

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Deconvolução De Sinais Em Geofísica

por

Victor Coronel Aquino

Dissertação submetida como requisito parcial para obter
o grau de Mestre em Matemática

Prof. Julio Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, Fevereiro de 1995.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Coronel Aquino, Victor

Deconvolução De Sinais Em Geofísica / Victor Coronel Aquino.—Porto Alegre: Instituto de Matemática da UFRGS, 1995.

67 p.: il.

Dissertação (mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, 1995. Orientador: Ruiz Claeysen, Julio

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 SISTEMAS E SINAIS DISCRETOS	1
1.1 Sistemas Discretos	1
1.2 Resposta Impulso de um Sistema	2
1.3 Convolução Discreta	3
1.4 Função Sistema, Transformada-Z e Sinais Mínimos	4
1.4.1 Sinais de Fase Mínima, Máxima e Misturada	6
1.5 Autocorrelação e Correlação Cruzada de Sinais Discretas	7
1.6 Fatoração	8
2 FILTROS	10
2.1 Casos Especiais do Filtro de Forma	14
2.1.1 Filtro Inverso	14
2.1.2 Casos Importantes de Filtros Inversos	19
2.1.3 Representação de Filtros de Forma mediante os Filtros Inversos	22
2.1.4 Filtro de Predição	26

3 OS MÉTODOS DE DECONVOLUÇÃO	29
3.1 O Modelo da Deconvolução	29
3.1.1 O Método da Deconvolução	29
3.1.2 O Método da Deconvolução Preditiva	33
3.2 Modelo de Camadas Planas	38
3.2.1 O Método da Deconvolução Dinâmica	39
3.2.2 Processo Computacional	53
3.3 Esquema Recursivos para Equações Normais que Involuem a Matriz Toeplitz	57
4 CONCLUSÕES	63
5 APÊNDICE	64
BIBLIOGRAFIA	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema Discreto	1
Figura 1.2	Sinal de Fase Mínima	6
Figura 1.3	Sinal de Fase Máxima	9
Figura 1.4	Sinal de Fase Misturada	9
Figura 2.1	Operação de Convolução	10
Figura 2.2	Saída Desejada Impulso Unitário	14
Figura 3.1	Descrição Física de Registro de Ondas Sísmicas	30
Figura 3.2	Descrição da Terra Estratificada Como um Sistema LTI	30
Figura 3.3	Sistema Sedimentar de N Camadas	38
Figura 3.4	Coefficiente de Reflexão e Transmissão	40
Figura 3.5	Reflexão Resposta e Transmissão Resposta	42
Figura 3.6	Sistemas de n e de $n - 1$ Camadas	43
Figura 3.7	Série Reflexão Resposta R_n	43
Figura 3.8	Série Transmissão Resposta T_n	45

Quero manifestar meus mais sinceros
agradecimentos a meu Orientador
Prof. Dr. Julio Ruiz Claeysen pelo
apoio e a orientação neste trabalho

RESUMO

Os métodos de deconvolução desenvolvidos neste trabalho, usam o traço sísmico (registrado pelo geofone) para deconvoluir a fonte sísmica deste traço. O filtro preditivo que nos permite a deconvolução, é obtido considerando que a fonte sísmica seja de mínimo retardo e a resposta impulso do sistema estratificado constitua uma série não correlacionada. Conseqüentemente, a autocorrelação da fonte sísmica e do traço sísmico são os mesmos, exceto por um fator constante.

No caso da deconvolução dinâmica, considera este traço como a reflexão resposta do sistema sedimentário, e é usado para calcular os coeficientes dos polinômios feedback e feed-forward. Os coeficientes do polinômio feed-forward representam aproximadamente os coeficientes de reflexão do sistema sedimentário.

ABSTRACT

The developed deconvolution methods treated in this work use seismic trace (recorded by geophones) in order to deconvolute the seismic source of this trace. The predictive filter that permit us the deconvolution, is obtained considering that the seismic source has minimum delay and the impulse response of the layered system constitutes a non-correlated series. As a consequence, the autocorrelation of the seismic source and the seismic trace are the same except for a constant factor. In case of the dynamic deconvolution, this trace is considered as the reflexion response of the sedimentary system and is used to calculate the coefficients of the feedback and feed-forward polynomials. The coefficients of the feed-forward polynomials represent approximately the reflection coefficients of the sedimentary system.

INTRODUÇÃO

Na exploração geofísica para a busca de petróleo, gás natural, e depósitos minerais, fontes sísmicas ou vibradores (localizados perto da superfície terrestre) excitam a terra e produzem ondas sísmicas. Estas ondas são registradas com instrumentos especiais chamados geofones ou hidrofones, que depois são processados para sua análise e interpretação posterior.

Os sistemas lineares invariantes no tempo descrevem este processo físico considerando como entrada o vibrador sísmico e a saída são as ondas sísmicas registradas, que se expressam como a convolução da entrada com a resposta impulsiva do sistema sedimentar (terra).

O objetivo deste trabalho é mostrar como a partir das ondas sísmicas registradas podemos obter a resposta impulsiva do sistema sedimentar, as quais representam os coeficientes de reflexão de cada camada do sistema sedimentar, o que verdadeiramente interessa para os fins anteriormente mencionados. Para tal efeito apresentamos dois métodos de cálculo dos coeficientes de reflexão do sistema sedimentar.

O primeiro método: da *deconvolução preditiva* para o cálculo destes coeficientes, usa a hipótese de que a entrada é um sinal de mínimo retardo e os coeficientes de reflexão formam uma série não correlacionada, a qual permite relacionar a autocorrelação do sinal de entrada e saída.

O segundo método: da *deconvolução dinâmica*, relaciona tanto os coeficientes de reflexão como os coeficientes de transmissão do sistema sedimentar, com a hipótese adicional que o sistema sedimentar representa um sistema sem perdas de energia.

Sempre que usamos uns dos métodos temos que resolver um sistema de equações que envolvam a matriz toeplitz, chamadas *equações normais*. Neste trabalho apresentamos algoritmos para resolver este tipo sistema de equações.

1 SISTEMAS E SINAIS DISCRETOS

1.1 Sistemas Discretos

Um *Sinal de tempo discreto*, ou simplesmente sinal discreto é uma sequência ordenada de números reais ou complexos $\{x[n]\}$ onde o índice n varia no conjunto dos números inteiros. Um *Sistema Discreto* T é uma regra que transforma um sinal discreto $x[n]$ chamado *entrada* num outro sinal $y[n]$ chamado *saída* do sistema como está mostrado graficamente na figura (1.1).

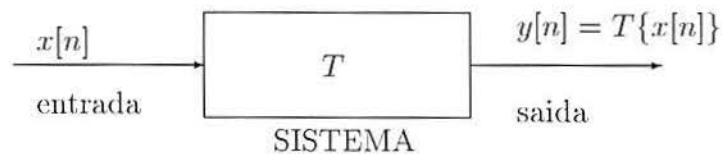


Figura 1.1: Sistema Discreto

O sistema de equações que descrevem a transformação T é chamado de *modelo matemático* ou simplesmente modelo do sistema T . O modelo é dito *recursivo* quando a saída num tempo depende em diferenças de valores da entrada e saída em outros tempos. O modelo é *não recursivo*, quando a saída depende somente dos valores da entrada.

Neste trabalho, serão de nosso interesse os modelos lineares discretos de tempo invariante. Um sistema T é dito *linear* quando obedece o princípio de *superposição linear*

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} = a_1y_1[n] + a_2y_2[n],$$

onde a_1 , a_2 são escalares e x_1 , x_2 sinais de entrada arbitrários. Quando a superposição não é verificada, o sistema é dito *não linear*. Um sistema T é dito *invariante no tempo* quando uma translação do tempo na entrada produz o mesmo efeito na

saída, isto é:

se $T\{x[n]\} = y[n]$ segue que

$$T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

Um tipo de controle com a saída de um sistema, é usualmente caracterizado pelo conceito de estabilidade do sistema. O sistema T é dito *estável* quando transforma entradas limitadas em saídas limitadas, isto é: $|x[n]| \leq M$, para todo n , e $M > 0$, implica que $|y[n]| \leq N$, para certa constante positiva N e todo valor de n .

Um sistema é dito que possui *memória* quando o valor da saída no tempo n_0 não depende da entrada no tempo n_0 . Um sistema é dito *causal* quando a saída em qualquer instante de tempo depende somente dos valores presentes e passados da entrada.

1.2 Resposta Impulso de um Sistema

Dado um Sistema T , defini-se sua *resposta impulso* $h[n]$ como sendo a saída que possui entrada impulsiva

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

isto é

$$T\{\delta[n]\} = h[n]$$

Para sistemas lineares causais e invariantes no tempo (LTI), a resposta impulso $h[n]$ é zero para $n < 0$. Pois a entrada impulsiva $\delta[n]$ é igual a zero para $n \neq 0$.

Quando a resposta impulso contém uma infinidade de valores não nulos, o sistema

é dito de *Resposta Impulso Infinito* (RII). Por exemplo, o sistema

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

possui a resposta impulso

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

ou

$$h[n] = aU[n] \quad ,$$

onde

$$U[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

é a função degrau unitário.

