UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

O MÉTODO DE MÉTIVIER SOBRE A DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DE AUTOVALORES APLICADO AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

por

Ruy Coimbra Charão

Dissertação apresentada para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Porto Alegre
-1982-

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Mark Thompson e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática por:
Ruy Coimbra Charão.

DEDICO:

A minha mãe Maria da Glória,
minha avó (Dada) e
meus irmãos: Clóvis, Dante, Isolda,
Jorge, Regina e Roberto.

E em memória de meu pai:
Venâncio Charão.

AGRADECIMENTOS

Desejo externar minha gratidão ao Professor Dr. Mark Thompson pela confiança em mim depositada, pela sugestão do trabalho e pela orientação segura e constante que o tornou possível, pelos ensinamentos e também pelo seu incentivo e influência para que eu inicie na carreira científica.

Agradeço a minha mãe, minha avó e meus irmãos e irmãs pelo muito que lhes devo. Embora não se encontre mais presente, deixo registrada aqui minha gratidão a meu pai por tudo que me proporcionou.

Quero agradecer a todos que foram meus professores no decorrer de minha vida de estudante. Em particular aos professores da UFRGS e aos do Instituto de Matemática pelos ensinamentos, cursos ministrados, incentivo e pelo auxílio na solução de problemas com os quais me defrontei e a eles precisei recorrer. Nesse sentido agradeço aos Professores do Curso de Pós-graduação e em especial aos Professores: Dr. Luis Severo Panta, Dr. Marcos Sebastiani, Dr. Claus Ivo Doering e Dr. Miguel Ferrero. Ao Dr. Arthur Oscar Lopes também agradeço pelo incentivo, quando ainda eu cursava a graduação, para fazer o Mestrado em Matemática.

A todos os colegas do Curso de Mestrado em Matemática da UFRGS agradeço pelas trocas de idéias e colaboração que sempre me prestaram.

Aos funcionários do Instituto de Matemática da UFRGS meus agradecimentos pela solicitude com a qual sempre me atenderam.

Também agradeço aos meus amigos que de uma forma ou de outra sempre deram seu apoio e incentivo.

Agora, faço um agradecimento especial ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro através de Bolsa de Estudos, no período de março/80 a fevereiro/82, sem o qual não teria sido possível a realização deste trabalho e do Curso de Mestrado.

Porto Alegre, maio de 1982.

Ruy Charão

RESUMO

Aplicando resultados recentes de Métivier sobre os números de aproximação dos espaços clássicos de Sobolev obtemos a distribuição assintótica dos autovalores das equações de Maxwell:

$$\mathrm{rot}\ E - iw\mu H = I \qquad (\mu = \mu(x))$$

$$\mathrm{rot}\ H + iw\epsilon E = K \qquad (\epsilon = \epsilon(x))$$

definidas sobre um aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^3$ com hipóteses (coeficientes hölderianos de expoente $s \in (0,1]$ e a condição de regularidade de Métivier sobre a fronteira de Ω) significativamente mais fracas que as anteriormente pedidas na literatura (em particular a Tese de Mehra), dada pela estimativa:

$$N(\lambda) = C(\Omega)\ \lambda^{3/2} + O\left(\lambda^{(3 - \frac{s}{s+1})/2}\right).$$

ABSTRACT

Applying recent results of Métivier about approximation numbers of classic Sobolev spaces we obtain the asymptotic distribution of the eigenvalues of Maxwell's equations:

$$\mathrm{rot}\ E - iw\mu H = I \qquad (\mu = \mu(x))$$

$$\mathrm{rot}\ H + iw\epsilon E = K \qquad (\epsilon = \epsilon(x))$$

defined over a bounded open set Ω in $\mathbb{R}^3$ with significantly weaker hypotheses (hölderian coefficients with exponent $s \in (0,1]$ and Métivier's regularity condition on the boundary of Ω) than those asked before in the literature (in particular Mehra's theses) given by the estimate:

$$N(\lambda) = C(\Omega)\ \lambda^{3/2} + O\left(\lambda^{(3 - \frac{s}{s+1})/2}\right)$$

S U M Á R I O

Página

INTRODUÇÃO

Consideramos as equações de Maxwell

$$\text{rot } E - iw\mu H = J$$

$$\text{rot } H + iw\varepsilon E = K$$

as quais descrevem o comportamento de um campo eletromagnético em uma região do espaço. Mostramos que as equações de Maxwell são equivalentes ao sistema de segunda ordem:

$$ME: = \text{rot } \mu^{-1} \text{ rot } E - w^2 \varepsilon E = F$$

onde $F = iwK + \text{rot } \mu^{-1} J$, com a condição de fronteiras $\eta \times E = 0$ (η é o vetor normal).

Introduzimos o sistema elíptico:

$$M_{s_o} E: = \text{rot } \mu^{-1} \text{ rot } E - s_o \varepsilon \text{ grad div } \varepsilon E - w^2 \varepsilon F = G \quad (s_o > 0)$$

com as condições de fronteira $\eta \times E = 0$ e $\text{div } \varepsilon E = 0$; sendo $G = F + (w^2)^{-1} s_o \varepsilon \text{ grad div } F$.

Associamos ao operador M_{s_o} uma forma bilinear que mostramos ser coerciva sobre $V(\Omega)$, definida por:

$$B(\phi, E) = (\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot } E) + s_o(\text{div } \varepsilon \phi, \text{ div } \varepsilon E) + (\phi, \varepsilon E)$$

onde

$$V(\Omega) = \{E \in \mathcal{H}^1(\Omega) / (\phi, \text{rot } E) = (\text{rot } \phi, E) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}^1(\Omega)\}.$$

Posteriormente observamos que B é contínua e hermitiana sobre $V(\Omega)$.

A seguir, obtemos uma extensão autoadjunta $\tilde{M}$ do operador M_{s_o}. Definimos autovalor do operador $\tilde{M}$, via a forma B. Também dizemos que λ é autovalor das equações de Maxwell se λ é autovalor do operador M definido sobre $V(\Omega) \cap D_o(\Omega)$ onde:

$$D_o(\Omega) = \{E \in L^2(\Omega) \,/\, \operatorname{div} \epsilon\, E = 0\}.$$

Desde que $\tilde{M}$ é autoadjunto obtemos, com certas condições de regularidade sobre a fronteira de Ω, que os autovalores do operador $\tilde{M}$ formam uma seqüência de números reais sem ponto de acumulação, exceto possivelmente $+\infty$.

Mostramos também que nos autovalores de $\tilde{M}$ estão incluídos os autovalores do operador:

$$L_{s_o} u = s_o \operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} u - u$$

definido sobre $H_o^1(\Omega)$. Um fato importante na prova desse resultado é a decomposição do espaço $\mathcal{L}_{2,\epsilon}(\Omega)$ que obtemos na seção I.1.3 pelo método de Weyl.

Portanto, quando retiramos dos autovalores de $\tilde{M}$ os autovalores correspondentes a L_{s_o}, sobram os autovalores das equações de Maxwell. Isso está provado no Capítulo II.

Assim, também os autovalores das equações de Maxwell são reais e formam uma seqüência sem pontos de acumulação. Com isso, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ definidos como $N_M(\lambda)$ o número de autovalores das equações de Maxwell menores ou iguais à λ (contadas as multiplicidades).

O objetivo da presente dissertação é obter uma fórmula para $N_M(\lambda)$. Mais claramente, estamos interessados em analisar o comportamento de $N_M(\lambda)$ quando $\lambda \to \infty$. A esse tipo de problema chamamos de : a distribuição assintótica de autovalores (no caso, para as equações de Maxwell).

Na realidade obtemos estimativas para $\overset{0}{N}_{s_0}(\lambda)$ e $\overset{1}{N}_{s_0}(\lambda)$ associadas aos operadores M_{s_0} e L_{s_0} e, pela observação acima, temos então uma estimativa para $N_M(\lambda)$ das equações de Maxwell.

Para os coeficientes das equações de Maxwell: μ, ϵ constantes, esse problema foi resolvido em 1961 por Niemeyer. Mehra [11] resolveu em 1978 para $\epsilon = \epsilon(x)$ e $\mu = \mu(x)$ sendo matrizes positivas definidas e simétricas, dependentes da posição.

Mehra, utilizando cálculos paramétricos (operadores pseudodiferenciais) para o resolvente do operador e uma aplicação da teoria Tauberiana (ver [11] e [14]), obteve o seguinte resultado:

$$N_M(\lambda) = \gamma(\Omega)\, \lambda^{3/2} + O\left(\lambda^{\frac{3-\sigma}{2}}\right) \quad (\lambda \to +\infty)$$

com $0 \leq \sigma < 1/2$ e $\gamma(\Omega)$ uma constante dependendo sobre Ω.

Em nosso trabalho, em lugar desse método, utilizamos o método de Métivier sobre os números de aproximação dos espaços clássicos de Sobolev o qual é na realidade uma extensão sofisticada do trabalho clássico e bem conhecido de Courant e Hilbert.

Pedindo que os coeficientes das equações de Maxwell sejam hölderianos de expoente $s \in (0,1]$, a qual é uma hipótese significativamente mais fraca que a condição de C^∞ pedida por Mehra, obtemos a estimativa:

$$N_M(\lambda) = C(\Omega)\ \lambda^{3/2} + O\left(\lambda^{(3 - \frac{s}{s+1})/2}\right) .$$

A condição de regularidade que pedimos sobre a fronteira de Ω, introduzida por Métivier, também é mais fraca por exemplo que a condição C^{2+k} $(k \geq 0)$ solicitada por Mehra (ver por exemplo Fraenkel [10] teoremas 3.3 e 4.3).

Como dizemos no Capítulo III, na verdade o que fazemos é calcular esse tipo de estimativa para o operador associado a uma tripla variacional $(V, L^2(\Omega), a)$, onde <u>a</u> é uma forma integrodiferencial definida sobre V, sendo V um subespaço fechado de $H^m(\Omega)$ contendo $H_o^m(\Omega)$. A estimativa assintótica, para as equações de Maxwell é então obtida como uma aplicação desse resultado mais geral.

Introduzimos na segunda parte do Capítulo I uma seção chamada de mini-max. Utilizamos os n-diâmetros de Kolmogorov. Seja A um subconjunto limitado de um espaço vetorial normado F.

$$d_n(A;F) = \inf_{G \in G_n(F)} \ \sup_{x \in A} \ \inf_{y \in G} \|x-y\|_F$$

onde $G_n(F)$ indica o conjunto de todos os subespaços lineares com dimensão no máximo n do espaço de Banach F. Temos também:

$$N(\lambda; V, L^2(\Omega), a) = \inf_{E \in \mathcal{E}_\lambda(V, L^2(\Omega), a)} \operatorname{codim}_V(E)$$

onde $\mathcal{E}_\lambda(V, L(\Omega), a)$: conjunto dos subespaços fechados E de V tal que a forma $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E.

Enfatizamos que o mini-max não é um assunto "standard", por isso difícil de ser referenciado, para com isso justificar seu desenvolvimento neste trabalho com todos os detalhes. Seguimos as indicações de Métivier [13], o qual é a nossa referência básica.

Mais geralmente, definimos então uma tripla variacional (V,H,a) onde V e H são espaços de Hilbert e $V \subset H$ com injeção contínua. a é uma forma sesquilinear, hermitiana, contínua e coerciva sobre V. A seguir, definimos as funções $N(\lambda; V,H,a)$. Supondo que V é denso em H associamos, via lema de Lax-Milgran, um operador autoadjunto $(A,D(A))$ à tripla variacional (V,H,a). Com isso, supondo que a injeção de V em H é compacta, temos associada uma sequência de autovalores reais:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \ldots$$

sem ponto de acumulação, exceto possivelmente $+\infty$.

Com essas considerações, um dos resultados obtidos no mini-max é que:

$$N(\lambda;V,H,a) = \text{Card}\{j \geq 1 / \lambda_j \leq \lambda\}.$$

Assim, essa fórmula do mini-max justifica nosso interesse em estimar as funções $N(\lambda;V,L^2(\Omega),a)$, onde:

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha,\beta}(x)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \right\} dx$$

é uma forma integrodiferencial definida sobre V.

O que chamamos de O MÉTODO DE MÉTIVIER, é justamente o tratamento desenvolvido por Métivier para estimar $N(\lambda;.)$. Na seção III.2 relatamos brevemente esse método, do qual aqui damos indicações.

Na seção III.4 fazemos uma localização do problema. Consideramos uma partição finita de Ω em pequenos cubos disjuntos Q_k de lado ρ_k, contidos em Ω. Aproximamos a forma a por uma forma $\tilde{a}$ a coeficientes constantes sobre cada cubo. A estimativa para $N(\lambda;V,L^2(\Omega),a)$ é então obtida através de estimativas sobre a forma $\tilde{a}$.

Sobre cada cubo Q_k $\tilde{a}$ tem a forma:

$$\tilde{a}(u,v) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int_{Q_k} D^{\alpha}u\,\overline{D^{\beta}v}\,dx \,.$$

Então, para a forma $\tilde{a}$ definida desse modo sobre $\Omega' = \bigcup_k Q_k$, obtemos via proposição III.3.1 estimativas para $N(\lambda;H_o^m(\Omega')\ L^2(\Omega')\ \tilde{a})$ e $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a})$ conforme lemas III.4.4 e III.4.5. Dessas obtemos então as estimativas para $N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a})$.

Informalmente, observamos que é possível decompor a forma $\tilde{a}$ definida sobre V em $\tilde{a}$ restrita a $H_o^m(\Omega')$ soma direta com $\tilde{a}$ restrita a $V^{\perp}$, onde $V^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $H_o^m(\Omega')$ em V com respeito a forma $\tilde{a}-\lambda$, isto é:

$$\tilde{a}|_V = \tilde{a}|_{H_o^m(\Omega')} \oplus \tilde{a}|_{V^{\perp}} \quad .$$

Mas, um resultado técnico de Métivier de perturbação (Proposição III.3.1) permite uma demonstração que $N(\lambda;V^{\perp}, L^2(\Omega'),\tilde{a})$ é negligenciável. Esse é o motivo pelo qual o método funciona. De fato, o assunto é na verdade um pouco mais complicado do que aparenta e para evitar isso a análise tem de ser feita de uma maneira indireta através da proposição I.2.1.2.10 a qual é um resultado importante de autoria de Métivier. Mais claramente, a dificuldade está justamente em calcular estimativas sobre o complemento de $H_o^m(\Omega')$ em V. Então, a maneira que

Métivier encontrou para contornar esse problema é fazer as estimativas sobre o subespaço Z_λ de V (ver definição de Z_λ após lema III.4.4), o qual contém $V^\perp$, via a Proposição I.2.1.2.10.

Assim, consoante a Proposição I.2.1.2.10, a estimativa para $N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a})$ é obtida por estimativas sobre $N(\lambda;\ H_o^m(\Omega'),L^2(\Omega'),\tilde{a})$, $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a})$ e $\dim(H_o^m(\Omega')\cap Z_\lambda)$ (ver demonstração do teorema III.6.2). Quando majoramos $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a})$, via lema III.4.5, surge uma nova componente na estimativa representada por $N(\lambda+\tau)C_3,V,L^2(\omega))$ (τ,C_3 constantes e $\omega=\Omega\setminus\bar{\Omega}'$). Essa componente é então controlada pelo lema III.5.1. Para provarmos esse lema utilizamos as estimativas dos espaços $K_o^m(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$ da seção I.2.3. Para isso, supomos que a fronteira de Ω tem medida (n-1)-dimensional finita. Mostramos então esse lema para uma das seguintes condições: $V=H_o^m(\Omega)$ ou Ω é limitado e tem a condição de regularidade de Métivier (ver seção I.2.3).

Supomos então que Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ (em particular, a injeção de $H_o^m(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta e também temos uma boa aproximação de Ω por uma partição em pequenos cubos). Então, com isso e uma das hipóteses do lema III.5.1 (anteriormente mencionadas) finalmente temos a seguinte estimativa para a distribuição assintótica de autovalores para o problema variacional $(V,L^2(\Omega),a)$:

$$N(\lambda;V,L^2(\Omega),a)=\mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2m}+O\left(\lambda^{(n-\frac{s}{s+1})/2m}\right)$$

onde V é um subespaço fechado de $H^m(\Omega)$ contendo $H_o^m(\Omega)$ e $s\in(0,1]$ é devido à continuidade de Holder dos coeficientes da forma $\underline{a}$. No caso da hipótese de $V = H_0^m(\Omega)$ não precisamos de regularidade sobre a fronteira de Ω, a menos da hipótese de que tenha medida finita.

Na prova desse resultado (teorema III.6.2) consideramos a partição finita de Ω em cubos Q_k com todos tendo o mesmo comprimento de lado $\rho > 0$.

A estimativa do resto (de ordem $(n - \frac{s}{s+1})/2m$) também é uma contribuição de Métivier.

Agora, fazemos um breve relato sobre resultados obtidos anteriormente para esse tipo de problema (ver Métivier [13]).

Em geral, seja Ω um aberto, a priori qualquer, de $\mathbb{R}^n$ e considerando uma realização autoadjunta em $L^2(\Omega)$ de um operador do tipo:

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha .$$

Se a injeção de $D(A)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, o espectro de A é constituído de uma seqüência de autovalores reais tendendo a $+\infty$. Supondo que vale a fórmula

$$N(\lambda) \sim \mu(\Omega)\, \lambda^{n/2m} \qquad (\lambda \to +\infty)$$

então o problema que se coloca é de estimar a diferença:

$$R(\lambda) = N(\lambda) - \mu(\Omega)\, \lambda^{n/2m} .$$

No caso de operadores a coeficientes elípticos AGMON (1968) e HORMANDER (1966) conseguiram a estimativa:

$$(*) \qquad R(\lambda) = O(\lambda^{(n-\theta)/2m})$$

com $\theta < 1/2$ (e $\theta < 1$ se a parte principal de $\mathcal{Q}$ é a coeficientes constantes).

HORMANDER (1968) demonstrou que no caso onde Ω não é mais um aberto de $\mathbb{R}^n$ mas uma variedade compacta, temos a estimativa ótima (*) com $\theta = 1$.

Métivier observa também que se os coeficientes do operador são C^∞, utilizando resultados de HORMANDER (1968) e BRUNNING (1974), sempre temos:

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2m} \operatorname{Log} \lambda).$$

Notar que para todos esses resultados acima citados, os autores fazem hipóteses de regularidade sobre Ω.

No caso onde os coeficientes de $\mathcal{Q}$ são irregulares, BEALS (1970) e MARUO/TANABE (1971) obtiveram a estimativa (*) com $\theta < \frac{s}{s+3}$ se os coeficientes a_α para $|\alpha|=2m$ são holderianos de expoentes $s \in (0,1]$ sobre $\overline{\Omega}$.

Em nosso trabalho, conforme já observamos acima, mostramos uma estimativa (*) com $\theta = \frac{s}{s+1}$ onde os coeficientes a_α para $|\alpha|=2m$ são hölderianos de expoente $s \in (0,1]$. Esse resultado foi obtido por MÉTIVIER [13] (1977). Para $s = 1$ Métivier já tinha feito o estudo em 1974.

CAPÍTULO I

Com o objetivo de melhor classificar os resultados que vamos precisar nos capítulos seguintes, separamos este capítulo em duas partes.

A primeira parte chamamos de resultados básicos. Nessa parte iniciamos com uma seção sobre espaços de Sobolev a qual não conterá as demonstrações dos resultados enunciados, embora vamos procurar sempre dar uma indicação de como obtê-las. Nas outras seções, quando isso ocorrer, também daremos indicações.

Na segunda parte, que chamamos de resultados técnicos; incluimos uma seção completa sobre o mini-max que, sendo um assunto não "standard", é difícil de ser referenciado. Assim, pensando nisso, procuramos dar todos os detalhes no desenvolvimento desse assunto.

I.1- Resultados Básicos

Como indicamos anteriormente, começamos com os espaços de Sobolev. Muitas das definições e proposições e também teoremas enunciados nessa seção, embora não sejam utilizados aos menos explicitamente no decorrer do presente texto, são úteis no sentido de obtermos maior segurança no tratamento de problemas relacionados com esses espaços.

A seguir, temos uma seção sobre notações, duas seções sobre Weyl e finalmente uma outra seção com um cálculo elementar para estimar o número de coordenadas inteiras de uma região limitada por uma superfície algébrica.

I.1.1 - ESPAÇOS DE SOBOLEV

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $n \in \mathbb{N}$. O conjunto

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

é chamado ESPAÇO DE SOBOLEV de ordem m.

Observamos que $\|\ \|_{0,\Omega} = \|\ \|_{L^2(\Omega)}$ e $H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Também observamos que em geral temos a inclusão própria: $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset H^m(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ temos sempre que $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Assim, podemos definir:

$$H^m_o(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \quad \text{em} \quad H^m(\Omega).$$

Vamos precisar também das semi-normas dadas pela seguinte definição.

$$|u|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Seja agora,

$$K^m_o(\Omega) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^n)/D^\alpha u = 0 \ \text{ q.s. em } \ \mathbb{R}^n \setminus \Omega,\ |\alpha|\leq m\}.$$

Temos que $K^m_o(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^m(\mathbb{R}^n)$ que tem uma injeção em $H^m(\Omega)$ que pode ser identificada como um subespaço de $H^m(\Omega)$.

Definimos também o espaço:

$$K^m(\Omega) = \{u|_\Omega \ / \ u \in H^m(\mathbb{R}^n)\}$$

com a norma

$$\|u\|_{K^m(\Omega)} = \inf_{\substack{v \in H^m(\mathbb{R}^n) \\ v|_\Omega = u}} \|v\|_{m,\mathbb{R}^n}$$

Podemos encontrar na literatura, para a definição através das derivadas fracas em $L^2(\Omega)$, W^m em vez de H^m, por exemplo em Agmon [14]. Agmon define $H^m(\Omega)$ como sendo o completamento, na norma $\| \ \|_{m,\Omega}$, das funções de $C^m(\Omega)$ tenham norma $\| \ \|_{m,\Omega}$ finita. Mas pode-se mostrar a igualdade desses espaços em casos, pelo menos, que Ω tenha certa regularidade na fronteira; como por exemplo a propriedade do segmento de Agmon (ver [14]).

Observamos que $K^m(\Omega)$ é isométrico ao quociente de $H^m(\mathbb{R}^n)$ por $\{u \in H^m(\mathbb{R}^n)/ \ u|_\Omega = 0\}$ e existe uma extensão linear isométrica de $K^m(\Omega)$ em $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Claramente temos:

$$H_o^m(\Omega) \hookrightarrow K_o^m(\Omega) \hookrightarrow K^m(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$$

(onde $\hookrightarrow$ indica injeção contínua).

Vamos necessitar também dos espaços:

$$H_{loc}^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)/ \ u|_\omega \in H^m(\omega), \quad \forall \ \omega \subset\subset \Omega\}$$

$$H_{comp}^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega)/\text{suporte}(u) \subset\subset \Omega\}$$

onde $A \subset\subset B$ indica que $\overline{A}$ é compacto e $\overline{A} \subset B$.

Temos a seguinte:

I.1.1.1 - Proposição: Seja m um inteiro positivo. Então $H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide com o conjunto $\{u \in S'(\mathbb{R}^n) \,/\, (1+|x|^2)^{m/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Definindo

$$|||u|||_m = \|(1+|x|^2)^{m/2}\, \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

a aplicação

$$\begin{aligned} H^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\longmapsto |||\, u\, |||_m \end{aligned}$$

é uma norma equivalente a norma de Sobolev, onde $\hat{u}$ é a transformada de Fourier de u.

Motivados por essa proposição, definimos para $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n)/(1+|x|^2)^{s/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

com a norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|x|^2)^{s/2}\, \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Temos que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert. $S(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ sendo aí denso.

Observamos também que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Agora, definimos o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ por $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, onde se representa:

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \\ \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}=1}} \langle f,u \rangle$$

Das observações anteriores resulta que

$$S(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$$

com inclusões contínuas.

Indicamos também a seguinte

<u>I.1.1.2 - Proposição</u>:

(i) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n)/(1+|x|^2)^{-s/2}\, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

(ii) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|x|^2)^{-s/2}\, \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Vamos agora dar uma definição sobre regularidade de fronteiras, sobre a qual podemos construir os espaços $H^s(\Omega)$ com $s \geq 0$.

Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que <u>Ω é bem regular</u> (ou tem a propriedade C^∞ de regularidade) se a fronteira de Ω $\partial\Omega = \Gamma$ for uma variedade C^∞ de dimensão n-1, estando Ω de um mesmo lado da fronteira. Isto é qualquer x pertencente a Γ existem um aberto limitado φ de $\mathbb{R}^n$ contendo x e uma aplicação φ: $\overline{U} \to \overline{Q}$ tal que:

(a) φ é um difeomorfismo C^∞ de $\overline{U}$ sobre $\overline{Q}$, isto é, φ é bijetora com φ e φ^{-1} sendo C^∞.

(b) $\varphi(U \cap \Omega) = Q^+$; $\varphi(U \cap \partial\Omega) = \Gamma_o$ e $\varphi[\partial(U \cap \Omega)] = \Gamma_1 = \partial Q^+$ onde $Q = (0,1)^{n-1} \times (-1,1)$; $Q^+ = (0,1)^n$ e $\Gamma_o = \{n \in Q/x_n = 0\}$.

Quando na condição (a) tivermos apenas que φ é um difeomorfismo C^K dizemos que Ω tenta propriedade C^K de regularidade.

<u>I.1.1.3 - Proposição:</u> Se Ω é um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^m(\Omega)$.

Se Ω for um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular, existe uma família de cartas locais para Γ $\{(U_i,\psi_i)\}_{i=1}^{k}$ e funções de teste $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k+1}$ no $\mathbb{R}^n$ tais que o suporte $(\sigma_i) \subset \subset U_i$ com $i = 1,\ldots,R$ e suporte $(\sigma_{k+1}) \subset \Omega$, sendo $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(x)=1$ para todo x em $\overline{\Omega}$.

Aqui, como em Medeiros/Rivera [9], dizer que $\{U_i,\psi_i)\}$ são cartas locais significa que as funções ψ_i satisfazem as condições (a) e (b) da definição de Ω, ou a fronteira de Ω ser bem regular.

Ademais, se novamente Ω for aberto limitado e bem regular então existe um operador contínuo $P: H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $P_u = u$ q.s. em Ω, para todo u em $H^m(\Omega)$. P é dito operador de m-prolongamento.

Agora, enunciamos um teorema sobre injeções compactas.

<u>I.1.1.4 - Teorema (RELLICH):</u> Seja Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então a imersão de $H_o^{m+1}(\Omega)$ em $H_o^m(\Omega)$ é compacta.

Se, além disso, Ω for bem regular temos que a imersão de $H^{m+1}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é compacta.

A seguir vamos definir e mencionar alguns resultados sobre os espaços $H^s(\Omega)$ com Ω bem regular. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ já fizemos isso com ajuda da transformada de Fourier.

Seja Ω aberto limitado bem regular ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

Consideremos a aplicação linear e contínua $r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) \to$ $\to L^2(\Omega)$ definida por $r_\Omega\, u = u|_\Omega$. Temos $D^\alpha(r_\Omega u) = r_\Omega\, D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, no sentido das distribuições. Assim, a aplicação $r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) \to H^m(\Omega)$ está bem definida e é contínua.

Se P é o operador de m-prolongamento, temos $r_\Omega P u = u$ para u em $H^m(\Omega)$ e assim r_Ω aplica $H^m(\mathbb{R}^n)$ <u>sobre</u> $H^m(\Omega)$. Consequentemente temos

$$H^m(\Omega) = \{r_\Omega\, u / u \in H^m(\mathbb{R}^n)\} = K^m(\Omega).$$

Assim, no caso de Ω aberto limitado bem regular, $H^m(\Omega) = K^m(\Omega)$.

Esse resultado serve de motivação para se definir o espaço $H^s(\Omega)$ com s real positivo.

Seja $s \geq 0$. O espaço vetorial

$$H^s(\Omega) = \{r_\Omega\, u / u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

com a norma $\|v\|_{s,\Omega} = \inf\{\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} / r_\Omega\, u = v, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$ $v \in H^s(\Omega)$, é chamado <u>espaço de Sobolev de ordem s</u>.

Também se define a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$ como $H^s_0(\Omega)$.

<u>Observação</u>: $E_s = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) / r_\Omega\, u = 0\}$ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo $H^s(\mathbb{R}^n)/E_s = \{u + E_s / u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$ é de Banach com a norma $\|u + E_s\| = \inf\{\|u+v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} / v \in E_s\}$.

Agora, com base nas definições anteriores, na observação acima e pequenos argumentos; temos que existe um isomorfismo de $H^s(\Omega)$ no espaço quociente $H^s(\mathbb{R}^n)/E_s$ que preserva a norma

(Ω limitado e bem regular).

I.1.1.5 - Proposição: $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$.

Na demonstração mostra-se primeiro que a norma de $H^s(\Omega)$ é induzida por um produto interno em $H^s(\Omega)$ provando-se que a norma de $H^s(\Omega)$ satisfaz a lei do paralelograma (ver [9]).

I.1.1.6 - Proposição: Seja Ω aberto limitado e bem regular. Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \subset H^{s_1}(\Omega)$ com imersão contínua.

Observamos que existem outros métodos para definir os espaços $H^s(\Omega)$, sendo que todos coincidem com o aqui utilizado tomando $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ ou um aberto bem regular. A demonstração dessas equivalências é feita com base na teoria de interpolação.

A seguir vamos definir os espaços de traços a fim de enunciarmos uma versão do teorema do traço.

Seja Ω bem regular com fronteira Γ. Temos

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{w \mid w: \Gamma \to \mathbb{R}, \text{ suporte } (w) \text{ é compacto, } D^\alpha w \in C^\infty(\Gamma)\}.$$

Dada u definida em $\overline{\Omega}$, representamos

$$\gamma_o u = u/\Gamma \quad \text{com } \Gamma = \partial\Omega .$$

O teorema do traço dá a caracterização do espaço ao qual $\gamma_o u$ pertence.

Notar que $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ então $\gamma_o u \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Sejam Ω aberto bem regular e $\{(U_i,\psi_i)\}_{i=1}^N$ sistemas de cartas locais de $\Gamma = \partial\Omega$ e $\{\sigma_i\}_{i=1}^{N}$ funções de teste no $\mathbb{R}^n$ tais que suporte$(\sigma_j) \subset U_j$ e $\sum_{1}^{N} \sigma_j(x) = 1$ para todo x em Γ. ($\{\sigma_j\}$ formam uma partição finita da unidade sujeita à cobertura $\{U_j\}$ da fronteira de Ω). Sejam w definida em $\Gamma = \partial\Omega$ e

$$w_j(x) = \begin{cases} \sigma_j w(\psi_j^{-1}(x',0)) & \text{se} \quad x' \in \Omega_o = (0,1)^{n-1} \\ 0 & \text{se} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Omega_o \end{cases}$$

Então definimos

$$H^s(\Gamma) = \{w \,/\, w \text{ definida em } \Gamma,\ w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall\ j=1,\dots,N\}.$$

com a norma $\|w\|_{H^s(\Gamma)} = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \|w_j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}^{1/2}$.

Identificando $\mathbb{R}^{n-1}$ com a fronteira Γ do semi-espaço $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$ definimos também:

$$H^s(\Gamma) = H^s(\mathbb{R}^{n-1}).$$

A independência, da definição acima, do espaço $H^s(\Gamma)$ do sistema de cartas locais pode ser verificada em Lions/Magenes [6a].

Agora temos a seguinte

<u>I.1.1.7 - Proposição</u>: Seja Ω aberto bem regular. Então existe $C > 0$ tal que

$$\|\gamma_o u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\ u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Temos os seguintes:

I.1.1.8 - Corolário: A aplicação

$$\gamma_o : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

com $\gamma_o\, u = u|_\Gamma$, é contínua.

I.1.1.9 - Corolário: Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, desde que consideramos Ω bem regular, a aplicação acima prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua que também representamos por γ_o:

$$\gamma_o : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

e que chamamos "função traço" e seu valor "$\gamma_o u$ o traço de u sobre Γ".

I.1.1.10 - Teorema: Seja Ω aberto bem regular. A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{1/2}(\Gamma)$ com núcleo $H^1_o(\Omega)$.

Agora vamos estudar o traço das derivadas.

Sejam $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma = \partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ e u definida numa vizinhança de Γ. Definimos

$$(\gamma_j u)(x') = (D^j_n u)(x',0) = \gamma_o(D^j_n u)(x')$$

onde $D^j_n = \dfrac{\partial^j}{\partial x^j_n}$ e $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$.

Temos que $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ é denso em $\prod_0^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Também temos para $\Omega = \mathbb{R}^n_+$:

I.1.1.11 - Teorema: A aplicação linear $\varphi \longrightarrow (\gamma_o\varphi, \gamma_1\varphi, \dots, \gamma_{m-1}\varphi)$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\prod_0^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua γ de $H^m(\Omega)$ em $\prod_{0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ cujo núcleo é o espaço $H_o^m(\Omega)$. Ainda, γ possui inversa linear à direita contínua.

Seja agora Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, admitindo normal interior ν.

Escolhendo sistema de cartas locais e funções de teste $\sigma_1,\ldots,\sigma_{N+1}$ tal que $\sum_{1}^{N+1} \sigma_j(x) = 1$ em $\overline{\Omega}$ tal que para toda função u definida em Γ e $j=1,\ldots,N$ vale a relação

$$\frac{\partial}{\partial\nu} u_j(\varphi_j^{-1}(x')) = \frac{\partial}{\partial x_n} (u_j \circ \varphi_j^{-1})(x',0), \ (x',0) \in \Sigma_o \ ;$$

onde $u_j = \sigma_j u$ e $\Sigma_o = \{(x',0)/0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,\ldots,n-1\}$.

