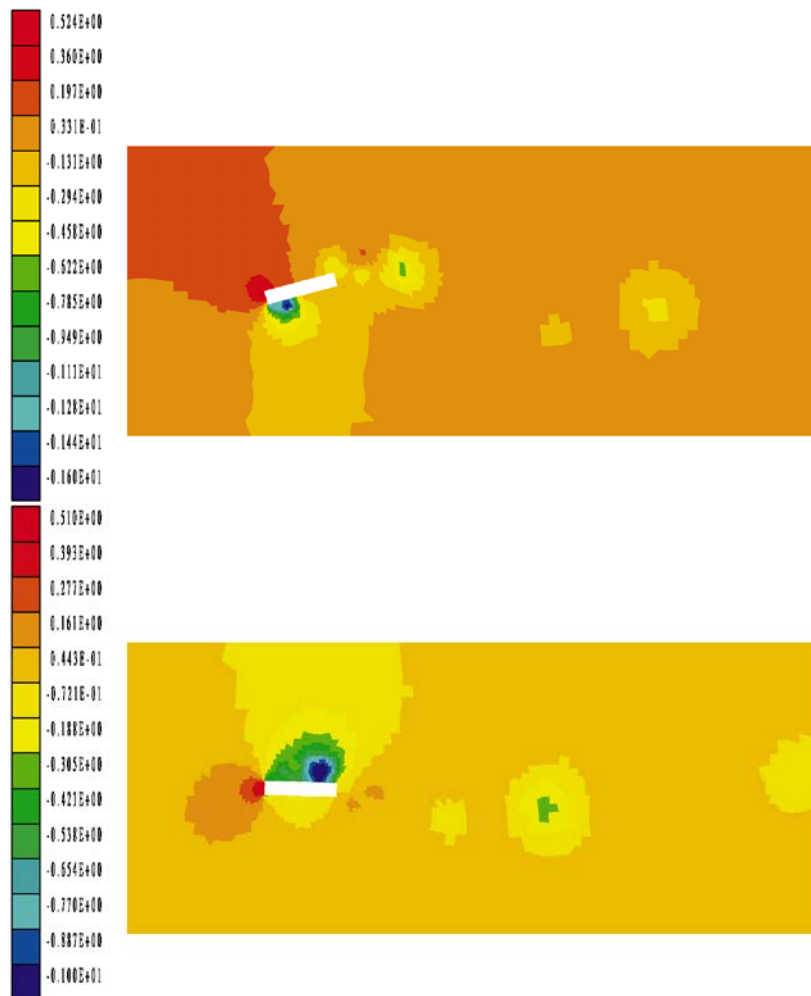


(b)



(c)

Figura 6.42 - Cilindro retangular, campos de pressão e linhas de corrente obtidas; (a) $t^* = 439$; (b) $t^* = 442$ e (c) $t^* = 448$



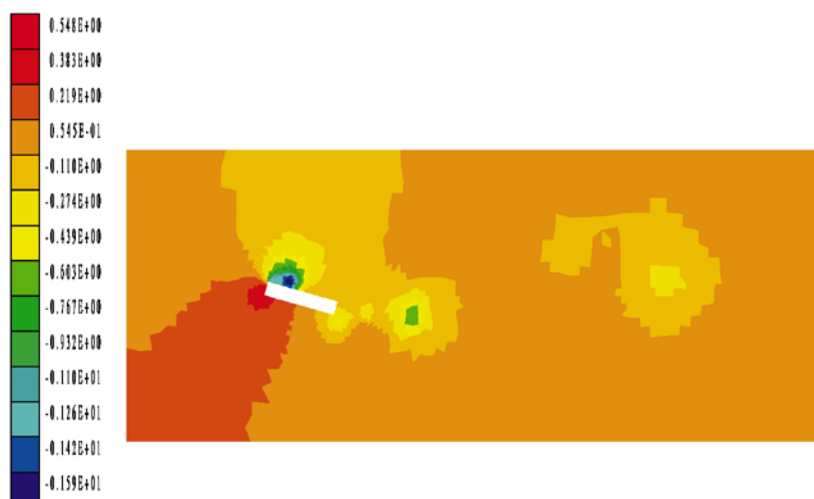


Figura 6.43 - Campos de pressão apresentados por *Sarrate et al.* (2001)

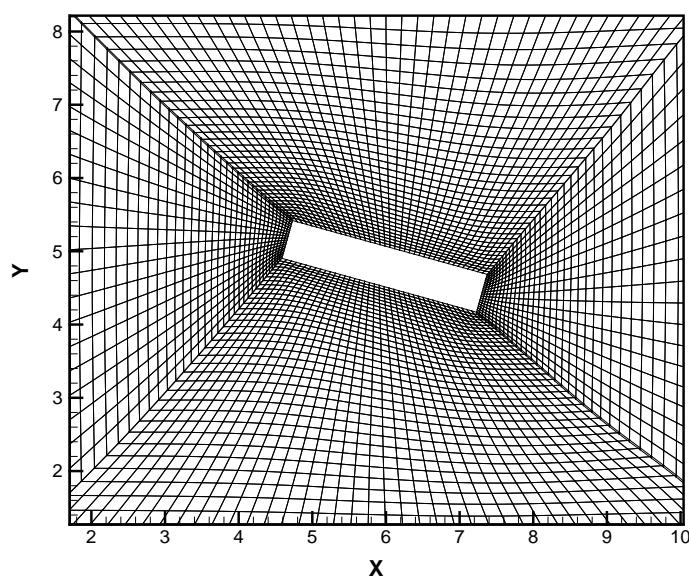


Figura 6.44 - Cilindro retangular: situação da malha de elementos finitos em $t^* = 448$

6.2.3.1 Cilindro Retangular Móvel: Observações Finais

Como é constatado através dos resultados, o programa desenvolvido obteve um desempenho aceitável para o problema apresentado. Com isso, mostrou sua aptidão para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura, onde o corpo imerso se move com grandes deslocamentos e rotações. Além disso, ele também conseguiu simular as características próprias de escoamentos sobre corpos rombudos.

A análise deste tipo de problema só foi possível com o emprego de um esquema especial de descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana proposto por *Sarrate et al.* (2001) e descrito anteriormente no Capítulo 5, onde é prevista a existência de grandes rotações da seção. Outro fator importante foi o modelo de atualização de malha, utilizado por *Teixeira* (2001), e que repetiu aqui o seu sucesso.

Como foi observado nos outros problemas, o campo de pressões apresentado corresponde ao suavizado.

Com este exemplo, encerra-se a fase de testes do código desenvolvido. Após passar por exaustivas análises, o programa está apto para a realização dos ensaios numéricos para o estudo da ação do vento sobre uma seção de ponte qualquer.

6.3 ENSAIOS NUMÉRICOS EM UMA SEÇÃO DE PONTE

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos na análise numérica da ação do vento sobre uma seção de ponte, estendendo-se através do comportamento aerodinâmico e aeroelástico da mesma. Os ensaios são realizados em modelos seccionais estáticos e dinâmicos, conforme as técnicas utilizadas em túneis de vento. Uma pequena revisão sobre o assunto, além dos métodos empregados nas simulações numéricas, são encontrados no Apêndice A desta dissertação.

A ponte a ser analisada é a “*Great Belt East Bridge*”, situada na Dinamarca, mais precisamente no canal de “*Great Belt*”, que faz parte de uma importante rota internacional de navegação. A elaboração do projeto foi iniciada em 1989, sendo aberta ao tráfego em 1998. Trata-se de uma ponte do tipo suspensão, com uma superestrutura constituída de dois vãos de aproximação, com 535 metros cada, além do vão central com 1624 metros de extensão, que será o objeto de análise deste trabalho. Na Figura 6.45 são mostrados os aspectos gerais do projeto.

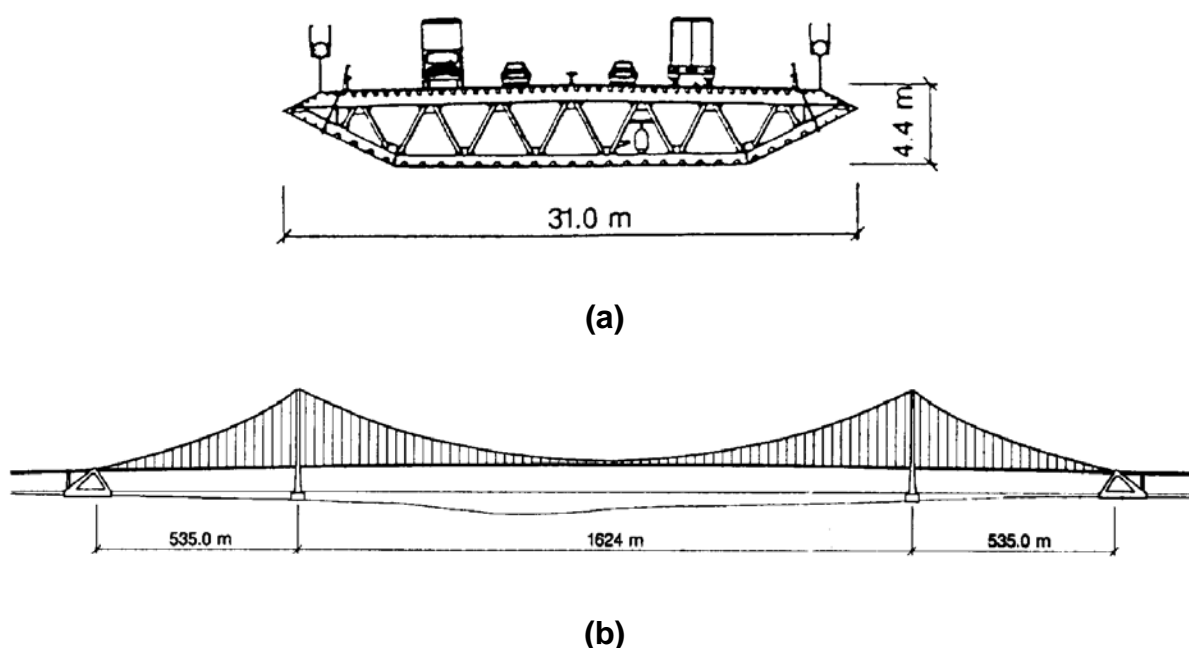


Figura 6.45 - Características gerais da ponte de Great Belt East: (a) seção; (b) elevação

Na seqüência, seguem os resultados das análises feitas para a ponte. Primeiramente, a seção é analisada estaticamente, obtendo-se os coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de ataque do vento, bem como o número de

Strouhal. Em um segundo momento, a seção é liberada para oscilar com o objetivo de permitir a investigação dos casos de instabilidade.