Quando a resposta impulso contém um número finito de valores não nulos, o sistema é dito de *Resposta Impulso Finita* (FIR)

1.3 Convolução Discreta

Considere-se um sistema LTI, $h[n]$ sua resposta impulso e $x[n]$ a entrada do sistema. Pela Invariância do sistema, temos que

$$T\{\delta[n - k]\} = h[n - k].$$

Da linearidade do sistema, segue que

$$T\{x[n]\delta[n - k]\} = x[n]T\{\delta[n - k]\} = x[n]h[n - k].$$

Sendo $x[n]$ qualquer sinal pode ser escrito na forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n - k]$$

Decorre que a saída é dada por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n - k].$$

Esta expressão para $y[n]$ chama-se a *Convolução Discreta de $x[n]$ com $h[n]$* , resultado básico para o estudo dos sistemas LTI. Denotaremos a convolução de $x[n]$ com $h[n]$ por $x[n] * h[n]$; assim,

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n - k]$$

A convolução satisfaz as propriedades comutativa, associativa e distributiva:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

1.4 Função Sistema, Transformada-Z e Sinais Mínimos

Seja T o sistema LTI e $h[n]$ a resposta impulso. Consideremos a entrada

$$x[n] = z^n,$$

onde z é um número real ou complexo. Esta entrada é transformada em

$$\begin{aligned} T\{z^n\} &= z^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k} h[k] \\ &= z^n \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[k] \right). \end{aligned}$$

Definindo

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (1.1)$$

obtém-se que

$$T\{z^n\} = z^n H(z).$$

A equação (1.1) se chama *transformada-Z bilateral de $h[k]$* . A transformada-Z bilateral da resposta impulso $h[n]$ do sistema T se conhece com o nome de *Função Sistema de T* . Por exemplo a função sistema do sistema

$$y[n] = (1 - \alpha)y[n - 1] + \alpha x[n];$$

é

$$H(z) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)}.$$

Por outro lado, quando o sistema é causal, ou seja $h[n] = 0$ para $n < 0$, então:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

é chamada *transformada-Z unilateral de $h[n]$*

Uma propriedade importante é que a convolução de dois sinais $x[n]$ e $y[n]$ também pode ser representada através da transformada-Z. Ou seja se $X(z)$ é a transformada-Z de $x[n]$ e $Y(z)$ é a transformada-Z de $y[n]$, então a transformada-Z de $x[n] * y[n]$ é $X(z)Y(z)$. Portanto, a convolução no domínio tempo corresponde a uma multiplicação no domínio da transformada-Z.

1.4.1 Sinais de Fase Mínima, Máxima e Misturada

A fase dos sinais causais, pode ser classificada em três tipos: *mínima*, *máxima* e *misturada*. Esta classificação depende basicamente da distribuição da energia do sinal $\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] = x^2[0] + x^2[1] + \dots$, ao longo do tempo.

Um sinal de fase mínima, também chamado de *mínimo retardo*, apresenta maior concentração de energia junto ao tempo $n = 0$. Isto quer dizer que as maiores amplitudes se concentrarão perto de $n = 0$. Como se pode ver na fig(1.2). Em

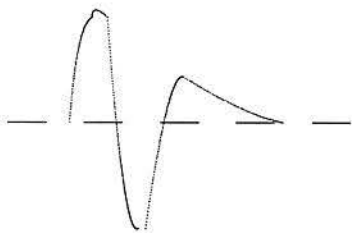


Figura 1.2: Sinal de Fase Mínima

termos da transformada-Z, um sinal de fase mínima ou mínimo retardo pode ser representado por um polinômio em z^{-1} formado somente de binômios da forma $a + bz^{-1}$ onde $a > b$ o que quer dizer que as raízes da transformada-Z do sinal ficam dentro do círculo unitário do plano complexo.

Por exemplo o sinal $x[n] = (x_0, x_1, x_2) = (6, 5, 1)$ é de mínimo retardo, pois, sua transformada-Z

$$A(z) = 6 + 5z^{-1} + z^{-2}$$

tem raízes $z_1 = -1/2$, $z_2 = -1/3$ e $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$

Em um sinal de *fase máxima*, a energia se concentra nos tempos posteriores, predominando as menores amplitudes perto do tempo $t = 0$. Como se pode ver na fig(1.3). A transformada-Z deste tipo de sinal é formado somente por binômios da forma $b + az^{-1}$, onde $a > b$ o que quer dizer que as raízes da transformada-Z do sinal ficam fora do círculo unitário do plano complexo.

Um sinal de *fase misturada* é uma combinação dos dois tipos de sinais ou seja, a sua

transformada- Z está formado tanto de binômios que caracterizam sinais de mínimo e máximo retardo. Um sinal deste tipo se mostra na fig(1.4)

1.5 Autocorrelação e Correlação Cruzada de Sinais Discretas

A operação que permite medir a similaridade entre as sinais $x[n]$ e $y[n]$, é a chamada *Correlação Cruzada de $x[n]$ com $y[n]$* , $\phi_{xy}[\tau]$ é definida por:

$$\phi_{xy}[\tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n + \tau] \quad (1.2)$$

onde o índice τ indica deslocamento relativo de tempo.

Quando $x[n] = y[n]$, para todo n , então (1.2) se transforma em

$$\phi_{xx}[\tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n + \tau]$$

chamado *autocorrelação de $x[n]$*

A autocorrelação e a correlação satisfazem as seguintes propriedades

- i) $\phi_{xx}[\tau] = \phi_{xx}[-\tau]$
- ii) $\phi_{xy}[\tau] = x[\tau] * y[-\tau]$
- iii) se $x[n] = r[n] * s[n]$, então $\phi_{xr}[n] = s[n] * \phi_{rr}[n]$
- iv) a transformada- Z de $\phi_{xy}[\tau]$ é $\Phi_{xy}(z) = X(z)Y(1/z)$ onde $X(z)$ e $Y(z)$ são as transformada- Z de $x[n]$ e $y[n]$ respectivamente
- v) a transformada- Z da autocorrelação de $x[n] = r[n] * s[n]$ está dada por

$$\Phi_{xx}(z) = [R(z)S(z)][R(1/z)S(1/z)]$$

Onde $R(z)$ é a transformada- Z de $r[t]$ e $S(z)$ é a transformada- Z de $s[t]$.

1.6 Fatoração

Uma propriedade importante dos sinais discretos causais de energia finita é que sua transformada- Z é analítica em $|z| > 1$ e além disso se for de mínimo retardo a inversa de sua transformada- Z também é analítica em $|z| > 1$, (ver [Pap 88]). A seguir formulamos em três formas equivalentes o problema conhecido como problema de fatoração discreta:

1.-Dada uma função real não negativa $a(\theta)$, encontrar uma sequência $y[n]$ tal que o módulo de sua transformada- Z no círculo unitário seja igual a $a(\theta)$:

$$|Y(e^{i\theta})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} y[n]e^{-in\theta} \right| = a(\theta).$$

2.-Dada uma função real não negativa $a(\theta)$, encontrar uma função analítica $Y(z)$ em $|z| > 1$ e tal que $|Y(e^{i\theta})| = a(\theta)$.

3.-Dada uma sequência $w[n]$ cuja transformada- Z $W(z)$ é não negativa no círculo unitário,

$$W(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]e^{in\theta} = a(\theta) \geq 0$$

encontrar uma sequência causal $y[n]$ com transformada- Z $Y(z)$ tal que

$$W(e^{i\theta}) = |Y(e^{i\theta})|^2 \quad W(z) = Y(z)Y_-(z)$$

onde $Y_-(z)$ significa a transformada- Z de $w^*[-n]$ conjugada de $w[-n]$. É fácil ver que $Y_-(z) = Y^*(1/z^*)$ e, se $y[n]$ é real, então $Y_-(z) = Y(1/z)$

O problema formulado anteriormente tem solução se $a(\theta)$ satisfaz a condição de Paley-Weiner [Pap 88],

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln a(\theta)| d\theta < \infty$$

adicionalmente, se $y[n]$ é de mínimo retardo a solução será única.

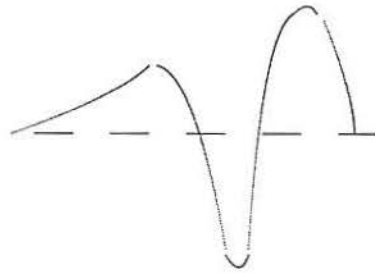


Figura 1.3: Sinal de Fase Máxima

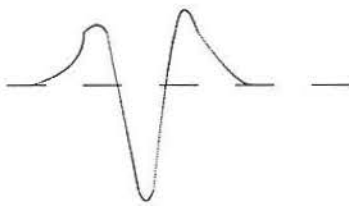


Figura 1.4: Sinal de Fase Misturada

2 FILTROS

Os sinais podem ser modificadas de acordo com operadores apropriados, chamados filtros. Uma das características básicas destes filtros no processamento sísmico é sua linearidade, ou seja, apresentam propriedades dos sistemas lineares. Concretamente un *filtro linear* é um sistema cuja resposta impulso altera as características de um sinal de entrada, mediante:

$$c[n] = b[n] * f[n]$$

Onde $f[n]$ é a resposta do filtro que transforma o sinal de entrada $b[n]$ no sinal de saída $c[n]$. Graficamente fig(2.1).