Para $j = 1,2,\ldots,n-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ seja $\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u calculada na fronteira de Ω e seja $\gamma_o u = u|_\Gamma$.

Assim, com o auxílio de cartas locais e do Teorema I.1.1.11 obtem-se o seguinte resultado:

<u>I.1.1.12 - Teorema</u>: Seja Ω aberto limitado bem regular. Então existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ <u>sobre</u> o espaço $\prod_{0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ com núcleo $H_o^m(\Omega)$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\gamma u = (\gamma_o u, \gamma_1 u,\ldots,\gamma_{m-1} u) \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$$

Tal aplicação admite inversa à direita linear e contínua.

I.1.1.13 - Corolário: Seja $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\tilde{u}$, prolongamento de u ao $\mathbb{R}^n$ com $\tilde{u} = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, esteja em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Então u pertence a $H_o^m(\Omega)$.

Todas as definições e resultados enunciados até aqui podem ser obtidos, com as demonstrações, em Medeiros/Rivera [9].

Vamos precisar do teorema da interpolação no Capítulo III. Com esse objetivo damos a seguinte definição:

Dizemos que Ω tem a propriedade do cone (ver Agmon [14]) se a fronteira de Ω $\partial\Omega$ tem uma cobertura aberta localmente finita $\{\mathcal{O}_i\}$ e correspondentes cones $\{C_i\}$ com vértices na origem e a propriedade que $x+C_i \subset \Omega$ para todo x em $\Omega \cap \mathcal{O}_i$.

I.1.1.14 - Teorema (INTERPOLAÇÃO): Seja Ω aberto e limitado com a propriedade do cone e suponhamos que $0 < \varepsilon \leq 1$. Se $u \in H^m(\Omega)$ para $m \geq 2$ e se $1 \leq j \leq m-1$, então:

$$|u|_{j,\Omega}^2 \leq Y(\varepsilon^{m-j}\ |u|_{m,\Omega}^2 + \varepsilon^{-j}\ |u|_{0,\Omega}^2)$$

onde $Y = Y(\Omega,m)$ depende somente de Ω e m.

A demonstração desse teorema pode ser obtida em Agmon [14], essencialmente nas páginas 17 a 25. Para isso, Agmon mostra primeiramente o resultado para $m = 2$ e $j = 1$ utilizando algumas desigualdades e aproximando funções de H^1 e H^2 por funções de C^1 e C^2. A seguir aplica indução para provar o teorema com $m \geq 2$ e $j = 1,\ldots,m-1$.

Resultados sobre teoremas de interpolação, compacidade, continuidade também podem ser obtidos em Adams [12]; assim como definições sobre regularidade de fronteiras, etc. ...

A seguir enunciamos um lema que vamos precisar na prova da estimativa de A. El Kolli.

<u>I.1.1.15 - Lema</u>: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio C^∞ (bem regular) ou um cubo. Então

$$\|f\|^*_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2} + \sum_{|\beta|<m} \Big| \int_\Omega D^\beta f dx \Big|$$

é uma norma equivalente no espaço $H^m(\Omega)$.

A prova desse lema pode ser obtida em Triebel [4] essencialmente página 291.

Também vamos precisar de algumas noções e resultados sobre espaços periódicos.

Seja $C^m_\#(Q)$a classe das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ que são periódicas de 2π em cada variável e que são m vezes continuamente diferenciáveis. Seja $H^m_\#(Q)$ o completamento de $C^m_\#(Q)$ com respeito a norma $\| \ \|_{m,Q}$; onde $Q = (0,2\pi)^n$.

Claramente, identificando os elementos de $H^m_\#(Q)$ com funções definidas sobre Q, temos, com esta identificação, que: $H^m_\#(Q) \subset H^m(Q)$.

Agmon em [14] mostra que podemos identificar o espaço $H^m_\#(Q)$ com a coleção de todas as séries formais de Fourier:

$$u = \sum_k (2\pi)^{-n/2}\, b_k\, e^{ik\cdot x}$$

tal que $\|u\|^\#_m < \infty$, onde $\|u\|^\#_m = \{ \sum_k (1+|k|^2)^m |b_k|^2 \}^{1/2}$, com $|k|^2 = k_1^2 + \ldots + k_n^2$.

Essa identificação é possível devido ao seguinte:

<u>I.1.1.16 - Lema</u>: Existe uma constante $C_m > 1$ tal que a expressão:

$$C_m^{-1} \|u\|_m^{\#} \leq \|u\|_{m,Q} \leq C_m \|u\|_m^{\#}$$

é válida para todo u em $C_{\#}^m(Q)$.

Na verdade, esse lema é provado por Agmon em [14] para a norma $\|\cdot\|_m^{\#}$ com uma definição um pouco diferente da que fizemos acima, mas as demonstrações são essencialmente as mesmas e o resultado que precisamos é justamente o que enunciamos, sendo também o mais conhecido.

Agmon também mostra o seguinte resultado:

<u>I.1.1.17 - Teorema</u>: Seja $\{u_j\}$ uma seqüência limitada em $H_{\#}^m(Q)$. Se $m \geq 1$ então $\{u_j\}$ tem uma subseqüência que converge em $H^{m-1}(Q)$.

Assim, esse teorema diz que a injeção de $H_{\#}^m(Q)$ em $L^2(Q)$ é compacta.

Um fato obtido por Agmon, utilizando esse teorema, é o seguinte:

<u>I.1.1.18 - Teorema (RELLICH)</u>: Seja Ω um domínio limitado tendo a propriedade do cone. Então a injeção de $H^m(\Omega)$ em $H^j(\Omega)$, $j < m$, é compacta.

Agmon mostra esse teorema para Ω tendo a propriedade do segmento, que é uma extensão da propriedade do cone (ver [14]).

I.1.2 - NOTAÇÕES E ESPAÇOS AUXILIARES

Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^3$.

Primeiro fazemos algumas observações sobre matrizes.

Sejam $\epsilon,\mu,\ldots$ matrizes 3×3 definidas sobre Ω. Quando dizemos que $\epsilon,\mu,\ldots$ são matrizes definidas positivas, nos significa que, por exemplo, existem $\epsilon_o,\epsilon_1 > 0$ tal que para todo x em Ω e todo vetor $\xi \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$ vale:

$$0 < \epsilon_o|\xi|^2 \le \xi^{tr}\ \epsilon(x)\xi \le \epsilon_1|\xi|^2.$$

Tais matrizes são inversíveis e as inversas são também simétricas e definidas positivas.

Em nosso trabalho, as operações com matrizes e vetores são feitas componente a componente. Produtos de vetores e matrizes são feitos por multiplicação usuais. A^{tr} indica a transposta de A e $\overline{A}$ a conjugada de A.

A seguir introduzimos alguns espaços que vamos precisar mais tarde.

Para Ω aberto de $\mathbb{R}^3$, o espaço

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

com o produto interno

$$(E,F) = (E,F)_\Omega = \int_\Omega E\cdot\overline{F} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega E_i\ \overline{F}_i\ ,$$

é de Hilbert.

Definimos um outro produto interno:

$$(E,F)_{\varepsilon} = (E,\varepsilon F)$$

onde ε é uma matriz simétrica e definida positiva.

Seja agora, $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$ o espaço das funções vetoriais $E = (E_1,E_2,E_3)$, definidas sobre Ω, com norma $\| \ \|_{\varepsilon}$ finita.

Temos que $\| \ \|_{0,\Omega} = \| \ \|_{\Omega} = (\ , \ )_{\Omega}^{1/2}$ é uma norma equivalente à norma $\| \ \|_{\varepsilon} = (\ , \ )_{\varepsilon}^{1/2}$.

Do mesmo modo definimos o espaço:

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$$

com a norma $\|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{m,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$.

Assim também temos os espaços $\mathcal{C}^m(\Omega)$, $\mathcal{C}_o^m(\Omega)$ (as funções de $C^m(\Omega)$ com norma $\|u_i\|_{m,\Omega} < \infty$), $\mathcal{C}_o^{\infty}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_o^m(\Omega)$. Normalmente vamos chamar $\mathcal{C}_o^{\infty}(\Omega)$ de $C_o^{\infty}(\Omega)$ por comodidade, $\mathcal{C}(\Omega)$ por $C(\Omega)$, etc... .

Também definimos o espaço:

$$V(\Omega) = \{E \in \mathcal{H}^1(\Omega) \,/\, (\phi,\text{rot } E) = (\text{rot } \phi,E), \quad \forall \ \phi \in \mathcal{H}^1(\Omega)\}.$$

Claramente, temos que:

$$\mathcal{H}_o^1(\Omega) \subset V(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega).$$

As vezes podemos anotar $\| \cdot \|_{\mathcal{L}_{2,\varepsilon}}$ em vez de $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ ou $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ em vez de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$, etc... . Se estamos trabalhando com funções vetoriais, significa que estamos utilizando norma vetorial. Assim não vamos nos preocupar com a notação das normas.

Finalmente, anotamos

$$D_o(\Omega) = \{E \in \mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)/\text{div } \varepsilon E = 0\} .$$

Essa definição é motivada pelo fato que, como veremos na próxima seção sobre Weyl, dado E em $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$ podemos decompor E em componentes ortogonais:

$$E = E_o + E_1$$

com $\text{div } \varepsilon E_o = 0$, isto é, E_o pertence a $D_o(\Omega)$.

I.1.3 - A DECOMPOSIÇÃO DE WEYL

Vamos fazer uma breve exposição sobre o trabalho de Weyl (ver [5]) relativo ao método de projeção ortogonal.

I.1.3.1 - Definição:

Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^3$.

Seja $\varepsilon = \varepsilon(x)$ uma matriz 3×3, simétrica e definida positiva sobre Ω (ver seção I.1.2).

Consideremos o espaço $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$ definido na seção anterior.

Estamos interessados em fazer uma decomposição, em componentes ortogonais, de $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$.

Observamos que Weyl trabalha com o espaço $\mathcal{L}_2(\Omega)$, mas a decomposição que vamos fazer é similar e com o mesmo método.

Seja G o fecho do conjunto:

$$\{\text{grad } \psi \,/\, \psi \in H_0^1(\Omega)\} .$$

Seja C o fecho do conjunto:

$$\{\varepsilon^{-1} \text{ rot } v \,/\, v \in H_0^1(\Omega)\}$$

(no sentido da norma $\|\cdot\|_\varepsilon$).

Chamamos os elementos de $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$ que são ortogonais a G de <u>solenoidais</u> e anotamos F_s.

Os elementos de $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}$ ortogonais a C chamamos de <u>irrotacionais</u> e anotamos F_i.

Equivalentemente,

$$s \in F_s \longleftrightarrow (s,v)_{\varepsilon} = 0 \quad \forall\, v \in G$$

$$i \in F_i \longleftrightarrow (i,u)_{\varepsilon} = 0 \quad \forall\, u \in C.$$

Em [5] Weyl prova o seguinte lema quase imediato:

I.1.3.2 - Lema

$$\int_{\Omega} \text{grad}\, \psi \cdot \text{rot}\, v = 0 \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Claramente, pelas definições anteriores e o Lema acima, temos que $G \subset F_i$ e $C \subset F_s$.

Pelo teorema da ortogonalidade num espaço de Hilbert , temos

$$\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega) = G \oplus F_s$$

Agora, consideramos os elementos de F_i que são ortogonais a G. Então eles estão em F_s. Estes são, portanto, precisamente os elementos de $F_i \cap F_s$.

Conseqüentemente obtemos,

$$F_i = G \oplus (F_i \cap F_s)$$

Do mesmo modo que acima, podemos escrever

$$\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega) = C \oplus F_i$$

Logo, obtemos

$$\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega) = C \oplus G \oplus (F_i \cap F_s)$$

Weyl demonstra, aqui já apresentamos o resultado para o nosso espaço $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$, o seguinte:

I.1.3.3 - Teorema: Se $h \in F_i \cap F_s$ então $h \in C^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{div} \varepsilon h = 0$ e $\operatorname{rot} h = 0$.

(Em particular as componentes de h são "harmônicas", pois "Δ" $h = \operatorname{grad} \operatorname{div} \varepsilon h - \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} h$).

Concluimos esta seção com uma

I.1.3.4 - Observação:

Dado $E \in \mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$, pela decomposição de Weyl, podemos escrever

$$E = E_o + E_1$$

onde $E_1 \in G$ e $E_o \in C \oplus (F_i \cap F_s)$, isto é,

$$E_1 = \operatorname{grad} u, \quad \text{com } u \in H_o^1(\Omega) ,$$

e

$$E_o = \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \psi + f, \quad \text{com } \psi \in \mathcal{H}_o^1(\Omega) \text{ e } f \in F_i \cap F_s.$$

Assim, aplicando o teorema I.1.3.3, temos

$$\operatorname{div} \varepsilon E_o = \operatorname{div} \operatorname{rot} \psi + \operatorname{div} \varepsilon f = 0$$

desde que $\operatorname{div} \operatorname{rot} \psi = 0$, sempre, para todo ψ.

Consequentemente, temos a decomposição ortogonal que vamos precisar:

$$E = E_o + E_1$$

onde $E_1 = \operatorname{grad} u$, com $u \in H_o^1(\Omega)$ e $\operatorname{div} \varepsilon E_o = 0$, isto é, $E_o \in D_o(\Omega)$. O esquema aqui utilizado para fazer a exposição sobre Weyl é devida a Taylor [1].

I.1.4 - UM LEMA DE DECOMPOSIÇÃO DE WEYL

Nesta seção vamos apresentar um lema sobre decomposição, o qual consta do trabalho de Mehra, que vamos aplicar posteriormente.

Lema: Sejam Ω aberto limitado e $E \in V(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Então,

$$\|E\|^2_{1,\Omega} = \|\text{rot } E\|^2 + \|\text{div } E\|^2 + \|E\|^2$$

Prova: Como $E \in C^2(\overline{\Omega})$ então $\text{rot } E \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Assim usando que $E \in V(\Omega)$, segue:

$$\|\text{rot } E\|^2 = (\text{rot } E, \text{rot } E) = (\text{rot rot } E, E).$$

Do fato que $\Delta E = \text{grad div } E - \text{rot rot } E$, obtemos:

$$\|\text{rot } E\|^2 = (\text{grad div } E - \Delta E, E) = \int_\Omega (\overline{E}\cdot \text{grad div } E - \overline{E}.\Delta E)$$

Como $\text{div}(\overline{E} \text{ div } E) = \text{div } \overline{E} \text{ div } E + \overline{E}\cdot\text{grad div } E$, também obtemos:

$$\|\text{rot } E\|^2 = \int_\Omega \{\text{div}(\overline{E} \text{ div } E) - \text{div } \overline{E} \text{ div } E - \sum_{i,j=1}^{3} \overline{E}^i D_j^2 E^i\} =$$

$$= \int_\Omega \Big[\text{div}(\overline{E} \text{ div } E) - \text{div } \overline{E} \text{ div } E - \sum_{i,j=1}^{3} D_j(\overline{E}^i D_j E^i) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{3} D_j \overline{E}^i D_j E^i \Big] = \Big(\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega D_j \overline{E}\cdot D_j E\Big) - \|\text{div } E\|^2 +$$

$$+ \int_\Omega \Big[\text{div}(\overline{E} \text{ div } E) - \sum_{i,j=1}^{3} D_j(\overline{E}^i D_j E^i)\Big] =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \|D_j E\|^2\right) - \|\text{div } E\|^2 + \int_\Omega \text{div}\left[\overline{E} \text{ div } E - \left(\sum_{i=1}^{3} \overline{E}^i D_1 E^i, \ldots, \sum_{i=1}^{3} \overline{E}^i D_3 E^i\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \|D_j E\|^2\right) - \|\text{div } E\|^2 + \int_{\partial\Omega} \left\{ n \cdot \overline{E} \text{ div } E - \sum_{i,j=1}^{3} n^j \, \overline{E}^i \, D_j \, E^i \right\} .$$

Na última igualdade usamos o teorema de Gauss, sendo n a normal à superfície.

Assim, temos:

$$\|E\|^2_{1,\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \|D_j E\|^2 + \|E\|^2 = \|\text{rot } E\|^2 + \|\text{div } E\|^2 + \|E\|^2 + \int_{\partial\Omega} \{\ldots\}.$$

Como mostraremos no Capítulo II, a condição de E pertencer a $V(\Omega)$ generaliza a condição de fronteira $\eta \times E = 0$. Mas, isto significa $E = 0$ ou que E está na mesma linha que η. Como a hipótese $E = 0$ é trivial na prova do lema, suponhamos $E \neq 0$ e assim devemos ter $E = (\eta \cdot E)\eta$ e $\text{div } E = \eta \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta}$.

Desse resultado, podemos concluir que a expressão "entre parênteses" se anula assim:

$$\int_{\partial\Omega} \{\ldots\} = 0.$$

Com isso, o lema está estabelecido.

I.1.5 - ESTIMATIVA DO NÚMERO DE COORDENADAS INTEIRAS DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UMA SUPERFÍCIE ALGÉBRICA

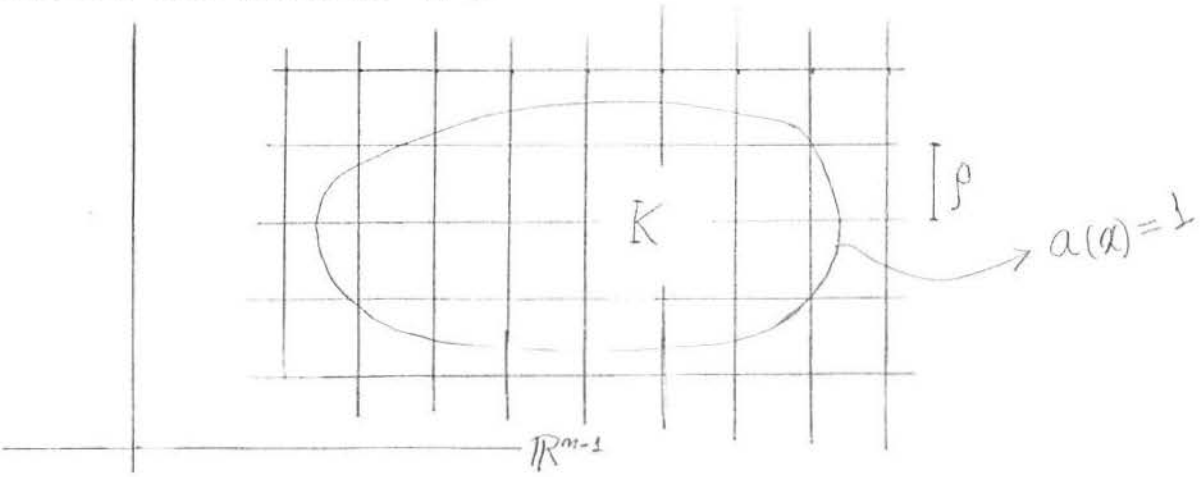
Sejam $m > 0$ um inteiro fixo e

$$a(x) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha+\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

onde os coeficientes $a_{\alpha,\beta}$ são constantes. Além disso, suponhamos que $a(x) > 0$ para todo x em $\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Claramente, o conjunto $K_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^n / a(x) \leq \lambda, \ \ \lambda > 0\}$ é compacto. Anotamos $K = K_1$.

Seja $\rho > 0$: Construimos uma rede de comprimento ρ para K em $\mathbb{R}^n$, conforme figura abaixo (com os lados dos cubos paralelos aos eixos de $\mathbb{R}^n$).



Agora definimos:

$A(\rho)$ = número de n-cubos contidos em K.

$B(\rho)$ = número de n-cubos que cortam (interceptam) a região K.

(todos os n-cubos em $\mathbb{R}^n$ têm lados de comprimento ρ, por construção).

Imediatamente vemos que (ρ^n = volume n-cubo):

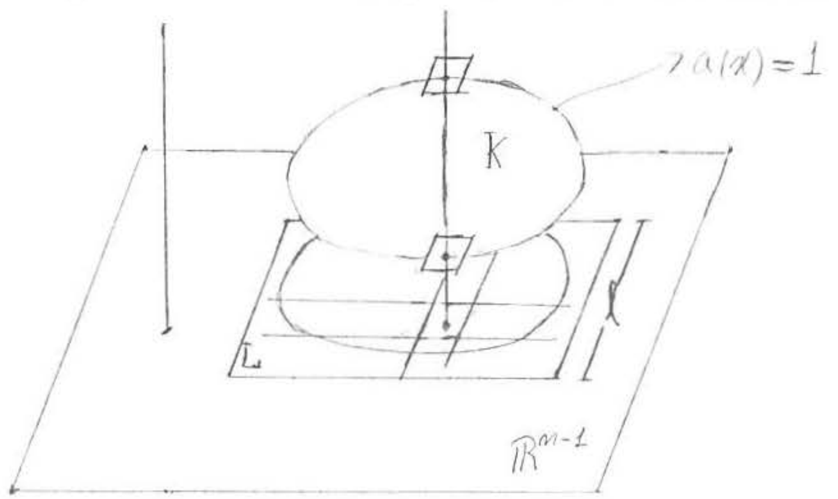
(1) $$A(\rho)\cdot\rho^n \leq \text{vol } K \leq B(\rho)\cdot\rho^n$$

e também que:

$B(\rho)-A(\rho)$ = número de n-cubos que cortam a fronteira de K ∂K.

Projetamos $K \subset \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^{n-1}$. Temos que essa projeção de K está contida dentro de um cubo (n-1)-dimensional L, digamos de comprimento de lado igual a ℓ.

Como a ∂K é uma superfície algébrica de ordem $2m$, temos que uma reta ortogonal a $\mathbb{R}^{n-1}$ corta a ∂K no máximo $2m$ vezes. Assim um (n-1)-cubo contido em L é projeção no máximo de $2m$ n-cubos que fazem interseção com a fronteira de K.



Então, daí concluimos que:

$B(\rho) - A(\rho) \leq$ [nº de (n-1)-cubos contidos em L]$\cdot 2m$

Sendo ℓ = comprimento de lado do cubo L, obtemos que:

$$[n^{\underline{o}} \text{ de } (n-1)\text{-cubos contidos em } L] = \frac{\text{Volume } L}{\text{Volume}(n-1)\text{-cubo}} = \frac{\ell^{n-1}}{\rho^{n-1}}$$

Assim temos que:

$$B(\rho)-A(\rho) \leq \frac{\ell^{n-1}}{\rho^{n-1}} \cdot 2m \leq C \cdot \frac{1}{\rho^{n-1}} \tag{2}$$

onde C é uma constante dependendo de m e da forma $a(x)$, isto é, de m e dos coeficientes $a_{\alpha,\beta}$ dos quais depende a constantante ℓ.

Seja $N(\lambda)$ = número de pontos com coordenadas inteiras em K_λ.

Fazemos uma "homotetia" de razão $\lambda^{-1/2m}$, que transforma K_λ em K:

$$x \in K_\lambda \iff a(x) \leq \lambda \iff a(\lambda^{-1/2m}\, x) = \lambda^{-1}\, a(x) \leq 1.$$

A homotetia leva a rede em $\mathbb{R}^n$ de comprimento 1, na rede de comprimento $\rho = \lambda^{-1/2m}$.

Em conclusão, obtemos agora que:

$N(\lambda)$ = número de pontos da rede de comprimento ρ (com $\rho = \lambda^{-1/2m}$) contidos em K.

Agora fazemos aqui, a seguinte associação:

n-cubo $\longleftrightarrow$ o vértice com coordenadas máximas
(o vértice com maior distância à origem)

Então temos, pela bijeção dos n-cubos com os vértices escolhidos, que:

$$A(\rho) \leq N(\lambda) \leq B(\rho) \qquad (\rho = \lambda^{-1/2m})$$

ou equivalentemente temos:

(3) $$A(\rho)\rho^n \leq N(\lambda)\rho^n \leq B(\rho)\rho^n .$$

Mas (1) e (3) implicam que:

$$|\mathrm{vol}\ K - N(\lambda)\rho^n| \leq [B(\rho) - A(\rho)]\rho^n \qquad (\rho = \lambda^{-1/2m})$$

e aplicando (2) segue:

$$|\mathrm{vol}\ K - N(\lambda)\ \lambda^{-n/2m}| \leq C\cdot\frac{1}{\rho^{n-1}}\cdot\rho^n = C\cdot\lambda^{-1/2m}$$

e finalmente obtemos:

$$|\mathrm{vol}\ K\cdot\lambda^{n/2m} - N(\lambda)| \leq C\ \lambda^{(n-1)/2m} \leq C(1+\lambda^{(n-1)/2m}) \quad ,$$

onde na última desigualdade acrescentamos a constante C para que a fórmula seja válida também para o caso $\lambda = 0$.

I.2 - Resultados Técnicos

Já enfatizamos no início deste capítulo que o mini-max, na generalidade que precisamos, não é um assunto "standard", sendo difícil de ser referenciado. Com isso em mente, desenvolvemos uma seção sobre essa matéria.

O método aqui utilizado e a seqüência de resultados obtidos é o mesmo desenvolvido por Metívier em [3]. A proposição I.2.1.2.10 é uma contribuição de Metívier.

Nesta segunda parte do capítulo I, também incluimos uma seção sobre a estimativa de El Kolli, que será utilizada no capítulo III para estimar distribuição de autovalores para problemas sobre cubos com coeficientes constantes, que chamamos de majorações dos "widths".

Finalmente, incluimos uma terceira seção sobre estimativas para os espaços $K_o^m(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$, com duas proposições que são importantes para o resultado, a ser obtido no presente trabalho, sobre a distribuição assintótica de autovalores para o problema associado a tripla variacional $(V, L^2(\Omega), a)$.

I.2.1 - MINI-MAX

Vamos introduzir uma subseção sobre "widths" e diâmetros de Kolmogorov, outra sobre problemas variacionais e por fim uma fazendo a conexão dos autovalores e problemas variacionais.

I.2.1.1 - Widths

Sejam $S \in L(E,F)$ um operador compacto, B a bola unitária em E e SB a imagem em F.

Seja $G_n(F)$ o conjunto de todos os subespaços lineares com dimensão no máximo n do dado espaço de Banach F e denotamos por $R(K)$ a imagem do operador $K \in L(E,F)$. Então temos a seguinte

I.2.1.1.1 - Definição

(a) $d_n(S) = d_n(S,E,F) = \inf\limits_{G \in G_n(F)} \sup\limits_{x \in B} \inf\limits_{y \in G} \|Sx-y\|_F$, $n=0,1,\ldots$

Os números d_n são ditos "widths" no sentido de A.N. Kolmogorov (ver Triebel [4]).

(b) $s_n(S) = s_n(S,E,F) = \inf\limits_{\substack{\dim R(K) \le n \\ K \in L(E,F)}} \|S-K\|$, $n=0,1,2,\ldots$.

Observamos que $d_o(S) = s_o(S) = \|S\|$. Podemos chamar os "widths" s_n de números de aproximação.

Agora vamos apresentar uma definição equivalente sobre os números de Kolmogorov, a qual vamos utilizar no desenvolvimento das fórmulas do mini-max.

Seja A um subconjunto limitado de um espaço vetorial normado F. O <u>n-ésimo diâmetro (de Kolmogorov)</u> de A em F é o número:

(c) $$d_n(A;F) = \inf_{G \in G_n(F)} \sup_{x \in A} \inf_{y \in G} \|x-y\|_F$$

Identificando a imagem SB, da bola unitária B em E pelo operador compacto $S:E \to F$, como um conjunto em F, imediatamente temos:

$$d_n(SB;F) = d_n(S;E,F) .$$

Assim, obtemos a equivalência das definições (a) e (c), isto é, entre as "widths" e os n-diâmetros de Kolmogorov.

<u>I.2.1.1.2 - Propriedades dos "widths"</u>:

Identificando G_n com $R(K)$ podemos concluir que

(i) $$d_n(S) \leq s_n(S) , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

As seguintes propriedades são imediatas:

(ii) $$d_n(\alpha A;F) = \alpha d_n(A;F) \qquad (\alpha \geq 0)$$

(iii) $$A \subset B \quad \text{então} \quad d_n(A;F) \leq d_n(B;F)$$

(iv) A sequência d_n é decrescente, além disso

$$\lim_{n\to\infty} d_n(A;F) = 0 \iff A \text{ é précompacto.}$$

Observamos o seguinte resultado clássico, sobre a geometria dos espaços de Banach.

<u>I.2.1.1.3 - Teorema (Krein)</u>: Se existe $G \in G_{n+1}(F)$ tal que a $B(0,\delta)$ em G está contida em A, então $d_n(A;F) \geq \delta$.

Vamos dar a demonstração para o caso de F ser espaço de Hilbert, a qual é imediata, e é o caso que nos interessa.

Como $G \in G_{n+1}(F)$, para $H \in G_n(F)$ existe então x não nulo em G, que é ortogonal.

Colocamos $y = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot x$ e assim $y \in A$ pois $\|y\| = \delta$ e pela hipótese $B_G(0,\delta) \subset A$. Então

$$\forall\ z \in H: \|y-z\|_F \geq \|y\|_F = \delta \qquad \text{pois} \quad y \perp H .$$

Aplicando a definição de $d_n(A;F)$ o resultado segue. Observamos que os números d_n, s_n coincidem no caso de um espaço de Hilbert.

Para uma análise mais detalhada dos resultados sobre os n-diâmetros indicamos Lorentz [2].

I.2.1.2 - <u>Problemas Variacionais</u>

Aqui vamos definir as funções $N(\lambda,V,H,a)$.

Vamos precisar das seguintes

<u>I.2.1.2.1 - Definições</u>:

Sejam V e H dois espaços de Hilbert, tal que V imerso continuamente em H.

Denotamos (,) o produto escalar de H.

Seja a uma forma sesquilinear sobre V, isto é, $a(\alpha u,v) = \alpha a(u,v)$ e $a(u,\alpha v) = \bar{\alpha}\, a(u,v)$.

Por conveniência, denotamos simplesmente $a+\mu$, com $\mu \in \mathbb{C}$, a forma $a+\mu(\ ,\ )$.

Suponhamos também que a é hermitiana, isto é,

$$\forall\ u,v \in V: a(u,v) = \overline{a(v,u)}$$

e que a é contínua sobre V:

$$\exists\ M, \forall\ u,v \in V: |a(u,v)| \leq M\|u\|_V \cdot \|v\|_V\ .$$

(a) Dizemos que a é fortemente coerciva sobre V se:

$$\exists\ m > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\forall\ u \in V: m\|u\|_V^2 \leq a(u,u)$$

(b) Dizemos que a é coerciva sobre V (relativamente a H) se existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tal que $a + \lambda_o$ seja fortemente coerciva sobre V, isto é, se existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ e $m > 0$ tal que

$$\forall\ u \in V: m\|u\|_V^2 - \lambda_o\|u\|_H^2 \leq a(u,u)\ .$$

(c) Uma tripla (V,H,a) é chamada tripla variacional se V e H são espaços de Hilbert tal que V está imerso continuamente em H e onde a é uma forma hermitiana, contínua e coerciva sobre V.

Seja (V,H,a) uma tripla variacional, para $\lambda \in \mathbb{R}$ designamos

(d) $$\varepsilon_\lambda(V,H,a) = \left\{\begin{array}{l}\text{subespaços fechados } E \text{ de } V \text{ tal que} \\ \text{a forma } a-\lambda \text{ é fortemente coerciva sobre } E\end{array}\right\}$$

Então, colocamos

(e) $$N(\lambda;V,H,a) = \inf_{E\in\varepsilon_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V(E)$$

onde $\operatorname{codim}_V(E)$ designa a codimensão finita ou infinita de E em V.

Assim, $N(\lambda;V,H,a) \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

As seguintes propriedades decorrem da definição

<u>I.2.1.2.2 - Propriedades das funções $N(\lambda;V,H,a)$</u>:

(i) $N(\lambda; V,H,a+t) = N(\lambda-t; V,H,a) \qquad (t \in \mathbb{R})$

(ii) $N(\lambda; V,H,\alpha a) = N(\alpha^{-1} \lambda;V,H,a) \qquad (\alpha > 0)$

(iii) Se a_1,a_2 são duas formas hermitianas, contínuas e coercivas sobre V tais que

$$\forall\, u \in v: \quad a_1(u,u) \le a_2(u,u) \quad \text{então}$$

$$N(\lambda;V,H,a_1) \ge N(\lambda;V,H,a_2).$$

Para provar a propriedade (iii) basta notar que $\varepsilon_\lambda(V,H,a_1) \subset \varepsilon_\lambda(V,H,a_2)$ desde que $a_1(u,u) \le a_2(u,u)$.

As conexões entre as funções $N(\lambda;V,H,a)$, os autovalores e os n- diâmetros são expostas pelas proposições I.2.1.2.4 e I.2.1.3.1.

<u>I.2.1.2.3 - Lema</u>: Sejam (V,H,a) uma tripla variacional e E um subespaço fechado de V. Temos

$$E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a) \Longleftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\forall\ u \in E\colon (a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon\|u\|_H^2 \ .$$

<u>Prova</u>: Para $E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$ temos por definição que $\exists\ m > 0$ tal que, $\forall\ u \in E\colon (a-\lambda)(u,u) \geq m\|u\|_V^2 \geq m\,\frac{1}{c}\,\|u\|_H^2$, onde na última desigualdade usamos que $c > 0$ é a constante da imersão contínua de V em H.