6.3.1 Seção Estacionária

O domínio computacional juntamente com o conjunto de condições de contorno usadas no presente caso, são ilustrados através da Figura 6.46. Como se pode notar, as condições de bordo externas estão em função do ângulo de ataque, uma vez que são apreciados quatro valores diferentes: -10° , -5° , 0° e $+5^\circ$. Assim, quando se alterar a orientação do vento, a modificação correspondente a ser feita nas características iniciais do problema é a de somente mudar as componentes de velocidade prescritas nos contornos externos. A pressão e a velocidade do fluido são assumidas inicialmente nulas em todo o espaço de análise.

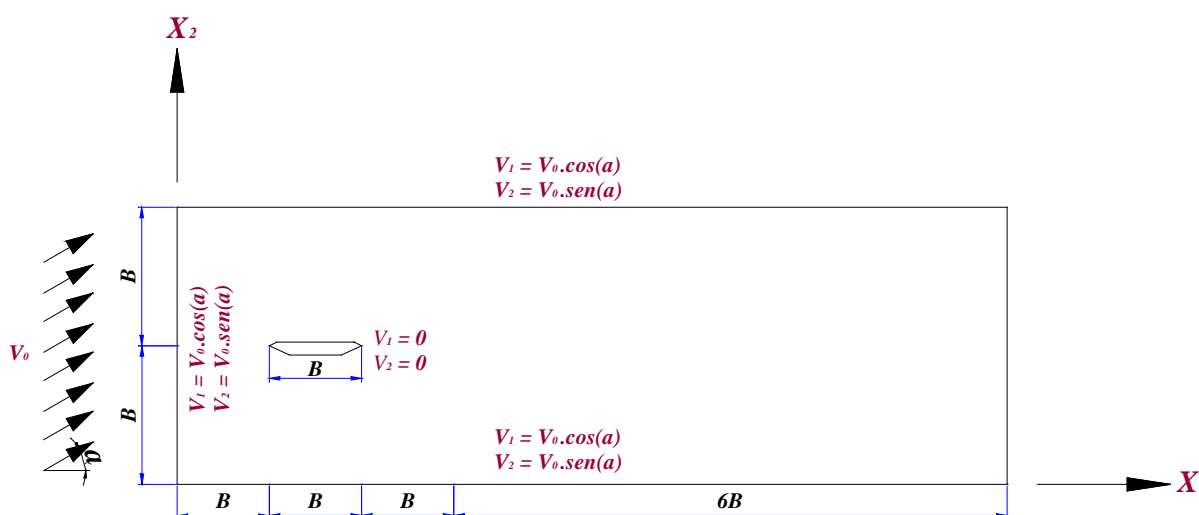


Figura 6.46 - Great Belt East: geometria e condições de contorno para o caso estático

A malha de elementos finitos empregada neste problema fica caracterizada através da Figura 6.47, com 8175 elementos e 8400 nós. A menor dimensão de malha encontrada é no valor de 1.386×10^{-1} m. Este dado está de acordo com o mencionado por *Selvam et al.* (1998), que estudaram o vão de aproximação da “Great Belt East” usando o mesmo modelo de turbulência e tomando o menor espaçamento entre os nós de sua malha em $0.01B$, sendo B a largura da seção.

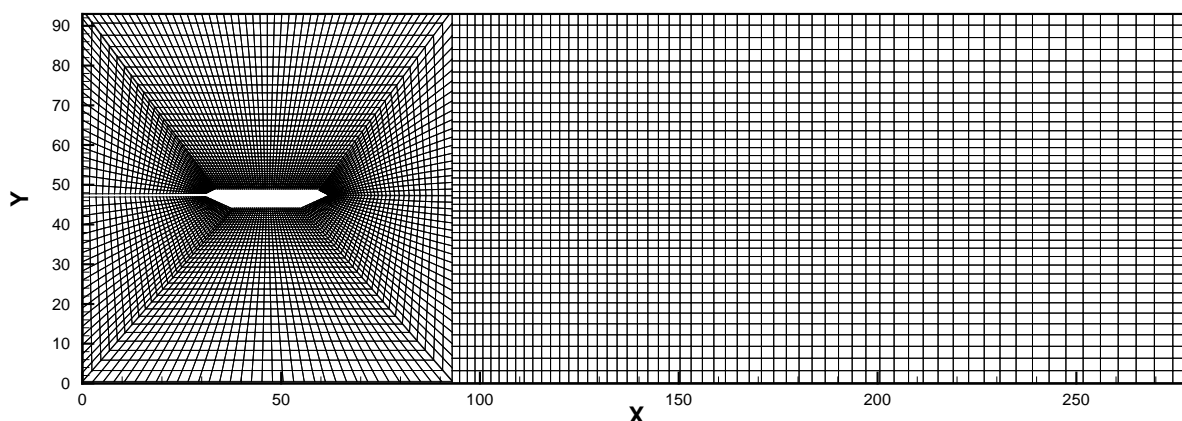


Figura 6.47 - Great Belt East: malha de elementos finitos usada

O número de Reynolds utilizado nas quatro situações de orientação do vento é de 3.0×10^5 . As demais constantes empregadas nestes testes são reunidas na Tabela 6.13. Através da conhecida condição de Courant, para α igual a 1/3, o incremento de tempo usado é $\Delta t = 1.15 \times 10^{-4}$ s.

Tabela 6.13 - Great Belt East: constantes usadas para o caso estático

Constante	Ponte Great Belt East - Reynolds 3×10^5
Massa específica (ρ)	1.32 Kg/m ³
Viscosidade volumétrica (λ)	0.0 m ² /s
Viscosidade cinemática (ν)	5.78×10^{-4} m ² /s
Velocidade do som (c)	337.0 m/s
Velocidade de referência/entrada (V_0)	40.0 m/s
Constante de Smagorinsky (C_s)	0.2
Dimensão característica/altura da seção (D)	4.40 m

Os históricos de coeficiente de arrasto, sustentação e momento aerodinâmico, segundo as diferentes incidências do vento sobre a seção, são expostos na Figura 6.48. As médias dos coeficientes investigados, extraídas através dos históricos apresentados, são graficadas na Figura 6.49 em função do ângulo de ataque, juntamente com os resultados experimentais de *Reinhold et al.* (1992) e numéricos de *Kuroda* (1997).