Os filtros de sinais podem ser divididos, entre outros, em filtros numéricos, sonoros,

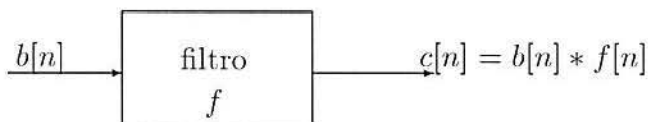


Figura 2.1: Operação de Convolução

elétricos e óticos. Os filtros numéricos apresentam a propriedade de serem aplicados a dados amostrados digitalmente. Em especial são aplicados no processamento de dados sísmicos.

Um dos filtros numéricos usados em processamento de dados sísmicos é o *Filtro de forma* (Shaping Filter) que é o filtro linear que altera a forma de um sinal para uma forma pré-determinada (saída desejada).

Estabeleceremos algumas notações para um estudo mais detalhado do filtro de forma. Denotaremos por:

- 1.- $b = (b[0], b[1], b[2], \dots, b[n])$ o sinal de entrada de comprimento $n + 1$
- 2.- $f = (f[0], f[1], f[2], \dots, f[m])$ operador ou filtro de comprimento $m + 1$
- 3.- $d = (d[0], d[1], d[2], \dots, d[m + n])$ o sinal saída desejada ou predeterminada de

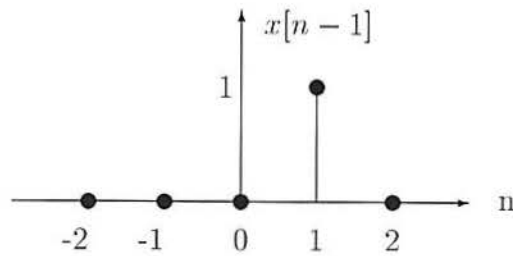


Figura 2.2: Saída Desejada Impulso Unitário

Assim, as equações normais podem ser escritas na forma

$$fR = g.$$

2.1 Casos Especiais do Filtro de Forma

2.1.1 Filtro Inverso

O *Filtro inverso* (spiking filter), é um filtro de forma para o qual a saída desejada é um impulso unitário. Por exemplo o pulso,

$$(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

mostrado na figura(2.2)

Em geral, qualquer dos $(m + n + 1)$ elementos da saída desejada

$$d = (d[0], d[1], d[2], \dots, d[m + n])$$

pode representar o impulso, enquanto que os demais elementos tomam o valor zero. Portanto existem $(m + n + 1)$ filtros inversos diferentes para cada uma das $(m + n + 1)$ posições do impulso.

Sejam

$$a_0 = (a_0[0], a_0[1], \dots, a_0[m])$$

o filtro inverso para o qual a saída desejada é um impulso de retardo zero, isto é,

$$d_0 = \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0)}_{m+n+1},$$
$$a_1 = (a_1[0], a_1[1], \dots, a_1[m])$$

o filtro inverso para o qual a saída desejada é um impulso de retardo um, isto é:

$$d_1 = \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{m+n+1},$$

e assim sucessivamente, até que

$$a_{m+n} = (a_{m+n}[0], a_{m+n}[1], \dots, a_{m+n}[m])$$

é o filtro inverso para o qual a saída desejada é um impulso de retardo $(m+n)$, isto é:

$$d_{m+n} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 1)}_{m+n+1}.$$

Sejam também

$$c_0 = (c_0[0], c_0[1], \dots, c_0[m+n]),$$

a saída atual correspondente ao filtro inverso a_0 .

$$c_1 = (c_1[0], c_1[1], \dots, c_1[m+n]),$$

a saída atual correspondente ao filtro inverso a_1 , e assim sucessivamente, até que

$$c_{m+n} = (c_{m+n}[0], c_{m+n}[1], \dots, c_{m+n}[m+n]),$$

é a saída atual correspondente ao filtro inverso a_{m+n} .

Definamos as seguintes matrizes cujas linhas especificamos a seguir:

1.-

$$D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_{m+n+1}$$

2.- A matriz A , cujas linhas são os filtros inversos de a_0 até a_{m+n} , isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0[0] & a_0[1] & \dots & a_0[m] \\ a_1[0] & a_1[1] & \dots & a_1[m] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+n}[0] & a_{m+n}[1] & \dots & a_{m+n}[m] \end{bmatrix}$$

3.- A matriz C , cujas linhas são as saídas atuais de c_0 até c_{m+n} , isto é:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0[0] & c_0[1] & \dots & c_0[m+n] \\ c_1[0] & c_1[1] & \dots & c_1[m+n] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m+n}[0] & c_{m+n}[1] & \dots & c_{m+n}[m] \end{bmatrix}$$

Logo as equações normais

$$a_i R = d_i B^t, \quad i = 0, 1, \dots, m+n$$

podem-se escrever como

$$AR = DB^t = I_{m+n+1} B^t = B^t$$

O que é o mesmo

$$ABB^t = B^t \tag{2.8}$$

multiplicando (2.8) pela direita pela matriz A^t , obtemos:

$$ABB^tA^t = B^tA^t$$

daqui

$$AB(AB)^t = (AB)^t \quad (2.9)$$

por outro lado, de (2.1) segue que:

$$AB = C \quad (2.10)$$

logo (2.9) pode-se escrever como

$$CC^t = C^t$$

A matriz C apresenta as seguintes propriedades:

1.- é simétrica, pois

$$C = (C^t)^t = (CC^t)^t = CC^t = C^t$$

2.-é idempotente, pois, por ser C simétrica

$$C = CC^t = CC = C^2.$$

Agora, a soma dos erros quadráticos v_i entre a saída desejada d_i e a saída atual c_i está dado por:

$$v_i = (d_i - c_i)(d_i - c_i)^t, \quad i = 0, 1, \dots, m + n$$

ou seja:

$$v_0 = (1 - c_0[0])^2 + c_0^2[1] + c_0^2[2] \dots + c_0^2[m + n]$$

$$v_1 = c_1^2[0] + (1 - c_1[1])^2 + c_1^2[2] + \dots + c_1^2[m + n]$$

⋮

$$v_{m+n} = c_{m+n}^2[0] + c_{m+n}^2[1] + C_{m+n}^2[2] + \dots (1 - c_{m+n}[m+n])^2$$

fazendo:

$$V = v_0 + v_1 + \dots + v_{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} v_i$$

Decorre que

$$\begin{aligned} V &= \text{traço}(D - C)(D - C)^t = \text{traço}(I_{m+n+1} - C)(I_{m+n+1} - C)^t \\ &= \text{traço}(I - C^t - C + CC^t) \\ V &= \text{traço}(I_{m+n} - C) = \text{traço}(I_{m+n}) - \text{traço}(C) \end{aligned}$$

De (2.11) e (2.8) obtém-se

$$\begin{aligned} V &= \text{traço}(I_{m+n}) - \text{traço}(AB) \\ V &= \text{traço}(I_{m+n+1}) - \text{traço}(B^t(BB^t)^{-1}B). \end{aligned}$$

Sendo que o traço do produto é o produto dos traços [Ner 77], segue que.

$$V = \text{traço}(I_{m+n+1}) - \text{traço}(BB^t)^{-1}BB^t$$

e portanto

$$V = \text{traço}(I_{m+n+1}) - \text{traço}(I_{m+1}) = (m+n+1) - (m+1) = n$$

Isto quer dizer que a soma da soma dos erros quadráticos v_i , é igual a n , onde $n+1$ é o comprimento do sinal entrada ($b[0], b[1], \dots, b[n]$).

Também podemos verificar que a soma da soma dos erros quadráticos V é independente do comprimento do filtro ($m+1$).

Agora como os $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, m + n$, e

$$V = v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots + v_{n+m} = n < n + m + 1$$

segue que

$$0 \leq v_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n + m.$$

quando os v_i são iguais, temos que:

$$v_i = \frac{n}{m + 1}, \quad i = 0, 1, \dots, n + m$$

É importante averiguar o retardo i para o qual a soma dos erros quadráticos v_i seja mínimo. O valor de i que produz o mínimo v_i é chamado retardo ótimo e o correspondente filtro inverso a_i é chamado o filtro inverso ótimo para o sinal entrada b . Estudaremos a seguir alguns casos importantes de filtros inversos.

2.1.2 Casos Importantes de Filtros Inversos

A seguir apresentamos alguns casos importantes

1.- Encontremos o filtro $f = (f[0], f[1], \dots, f[m])$ que transforma o sinal $b = (0, b[1], \dots, b[n])$ de comprimento $n+1$ na saída desejada constante $d_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ de comprimento $n + m + 1$. Para este caso temos que:

$$dB^t = \left(1, 0, 0, \dots, 0 \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b[1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b[n] & b[n-1] & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & b[n] & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b[n] & b[n-1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b[n] \end{bmatrix}$$

ou

$$dB^t = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m+n+1}$$

Logo

$$f = dB^t(BB^t)^{-1} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m+1}$$

então

$$c = fB = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m+n+1}$$

e assim:

$$v = (d_0 - c)(d_0 - c)^t = \underbrace{1 + 0 + 0 + \dots + 0}_{n+m+1} = 1$$

Este filtro nulo produz o máximo erro quadrático, um.