Inversamente, suponhamos que

$$\forall\ u \in E\colon (a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon\|u\|_H^2 \ .$$

Como por hipótese (V,H,a) é uma tripla variacional, então a é coerciva sobre V, isto é,

$$\forall\ u \in V\colon a(u,u) \geq m\|u\|_V^2 - \lambda_o\|u\|_H^2 \qquad (\lambda_o \in \mathbb{R},\ m > 0).$$

Daí, para $\lambda \leq -\lambda_o$, temos

$$\forall\ u \in V\colon a(u,u) \geq m\|u\|_V^2 + \lambda\|u\|_H^2$$

ou, $\forall\ u \in V\colon m\|u\|_V^2 \leq a(u,u) - \lambda\|u\|_H^2 = (a-\lambda)(u,u)$.

Assim, $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre V. Em particular $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E. Então, por definição temos $E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$.

Agora, para $\lambda > -\lambda_o$, colocamos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\lambda+\lambda_o}$. Desde que $\forall\ u \in E\colon (a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon\|u\|_H^2$, obtemos:

$\forall\, u \in E: \frac{1}{\varepsilon}(a-\lambda)(u,u) \geq \|u\|_H^2$. Então $\forall\, u \in E$:

$\frac{\lambda+\lambda_o}{\varepsilon}\,(a-\lambda)(u,u) \geq (\lambda+\lambda_o)\,\|u\|_H^2$. Assim,

$$(1) \qquad \forall\, u \in E: \frac{1}{\varepsilon'}\,(a-\lambda)(u,u) \geq (\lambda+\lambda_o)\|u\|_H^2 \quad .$$

Novamente, usando a coercividade de a, temos

$\forall\, u \in E: a(u,u) + \lambda_o\|u\|_H^2 \geq m\|u\|_V^2$;

$\forall\, u \in E: -\lambda\|u\|_H^2 + \lambda\|u\|_H^2 + a(u,u) + \lambda_o\|u\|_H^2 \geq m\|u\|_V^2$;

$\forall\, u \in E: (a-\lambda)(u,u) + (\lambda+\lambda_o)\|u\|_H^2 \geq m\|u\|_V^2$.

Agora, introduzindo a desigualdade (1) na expressão acima obtemos;

$$\forall\, u \in E: \frac{1}{\varepsilon'}\,(a-\lambda)(u,u) + (a-\lambda)(u,u) \geq (a-\lambda)(u,u) + (\lambda+\lambda_o)\|u\|_H^2 \geq$$
$$\geq m\|u\|_V^2 \;;$$

$\forall\, u \in E: (\frac{1}{\varepsilon'} + 1)(a-\lambda)(u,u) \geq m\|u\|_V^2$;

$\forall\, u \in E: (1+\varepsilon')(a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon' m\|u\|_V^2$;

$\forall\, u \in E: (a-\lambda)(u,u) \geq \frac{\varepsilon' m}{1+\varepsilon'}\,\|u\|_V^2$.

Assim, $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E.

Então, por definição, $E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$.

A relação das funções $N(\lambda;V,H,a)$ com os n-diâmetros é dada pela,

<u>I.2.1.2.4 - Proposição</u>: Seja (V,H,a) uma tripla variacional.

$$\forall \lambda > 0 \quad N(\lambda;V,H,a) = \text{Cardinal}\{n \geq 0: d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\},$$

onde $S_a = \{u \in V: a(u,u) \leq 1\}$.

<u>Prova</u>: Seja $\lambda > 0$. Seja $\nu = \text{cardinal}\{n \geq 0: d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}$.

Para provar a proposição, basta mostrar que:

(i) $N(\lambda;V,H,a) \leq \nu$

(ii) $\nu \leq N(\lambda;V,H,a)$

<u>Prova de (i)</u>: Se $\nu = +\infty$ o resultado é trivial. Se $\nu < +\infty$, como d_n é uma sequência decrescente e sendo $\nu = \text{card}\{n \geq 0: d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}$, temos $d_\nu(S_a,H) < \lambda^{-1/2}$. $(\nu \notin \{n \geq 0: d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\})$. Disso também temos $d_{\nu-1}(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}$.

Assim, obtemos:

$$d_\nu(S_a,H) < \lambda^{-1/2} \leq d_{\nu-1}(S_a,H).$$

Escolhemos $\lambda' > \lambda$ tal que $d_\nu(S_a,H) < (\lambda')^{-1/2}$.

Pela definição do n-diâmetro existe então $G \in G_\nu(H)$ tal que

(2) $\quad \forall u \in S_a, \exists v \in G: d_\nu(S_a,H) < \|u-v\|_H \leq (\lambda')^{-1/2}$.

Denotando π a projeção ortogonal de H sobre G (existe π pois $\dim G \leq \nu < \infty$, isto é, G é fechado) e tomando

$u \in V$ temos que:

$$\frac{u}{\sqrt{a(u,u)}} \in V \quad e \quad a\left(\frac{u}{\sqrt{a(u,u)}}, \frac{u}{\sqrt{a(u,u)}}\right) = \frac{1}{a(u,u)} \cdot a(u,u) = 1$$

Assim, $\forall\, u \in V$: $\dfrac{u}{\sqrt{a(u,u)}} \in S_a$.

Mas daí, usando a expressão (2) acima, temos:

$$\forall\, u \in V, \ \exists\, v \in G = \pi(H) \ \text{tal que} \ \left\| \frac{u}{\sqrt{a(u,u)}} - v \right\|_H \leq (\lambda')^{1/2};$$

$$\forall\, u \in V, \ \exists\, v \in G = \pi(H) \ \text{tal que} \ \frac{1}{\sqrt{a(u,u)}} \left\| u - \sqrt{a(u,u)}\, v \right\|_H \leq (\lambda')^{-1/2};$$

ou seja,

$$(3) \qquad \forall\, u \in V: \ \|u - \pi u\|_H^2 \leq (\lambda')^{-1}\, a(u,u).$$

Colocamos $E = V \cap \operatorname{Ker} \pi$. Desde que V imerso continuamente em H e $\operatorname{Ker} \pi$ fechado em H, é fácil de verificar que E é fechado em V.

Temos $\pi(H) = G$ e $\dim_H(G) \leq \nu$, assim como $H = G + \operatorname{Ker} \pi$ obtemos

$$V = V \cap H = (V \cap G) + V \cap \operatorname{Ker} \pi$$

ou

$$V = (V \cap G) + E$$

então concluimos que $\operatorname{codim}_V(E) = \dim_V(V \cap G) \leq \dim_H(G) \leq \nu$ $(G \in G_\nu(H))$.

Consequentemente, $\operatorname{codim}_V(E) \leq \nu$.

Para $u \in E = V \cap \operatorname{Ker} \pi$ temos $\pi u = 0$. Assim de (3) obtemos:

$$\forall\ u \in E:\quad \|u\|_H^2 \leq (\lambda')^{-1}\ a(u,u);$$

$$\forall\ u \in E:\quad \lambda'\|u\|_H^2 - \lambda\|u\|_H^2 \leq a(u,u) - \lambda\|u\|_H^2$$

$$\forall\ u \in E:\quad (\lambda'-\lambda)\|u\|_H^2 \leq (a-\lambda)(u,u).$$

Agora, utilizando o Lema I.2.1.2.3 $(\lambda'-\lambda > 0)$ temos que $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$. Mas

$$N(\lambda;V,H,a) = \inf_{F\in\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V(F)$$

então,

$$N(\lambda;V,H,a) \leq \operatorname{codim}_V(E) \leq \nu.$$

Logo, (i) está estabelecido.

Prova de (ii): Similarmente a prova de (i), temos se $+\infty = N(\lambda;V,H,a)$ então $N(\lambda;V,H,a) \geq \nu$.

Suponhamos que $N(\lambda;V,H,a) = n < \infty$. Temos por definição:

$$n = N(\lambda;V,H,a) = \inf_{E\in\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V(E)\ ,$$

isto é, existe $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ de codimensão n em V. Também E é fechado em V pela definição de $\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$.

Seja G o ortogonal, por a, de E em V; isto é

$$G = \{v \in V:\ a(v,u) = 0\quad \forall\ u \in E\}.$$

Claramente, temos que $G \in G_n(V) \subset G_n(H)$.

Denotamos π' o projetor ortogonal, por a, de V sobre G.

Como $E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$, pelo Lema I.2.1.2.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\, u \in E$: $\varepsilon\|u\|_H^2 \leq (a-\lambda)(u,u)$.

Agora, como $\pi'V = G = E^\perp$, temos $\forall\, u \in V$: $u-\pi'u \in E$.

Assim,

$$\forall\, u \in V:\ \varepsilon\|u-\pi'u\|_H^2 \leq (a-\lambda)(u-\pi'u,u-\pi'u)\ ;$$

$$\forall\, u \in V:\ (\varepsilon+\lambda)\|u-\pi'u\|_H^2 \leq a(u-\pi'u,u-\pi'u) \leq a(u,u)\ ;$$

$$\forall\, u \in V:\ \|u-\pi'\|_H \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1/2}\sqrt{a(u,u)}$$

e assim, como $\pi'u \in G$

$$d_n(S_a,H) = \inf_{G\in G_n(H)} \sup_{u\in S_a} \inf_{y\in G} \|u-y\|_H \leq \sup_{u\in S_a} \|u-\pi'u\|_H \leq$$

$$\leq \sup_{u\in S_a} (\lambda+\varepsilon)^{-1/2}\sqrt{a(u,u)} \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1/2} < \lambda^{-1/2}\ .$$

Portanto, $d_n(S_a,H) < \lambda^{-1/2}$. Como a seqüência d_n é decrescente, deduzimos de $\nu = \operatorname{card}\{n \geq 0:\ d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}$ que $\nu \leq n$. Conseqüentemente,

$$\nu \leq n = N(\lambda;V,H,a)$$

e portanto (ii) está também estabelecido. Logo, a proposição está provada.

I.2.1.2.5 - Notação:

Se V e H são espaços de Hilbert e V está imerso continuamente em H, anotamos

$$N(\lambda;V,H) = N(\lambda;V,H,a_o) = \sum_{\lambda d_n^2(SV;H)\geq 1} 1$$

onde a_o é o produto interno de V e SV a bola unitária de V.

A segunda igualdade resulta da proposição I.2.1.2.4, já que

$$S_{a_o} = \{u \in V: a_o(u,u) = (u,u)_V \leq 1\} = \{u \in V: \|u\|_V^2 \leq 1\} =$$

$$= B_V(0,1) = SV ,$$

e portanto

$$N(\lambda;V,H,a_o) = \text{card}\{n \geq 0: d_n(SV;H) \geq \lambda^{-1/2}\} = \sum_{\lambda d_n^2(SV;H)\geq 1} 1 \quad .$$

I.2.1.2.6 - Lema: Sejam $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$ três espaços de Hilbert com imersões contínuas. Para $\lambda,\mu > 0$ temos:

$$N(\lambda\,\mu;V,H) \leq N(\lambda;V,W) + N(\mu;W,H) .$$

Ademais, se γ é a norma da injeção $V \hookrightarrow W$ temos:

$$N(\lambda;V,H) \leq N(\gamma^2\,\lambda;\, W,H) .$$

Prova: Sejam $\lambda,\mu > 0$.

Se $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,W) = \mathcal{E}_\lambda(V,W,a_o)$, onde $a_o = (\ ,\ )_V$, pelo Lema I.2.1.2.3 temos

$$\forall\ u \in E:\quad (a_o-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon\|u\|_W^2 \qquad (\varepsilon > 0)$$

ou

(4) $$\forall\ u \in E: \frac{1}{\lambda}\|u\|_V^2 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u\|_W^2 \geq \|u\|_W^2$$

Se $F \in \varepsilon_\mu(W,H)$, analogamente, pelo lema I.2.1.2.3

$$\forall\ v \in F:\quad \|v\|_W^2 - \varepsilon'\|v\|_H^2 \geq \mu\|u\|_H^2$$

ou

(5) $$\forall\ v \in F: \|u\|_W^2 \geq \varepsilon'\|v\|_H^2 + \mu\|v\|_H^2 .$$

Agora, se $z \in E \cap F$ então z satisfaz as expressões (4) e (5). Assim,

$$\frac{1}{\lambda}\|z\|_V^2 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|z\|_W^2 \geq \|z\|_W^2 \geq \varepsilon'\|z\|_H^2 + \mu\|z\|_H^2$$

ou

$$\|z\|_V^2 - \varepsilon\|z\|_W^2 - \lambda\varepsilon'\|z\|_H^2 \geq \lambda\ \mu\|z\|_H^2 \quad \forall\ z \in E \cap F.$$

Mas, como $W \hookrightarrow H$ temos

$$\forall\ w \in W:\quad \|w\|_H^2 \leq \text{cte}\|w\|_W^2 \qquad (\text{cte} > 0)$$

e daí, desde que $E \cap F \subset W$, obtemos

$$\forall\ z \in E \cap F: \|z\|_V^2 - \varepsilon.\frac{1}{\text{cte}}\|z\|_H^2 - \lambda\varepsilon'\|z\|_H^2 \geq \lambda\ \mu\|z\|_H^2 ;$$

$$\forall\ z \in E \cap F: \|z\|_V^2 - (\varepsilon\ \frac{1}{\text{cte}} + \lambda\varepsilon')\|z\|_H^2 \geq \lambda\ \mu\|z\|_H^2 ;$$

$$\forall\ z \in E \cap F: (z,z)_V - \lambda\ \mu\|z\|_H^2 \geq \delta\|z\|_H^2 \qquad (\delta \leq \varepsilon\ \frac{1}{\text{cte}} + \varepsilon'\lambda)$$

Aplicando o lema I.2.1.2.3, deduzimos que

$$E \cap F \in \varepsilon_{\lambda\mu}(V,H,a_o) = \varepsilon_{\lambda\mu}(V,H)$$

pois $E \cap F$ é fechado em V desde que E fechado em V, F fechado em W e $V \subset W$.

Agora,

$$N(\lambda\mu;V,H) = \inf_{G\in\varepsilon_{\lambda\mu}(V,H)} \operatorname{codim}_V(G) \leq \operatorname{codim}_V(E \cap F) \leq$$

$$\leq \operatorname{codim}_V(E) + \operatorname{codim}_W(F).$$

Tomando ínfimo a desigualdade permanece, consequentemente:

$$N(\lambda\mu;V,H) \leq N(\lambda;V,W) + N(\mu;W,H)$$

e assim a primeira parte do Lema está provada.

Para provarmos a segunda parte, seja $F \in \varepsilon_{\mu}(W,H)$. Pelo lema I.2.1.2.3

$$\forall\, u \in F: \|u\|_W^2 - \mu\|u\|_H^2 \geq \varepsilon\|u\|_H^2 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Assim, se $u \in F \cap V$ então u satisfaz a desigualdade acima e ademais $\|u\|_W^2 \leq \gamma^2\|u\|_V^2$ onde γ é a norma da injeção $V \subset W$. Consequentemente

$$\forall\, u \in F \cap V: \gamma^2\|u\|_V^2 - \mu\|u\|_H^2 \geq \varepsilon\|u\|_H^2$$

ou seja,

$$\forall\, u \in F \cap V: \|u\|_V^2 - \mu\,\gamma^{-2}\|u\|_H^2 \geq \varepsilon\gamma^{-2}\|u\|_H^2 .$$

Como F é fechado em W e $V \hookrightarrow W$ então $F \cap V$ é fechado em V. Assim, novamente pelo lema I.2.1.2.3

$$F \cap V \in \varepsilon_{\mu\gamma^{-2}}(V,H) .$$

Então,

$$N(\mu\gamma^{-2};V,H) = \inf_{G\in\varepsilon_{\mu\gamma^{-2}}(V,H)} \operatorname{codim}_V(G) \leq$$

$$\leq \operatorname{codim}_V(F \cap V) \leq \operatorname{codim}_W(F); \quad \forall\ F \in \varepsilon_\mu(W,H) .$$

Tomando ínfimo, obtemos:

$$N(\mu\gamma^{-2};V,H) \leq N(\mu;W,H) ;$$

fazendo $\lambda = \mu\gamma^{-2}$ então $\mu = \lambda\gamma^2$ e portanto

$$N(\lambda;V,H) \leq N(\lambda\gamma^2;W,H) ;$$

logo, o resultado está estabelecido.

<u>I.2.1.2.7 - Lema</u>: Sejam $V \hookrightarrow H$ dois espaços de Hilbert, sendo V denso em H; denotando H' e V' os espaços duais de H e V e considerando a imersão $H' \hookrightarrow V'$ temos:

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}: N(\lambda;V,H) = N(\lambda;H',V').$$

<u>Prova</u>: Pela simetria do problema é suficiente provar a desigualda<u>a</u>de:

$$\lambda \in \mathbb{R}: \quad N(\lambda;V,H) \geq N(\lambda;H',V').$$

Se $N(\lambda;V,H) = +\infty$ o resultado é imediato.

Assim, suponhamos que $N(\lambda;V,H) = n < \infty$.

Seja $E \in \varepsilon_\lambda(V,H)$ um subespaço de codimensão n.

Aplicando o Lema I.2.1.2.3, $\exists\ \epsilon > 0$ tal que

$$\forall\ u \in E: \quad \|u\|_V^2 - \lambda\|u\|_H \geq \epsilon\|u\|_H^2 \ ;$$

ou

(6) $$\forall\ u \in E: \quad \|u\|_V^2 \geq (\lambda+\epsilon)\|u\|_H^2 \ .$$

Como E é fechado em V, seja E_1 o suplemento ortogonal de E em V.

Seja F o ortogonal de E_1 pela dualidade $V' \times V$, isto é:

$$F = \{u' \in V' : \langle u',v\rangle_{V'\times V} = 0 \quad \forall\ v \in E_1\}$$

Seja $\quad G = F \cap H' \hookrightarrow V' \quad (V \hookrightarrow H)$.

Temos $\operatorname{codim}_{H'}(G) = \operatorname{codim}_{H'}(F \cap H') \leq \operatorname{codim}_{V'}(F) =$

$$= \dim_V(E_1) = \operatorname{codim}_V(E) = n. \quad (V = E_1 \oplus E)$$

assim, obtemos $\quad \operatorname{codim}_{H'}(G) \leq n.$

Para $u \in G$ temos:

$$\|u\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle u,v\rangle_{V'\times V}| = \sup_{\substack{v \in V \\ V = E_1 \oplus E}} \frac{|\langle u,v\rangle_{V'\times V}|}{\|v\|_V} =$$

$$= \sup_{v \in E} \frac{|\langle u,v\rangle_{V'\times V}|}{\|v\|_V}, \text{ desde que } \ u \in G = F \cap H'.$$

Então,

$$\|u\|_{V'} = \sup_{v \in E} \frac{|\langle u,v\rangle_{V'V}|}{\|v\|_V}, \quad \forall\ u \in G;$$

e daí, para $u \in H' \hookrightarrow V'$ e $v \in E \subset V \hookrightarrow H$, temos:

$$|\langle u,v\rangle_{V'\times V}| = |\langle u,v\rangle_{H'\times H}| \leq \|u\|_{H'}\|v\|_H$$

pela continuidade.

Então, desses resultados obtemos:

$$\forall\ u \in G:\ \|u\|_{V'} \leq \sup_{v\in E} \frac{\|u\|_{H'}\ \|v\|_H}{\|v\|_V}\ .$$

Agora, lembrando o resultado (6), segue:

$$\forall\ v \in E:\quad \frac{\|v\|_H}{\|v\|_V} \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1/2}$$

portanto, aplicando ao anterior:

$$\forall\ u \in G:\ \|u\|_{V'} \leq \sup_{v\in E} \|u\|_{H'}\cdot(\lambda+\varepsilon)^{-1/2} = \|u\|_{H'}\cdot(\lambda+\varepsilon)^{-1/2}.$$

Assim, obtemos:

$$\forall\ u \in G:\ \|u\|^2_{V'} \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1}\ \|u\|^2_{H'}\ ,$$

isto é:

$$\forall\ u \in G:\ \|u\|^2_{H'} - \lambda\|u\|^2_{V'} \geq \varepsilon\|u\|^2_{V'}\ .$$

Desde que G é fechado em H', pelo lema I.2.1.2.3, temos que $G \in \mathcal{E}_\lambda(H',V')$.

Então,

$$N(\lambda;H',V') = \inf_{S\in\mathcal{E}_\lambda(H',V')} \operatorname{codim}_{H'}(S) \leq$$

$$\leq \operatorname{codim}_{H'}(G) \leq n = N(\lambda;V,H).$$

Logo,

$$N(\lambda;H',V') \leq N(\lambda;V,H),\quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Similarmente, podemos provar que

$$N(\lambda;V,H) \leq N(\lambda;H',V') , \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

Consequentemente o lema está estabelecido.

<u>I.2.1.2.8 - Lema</u>: Sejam (V,H,a) uma tripla variacional e V_o um subespaço fechado de V. Então

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \; N(\lambda;V_o,H,a) \leq N(\lambda;V,H,a).$$

<u>Prova</u>: É suficiente verificar que:

$$(7) \quad \begin{cases} \forall E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a) \quad \text{então} \quad E \cap V_o \in \varepsilon_\lambda(V_o,H,a); \quad \text{e} \\ \operatorname{codim}_{V_o}(E \cap V_o) \leq \operatorname{codim}_V(E) . \end{cases}$$

Se estabelecemos (7) então obtemos

$$N(\lambda;V_o,H,a) = \inf_{G \in \varepsilon_\lambda(V_o,H,a)} \operatorname{codim}_{V_o}(G) \leq \operatorname{codim}_{V_o}(E \cap V_o) \leq$$

$$\leq \operatorname{codim}_V(E), \quad E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a) .$$

Levando ao ínfimo, temos

$$N(\lambda;V_o,H,a) \leq N(\lambda;V,H,a)$$

e portanto o lema está provado.

Assim, temos somente de mostrar que (7) é válida.

Para isso, seja $E \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$. Por definição, E é fechado em V. Como V_o é fechado em V, é fácil de verificar que $E \cap V_o$ é fechado em V_o .

Também, utilizando o lema I.2.1.2.3, temos:

$$\forall\, u \in E:\ \|u\|_V^2 - \lambda\|u\|_H^2 \geq \epsilon\|u\|_H^2 \quad (\epsilon > 0).$$

Em particular, vale:

$$\forall\, u \in (E \cap V_o):\ \|u\|_V^2 - \lambda\|u\|_H^2 \geq \epsilon\|u\|_H^2 .$$

Mas, como $u \in V_o$ fechado em V, $\|u\|_V = \|u\|_{V_o}$ e daí

$$\forall\, u \in (E \cap V_o):\ \|u\|_{V_o}^2 - \lambda\|u\|_H^2 \geq \epsilon\|u\|_H^2 .$$

Novamente, aplicando o lema I.2.1.2.3, temos $E \cap V_o \in \epsilon_\lambda(V_o,H,a)$.

Para concluir a prova do lema observamos que $V = E + V/E$, então

$$V_o = V_o \cap V = V_o \cap E + V_o \cap V/E$$

agora, como $\mathrm{codim}_V(E) = \dim V/E$ e $\mathrm{codim}_{V_o}(V_o \cap E) = \dim(V_o \cap V/E)$, obtemos que $\mathrm{codim}_{V_o}(E \cap V_o) \leq \mathrm{codim}_V(E)$ e o lema segue.

Precisamos do lema I.2.1.2.8 para fazermos a prova da proposição I.2.1.2.10.

Entretanto, primeiro verificamos o seguinte:

<u>I.2.1.2.9 - Lema</u>: Seja (V,H,a) uma tripla variacional.

Seja λ dado e suponhamos que $n = N(\lambda;V,H,a) < +\infty$. Introduzimos o espaço:

$$K = \{u \in V:\ (a-\lambda)(u,v) = 0,\ \forall\, v \in V\}.$$

Então, existe uma decomposição de V em soma direta ortogonal por $(a-\lambda)$:

$$V = E \oplus K \oplus E'$$

tal que

(i) $\dim E \oplus K = n$

(ii) a forma $(a-\lambda)$ é negativa sobre E.

(iii) $E' \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$.

<u>Prova</u>: Com $n = N(\lambda;V,H,a) < \infty$, existe $E' \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$ de co-dimensão n em V, também E' fechado em V.

Colocamos

$$F = \{u \in V: (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\, v \in E'\}.$$

Primeiro vamos provar que:

$$V = F \oplus E' \qquad (\text{por } a-\lambda).$$

Para isso, observemos que por definição $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E', já que $E' \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$.

Então, $\exists\, m > 0$ tal que:

$$\forall\, u \in E': m\|u\|^2_{E'} \leq (a-\lambda)(u,u).$$

Assim, $(a-\lambda)$ é positiva sobre E'.

Agora, se $z \in F \cap E'$ temos:

$z \in E'$ então $(a-\lambda)(z,z) \geq m\|z\|^2_E$;

$z \in F$ então $(a-\lambda)(z,z) = 0$ pela definição de F.

Então devemos ter $z = 0$. Conseqüentemente $F \cap E' = \{0\}$.

Ademais, como observamos acima, $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E'. Também, por definição de (V,H,a), a é contínua sobre V. Em particular, como $E' \subset V$, temos a é contínua sobre E'.

Agora, como $(a-\lambda)(u,v) = a(u,v)-\lambda(u,v)$ onde o segundo termo à direita é o produto interno de H, portanto uma aplicação contínua; concluimos que $a-\lambda$ é contínua sobre E'.

Assim, temos $(a-\lambda)$ fortemente coerciva e contínua sobre E' fechado em V.

Daí, o espaço E' munido do produto interno $(a-\lambda)$ é um espaço de Hilbert.

Agora, utilizando o isomorfismo do espaço de Hilbert E' sobre seu dual (Teorema Representação de Riesz) temos:

Para todo $u \in V$, fixo, a equação:

$$\forall\, v \in E' : (a-\lambda)(u',v) = (a-\lambda)(u,v)$$

define u' de maneira única em E'.

Além disso, daí obtemos:

$$\forall\, v \in E' : (a-\lambda)(u-u',v) = 0 .$$

Então, pela definição de F, $u-u' \in F$.

Assim, $\forall\, u \in V$, existe único $u' \in E'$ tal que $u-u' \in F$. Portanto, todo elemento de V se escreve de modo único como soma de elementos de E' e F.

Conseqüentemente, provamos que $V = F \oplus E'$.

Verificamos a seguir que $(a-\lambda) \leq 0$ sobre F.

Com efeito, se existe $u_o \in F$ tal que $(a-\lambda)(u_o,u_o) > 0$, deduzimos utilizando a ortogonalidade por $(a-\lambda)$ de E' e F, que

$$\forall\ u \in E',\ \forall\ t \in \mathbb{C}:\quad (a-\lambda)(u+tu_o,u+tu_o) = (a-\lambda)(u,u) + (a-\lambda)(u,tu_o) +$$

$$+ (a-\lambda)(tu_o,u) + (a-\lambda)(tu_o,tu_o) = (a-\lambda)(u,u) +$$

$$+|t|^2(a-\lambda)(u_o,u_o) = (a-\lambda)(u,u) + |t|^2.\varepsilon'\|u_o\|_V^2$$

pois $0 < (a-\lambda)(u_o,u_o) = \varepsilon'\|u_o\|_V^2$ para algum $\varepsilon' > 0$.

Utilizando que $a-\lambda$ é fortemente coerciva sobre E', temos:

$\forall\ u \in E',\ \forall\ t \in \mathbb{C}$:

$$(a-\lambda)(u+tu_o,u+tu_o) \geq \varepsilon''\|u\|_{E'}^2 + |t|^2\ \varepsilon'\|u_o\|_V^2 =$$

$$= \varepsilon''\|u\|_V^2 + |t|^2\ \varepsilon'\|u_o\|_V^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon\{\|u\|_V^2 + |t|^2\ \|u_o\|_V^2\} \qquad (\varepsilon'' > 0).$$

Mas $F \oplus E' = V$ por $(a-\lambda)$ que é equivalente ao produto interno de V. Assim:

$$\forall\ u \in E',\ \forall\ t \in \mathbb{C}:\ (a-\lambda)(u+tu_o,u+tu_o) \geq \varepsilon/2\ \|u+tu_o\|_V^2 \geq$$

$$\geq cte.\varepsilon/2\|u+tu_o\|_H^2$$

onde na última desigualdade usamos que $V \hookrightarrow H$.

Então, aplicando o lema I.2.1.2.3 obtemos que $E' \oplus \mathbb{C}u_o \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$, pois $E' + \mathbb{C}u_o$ fechado em V desde que E' é fechado em V.

Daí, temos:

$$N(\lambda;V,H,a) \leq \operatorname{codim}_V(E' \oplus \mathbb{C}u_o) = n-1 < n = N(\lambda;V,H,a).$$

Mas, isto é um absurdo.

Então, provamos realmente que $(a-\lambda) \leq 0$ sobre F.

Claramente, pelas definições de F e K, temos $K \subset F$.

Seja E o suplementar de K em F. Temos,

$$V = F \oplus E' = E \oplus K \oplus E'$$

onde os fatores são dois a dois ortogonais por $(a-\lambda)$.

Agora, o ítem (iii) está provado pela nossa escolha de E'.

Como $V = F \oplus E'$ e $\operatorname{codim}_V(E') = n$, então $n = \dim F = \dim E \oplus K$. Assim, (i) também está provado.

Resta mostrar o item (ii).

Ora, como $V = F \oplus E'$, temos:

$$\forall\ v \in V: \ v = v'+v'' \quad \text{com} \quad v' \in E', \quad v'' \in F.$$

Assim, como $K \subset F$:

$$K = \{u \in F: (a-\lambda)(u,v'+v'') = 0\ , \quad \forall\ v = v'+v'' \in V\}$$

$$= \{u \in F: (a-\lambda)(u,v') + (a-\lambda)(u,v'') = 0, \ \forall\ v' \in E', \ v'' \in F\}$$

$$= \{u \in F: (a-\lambda)(u,v) = 0 \quad \forall\ v \in F\}$$

pois temos que $F \perp E'$.

Então, usando que $(a-\lambda)$ é negativa sobre F, obtemos

$$K = \{u \in F: (a-\lambda)(u,u) = 0\}$$

Assim, para $k \in K$ temos $(a-\lambda)(k,k) = 0$.

Como $F = K \oplus E$, segue

$$\forall\ e \in E, \quad e = u-k \quad \text{com} \quad u \in F \quad e \quad k \in K,$$

aplicando isso obtemos:

$$(a-\lambda)(e,e) = (a-\lambda)(u-k,u-k) =$$

$$= (a-\lambda)(u,u) - (a-\lambda)(u,k) - (a-\lambda)(k,u) + (a-\lambda)(k,k)$$

$$= (a-\lambda)(u,u) \leq 0 \qquad (u \in F).$$

Assim, obtemos que $(a-\lambda)$ negativa sobre E.

Conseqüentemente, o item (ii) está provado e o lema estabelecido.

<u>I.2.1.2.10 - Proposição</u>: Sejam (V,H,a) uma tripla variacional e V_o um subespaço fechado de V.

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos o espaço:

$$Z_\lambda = \{u \in V: (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\ v \in V_o\}.$$

Então, temos:

$$N(\lambda;V,H,a) + \dim(V_o \cap Z_\lambda) = N(\lambda;V_o,H,a) + N(\lambda;Z_\lambda,H,a).$$

<u>Prova</u>: Temos V_o fechado em V por hipótese e Z_λ fechado em V pois a é contínua sobre V.

Assim, pelo lema I.2.1.2.8, temos:

$$N(\lambda;V,H,a) \geq N(\lambda;V_o,H,a) \quad e \quad N(\lambda;V,H,a) \geq N(\lambda;Z_\lambda,H,a)\ .$$

Então temos:

$$N(\lambda;V,H,a) \geq \sup\{N(\lambda;V_o,H,a),\ N(\lambda;Z_\lambda,H,a)\}\ .$$

Conseqüentemente, a proposição é evidente se $N(\lambda;V_o,H,a)$ ou $N(\lambda;Z_\lambda,H,a)$ é infinito.

Então, suponhamos que

$$\begin{cases} n_o = N(\lambda;V_o,H,a) < +\infty \\ n_1 = N(\lambda;Z_\lambda,H,a) < +\infty\ . \end{cases}$$

Assim, podemos decompor V_o e Z_λ como no lema I.2.1.2.9:

$$V_o = E \oplus K \oplus E' \qquad (\dim E \oplus K = n_o)$$

$$Z_\lambda = F \oplus L \oplus F' \qquad (\dim F \oplus L = n_1)$$

onde, como no lema, temos:

$$K = \{u \in V_o\colon (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\ v \in V_o\}$$

$$= V_o \cap \{u \in V\colon (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\ v \in V_o\} = V_o \cap Z_\lambda\ .$$

Como $\dim K \leq n_o < \infty$, em particular obtemos que $\dim V_o \cap Z_\lambda < \infty$.

Também temos:

$$L = \{u \in Z_\lambda\colon (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\ v \in Z_\lambda\}\ .$$

Agora, seja $u \in K$. Então $u \in V_o$ e temos,

$$\forall\ v \in Z_\lambda\colon (a-\lambda)(u,v) = \overline{(a-\lambda)(v,u)} = 0$$

pela definição de Z_λ.

Assim, $u \in L$ por definição e então temos $K \subset L$.

Introduzimos o espaço:

$$N = (E \oplus K) + (F \oplus L) = E \oplus L \oplus F \qquad (K \subset L).$$

Mas agora, $\dim(N) = \dim(E \oplus K) + \dim(F \oplus L) - \dim K$ e assim temos: $\dim (N) = n_o + n_1 - \dim(V_o \cap Z_\lambda)$.

Desde que $\dim(V_o \cap Z_\lambda)$ é finita, obtemos então: $\nu + \dim(V_o \cap Z_\lambda) = n_o + n_1$, onde definimos $\nu = \dim(N)$.

Para concluir a prova da proposição resta somente verificar que $\nu = N(\lambda;V,H,a)$.