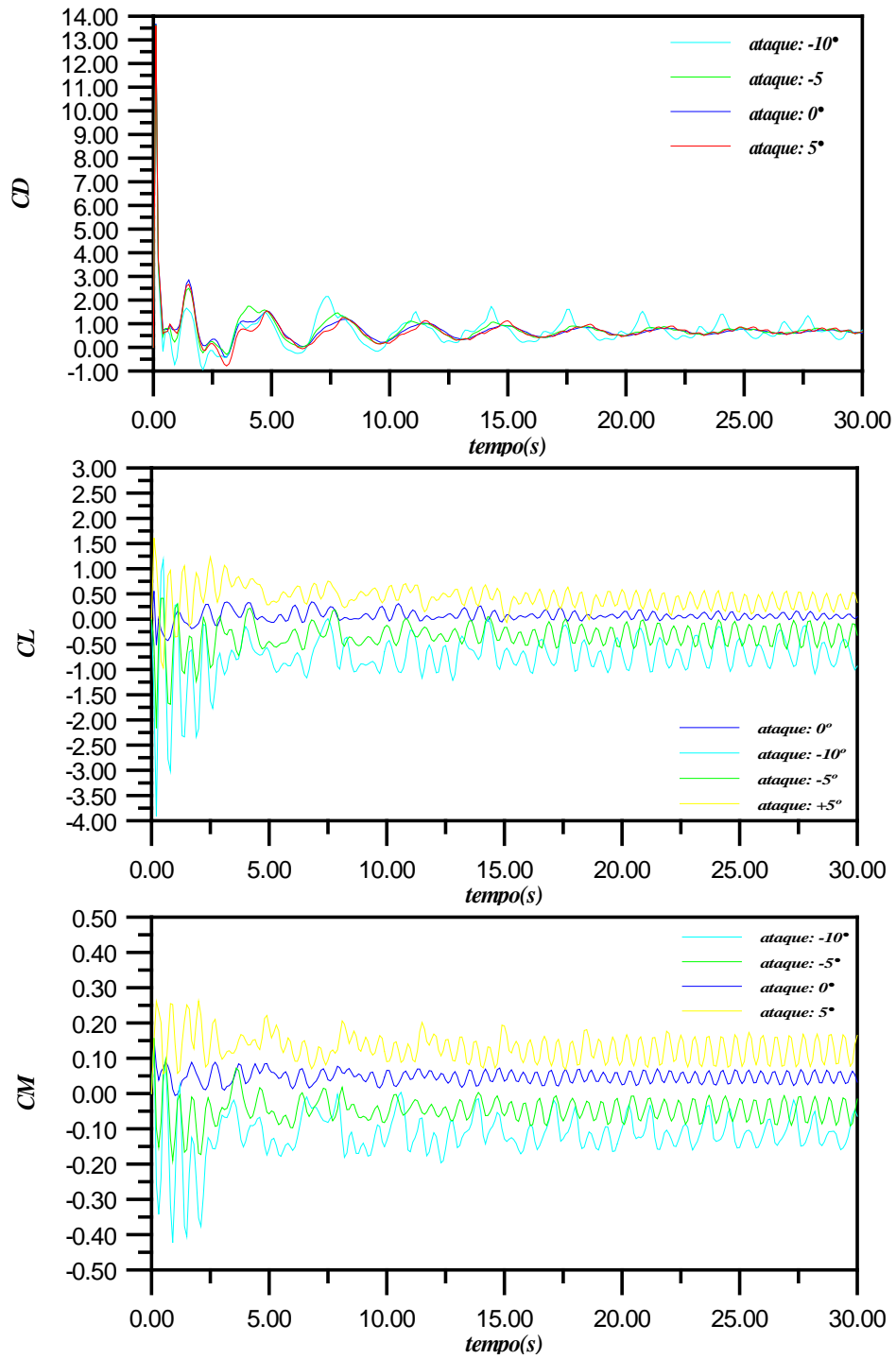


Figura 6.48 - Great Belt East: históricos de C_D , C_L e C_M para diferentes ângulos de ataque

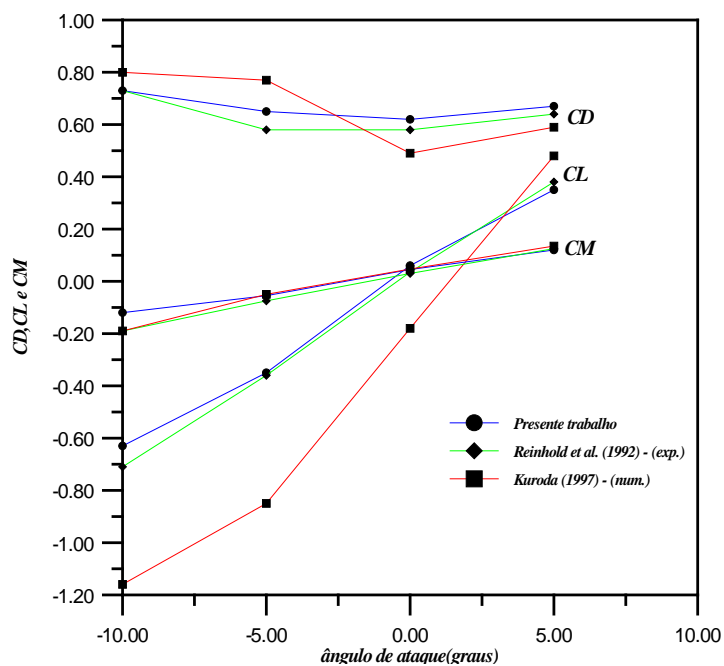


Figura 6.49 - Great Belt East: resultados numéricos e experimentais de coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de ataque

Na Figura 6.50, tem-se o histórico da componente vertical da velocidade do fluido (V_2), para vento a 0° , em um ponto situado a $1/5$ de B após a seção. O período de oscilação de V_2 obtido é 0.60 s. Com a velocidade de entrada V_0 e a dimensão característica B , o número de Strouhal fica em 0.18. Na Tabela 6.14 são relacionados os resultados obtidos para número de Strouhal da ponte.

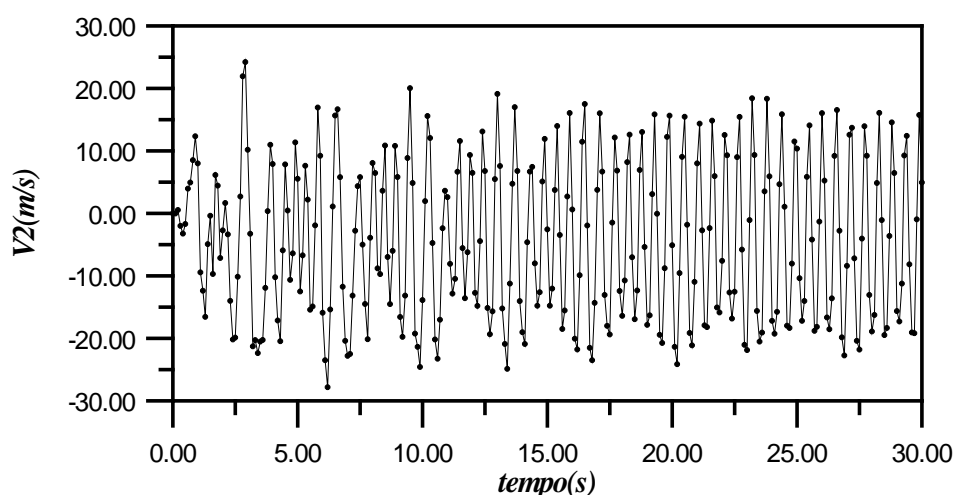
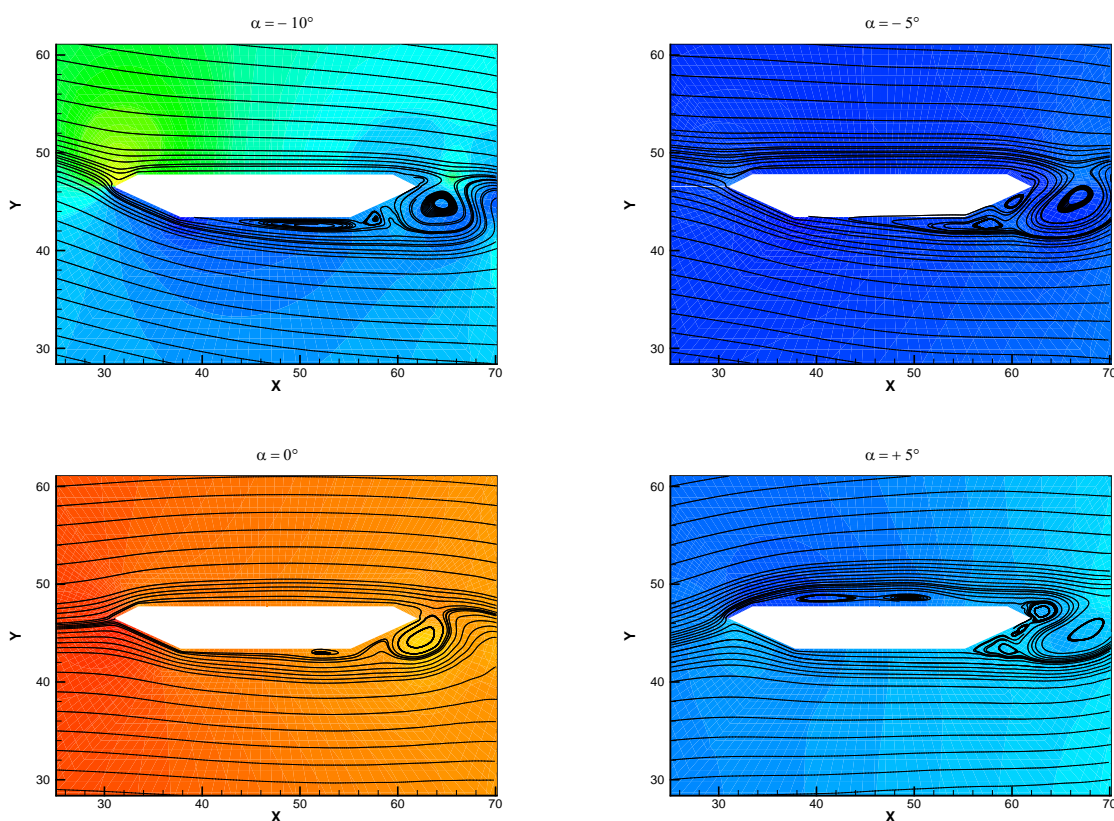