2.- Consideremos o sinal entrada $b = (0, 0, \dots, 0, b[n])$. Procura-se os filtros inversos

$$a_i = (a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[m]) \quad i = 0, 1, \dots, m+1,$$

tais que as saídas desejadas correspondentes de retardo i sejam

$$d_i = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m+n$$

logo

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b[n] & 0 & \dots & \dots \\ 0 & b[n] & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b[n] \end{bmatrix}$$

e

$$a_i = d_i B^t (B B^t)^{-1} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

então

$$c_i = a_i B = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

Logo

$$v_i = (d_i - c_i)(d_i - c_i)^t = 1, \quad i = 0, 1 \dots n-1.$$

Isto quer dizer que, os n primeiros filtros inversos produzem o máximo erro quadrático, isto é: $v_i = 1$; $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Assim

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

e como

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n + \dots + v_{m+n} = n$$

se segue que os últimos $(m+1)$ filtros inversos produzem um erro quadrático mínimo, isto é:

$$v_i = 0, \quad i = n, \dots, n+m$$

Logo temos que $n, n+1, \dots, n+m$ são retardos ótimos, enquanto que $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$ são filtros inversos ótimos correspondentes ao sinal entrada $b = (0, 0, \dots, 0, b[n])$.

2.1.3 Representação de Filtros de Forma mediante os Filtros Inversos

Expressemos o filtro de forma f em termos da saída desejada d e os filtros inversos a_i ($i = 0, 1, \dots, m + n$).

Sabemos que as equações normais são:

$$fR = dB^t$$

também a equação normal para cada filtro inverso é dado por

$$AR = B^t$$

logo

$$fR = dAR$$

daqui segue que:

$$f = dA \tag{2.11}$$

ou

$$f = \left(d[0], d[1], \dots, d[m+n] \right) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m+n} \end{pmatrix}$$

O que é o mesmo

$$f = d[0]a_0 + d[1]a_1 + \dots + \dots + d[m+n]a_{m+n}$$

Isto é, o filtro de forma f é uma combinação linear dos filtros inversos a_i , cujos coeficientes são os componentes do vetor saída desejada.

Vejamos a soma dos erros quadráticos v

$$v = (d - c)(d - c)^t = (d - c)d^t - (d - c)c^t$$

sabemos que

$$(d - c)B^t = 0$$

consequentemente

$$(d - c)(fB)^t = 0$$

logo $(d - c)C^t = 0$ disto segue-se que

$$\begin{aligned} v &= (d - c)d^t = dd^t - cd^t = dd^t - fBd^t \\ &= dd^t - f(dB^t)^t = dd - fg^t \end{aligned}$$

De (2.11) e de $g = dB^t$ segue que

$$fg^t = dA(dB^t)^t = dABd^t = dCd^t$$

Portanto

$$v = dd^t - dCd^t = dId^t - dCd^t$$

ou seja

$$v = d(I - C)d^t \tag{2.12}$$

Portanto a soma dos erros quadráticos para o filtro de forma é uma forma quadrática, onde a matriz da forma quadrática é $I - C$, isto é, a diferença entre a saída desejada e saída atual para todos os filtros inversos.

Nota.- de $v = dd^t - cd^t$ podemos concluir que

$$v_i = d_i d_i^t - c_i d_i^t = 1 - c_i [i] \quad i = 0, 1, \dots, n + m$$

Onde: d_i é a saída desejada impulso de retardo i , e c_i saída atual correspondente ao filtro inverso a_i .

Vejamos como escolhemos as saídas desejadas tal que fazem a soma de erros quadráticos v pequenos. Em vez de trabalhar com v trabalhemos com o erro quadrático normalizador (EQN) v' , o qual o definimos como

$$v' = \frac{v}{dd^t}$$

logo, de (2.12) temos que

$$v' = \frac{d(I - C)d^t}{dd^t}$$

visto que $v' \geq 0$, a matriz $(I - C)$ é semidefinida positiva. Também, como C é idempotente, segue que $(I - C)$ também é idempotente.[FAG 65] (teorema 9.1.5)

Logo

$$\text{posto}(I - C) = \text{traço}(I - C)$$

Agora como $(I - C)$ é uma matriz simétrica, idempotente de posto n , $(I - C)$ tem n valores próprios igual a 1 e $m + 1$ valores próprios igual a zero [FAG 65] (teorema 12.32) Ou seja

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 1, & i &= 1, \dots, n \\ \lambda_i &= 0, & i &= n + 1, \dots, m + 1 \end{aligned}$$

Também como $(I - C)$ é simétrica, $(I - C)$ é diagonalizável ortogonalmente e podemos expressar como:

$$I - C = E^t \Lambda E;$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n+1})$, e E é formada pelos vetores próprios linhas e_j associados a os valores próprios λ_j .

logo se escolhemos como

$$d = e_j, \quad \text{para} \quad m+1 \leq j \leq n+m+1$$

correspondente a qualquer dos valores próprios zero, temos que:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{e_j(E^t \Lambda E)e_j^t}{e_j e_j^t} = \frac{e_j(\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i e_i^t e_i) e_j^t}{e_j e_j^t} \\ &= \frac{e_j \lambda_j (e_j^t e_j e_j)}{e_j e_j^t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois

$$\lambda_j = 0 \quad e \quad e_i e_j^t = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Isto quer dizer que existem $(m+n)$ saídas desejadas, que reduzem ao EQN ao valor mínimo, isto é, zero.

Se escolhemos como

$$d = e_j, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n$$

Onde e_j são os vetores próprios linhas associados aos primeiros n valores próprios $\lambda_j = 1$. Então:

$$v' = \frac{e_j(\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i e_i^t e_i) e_j^t}{e_j e_j^t}$$

e como $e_i e_j^t = \delta_{ij}$ tem-se que

$$v' = \frac{(e_j e_j^t)(e_j e_j^t)}{e_j e_j^t} = 1.$$

Isto significa que temos n sinais saída desejada que reduzem o EQN ao valor máximo, isto é, a unidade.

2.1.4 Filtro de Predição

O *filtro de predição* é aquele filtro que atuando num trecho do sinal, permite a previsão de valores futuros deste mesmo sinal. Em termos mais concretos, a saída desejada é igual ao sinal de entrada, depois de α unidades de tempo, chamada distância de predição.

O sinal avançado α unidades de tempo está constituído de duas partes

i).- A parte irredutível:

$$b[0], b[1], \dots, b[\alpha - 1]$$

que acontece antes do tempo em instante zero, e fica fora da abrangência do filtro e

ii).- A parte redutível:

$$b[\alpha], b[\alpha + 1], \dots, b[n]$$

que está dentro da abrangência do filtro.

A parte redutível representa a saída desejada do filtro de predição. Logo, a saída desejada d_α é o vetor linha de $n + m + 1$ componentes, isto é

$$d_\alpha = (b[\alpha], b[\alpha + 1], \dots, b[n], 0, 0, \dots, 0).$$

Assim o filtro de predição f_α para a distância de previsão α é

$$f_\alpha = d_\alpha A = b[\alpha]a_0 + b[\alpha + 1]a_1 + \dots + b[n]a_{n-\alpha}$$

logo a soma dos erros quadráticos v_α correspondente ao filtro f_α é

$$\begin{aligned} v_\alpha &= d_\alpha (I - C) d_\alpha^t \\ &= d_\alpha d_\alpha^t - d_\alpha C d_\alpha^t \\ v_\alpha &= \sum_{i=\alpha}^n b^2[i] - \sum_{i=\alpha}^n \sum_{j=\alpha}^n b[i] c_i[j] b[j]. \end{aligned}$$

Assim o erro de predição é a soma da parte irreduzível, o qual é todo o erro, e o erro entre a parte redutível e a saída atual do filtro. Se denotamos por w_α a soma do erro de predição quadrática, temos

$$w_\alpha = \sum_{i=0}^{\alpha-1} b^2[i] + v_\alpha.$$

Onde o primeiro termo do lado direito é a contribuição da parte irreduzível e o segundo termo a parte redutível.

Também as equações normais para o operador f_α são

$$f_\alpha R = d_\alpha B^t$$

ou em sua forma desenvolvida

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[1] & r[2] & \dots & r[m] \\ r[1] & r[0] & r[1] & \dots & r[m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ r[m] & r[m-1] & r[m-2] & \dots & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r[\alpha] \\ r[\alpha+1] \\ \vdots \\ r[\alpha+m] \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

logo o operador de predição é a solução de (2.13), assim a saída atual se escreve como

$$c[t+\alpha] = \sum_{s=0}^m f[s]b[t-s], \quad (2.14)$$

onde $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ é a distância de predição.