Observemos primeiro que $(a-\lambda)$ é negativa sobre N, isto é, $(a-\lambda)(u,u) \leq 0 \quad \forall\, n \in N$.

De fato, temos:

$$\forall\, u \in N: u = e + \ell + f \quad \text{com } e \in E, \; \ell \in L \text{ e } f \in F.$$

Daí,

$$(a-\lambda)(u,u) = (a-\lambda)(e+\ell+f,\ e+\ell+f) =$$
$$= (a-\lambda)(e,e) + (a-\lambda)(\ell,\ell) + (a-\lambda)(f,f)$$

desde que E, L e F são ortogonais por $a-\lambda$.

Também, como no lema I.2.1.2.9, temos que $(a-\lambda)(\ell,\ell) = 0$, $\forall\, \ell \in L$. Então,

$$\forall\, u \in N: (a-\lambda)(u,u) = (a-\lambda)(e,e) + (a-\lambda)(f,f) \leq 0$$

pois também pelo lema acima citado, $(a-\lambda)$ é negativa sobre E e F.

Agora, seja $G \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ e então por definição $(a-\lambda)$ é fortemente coerciva sobre G. Em particular $(a-\lambda)$ é positiva sobre $G \subset V$, sendo G fechado em V.

Assim, $G \cap N = \{0\}$ pois $(a-\lambda)$ negativa sobre N.

Como $\dim N = \nu$ segue que $\operatorname{codim}_V(G) \geq \nu$.

Logo, $N(\lambda;V,H,a) = \inf\limits_{G\in\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V(G) \geq \nu$.

Então, concluimos que

$$N(\lambda;V,H,a) \geq \nu .$$

A prova da desigualdade inversa, isto é, que $N(\lambda;V,H,a) \leq \nu$, exige mais trabalho.

Consideramos em primeiro lugar o espaço:

$$K^\perp = \{u \in V\colon (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\, v \in K\}$$

e vamos mostrar que

$$K^\perp = V_o + Z_\lambda .$$

Seja $u \in (V_o + Z_\lambda)$, isto é, $u = v_o + z$; $v_o \in V_o$, $z \in Z_\lambda$.

Seja $v \in K$, temos:

$$(a-\lambda)(u,v) = (a-\lambda)(v_o+z,v) = (a-\lambda)(v_o,v) + (a-\lambda)(z,v) = 0$$

pois:

$(a-\lambda)(v_o,v) = 0$ pela definição de K,

$(a-\lambda)(z,v) = 0$ pela definição de Z_λ e $K \subset V_o$.

Então, temos que $u \in K^{\perp}$ por definição.

Assim, provamos que $V_o + Z_\lambda \subset K^{\perp}$ e falta somente mostrar a inclusão inversa.

Como $(a-\lambda)$ fortemente coerciva sobre $E' \subset V$ e E' fechado em V e a é contínua sobre V, então E' de Hilbert com o produto interno definido por $a-\lambda$.

Como $\dim E < \infty$ e $(a-\lambda)$ é negativa sobre E, temos que E é fechado em V e $-(a-\lambda)$ define um produto interno sobre E que então é espaço de Hilbert.

Assim, como no lema anterior, usando as correspondências $E \longleftrightarrow$ dual E e $E' \longleftrightarrow$ dual E' temos que, para $u \in V$, as equações:

$$\forall\ v \in E:\ (a-\lambda)(e,v) = (a-\lambda)(u,v)$$

$$\forall\ v' \in E':\ (a-\lambda)(e',v') = (a-\lambda)(u,v')$$

definem $e \in E$, $e' \in E'$ de modo único. Daí obtemos que:

$$(a-\lambda)(u,v+v') = (a-\lambda)(e,v) + (a-\lambda)(e',v');\quad v \in E,\quad v' \in E'.$$

Como E ortogonal a E' por $(a-\lambda)$, temos:

$$(a-\lambda)(e,v') = 0 = (a-\lambda)(e',v).$$

Então $\forall\ v \in E$, $\forall\ v' \in E'$ temos,

$$(a-\lambda)(u,v+v') = (a-\lambda)(e,v) + (a-\lambda)(e',v') + (a-\lambda)(e,v') +$$

$$+ (a-\lambda)(e',v') = (a-\lambda)(e+e',v+v').$$

Assim, definindo $u_o = e+e'$:

(8) $$\forall\, v \in E \oplus E' : (a-\lambda)(u_o,v) = (a-\lambda)(u,v)\ .$$

Pela definição de K, como $u_o \in V_o$, temos que

$$(a-\lambda)(u_o,v) = 0 \quad \forall\, v \in K\ .$$

Mas agora, para $v \in K$, por definição de $K^{\perp}$ temos

$$(a-\lambda)(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in K^{\perp}\ .$$

Assim,

$$(a-\lambda)(u_o,v) = (a-\lambda)(u,v);\ \forall\, v \in K,\ \forall\, u \in K^{\perp}\ .$$

Então, como $V_o = E \oplus K \oplus E'$, combinando o resultado (8) com o resultado acima temos para

$$u \in K^{\perp}: (a-\lambda)(u_o,v) = (a-\lambda)(u,v), \quad \forall\, v \in V_o \quad ;$$

$$u \in K^{\perp}: (a-\lambda)(u-u_o,v) = 0\ , \quad \forall\, v \in V_o$$

isto é, $u-u_o \in Z_\lambda$ por definição de Z_λ.

Assim, dado $u \in K^{\perp}$ obtemos:

$$u = u_o + (u-u_o) \in V_o + Z_\lambda\ .$$

então concluimos que $K^{\perp} \subset V_o + Z_\lambda$.

Portanto, o resultado que queríamos mostrar, isto é, que $K^{\perp} = V_o + Z_\lambda$ está provado.

Resulta daí que $V_o + Z_\lambda$ é fechado em V e $\operatorname{codim}_V(V_o+Z_\lambda) \leq \dim K$.

Verificamos a seguir que $N(\lambda;V,H,a) \leq n_1+n_2 < \infty$.

Com efeito, $(a-\lambda)$ é fortemente coerciva sobre E' e F' (pela escolha de E' e F' como no lema anterior) e para um $\varepsilon > 0$ temos:

$$\forall\, u \in E': \quad (a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon \|u\|_V^2 \qquad (\|u\|_{E'} = \|u\|_V\,, \quad u \in E')$$

$$\forall\, u \in F': \quad (a-\lambda)(u,u) \geq \varepsilon \|u\|_V^2 \qquad (\|u\|_{F'} = \|u\|_V\,, \quad u \in F')$$

e utilizando aqui a ortogonalidade de E' e F' por $(a-\lambda)$ obtemos:

$$\forall\, u \in E' \oplus F': \quad (a-\lambda)(u,u) \geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_V^2 \quad ,$$

isto é, aplicando o lema I.2.1.2.3, $E' \oplus F' \in \varepsilon_\lambda(V,H,a)$.

Daí, obtemos: $N(\lambda;V,H,a) \leq \operatorname{codim}_V(E' \oplus F')$.

Observando que

$$\operatorname{codim}_V(E' \oplus F') = \underset{(V_o+Z_\lambda)}{\operatorname{codim}}(E' \oplus F') + \operatorname{codim}_V(V_o+Z_\lambda) \quad ,$$

pois $V_o = E \oplus K \oplus E'$, $Z_\lambda = F \oplus L \oplus F'$ e $V_o, Z_\lambda \subset V$; e que:

$$\begin{cases} \underset{(V_o+Z_\lambda)}{\operatorname{codim}}(E' \oplus F') = \dim((E \oplus K) + (F \oplus L)) = \dim(N) = n_o + n_1 - \dim K < \infty \\ \underset{V}{\operatorname{codim}}(V_o+Z_\lambda) \leq \dim K < \infty \end{cases}$$

obtemos então que $N(\lambda;V,H,a) \leq n_1+n_2 < \infty$.

Colocando $n = N(\lambda;V,H,a) < +\infty$ completamos a prova da proposição mostrando a desigualdade:

$$n \leq \nu \ .$$

Procedendo por absurdo, suponhamos $n > \nu$.

Seja

$$M = \{u \in V: (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad \forall\, v \in V\} .$$

Lembrando as definições de Z_λ e L, claramente temos: $M \subset Z_\lambda$ e $M \subset L$.

Aplicando o lema I.2.1.2.9 para M e V, obtemos

$$V = G \oplus M \oplus H'$$

onde G é um espaço sobre o qual a forma $(a-\lambda)$ é negativa e tal que $\dim(G \oplus M) = n$.

Como $M \subset L \subset N$ podemos escrever $N = M \oplus N_1$.

Também temos pela nossa hipótese que $\dim (M \oplus N_1) = = \dim N = \nu < n = \dim(G \oplus M)$ e isto equivale a dizer:

$$\dim G > \dim N_1 .$$

Então, existe $u \neq 0$ em G tal que:

$$\forall\, v \in N_1: \quad (a-\lambda)(u,v) = 0 .$$

Recordando a definição de M e que M ortogonal a G, deduzimos:

$$\forall\, v \in M: (a-\lambda)(u,v) = 0 .$$

Sendo $N = M \oplus N_1$ temos dessas duas últimas expressões:

(9) $$\forall\, v \in N: \quad (a-\lambda)(u,v) = 0, \quad 0 \neq u \in G.$$

Como $K \subset N$ e da expressão (9), lembrando que $K^\perp = = V_o + Z_\lambda$, deduzimos que $u \in K^\perp$ e podemos escrever $u = u_o + z$, com $u_o \in V_o$ e $z \in Z_\lambda$.

Desde que $E \subset N$, utilizando outra vez a expressão (9) anterior, obtemos que:

$$\forall\, v \in E: \ 0 = (a-\lambda)(u,v) = (a-\lambda)(u_o+z,v) =$$
$$= (a-\lambda)(u_o,v) + (a-\lambda)(z,v) = (a-\lambda)(u_o,v)$$

pois $(a-\lambda)(z,v) = 0$ desde que $v \in E \subset V_o$ e $z \in Z_\lambda$.

Assim temos:

$$\forall\, v \in E: (a-\lambda)(u_o,v) = 0 \quad (u_o \in V_o) \ .$$

Como $V_o = E \oplus K \oplus E'$ resulta daí que

$$u_o \in K \oplus E' \ .$$

Usando que $F \subset N$, novamente apelando para a expressão (9), deduzimos também que $z \in L \oplus F'$, pois $Z_\lambda = F \oplus L \oplus F'$.

Assim, como temos que a forma $(a-\lambda)$ é positiva sobre $K \oplus E'$ e $L \oplus F'$ (como no lema I.2.1.2.9) e estes espaços são ortogonais por $(a-\lambda)$, obtemos:

$$(a-\lambda)(u,u) = (a-\lambda)(u_o+z,u_o+z) = (a-\lambda)(u_o,u_o) +$$
$$+ (a-\lambda)(z,z) + (a-\lambda)(u_o,z) + (a-\lambda)(z,u_o) = (a-\lambda)(u_o,u_o) +$$
$$+ (a-\lambda)(z,z) \geq 0$$

e isto é a contradição procurada, pois u foi escolhido não nulo em G e tínhamos que $(a-\lambda)$ negativa sobre G.

Vamos também utilizar o resultado seguinte, o qual pode ser considerado como um corolário da proposição precedente.

I.2.1.2.11 - Proposição: Sejam $(V_i,H_i,a_i)_{i=1}^{\nu}$ ν triplas variacionais.

Consideremos os espaços $V = \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ e $H = \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i$ munidas das normas hilbertianas:

$$\| \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i \|_V = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \|u_i\|_{V_i}^2 \right)^{1/2} ; \quad \| \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i \|_H = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \|u_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} .$$

Definimos a forma a sobre V e colocamos:

$$a\left(\overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i , \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} v_i \right) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i(u_i,v_i) .$$

Então, (V,H,a) é uma tripla variacional e

$$N(\lambda;V,H,a) = \sum_{i=1}^{\nu} N(\lambda;V_i,H_i,a_i) . \tag{10}$$

Prova: O fato que a seja hermitiana, contínua e coerciva é evidente.

Agrupando os termos sob a forma:

$$\overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i = \left(\overset{\nu-1}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i \right) \oplus H_\nu$$

nos leva, por recorrência sobre ν, a provar a afirmação (10) quando $\nu = 2$.

Dado λ, denotamos K o núcleo de $(a_1-\lambda)$ em V_1. Com as notações da proposição I.2.1.2.10 anterior (trocando V_o por V_1) temos claramente:

$$Z_\lambda = K \oplus V_2 = \{u \in V: (a-\lambda)(u,v) = 0, \ \forall \, v \in V_1\} .$$

A forma $(a-\lambda)$ sendo nula sobre K, temos:

$$\varepsilon_\lambda(Z_\lambda,H,a) = \varepsilon_\lambda(V_2,H,a) = \varepsilon_\lambda(V_2,H_2,a_2) .$$

pois K não contribui para $(a-\lambda)$ ser fortemente coerciva.

Também temos que:

$$N(\lambda;Z_\lambda,H,a) = N(\lambda;V_2,H_2,a_2) + \dim K .$$

Pela proposição I.2.1.2.10 temos:

$$N(\lambda;V,H,a) + \dim(V_1 \cap Z_\lambda) = N(\lambda;V_1,H_1,H,a) + N(\lambda;Z_\lambda,H,a)$$

ou

$$N(\lambda;V,H,a) = N(\lambda;V_1,H,a) + N(\lambda,Z_\lambda,H,a) - \dim(V_1 \cap Z_\lambda) =$$

$$= N(\lambda;V_1,H,a) + N(\lambda;V_2,H_2,a_2) + \dim K - \dim(V_1 \cap Z_\lambda).$$

Mas, como $Z_\lambda = K \oplus V_2$ então $V_1 \cap Z_\lambda = K$ $(K \subset V_1)$.

Assim,

$$N(\lambda;V,H,a) = N(\lambda,V_1,H,a) + N(\lambda;V_2,H_2,a_2) .$$

Ou seja,

$$N(\lambda;V,H,a) = N(\lambda;V_1,H_1,a_1) + N(\lambda;V_2,H_2,a_2)$$

e com isto concluimos a prova desta proposição.

I.2.1.3 - Conexão com Autovalores de Problemas Variacionais.

Aqui vamos fazer a ligação entre os autovalores e as funções $N(\lambda;V,H,a)$ através da fórmula do mini-max, a qual nos diz que para o estudo dos autovalores as funções $N(\lambda;V,H,a)$ são bem adaptadas.

Seja (V,H,a) uma tripla variacional e suponhamos que V é denso em H. Então, pelo lema de Lax-Milgran (ver Kato [15] pgs. 322/325) definimos um operador não limitado $(A,D(A))$ autoadjunto em H; temos:

$$\forall\, u \in D(A),\ \forall\, v \in V:\ a(u,v) = (Au,v).$$

$[(Au,v) = a(u,v) = \overline{a(v,u)} = (\overline{Av,u})$, isto é: $(Au,v) = (u,Av)$ para $u,v \in D(A)]$.

Agora, suponhamos que a injeção de V em H é compacta. Daí, podemos obter que o resolvente de A é um operador compacto em H. Assim, o espectro de A é constituído somente de autovalores reais $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots}$, discretos, podendo se acumularem em $+\infty$.

Ordenamos a sequência λ_j de modo a torná-la crescente, onde cada autovalor é repetido conforme sua multiplicidade:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots$$

Ademais, existe uma base ortonormal φ_j de H constituída de autofunções de A (estão sendo consideradas as autofunções correspondentes ao autovalor $\lambda = 0$ no caso de A não ser injetivo, isto é, essas autofunções podem ser tomadas como uma base ortonormalizada do núcleo do operador A).

Desde que por hipótese a é coerciva sobre V, existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tal que $a + \lambda_o$ é fortemente coerciva sobre V.

Afirmamos que: $\lambda_j + \lambda_o \geq 0$ para $j = 1,2,\ldots$.

De fato, tomando u_j autofunções de λ_j e usando que $a + \lambda_o$ fortemente coerciva, temos:

$$(a+\lambda_o)(u_j,u_j) = (Au_j,u_j) + \lambda_o\|u_j\|_H^2 \geq m\|u_j\|_V^2 \quad (m > 0)$$

então, $\quad \lambda_j\|u_j\|_H^2 + \lambda_o\|u_j\|_H^2 = (\lambda_j+\lambda_o)\|u_j\|_H^2 \geq m\|u_j\|_V^2$.

Claramente temos:

$$H = \{f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, \varphi_j : \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 < \infty\}$$

$$V = \{f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, \varphi_j : \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)|f_j|^2 < \infty\} \; ;$$

e para $f \in V$ temos:

$$\begin{aligned}(a+\lambda_o)(f,f) &= a(f,f) + \lambda_o(f,f) = (Af,f) + \lambda_o(f,f) = \\ &= (A \sum_j f_j\varphi_j, \sum_j f_j\varphi_j) + \lambda_o(\sum_j f_j\varphi_j, \sum_j f_j\varphi_j) \\ &= (\sum_j \lambda_j f_j\varphi_j, \sum_j f_j\varphi_j) + \lambda_o(\sum_j f_j\varphi_j, \sum_j f_j\varphi_j) \\ &= \sum_{i,j} [\lambda_j(f_j\varphi_j, f_i\varphi_i) + \lambda_o(f_j\varphi_j, f_j\varphi_j)] \\ &= \sum_j [\lambda_j|f_j|^2 + \lambda_o|f_j|^2]\end{aligned}$$

isto é,

$$f \in V: \quad (a+\lambda_o)(f,f) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)|f_j|^2 \; .$$

Colocando

$$S_{a+\lambda_o} = \{f \in V: (a+\lambda_o)(f,f) \leq 1\} = \{f \in V: \sum_{1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)|f_j|^2 \leq 1\}$$

temos para $f \in S_{a+\lambda_o}$ que $\sum_{j=n+1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)|f_j|^2 \leq 1$. Daí, como $(\lambda_j+\lambda_o) \geq 0$ e λ_j crescente, obtemos $(\lambda_{n+1}+\lambda_o) \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j|^2 \leq 1$, isto é:

$$\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|f_j|^2\right)^{1/2} \leq (\lambda_{n+1}+\lambda_o)^{-1/2}.$$

Agora, calculamos:

$$d_n(S_{a+\lambda_o},H) = \inf_{G\in G_n(H)} \sup_{f\in S_{a+\lambda_o}} \inf_{g\in G} \|f-g\|_H =$$

$$= \inf_{G\in G_n(H)} \sup_{f\in S_{a+\lambda_o}} \inf_{g\in G} \Big\|\sum_1^{\infty} f_j\varphi_j - \sum_{j=k}^{k+n} g_j\varphi_j\Big\|_H$$

$$= \sup_{f\in S_{a+\lambda_o}} \Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j\varphi_j\Big\|_H = \sup_{f\in S_{a+\lambda_o}} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|f_j|^2\right)^{1/2}$$

$$= (\lambda_{n+1}+\lambda_o)^{-1/2}.$$

Assim:

$$d_n(S_{a+\lambda_o},H) = (\lambda_{n+1}+\lambda_o)^{-1/2} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Daí e pela Proposição I.2.1.2.4 temos:

$$\forall\ \lambda > 0\colon N(\lambda;V,H,a) = \operatorname{card}\{n \geq 0\colon d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}$$

$$= \operatorname{card}\{n \geq 0\colon \lambda_{n+1}^{-1/2} \geq \lambda^{-1/2}\}$$

$$= \operatorname{card}\{n \geq 0\colon \lambda_{n+1} \leq \lambda\}$$

$$= \operatorname{card}\{j-1 \geq 0\colon \lambda_j \leq \lambda\} \qquad (\lambda_o = 0).$$

Isto resulta o seguinte:

<u>I.2.1.3.1 - Proposição</u>:

Seja (V,H,a) uma tripla variacional, V sendo denso em H e a injeção de V em H é compacta. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda;V,H,a)$, é o número de autovalores λ_j inferiores ou iguais a λ, do operador $(A,D(A))$ associado a tripla variacional, isto é:

$$N(\lambda;V,H,a) = \text{card}\{j \geq 1: \lambda_j \leq \lambda\}\ .$$

Vamos fazer aqui uma observação:

<u>I.2.1.3.2 - Proposição</u>: Seja (V,H,a) uma tripla variacional. Então temos:

A injeção de V em H é compacta, se e somente se, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$: $N(\lambda;V,H,a) < \infty$.

<u>Prova</u>: Podemos trazer para o caso onde <u>a</u> é fortemente coerciva, e então pela proposição I.2.1.2.4 temos a equivalência entre as duas afirmações:

(i) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\quad \text{card}\{n \geq 0: d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\} = N(\lambda;V,H,a) < \infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(S_a,H) = 0 \qquad (d_n$ é decrescente).

Mas, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(S_a,H) = 0$ se e somente se S_a é précompacto.

Como S_a é fechado e H de Hilbert, temos S_a compacto em H. Como também S_a, a bola unitária em V definida por a, é "similar" a bola unitária de V; concluimos que a injeção de V em H é compacta.

Com isso verificamos a validade da proposição.

Aqui, encerramos a seção sobre o mini-max.

I.2.2 - MAJORAÇÕES DOS WIDTHS

Nesta seção vamos apresentar um teorema sobre majorações de n-diâmetros ou "widths", culminando com uma proposição a qual dá uma estimativa para as funções $N(\lambda;\cdot)$. Primeiramente vamos dar uma

I.2.2.1 - Notação:

Seja $V \subset L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja ω um aberto contido em Ω. Seja SV a bola unitária de V e $SV|_\omega$ a classe das funções de SV restritas a ω. Anotamos $N(\lambda;V,L^2(\omega))$ o número de n-diâmetros de $SV|_\omega$ em $L^2(\omega)$ superiores ou iguais a $\lambda^{-1/2}$, isto é:

$$N(\lambda;V,L^2(\omega)) = \sum_{\lambda d_n^2(SV|_\omega;L^2(\omega)) \geq 1} 1 \quad .$$

Claramente, esta notação é coerente com a notação I.2.1.2.5 a qual foi motivada pela proposição I.2.1.2.4.

Sejam (a_j) e (b_j) seqüências positivas, então dizemos que $a_j \sim b_j$ quando existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que $c_1\, a_j \leq b_j \leq c_2\, a_j$.

Também dizemos que a seqüência a_j é assintótica a seqüência b_j.

Agora, estamos em condições de enunciar a estimativa devida a A. El Kolli.

I.2.2.2 - Teorema (El Kolli): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado C^∞ ou um cubo. Seja $m = 1,2,3,\ldots$. Então para o operador injeção I de $H^m(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é válido que

$$s_j(I,H^m,L^2) \sim d_j(I,H^m,L^2) \sim j^{-m/n} .$$

Prova: Pelo método da extensão podemos nos restringir ao caso

$$\Omega = Q = \{x: 0 < x_k < 1, \quad k = 1,2,\ldots,n\}$$

Ademais, é suficiente provar que

$$s_j \leq c\, j^{-m/n} \quad e \quad d_j \geq c' j^{-m/n} , \quad (c' > 0)$$

pois daí, pela propriedade I.2.1.1.2(i), temos:

$$c' j^{-m/n} \leq d_j \leq s_j \leq c_j^{-m/n}$$

e o resultado segue.

Se q é um cubo com lado de comprimento 1, e se $f \in H^m(q)$ tal que :

(*) $$\int_q D^\beta f = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \beta \leq m-1$$

então segue pelo lema I.1.1.15 e do fato de I ser contínua que :

$$\|f\|_{L^2(q)} \leq \text{const.}\|f\|_{H^m(q)} \leq c\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(q)}\Big)^{1/2} \qquad (c > 0) .$$

Se q é um cubo com lado de comprimento 2^{-k} e se $f \in H^m(q)$ com a propriedade (*), então obtemos pela última desigualdade que (via uma mudança de variável):

(**) $$\|f\|_{L^2(q)} \leq 2^{-km}\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^2 q}\Big)^{1/2}$$

onde c é uma constante independente de f e k.

Agora, dividimos o cubo Q em 2^{kn} cubos q_ℓ, cujos comprimentos de lado são 2^{-k} (notar que essa divisão é exata).

Se $f \in H^m(Q)$, $\|f\|_{H^m(Q)} \leq 1$, então determinamos em q_ℓ um polinômio $P_\ell(x)$ de grau $m-1$, tal que a propriedade (*) vale com $f-P_\ell$ em vez de f. Os coeficientes de $P_\ell(x)$ dependem linearmente de f.

Da propriedade (**) obtemos

$$\Big(\sum_{\ell=1}^{2^{kn}} \|f-P_\ell\|^2_{L^2(q_\ell)}\Big)^{1/2} \leq c\ 2^{-km} \qquad (\text{pois: } D^\alpha P_\ell = 0,\ \ |\alpha|=m).$$

Se L denota o número de polinômios linearmente independentes de grau $m-1$, então temos daí que:

$$s_{L\cdot 2^{kn}}(I, H^m(Q),\ L^2(Q)) \leq c\ 2^{-km}\ ,$$

desde que temos:

$$s_{L\cdot 2^{kn}}(I, H^m(Q),\ L^2(Q)) = \inf_{\dim R(K)\leq L\cdot 2^{kn}} \|I-K\| =$$

$$= \inf_{\dim R(K)\leq L2^{kn}} \ \sup_{\|f\|_{H^m(Q)}\leq 1} \|f-Kf\|_{L^2(Q)} =$$

$$\leq \inf_{\dim R(K)\leq L2^{kn}} \ \sup_{\|f\|_{H^m(Q)}\leq 1} \sum_{\ell=1}^{2^{kn}} \|f-Kf\|_{L^2(q_\ell)}\ .$$

Agora, fazendo $j = L2^{kn}$, obtemos facilmente que

$$s_j(I, H^m(Q),\ L^2(Q)) \leq c j^{-m/n}\ .$$

Para provar a outra desigualdade, começamos com a mesma decomposição de Q feita acima e escolhemos funções $\varphi_\ell(x) \in$ $\in C_0^\infty(q_\ell)$ tal que:

$$\|\varphi_\ell\|_{H^m(q_\ell)} = 1 \quad e \quad \|\varphi_\ell\|_{L^2(q_\ell)} \sim 2^{-km}$$

(as constantes de estimativa na última fórmula são independentes de k).

Se $\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^{2^{kn}}$ é uma seqüência de números complexos tal que $\sum_{\ell=1}^{2^{kn}} |\alpha_\ell|^2 = 1$, e se colocamos:

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=1}^{2^{kn}} \alpha_\ell \, \varphi_\ell(x)$$

então, é fácil verificar que:

$$\|\varphi\|_{H^m(Q)} = 1 \quad e \quad \|\varphi\|_{L^2(Q)} \sim 2^{-km}$$

Seja $B_{(2^{kn}-1)+1}(Q) = \{\varphi_\ell\}_{\ell=1}^{2^{kn}}$ então temos pela propriedade I.2.1.1.2(iii) dos "widths" que:

$$d_{2^{kn}-1}(I, H^m(Q), L^2(Q)) \geq d_{2^{kn}-1}(I, B_{(2^{kn}-1)+1}(Q), L^2(Q)).$$

Agora, lembrando o teorema de Krein I.2.1.1.3, temos

$$d_{2^{kn}-1}(I, B_{(2^{kn}-1)+1}(Q), L^2(Q)) = d_{2^{kn}-1}(IB;\ L^2(Q)) \geq$$
$$\geq c\, 2^{-kn} \qquad (c > 0),$$

desde que IB a imagem da bola unitária em $B_{(2^{kn}-1)+1}$ contém a bola de raio $c\, 2^{-km}$ de $IB_{(2^{kn}-1)+1}$ em $L^2(Q)$.

Tomando $j = 2^{kn}-1$, finalmente obtemos

$$d_j(I, H^m(Q),\ L^2(Q)) \geq c\, j^{-m/n}\ .$$

Conseqüentemente o teorema está estabelecido.

Na verdade, o que vamos precisar é uma generalização do teorema anterior para os espaços de Sobolev de ordem fracionária o qual enunciamos a seguir também sob a forma de teorema. A demonstração dessa generalização não será dada aqui em virtude da mesma exigir conhecimento da teoria de interpolação, para o desenvolvimento da qual precisaríamos incluir mais um capítulo no presente texto, tornando-o muito extenso e extremamente técnico. Mas, de qualquer modo a prova pode ser obtida em Triebel [4].

Temos então o seguinte:

<u>I.2.2.4 - Teorema</u>: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio C^∞ ou do tipo cone. Então vale a estimativa de El Kolli para os "Widths" de Kolmogorov:

$$d_j(I;H^s(\Omega),\ L^2(\Omega)) \sim j^{-s/n} \qquad (s > 0)\ .$$

Agora, recordando a notação I.2.2.1 anterior, temos:

$$N(\lambda;H^s(\Omega),\ L^2(\Omega)) = \sum_{\lambda\ d_j^2(SB;L^2(\Omega))\geq 1} 1$$

onde SB é a bola unitária de $H^s(\Omega)$. Utilizando o teorema acima, obtemos para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$N(\lambda;H^s(\Omega),L^s(\Omega)) \leq \sum_{\lambda\ c^2 j^{-2s/n}\geq 1} 1 = \sum_{\lambda\ c^2\geq j^{2s/n}} 1 =$$

$$= \sum_{\lambda^{n/2s}\ c^{n/s}\geq j} 1 \qquad (c > 0).$$

Consequentemente, podemos enuciar a seguinte versão para a estimativa de El Kolli.

<u>I.2.2.5 - Proposição</u>: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio tendo a propriedade do cone ou a C^∞ de regularidade. Então vale:

$$N(\lambda; H^s(\Omega), L^2(\Omega)) \leq c\ \lambda^{n/2s} \qquad (c = \text{constante} > 0).$$

Com isso, também concluimos esta seção.

I.2.3 - ESTIMATIVAS PARA OS ESPAÇOS $K_o^m(\Omega)$ E $H^m(\Omega)$

Lembramos a notação I.2.2.1.

Seja $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert, Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, ω aberto contido em Ω. Temos:

$$N(\lambda;V,L^2(\omega)) = \sum_{\lambda\, d_n^2(SV|_\omega;L^2(\omega))\geq 1} 1$$

onde SV é a bola unitária de V e $SV|_\omega$ é a classe das funções de SV restritas a ω.

Consideramos também uma outra definição. Seja $\vartheta(\omega)$ a classe das restrições a ω das funções de V, munida da norma:

$$\|u\|_{\vartheta(\omega)} = \inf_{\substack{v\in V \\ v|_\omega = u}} \|v\|_V$$

temos então

$$N(\lambda;V,L^2(\omega)) = N(\lambda;\vartheta(\omega),L^2(\omega)) \ .$$

Se $\omega = \Omega$ a notação está coerente com aquela introduzida anteriormente. As duas definições são equivalentes graças à proposição I.2.1.2.4. Esta última notação poderá ser utilizada implicitamente no decorrer do presente texto.

Fazemos também uma importante e útil observação. Para dois abertos ω_1 e ω_2 tais que $\omega_1 \subset \omega_2$ temos:

$$N(\lambda;V,L^2(\omega_1)) \leq N(\lambda;V,L^2(\omega_2)) \ .$$

Isto é claro da notação I.2.2.1 e do fato que

$d_n(SV|_{\omega_1};\ L^2(\omega_1)) \leq d_n(SV|_{\omega_2}:\ L^2(\omega_2))$.

A seguir vamos enunciar duas proposições sobre majorações das funções $N(\lambda;\cdot)$ para os espaços $K_o^m(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$. Em vista das demonstrações serem técnicas e dependerem sobre alguns lemas, embora não sejam de compreensão muito difícil; deixaremos de apresentá-las neste texto para não torná-lo, como já falamos anteriormente, muito extenso.

De qualquer maneira as demonstrações completas, inclusive todos os lemas técnicos, podem ser obtidas em Métivier [3], Capítulo III.

Assim, temos sobre o espaço $K_o^m(\Omega)$ a seguinte:

I.2.3.1 - Proposição: Existe constante $Y(n,m)$ dependendo somente do inteiro $m \geq 1$ e da dimensão do espaço n, tal que se $\omega \subset \Omega$ são dois abertos de $\mathbb{R}^n$, e se para $\delta > 0$ anotamos:

$$\omega_\delta = \{x \in \Omega / \mathrm{dist}(x,\omega) < \sqrt{n}\,\delta\}$$

temos:

$$\forall\ \lambda \geq 0: \quad N(\lambda;\ K_o^m(\Omega);\ L^2(\omega)) \leq Y(n,m)\cdot \text{med}\ \omega_{\lambda^{-1/2m}}\cdot\lambda^{n/2m}\ .$$

Para enunciar as estimativas para o espaço $H^m(\Omega)$ devemos fazer algumas hipóteses sobre o aberto Ω.

Primeiramente, dizemos que um aberto limitado Ω possui a propriedade (C) de Métivier se existem constantes $\delta_o > o$ e K tais que:

$\forall\ x \in \Omega$ e $\forall\ \delta \leq \delta_o$, existe um vetor unitário h tal que se designamos por $B(x,\delta)$ a bola com centro em x e raio δ; temos:

$$(C)\begin{cases}(i) & \forall\, t \in [0,K\delta],\ \forall\, y \in B(x,\delta) \cap \Omega:\ y + th \in \Omega\ . \\ (ii) & \text{a envoltória convexa de } K\delta h + [B(x,\delta) \cap \Omega\,] \text{ está} \\ & \text{contida em } \Omega.\end{cases}$$

Métivier observa que: <u>todo aberto limitado possuindo a propriedade do cone (Agmon) verifica a condição (C)</u>.

Agora, vamos introduzir a condição de regularidade de Métivier.