Figura 6.50 - Great Belt East: histórico de V_2 em $1/5$ de B após a seção

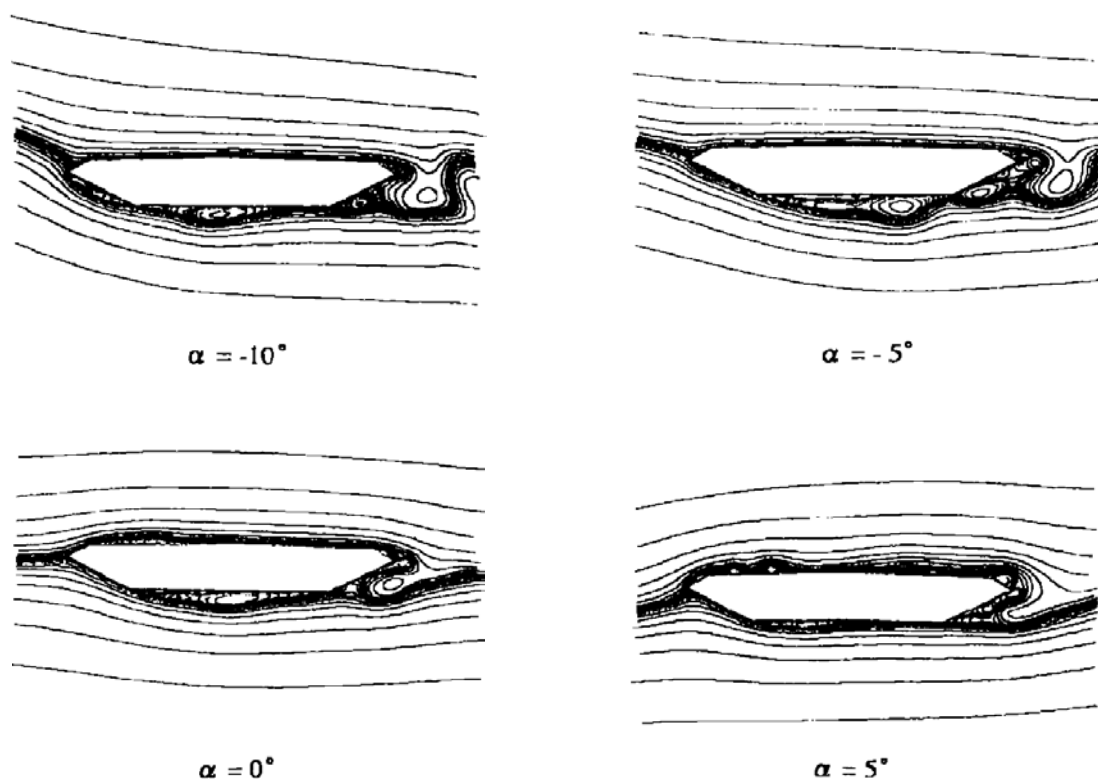
Tabela 6.14 - Resultados de St para a ponte de Great Belt East

Referência	Nº de Strouhal - Reynolds 3×10^5
<i>Presente trabalho</i>	0.180
<i>Larsen & Walther (1998) (num.)</i>	0.170
<i>Larsen (1993) (exper.)</i>	0.160

As linhas de corrente observadas para diferentes ângulos de ataque são apresentadas na Figura 6.51 ao lado daquelas alcançadas por *Kuroda (1997)*. Convém ressaltar que a referência citada não utiliza qualquer modelo de turbulência, valendo-se de uma malha mais refinada. Como se pode verificar, para $\alpha = 0^\circ$, não há a ocorrência de separação do escoamento nas superfícies inclinadas, bem como na superfície superior da seção. A separação ocorre na sua superfície inferior, notando-se que o vórtice ali gerado é de magnitude superior ao observado para ângulos de ataque positivos. Para ângulos negativos ($\alpha = -10^\circ$ e -5°), o escoamento se separa apenas na zona inferior da seção, apresentando uma aderência na extremidade superior da mesma. Por fim, para $\alpha = 5^\circ$, ocorre uma pequena separação na parte superior da ponte, sendo que os vórtices formados serão maiores na medida em que maior for o ângulo de ataque.



(a)



(b)

Figura 6.51 - Great Belt East: linhas de corrente para diferentes ângulos de ataque; (a) presente trabalho, (b) Kuroda (1997)

6.3.2 Análise Aeroelástica

6.3.2.1 Drapejamento ou “Flutter”

A análise do fenômeno de instabilidade por “flutter” é realizada, neste trabalho, através de duas diferentes técnicas: pela investigação feita sobre a curva obtida para o coeficiente de drapejamento (ou “flutter derivative”) A_2^* , apresentado pela seção da ponte (segundo o modelo de Scanlan & Tomko (1971)), e a partir de um método direto com base na observação do comportamento da estrutura para diferentes valores de velocidade reduzida (Selvam et al., 2002). Ambos os métodos são descritos detalhadamente no Apêndice A desta dissertação.

Com os “flutter derivatives” é possível obter-se a velocidade crítica a partir da qual se inicia o problema. A técnica usada para a obtenção numérica dos

coeficientes de drapejamento resume-se em extrair, experimentalmente, dados como o amortecimento e a frequência das oscilações observadas para diferentes valores de velocidade reduzida ($U^* = \frac{U}{fB}$). É construído então um gráfico do coeficiente A_2^* em função da velocidade reduzida, obtendo-se, por meio de uma condição crítica, a velocidade correspondente.

Em *Selvam et al.* (2002) é mostrado um método direto, baseado no Método das Oscilações Livres (o mesmo empregado na obtenção dos coeficientes de drapejamento), onde determina-se a taxa de incremento ou decaimento da resposta da estrutura, observada para as várias velocidades reduzidas analisadas. Estes valores são transportados para um gráfico em função da velocidade reduzida, sendo a velocidade crítica obtida quando a curva gerada cruza o eixo das abscissas.

A geometria do problema para o estudo de “flutter” permanece inalterada em relação aos casos já estudados. Quanto às condições de contorno, considera-se, inicialmente, a seção estacionária com uma inclinação de 1.8° . Após 30000 passos de tempo, as condições de contorno da superfície do corpo são retiradas de forma a permitir o seu movimento. As condições de bordo externas são idênticas ao caso de condição estacionária com ângulo de ataque zero, com exceção à velocidade de entrada, que é alterada para cada rodada de resultados.

Para o domínio computacional é aproveitada a mesma malha da Figura 6.47, usada na determinação dos coeficientes aerodinâmicos. O incremento de tempo aplicado nas análises segue o critério de Courant, empregado ao longo de todo o trabalho. Os valores variam pouco em relação àquele utilizado nos testes estacionários, dependendo da velocidade de entrada fornecida em cada teste, e encontram-se juntamente com as constantes da Tabela 6.15.

Todos os ensaios são realizados para um número de Reynolds de 10^5 , seguindo o valor utilizado pelas referências. Com base neste número, a viscosidade cinemática adquire valores diferentes para cada uma das velocidades de escoamento estudadas. As constantes referentes ao fluido, utilizadas nas diversas análises, são apresentadas na Tabela 6.15 abaixo.

Tabela 6.15 - Great Belt East: constantes usadas para o fluido no estudo da instabilidade por “flutter”

Ponte Great Belt East - Reynolds 1×10^5					
Constantes	$V^* = 2$	$V^* = 4$	$V^* = 6$	$V^* = 10$	
Análise do modo torcional	Massa específica (ρ)	1.32 Kg/m ³	1.32 Kg/m ³	1.32 Kg/m ³	1.32 Kg/m ³
	Viscosidade volumétrica (λ)	0.0 m ² /s	0.0 m ² /s	0.0 m ² /s	0.0 m ² /s
	Viscosidade cinemática (ν)	5.23×10^{-3} m ² /s	1.05×10^{-2} m ² /s	1.57×10^{-2} m ² /s	2.61×10^{-2} m ² /s
	Velocidade do som (c)	337.0 m/s	337.0 m/s	337.0 m/s	337.0 m/s
	Velocidade de referência/entrada (V_0)	16.86 m/s	33.73 m/s	50.59 m/s	84.32 m/s
	Constante de Smagorinsky (C_s)	0.2	0.2	0.2	0.2
	Dimensão característica/largura da seção (B)	31.0 m	31.0 m	31.0 m	31.0 m
	Incremento de tempo (Δt)	1.30×10^{-4}	1.25×10^{-4}	1.20×10^{-4}	1.10×10^{-4}

As propriedades físicas da estrutura usadas nos experimentos encontram-se resumidas na Tabela 6.16, juntamente com os dados originais de projeto. Como pode-se observar, a estrutura é idealizada a fim de permitir deslocamentos apenas no grau de liberdade onde serão obtidos os dados.

Tabela 6.16 - Great Belt East: propriedades da estrutura usadas no estudo da instabilidade por “flutter”

Dados da Estrutura	Ponte Great Belt East - Reynolds 1×10^5				
	$V^* = 2$	$V^* = 4$	$V^* = 6$	$V^* = 10$	
Valores de Análise: modo torcional	Rigidez longitudinal (k_{11})	3×10^9	3×10^9	3×10^9	3×10^9
	Rigidez transversal (k_{22})	3×10^9	3×10^9	3×10^9	3×10^9
	Rigidez rotacional (k_{33})	7.21×10^6	7.21×10^6	7.21×10^6	7.21×10^6
	Massa longitudinal (m_{11})	2.27×10^4	2.27×10^4	2.27×10^4	2.27×10^4
	Massa transversal (m_{22})	2.27×10^4	2.27×10^4	2.27×10^4	2.27×10^4
	Massa rotacional (m_{33})	1×10^5	3×10^5	5×10^5	5×10^5
	Amortecimento longitudinal (c_{11})	3×10^4	3×10^4	3×10^4	3×10^4
	Amortecimento transversal (c_{22})	3×10^4	3×10^4	3×10^4	3×10^4
	Amortecimento rotacional (c_{33})	0.00	0.00	0.00	0.00
Valores de Projeto	Massa translacional (m)	22.7×10^3 Kg/m			
	Massa rotacional (I)	2.47×10^6 Kgm ² /m			
	Freqüência natural vertical (f_h)	0.099 Hz			
	Freqüência natural angular (f_a)	0.272 Hz			
	Amortecimento crítico (ζ)	0.002			

Na Figura 6.52 são apresentados os históricos resultantes de deslocamento angular para as diferentes velocidades reduzidas, observadas para o estudo do modo de torção. Dos históricos de rotação é obtido o decremento logarítmico médio

(δ_{α}^{exp}) e a taxa de incremento/decaimento para cada velocidade. Logo depois, na Tabela 6.17, é mostrado um resumo dos valores experimentais numericamente obtidos, juntamente com os resultados do coeficiente de drapejamento A_2^* .