Consideremos o erro de predição ε cujas componentes se definem por

$$\varepsilon[t+\alpha] = b[t+\alpha] - c[t+\alpha].$$

Considerando (2.14) podemos escrever

$$\varepsilon[t+\alpha] = b[t+\alpha] - \sum_{s=0}^m f[s]b[t-s],$$

que também pode-se escrever

$$\begin{aligned}\varepsilon[t] &= b[t] - \sum_{s=0}^m f[s]b[t-s-\alpha] \\ &= b[t] - f[0]b[t-\alpha] - f[1]b[t-\alpha-1] - \dots - f[m]b[t-\alpha-m]\end{aligned}$$

fazendo $M = m + \alpha$ e $a[0] = 1, a[1] = 0, \dots, a[\alpha-1] = 0, a[\alpha] = -f[0], a[\alpha+1] = -f[1], \dots, a[\alpha+m] = a[M] = -f[M]$

Logo definimos o operador erro de predição F com distância de predição α como:

$$F = (a[0], a[1], a[2], \dots, a[\alpha-1], a[\alpha], a[\alpha+1], \dots, a[\alpha+m])$$

ou seja

$$F = (1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(\alpha-1) \text{ zeros}}, -f[0], -f[1], \dots, -f[m])$$

Assim o erro de predição pode-se escrever como a convolução (discreta) dos coeficientes do operador erro de predição com a entrada b , isto é

$$\varepsilon[t] = \sum_{s=0}^M a[s]b[t-s], \quad a[0] = 1$$

Quando $\alpha = 1$ o operador erro de previsão F fica

$$F = (a[0], a[1], \dots, a[M]) = (1, -f[0], -f[0], \dots, -f[M])$$

e o erro de predição fica

$$\varepsilon[t] = \sum_{s=0}^M a[s]b[t-s] = \sum_{s=0}^{m+1} a[s]b[t-s]$$

3 OS MÉTODOS DE DECONVOLUÇÃO

3.1 O Modelo da Deconvolução

Quando a terra estratificada é excitada por fontes sísmicas (localizadas perto da superfície terrestre), estas produzem ondas sísmicas que são registradas por geofones como se mostra na figura(3.1). Nosso interesse é obter a resposta impulso da terra estratificada a partir dos registros das ondas sísmicas produzidas. Se supomos que a terra estratificada se comporta como um sistema Linear Invariante no Tempo (LTI), como se ilustra na figura(3.2), a resposta impulsiva da terra estratificada poderá ser achada usando os métodos de deconvolução assumindo ainda que a fonte sísmica representa um sinal de mínimo retardo.

3.1.1 O Método da Deconvolução

O método da deconvolução é formulado da seguinte maneira: dada a entrada $b[t] = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ e a saída $x[t]$, desejamos calcular a resposta impulso $h[t]$ de um sistema LTI.

Dado que o sistema é do tipo LTI a saída se expressa como a convolução discreta de $h[t]$ com $b[t]$, isto é

$$x[t] = b[t] * h[t].$$

Para encontrar $h[t]$ deconvoluímos $b[t]$ de $x[t]$. Isto é,

$$x[t] * f[t] = (b[t] * h[t]) * f[t] = h[t] * (b[t] * f[t])$$

será igual a $h[t]$ se

$$b[t] * f[t] = \delta[t] \tag{3.1}$$

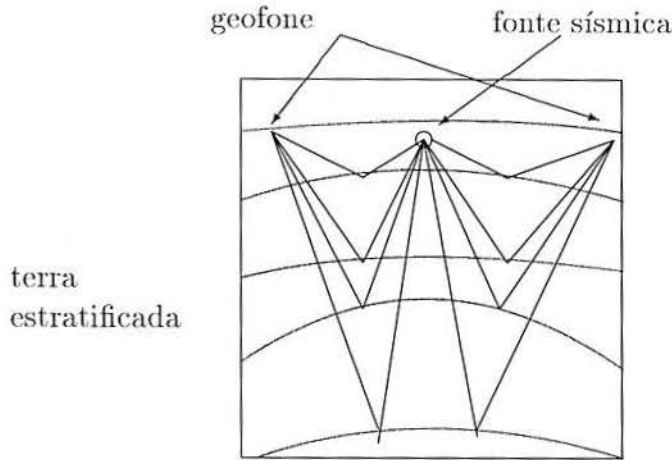


Figura 3.1: Descrição Física de Registro de Ondas Sísmicas

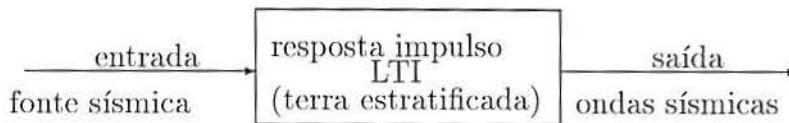


Figura 3.2: Descrição da Terra Estratificada Como um Sistema LTI

Onde o filtro $f[t]$ tem que ser um filtro causal e é calculado de (3.1). Em outras palavras, o filtro $f[t]$ deve ser tal que transforme o sinal entrada $b[t]$ em um pulso unitário de retardo zero.

A determinação de $f[t]$ é relativamente simples. Tomando a transformada- Z na equação (3.1) obtemos

$$B(z)F(z) = 1$$

daqui

$$F(z) = \frac{1}{B(z)}$$

logo $f[t]$ será a inversa de $F(z)$. Mas, como deve ser $b[t]$ e conseqüentemente $B(z)$, de modo que $F(z)$ tenha inversa causal? Vejamos que $b[t]$ terá que ser de mínimo retardo.

Escrevamos a equação para $F(z)$ na forma

$$F(z) = \frac{1}{B(z)} = \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

fazendo $w = 1/z$ a equação anterior fica

$$F(w) = \frac{1}{b_0 + b_1w + b_2w^2 + \dots + b_nw^n}$$

suponhamos que o denominador do lado direito da equação anterior tem n zeros w_1, w_2, \dots, w_n diferentes, então $F(w)$ pode escrever-se como

$$F(w) = \frac{1}{b_n(w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_n)}$$

Expandindo $F(w)$ em frações parciais, temos

$$F(w) = \frac{u_1}{w - w_1} + \frac{u_2}{w - w_2} + \dots + \frac{u_n}{w - w_n}$$

onde a constante u_i se define como

$$u_i = (w - w_i)F(w)|_{w=w_i} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n$$

Sem perda de generalidade assumamos que $F(w)$ tem k zeros cujos módulos são maiores que um e $n - k$ zeros cujos módulos são menores que um, isto é:

$$|w_i| > 1, \quad i = 1, \dots, k$$

$$|w_i| < 1, \quad i = k + 1, \dots, n$$

a expansão de cada termo $u_i/(w - w_i)$ de $F(w)$ é

$$\frac{u_i}{w - w_i} = -u_i(w_i^{-1} + w_i^{-2}w + w_i^{-3}w^2 + \dots) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, k$$

e

$$\frac{u_i}{w - w_i} = u_i(w^{-1} + w_iw^{-2} + w_i^2w^{-3} + \dots) \quad \text{para} \quad i = k + 1, \dots, n$$

assim os coeficientes de $F(w)$ são

$$f_s = \begin{cases} -\sum_{i=1}^k u_i w_i^{-s-1}, & s \geq 0 \\ \sum_{i=k+1}^n u_i w_i^{-s-1}, & s < 0 \end{cases}$$

assim $F(w)$ se escreve como

$$F(w) = \sum_{s=-\infty}^{-1} \left(\sum_{i=k+1}^n u_i w_i^{-s-1} \right) w^s + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k -u_i w_i^{-s-1} \right) w^s$$

escrevendo a equação anterior em termos de $z = 1/w$ temos

$$F(z) = \sum_{s=-\infty}^{-1} \left(\sum_{i=k+1}^n u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k -u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s}$$

Logo, para que $F(z)$ tenha inversa causal os coeficientes $\sum_{i=k+1}^n u_i z_i^{s+1}$ de z^{-s} para $s < 0$ terão que ser zero, isto implica que todas as raízes de $B(z)$ terão que ser menores que um, e isto significa que, $b[t]$ terá que ser de mínimo retardo, assim $F(z)$ fica

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k -u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s}$$

desta maneira os coeficientes de $F(z)$ será a inversa $f[t]$ de $F(z)$ que é o filtro desejado. Infelizmente em processamento de sinais sísmicas quase nunca se conhece explicitamente a fonte sísmica $b[t]$ impedindo o cálculo o polinômio $F(z)$ e consequentemente $f[t]$. Enfocaremos a equação (3.1) do ponto de vista mínimo quadrático (chamado também filtro de Wiener) considerando a $\delta[t] = [1, 0, \dots, 0]$ de comprimento $n + m + 1$ sendo $m + 1$ o comprimento do filtro $f[m]$. Assim a correlação cruzada de δ com b é dado por

$$\begin{aligned} g_{\delta b}[\tau] &= \sum_{t=0}^n d[t + \tau] b[t] \\ g_{\delta b}[\tau] &= (b[0], 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

escalonando esta equação na forma

$$g_{\delta b}[\tau] = (1, 0, \dots, 0),$$

o sistema de equações normais fica

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(m) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \dots & r(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & r(m-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

resolvendo (3.2) obtemos o filtro desejado e isto constitui o método padrão de deconvolução.

Também neste método a matriz de autocorrelação não poderia ser achada, visto que, não conhecemos $b[t]$, mas, com a hipótese adicional (como veremos na seção) seguinte deo que a resposta impulso $h[t]$ é uma série não correlacionada, poderemos achar a matriz de autocorrelação a partir da saída $x[t]$, que é registrada nos geofones e, portanto, está a nossa disposição.

3.1.2 O Método da Deconvolução Preditiva

O modelo de Deconvolução Preditiva se formula de acordo as seguintes hipóteses.

- 1.-*hipótese estatística*.- as tensões e tempos de chegada dos eventos de informação condução no traço sísmico podem ser representadas como uma série de picos aleatórios.
- 2.-*hipótese determinística*.- a forma da onda básica (fonte sísmica) associada a cada um dos eventos é de mínimo retardo.

Em outras palavras a hipótese estatística estabelece que a resposta impulso da terra estratificada representa uma série não correlacionada.