<u>I.2.3.2 - Definição</u>: Dizemos que um aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^n$ possui a <u>condição de regularidade de Métivier (C')</u> se existem abertos Ω_i $(i = 0,\ldots,N)$ contidos em Ω tais que:

i) $\overline{\Omega}_o \subset \Omega$ e $\operatorname{med}(\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{N} \Omega_i) = 0$

ii) Para $i = 1,\ldots,N$ existe um C^1-difeomorfismo θ_i de uma vizinhança de $\overline{\Omega}_i$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que $\theta_i(\Omega_i)$ possui a propriedade (C) de Métivier.

Agora, finalmente enunciamos a seguinte estimativa para o espaço $H^m(\Omega)$:

<u>I.2.3.3 - Proposição:</u> Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ possuindo a condição de regularidade de Metivier (C'). Para $\rho > 0$ anotamos:

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega / \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \rho\}$$

e para $\delta > 0$ ainda anotamos:

$$\Omega_{\rho,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n / \mathrm{dist}(x,\Omega_\rho) < \delta\} .$$

Então, existem constantes λ_o, K e C tais que:

$$\forall\ \rho > 0,\ \forall\ \lambda \geq \lambda_o:\quad N(\lambda; H^m(\Omega), L^2(\Omega_\rho)) \leq C\cdot \mathrm{med}(\Omega_{\rho,K\lambda^{-1/2m}})\cdot\lambda^{n/2m} .$$

Já observamos que a condição (C) é mais geral que a propriedade do cone, sendo que cone implica (C). Sabemos também que $H^m(\Omega)$ tem injeção compacta em $L^2(\Omega)$ para Ω tendo a propriedade do cone.

A proposição I.2.3.3 anterior diz, implicitamente, para Ω sendo (C'); que a injeção das funções de $H^m(\Omega)$, restritas a Ω_ρ em $L^2(\Omega_\rho)$ é compacta (pela proposição I.2.1.3.2). . Isto vai implicar, mais tarde, também implicitamente, que a injeção de V em $L^2(\Omega)$ é compacta; sendo $H^m_o(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ e com Ω satisfazendo a condição (C') de regularidade de Métivier(ver teorema III.5.2). Assim, com uma condição de regularidade sobre a fronteira de Ω (condição (C') de Métivier) mais fraca que a propriedade do cone, também obtemos que a injeção de V em $L^2(\Omega)$ é compacta. Lembramos que a condição do segmento (ver Agmon), também mais fraca que cone, implica injeção compacta. Outras condições de regularidade podem ser obtidas em Fraenkel [10], como já tínhamos observado.

CAPÍTULO II

Neste capítulo introduzimos as equações de Maxwell. A seguir construimos sistemas equivalentes para essas equações de modo que a relação entre os autovalores das equações de Maxwell e os autovalores desses sistemas é claramente observada.

II.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell descrevem o comportamento de um campo eletromagnético. A dedução dessas fórmulas, a partir de conceitos físicos básicos, pode ser obtida na bibliografia clássica sobre eletrodinâmica ou eletromagnetismo. Em Jackson [6] temos nos sistema racionalizado (MKS).

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$D = \epsilon E + P$$

$$B = \mu(H+M)$$

onde J é a densidade de corrente; E e H são os vetores campo elétrico e campo magnético, respectivamente; P é a polarização; M a magnetização; B é a indução magnética e D é chamado de vetor deslocamento. Finalmente, μ é a permeabilidade magnética do meio e ϵ a permissividade elétrica do meio, também chamada de constante dielétrica. Por exemplo, no vácuo $\epsilon = \epsilon_0 =$

= constante. Em geral, ϵ e μ dependem da posição e neste caso são representados por uma matriz.

Eliminando D e B das equações acima, podemos ter as equações na forma:

$$\text{rot } H - \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = J + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\text{rot } E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \frac{\partial M}{\partial t}$$

Em um meio isotrópico tem-se $D = \epsilon E$ e $B = \mu H$ e as equações de Maxwell tomam a forma:

$$\text{rot } H - \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = J$$

$$\text{rot } E - \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \text{(ver [6]).}$$

Como em Panofsky/Phillips [16] podemos assumir que a dependência do tempo de todos os campos (E,H, etc...) e fontes (J,ρ; onde ρ é a densidade de carga e $\text{div } D = \rho$) é dada pelo fator e^{-iwt} com uma freqüência angular w (por exemplo, $E = E_o(x)e^{-iwt}$, isto é, assumimos que E tem uma variação cosenoidal no tempo). Assim, as equações de Maxwell tomam a forma (ver [6]) páginas 553/4):

$$\text{rot } H = iw\epsilon E = C_1(J,P)$$

$$\text{rot } E - iw\mu H = C_2(\mu,M)$$

ou

$$\text{rot } H + iw\epsilon E = J$$

$$\text{rot} E - iw\mu H = 0 \qquad \text{(meio isotrópico).}$$

Conseqüentemente, como fez Mehra [11], vamos considerar as equações de Maxwell na forma:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} E - iw\mu H &= I \\ \operatorname{rot} H + iw\epsilon E &= K \end{aligned} \qquad \text{(forma reduzida)}$$

em uma região limitada Ω do espaço $\mathbb{R}^3$. Portanto, as condições em que vamos lidar com as equações de Maxwell, em princípio, são as mais gerais, a menos da hipótese que estamos interessados em soluções representadas por ondas planas.

Aqui, μ e ϵ são matrizes definidas positivas e w é uma constante:

$$\epsilon = \epsilon(x) = (\epsilon_{ij}(x)), \quad \mu = \mu(x) = (\mu_{ij}(x))$$

com $i,j = 1,2,3$.

II.2 - SISTEMAS EQUIVALENTES

Podemos eliminar H das equações de Maxwell na forma reduzida (1), temos:

$$H = (iw\mu)^{-1} (\text{rot } E - I)$$

e substituindo na outra equação segue

$$\text{rot}((iw\mu)^{-1} (\text{rot } E-I)) + iw\epsilon E = K$$

isto é

$$(iw)^{-1} \text{rot}(\mu^{-1} \text{rot } E) - (iw)^{-1} \text{rot } \mu^{-1} I + iw\epsilon E = K$$

ou

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } E - w^2 \epsilon E = F; \qquad F = iwK + \text{rot } \mu^{-1} I$$

Assim, obtemos o sistema de segunda ordem:

(2) $$ME = \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } E - w^2 \epsilon E = F.$$

Anexa-se além disso a condição de fronteira $\eta \times E = 0$.

É claro que uma solução de (1) é solução de (2). Se E é uma solução de (2), definindo $iwH = \mu^{-1}(\text{rot } E-I)$ segue-se que certamente, o par (E,H) é solução do sistema (1).

Da equação (2) obtemos, aplicando divergência:

(3) $$\text{div } \epsilon E = -(w^2)^{-1} \text{div } F .$$

Por razões técnicas, introduzimos um parâmetro positivo $s_o > 0$ e das equações (2) e (3) obtemos:

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{ rot } E - w^2 \epsilon E - s_o \epsilon \text{ grad div } \epsilon E = F - s_o \epsilon \text{ grad div } \epsilon E$$

$$= F + (w^2)^{-1} s_o \epsilon \text{ grad div } F.$$

Vamos estudar o operador M_{s_o} definido por:

$$(4) \qquad M_{s_o} E = \text{rot } \mu^{-1} \text{ rot } E - s_o \epsilon \text{ grad div } \epsilon E - w^2 \epsilon E = G$$

com as condições de fronteira: $\eta \times E = 0$ e $\text{div } \epsilon E = 0$, onde $G = F + (w^2)^{-1} s_o \epsilon \text{ grad div } F$.

Assim, com essa constante positiva s_o e introduzindo mais um termo no sistema (2) substituímos ele pelo sistema elíptico (4).

Lembremos agora, a definição do espaço $V(\Omega)$:

$$V(\Omega) = \{E \in \mathcal{H}^1(\Omega) : (\phi, \text{rot } E) = (\text{rot } \phi, E), \ \forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega)\}$$

Aqui, mostramos claramente a utilidade de introduzir esse espaço. A expressão $E \in V(\Omega)$ generaliza a condição de fronteira $\eta \times E|_{\partial\Omega} = 0$. De fato, suponhamos que $\partial\Omega$ é suficientemente regular para aplicarmos o teorema da divergência de Gauss. Sejam $\phi, E \in C^\infty(\Omega)$, então segue:

$$\int_\Omega \phi \cdot (\text{rot } E) dx = \int_\Omega (\text{rot } \phi) \cdot E dx + \int_{\partial\Omega} \eta \cdot (\phi \times E) d\sigma$$

daí, para todo $E \in V(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e todo $\phi \in C^\infty$ devemos ter que

$$0 = \int_{\partial\Omega} \eta \cdot (\phi \times E) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot (\eta \times E) d\sigma$$

e isto significa que $\eta \times E|_{\partial\Omega} = 0$.

O problema de autovalores do sistema (4) divide-se em dois problemas de autovalores separados, como veremos mais adiante. A ligação entre os autovalores das equações de Maxwell e o sistema (4) será facilmente notada. A seguir vamos estudar o operador M_{s_o} verificando suas propriedades.

Seja B a forma bilinear:

$$(5) \qquad B(\phi,E) = (\text{rot } \phi,\mu^{-1} \text{ rot } E) + s_o(\text{div } \epsilon\, \phi, \text{ div } \epsilon\, E) - w^2(\phi, \epsilon\, E)$$

temos o seguinte:

Um Lema de Coercividade sobre B

<u>II.2.1 - Lema</u>: Existem constantes $c_1 > 0$ e $c_o \geq 0$ tal que

$$B(E,E) \geq c_1 \|E\|^2_{1,\Omega} - c_o \|E\|^2 , \qquad \forall\, E \in V(\Omega)$$

onde B é a forma bilinear definida por (5).

Observamos que no caso $\epsilon = \mu = \delta$, onde δ é a matriz unitária, o resultado segue imediatamente da fórmula:

$$\int_\Omega |\text{rot } E|^2 dx + \int_\Omega |\text{div } E|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\text{grad } E_i|^2 \, dx =$$

$$= \|E\|^2_{1,\Omega} - \|E\|^2_\Omega \quad .$$

A prova desse lema pode ser obtida, com todos os detalhes, em Leis [13].

Assim, o lema afirma a coercividade da forma B sobre $V(\Omega)$ e desse fato segue que o operador M_{s_o} é elíptico (ver

Agmon [14]). Em particular, B é coerciva sobre $\mathcal{H}_o^1(\Omega)$.

Uma Extensão Autoadjunta de M_{s_o}

Vamos considerar uma extensão autoadjunta $\tilde{M}$ do operador M_{s_o}, como segue:

Definimos o operador $\hat{M} = \varepsilon^{-1} M_{s_o}$.

$\hat{M}$ visto como um operador diferencial:

$$\hat{M}: C_o^\infty(\Omega) \longrightarrow C_o^\infty(\Omega)$$

é, com respeito ao produto interno $(\ ,\ )_\varepsilon$ formalmente autoadjunto, isto é, para vetores ϕ e ψ em $C_o^\infty(\Omega)$ vale:

$$(\phi, \hat{M}\ \psi)_\varepsilon = (\phi, \varepsilon\ \hat{M}\ \psi) = (\phi, M_{s_o}\ \psi) = (M_{s_o}\ \phi, \psi) =$$

$$= (\varepsilon\ \hat{M}\ \phi, \psi) = (\hat{M}\ \phi, \psi)_\varepsilon .$$

Utilizando o teorema de representação de (ver Kato [15]), vamos definir o operador:

$$\tilde{M}: D(\tilde{M}) \subset \mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$$

associado com a forma B via a fórmula:

$$D(\tilde{M}) = \{E \in V(\Omega) / \exists G \in \mathcal{L}_{2,\varepsilon} : B(\phi, E) = (\phi, G)_\varepsilon , \quad \forall\ \phi \in V(\Omega)\}$$

$$\tilde{M}: E \longrightarrow G \quad (\tilde{M}E = G).$$

<u>II.2.2 - Teorema</u>:

$\tilde{M}$ é autoadjunto sobre $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$.

Prova: Temos $\tilde{M}E = \hat{M}E$ em $C_o^\infty(\Omega)$ pois, para $E \in C_o^\infty(\Omega)$ e todo ϕ em $V(\Omega)$:

$$(\phi,\tilde{M}E)_\varepsilon = B(\phi,E) = (\text{rot}\ \phi,\mu^{-1}\ \text{rot}\ E) + s_o(\text{div}\ \varepsilon\ \phi,\text{div}\ \varepsilon\dot{E}) -$$

$$- w^2(\phi,\varepsilon E) = (\phi,\text{rot}\ \mu^{-1}\ \text{rot}\ E)-(\phi,s_o\ \varepsilon\ \text{grad}\ \text{div}\ \varepsilon E)$$

$$- w^2(\phi,\varepsilon E) = (\phi,M_{s_o} E) = (\phi,\varepsilon^{-1}\ M_{s_o}\ E)_\varepsilon = (\phi,\hat{M}E)_\varepsilon\ .$$

Assim, também temos que $\tilde{M}$ é formalmente um operador simétrico, em relação a $(\ ,\ )_\varepsilon$, sobre $C_o^\infty(\Omega)$. Como $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{L}_{2,\varepsilon}(\Omega)$, então a prova segue com a ajuda do lema seguinte sobre as formas hermitianas (simétricas) e da unicidade das soluções do problema de fronteira.

II.2.3 - Lema: Um operador simétrico A em um espaço de Hilbert cuja imagem $R(A)$ é todo o espaço, é autoadjunto (ver Yosida [8] página 199).

Autovalores e Autovetores

Definições:

Dizemos que λ é autovalor de $\tilde{M}$ quando existe $E \in V(\Omega)$, $E \neq 0$, tal que:

(6) $$B(\phi,E) = \lambda(\phi,E)_\varepsilon\ , \quad \forall\ \phi \in V(\Omega)\ .$$

Chamamos E autovetor (autosolução) associado a λ.

Analogamente, λ é autovalor das equações de Maxwell quando existir $E \in V(\Omega) \cap D_o(\Omega)$, $E \neq 0$, tal que:

$$(6') \qquad (\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot } E) - w^2(\phi,E)_\varepsilon = \lambda(\phi,E)_\varepsilon \ , \quad \forall\ \phi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Em ambos os casos normalizando os autovetores por $(E,E)_\varepsilon = 1$ e da propriedade que $\tilde{M}$ é autoadjunto é fácil verificar que os autovalores são reais. Em particular, os autovalores de $\tilde{M}$ estão no intervalo $[-c_o,\infty)$, onde c_o é a constante que aparece no lema II.2.1. Além disso, os autovetores correspondentes a autovalores distintos, no sentido $(E_1,E_2)_\varepsilon = 0$, são ortogonais.

Vale também a existência de um número infinito de autovalores λ_j , que ordenamos em ordem crescente: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \leq \lambda_j \leq \ldots$, os quais não têm ponto de acumulação; exceto possivelmente $+\infty$. Isso pode ser obtido como uma conseqüência do fato que vamos supor Ω suficientemente regular para que a injeção de $V(\Omega)$ em $\mathcal{L}_2(\Omega)$ seja compacta. Por exemplo, se Ω tem a propriedade do cone então isso ocorre. A condição que vamos pedir para a regularidade da fronteira de Ω é a de Métivier (C'). No Capítulo III vamos obter que $N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) < \infty$ com Ω sendo (C') e isso dá, implicitamente, observando a proposição I.2.1.3.2 , que a injeção de V em $L^2(\Omega)$ é compacta; observando que devemos ter $H_o^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$. Assim, concluindo, se Ω satisfaz a condição de regularidade de Métivier (C') então a injeção de $V(\Omega)$ em $\mathcal{L}_2(\Omega)$ é compacta.

Observação:

A seguir mostramos que entre os autovalores de $\tilde{M}$ estão os autovalores do operador:

$$L_{s_o} u = s_o \operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} u + w^2 u, \qquad u \in H_o^1(\Omega).$$

Quando eliminamos os autovalores desse operador, permanecem os autovalores do nosso problema, isto é, as equações de Maxwell. Isso deve-se ao fato que não somente na fronteira, porém em toda região Ω $\operatorname{div} \epsilon E = 0$ é satisfeita.

Decomposição em dois Problemas Ortogonais

Indicamos por $N_{s_o}^o(t)$ a função que dá o número de autovalores de $\tilde{M}$ menores ou iguais a t.

$$N_{s_o}^o(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1$$

Com $N_{s_o}^1(t)$ a função respectiva do operador L_{s_o} e $N_M(t)$ a função relativa ao operador M, isto é, as equações de Maxwell.

Então, vale:

$$N_M(t) = N_{s_o}^o(t) - N_{s_o}^1(t) . \tag{7}$$

Para verificarmos isso, vamos provar o seguinte:

II.2.4 - Teorema: Seja E uma autosolução (autovetor) de $\tilde{M}$. Então E pode ser decomposta de modo único em:

$$E = E_o + E_1$$

onde $E_1 = \operatorname{grad} u$, com $u \in H_o^1(\Omega)$ sendo uma solução da igualdade escalar:

(8) $\quad s_o(\mathrm{grad}\ \phi,\ \epsilon\ \mathrm{grad}\ u) - w^2(\phi,u) = \lambda(\phi,u), \quad \forall\ \phi \in C_o^\infty(\Omega)$

e $\quad E_o \in V(\Omega) \cap D_o(\Omega)$ uma solução do problema de fronteira:

(9) $\quad (\mathrm{rot}\ \phi,\mu^{-1}\ \mathrm{rot}\ E_o) - w^2(\phi,E_o)_\epsilon = \lambda(\phi,E_o), \quad \forall\ \phi \in C_o^\infty(\Omega).$

Daí, quando λ for um autovalor de multiplicidade p de (8) e multiplicidade q de (9), então λ é exatamente um autovalor de multiplicidade $p+q$ do operador $\tilde{M}$.

Assim, E_o é uma autosolução para as equações de Maxwell.

Prova do Teorema:

Utilizando a decomposição de Weyl (ver seção I.1.3) temos:

$$E = E_o + E_1; \quad E_o \in D_o(\Omega), \quad E_1 \in \mathrm{grad}\ H_o^1(\Omega).$$

Assim, $E_1 = \mathrm{grad}\ u$ e onde u é calculado como solução do problema de Dirichlet para $\mathrm{div}\ \epsilon\ \mathrm{grad}\ u = \mathrm{div}\ \epsilon\ E$.

Ademais, $E_o \in V(\Omega)$ pois para todo $\phi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$:

$$(\phi,\mathrm{rot}\ E_o) = (\phi,\mathrm{rot}\ E) = (\mathrm{rot}\ \phi,E) = (\mathrm{rot}\ \phi,\ E_o) +$$
$$+ (\mathrm{rot}\ \phi,\ \mathrm{grad}\ u) = (\mathrm{rot}\ \phi,\ E_o) + 0$$

onde, na primeira igualdade, utilizamos que $\mathrm{rot}\ E_1 = 0$ desde que $E_1 = \mathrm{grad}\ u$.

Introduzindo essa decomposição em (6) segue:
$B(\phi,E) - \lambda(\phi,E)_\epsilon = 0 \qquad (\forall\ \phi \in V(\Omega),\ E = E_o + E_1).$

Aplicando a definição da forma B, temos:

$$(\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot } E) + s_o(\text{div } \varepsilon\, \phi, \text{ div } \varepsilon\, E) - w^2(\phi, \varepsilon\, E) - \lambda(\phi, \varepsilon E) = 0;$$

$$(\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot}(E_o+E_1)) + s_o(\text{div } \varepsilon\, \phi, \text{ div } \varepsilon(E_o+E_1)) - w^2(\phi, \varepsilon(E_o+E_1)) -$$
$$- \lambda(\phi, \varepsilon(E_o+E_1)) = 0;$$

Como $E_o \in D_o(\Omega)$ segue que $\text{div } \varepsilon\, E_o = 0$. Assim, desde que $\text{rot } E_1 = 0$, obtemos:

$$(\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot } E_o) + s_o(\text{div } \varepsilon\, \phi, \text{ div } \varepsilon\, E_1) - (\lambda + w^2)(\phi, \varepsilon\, E_o) -$$
$$- (\lambda + w^2)(\phi, \varepsilon\, E_1) = 0;$$

$$(\phi, \text{ rot } \mu^{-1} \text{ rot } E_o - (\lambda + w^2)\varepsilon\, E_o) - (\phi, s_o\, \varepsilon \text{ grad div } \varepsilon\, E_1 +$$
$$+ (\lambda + w^2)\varepsilon\, E_1) = 0.$$

Conseqüentemente, para todo ϕ em $V(\Omega)$, temos:

$(\phi, (\varepsilon^{-1}M-\lambda)E_o)_\varepsilon - (\phi, \text{grad}(L_{s_o} + \lambda)u)_\varepsilon = 0.$

Com $(\varepsilon^{-1}M - \lambda)E_o \in D_o(\Omega)$ e $\text{grad}(L_{s_o} + \lambda)u \in \text{grad } H_o^1(\Omega)$.

Então, obtemos:

$$\varepsilon^{-1}M\, E_o - \lambda\, E_o = 0 \quad \text{e} \quad \text{grad}(L_{s_o} + \lambda)u = 0 .$$

A segunda igualdade implica que devemos ter:

$$L_{s_o}\, u + \lambda\, u = \text{constante}$$

Por causa de $L_{s_o}\, u \in H_o^1(\Omega)$ segue que:

$$L_{s_o}\, u + \lambda\, u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim, obtemos que:

$$(\text{rot } \phi, \mu^{-1} \text{ rot } E_o) - w^2(\phi, E_o)_\varepsilon = \lambda(\phi, E_o)_\varepsilon \; ; \quad E_o \in V(\Omega) \cap D_o(\Omega).$$

$$s_o(\text{grad } \phi, \epsilon \text{ grad } u) - w^2(\phi, u) = \lambda(\phi, u); \quad u \in H_o^1(\Omega).$$

Se, por outro lado, λ é um autovalor de uma das igualdades (8) ou (9), então $E_1 = \text{grad } u$, respectivamente E_o, são autosoluções dos problemas (6) e (6') para o autovalor λ. Por substituição, verificamos que as equações (6) juntamente com as condições de fronteira são satisfeitas. Com isso concluimos a prova do teorema.

No capítulo seguinte vamos obter estimativas para as funções $N_{s_o}^o(t)$ (associada ao operador $\tilde{M}$) e $N_{s_o}^1(t)$ (associada ao operador L_{s_o}) e consequentemente por (7), teremos finalmente, uma fórmula para a função $N_M(t)$ (correspondente ao operador M) das equações de Maxwell e assim alcançaremos o objetivo do presente trabalho.

CAPÍTULO III

Neste capítulo final vamos apresentar, sob a forma de teorema, uma estimativa sobre a distribuição assintótica de autovalores para as equações de Maxwell com coeficientes variáveis.

Conforme fizemos nos dois capítulos anteriores, vamos separar o presente em diversas seções. Na primeira seção pretendemos introduzir algumas hipóteses adicionais e o teorema sobre os autovalores das equações de Maxwell, acima mencionado. Na segunda seção vamos fazer um breve relato sobre o método de Métivier. Nas seções III.3,4 e 5 seguintes vamos fazer o desenvolvimento desse método. Finalmente, introduzimos uma seção com a conclusão da prova do teorema da seção III.1, com base no resultado obtido em III.5, e algumas observações que julgamos interessantes.

III.1 O RESULTADO

Seja Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que Ω satisfaz a condição de regularidade de Métivier (C').

Além disso, vamos supor que a fronteira de Ω tem medida (n-1)-dimensional finita. Para precisar isso, colocamos para $\epsilon > 0$:

$$\tilde{\Omega}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon\}; \qquad \Omega_\epsilon = \Omega \cap \tilde{\Omega}_\epsilon$$

e fazemos uma das seguintes hipóteses:

(H.1) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \operatorname{med} \Omega_\varepsilon < +\infty$$

(H.2) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \operatorname{med} \tilde{\Omega}_\varepsilon < +\infty$$

Também vamos supor que os coeficientes das formas bilineares B e C, obtidos através das matrizes $\mu(x)$ e $\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, satisfazem a condição de continuidade de Hölder, isto é:

$$\exists\, K_1, K_2;\ \forall\, (\alpha,\beta),\ |\alpha| = |\beta| = 1;\ \forall\, (x,y) \in \Omega \times \Omega :$$

$$|b_{\alpha,\beta}(x) - b_{\alpha,\beta}(y)| \leq K_1[d_\Omega(x,y)]^s$$

$$|c_{\alpha,\beta}(x) - c_{\alpha,\beta}(y)| \leq K_2[d_\Omega(x,y)]^s$$

para algum $s \in (0,1]$ e sendo $d_\Omega(x,y)$ o mínimo de 1 e do limite inferior dos comprimentos dos caminhos de classe C^1 ligando x a y em Ω e onde:

- $b_{\alpha,\beta}$ são os coeficientes da forma B definida (ver Capítulo II) sobre $V(\Omega)$:

$$B(\phi,E) = (\operatorname{rot} \phi, \mu^{-1} \operatorname{rot} E) + s_o(\operatorname{div} \phi, \operatorname{div} \varepsilon E) - w^2(\phi, \varepsilon E)\ .$$

- $c_{\alpha,\beta}$ são os coeficientes da forma:

$$C(\phi,u) = s_o(\operatorname{grad} \phi, \varepsilon \operatorname{grad} u) - w^2(\phi,u)$$

definida em $H_o^1(\Omega)$ e associada com o operador $L_{s_o}(u)$.

Observamos que podemos tomar, por exemplo, $s_o = 1$ que não haverá diferença nos resultados (a hipótese que fazemos sobre os coeficientes é de que sejam holderianos). Poderíamos ter feito isso desde o começo, isto é, quando introduzimos s_o no capítulo anterior.

No Capítulo II, pedimos que as matrizes $\varepsilon(x)$ e $\mu^{-1}(x)$ sejam simétricas. Disso obtemos que as formas B e C são hermitianas.

Ademais, vamos precisar para aplicar as fórmulas do mini-max que a injeção de $V(\Omega)$ em $\mathcal{L}_2(\Omega)$ seja compacta. Não sabemos uma condição necessária e suficiente, sobre a geometria da fronteira de Ω, para que isso aconteça; onde $H_o^m(\Omega) \subset V(\Omega) \subset$ $\subset H^m(\Omega)$. No entanto, observamos, como no Capítulo I, que a propriedade do cone é uma condição suficiente. Assim a priori pedimos, sem especificar uma condição para isso, que $V(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$ seja compacta. Em verdade, como também já tínhamos observado, a condição de regularidade de Métivier (C'), como veremos implicitamente, é suficiente para se obter essa condição de compacidade. Assim, para o resultado que procuramos basta a condição (C') de Métivier.

Então, com essas hipóteses formuladas sobre a $\partial\Omega$, os coeficientes, etc... temos o seguinte:

<u>III.1.1 - Teorema</u>:

$$N_M(\lambda) = C(\Omega)\,\lambda^{\frac{3}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{3-\frac{s}{s+1}}{2}}\right)$$

com $N_M(\lambda)$ sendo o número de autovalores das equações de Maxwell iguais ou menores que λ, contadas as multiplicidades. A constantes $C(\Omega)$ é dada por:

$$C(\Omega) = \mu_B(\Omega) - \mu_C(\Omega)$$

sendo $\mu_B(\Omega)$ e $\mu_C(\Omega)$ constantes, a serem definidas posteriormente, dependentes somente de Ω e das formas B e C, respectivamente.

Observamos também que a hipótese que fazemos sobre os coeficientes (continuidade de Hölder na potência s) é mais fraca que a condição de C^∞ pedida por Mehra. Quanto a condição de regularidade (C'), que pedimos sobre Ω, é satisfeita por uma classe muito grande de abertos, contendo abertos muito irregulares (pontas alongadas, etc...), como observa Métivier.

Em Fraenkel [10], já dissemos que podemos obter uma idéia sobre a importância da regularidade da fronteira no tratamento de problemas relacionados com a teoria de Espaços de Sobolev, mormente sobre compacidade de injeções ou a densidade de C_0^∞ nesses espaços.

Agora, tudo que segue neste capítulo tem o objetivo de demonstrar o teorema anterior sobre os autovalores das equações de Maxwell.

Na verdade, o que vamos mostrar é um teorema mais geral seguindo a prova dada por Métivier [3]. Esse teorema dá uma fórmula assintótica para a distribuição de autovalores do operador associado a uma tripla variacional $(V, L^2(\Omega), a)$ sendo a uma for ma bilinear satisfazendo certas hipóteses. O teorema III.1.1 (equações de Maxwell) é então obtido como uma aplicação desse resultado.

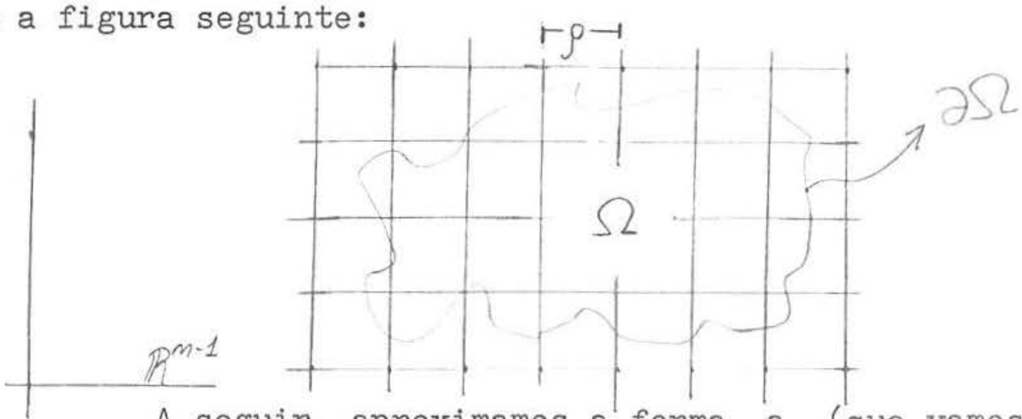
III.2 - O MÉTODO DE MÉTIVIER E ERROS DECORRENTES

Vamos fazer aqui uma descrição do método de Métivier sobre a distribuição de autovalores para o operador associado ao problema variacional $(V, L^2(\Omega), a)$. Relatamos também os erros que ocorrem devido a esse método; onde a forma a é do tipo:

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha,\beta}(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)} \right\} dx.$$

Vamos nos restringir ao caso Ω limitado. Para Ω não limitado Métivier obtém, desde que $V \subset K_o^m(\Omega)$ e Ω tenha medida de Lebesgue finita, apenas uma fórmula assintótica sem precisar uma estimativa do resto. Na última seção fazemos observações sobre esse tipo de resultado.

Assim, como Métivier, fazemos uma partição de Ω em pequenos cubos n-dimensionais, dois a dois disjuntos (contidos em Ω), e todos de comprimento de lado $\rho > 0$. Fazemos isso conforme a figura seguinte:



A seguir, aproximamos a forma a (que vamos supor tenha coeficientes hölderianos) por uma forma $\tilde{a}$, com coeficientes constantes em cada cubo da partição. Vamos definir $\tilde{a}$ sobre $\Omega \setminus \overline{\Omega}'$ por a. Sobre Ω' definimos $\tilde{a}$ por:

$$\tilde{a}(u,v) = \int_{\Omega'} \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \tilde{a}_{\alpha,\beta}\, D^{\alpha}u(x)\, \overline{D^{\beta}v(x)} \right\} dx$$

onde $\tilde{a}_{\alpha,\beta}$ vão ser constantes, dependendo sobre cada cubo, e $\Omega' \subset \Omega$ é a união dos cubos (abertos) da partição.

Antes disso, obtemos (ver próxima seção) uma fórmula para estimar a distribuição de autovalores para uma forma bilinear, do tipo acima, definida sobre um cubo de $\mathbb{R}^n$ a coeficientes constantes.

Seguindo o método de Métivier, aplicamos esse resultado para cada cubo da partição e a forma $\tilde{a}$ neles definida. A partir disso, obtemos uma fórmula para os autovalores do problema variacional $(H_o^m(\Omega'), L^2(\Omega'), \tilde{a})$.

Assim, com a ajuda de alguns resultados auxiliares, tomando λ grande e fazendo os cubos da partição (que é finita) bem pequenos para que satisfaçam certas hipóteses sobre os resultados auxiliares; obtemos finalmente uma fórmula para o problema associado a tripla variacional $(V, L^2(\Omega), a)$.

Agora vamos explicar os erros que ocorrem com esse método.

Um primeiro erro é devido a estimativa para o problema a coeficientes constantes sobre um cubo e pode ser observado no cálculo da fórmula obtida na seção I.1.5.

Um segundo erro decorre de aproximar a forma a pela forma $\tilde{a}$, de coeficientes constantes em cada cubo, e fazer a estimativa para essa última forma (ver, por exemplo, lemas III.4.2 e III.4.3).

Finalmente, por motivo do cálculo da estimativa ser feito sobre Ω' a união dos cubos da partição de Ω, o terceiro erro envolvido é devido justamente de aproximar o cálculo para Ω pelo cálculo em Ω'. Isto é, $\Omega \setminus \bar{\Omega}'$ não contribui para as majorações e portanto essa faixa da fronteira origina erro na estimativa, o qual é controlado através dos lemas III.4.5 e III.5.1, incluído na fórmula final.

Assim, para Ω limitado (caso em que estamos tratando as equações de Maxwell) e com certas condições de regularidade, vamos obter pelo método de Métivier a seguinte fórmula para a distribuição de autovalores do operador associado ao problema variacional $(V, L^2(\Omega), a)$:

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{\frac{n}{2m}} + O\left(\lambda^{\frac{n-\theta}{2m}}\right)$$

com $\theta = \frac{s}{s+1}$ e $0 < s \leq 1$.