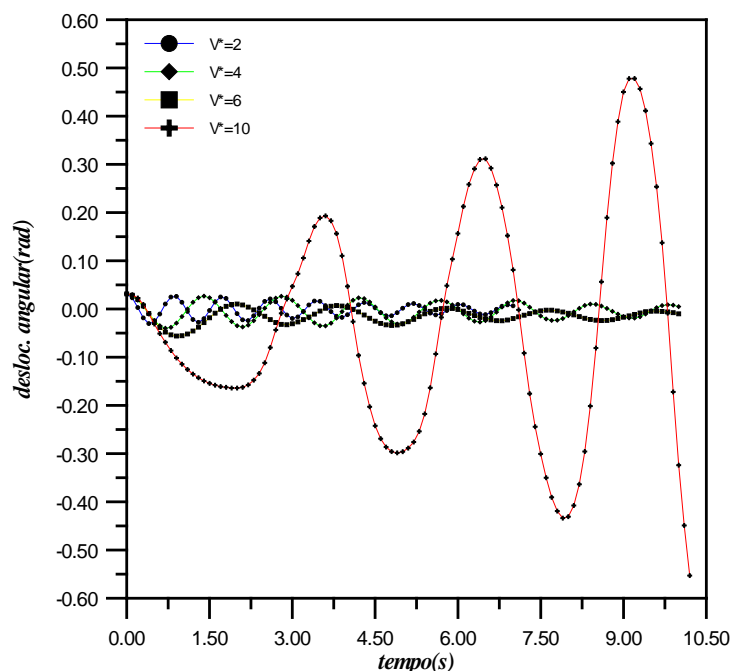


Figura 6.52 - Great Belt East: históricos de deslocamento angular para diferentes valores de velocidade reduzida

Tabela 6.17 - Great Belt East: resultados da análise do modo de torção

Resultados	Ponte Great Belt East – Reynolds 1×10^5			
	$V^* = 2$	$V^* = 4$	$V^* = 6$	$V^* = 10$
<i>Decremento logarítmico médio</i>	0.176	0.205	0.291	-0.403
<i>Taxa de incremento/decaimento</i>	0.131	0.270	0.311	-0.500
A_2^*	-1.04×10^{-2}	-3.21×10^{-2}	-7.6×10^{-2}	1.05×10^{-1}

A curva final do coeficiente de drapejamento alcançado pelo presente trabalho é exibida na Figura 6.54. Na Figura 6.55 é apresentado o gráfico obtido, relativo ao método direto de *Selvam et al.* (2002).

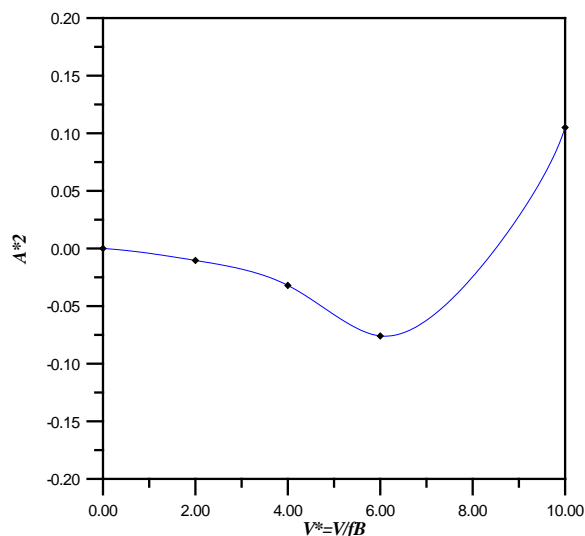


Figura 6.54 - Coeficiente de drapejamento obtido para a ponte de Great Belt East

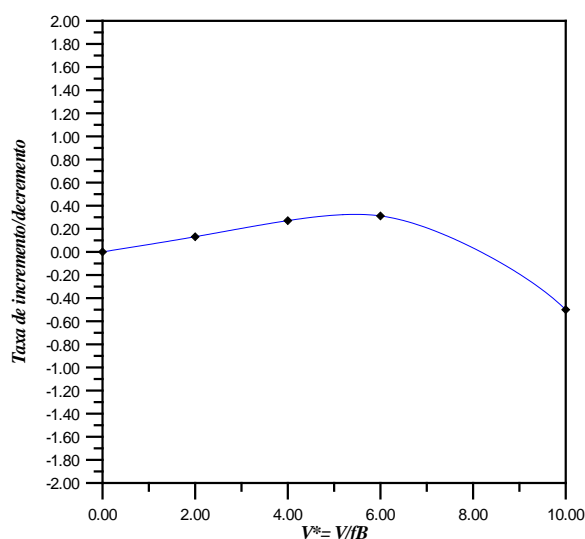


Figura 6.55 - Resultados do método direto de análise de “flutter” para a ponte de Great Belt East

Com o auxílio da equação de condição crítica de drapejamento torcional (A.3), dada no Apêndice A, é determinado o valor crítico para A_2^* . Aplicando as constantes reais da estrutura presentes na Tabela 6.16, obtém-se $A_2^* \geq 1.62 \times 10^{-2}$. Observando a curva obtida pelo presente trabalho, na Figura 6.54, conclui-se que ocorre a instabilidade por drapejamento a uma velocidade reduzida de 8.66, correspondendo à velocidade dimensional de 73 m/s.

Através da Figura 6.55, verifica-se graficamente a velocidade crítica de drapejamento, segundo o método direto, sendo a mesma determinada no ponto exato onde a curva corta o eixo horizontal. O valor observado é de 8.18, o que corresponde a 69 m/s.

Na Tabela 6.18 é mostrada uma relação de resultados de velocidade crítica de drapejamento, obtidos por diversos autores, para a ponte estudada. Com exceção a *Selvam et al. (2002)*, as outras referências apresentam um valor de velocidade crítica obtida não diretamente da curva de A_2^* , mas sim, através da consideração do acoplamento entre as duas direções principais da seção. Verifica-se que os valores alcançados pelo presente trabalho encontram-se em conformidade com aqueles exibidos pelos demais.

Tabela 6.18 - Resultados de velocidade crítica de “flutter” para a ponte de Great Belt East

Great Belt East - Velocidade Crítica de Drapejamento	
Referência	$V_{crit} (m/s)$
<i>Presente trabalho (via "flutter derivatives")</i>	73
<i>Presente trabalho (via método direto)</i>	69
<i>Selvam et al. (2002) (num.)</i>	65-72
<i>Larsen & Walther (1997) (num.)</i>	74
<i>Enevoldsen et al. (1999) (num.)</i>	70-80
<i>Testes em túnel de vento</i>	73

6.3.3 Ensaios Numéricos em uma Seção de Ponte: Observações Finais

Algumas observações importantes puderam ser tiradas da análise deste problema e serão descritas na seqüência.

Dentre os estudos feitos sobre a seção estacionária, o caso de ângulo de ataque +10° apresentou resultados insuficientes e por esta razão não foi incluído. A explicação para o fato fica evidente quando se examina a forma como o escoamento se desenvolve ao redor da seção, apresentando uma forte recirculação na sua superfície superior. Isto vem de encontro à observação feita para o estudo da cavidade, sabidamente de alta recirculação, onde, para a análise sob escoamento

turbulento, constatou-se a existência de problemas de estabilidade numérica, mesmo satisfazendo a condição de Courant. Logo, conclui-se que, para problemas onde ocorram zonas de grande recirculação do escoamento (em regimes turbulentos), é necessário que o incremento de tempo utilizado seja drasticamente reduzido.

Nos ensaios realizados para a análise de “flutter” ficou constatada a independência dos resultados em relação à massa utilizada para a estrutura. Os valores empregados foram definidos após vários testes realizados, sendo escolhidos aqueles que apresentaram uma resposta dinâmica mais “limpa” para a extração dos dados. No que se refere à diferença apresentada quanto ao modo de vibração (acoplado e não acoplado), são apontadas duas possíveis razões que podem ter interferido na forma de vibrar da seção. Neste trabalho foi utilizada a técnica das oscilações livres, ao contrário das referências, que usaram oscilações forçadas. Além disso, a amplitude inicial aqui utilizada (1.8°) é diferente da usada nos demais casos, o que pode interferir consideravelmente no tipo de resposta da estrutura. Embora o tipo de resposta esteja conflitante com outros trabalhos, a velocidade crítica concorda muito bem, reproduzindo o mesmo comportamento mostrado por *Selvam et al.* (2002), que aplicaram as mesmas considerações experimentais.

Finalizando, de uma forma geral, o programa conseguiu simular satisfatoriamente os ensaios experimentais testados, mostrando boa concordância com as referências citadas.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tomando por base os resultados alcançados pelo código numérico desenvolvido para esta dissertação, pode-se afirmar que o objetivo colocado inicialmente foi atingido, na medida em que conseguiu reproduzir numericamente, com boa precisão, ensaios experimentais para a obtenção de informações aerodinâmicas e aeroelásticas de uma seção de ponte.