O método da deconvolução preditiva, considera o traço sísmico recebido $x[t]$ como o resultado da convolução de uma onda básica $b[t]$ de mínimo retardo com uma série não correlacionada $h[t]$, onde assumimos que $h[t]$ pode-se identificar com a série de coeficientes da reflexão do meio estratificado, isto é

$$x[t] = b[t] * h[t],$$

logo

$$\Phi_{xx}(z) = [B(z)H(z)][B(1/z)][H(1/z)];$$

onde $\Phi_{xx}(z)$ é a transformada-Z da autocorrelação de $x[t]$, $B(z)$ é a transformada-Z de $b[t]$ e $H(z)$ a transformada-Z de $h[t]$.

A equação anterior podemos expressá-la na forma

$$\Phi_{xx}(z) = [B(z)B(1/z)][H(z)][H(1/z)],$$

a qual é a transformada-Z de

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{bb}(\tau) * \phi_{hh}(\tau). \quad (3.3)$$

a expressão (3.3) diz que a autocorrelação de $x[t]$ é igual a convolução de $b[t]$ com a autocorrelação de $h[t]$.

Como $h[t]$ é uma série não correlacionada, temos que,

$$\phi_{hh}[\tau] = \begin{cases} E_h, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

assim (3.3) se reduz a

$$\phi_{xx}[\tau] = \sum_t \phi_{hh}[t]\phi_{bb}[\tau - t] = E_h\phi_{bb}[\tau]$$

Portanto a autocorrelação do traço sísmico recebido $x[t]$ é a mesma que a autocorrelação da onda básica $b[t]$ exceto por um fator escalar E_h . Isto quer dizer que podemos calcular a autocorrelação da onda básica a partir do traço sísmico recebido.

A partir da autocorrelação de $x[t]$, podemos calcular o operador de predição associado a forma de onda básica $b[t]$.

Suponhamos que os coeficientes do operador de predição a ser determinado são

$$(f[0], f[1], f[2], \dots, \dots, f[m])$$

As equações normais para este operador são

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[m] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}[m] & \phi_{xx}[m-1] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}[\alpha] \\ \phi_{xx}[\alpha] \\ \vdots \\ \phi_{xx}[\alpha+m] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Logo, o operador de predição $(f[0], f[1], f[2], \dots, \dots, f[m])$ é a solução de (3.4).

Assim o correspondente operador erro de predição com distância de predição α é

$$(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(\alpha-1)\text{zeros}}, -f[0], -f[1], \dots, \dots, -f[m])$$

Este operador é o operador inverso, necessário para deconvoluir o traço sísmico $x[t]$.

Logo

$$\begin{aligned} x[t] * f[t] &= (b[t] * f[t]) * h[t] \\ &= x[t] - f[0]x[t-\alpha] - f[1]x[t-\alpha-1] - \dots - f[m]x[t-\alpha-m] \end{aligned}$$

é a série erro de predição, que representa o traço sísmico deconvoluido.

Quando $b[t] * f[t] = \delta[t]$ temos que

$$x[t] * f[t] = h[t]$$

isto é, a série erro representa a série não correlacionada $h[t]$.

Mostraremos agora como o filtro preditivo cuja distância de predição α pode servir como um operador de deconvolução.

A equação matricial do filtro preditivo de comprimento $m + 1$ com distância de predição α está dada pela equação (3.4). O sistema (3.4) pode ser aumentada até que se converta em seu correspondente operador erro de predição. O novo sistema é

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[\alpha] & \dots & \phi_{xx}[\alpha + m] \\ \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[\alpha - 1] & \dots & \phi_{xx}[\alpha + m - 1] \\ & \vdots & & \vdots & \\ \phi_{xx}[\alpha - 1] & \dots & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[m + 1] \\ \phi_{xx}[\alpha] & \dots & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[m] \\ & \vdots & & \vdots & \\ \phi_{xx}[\alpha + m] & \dots & \phi_{xx}[m + 1] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f[0] \\ \vdots \\ -f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Onde

$$\rho_0 = \phi_{xx}(0) - (\phi_\alpha f[0] + \phi_{xx}(\alpha + 1)f[1] + \dots + \phi_{xx}(\alpha + m)f[m])$$

$$\rho_1 = \phi_{xx}(1) - (\phi_{\alpha-1}f[0] + \phi_{xx}(\alpha)f[1] + \dots + \phi_{xx}(\alpha + m - 1)f[m - 1])$$

\vdots

$$\rho_{\alpha-1} = \phi_{xx}(\alpha - 1) - (\phi_1 f[0] + \phi_{xx}(2)f[1] + \dots + \phi_{xx}(\alpha + m + 1)f[m])$$

A solução do sistema anterior produz o operador erro de predição cuja distância de predição é α . Interpretemos a equação anterior em termos do modelo de filtro

de Weiner: a matriz da esquerda é a matriz de autocorrelação da entrada cujos elementos $\phi_{xx}(0), \phi_{xx}(1), \dots, \phi_{xx}(\alpha + m)$ pode identificar-se com a autocorrelação de uma fonte sísmica de comprimento $\alpha + m + 1$. Os elementos do vetor coluna da direita constituem os valores de retardo positivo da correlação cruzada entre a saída desejada e a entrada. façamos uma interpretação à correlação cruzada

$$\left(\underbrace{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{\alpha-1}}_{\alpha \text{ termos}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m+1 \text{ zeros}} \right).$$

Observamos que esta correlação cruzada se anula para retardos maiores que $\alpha - 1$, o que significa que o comprimento da saída desejada não pode ser maior que α . Em outras palavras, a onda de entrada possui comprimento $\alpha + m + 1$, enquanto que a saída desejada possui α termos diferente de zero.

Resumindo, o filtro inverso dado por (3.2) converte a onda básica ou fonte sísmica desconhecida em um impulso de retardo zero, enquanto que o operador erro predição converte a onda básica de comprimento $\alpha + m + 1$ em outra de comprimento α . Em consequência, o operador erro de predição pode servir como um operador de deconvolução. Isto significa que a técnica de filtros preditivos constitui um enfoque mais generalizado que da deconvolução.

Comentário.- Muitas vezes é útil ponderar a autocorrelação mediante un conjunto de fatores de peso w_j para obter a autocorrelação ponderada.

$$r_j = w_j \phi_{xx}(j)$$

Por w_j podemos considerar o conjunto de coeficientes de peso triangular

$$w_j = \begin{cases} 1 - \frac{|j|}{N}, & |j| = 0, 1, 2, \dots, N \\ 0, & |j| = N + 1, N + 2, \dots \end{cases}$$

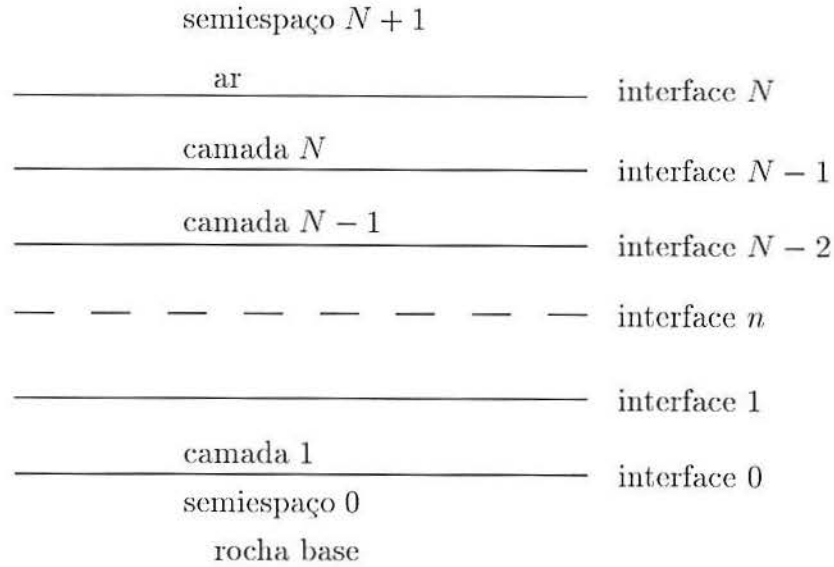


Figura 3.3: Sistema Sedimentar de N Camadas

3.2 Modelo de Camadas Planas

Discutamos o modelo conhecido em Geofísica como o modelo de *camadas planas*. Uma linha horizontal representa a superfície da terra e embaixo desta superfície existem meios (camadas ou sedimentos) cujas interfaces são paralelas na superfície. Os meios têm suas respectivas espessuras e impedâncias acústicas como se indica na figura(3.3)

A camada mais baixa ou rocha base é um semi-espaco denotado com o índice zero "0", sobre a rocha base estão as N camadas de espessura finita, denotados com os índices que vão desde 1 na parte inferior até N na parte superior. Em outras palavras, a camada 1 é a primeira camada em tempo geológico, enquanto que a camada N é a última camada em tempo geológico e representa a camada superficial (em exploração marinha a camada superficial é a água). A camada superior (ou ar) é um semi-espaco denotado com o índice $N + 1$. Assim, o sistema estratificado consiste de N camadas sedimentárias de espessura finita contida entre a rocha base e o ar. Chamaremos *Sistema estratificado ou sistema sedimentário* aos N estratos de espessura finita sem incluir o ar nem a rocha base. Diremos que a interface n é

a parte superior da camada n , onde $n = 0, 1, \dots, N$.