O erro que aparece na fórmula é devido aos três tipos acima mencionados.

III.3 - ESTIMATIVAS PARA PROBLEMAS COM COEFICIENTES CONSTANTES SOBRE UM CUBO.

Hipóteses e Resultados

Seja a uma forma integrodiferencial homogênea a coeficientes constantes:

(1) $$a(u,v) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int D^{\alpha}u(x)\, \overline{D^{\beta}v(x)}dx$$

Suponhamos que:

(2) $$\forall\ \alpha,\beta:\ a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}}\ .$$

Anotamos $a(\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}\ \xi^{\alpha+\beta}$ e suponhamos também que:

(3) $$\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0:\ a(\xi) > 0\ .$$

Sejam M e c_o duas constantes tais que:

(4) $$\begin{cases} \forall\ \alpha,\beta \quad |\alpha|=|\beta|=m: & |a_{\alpha,\beta}| \le M \\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n: & a(\xi) \ge c_o|\xi|^{2m} \end{cases}\ .$$

Enfim, colocamos $\mu_a' = (2\pi)^{-n} \int_{a(\xi)\le 1} d\xi$ e designamos por μ_a a medida de densidade constante μ_a'.

Seja $\mathfrak{a}$ o operador diferencial (associado a forma a):

$$(5) \qquad \mathfrak{a} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m a_{\alpha,\beta} D^{\alpha+\beta}$$

Seja $u \in H_o^m(\Omega)$. Pela transformação de Fourier (ver Yosida [8]), com Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, temos:

$$a(u,u) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int D^\alpha u \overline{D^\beta u}\, dx = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int \xi^\alpha \xi^\beta |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}\, \xi^{\alpha+\beta} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \geq \int c_o |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$$

onde o sinal de $\geq$ é devido a (4). Assim obtemos:

$$a(u,u) + c_o \|u\|_o^2 \geq c_o \int |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + c_o \|\hat{u}\|_o^2 =$$

$$= c_o \int (|\xi|^{2m}+1)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \qquad \text{(por Parseval).}$$

Agora, como existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $M_1(|\xi|^{2m}+1) \geq (|\xi|^2+1)^m$, concluimos que:

$$a(u,u) + c_o \|u\|_o^2 \geq c_o M_1^{-1} \int (|\xi|^2+1)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq$$

$$\geq c_o M_1^{-1} c \|u\|_m^2 \qquad (c > 0)$$

Isto é, existe constante c' tal que:

$$a(u,u) \geq c' \|u\|_m^2 - c_o \|u\|_o^2 \;, \quad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

Então, facilmente daí, isso significa que a é coerciva sobre $H_o^m(\Omega)$ (relativamente a $L^2(\Omega)$). Notar, utilizando a desigualdade de Schwartz, que a é contínua sobre $H_o^m(\Omega)$. Também notar da hipótese (2) sobre os coeficientes, que a é hermitiana sobre $H_o^m(\Omega)$. Assim, podemos pensar em calcular $N(\lambda; H_o^m(\Omega)$, $L^2(\Omega), a)$.

Para Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ definimos, para $\lambda \in \mathbb{R}$, o espaço:

$$Z_\lambda(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \mid \mathcal{a}u = \lambda u\} .$$

Temos que $Z_\lambda(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^m(\Omega)$ e está munido da norma $\| \ \|_{m,\Omega}$.

Claramente, a forma definida pelo produto interno de $H^m(\Omega)$ é contínua, coerciva e hermitiana sobre $H^m(\Omega)$; em particular sobre $Z_\lambda(\Omega)$. Assim, também podemos pensar em calcular

$$N(\mu, Z_\lambda(\Omega), L^2(\Omega), a_m) = N(\mu; Z_\lambda(\Omega), L^2(\Omega)).$$

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar a seguinte:

III.3.1 - Proposição: Com as notações precedentes, existem constantes C_1 e C_2 dependentes somente de c_o, m e M, tais que:

Para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$, de comprimento de lado ρ, e para todos reais λ e μ positivos temos:

(i) $N(\mu; Z_\lambda(Q), L^2(Q)) \leq C_1[1+\rho^{n-1}(\lambda^{(n-1)/2m} + \mu^{(n-1)/2m})]$

(ii) $|N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) - \mu_a(Q)\,\lambda^{n/2m}| \leq C_2[1+\rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}]$

onde $\mu_a(Q) = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{a(\xi)\leq 1} d\xi$.

Reduções

Para provar a proposição III.3.1, vamos primeiramente reduzir a demonstração ao caso $Q = (0,2\pi)^n$ e posteriormente que (ii) é obtido de (i).

Sejam então $Q = (0,\rho)^n$ e $Q_o = (0,2\pi)^n$ e $t = \frac{\rho}{2\pi}$.

Seja T a isometria de $L^2(Q)$ sobre $L^2(Q_o)$ definida por:

$$Tu(x) = t^{n/2}\,u(tx).$$

T é um isomorfismo de $H^m(Q)$ sobre $H^m(Q_o)$ e de $\overset{m}{H_o}(Q)$ sobre $\overset{m}{H_o}(Q_o)$

Ademais, é fácil verificar que:

(6) $\quad \forall\, u \in \overset{m}{H}(Q)\colon a(Tu,Tu) = t^{2m}\,a(u,u)$

(7) $\quad \forall\, u \in \overset{m}{H}(Q)\colon \mathcal{Q}(Tu) = t^{2m}\,T(\mathcal{Q}u)$

(8) $$\forall\, u \in L^2(Q):\ \|Tu\|_{o,Q_o} = \|u\|_{o,Q}$$

e mais geralmente,

(9) $$\forall\, u \in L^2(Q),\quad \forall\, j = 0,1,\ldots,m:\ |Tu|_{j,Q_o} = t^j|u|_{j,Q}\ .$$

Pelo teorema de interpolação enunciado no Capítulo I temos o seguinte:

<u>III.3.2 - Lema</u>: Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ com a propriedade do cone. Para $m \geq 2$, existe $\gamma > 0$ tal que para $\varepsilon > 0$ e todo $u \in H^m(\Omega)$ e $j = 1,\ldots,m-1$ vale:

$$|u|^2_{j,\Omega} \leq \gamma\{\varepsilon^{m-j}|u|^2_{m,\Omega} + (1+\varepsilon^{-j})|u|^2_{o,\Omega}\}$$

onde $\gamma = \gamma(m,\Omega)$ depende somente de m e Ω.

Agora, tomando $u \in H^m(Q)$ aplicamos o lema III.3.2 para $Tu \in H^m(Q_o)$. Temos então:

$$|Tu|^2_{j,Q_o} \leq \gamma\{\varepsilon^{m-j}\ |Tu|^2_{m,Q_o} + (1+\varepsilon^{m-j})|Tu|^2_{o,Q_o}\}.$$

Utilizando a expressão (9) obtemos:

$$t^{2j}|u|^2_{j,Q} \leq \gamma\{\varepsilon^{m-j}\ t^{2m}|u|^2_{m,Q} + (1+\varepsilon^{-j})|u|_{o,Q}\}.$$

Como $t = \rho/2\pi$ segue que:

$$|u|^2_{j,Q} \leq \gamma\{\varepsilon^{m-j}\ (\rho/2\pi)^{2m-2j}\ |u|^2_{m,Q} + |1+\varepsilon^{-j})(\rho/2\pi)^{-2j}|u|^2_{o,Q}\}$$

ou,

$$|u|^2_{j,Q} \leq \gamma(\rho/2\pi)^{2m-2j}\ \varepsilon^{m-j}|u|^2_{m,Q} + \gamma(\frac{\rho}{2\pi})^{-2j}\ |u|^2_{o,Q} +$$

$$+\ \gamma(\rho/2\pi)^{-2j}\ \varepsilon^{-j}|u|^2_{o,Q}\ .$$

Fazendo $\varepsilon' = \varepsilon\,\rho^2$ obtemos daí que:

$$|u|^2_{j,Q} \leq \gamma(2\pi)^{-(2m-2j)}\,(\varepsilon')^{m-j}|u|^2_{m,Q} + \gamma(2\pi)^{2j}\,\rho^{-2j}|u|^2_{o,Q} +$$

$$+\ \gamma(2\pi)^{2j}\,(\varepsilon')^{-j}\,|u|^2_{o,Q}\ .$$

e então concluimos que existe γ_o dependendo somente de m e n tal que:

$$|u|^2_{j,Q} \leq \gamma_o\{(\varepsilon')^{m-j}\,|u|^2_{m,Q} + [\rho^{-2j} + (\varepsilon')^{-j}]\,|u|^2_{o,Q}\}.$$

Com isso, podemos então enunciar o seguinte:

<u>III.3.3 - Lema</u>: Existe uma constante dependendo somente de m e n tal que; para todo cubo Q de lado ρ , para todo $u \in H^m(Q)$, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo inteiro $j=1,\ldots,m-1$ temos:

$$|u|^2_{j,Q} \leq \gamma_o\{\varepsilon^{m-j}\,|u|^2_{m,Q} + [\varepsilon^{-j} + \rho^{-2j}]\,|u|^2_{o,Q}\}$$

Estes dois lemas serão úteis principalmente para o seguinte:

(10) $$\forall\, u \in H^m(Q_o):\ \|u\|^2_{m,Q_o} \leq \gamma_1(|u|^2_{m,Q_o} + |u|^2_{o,Q_o})$$

Para obter essa expressão, tomar no lema III.3.3 $\varepsilon = 1$ e $\rho = 2\pi$, acrescentar $|u|^2_{m,Q_o} + |u|^2_{o,Q_o}$ em ambos os lados da desigualdade e a seguir fazer a soma em j.

Em seguida, deduzimos que a forma:

$$a_o(u,v) = \sum_{|\alpha|=m} \int D^\alpha u\,\overline{D^\alpha v}\,dx$$

é coerciva sobre $H^m(Q)$, pois:

Para $u \in H^m(Q)$, do lema III.3.3, temos (tomando $\varepsilon=1$):

$$|u|^2_{j,Q} \le \gamma_o |u|^2_{m,Q} + \gamma_o (1 + \rho^{-2j}) |u|^2_{o,Q} \quad (j=1,\dots,m-1).$$

Acrescentando $|u|^2_{m,Q} + |u|^2_{o,Q}$ em ambos os lados dessa desigualdade e somando em j, segue:

$$\|u\|^2_{m,Q} \le cte(\gamma_o)|u|^2_{m,Q} + cte(\gamma_o,\rho)|u|^2_{o,Q} .$$

Mas, $a_o(u,u) = |u|^2_m$ e assim obtemos:

$$\forall\, u \in H^m(Q): \quad a_o(u,u) \ge cte' \|u\|^2_{m,Q} - cte'' \|u\|^2_{o,Q}$$

isto é, a_o é coerciva sobre $H^m(Q)$.

Pela desigualdade de Schwartz podemos verificar que a_o é contínua sobre $H^m(Q)$. Também temos que a forma a_o é hermitiana. Assim, podemos calcular $N(\lambda;Z_\lambda(Q), L^2(Q),a_o)$ desde que temos $Z_\lambda(Q) \subset H^m(Q)$.

Claramente, temos da definição de a_o que:

(11) $$\forall\, u \in H^m(Q): a_o(u,u) \le \|u\|^2_{m,Q} .$$

Agora, para $u \in H^m(Q)$ calculamos:

$$a_o(Tu,Tu) = \sum_{|\alpha|=m} \int (D^\alpha Tu)(\overline{D^\alpha Tu})dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \int [D^\alpha\, t^{n/2}\, u(tx)]\overline{[D^\alpha\, t^{n/2}\, u(tx)]}dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \int t^n (D^\alpha u(z))\, t^m (\overline{D^\alpha u(z)})\, t^m\, t^{-n}\, dz$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} t^{2m} \int (D^\alpha u)(\overline{D^\alpha u}) dz = t^{2m}\, a_o(u,u) \ .$$

Assim temos:

$$(12) \qquad u \in H^m(Q):\ a_o(Tu,Tu) = t^{2m}\, a_o(u,u) \ .$$

Deduzimos de (11), utilizando a propriedade I.2.1.2.2 (iii) sobre as funções $N(\mu;\cdot)$, que:

$$N(\mu; Z_\lambda(Q), L^2(Q)) = N(\mu; Z_\lambda(Q), L^2(Q), (\cdot,\cdot)_{m,Q}) \leq$$
$$\leq N(\mu; Z_\lambda(Q), L^2(Q), a_o).$$

Da expressão (7) vemos imediatamente que T é um isomorfismo de $Z_\lambda(Q)$ sobre $Z_{t^{2m}\lambda}(Q_o)$.

Colocamos $\lambda_o = t^{2m}\lambda$ e $\mu_o = t^{2m}\mu$.

Seja $G \in \varepsilon_\mu(Z_\lambda(Q), L^2(Q)$; pelo lema I.2.1.2.3 segue que:

$$\forall\ u \in G:\ a_o(u,u) \geq \varepsilon \|u\|_{m,Q} - \mu \|u\|^2_{o,Q}$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Utilizando as expressões (8) e (12) temos daí que:

$$\forall\ u \in G:\ t^{-2m}\, a_o(Tu,Tu) \geq \varepsilon \|u\|^2_{m,Q} - \mu \|Tu\|^2_{o,Q_o}$$

e aplicando a continuidade de T, obtemos:

$$\forall\ u \in G:\ t^{-2m}\, a_o(Tu,Tu) \geq cte\cdot\varepsilon \|Tu\|^2_{m,Q_o} - \mu \|Tu\|^2_{o,Q_o}.$$

Assim que, novamente aplicando o lema I.2.1.2.3, temos:

$$TG \in \varepsilon_{t^{2m}\mu}(Z_{t^{2m}\lambda}(Q_o), L^2(Q_o,)a_o).$$

Inversamente, pela continuidade de T^{-1}, mostra-se do mesmo modo que se $G \in \varepsilon_{\mu_o}(Z_{\lambda_o}(Q_o), L^2(Q_o),a_o)$ então $T^{-1}G \in \varepsilon_{\mu}(Z_{\lambda}(Q), L^2(Q),a_o)$.

Então, podemos concluir que:

$$(*) \qquad N(\mu;Z_{\lambda}(Q),L^2(Q),a_o) = N(\mu_o;Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o),a_o).$$

Agora, da expressão (10) temos:

$$\forall\, u \in H^m(Q_o):\ a_o(u,u) \geq \Upsilon_1^{-1}\|u\|^2_{m,Q_o} - \|u\|^2_{o,Q_o}.$$

Aplicando sobre isso as propriedades I.2.1.2.2 das funções $N(\mu;\cdot)$ temos que:

$$\begin{aligned} N(\mu_o;Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o),a_o) &\leq N(\mu_o;Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o), \Upsilon_1^{-1}(\cdot,\cdot)_{m,Q_o}-(\cdot,\cdot)_{o,Q_o}) = \\ &= N(\mu_o+1;Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o), \Upsilon_1^{-1}(\cdot,\cdot)_{m,Q_o}) \\ &= N(\Upsilon_1(\mu_o+1);\ Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o)). \end{aligned}$$

Reagrupando, finalmente obtemos daí e da expressão (*) que:

$$(13) \qquad N(\mu;Z_{\lambda}(Q),L^2(Q)) \leq N(\Upsilon_1(\mu_o+1);\ Z_{\lambda_o}(Q_o),L^2(Q_o)).$$

Além disso, tiramos das expressões (6) e (8) (análogo como fizemos acima para obter a expressão (*)) que:

$$(14) \qquad N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) = N(t^{2m}\lambda;\overset{m}{H_o}(Q_o),L^2(Q_o),a).$$

Então é claro que as estimativas (i) e (ii) sobre o cubo Q (enunciadas na proposição III.3.1), resultam por (13) e (14), modificadas por uma constante C_1, de estimativas semelhantes sobre o cubo Q_o.

Logo, de agora em diante vamos supor que $Q = (0,2\pi)^n$.

Desenvolvendo as funções de $\overset{m}{H_{\#}}(Q)$ em série de Fourier (ver seção I.1.1), isto é:

$$u \in \overset{m}{H_{\#}}(Q) \colon u(x) = \sum_k (2\pi)^{-n/2} a_k e^{ik\cdot x} \qquad (k \in \mathbb{Z}^n)$$

obtemos que a é coerciva sobre $\overset{m}{H_{\#}}(Q)$, pois:

$$a(u,u) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int_Q D^\alpha u \, \overline{D^\beta u} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int_Q D^\alpha \Big(\sum_k (2\pi)^{-n/2} a_k e^{ik\cdot x}\Big) \overline{D^\beta \Big(\sum_k (2\pi)^{-n/2} a_k e^{ik\cdot x}\Big)} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \int_Q \Big\{ (2\pi)^{-n} \Big(\sum_k a_k k^\alpha e^{ik\cdot x}\Big)\Big(\sum_k \bar{a}_k k^\beta e^{-ik\cdot x}\Big)\Big\} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \Big(\sum_k k^{\alpha+\beta} |a_k|^2\Big)$$

onde utilizamos que $\displaystyle\int_Q e^{ik\cdot x} e^{-i\ell\cdot x} dx = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ (2\pi)^n & k = \ell \end{cases}$

Assim, aplicando a expressão (4), temos:

$$a(u,u) = \sum_k |a_k|^2 \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta} k^{\alpha+\beta}\Big) \geq \sum_k |a_k|^2 c_o |k|^{2m} .$$

Daí, utilizando a fórmula de Parseval, isto é,

$\|u\|_o^2 = \sum_k |a_k|^2$; concluimos que:

$$a(u,u) + c_o\|u\|_o^2 \geq \sum_k c_o|k|^{2m} |a_k|^2 + c_o \sum_k |a_k|^2 =$$

$$= c_o \sum_k (1+|k|^{2m})|a_k|^2 \geq c_o M_1^{-1} \sum_k (1+|k|^2)^m |a_k|^2 \geq c'\|u\|_{m,Q}^2$$

onde $c' = c_o M_1^{-1} C_m^{-2}$, sendo C_m a constante de equivalência das normas $\|\cdot\|_m^{\#}$ e $\|\cdot\|_{m,Q}$ no lema I.1.1.16.

Assim, para $u \in H_{\#}^m(Q)$ temos:

$$a(u,u) + c_o\|u\|_{o,Q}^2 \geq c'\|u\|_{m,Q}^2$$

e isto quer dizer que a forma a é coerciva sobre $H_{\#}^m(Q)$.

Também temos dessa expressão, se $c_o \leq 1$, que:

$$a(u,u) + \|u\|_{o,Q}^2 \geq c'\|u\|_{m,Q}^2 .$$

Se $c_o > 1$ também temos:

$$c_o^{-1}\, a(u,u) + \|u\|_{o,Q}^2 \geq c_o^{-1}\, c'\|u\|_{m,Q}^2$$

e daí, como $c_o^{-1} < 1$, segue que:

$$a(u,u) + \|u\|_{o,Q}^2 \geq c_o^{-1}\, c'\|u\|_{m,Q}^2 .$$

Assim, em ambos os casos, existe uma constante γ_2 dependendo somente de c_o tal que:

(15) $$\forall\, u \in H_o^m(Q):\ \gamma_2\|u\|_{m,Q}^2 \leq a(u,u) + \|u\|_{o,Q}^2$$

[em particular, a é coerciva sobre $H_o^m(Q)$].

As funções $\varphi_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ik\cdot x}$ constituem uma base ortonormal de $L^2(Q)$ de autofunções para o autovalor $a(k)$ do operador $A_\#$ associado ao problema variacional $(H^m_\#(Q), L^2(Q), a)$, já que a injeção de $H^m_\#(Q)$ em $L^2(Q)$ é compacta, conforme o teorema I.1.1.17 sobre espaços de Sobolev periódicos.

Temos então, pela fórmula do mini-max, que:

$$N(\lambda; H^m_\#(Q), L^2(Q), a) = \text{Card}\{k \in \mathbb{Z}^n \colon a(k) \leq \lambda\} .$$

Para $\lambda \geq 0$ anotando $\Gamma_\lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon a(\xi) \leq \lambda\}$, temos:

$$\text{med } \Gamma_1 = \mu_a(Q) . \tag{16}$$

Então, deduzimos da seção I.1.5 e da fórmula (16) que existe constante C dependendo somente de m, M e c_o tal que:

$$|N(\lambda; H^m_\#(Q), L^2(Q), a) - \mu_a(Q)\, \lambda^{n/2m}| \leq C(1+\lambda^{(n-1)/2m}) \tag{17}$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ colocamos:

$$Z'_\lambda = \{u \in H^m_\#(Q) \colon \forall\, v \in H^m_o(Q),\ a(u,v) = \lambda(u,v)\} .$$

Claramente temos $Z'_\lambda = Z_\lambda(Q) \cap H^m_\#(Q)$.

Temos pela expressão (15), utilizando as propriedades I.2.1.2.2 das funções $N(\lambda;\cdot)$, que:

$$N(\lambda; Z'_\lambda, L^2(Q), a) \leq N(\lambda; Z'_\lambda, L^2(Q), Y_2(\cdot,\cdot)_{m,Q} - (\cdot,\cdot)_{o,Q}) =$$

$$= N(\lambda+1;\ Z'_\lambda, L^2(Q), Y_2(\cdot,\cdot)_{m,Q}) = N(Y_2^{-1}(\lambda+1);\ Z'_\lambda, L^2(Q)).$$

Logo, fazendo $\mu = Y_2^{-1}(\lambda+1)$, temos:

$$(17') \qquad N(\lambda;Z'_\lambda,L^2(Q),a) \leq N(\mu;Z'_\lambda,L^2(Q)) \leq N(\mu;Z_\lambda(Q),L^2(Q))$$

onde, na última desigualdade, aplicamos a proposição I.2.1.2.8.

Agora, suponhamos que temos a estimativa (i) da proposição III.3.1, isto é:

$$(17'') \qquad N(\mu;Z_\lambda(Q),L^2(Q)) \leq C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m} + \mu^{(n-1)/2m})$$

(onde $Q = (0,2\pi)^n$, como observamos anteriormente).

Da proposição I.2.1.2.10 com $V_o = \overset{m}{H_o}(Q)$, $V = \overset{m}{H_\#}(Q)$ e $H = L^2(Q)$, obtemos:

$$N(\lambda;\overset{m}{H_\#}(Q),L^2(Q),a) + \dim(\overset{m}{H_o}(Q) \cap Z'_\lambda) = N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) + $$
$$+ N(\lambda;Z'_\lambda,L^2(Q),a).$$

Como $\dim(\overset{m}{H_o}(Q) \cap Z'_\lambda) < +\infty$ (ver a prova da proposição I.2.1.2.10) e aplicando a hipótese (17"), temos daí que:

$$N(\lambda;\overset{m}{H_\#}(Q),L^2(Q),a) \leq N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) +$$
$$+ C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m} + \mu^{(n-1)/2m})$$

e consequentemente temos:

$$|N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) - \mu_a(Q)\,\lambda^{n/2m}| \leq$$
$$\leq |N(\lambda;\overset{m}{H_\#}(Q),L^2(Q),a) - \mu_a(Q)\,\lambda^{n/2m}| + C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m}+\mu^{(n-1)/2m}).$$

Finalmente, aplicando o resultado (17), obtemos a estimativa (ii) para a proposição III.3.1, isto é:

$$|N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) - \mu_a(Q)\ \lambda^{n/2m}| \leq C(1+\lambda^{(n-1)/2m}) +$$

$$+ C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m}+\mu^{(n-1)/2m}) \leq \text{CONSTANTE}[1+\lambda^{(n-1)/2m}+\mu^{(n-1)/2m}]$$

onde $\mu = \overset{-1}{\gamma_2}(\lambda+1)$ e $\gamma_2 = \gamma_2(c_o)$.

Substituindo o valor de μ na fórmula acima, concluímos a existência de uma constante C_2 dependendo somente de c_o, M e m tal que:

$$|N(\lambda;\overset{m}{H_o}(Q),L^2(Q),a) - \mu_a(Q)\lambda^{n/2m}| \leq C_2(1+\lambda^{(n-1)/2m}).$$

Isto é a estimativa (ii) da proposição III.3.1 que queríamos provar para o cubo $Q = (0,\pi)^n$ e portanto, válida para todo cubo de $\mathbb{R}^n$ conforme observações anteriores.

Em conclusão, para provar a proposição III.3.1, temos somente de mostrar o ítem (i) para o cubo $Q = (0,2\pi)^n$.

Fórmulas de Green

Para estimar $N(\mu;Z_\lambda(Q),L^2(Q))$ vamos utilizar o fato que $Z_\lambda(Q)$ é isomorfo a um espaço de traços, como observa Métivier, e fazemos as majorações dos n-diâmetros nesses espaços de traços. Vamos construir levantamentos de traços e para isso transpomos o operador $A_\#$ e precisamos das fórmulas de Green. Em Aubin [7] podemos obter uma exposição sobre essas fórmulas.

Notações:

Seja Q o cubo $(0,2\pi)^n$ de $\mathbb{R}^n$; para $p = 1,\dots,n$

Q_p é a face de Q da equação $x_p = 2\pi$ e para $p = n+1,\dots,2n$ Q_p é a face de Q da equação $x_{p-n} = 0$.

Introduzimos os espaços:

$$X = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} H^{m-|\alpha|-\frac{1}{2}}(Q_p)$$

$$Y = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(Q_p)$$

$$L = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} L^2(Q_p)$$

Temos as injeções contínuas $X \hookrightarrow L$ e $Y \hookrightarrow L$. Para u e v em $\mathcal{D}(\overline{Q})$, integrando por partes sucessivamente em x_1, $x_2,\dots,x_n$ temos:

$$(18) \qquad a(u,v) - (\mathcal{A}u,v) = \sum_{|\alpha|\leq m-1} \sum_{p=1}^{2n} (T_p^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(Q_p)}$$

onde os T_p^{α} são operadores diferenciais de ordem inferior a $2m-|\alpha|-1$. Temos para $p = 1,\dots,n$: $T_{p+n}^{\alpha} = -T_p^{\alpha}$.

Fazemos uma pequena indicação de como obter a expressão (18):

$$(u(x_1,x'), D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x'}^{\alpha'} v(x_1,x')) = \int_{Q'} [u(x_1,x')\, D_{x_1}^{\alpha_1-1} D_{x'}^{\alpha'} v(x_1,x')]_0^{2\pi} -$$

$$-\int_Q D_{x_1} u(x_1,x') D_{x_1}^{\alpha_1-1} D_{x'}^{\alpha'} v(x_1,x') = \int_{Q'} \Big\{ u(2\pi,x') D_{x_1}^{\alpha_1-1} D_{x'}^{\alpha'} v(x,x') \big|_{x_1=2\pi} -$$

$$- u(0,x')D_{x_1}^{\alpha_1-1} D_{x'}^{\alpha'} v(x_1,x')\Big|_{x_1=0}\Bigg\} - \int_Q D_{x_1} u(x_1,x') D_{x_1}^{\alpha_1-1} D_{x'}^{\alpha'} v(x_1,x').$$

Assim, as duas primeiras parcelas da última igualdade vão contribuir para T_1^{β} e T_{n+1}^{β}, para algum β, respectivamente.

Métivier observa que os operadores T_p^{α} não são unicamente determinados, eles dependem da ordem de integração por partes. Observar também que os Q_p sendo variedades com bordo, não podemos reter em (18) unicamente as derivadas normais em v. Vamos considerar para tudo o que segue, o sistema T_p^{α} fixado.

Agora, definimos $\tilde{T}u = (T_p^{\alpha}u|Q_p)_{|\alpha|\leq m-1;\ p=1,\dots,2n}$

Temos então que:

$$\|\tilde{T}u\|_Y \leq C_1'\|u\|_{2m,Q} \tag{19}$$

onde C_1' dependente somente de M.

Definindo também o operador $\tilde{\gamma}$ de $H^m(Q)$ em X por:

$$\tilde{\gamma}\, u = (D^{\alpha}u|_{Q_p})_{|\alpha|\leq m-1;\ p=1,\dots,2n} .$$

Claramente, deduzimos de (18) e da densidade de $\mathcal{D}(\overline{Q})$ em $H^m(Q)$ e $H^{2m}(Q)$ o seguinte:

<u>III.3.4 - Lema</u>: Para todo $u \in H^{2m}(Q)$ e todo $v \in H^m(Q)$ temos:

$$a(u,v) - (\mathcal{Q}u,v) = (\tilde{T}u,\tilde{\gamma}v)_L .$$

Agora, vamos procurar prolongar $\tilde{T}$ ao espaço:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in H^m(Q) : \mathcal{A}u \in L^2(Q)\} .$$

Observação:

Como $\mathcal{A}$ tem ordem $2m$, segue que $H^{2m}(Q) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

Vamos precisar do seguinte resultado:

III.3.5 - Lema: O núcleo em $H^m(Q)$ de $\tilde{\gamma}$ é $\overset{m}{H_o}(Q)$.

Este resultado foi enunciado na seção sobre espaços de Sobolev, na parte referente aos traços, e agora vamos dar uma indicação da:

Prova: Claramente, o núcleo de $\tilde{\gamma}$ contém $\mathcal{D}(Q)$ e como conseqüência $H_o^m(Q)$.

Por outro lado, para $|\alpha| \leq m$ existe um operador σ de $H^m(Q)$ em L tal que:

$$(20) \qquad \forall\, u \in H^m(Q),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q}) : (D^\alpha u, \varphi)_{L^2(Q)} - (u, D^\alpha \varphi)_{L^2(Q)} =$$

$$= (\tilde{\gamma}\, u,\ \sigma\varphi)_L .$$

Com efeito, estabelecemos (20) para $u \in \mathcal{D}(\overline{Q})$ por integração por partes; por densidade (20) se prolonga então a todo $u \in H^m(Q)$.

Daí resulta que para $u \in \operatorname{Ker} \tilde{\gamma}$, $\tilde{u}$ o prolongamento de u para 0 (zero) sobre $\mathbb{R}^n \setminus Q$ ($\tilde{u} = 0$ fora de Q) está em $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Assim, provamos que $\operatorname{Ker} \tilde{\gamma} \subset K_o^m(Q)$. Como Q tem a pro priedade "Lipschitz" (ver, por exemplo, Adams [12]), é sabido que $K_o^m(Q) = H_o^m(Q)$ e isto conclui a demonstração.

Anotamos X_o o espaço quociente de $H^m(Q)$ por $H_o^m(Q)$ e γ o operador de projeção de $H^m(Q)$ sobre X_o;

$$\gamma: H^m(Q) \longrightarrow X_o = (H^m(Q)/H_o^m(Q))$$

$$u \longmapsto \gamma u = \bar{u} .$$

Existe um levantamento R_o de γ, operador contínuo de X_o em $H^m(Q)$, tal que $\gamma \circ R_o = Id_{X_o}$;

$$R_o: X_o \longrightarrow H^m(Q)$$

$$\bar{u} \longmapsto R_o\bar{u} = u+x, \quad x \in H_o^m(Q).$$

O operador $\tilde{\gamma} \circ R_o$ é, conforme o lema anterior, uma injeção contínua e esta injeção permite identificar X_o à um subespaço, não fechado, de X.

<u>III.3.6 - Lema</u>: Existe um operador contínuo τ de $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ em X_o', antidual de X_o $(L \in X_o': L(au) = \bar{a}Lu)$, tal que:

$$\forall\ u \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}},\ \forall\ v \in H^m(Q): a(u,v)-(\mathcal{A}u,v) = \langle \tau u, \gamma v\rangle_{X_o' \times X_o} .$$

<u>Prova</u>: Basta definir

$$\forall\ \varphi \in X_o: \langle \tau u,\varphi\rangle_{X_o' \times X_o} = a(u,R_o\varphi) - (\mathcal{A}u,R_o\varphi) .$$

Como indicamos anteriormente, outros detalhes sobre as fórmulas de Green podem ser encontrados em Aubin [7].