Deve-se ainda destacar alguns aspectos importantes, apresentados pelo presente código, que tornaram possível a realização deste trabalho. A utilização de um esquema de malha próprio para o tratamento de corpos imersos, com grandes deslocamentos, além da descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana para grandes rotações, foram fundamentais para a obtenção dos resultados alcançados. Também se sobressai o modelo de turbulência empregado, mostrando-se eficiente mesmo com as restrições de estabilidade numérica. Por fim, o uso de quatro pontos de integração para a resolução das equações em elementos finitos, garantiu a obtenção de resultados bastante confiáveis, embora a um custo computacional bem elevado.

Através da experiência adquirida ao longo do trabalho, é possível sugerir algumas idéias para a implementação e melhoria de alguns aspectos deficientes apresentados pelo presente programa:

- (a) Um ponto que ainda deve ser explorado com o programa existente é a influência que detalhes como guarda-corpos e cabos exercem no desempenho aerodinâmico da ponte. Também a influência de estruturas anexadas para melhorar a estabilidade das seções poderia ser estudada.
- (b) Ainda dentro da área de estudo da ação do vento em estruturas, um caminho lógico seria a extensão para o caso 3D, permitindo assim a análise dos modos de vibração para uma ponte completa, por exemplo. Além disso, tornaria o código uma ferramenta capaz de estudar vários outros problemas dentro da Aerodinâmica onde a consideração da tridimensionalidade é preponderante.

- (c) De forma a ampliar os casos de estudo, é sugerida a implementação de uma equação de conservação de quantidades escalares, possibilitando a análise de problemas de dispersão de poluentes em zonas urbanas, um assunto bastante inovador dentro da *DFC*.
- (d) Recomenda-se aprofundar os estudos no que se refere à influência na estabilidade numérica quando da análise de escoamentos turbulentos com a presença de zonas de alta recirculação. Foi constatada, de uma forma superficial, a necessidade de redução do incremento de tempo usado na integração numérica do fluido, sem precisar qual seria o valor mais adequado.
- (e) Com relação ao modelo de turbulência, ficou pendente a questão da influência que a constante empírica b_t (usada na equação da continuidade e oriunda do modelo de turbulência) exerce sobre os resultados, sendo que no presente trabalho, adotou-se um valor bem alto para desprezar o seu termo correspondente. Como nas bibliografias citadas não consta qualquer indicação sobre um valor recomendável, seria interessante um estudo da sua influência sobre vários casos de escoamentos simples.
- (f) Outra proposta, intimamente ligada ao item (d), é a de desenvolver um algoritmo capaz de reduzir o tempo de processamento, principalmente em escoamentos turbulentos. Uma alternativa seria a integração por subdomínios usando sub-ciclos (*Teixeira, 2001*), uma vez que, para elementos maiores, os incrementos de tempo serão conseqüentemente maiores. Outra possibilidade seria o emprego de esquemas mistos implícitos-explícitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS. **Standard User's Manual**. Version 5.8. HIBBIT, KARLSSON & ORENSEN INC., 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860-4847, 1998.

ANSYS. **User's Manual**. Version 5.0. SWANSON ANALYSIS SYSTEMS INC., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065, 1992.

ANSYS/FLOTRAN. **User's Manual**. Version 5.0. SWANSON ANALYSIS SYSTEMS INC. – P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065, 1992.

ARGYRIS, J. & MLEJNECK, H. P. **Dynamics of Structures**. Text on Computational Mechanics, V.5. Elsevier Sc. Publ., Amsterdam, 1991.

AZEVEDO, R. L. **Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**. Tese de Doutorado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1999.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

BLESSMANN, J. **Aerodinâmica das Construções**. 2ª ed. Porto Alegre: Sagra, 1990, 263 p.

BOSCHITSCH, A. H. & QUACKEMBUSH, T. R. High accuracy computations of fluid-structure interaction in transonic cascades. **AIAA Paper - 93-0485**, 1993.

BURBRIDGE, H. P. **O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de escoamentos Compressíveis Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós**. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1999.

CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **Journal of Computational Physics**, V.2, :12-26, 1967.

CLARK, R. A.; FERZIGER, J. H. & REYNOLDS, W. C. Evaluation of sub-grid scale turbulence models using an accuracy simulated turbulent flow. **Journal of Fluid Mechanics, V.91**, :1-16, 1979.

CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. McGraw-Hill Inc., NY, 1993.

DAVIS, G. A. & BENDIKSEN, O. O. Unsteady transonic two dimensional Euler solutions using finite elements. **AIAA Journal, V.31**, :1051-1059, 1993.

DONEA, J.; GIULIANI, S. & HALLEUX, P. An arbitrary Lagrangean-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, V.33**, :689-723, 1982.

DOS SANTOS, M. A. V. **Simulação Numérica de escoamentos Compressíveis e Sua Interação com Estruturas Deformáveis**. Tese de Doutorado, Porto Alegre: PPGECC/UFRGS, 1993.

ENEVOLDSEN, I.; PEDERSON, C.; HANSEN, S. O.; THORBEEK, L. T. & KVAMSDAL, T. Computational wind simulations for cable-supported bridges. **Wind Engineering into the 21st Century, Vol.2**, :1265-1270, 1999.

FARHAT, C.; LESOINNE, M. & MAMAN, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three field formulation, geometric conservation and distributed solution. **International Journal of Numerical Methods in Engineering, V.21**, :807-835, 1995.

FERZINGER, J. H. Simulation of complex turbulent flows: recent advances and prospects in wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.46&47**, :195-212, 1993.

FINDIKAKIS, A. N. & STREET, R. L. Mathematical description of turbulent flows. **Journal of the Hydraulics Division, ASCE, V.108, N°HY8**, :887-903, 1982.

FLUENT. **User's Manual**. Version 5.0. FLUENT WORLDWIDE CORPORATE HEADQUARTERS. Centera Resource Park, 10. Cavendish Court, Lebanon, NH 03766-142, 1998.

FUJIWARA, A.; KATAOKA, H. & ITO, M. Numerical simulation of flow field around an oscillating bridge using finite difference method. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.46&47**, :567-575, 1993.

GHIA, U.; GHIA, K. N. & SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics, V. 48**, :387-411, 1982.

GONZÁLEZ, L. A. S. **Análise de escoamentos de fluidos quase-incompressíveis e das vibrações induzidas em objetos imersos.** Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1993, 150 p.

GONZÁLEZ, L. A. S. & AWRUCH, A. M. Numerical simulation of vortex induced vibrations of a pair of cylinders. **In: XVI CILAMCE, Anais, V.2**, 899-908, Curitiba (Paraná, Brasil), Novembro de 1995.

GRESHO, P. M. & SANI, R. L. **Incompressible Flow and the Finite Element Method. Advection-Diffusion and Isothermal Laminar Flow.** John Willey & Sons Ltd., Sussex (UK), 1999.

GRÖTZBACH, G. Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows. **Encyclopedia of Fluid Mechanics, V.6**, Guly, Houston, :1337-1391, 1987.

HINZE, J. O. **Turbulence.** McGraw-Hill Co., NY, 2nd ed., 1975.

HIRANO, H.; MARUOKA, A. & KAWAHARA, M. Finite element analysis of fluid-structure interaction problems and its application to wind resistance design of box girder bridges. **In: Proceedings Ninth International Conference on Finite Element in Fluids**, (Ed. By M. Cecchi et al), Venecia, Italy, :235-244, 1994.

HUERTA, A. & LIU, W. K. Viscous flow structures interaction. **ASME J. Pressure Vessel Technol., V. 110**, :15-21, 1988.

KAWAHARA, M. & HIRANO, H. A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids, V.3**, :137-163, 1983.

KAWAHARA, M.; HIRANO, H. & KODAMA, T. Two-step explicit finite element method for high Reynolds number flow past through oscillating body. **Finite Elements in Fluids, John Wiley & Sons Ltd., V.5**, :227-262, 1984.

KURODA, S. Numerical simulation of flow around a box girder of a long span suspension bridge. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.67&68**, :239-252, 1997.

LARSEN, A. & WALTHER, J. H. Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulation. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.67&68**, :253-265, 1997.

LARSEN, A. & WALTHER, J. H. Discrete vortex simulation of flow around five generic bridge deck sections. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.77&78**, :591-602, 1998.

LAUNDER, B. E. & SPALDING, D. B. **Lectures in Mathematical Models in Turbulence**. Academic Press, London, 1972.

LEE, S.; LEE, J. S. & KIM, J. D. Prediction of vortex-induced wind loading on long-span bridges. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.67&68**, :267-278, 1997.

LEONARD, A. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent flows. **Advances in Geophysics, V.18A**, :237-248, 1974.

LESCHZINER, M. A. Computational modelling of complex turbulent flows- expectations, reality and prospects. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, V.46&47**, :37-51, 1993.

LÖHNER, R. & YANG, C. Improved ALE mesh velocities for moving bodies. **Communications in Numerical Methods in Engineering, V.12**, :599-608, 1996.

MARKATOS, N. C. The mathematical modelling of turbulent flows. **Applied Mathematical Modelling, V.10**, :190-220, 1986.