III.3.7 - Lema: Existe uma constante K, tal que para todo $\mu > 0$ existe um subespaço H de X de codimensão majorada por $K\,\mu^{(n-1)/2m}$ e tal que:

$$\forall\, u \in H,\ \forall\, v \in Y:\ |(u,v)_L| \leq \mu^{-1/2} \|u\|_X \|v\|_Y .$$

Prova: Trocando a constante K se necessário, o lema resulta da seguinte asserção:

Para todo inteiro $k = 0,1,\dots,m-1$; para todo $\mu > 0$, existe um subespaço H de $H^{m-k-1/2}(Q')$ de codimensão majorada por $K\,\mu^{(n-1)/2m}$ tal que:

$$\text{(21)} \qquad \forall\, u \in H,\ \forall\, v \in H^{k+1/2}(Q'):\ |(u,v)_{L^2(Q)}| \leq$$

$$\leq \mu^{-1/2}\ \|u\|_{m-k-1/2}\ \|v\|_{k+1/2}$$

onde Q' é o cubo $(0,2\pi)^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Para simplificar, seja $V = H^{m-k-1/2}(Q')$ e $W = H^{k+1/2}(Q')$. W está imerso em $L^2(Q')$ sendo aí denso; podemos então identificar $L^2(Q')$ a um subespaço de W' e (21) equivale a estimativa

$$\text{(21')} \qquad N(\mu; V, W') = K\,\mu^{(n-1)/2m}$$

pois isso significa que:

$$\inf_{E \in \varepsilon_\mu(V,W')} \operatorname{codim}_V E \leq K\,\mu^{(n-1)/2m} \quad ,$$

e isso implica na existência de $H \subset V$ de codimensão majorada por $K\mu^{(n-1)/2m}$; e para mostrar que de (21') obtemos (21) observar, desde que $H \in \varepsilon_\mu(V,W')$, que:

$$u \in H: \quad (u,u)_V - \mu\|u\|^2_{W'} \geq \text{cte}.\ \|u\|^2_{W'}$$

a qual é equivalente a:

$$(21'') \qquad u \in H: \quad \mu^{-1}\|u\|^2_V \geq \left(\frac{\text{cte}}{\mu} + 1\right)\|u\|^2_{W'} \geq \|u\|^2_{W'}\ .$$

Assim, como $H \subset V \subset L \subset L^2 \subset W'$ e $W \subset L^2 \subset W'$, para $\mu \in H$ e $v \in W$ temos:

$$|(u,v)_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2}\ \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}\cdot \text{CTE}\|v\|_W\ .$$

Mas, como L^2 está identificado como subespaço de W', segue (utilizando (21'')):

$$|(u,v)_{L^2}| \leq \|u\|_{W'}\ \text{CTE}\|v\|_W \leq \text{CTE}\ \mu^{-1/2}\|u\|_V\ \|v\|_W =$$

$$= \text{CTE}\ \mu^{-1/2}\|u\|_{m-1-1/2}\ \|v\|_{k+1/2}\ .$$

Conseqüentemente, temos somente de mostrar a expressão (21'). Mas, pelos lemas I.2.1.2.6 e I.2.1.2.7, desde que $V \subset \subset L^2 \subset W'$, temos:

$$N(\mu,V,W') = N(\mu^{1-\frac{2k+1}{2m}};V,L^2) + N(\mu^{\frac{2k+1}{2m}};L^2,W') =$$
$$= N(\mu^{1-\frac{2k+1}{2m}};V,L^2) + N(\mu^{\frac{2k+1}{2m}};W,L^2) \leq K\,\mu^{\frac{2m-2k+1}{2m}\cdot\frac{n-1}{2m-2k+1}} +$$
$$+ K\,\mu^{\frac{2k+1}{2m}\cdot\frac{n-1}{2k+1}} = 2K\,\mu^{\frac{n-1}{2m}}\ .$$

onde, para obtermos a desigualdade, aplicamos duas vezes a estima tiva de El Kolli (ver seção I.2.2) com $V = H^{m-k-1/2}(Q')$ e $W = H^{k+1/2}(Q')$. Com isso concluimos a prova do lema.

III.3.8 - Lema: Existe uma constante C, dependendo somente de c_o, m e M; tal que para todo $\lambda \geq 0$, para todo $\delta \geq 2\lambda$ o espaço:

$$\{u \in Z_\lambda(Q) : (u,\varphi_k)_{L^2(Q)} = 0, \quad \text{para} \quad a(k) \leq \delta\}$$

é de codimensão em $Z_\lambda(Q)$ majorada por:

$$C(1 + \delta^{(n-1)/2m} + \lambda^{(n-1)/2m}) .$$

Prova: Para $u \in Z_\lambda(Q) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{a}}$ e para $v \in H^m(Q)$, temos conforme o lema III.3.6:

(22) $$a(u,v) - \lambda(u,v) = \langle \tau u, \gamma v \rangle_{X_o' \times X_o}$$

e com o lema III.3.4 obtemos para $v \in H^{2m}(Q)$:

$$a(u,v) - (\mathcal{a}v,u) = (\tilde{\tau}v, \tilde{\gamma}u)_L .$$

Agora, conjugando essa expressão e substituindo em (22), temos:

(23) $$(u,(\mathcal{a}-\lambda)v) = \langle \tau u, \gamma u \rangle_{X_o' \times X_o} - (\tilde{\gamma}u, \tilde{\tau}v)_L ;$$

Em particular também temos:

(24) $$(a(k)-\lambda)(u,\varphi_k) = \langle \tau u, \gamma\varphi_k \rangle_{X_o' \times X_o} - (\tilde{\gamma}u, \tau\varphi_k)_L .$$

Precisamos fazer as seguintes:

Definições:

- E o espaço gerado pelos $\gamma\varphi_k$, para $a(k) \leq \delta$.
- F o espaço gerado pelos $\tilde{\tau}\varphi_k$, para $a(k) \leq \delta$.
- G o espaço gerado pelos φ_k , para $a(k) = \lambda$.

Deduzimos de (17) que:

$$\dim G \leq C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m}) \tag{25}$$

(é claro isso, pois (17) estima o número de coordenadas inteiras em Γ_λ), onde C_1 depende somente de c_o , m e M.

Denotando $\tilde{E}$ o espaço gerado pelos $\tilde{\gamma}\varphi_k$ para $a(k) \leq \delta$ temos que $\dim \tilde{E} = \dim E$, ademais $\tilde{\gamma}\varphi_k$ e $\tilde{\tau}\varphi_k$ são combinações lineares de exponenciais à $(n-1)$ variáveis do tipo $\exp(i\hat{k}_p \cdot \hat{x}_p)$ onde:

$$\hat{k}_p = (k_1,\ldots,k_{p-1},k_{p+1},\ldots,k_n) \quad e \quad \hat{x}_p = (x_1,\ldots,x_{p-1}x_{p+1},\ldots,x_n),$$

com $\quad |\hat{k}_p|^{2m} = |k|^{2m} \leq \frac{1}{c_o}\, a(k) \leq \frac{\delta}{c_o}$.

Então, daí deduzimos que:

$$\dim E + \dim F = \dim \tilde{E} + \dim F \leq C_2(1+\delta^{(n-1)/2m}) \tag{26}$$

onde C_2 depende somente de c_o.

Seja Z o subespaço dos $u \in Z_\lambda(Q)$ tal que:

- $\forall\, f \in E$: $\langle \tau u, f\rangle_{X_o' \times X_o} = 0$
- $\forall\, f \in F$: $(\tilde{\gamma} u, f)_L = 0$

$$- \forall\ \varphi \in G: \quad (u,\varphi)_{L^2(Q)} = 0$$

Resulta das expressões (25) e (26) que a codimensão de Z em $Z_{\lambda(Q)}$ é majorada por $C(1+\delta^{(n-1)/2m} + \lambda^{(n-1)/2m})$.

Ademais, resulta da fórmula (24) que:

$$Z \subset \{u \in Z_\lambda(Q): \quad (u,\varphi_k)_{L^2(Q)} = 0, \quad \text{para} \quad a(k) \le \delta\}.$$

O lema segue dessas duas últimas observações.

A Prova da Proposição III.3.1

Seja $\lambda > 0$ dado; seja $\delta \ge 2\lambda$ que vamos escolher mais tarde. Seja Z o espaço:

$$Z = \{u \in Z_\lambda(Q) / \ \forall\ k,\ a(k) \le \delta: (u,\varphi_k)_{L^2(Q)} = 0\}.$$

Seja H um subespaço de X dado pelo lema III.3.7 ($\mathrm{Codim}_X(H) \le K\ \delta^{(n-1)/2m}$), tal que:

(27) $$\forall\ f \in H,\ \forall\ g \in Y: |(f,g)_L| \le \delta^{-1/2} \|f\|_X \ \|g\|_Y \ .$$

Enfim, anotamos $Z' = \{u \in Z: \tilde{\gamma} u \in H\}$.

Então daí resulta juntamente com os lemas III.3.7 e III.3.8 que:

(28) $$\mathrm{Codim}_{Z_\lambda}(Z') \le C(1 + \lambda^{(n-1)/2m} + \delta^{(n-1)/2m})$$

onde C depende somente de c_o , m e M; também utilizamos o fato que:

$$\mathrm{Codim}_{Z_\lambda}(Z') \leq \mathrm{Codim}_{Z}(Z') + \mathrm{Codim}_{Z_\lambda}(Z).$$

Para $u \in Z'$ colocamos $v = \sum_{a(k)>\delta} \frac{(u,\varphi_k)}{a(k)-\lambda}\varphi_k$, de sorte que $v \in H_{\#}^{2m}(Q)$ e $(\mathcal{Q}-\lambda)v = u$.

Ademais temos (aplicando a definição de $\|\cdot\|_{2m,Q}$):

$$\|v\|_{2m,Q}^2 = \gamma \sum_k \frac{(|k|^{2m}+1)^2}{(a(k)-\lambda)^2}|(u,\varphi_k)|^2 \qquad (\gamma > 0)$$

e desde que $(u,\varphi_k) \neq 0$ implica que $a(k) > \delta > 2\lambda$ (lembrar a definição de Z e que $u \in Z' \subset Z$), deduzimos que:

$$(29) \qquad \|v\|_{2m,Q}^2 \leq C_1\|u\|_{o,Q}^2$$

onde C_1 depende somente de c_o. Também temos:

$$(30) \qquad \|v\|_{m,Q}^2 \leq \frac{C_2}{\delta}\|u\|_{o,Q}^2 .$$

Observamos ainda que:

$$(u,v)_{L^2(Q)} = \sum_{a(k)>\delta} \frac{|(u,\varphi_k)|^2}{a(k)-\lambda} \geq 0$$

e com isso deduzimos do lema III.3.6 que:

$$(31) \qquad \mathcal{R}e\langle \tau u, \gamma v\rangle = \mathcal{R}e\, a(u,v) - \mathcal{R}e(\mathcal{Q}u,v) =$$

$$= \mathcal{R}e\, a(u,v) - \lambda(u,v) \leq \mathcal{R}e\, a(u,v) \leq C_3\|u\|_m\,\|v\|_m$$

onde C_3 dependendo somente de M, é a constante da continuidade da forma a sobre H^m.

Finalmente, temos com a fórmula (23) que:

$$\|u\|^2_{o,Q} = (u,u)_{L^2(Q)} = (u,(\mathcal{Q}-\lambda)v)_{L^2(Q)} =$$

$$= \mathcal{R}e\{\langle \tau u, \gamma v\rangle_{X_o \times X_o'} - (\tilde{\gamma}u, \tilde{\tau}v)_L\}$$

e com as expressões (31) e (27) obtemos:

$$\|u\|^2_{o,Q} \leq \mathcal{R}e\langle \tau u, \gamma v\rangle - \mathcal{R}e(\tilde{\gamma}u, \tilde{\tau}v)_L \leq C_3\|u\|_m \|v\|_m - \mathcal{R}e(\tilde{\gamma}u, \tilde{\tau}v)_L \leq$$

$$\leq C_3\|u\|_m \|v\|_m + \delta^{-1/2}\|\tilde{\gamma}u\|_X \|\tilde{\tau}v\|_Y .$$

Utilizando finalmente as expressões (19), (29) e (30) obtemos:

$$\|u\|^2_{o,Q} \leq C_3\|u\|_m \|v\|_m + \delta^{-1/2} \|\tilde{\gamma}u\|_X C_1'\|v\|_{2m} \leq C_3\|u\|_m\|v\|_m +$$

$$+ \delta^{-1/2} \|\tilde{\gamma}u\|_X C_1' C_1^{1/2} \|u\|_o \leq C_3\|u\|_m C_2^{1/2} \delta^{-1/2}\|u\|_o +$$

$$+ \delta^{-1/2}\|\tilde{\gamma}u\|_X C_1''\|u\|_o$$

e com a continuidade de $\tilde{\gamma}$ sobre $H^m(Q)$ concluímos que:

$$\delta\|u\|^2_{o,Q} \leq C_4\|u\|^2_m \quad . \tag{32}$$

Logo, se μ é dado escolhemos $\delta = 2\mu C_4$ e conseguimos de (32) que:

$$u \in Z': 2\mu\|u\|^2_{o,Q} \leq \|u\|^2_m .$$

Assim, temos para $u \in Z'$:

$$\mu\|u\|^2_o \leq \frac{1}{2} \|u\|^2_m = \|u\|^2_m - \frac{1}{2} \|u\|^2_m$$

ou equivalentemente:

$$0 \leq 2\mu\|u\|_o^2 \leq \mu\|u\|_o^2 + \|u\|_m^2 - \frac{1}{2}\|u\|_m^2$$

ou de outro modo:

$$\frac{1}{2}\|u\|_m^2 \leq \mu\|u\|_o^2 + \|u\|_m^2$$

e isto quer dizer que a forma $(\cdot,\cdot)_{m,Q}+\mu$ é fortemente coerciva sobre Z'. Assim, por definição, temos que $Z' \in \mathscr{C}_\mu(Z_\lambda(Q),L^2(Q))$. Então resulta que:

$$N(\mu;Z_\lambda(Q),L^2(Q)) \leq \operatorname{codim}_{Z_\lambda(Q)}(Z')$$

e pela estimativa (28) obtemos:

$$N(\mu,Z_\lambda(Q),L^2(Q)) \leq C(1 + \mu^{(n-1)/2m} + \lambda^{(n-1)/2m})$$

e isto, conforme observações anteriores, conclui a demonstração da proposição III.3.1.

III.4 - LOCALIZAÇÃO

Notações

Seja Ω um aberto qualquer de $\mathbb{R}^n$; seja V um espaço de Hilbert verificando para um inteiro $m > 0$ fixo:

$$(1) \qquad H^m_{comp}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Também anotamos, como Métivier, $\mathcal{P}(V)$ a classe das formas integrodiferenciais:

$$(2) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha,\beta}(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)} \right\} dx$$

que são definidas, hermitianas, contínuas e coercivas sobre V e tais que:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\forall\, \alpha,\ \forall\, \beta:\ a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}} \in L^\infty_{loc}(\Omega) \\ &\forall\, \alpha,\ \forall\, \beta;\ |\alpha| = |\beta| = m:\ a_{\alpha,\beta} \in C^0(\Omega) \end{aligned}$$

onde $L^\infty_{loc}(\Omega)$ designa o espaço das funções mensuráveis localmente limitadas em Ω e $C^0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas em Ω.

Para $a \in \mathcal{P}(V)$ definimos a função:

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha,\beta}(x)\, \xi^{\alpha+\beta} \qquad ((x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n).$$

Como explica Métivier, V contendo $H^m_{comp}(\Omega)$ a coercividade de a sobre V implica a elipticidade de a em Ω e existe uma função $c_o(x)$ estritamente positiva sobre Ω, semicontínua inferiormente e tal que (ver por exemplo Agmon [14]):

$$(4) \qquad \forall\, (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n\colon \quad c_o(x)|\xi|^{2m} \leq a(x,\xi)$$

Para $a \in \mathcal{P}(V)$ designamos por μ_a a medida de densidade:

$$\mu_a'(x) = (2\pi)^{-n}\,\mathrm{med}\{\xi \in \mathbb{R}^n\colon a(x,\xi) < 1\}$$

e pela expressão (4), claramente $\mu_a'(x)$ é finita para todo $x \in \Omega$.

Se ω é um aberto contido em Ω, anotamos $V(\omega)$ (como na seção I.2.3) a classe das restrições à ω dos elementos de V; introduzimos também o espaço:

$$(5) \qquad V_o(\omega) = \{u \in V\colon \forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq m;\ D^\alpha u(x) = 0 \ \text{ para } \ x \in \Omega\backslash\omega\}$$

e temos que $V_o(\omega)$ está injetado em $L^2(\omega)$; observamos também pelo que assumimos em (1) que:

$$(6) \qquad \text{Se} \quad \omega \subset\subset \Omega\colon \quad V_o(\omega) = \overset{m}{K}_o(\omega).$$

Agora, fazemos a seguinte observação:

$$(7) \qquad N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a) = N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\Omega),a)$$

onde $\omega \subset \Omega$. Isso decorre somente das definições.

Partições de Ω

Vamos fazer partições de Ω com o objetivo de obter estimativas para $N(\lambda;V,H,a)$.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e V um espaço de Hilbert verificando a condição (1). Suponhamos que $a \in \mathcal{P}(V)$ e que além disso, a é uma forma fortemente coerciva sobre V, isto é:

$$(8) \qquad \exists\, c_1 > 0,\ \forall\, u \in V:\ c_1 \|u\|_V \leq a(u,u).$$

Sejam Q_k $(k \in A)$ cubos de lado ρ_k, dois a dois disjuntos e tais que $\overline{Q}_k \subset \Omega$. Estamos também supondo que a classe de índices A é finita. Colocamos:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Omega' = \left(\bigcup\limits_{k \in A} Q_k\right) \\ \omega \ = \Omega \setminus \overline{\Omega}' \end{cases}$$

Claramente temos que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Da injeção $V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega)$, facilmente deduzimos com a expressão (8) que existe uma constante c_2 tal que:

$$(10) \qquad \forall\, u \in V:\ c_2 \|u\|^2_{m,\Omega'} \leq a(u,u).$$

Daí deduzimos então pela recíproca da desigualdade de Garding (ver Agmon [14]) que:

$$(11) \qquad \forall\, (x,\xi) \in \Omega' \times \mathbb{R}^n:\ c_2 |\xi|^{2m} \leq a(x,\xi).$$

Introduzimos os seguintes números, os quais terão grande utilidade:

$$(12) \qquad M = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega')}$$

(13) $$\eta = \frac{1}{c_2} \sup_{k\in A} \sup_{|\alpha|=|\beta|=m} \sup_{(x,y)\in Q_k \times Q_k} |a_{\alpha,\beta}(x) - a_{\alpha,\beta}(y)|$$

(14) $$\rho = \operatorname*{Inf}_{k\in A} \rho_k .$$

Daqui em diante vamos supor que $\rho \leq 1$.

Vamos simplificar a exposição, como Métivier, chamando $Y, Y_1, \ldots,$ as constantes numéricas que dependem somente de M, n e m; e $C, C_1, \ldots,$ as constantes que dependem somente de c_1, c_2, M, n e m.

Nosso primeiro objetivo é aproximar a forma a por uma forma $\tilde{a}$ a coeficientes constantes em cada cubo Q_k; então,para isso definimos:

(15) $$\begin{cases} \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = a_{\alpha,\beta}(x); & \text{se } x \in \omega \\ \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = 0; & \text{se } x \in \Omega' \text{ e } |\alpha|+|\beta| < 2m \\ \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{\text{med } Q_k} \displaystyle\int_{Q_k} a_{\alpha,\beta}(y)dy; & \text{se } x\in Q_k \text{ e } |\alpha|=|\beta|=m \end{cases}$$

Claramente, os $\tilde{a}_{\alpha,\beta}$ estão definidos em todo Ω e se $|\alpha|=|\beta|=m$ então os $\tilde{a}_{\alpha,\beta}$ são constantes sobre cada cubo Q_k.

Vamos considerar a forma:

(16) $$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \right\} dx$$

Lemas Sobre Partições de Ω

Temos o seguinte resultado:

III.4.1 - Lema: A forma $\tilde{a}$ é definida, contínua e hermitiana sobre V. Ademais, existem constantes C_1 e γ_1 tais que para todo $\delta \in (0,1)$ e todo $u \in V$ vale:

$$|a(u,u) - \tilde{a}(u,u)| \leq \gamma_1(\eta+\delta)\, a(u,u) + C_1(\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega}$$

Prova: Definimos as formas:

$$b_o(u,v) = \int_{\Omega'} \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha,\beta}-\tilde{a}_{\alpha,\beta})\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \right\} dx$$

$$b_1(u,v) = \int_{\Omega'} \left\{ \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} a_{\alpha,\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \right\} dx.$$

Como $V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega)$ e sendo $\overline{\Omega}'$ compacto então b_o e b_1 são claramente definidas e contínuas sobre V; também são hermitianas pois $a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}}$.

Temos que $a = \tilde{a} + b_o + b_1$ e então é claro que $\tilde{a}$ está bem definida sobre V e também sendo aí contínua e hermitiana.

Agora, lembrando a definição de η e M, temos que:

$$|b_o(u,u)| \leq \gamma_1\, c_2\, \eta|u|^2_{m,\Omega'} \leq \gamma_1\, \eta\, a(u,u)$$

(a constante c_2 surgiu na primeira desigualdade devido a definição de η).

$$|b_1(u,u)| \leq \gamma_2 M \sum_{k\in A} \sum_{\substack{j,j'\leq m \\ j+j'\leq 2m}} |u|_{j,Q_k} |u|_{j',Q_k}$$

Do lema III.3.3 temos para $\epsilon > 0$ e $j = 0,\ldots,m-1$:

$$\forall u \in H^m(Q_k): |u|^2_{j,Q_k} \leq \gamma_o \left\{ \epsilon^{m-j} |u|^2_{m,Q_k} + (\epsilon^{-j} + \rho^{-2j} |u|^2_{o,Q_k} \right\}$$

Tomando $\epsilon = \delta^{\frac{1}{m-j}} / \gamma_o^{\frac{1}{m-j}} > 0$, deduzimos que:

$\forall u \in H^m(Q_k)$, $\forall \delta \in (0,1]$, $\forall j = 0,1,\ldots,m-1$:

$$|u|^2_{j,Q_k} \leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + \gamma_3 [\rho^{-2j} + \delta^{-j/(m-j)}] |u|^2_{o,Q_k}$$

e como conseqüência:

$$|u|^2_{j,Q_k} \leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + \gamma_3 [\rho^{2-2m} + \delta^{1-m}] |u|^2_{o,Q_k} .$$

Então deduzimos que para $j < m$ e $j' < m$ vale a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} |u|_{j,Q_k} |u|_{j',Q_k} &\leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + \gamma_3 [\rho^{2-2m} + \delta^{1-m}] |u|^2_{o,Q_k} \\ &\leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + \gamma_3 [\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m}] |u|^2_{o,Q_k} \end{aligned}$$

desde que estamos supondo $\rho \in (0,1]$ e $\delta \in (0,1)$. Para $j < m$ temos:

$$|u|_{j,Q_k} |u|_{m,Q_k} \leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + \gamma_4 [\delta^{-1} \rho^{2-2m} + \delta^{1-2m}] |u|^2_{o,Q_k}$$

Agora, observando que $\delta^{-1} \rho^{2-2m} \leq \delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}$, obtemos:

$$|u|_{j,Q_k} |u|_{m,Q_k} \leq \delta |u|^2_{m,Q_k} + 2\gamma_4 [\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}] |u|^2_{o,Q_k} .$$

Utilizando esses resultados, finalmente vamos calcular:

$$|a(u,u) - \tilde{a}(u,u)| \leq |b_o(u,u)| + |b_1(u,u)| \leq$$

$$\leq \Upsilon_1 \eta a(u,u) + \Upsilon_2 M \sum_{k\in A} \sum_{\substack{j+j'<2m \\ j,j\leq m}} |u|_{j,Q_k} |u|_{j',Q_k} \leq$$

$$\leq \Upsilon_1 \eta a(u,u) + \Upsilon_2 M \sum_{k\in A} \Big\{ const_1(m)\cdot \delta |u|^2_{m,Q_k} +$$

$$+ const_2(\Upsilon_3,\Upsilon_4,m)\cdot(\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m})|u|^2_{o,Q_k}\Big\} \leq \Upsilon_1 \eta a(u,u) +$$

$$+ C_1(\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega} + const_3(\Upsilon_2, M, m)\cdot \delta |u|^2_{m,\Omega}$$

e trocando a constante Υ_1 , se necessário, o lema segue.

Do lema III.4.1 temos que:

$$(*) \qquad \forall\, u \in V:\ a(u,u) - \tilde{a}(u,u) \leq$$

$$\leq \Upsilon_1(\eta+\delta)\ a(u,u) + C_1(\delta^{1-2m}+\rho^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega}$$

e daí deduzimos que para $\Upsilon_1(\eta+\delta) < 1$:

$$\forall\, u \in V:\ \ a(u,u) \leq \tilde{a}(u,u) + C_1(\delta^{1-2m}+\rho^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega}\ .$$

Como estamos supondo a fortemente coerciva sobre V, dessa expressão obtemos a coercividade de $\tilde{a}$ (se $\Upsilon_1(\eta+\delta) < 1$) . Em particular se $\Upsilon_1\ \eta < 1/4$, tomando $\delta = \frac{1}{4\Upsilon_1}$ temos que $\Upsilon_1(\eta+\delta) < 1/2$ e da expressão (*) obtemos:

$$(17) \qquad \forall\, u \in V:\ a(u,u) \leq 2[\tilde{a}(u,u) + \tau\|u\|^2_{o,\Omega}]$$

onde $\tau = C_1[\rho^{1-2m} + (\frac{1}{4\gamma_1})^{1-2m}] = C_1[\rho^{1-2m} + \gamma_1'] .$

Agora vamos mostrar o seguinte:

<u>III.4.2 - Lema</u>: Suponhamos que $\gamma_1 \eta < 1/4$; então para todo $\delta \in (0,1/4\ \gamma_1)$ temos as estimativas:

$$N(\lambda';V,L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \leq N(\lambda'';V,L^2(\Omega),\tilde{a})$$

com

$$\lambda' = \lambda[1 - \gamma_1(\eta+\delta)] - C_1[\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m}]$$

$$\lambda'' = [1 + \gamma_1(\eta+\delta)]\cdot[\lambda + C_1(\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m})]$$

<u>Prova</u>: Da hipótese de $\gamma_1\eta < 1/4$ temos que $\tilde{a}$ é coerciva sobre V, pela observação anterior. Assim, podemos calcular $N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a})$.

Do lema anterior temos:

$$- C_1(\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega} - \gamma_1(\eta+\delta)\ a(u,u) \leq a(u,u) - \tilde{a}(u,u) \leq$$
$$\leq \gamma_1(\eta+\delta)\ a(u,u) + C_1(\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m})\|u\|^2_{o,\Omega}$$

e com isso obtemos:

$$— \quad \tilde{a}(u,u) + C_1[\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}]\|u\|^2_{o,\Omega} \geq [1 - \gamma_1(\eta+\delta)]\ a(u,u)$$

$$— \quad [1 + \gamma_1(\eta+\delta)]\ a(u,u) \geq \tilde{a}(u,u) - C_1[\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}]\|u\|^2_{o,\Omega} \geq$$
$$\geq \tilde{a}(u,u) - [1+\gamma_1(\eta+\delta)]\ C_1[\delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}]\|u\|^2_{o,\Omega} .$$

Aplicando as propriedades I.2.1.2.2 das funções $N(\lambda;\cdot)$, obtemos daí que:

$$N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \geq N(\lambda[1-\gamma_1(\eta+\delta)] - C_1[\delta^{1-2m}+\rho^{1-2m}];\ V,L^2(\Omega),\tilde{a})$$

$$N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \leq N([1+\gamma_1(\eta+\delta)][\lambda+C_1(\delta^{1-2m}+\rho^{1-2m})];\ V,L^2(\Omega),\tilde{a})$$

e portanto o lema está estabelecido.

Também precisamos observar o:

<u>III.4.3 - Lema</u>: Se $\gamma_1\ \eta < 1$ então temos:

$$(1-\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde{a}}(\Omega') \leq \mu_a(\Omega') \leq (1+\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde{a}}(\Omega')$$

<u>Prova</u>: Para $x \in \Omega'$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos, desde que $x \in Q_k$ para algum $k \in A$:

$$\left|\tilde{a}(x,\xi)-a(x,\xi)\right| = \left| \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left\{ \frac{1}{\text{med } Q_k} \int_{Q_k} a_{\alpha,\beta}(y)dy - a_{\alpha,\beta}(x) \right\} \xi^{\alpha+\beta} \right|$$

$$= \left| \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left\{ \frac{1}{\text{med } Q_k} \int_{Q_k} [a_{\alpha,\beta}(y) - a_{\alpha,\beta}(x)]dy \right\} \xi^{\alpha+\beta} \right| \leq$$

$$\leq c_2\ \eta\ \gamma_1|\xi|^{2m} \leq \gamma_1\ \eta\ a(x,\xi).$$

onde γ_1 é a mesma constante calculada no lema III.4.1. A última desigualdade é devido a expressão (11).

Assim, para $x \in \Omega'$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$(1-\gamma_1\ \eta)\ a(x,\xi) \leq \tilde{a}(x,\xi) \leq (1+\gamma_1\eta)\ a(x,\xi)$$

e daí obtemos que:

$$(2\pi)^{-n} \int_{(1-\gamma_1\eta)a(x,\xi)\leq 1} d\,\xi \geq \mu'_{\tilde{a}}(x) \geq (2\pi)^{-n} \int_{(1+\gamma_1\eta)a(x,\xi)\leq 1} d\,\xi \quad .$$

Fazendo uma mudança de variável segue:

$$(1-\gamma_1\ \eta)^{-n/2m}\ \mu'_a(x) \geq \mu'_{\tilde{a}}(x) \geq (1+\gamma_1\eta)^{-n/2m}\ \mu'_a(x)\ .$$

Equivalentemente temos:

$$(1-\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu'_{\tilde{a}}(x) \leq \mu'_a(x) \leq (1+\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu'_{\tilde{a}}(x)\ .$$

Finalmente, integrando sobre Ω', temos:

$$(1-\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde{a}}(\Omega') \leq \mu_a(\Omega') \leq (1+\gamma_1\ \eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ .$$

Portanto o lema está estabelecido.

Observações:

Vamos supor agora, para tudo que segue nesta seção sobre partições de Ω, que $\gamma_1\ \eta < 1/4$. Assim que $\tilde{a}$ é coerciva sobre V e também a expressão (17) é válida.

Anotamos $W_o = H_o^m(\Omega')$ e prolongando as funções de $H_o^m(Q_k)$ por 0 (zero) em $\Omega' \setminus Q_k$, identificamos W_o com o espaço $\bigoplus_{k\in A} H_o^m(Q_k)$, onde a soma é ortogonal por $\tilde{a}$ e pelo produto escalar de L^2.

Podemos também identificar W_o à um subespaço de V, temos:

$$W_o \oplus V_o(\omega) \subset V$$

onde a soma é também ortogonal por $\tilde{a}$ e pelo produto escalar de L^2.

Temos o seguinte

<u>III.4.4 - Lema</u>: Existe uma constante C_2 dependendo somente de M e de c_2 tal que para todo $\lambda \geq 0$ vale:

$$|N(\lambda;W_o,L^2(\Omega'),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \leq C_2 \sum_{k\in A} \left\{1+\rho_k^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}\right\}$$

<u>Prova</u>: Deduzimos das expressões (15) e (11) que:

$$\forall\, k \in A,\ \forall\, (x,\xi) \in Q_k \times \mathbb{R}^n:\ c_2|\xi|^{2m} \leq \tilde{a}(x,\xi).$$

Com isso, claramente temos que sobre cada cubo Q_k a forma $\tilde{a}$ é do tipo considerado na seção III.3 anterior. Podemos então aplicar a proposição III.3.1.

Primeiramente aplicamos a proposição I.2.1.2.11, isto é, temos:

$$N(\lambda;W_o,L^2(\Omega'),\tilde{a}) = \sum_{k\in A} N(\lambda;H_o^m(Q_k),L^2(Q_k),\tilde{a}).$$

Como $\mu_{\tilde{a}}(\Omega') = \sum_{k\in A} \mu_{\tilde{a}}(Q_k)$, segue que:

$$|N(\lambda;W_o,L^2(\Omega'),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \leq \sum_{k\in A} |N(\lambda;H_o^m(Q_k),L^2(Q_k),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(Q_k)\,\lambda^{n/2m}|.$$

Finalmente, aplicando a estimativa (ii) da proposição III.3.1 o resultado do lema está demonstrado.

Introduzimos para $\lambda \geq 0$ o espaço:

$$Z_\lambda = \{u \in V/\forall\, v \in W_o:\ \tilde{a}(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)}\}\ .$$

Vamos precisar do:

III.4.5 - Lema: Existem constantes C_3 e C_4, que dependem somente de c_1, c_2 e M tais que para todo $\lambda \geq 0$ temos:

$$N(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega), \tilde{a}) \leq$$

$$\leq N((\lambda+\tau)C_3;\ V, L^2(\omega)) + C_4 \sum_{k\in A} \{1+\rho_k^{n-1}(\lambda+\tau)^{(n-1)/2m}\}$$

onde $\tau = C_1[\rho^{1-2m} + Y_1']$ foi definido em (17). A notação $N(\mu; V, L^2(\omega))$ é aquela comentada na seção I.2.3 sobre estimativas para os espaços K_o^m e H^m.

Prova: Para $k \in A$ anotamos:

$$Z_\lambda(Q_k) = \{u \in H^m(Q_k) \,/\, \forall\, v \in H_o^m(Q_k):\ \tilde{a}(u,v) = \lambda(u,v)\}\ .$$

Claramente, temos para $u \in Z_\lambda$ que $u|_{Q_k} \in Z_\lambda(Q_k)$.

Fixamos $\mu \geq 0$; para todo $k \in A$, considerando o número $N(\mu; Z_\lambda(Q_k), L^2(Q_k))$, existe um subespaço E_k de $Z_\lambda(Q_k)$ de codimensão $N(\mu; Z_\lambda(Q_k), L^2(Q_k))$ tal que:

$$(18) \qquad \forall\, f \in E_k:\ \mu\|f\|^2_{o,Q_k} \leq \|f\|^2_{m,Q_k}$$

(desde que a forma $(.\ .)_{m,Q_k} - \mu$ é fortemente coerciva sobre E_k, pelo lema I.2.1.2.3).

Ademais também temos, do mesmo modo, que existe um subespaço E_o de codimensão $N(\mu; V, L^2(\Omega))$ em V tal que:

$$\forall\, u \in E_o:\ \mu\|u\|^2_{o,\Omega} \leq \|u\|^2_V$$

e desde que $\omega = \Omega\setminus\overline{\Omega}'$, temos:

$$(19) \qquad \forall\, u \in E_o:\ \mu\|u\|^2_{o,\omega} \leq \|u\|^2_V\ .$$

Seja então o subespaço:

$$F = \{u \in Z_\lambda : u \in E_o \quad e \quad u|_{Q_k} \in E_k \quad \text{para todo} \quad k \in A\}$$

Temos que F é um subespaço de codimesão finita em Z_λ e:

$$(20) \qquad \operatorname{codim}_{Z(\lambda)} F \le N(\mu; V, L^2(\omega)) + \sum_{k \in A} N(\mu; Z_\lambda(Q_k), L^2(Q_k)).$$

Agora, para $u \in F$ temos por (19) que

$$(21) \qquad \mu \|u\|^2_{o,\omega} \le \|u\|^2_V$$

e para $k \in A$, aplicamos (18) a $u|_{Q_k}$ obtendo:

$$(22) \qquad \mu \|u|_{Q_k}\|^2_{o,Q_k} \le \|u|_{Q_k}\|^2_{m,Q_k} \quad .$$

De (21) obtemos utilizando (8) que:

$$\mu \|u\|^2_{o,\omega} \le \frac{1}{c_1} \; a(u,u) \; .$$

De (22) (somando em k) obtemos:

$$\mu \|u\|^2_{o,\Omega'} \le \|u\|^2_{m,\Omega'}$$

e daí aplicando (10), segue que:

$$\mu \|u\|^2_{o,\Omega'} \le \frac{1}{c_2} \, a(u,u) \; .$$

Concluímos então que:

$$\mu \|u\|^2_{o,\Omega} \le (\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}) \; a(u,u)$$

e utilizando a fórmula (17), deduzimos que:

$$\forall\ u \in F:\ \mu\|u\|^2_{o,\Omega} \leq 2(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2})[\tilde{a}(u,u) + \tau\|u\|^2_{o,\Omega}] \ .$$

Agora, tomamos C_3 uma constante tal que $C_3 > 2\ \frac{c_1+c_2}{c_1c_2}$ e temos:

$$\mu\|u\|^2_{o,\Omega} \leq C_3\ \tilde{a}(u,u) + 2\ \frac{c_1+c_2}{c_1c_2}\ \tau\|u\|^2_{o,\Omega} =$$

$$= C_3\ \tilde{a}(u,u) + (2\ \frac{c_1+c_2}{c_1c_2} - C_3)\ \tau\|u\|^2_{o,\Omega} + C_3\tau\|u\|^2_{o,\Omega}$$

e assim obtemos que:

$$\frac{(C_3 - 2\ \frac{c_1+c_2}{c_1c_2})}{C_3}\ \tau\|u\|^2_{o,\Omega} \leq \tilde{a}(u,u) - (\frac{\mu}{C_3} - \tau)\|u\|^2_{o,\Omega}$$

Isso quer dizer, aplicando o lema I.2.1.2.3, que $F \in \varepsilon_{\frac{\mu}{C_3}-\tau}(Z_\lambda, L^2(\Omega),\tilde{a})$; assim temos:

$$N(\frac{\mu}{C_3} - \tau;\ Z_\lambda, L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq \mathrm{codim}_{Z_\lambda}(F).$$

Agora, aplicando a fórmula (20), temos a seguinte expressão:

$$N(\frac{\mu}{C_3} - \tau;\ Z_\lambda, L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq N(\mu;V,L^2(\omega)) + \sum_{k\in A} N(\mu;Z_\lambda(Q_k),L^2(Q_k)).$$

Como tudo acima foi feito para $\mu \geq 0$ fixado arbitrariamente, dado $\lambda \geq 0$ tomamos μ tal que $\lambda = \frac{\mu}{C_3} - \tau$ e obtemos que:

$$N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq N((\lambda+\tau)C_3;V,\ L^2(\omega)) +$$
$$+ \sum_{k\in A} N((\lambda+\tau)C_3;Z_\lambda(Q_k),\ L^2(Q_k)).$$

Finalmente, utilizando a estimativa (i) da proposição

III.3.1 e majorando o termo $\lambda^{(n-1)/2m}$ por $(\lambda+\tau)^{(n-1)/2m}$ o resultado segue.

Assim, concluimos a prova do lema III.4.5 e encerramos a presente seção.

III.5 - A DISTRIBUIÇÃO DE AUTOVALORES PARA O PROBLEMA VARIACIONAL $(V,L^2(\Omega),a)$.

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$; seja V um subespaço fechado de $H^m(\Omega)$ contendo $H_o^m(\Omega)$.

Para $s \in (0,1]$ indicamos por $\mathcal{P}_s(V)$ a classe das formas hermitianas, contínuas e coercivas sobre V; para $a \in \mathcal{P}_s(V)$ temos:

(1) $$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha,\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \right\} dx$$

(2) $$\forall\ \alpha,\beta:\ a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}} \in L^\infty(\Omega) \qquad (\Omega \text{ limitado})$$

(3) $$\exists\ K;\ \forall\ (\alpha,\beta),\ |\alpha|=|\beta|=m;\ \forall\ (x,y) \in \Omega\times\Omega:$$
$$|a_{\alpha,\beta}(x) - a_{\alpha,\beta}(y)| \le K[d_\Omega(x,y)]^s$$

onde $d_\Omega(x,y)$ é a distância de x à y em Ω, isto é: $d_\Omega(x,y)$ é o mínimo de 1 e do limite inferior dos comprimentos dos caminhos de classe C^1 ligando x à y em Ω. Assim, estamos supondo que os coeficientes $a_{\alpha,\beta}$ são holderianos.

Aqui também vamos supor que a fronteira de Ω tem medida $(n-1)$-dimensional finita. Para isso, lembramos a definição dada na seção III.1. Para $\varepsilon > 0$ temos:

(4) $$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\};\quad \Omega_\varepsilon = \Omega \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$$

e fazemos uma das seguintes hipóteses:

(h.1) $\qquad V = \overset{m}{H_o}(\Omega) \quad e \quad \lim\limits_{\substack{> \\ \varepsilon\to 0}} \sup \varepsilon^{-1} \text{ med } \Omega_\varepsilon < +\infty$

(h.2) $\qquad \Omega$ possui a condição de regularidade de Métivier (C') e:

$$\lim_{\substack{> \\ \varepsilon\to 0}} \sup \varepsilon^{-1} \text{ med } \tilde{\Omega}_\varepsilon < +\infty$$

Com isso, estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte:

III.5.1 - Lema: Sob uma das hipóteses (h.1) ou (h.2) existem constantes λ_o, ε_o, L tais que:

$$\forall\ \varepsilon < \varepsilon_o\ ,\ \forall\ \lambda \geq \lambda_o\ \varepsilon^{-2m}:\ N(\lambda, V, L^2(\Omega_\varepsilon)) \leq L\ \varepsilon\ \lambda^{n/2m}$$

Prova: Primeiramente, utilizamos a hipótese (h.1) e obtemos que:

$$\exists\ \varepsilon_o,\ \forall\ \varepsilon < \varepsilon_o:\ \text{med } \Omega_\varepsilon \leq \varepsilon \text{ const.}$$

(onde const. indica uma constante).

Agora, aplicando a proposição I.2.3.1 com $\omega = \Omega_\varepsilon$ e tomando λ_o tal que $\text{med}(\Omega_\varepsilon)_{\lambda_o^{-1/2m}.\varepsilon} \leq 2 \text{ med } \Omega_\varepsilon$, temos que:

$$\forall\ \varepsilon < \varepsilon_o,\ \forall\ \lambda \geq \lambda_o\ \varepsilon^{-2m}:\ N(\lambda; V, L^2(\Omega_\varepsilon)) \leq \Upsilon(n,m)\ 2\text{med } \Omega_\varepsilon\ \lambda^{n/2m} \leq$$

$$\leq \Upsilon(n,m)\ 2\varepsilon \text{ const. } \lambda^{n/2m}$$

onde também utilizamos que $V = \overset{m}{H_o}(\Omega) \subset \overset{m}{K_o}(\Omega)$, e que $\text{med}(\Omega_\varepsilon)_{\lambda^{-1/2m}} \leq \text{med}(\Omega_\varepsilon)_{\lambda_o^{-1/2m}.\varepsilon}$ para $\lambda \geq \lambda_o\ \varepsilon^{-2m}$. Assim, o lema está provado para a hipótese (h.1).

Por outro lado, suponhamos que temos (h.2). Daí temos:

$$\exists\, \varepsilon_o > 0,\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_o:\ \text{med}\ \tilde{\Omega}_\varepsilon \le \varepsilon\cdot\text{const}.$$

e que, pela proposição I.2.3.3, existem constantes λ_o, K e C tais que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \lambda \ge \lambda_o:\ N(\lambda;V,L^2(\Omega_\varepsilon)) \le C\ \text{med}\ \Omega_{\varepsilon,K\lambda^{-1/2m}}\ \lambda^{n/2m}$$

desde que $V \subset H^m(\Omega)$ e onde $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{dist}(x,\Omega_\varepsilon) < \delta\}$, conforme definições na seção I.2.3.

Seja $\lambda_o' = \lambda_o\, \varepsilon_o^{2m}$. Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, se $\lambda \ge \lambda_o'\, \varepsilon^{-2m}$ temos:

$$\lambda \ge \lambda_o'\, \varepsilon^{-2m} = \lambda_o\, \varepsilon_o^{2m}\, \varepsilon^{-2m} = \lambda_o \left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)^{2m} > \lambda_o .$$

Assim vale:

$$\forall\, \varepsilon < \varepsilon_o,\ \forall\, \lambda \ge \lambda_o'\, \varepsilon^{-2m}:\ N(\lambda;V,L^2(\Omega_\varepsilon)) \le C\ \text{med}(\Omega_{\varepsilon,K\lambda^{-1/2m}})\,\lambda^{n/2m}$$

$$\le C\ \text{med}(\Omega_{\varepsilon,K(\lambda_o')^{-1/2m}\,\varepsilon})\,\lambda^{n/2m} .$$

Aumentando λ_o', se necessário, para que:

$$\text{med}(\Omega_{\varepsilon,K(\lambda_o')^{-1/2m}\,\varepsilon}) \le \text{med}\ \tilde{\Omega}_\varepsilon$$

obtemos então:

$$\forall\, \varepsilon < \varepsilon_o,\ \forall\, \lambda \ge \lambda_o'\, \varepsilon^{-2m}:\ N(\lambda;V,L^2(\Omega_\varepsilon)) \le \text{constante}\cdot\varepsilon\ \lambda^{n/2m}$$

isso conclui a prova deste lema.

Agora, finalmente estamos em condições de enunciar o teorema sobre a distribuição de autovalores para o problema variacional $(V, L^2(\Omega), a)$. A demonstração que fazemos segue o método de Métivier, mas com maiores detalhes.

Em resumo, temos para a distribuição de autovalores o seguinte:

<u>III.5.2 - Teorema</u>: Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e V um subespaço fechado de $H^m(\Omega)$ contendo $H_o^m(\Omega)$; também supomos que uma das hipóteses (h.1) ou (h.2) é satisfeita.

Seja a uma forma de $\mathcal{P}_s(V)$ para algum $s \in (0,1]$. Denotando $N(\lambda)$ o número de autovalores menores ou iguais à λ, do operador associado com a tripla variacional $(V, L^2(\Omega), a)$; temos então:

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{\frac{n}{2m}} + O\left(\lambda^{\frac{n-\theta}{2m}}\right)$$

com $\theta = \frac{s}{s+1}$.

<u>Observações</u>:

No caso em que Ω é um cubo e os coeficientes $a_{\alpha,\beta}$ para $|\alpha|=|\beta|=m$ são constantes, resulta da proposição III.3.1 que:

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{\frac{n}{2m}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2m}}\right)$$

Se os coeficientes $a_{\alpha,\beta}$ para $|\alpha|=|\beta|=m$ são constantes sobre cada componente conexa de Ω, Métivier mostra que a estimativa ótima é:

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\,\lambda^{\frac{n}{2m}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2m}}\ \mathrm{Log}\ \lambda\right)$$

Prova do Teorema III.5.2

Antes de começarmos a demonstração propriamente dita, fazemos algumas observações. Primeiramente, sem perda de generalidade, vamos supor que a é fortemente coerciva sobre V:

(5) $$\exists\ c_2' > 0,\ \forall\ u \in V\colon\ a(u,u) \geq c_2' \|u\|^2_{m,\Omega}$$

(Se a for somente coerciva, por definição, existe uma constante μ_o tal que $a + \mu_o$ é uma forma fortemente coerciva. O resultado para essa forma será, a menos de uma translação no espectro, de valor μ_o, o mesmo resultado para a forma a).

Precisamos também definir:

(6) $$M' = \sup_{0 \leq |\alpha|, |\beta| \leq m} \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Agora consideramos uma partição de Ω, como indicamos na seção III.2, em cubos dois a dois disjuntos e com comprimentos de lados iguais.

Assim, consideramos para $\rho > 0$ dado e para $k \in \mathbb{Z}^n$, o cubo Q_k com centro em ρ_k e com comprimento de lado ρ; seja A a classe dos índices k tais que $\overline{Q}_k \subset \Omega$; colocamos $\Omega' = \bigcup_{k \in A} Q_k$ e $\omega = \Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

Então, podemos verificar que: $\omega \subset \Omega_\epsilon$ para $\epsilon = \sqrt{n+1}\ \rho$.

Seja $\rho_o > 0$ tal que $\sqrt{n+1}\,\rho_o < \varepsilon_o$ (ε_o do lema III.5.2).

Retomamos as notações da seção III.4; observando a fórmula III.4(10) e a fórmula (5) desta seção, vemos que podemos minorar a constante c_2 da primeira fórmula pela constante c_2' da segunda fórmula. Assim, lembrando a definição de η [fórmula III.4(13)], temos para $a \in \mathcal{P}_s(V)$:

$$\eta \leq \frac{K}{c_2'} (\sqrt{n}\ \rho)^s \tag{7}$$

desde que $\sqrt{n}\,\rho$ é o comprimento da diagonal do cubo Q_k de lado ρ.

Definimos a forma $\tilde{a}$ por III.4(16).

Agora, aplicando a proposição I.2.1.2.10 a tripla $(V, L^2(\Omega'), \tilde{a})$ e ao subespaço $V_o = H_o^m(\Omega') \subset V$; temos para:

$$Z_\lambda = \{u \in V:\ (\tilde{a}-\lambda)(u,v) = 0\ \ \forall\ v \in H_o^m(\Omega')\}$$

que a seguinte fórmula é válida:

$$N(\lambda; V, L^2(\Omega'), \tilde{a}) = N(\lambda; H_o^m(\Omega'), L^2(\Omega'), \tilde{a}) + N(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega'), \tilde{a}) - \\ - \dim(H_o^m(\Omega') \cap Z_\lambda).$$

Desde que $\Omega' \subset \Omega$ implica, como observamos na seção I.2.3, $N(\lambda; V, L^2(\Omega'), \tilde{a}) \leq N(\lambda; V, L^2(\Omega), \tilde{a})$; obtemos da expressão anterior que:

$$|N(\lambda; V, L^2(\Omega), \tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ \lambda^{n/2m}| \leq \dim(H_o^m(\Omega') \cap Z_\lambda) + \\ + |N(\lambda; H_o^m(\Omega'), L^2(\Omega'), \tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ \lambda^{n/2m}| + N(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega'), \tilde{a}).$$

Aplicando o lema III.4.4 segue que:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \le C_2 \text{ card } A\{1+\rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}\} +$$

$$+ N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega'),\tilde{a}) + \dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$$

e novamente, do fato que $\Omega' \subset \Omega$, podemos majorar $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega'),\tilde{a})$ por $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a})$ e daí aplicando o lema III.4.5 deduzimos que:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \le C_2 \text{ card } A\{1+\rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}\} +$$

$$+ N((\lambda+\tau)C_3;V,L^2(\omega)) + C_4 \text{ card } A\{1+\rho^{n-1}(\lambda+\tau)^{(n-1)/2m}\} +$$

$$+ \dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda).$$

Vamos agora supor que $\rho\lambda^{1/2m} \longrightarrow \infty$ com $\lambda \to \infty$. Mais tarde, quando escolhermos ρ, mostraremos que esta hipótese é satisfeita. Assim, na última expressão podemos eliminar a constante 1 nos dois termos entre chaves. De qualquer modo, essa eliminação que corresponde ao termo (C_2+C_4) card A poderia ser majorada por $\rho\lambda^{n/2m}$, devido ao fato que card $A \le (\text{med } \Omega)\rho^{-n}$ e um termo dessa ordem surge nas estimativas quando majorarmos $N((\lambda+\tau)C_3,V,L^2(\omega))$ através do lema III.5.1.

Assim, do fato que $\omega \subset \Omega_\varepsilon$ $(\varepsilon = \sqrt{n+1}\,\rho)$, temos que $N((\lambda+\tau)C_3;V,L^2(\omega)) \le N((\lambda+\tau)C_3;V,L^2(\Omega_\varepsilon))$.

Substituindo isso na fórmula anterior, fazendo também a eliminação acima referida; para $\rho < \rho_o$ [ρ_o definido no começo desta demonstração] tomando $\lambda \ge \lambda_1\,\rho^{-2m}$ com $\lambda_1 = \lambda_o(\sqrt{n+1})^{-2m}$, podemos finalmente aplicar o lema III.5.1 e obtermos:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ \lambda^{n/2m}| \le C_2 \text{ card } A\ \rho^{n-1}\ \lambda^{(n-1)/2m} +$$

$$+ C_4 \text{ card } A\ \rho^{n-1}(\lambda+\tau)^{(n-1)/2m} + L\ \varepsilon[(\lambda+\tau)C_3]^{n/2m} +$$

$$+ \dim\ (\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$$

onde $\tau = C_1(\rho^{1-2m} + Y_1')$ foi definido em III.4(17). Desde que estamos supondo $\lambda \ge \lambda_1\ \rho^{-2m}$, podemos deduzir que $\tau \le C_1'\ \lambda$ e então obtemos:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ \lambda^{n/2m}| \le C_2 \text{ card } A\ \rho^{n-1}\ \lambda^{(n-1)/2m} +$$

$$+ C_4 \text{ card } A\ \rho^{n-1}[(1+C_1')\lambda]^{(n-1)/2m} + L\ \sqrt{n+1}\ \rho[(1+C_1')\ C_3\lambda]^{n/2m} +$$

$$+ \dim\ (\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda) = [C_2+C_4(1+C_1')^{(n-1)/2m}] \text{ card } A\ \rho^{n-1}\ \lambda^{(n-1)/2m} +$$

$$+ L\ \sqrt{n+1}\ [(1+C_1')C_3]^{n/2m}\ \rho\ \lambda^{n/2m} + \dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$$

Agora, vamos estimar $\dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$. Se $u \in \overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda$ então $u \in \overset{m}{H_o}(\Omega') \subset \overset{m}{H_\#}(\Omega')$; portanto, $u = \sum_\ell u_\ell \exp(i\ell.x)$ onde u_ℓ $(\ell \in \mathbb{Z}^n)$ são os coeficientes de Fourier de u. Como u também está em Z_λ, vale:

$$(\lambda-\tilde{a})(u,v) = 0 \quad \forall\ v \in \overset{m}{H_o}(\Omega')$$

Em particular temos:

$$0 = (\lambda-\tilde{a})(u,u) = \sum_\ell (\lambda-\tilde{a})(u_\ell \exp(i\ell\cdot x),\ u_\ell \exp(i\ell.x)) =$$

$$= \sum_\ell (\lambda-\tilde{a}(\ell))|u_\ell|^2 .$$

Como queremos estimar a dimensão de $\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda$ precisamos que $u_\ell \neq 0$ (para que tenhamos contribuição no desenvolvimento da série de Fourier de u). Assim deduzimos que:

$$\dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda) = \mathrm{card}\{\ell \in \mathbb{Z}^n : \tilde{a}(\ell) = \lambda\}.$$

Concluimos então que $\dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$ é o número de coordenadas inteiras que estão sobre a superfície do elipsóide:

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : \tilde{a}(\xi) \le \lambda\} .$$

Na seção I.1.5 fizemos esse cálculo para $\Omega = (0,2\pi)^n$, o cubo de lado 2π. Essa majoração é da ordem $C(1+\lambda^{(n+1)/2m})$ mas, observando as reduções que foram efetuadas na prova da proposição III.3.1 concluimos que:

$$\mathrm{card}\{\ell \in \mathbb{Z}^n : \tilde{a}(\ell) = \lambda\} \le C(1+\rho^{n-1}\lambda^{(n-1)/2m})$$

para a forma $\tilde{a}$ definida sobre o cubo $Q_k (k \in A)$ de lado ρ.

Como $\overset{m}{H_o}(\Omega')[\Omega' = \bigcup_{k\in A} Q_k]$ pode ser identificado com $\bigoplus_{k\in A} \overset{m}{H_o}(Q_k)$, podemos então deduzir que:

$$\dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda) = \mathrm{card}\{\ell \in \mathbb{Z}^n : \tilde{a}(\ell) = \lambda\} \le$$

$$\le \sum_{k\in A} C\{1+\rho^{n-1}\lambda^{(n-1)/2m}\} = C\cdot \mathrm{card}\, A\{1+\rho^{n-1}\lambda^{(n-1)/2m}\}.$$

Esse fato pode ser provado rigorosamente, seguindo o mesmo processo utilizado na demonstração do lema III.4.5.

Novamente, fazemos a mesma eliminação que antes do termo correspondente a constante 1 na estimativa para a $\dim(\overset{m}{H_o}(\Omega') \cap Z_\lambda)$ [na verdade, essa constante é desnecessária para $\lambda > 0$ pois ela foi introduzida na seção I.1.5 para que no caso $\lambda = 0$ a estimativa continuasse válida].

Com isso, substituindo essa estimativa do cálculo da di mensão de $H_o^m(\Omega') \cap Z_\lambda$ na nossa fórmula principal; obtemos:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \leq$$

$$\leq [C_2+C_4(1+C_1')^{(n-1)/2m} + C]\ \text{card}\ A\ \rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m} +$$

$$+ L\sqrt{n+1}\ [(1+C_1')C_3]^{n/2m}\ \rho\,\lambda^{n/2m}\ .$$

Assim, obtemos a existência de constantes C_5, ρ_o e λ_1 independentes de λ e ρ tais que:

$$(8)\qquad \begin{cases} \forall\rho < \rho_o\ ,\ \forall\lambda \geq \lambda_1\,\rho^{-2m}: \\ |N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \leq \\ \leq C_5[\rho\,\lambda^{n/2m} + \text{card}\ A\ \rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}]\ . \end{cases}$$

Observando que $|\mu_{\tilde{a}}(\Omega') - \mu_{\tilde{a}}(\Omega)| = |\int_\omega \mu_{\tilde{a}}(x)dx|$ e do fato que $\Omega\setminus\overline{\Omega}' = \omega \subset \Omega_\varepsilon$ concluimos também

$$(9)\qquad |\mu_{\tilde{a}}(\Omega') - \mu_{\tilde{a}}(\Omega)| \leq C_6\ \text{med}\ \Omega_\varepsilon \leq C_7\,\rho\ .$$

Agora, aplicando o lema III.4.2 com $\delta = \rho$, temos:

$$N(\lambda';V,L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \leq N(\lambda'';V,L^2(\Omega),\tilde{a})$$

com:

$$\lambda' = \lambda[1-\gamma_1(\eta+\rho)] - 2C_1\,\rho^{1-2m}$$

$$\lambda'' = [1+\gamma_1(\eta+\rho)]\,[\lambda+2C_1\,\rho^{1-2m}]$$

e aplicando a fórmula (8) obtemos que:

(10)

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_{\tilde a}(\Omega')(\lambda')^{n/2m} - C_5\{\rho(\lambda')^{n/2m} + \text{card } A\ \rho^{n-1}(\lambda')^{(n-1)/2m}\} \le \\ \qquad \le N(\lambda';V,L^2(\Omega),\tilde a) \le N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \le \\ \le N(\lambda'';V,L^2(\Omega),\tilde a) \le \mu_{\tilde a}(\Omega')(\lambda'')^{n/2m} + C_5\{\rho(\lambda'')^{n/2m} + \\ \qquad\qquad + \text{card } A\ \rho^{n-1}\ (\lambda'')^{(n-1)/2m}\} \end{array}\right.$$

Do lema III.4.3 temos:

$$(1-\gamma_1\eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde a}(\Omega') \le \mu_a(\Omega') \le (1+\gamma_1\eta)^{n/2m}\ \mu_{\tilde a}(\Omega')\ .$$

Disso, juntamente com a estimativa (9) e a fórmula (10); podemos deduzir, utilizando a fórmula binomial e fazendo majorações, a existência de uma constante C_8 independente de ρ e λ tal que: $\forall\ \rho < \rho_o$, $\forall \ge \lambda_1\ \rho^{-2m}$:

(11) $$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\lambda^{n/2m}| \le C_8\{(\eta+\rho)\lambda^{n/2m} + \\ + \text{card } A\ \rho^{n-1}\ \lambda^{(n-1)/2m}\}.$$

Observando que card $A\cdot\rho^{n-1} \le \rho^{-1}$ med Ω e desde que $\rho^s \ge \rho (0 < s \le 1$ e $\rho \le 1)$ também podemos deduzir da expressão (11), utilizando a fórmula (7) que: existe uma constante C_9 independente de λ e ρ tal que: $\forall\ \rho < \rho_o$, $\forall\ \lambda \ge \lambda_1\ \rho^{-2m}$:

(12) $$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2m}| \le \\ \le C_9\{\rho^s\ \lambda^{n/2m} + \rho^{-1}\ \lambda^{(n-1)/2m}\}\ .$$

Assim, dado λ suficientemente grande para que possamos escolher $\rho = \lambda^{-1/[2m(s+1)]}$ de sorte que $\rho < \rho_o$. Também podemos obter que $\gamma_1 \eta < 1/4$ já que $\eta \leq$ constante.ρ^s e portanto todas as coisas que dependiam disso são válidas. Daí também temos $\lambda_1 \rho^{-2m} = \lambda_1 \lambda^{1/(s+1)} \leq \lambda$ [pois, λ grande implica que $\lambda^s \geq$ $\geq \lambda_1^{s+1}$ e isto implica que $\lambda \geq \lambda^{1/(s+1)} \lambda_1$] e portanto $\rho \lambda^{1/2m} \to \infty$ com $\lambda \to \infty$, como tínhamos assumido.

Finalmente, aplicando essa escolha de ρ na fórmula (12) obtemos:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\, \lambda^{n/2m}| \leq$$

$$\leq C_9 \left\{ \lambda^{-\frac{s}{2m(s+1)}} \lambda^{\frac{n}{2m}} + \lambda^{\frac{1}{2m(s+1)}} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \right\} = 2C_9\, \lambda^{\frac{n(s+1)-s}{2m(s+1)}}$$

ou, equivalentemente temos:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\, \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq 2C_9\, \lambda^{(n - \frac{s}{s+1})/2m}$$

e isto, é exatamente a estimativa do teorema que queríamos provar.

III.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Prova do Teorema III.1.1

Observamos na seção III.1 com as hipóteses feitas que as formas B e C são definidas e hermitianas sobre $V(\Omega)$ e $H_o^1(\Omega)$, respectivamente. Além disso, supomos que elas têm coeficientes hölderianos. Utilizando o lema de decomposição de Weyl, seção I.1.4, podemos deduzir a continuidade de B sobre $V(\Omega)$. Também temos que C é contínua sobre $H_o^1(\Omega)$.

No Capítulo II, lema II.2.1, observamos que a forma B é coerciva sobre $V(\Omega)$.

A forma C é coerciva sobre $H_o^1(\Omega)$, pois para $u \in H_o^1(\Omega)$ temos:

$$C(u,u) = s_o(\text{grad } u, \varepsilon \text{ grad } u) - w^2(u,u) =$$

$$= s_o \|\text{grad } u\|^2_{\mathcal{L}_{2,\varepsilon(\Omega)}} - w^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e daí podemos calcular que:

$$C(u,u) \geq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c'\|u\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Esse cálculo, é uma estimativa típica de estimativas a priori (ver Agmon [14]).

Agora, sob a hipótese (H.2) da seção III.1, temos que a tripla $(V(\Omega), \mathcal{L}_2(\Omega), B)$ está nas condições do teorema III.5.2. Portanto, vale a fórmula:

$$\overset{o}{N}_{s_o}(\lambda) = \mu_B(\Omega)\,\lambda^{3/2} + O(\lambda^{(n-\frac{s}{s+1})/2m})$$

para Ω tendo a condição de regularidade de Métivier.

Utilizando as mesmas hipóteses para a tripla $(\overset{1}{H}_o(\Omega),\ L^2(\Omega), C)$, segue que:

$$\overset{1}{N}_{s_o}(\lambda) = \mu_C(\Omega)\,\lambda^{3/2} + O(\lambda^{(n-\frac{s}{s+1})/2m}) .$$

Observando a fórmula (7) do Capítulo II, a conclusão da prova do teorema é imediata.

Observações Gerais

Para o cálculo da estimativa correspondente a forma C não precisamos da condição de regularidade de Métivier sobre a fronteira de Ω. Isso decorre que a forma C está definida sobre $\overset{1}{H}_o(\Omega)$ [lembrar que Ω limitado implica que a injeção de $\overset{1}{H}_o(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta] e assim, basta aplicar o teorema III.5.2 para Ω limitado com a hipótese (H.1) da primeira seção deste capítulo.

De qualquer maneira, como somos levados a fazer a hipótese da condição de regularidade sobre a $\partial\Omega$ para obtermos o cálculo relativo a forma B; essa condição está incluída também para a forma C. Em conseqüência, para provar o teorema das equações de Maxwell; podemos sempre aplicar o teorema III.5.2 com a hipótese (h.2).

Em conclusão, olhando para o objetivo do presente traba lho, qual seja de obter uma fórmula para estimar os autovalores das equações do eletromagnetismo; não precisamos da hipótese(h.1) no teorema III.5.2 e em conseqüência poderíamos dispensar a prova do lema III.5.1 sob essa hipótese e portanto também a proposição I.2.3.1.

Por último, a hipótese (H.1) pedida na seção III.1 é dispensável mediante as observações anteriores sobre a forma C.

Entretanto, tivemos o trabalho de incluir todas essas hipóteses para apresentar um caso em que não é preciso exigências de regularidade sobre a fronteira de Ω; para se obter uma estimativa dos autovalores, a menos de Ω ser limitado.

No trabalho de Métivier podemos conseguir outros exemplos em que essa exigência é dispensada, embora o resultado obtido seja mais fraco; no sentido de que obtem somente uma estimativa assintótica, sem o cálculo do erro. Para melhor compreensão do que queremos dizer, enunciamos alguns desses resultados.

Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e V um espaço de Hilbert contendo $H^m_{comp}(\Omega)$.

Suponhamos uma das seguintes condições:

(i) $V \hookrightarrow K^m_o(\Omega)$ e Ω tem medida de Lesbesgue finita.

(ii) Ω é limitado, $\partial\Omega$ tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^n$ e $V \hookrightarrow K^m(\Omega)$.

Então, para toda forma a; hermitiana, contínua e coerciva sobre V tal que $\mu_a(\Omega) < +\infty$, $N(\lambda)$ associado ao problema variacional $(V, L^2(\Omega), a)$ verifica:

$$N(\lambda) \sim \mu_a(\Omega)\, \lambda^{n/2m} \qquad (\lambda \longrightarrow +\infty).$$

Para provar essa fórmula assintótica, Métivier utiliza o mesmo processo de aproximar a forma $\underline{a}$ por uma forma $\underline{\tilde{a}}$ à coeficientes constantes sobre cubos. Os resultados necessários para isso são as estimativas e fórmulas das seções III.3 e III.4, juntamente com outros resultados adicionais sobre decomposição do comportamento assintótico das funções $N(\lambda;.)$; não incluídos no presente trabalho, porém não mais difíceis de serem demonstrados.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.E. TAYLOR - Introduction to Functional Analysis; John Wiley, New York, 1958.

[2] G.G. LORENTZ - Approximation of Functions; Holt e Rimehart e Winston, New York, 1966.

[3] G. MÉTIVIER - Valeurs Propres de Problemes aux Limites Elliptiques Irreguliers; Bull.Soc.Math. de France. mémoire 51-52,1977, pgs. 125 a 219.

[4] H. TRIEBEL - Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators; North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] H. WEYL - The Method of Orthogonal Projection in Potencial Theory; Duke Math.Journal, Vol.7, 1940, pgs. 411 a 444.

[6] J.D. JACKSON - Classical Electrodynamics; John Wiley, New York, 1962.

[6a] J.L. LIONS E E. MAGENES - Non-Homogeneous , Boundary Valued Problems and Applications; Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[7] J.P. AUBIN - Applied Functional Analysis; John Wiley, New York, 1979.

[8] K. YOSIDA - Functional Analysis; Springer-Verlag, Berlim,1966.

[9] L.A. MEDEIROS e P.H. RIVERA - Iniciação aos Espaços de Sobolev; Instituto de Matemática UFRJ, Rio de Janeiro,1977.

[10] L.E. FRAENKEL - On Regularity of the Boundary in Theory of Sobolev Spaces; Procedings of the London Math.Society, Third Series, Vol. XXXIX, November 1979.

[11] M. MEHRA - Zur Asymptotischen Verteilung der Eigenwerte des Maxwellschem Randwertproblems; Bonner Math.Schriften, Nr. 109, 1978.

c

[12] R.A. ADAMS - Sobolev Spaces; Academic Press, New York,1975.

Z m

[13] R. LEIS - Zur Theorie Elektromagnetischer Schwingungem in m Anisotropen Inhomogenen Medien; Math. Zeitschrift, 106, pgs. 213 a 224, 1968.

[14] S. AGMON - Lectures on Elliptic Boundary Value Problems; Van Nostrand, Princeton, 1965.

[15] T. KATO - Perturbation Theory for Linear Operators; Springer-Verlag, New York, 1966.

[16] W.K. PANOFSKY e M. PHILLIPS - Classical Electricity and Magnetism; Addison e Wesley, Reading, 1962 (2a.Ed.).

******
****
**
*