MENDES, P. A. & BRANCO, F. A. Analysis of fluid-structure interaction by an arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element formulation. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, **V.30**, :897-919, 1999.

MITTAL, S. & KUMAR, V. Finite element study of vortex-induced cross-flow and in-line oscillations of a circular cylinder at low Reynolds numbers. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, **V.31**, :1087-1120, 1999.

MITTAL, S. & TEZDUYAR, T. E. A finite element study of incompressible flows past oscillating cylinders and airfoils. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, **V.15**, :1073-1118, 1992.

MSC/NASTRAN. **Quick Reference Guide**. Version 70.5, McNEAL-SCHWFENDLER CORPORATION, 815, Colorado Bv., Los Angeles, CA 90001-1277, 1998.

MURAKAMI, S. Current status and future trends in computational wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, **V.67&68**, :3-34, 1997.

NOMURA, T. ALE finite element computations of fluid-structure interactions problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **V.112**, :291-308, 1994.

NOMURA, T. & HUGHES, T. J. R. An arbitrary Lagrangean-Eulerian finite element method for interaction of fluid and rigid body. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **V. 95**, :115-138, 1992.

PAZ, M. **Microcomputer-Aided Engineering. Structural Dynamics**. Van Nostrand Reinhold Co., NY, 1986.

PETRY, A. P. **Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura pelo Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1993, 123 p.

PETRY, A. P. & AWRUCH, A. M. Simulação de escoamentos turbulentos pelo método dos elementos finitos através da simulação direta de grandes vórtices.

ENIEF 97, Mecânica Computacional, V. XVIII, :113-122 (Ed. por E. Dari, C. Pedra e R. Saliba), San Carlos de Bariloche (Argentina), Novembro de 1997.

PETRY, A. P. & AWRUCH, A. M. Solução das equações de Navier-Stokes transientes usando um método explícito. **In: ENIEF 92, Mecânica Computacional, V.8**, :214-222, San Carlos de Bariloche (Argentina), Setembro de 1992.

PETYT, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. Cambridge University Press (UK), 1990.

RAMASWAMY, B. Theory and implementation of a semi-implicit finite element method for viscous incompressible flow. **Computers & Fluids, V.22**, :725 –747, 1993.

RAMSHAW, V. D. & MESSINA, G. L. A hybrid penalty-pseudocompressibility method for transient incompressible fluid flow. **Computers & Fluids, V.20**, :165 - 175, 1991.

RAMSHAW, V. D. & MOUSSEAU, V. A. Accelerated artificial compressibility method for steady-state incompressible flow calculations. **Computers & Fluids, V.18**, :361-367, 1990.

RAMSHAW, V. D. & MOUSSEAU, V. A. Compressibility method for steady-state low-speed calculation. **Computers & Fluids, V.20**, :177-186, 1991.

REDDY, J. N. & GARTLING, D. K. **The Finite Element Method in the Heat Transfer and Fluid Dynamics**. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

REINHOLD, T. A.; BRINCH, M. & DAMSGAARD, A. Wind tunnel tests for the Great Belt link. **In: Proceedings International Symposium on Aerodynamics of Large Bridge**, :255-267, 1992.

RODY, W. **Turbulence Models and Their Application in Hydraulics – A State of the Art Review**. International Association for Hydraulic Research (IAHR), Delft, Netherland, 1984.

RODY, W.; FERZINGER, J. H.; BREUER, M. & POURQUIÉ, M. Status of large eddy simulation: results of a workshop. (Results of the Workshop on LES of Flows Past

Bluff Bodies, Rottach-Egern, Tegernsee, Germany, June 26-28, 1995), **Journal of Fluids Engineering**, **V.119**, :248-262, 1997.

ROGALLO, R. S. & MOIN, P. Numerical simulation of turbulent flows. **Ann. Rev. Fluid Mechanics**, **V.16**, :99-137, 1984.

ROSSA, A. L. **Um Esquema Semi-Explícito para a Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis Não-Isotérmicos Via o M.E.F. Usando a Técnica de Taylor-Galerkin**. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2000.

SARRATE, J.; HUERTA, A. & DONEA, J. Arbitrary Lagrangean-Eulerian formulation for fluid-rigid body interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **V.190**, :3171-3188, 2001.

SCANLAN, R. & TOMKO, J. J. Airfoil and bridge deck flutter derivatives. **Journal of Engineering Mechanics Division**, **EM6**, :1717-1737, 1971.

SCHLICHTING, H. **Boundary-Layer Theory**. McGraw-Hill Inc., New York, 2nd ed. 1979, 815 p.

SELVAM, R. P.; GOVINDASWAMY, S. & BOSCH, H. Aeroelastic analysis of bridges using FEM and moving grids. **Wind and Structures**, **V.5**, :257-266, 2002.

SELVAM, R. P.; TARINI, M. J. & LARSEN, A. Computer modelling of flow around bridges using LES and FEM. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, **V.77&78**, :643-651, 1998.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. **Monthly Weather Review**, **V.91**, :99-165, 1963.

TEIXEIRA, P. R. F. **Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método dos Elementos Finitos**. Tese de Doutorado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2001.

TEIXEIRA, P. R. F. **Simulação Numérica de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis Aplicando o Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1996.

TEIXEIRA, P. R. F. & AWRUCH, A. M. Three dimensional simulation of high compressible flows using a multi-time-step integration technique with subcycles. **Applied Mathematic Modelling**, **V.25**, :613-627, 2001.

TRAPP, L. G. **Uso do Método de Dois Passos de Tempo Variável Através de Sub-Ciclos na Simulação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos**. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: PROMEC/UFRGS, 2000.

VOKE, P. R.; KLEISSER, L. & CHOLLET, J. P. (Eds.). **First ERCOFTAC Workshop on DNS and LES**. Guildford, Surrey (UK), March 27-30. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht, 1994.

VOKE, P. R.; KLEISSER, L. & CHOLLET, J. P. (Eds.). **Second ERCOFTAC Workshop on DNS and LES**. Grenoble (France), September 16-19. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht, 1997.

WANDERLEY, J. B. V. & LEVI, C. A. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. **Ocean Engineering**, **V.29**, :445-460, 2002.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, New York, 2nd ed., 1991, 725 p.

ZIENKIEWICZ, O. C. & CHEUNG, J. K. Finite element method in the solution of field problems. **The Engineering**, **V.24**, :507-510, 1965.

APÊNDICE A UMA BREVE REVISÃO SOBRE A AEROELASTICIDADE EM PONTES

Neste trabalho procura-se realizar, numericamente, alguns dos ensaios usualmente efetuados em túneis de vento para o estudo do comportamento aerodinâmico e aeroelástico de seções de pontes. A maneira habitual de colher informações com respeito aos referidos efeitos é lançar mão de ensaios representativos, em túneis de vento, simulando as condições naturais às quais a estrutura está submetida. No entanto, com o rápido avanço na tecnologia dos computadores e, através da Dinâmica dos Fluidos Computacional (*DFC*), já é uma realidade o enfrentamento de muitos problemas deste tipo numericamente.

Pontes de grande vão livre, do tipo suspensas, por exemplo, devem ser planejadas para suportar, em termos estáticos, as forças impostas pelo vento (arrasto, sustentação e momento aerodinâmico). Além disso, na medida em que tais estruturas apresentam rigidez e amortecimento relativamente baixos, podem estar sujeitas ao surgimento de fenômenos aeroelásticos, principalmente o drapejamento (também conhecido na literatura internacional como “*flutter*”) e a excitação por desprendimento de vórtices (ou “*vortex shedding induced vibrations*”). Nesta dissertação será abordada apenas a primeira situação.

O termo aeroelasticidade é empregado nas situações em que as forças aerodinâmicas produzam algum tipo de instabilidade de natureza oscilatória e/ou divergente à estrutura, através da interação entre estas forças e os movimentos da própria estrutura.

A.1 DRAPEJAMENTO OU “FLUTTER”

O fenômeno de “*flutter*” se trata de um tipo de instabilidade aeroelástica que ocorre a partir do momento em que o amortecimento global (estrutural + aerodinâmico) torna-se negativo em algum dos graus de liberdade da seção, ou em mais do que um simultaneamente. Esta última situação é conhecida como “*classical flutter*”, enquanto que a primeira é chamada de “*galloping*” ou de “*torsional flutter*”, dependendo se ocorre na direção transversal ou na direção rotacional,

respectivamente. Aqui é tratado apenas o caso mais simples, considerando somente as direções transversal e torcional da seção (Figura A.1).

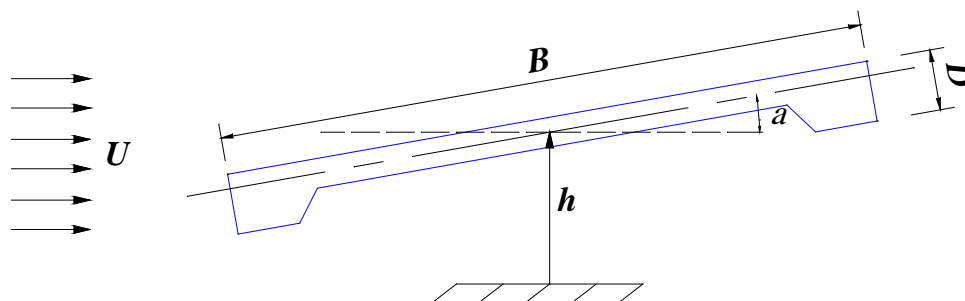


Figura A.1 - Características gerais de uma seção típica de ponte

Scanlan & Tomko (1971) sugeriram as seguintes expressões para o estudo do drapejamento em seções de pontes, usadas atualmente na seguinte forma:

$$\begin{aligned} m[\ddot{h}(t) + 2\zeta_h\omega_h\dot{h}(t) + \omega_h^2h(t)] &= L_h(t) \\ I[\ddot{\alpha}(t) + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha\dot{\alpha}(t) + \omega_\alpha^2\alpha(t)] &= M_\alpha(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

sendo que as forças aerodinâmicas são tomadas assumindo uma dependência linear com deslocamentos e velocidades da seção:

$$\begin{aligned} L_h(t) &= \frac{1}{2}\rho U^2 B \left[KH_1^*(K)\frac{\dot{h}(t)}{U} + KH_2^*(K)\frac{B\dot{\alpha}(t)}{U} + K^2H_3^*(K)\alpha(t) + K^2H_4^*(K)\frac{h(t)}{B} \right] \\ M_\alpha(t) &= \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left[KA_1^*(K)\frac{\dot{h}(t)}{U} + KA_2^*(K)\frac{B\dot{\alpha}(t)}{U} + K^2A_3^*(K)\alpha(t) + K^2A_4^*(K)\frac{h(t)}{B} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde m e I são a massa e o momento de inércia por unidade de comprimento, ζ_h e ζ_α são a taxa de amortecimento crítico estrutural, correspondente aos graus de liberdade h e α , ω_h e ω_α são as freqüências naturais circulares da seção, ρ a massa específica do vento, U a velocidade do vento livre, B a dimensão característica da seção, $K = \frac{\omega B}{U}$ a freqüência reduzida das oscilações e, por fim, H_i^* e A_i^* , os chamados “flutter derivatives”. Estes coeficientes representam a influência que o vento exerce sobre a rigidez e o amortecimento estrutural. Observando as expressões (A.1) e (A.2), pode-se verificar que os coeficientes H_1^* e A_2^* estão

relacionados ao amortecimento aerodinâmico, enquanto que H_4^* e A_3^* correspondem à rigidez aerodinâmica. Os demais coeficientes são aqueles que fazem o papel de acoplamento entre os graus de liberdade da seção.

A análise do problema consiste, basicamente, em determinar a velocidade do vento a partir da qual o amortecimento global torna-se negativo, uma vez que a idéia que norteia o trabalho dos projetistas não é conceber uma estrutura capaz de assimilar os esforços gerados, mas sim, evitar a ocorrência do fenômeno. Para isso, deve-se obter as curvas de H_i^* e A_i^* experimentalmente, em função da velocidade do vento. Através destas curvas é então obtida a velocidade crítica do vento para a dada seção. Esta velocidade crítica deve estar acima dos valores de velocidade de projeto para que o mesmo seja aceito, caso contrário, deve-se mudar as propriedades físicas e/ou geométricas da seção para que a velocidade crítica seja aumentada.

A condição crítica de drapejamento para cada uma das duas direções da seção, separadamente (ou não-acoplada), é obtida igualando o amortecimento global a zero na direção concernente, uma vez que a resposta dinâmica passa a adquirir uma natureza divergente quando o amortecimento aerodinâmico supera o estrutural. As condições críticas para as direções vertical e rotacional são, respectivamente:

$$A_2^* \geq \frac{4I\zeta_\alpha}{\rho B^4} \quad (\text{A.3})$$

$$H_1^* \geq \frac{4m\zeta_h}{\rho B^2} \quad (\text{A.4})$$

Para a obtenção experimental dos “flutter derivatives”, considera-se inicialmente que a seção vibre, nos seus respectivos graus de liberdade, segundo as seguintes funções (dentro do regime linear):

$$\begin{aligned} h &= h_0 e^{\lambda t} \text{sen}(\omega t) \\ \alpha &= \alpha_0 e^{\lambda t} \text{sen}(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Introduzindo estas expressões nas equações (A.1) e (A.2) e igualando a zero, separadamente, os termos em $\text{sen}(\omega t)$ e $\text{cos}(\omega t)$, surgem equações em função dos coeficientes H_i^* e A_i^* , ainda desconhecidos. Para a obtenção destes coeficientes é necessário restringir o movimento de uma das direções da seção e observar as oscilações produzidas na outra, após liberá-la com uma amplitude diferente de zero, extraíndo a freqüência das oscilações e a taxa de amortecimento médio, através do decremento logarítmico. Assim, ao restringir-se a rotação da seção ($\alpha = \alpha_0 = 0$), são obtidas as expressões:

$$H_1^*(K) = \frac{4m}{\rho B^2} \left[\zeta_h \frac{\omega_h}{\omega_h^{exp}} - \zeta_h^{exp} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$H_4^*(K) = \frac{2m}{\rho B^2} \left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_h^{exp}} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A.7})$$

onde todos os termos já foram descritos anteriormente, com exceção ao super-índice exp , que corresponde aos valores obtidos experimentalmente. Do mesmo modo, fixando o movimento transversal ($h = h_0 = 0$), chega-se às seguintes equações:

$$A_2^*(K) = \frac{4I}{\rho B^4} \left[\zeta_\alpha \frac{\omega_\alpha}{\omega_\alpha^{exp}} - \zeta_\alpha^{exp} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$A_3^*(K) = \frac{2I}{\rho B^4} \left[\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_\alpha^{exp}} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A.9})$$

Em resumo, dos ensaios permite-se obter os dados experimentais de freqüência das oscilações e o amortecimento. Aplicando estes dados às expressões (A.6) a (A.9), tem-se o valor dos coeficientes de “flutter” para uma determinada freqüência reduzida, ou seja, $K = \frac{\omega B}{U}$. Da expressão de freqüência reduzida, toma-se ω como sendo a freqüência natural circular da direção em análise. Sendo assim, pode-se projetar uma curva em planos de coordenadas $K \times A_i^*$ e $K \times H_i^*$ para cada freqüência reduzida K , obtida a partir de uma dada velocidade U . Outra forma de

gráfico é a que utiliza, como abscissa do plano coordenado, uma velocidade reduzida, dada por $U^* = \frac{U}{fB}$, onde $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Neste caso, ω deve ser substituído por f nas equações (A.6) a (A.9).

O método numérico para a obtenção dos “flutter derivatives”, usado neste trabalho, é o mesmo utilizado por Mendes e Branco (1999). Os autores aplicam o FOM (“Free Oscillation Method”) ou o Método das Oscilações Livres. Neste método, os coeficientes são obtidos através da análise das oscilações observadas, após liberar a seção de uma posição inicial com amplitude diferente de zero, mantendo um dos graus de liberdade rígido. Além disso, os ensaios são conduzidos com amortecimento estrutural nulo, uma vez que desta forma, o amortecimento verificado será puramente aerodinâmico. As massas da estrutura, m e I , tomam valores baixos quaisquer, pois os coeficientes de “flutter” não dependem dessa grandeza (como se verifica observando as equações (A.6) a (A.9)), mas sim dos valores experimentais resultantes, que são inversamente proporcionais aos parâmetros de massa. Este artifício é utilizado para que se possa extrair resultados plausíveis com poucos ciclos de oscilações e, conseqüentemente, redução em tempo de CPU.

Com as hipóteses assumidas para os ensaios, os coeficientes H_1^* e A_2^* ficam reduzidos à seguinte forma:

$$H_1^* = -\frac{m}{\rho B^2} \frac{2\delta_h^{exp}}{\pi}, \quad A_2^* = -\frac{I}{\rho B^4} \frac{2\delta_a^{exp}}{\pi} \quad (\text{A.10})$$

sendo $\delta^{exp} \approx 2\pi\zeta^{exp}$ o decremento logarítmico médio das oscilações.

O processo de análise da resposta dinâmica inicia após 30000 passos de tempo, com a estrutura totalmente fixa até este momento, e com uma dada amplitude inicial. Para valores de amplitude inicial, os autores tomam, com base em testes experimentais em túneis de vento, os seguintes: $\alpha_0 = 1.8^\circ$ e $h_0 = 0.16D$, sendo D a altura da seção.

Recentemente, Selvam et al. (2002) utilizaram um método direto para a obtenção da velocidade crítica de drapejamento via Método dos Elementos Finitos.

Baseados no *FOM*, os autores empregam os mesmos procedimentos experimentais descritos acima, verificando a estabilidade da seção para diversos valores de velocidade reduzida do vento.

Em cada análise, a resposta dinâmica da estrutura é observada determinando-se a taxa de incremento/decaimento. Quando as oscilações decrescem no tempo, isto significa que, para a dada velocidade, não há a condição de “flutter”. Por outro lado, quando a resposta da estrutura diverge, fica caracterizada a instabilidade para a velocidade analisada. Finalmente, é construído um gráfico onde o eixo das abscissas corresponde aos valores de velocidade reduzida do vento enquanto que o eixo das ordenadas relaciona-se às taxas de incremento/decaimento das oscilações. A velocidade crítica é determinada quando a curva obtida cruza o eixo das velocidades, ou seja, quando o comportamento das oscilações observadas passa de amortecido para divergente.

O cálculo da taxa de incremento/decaimento das oscilações é feito a partir da expressão abaixo:

$$Tx_{inc,dec} = \frac{y^n - y^{n+1}}{y^n} \quad (A.11)$$

onde y^n e y^{n+1} correspondem aos valores de pico entre um mesmo período de oscilação.