Assumimos que o sistema estratificado representa um sistema sem perdas de energia, isto é, a energia só se perde por transmissão para baixo, ou por reflexão para cima; não existe perda de energia por absorção dentro das camadas. Isto quer dizer que o sistema só pode perder energia quando uma onda descendente viaja na rocha base para nunca retornar, e/ou uma onda ascendente viaja no ar para nunca retornar. Assim a energia proveniente de um pico unitário descendente para a superfície, como entrada, se divide entre a onda transmitida pelo sistema estratificado dentro da rocha base e a onda refletida pelo sistema no ar. Esta onda refletida é o traço sísmico observado, resultante da entrada pico unitário.

3.2.1 O Método da Deconvolução Dinâmica

Um enfoque ao problema de deconvolução, estabelecendo relações quantitativas entre os coeficientes de reflexão e transmissão que descreve um meio estratificado; será chamado *deconvolução dinâmica*.

Para o estudo da deconvolução dinâmica restringiremo-nos ao movimento de compressão plana com incidência normal às interfaces horizontais.

Se um pico unitário descendente é incidente na parte superior da interface n , então o coeficiente de reflexão r_n é igual ao pico ascendente resultante da reflexão da parte superior da interface n , e o coeficiente de transmissão t_n é igual ao pico descendente transmitido pela interface n .

Se um pico unitário ascendente é incidente na parte inferior da interface n , então o coeficiente de reflexão r'_n é igual ao pico descendente refletido desde a parte inferior da interface n , e o coeficiente de transmissão t'_n é igual ao pico ascendente resultante transmitido para a interface n ver figura(3.4)

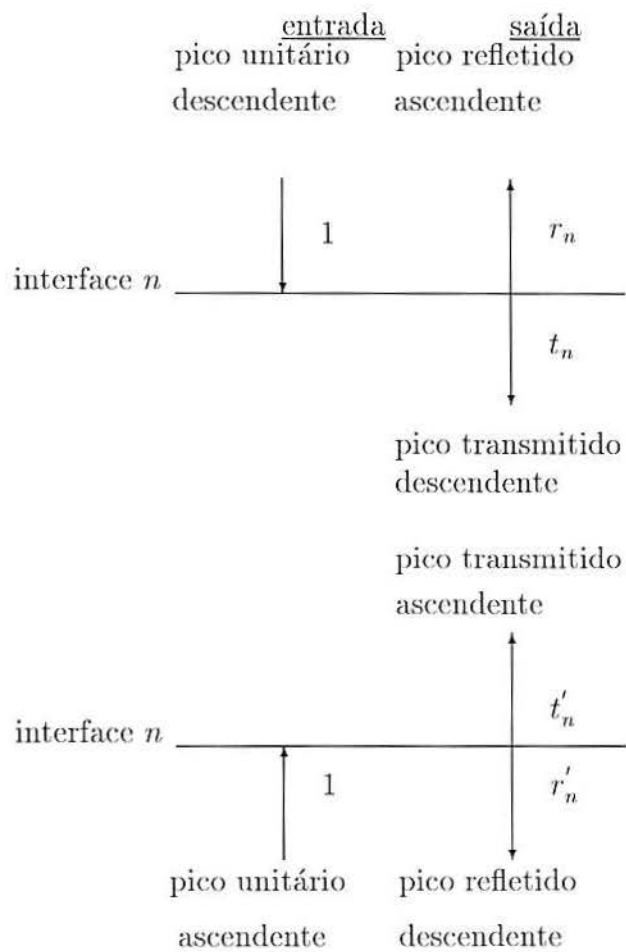


Figura 3.4: Coeficiente de Reflexão e Transmissão

Os três últimos coeficientes se expressam em função do primeiro como segue [Ken 81]

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + r_n \\ r'_n &= -r_n \\ t'_n &= 1 - r'_n \end{aligned} \tag{3.6}$$

Os coeficientes de reflexão r_n , r'_n estão no intervalo aberto $\langle -1, 1 \rangle$, e o coeficientes de transmissão t_n , t'_n estão no intervalo de $\langle 0, 2 \rangle$, o fator de transmissão de dois sentidos da interface n está dado por $t_n t'_n$ e é igual a $1 - r_n^2$, ou seja:

$$t_n t'_n = 1 - r_n^2$$

Onde for necessário, adicionaremos interfaces hipotéticas, cujo coeficiente de transmissão é um e os coeficientes de reflexão zero para cada uma das interfaces adicionadas, assim como também fazer o tempo de viagem de ida e volta em cada camada igual a mesma quantidade, o qual será chamado *tempo unitário*.

Dado qualquer trem de ondas de picos

$$a[0], a[1], a[2], \dots, a[s] \dots,$$

onde $a[s]$ denota a amplitude do pico, s o tempo discreto, associamos a este trem de ondas a função geratriz dada por:

$$A(z) = a[0] + a[1]z + a[2]z^2 + \dots + a[s]z^s + \dots$$

E a transformada-Z do trem de ondas será denotado por $\bar{A}(z)$, isto é:

$$\bar{A}(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_s z^{-s} + \dots$$

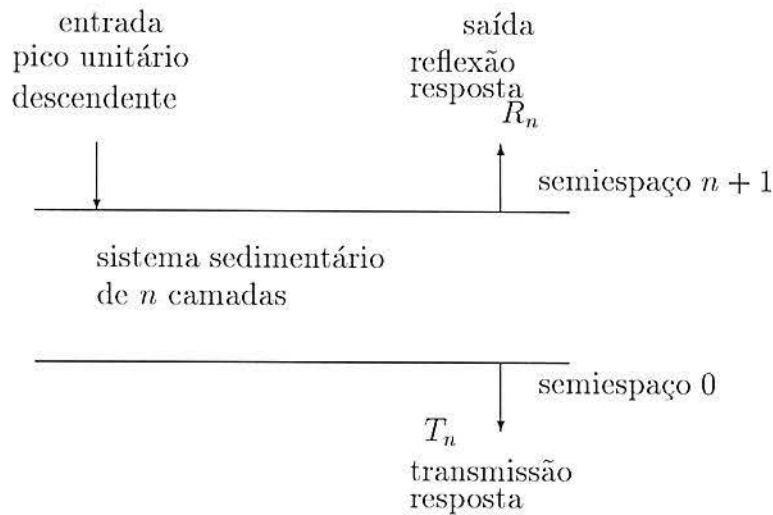


Figura 3.5: Reflexão Resposta e Transmissão Resposta

Por comodidade se denotará a função geratriz $A(z)$ e a transformada-Z $\bar{A}(z)$ simplesmente por A e \bar{A} respectivamente.

Tendo em conta que a entrada será sempre um pico descendente unitário incidente no instante de tempo zero sobre a camada superior do sistema estratificado, o trem de ondas refletidas de dentro para cima no semi-espaco superior receberá o nome de *reflexão resposta* e será denotado por R_n , e o trem de ondas transmitido de dentro para abaixo na rocha base receberá o nome de *transmissão resposta* e será denotado por T_n , como se mostra na figura(3.5)

Consideremos um sistema sedimentário de $n - 1$ camadas com coeficientes de reflexão $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$. Consideremos também outro sistema sedimentário de n camadas com os coeficientes de reflexão $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n$. Como estes coeficientes de reflexão são os mesmos, o sistema de n camadas deveriam ser do mesmo material que o sistema de $n - 1$ camadas, as $n - 1$ camadas deveriam ter as mesmas impedâncias acústicas nos dois sistemas; ver figura(3.6)

Agora, nosso objetivo será expressar a reflexão resposta R_n do sistema de n camadas em função da reflexão resposta R_{n-1} de $n - 1$ camadas, e o coeficiente de reflexão r_n .

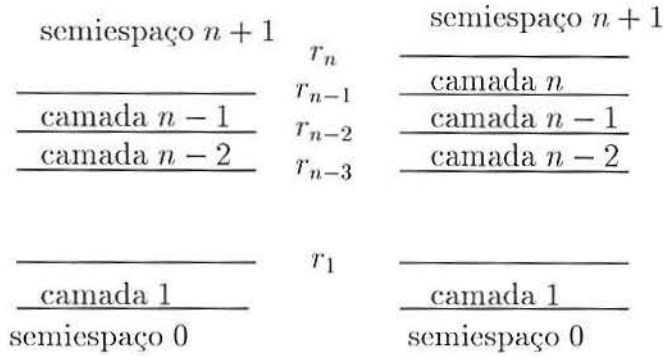


Figura 3.6: Sistemas de n e de $n - 1$ Camadas

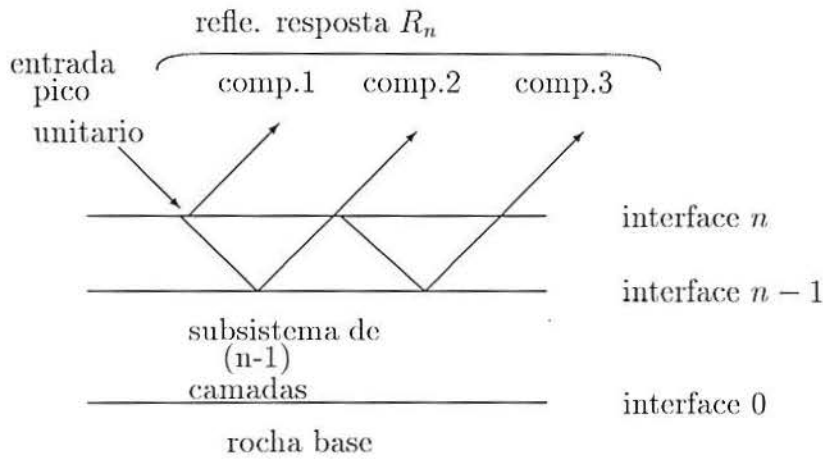


Figura 3.7: Série Reflexão Resposta R_n

De acordo com a figura(3.7), vemos que a reflexão resposta R_n é uma série infinita formada da seguinte maneira:

- 1.-O pico r_n resulta da reflexão ascendente da fonte do pico na n -ésima interface.
- 2.-O trem de picos $t_n R_{n-1} t'_n$ resulta da transmissão descendente da fonte de picos da n -ésima interface, reflexão ascendente do sistema de $n - 1$ camadas, e a transmissão ascendente através da n -ésima interface.
- 3.-O trem de picos $t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} t'_n$ resulta da transmissão descendente da fonte de picos a travez da n -ésima interface, reflexão ascendente do sistema de $n - 1$ camadas, reflexão descendente da n -ésima interface, reflexão ascendente do sistema de $n - 1$ camadas, e a transmissão ascendente a travez da n -ésima interface, e assim sucessivamente.

O pico 1 acontece no instante de tempo zero, o trem de picos 2 acontece em um retardo de tempo unitário, o trem de picos 3 acontece em um retardo de duas unidades de tempo e assim sucessivamente. Somando todas estas contribuições, temos:

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n z + t_n R_{n-1} r'_n R_n t'_n z^2 + \dots$$

fatorando $t_n R_{n-1} t'_n z$ fica

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n z [1 + r'_n R_{n-1} z + (r'_n R_{n-1} z)^2 + \dots]$$

daqui obtemos

$$R_n = r_n + \frac{t_n R_{n-1} t'_n z}{1 - r'_n R_{n-1} z}$$

disto e (3.6) obtemos que

$$R_n = r_n + \frac{(1 - r_n)^2 R_{n-1} z}{1 + r_n R_{n-1} z}$$

daqui

$$R_n = \frac{r_n + R_{n-1} z}{1 + r_n R_{n-1} z}. \quad (3.7)$$

De maneira similar, a transmissão resposta T_n pode ser obtida em função do coeficiente de reflexão r_n e o coeficiente de transmissão t_n da n -ésima interface; a reflexão resposta R_{n-1} e a transmissão resposta T_{n-1} do sistema de $n - 1$ camadas.

Agora considerando a figura(3.8), podemos observar que a transmissão resposta T_n do sistema de n camadas está formado por uma série infinita de componentes, da seguinte maneira:

- 1.-O trem de picos $t_n T_{n-1}$
 - 2.-O trem de picos $t_n R_{n-1} r'_n T_{n-1}$
 - 3.-O trem de picos $t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} r'_n T_n$
- e assim sucessivamente. Logo

$$T_n = t_n T_{n-1} + t_n R_{n-1} r'_n T_{n-1} z + t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} r'_n z^2 + \dots$$

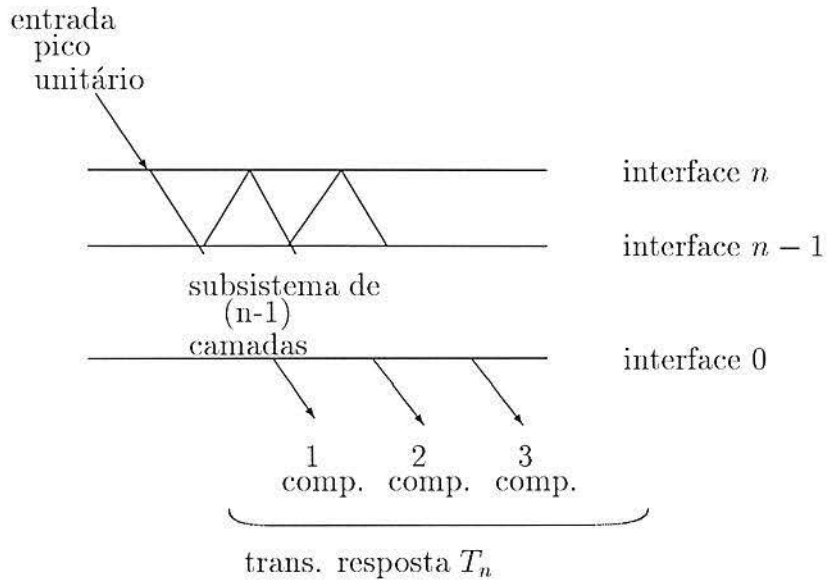


Figura 3.8: Série Transmissão Resposta T_n

$$= t_n T_{n-1} [1 + R_{n-1} r'_n z + (R_{n-1} r'_n z)^2 + \dots]$$

Somando a série geométrica obtemos

$$T_n = \frac{t_n T_{n-1}}{1 + r_n R_{n-1} z} \quad (3.8)$$

pode-se observar que o denominador de (3.7) e (3.8) é o mesmo.

Agora definimos uma sequência de polinômios

$$C_0, C_1, \dots, C_N$$

que chamaremos polinômios *feed-forward* e outra sequência de polinômios

$$D_0, D_1, \dots, D_N$$

que chamaremos polinômios *feedback*.

Quando a espessura das camadas não é finito (rocha base) a reflexão e transmissão resposta são:

$$R_0 = r_0, \quad T_0 = t_0$$

observamos que R_0 e T_0 também podem-se expressar em termos de polinômios C_0 e D_0 de grau zero, da seguinte maneira:

$$R = \frac{C_0}{D_0}, \quad T = \frac{t_0}{D_0}$$

Onde: $C_0 = r_0$ e $D_0 = 1$

Suponhamos que no caso de $n-1$ camadas de espessura finita a reflexão e transmissão resposta podem ser expressados em termos dos polinômios C_{n-1} e D_{n-1} de grau $n-1$, assim:

$$R_{n-1} = \frac{C_{n-1}}{D_{n-1}} \quad (3.9)$$

$$T_{n-1} = \frac{t_{n-1} \dots t_0}{D_{n-1}} \quad (3.10)$$

Onde: $C_{n-1}(0) = r_{n-1}$ e $D_{n-1}(0) = 1$

De (3.9) e (3.7) obtemos:

$$R_n = \frac{r_n + (C_{n-1}/D_{n-1})z}{1 + r_n(C_{n-1}/D_{n-1})z}$$

Daqui obtemos

$$R_n = \frac{r_n D_{n-1} + C_{n-1} z}{D_{n-1} + r_n C_{n-1} z}$$

Logo definimos

$$C_n = r_n D_{n-1} + C_{n-1} z \quad (3.11)$$

que chamaremos polinômio feed-forward de grau n e

$$D_n = D_{n-1} + r_n C_{n-1} z \quad (3.12)$$

que chamaremos polinômio feedback de grau n .

De (3.11) e (3.12) podemos ver que

$$\begin{aligned} C_n(0) &= r_n D_n(0) + C_{n-1}(0)0 = r_n 1 + 0 = r_n \\ D_n(0) &= D_{n-1}(0) + r_n C_{n-1}(0)0 = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

ou seja

$$C_n(0) = r_n \quad , \quad D_n(0) = 1$$

Assim a reflexão resposta é dado pelo raio

$$R_n = \frac{C_n}{D_n} \quad (3.13)$$

similarmente de (3.8) e (3.10) obtemos que

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{t_n T_{n-1}}{1 + r_n R_{n-1} z} = \frac{t_n (t_{n-1} \dots t_0) / D_{n-1}}{1 + r_n (C_{n-1} / D_{n-1}) z} \\ &= \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_{n-1} + r_n C_{n-1} z} = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_n} \end{aligned}$$

Ou seja

$$T_n = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_n} \quad (3.14)$$

Definamos agora a função espectral do polinômio feedback D_n por $D_n \bar{D}_n$ e a função espectral do polinômio feed-forward C_n , por $C_n \bar{C}_n$. Encontremos uma expressão

para $D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n$.

$$\begin{aligned}
D_n\bar{D}_n &= (D_{n-1} + r_n C_{n-1}z)(\bar{D}_{n-1} + r_n \bar{C}_{n-1}z^{-1}) \\
&= D_{n-1}\bar{D}_{n-1} + r_n D_{n-1}\bar{C}_{n-1}z^{-1} + r_n C_{n-1}\bar{D}_{n-1}z + r_n^2 C_{n-1}\bar{C}_{n-1} \\
C_n\bar{C}_n &= (r_n D_{n-1} + C_{n-1}z)(r_n \bar{D}_{n-1} + \bar{C}_{n-1}z^{-1}) \\
&= r_n^2 D_{n-1}\bar{D}_{n-1} + r_n D_{n-1}\bar{C}_{n-1}z^{-1} + r_n C_{n-1}\bar{D}_{n-1}z + C_n\bar{C}_{n-1}
\end{aligned}$$

Daqui obtemos que

$$\begin{aligned}
D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n &= (1 - r_n^2)D_{n-1}\bar{D}_{n-1} + r_n^2 C_{n-1}\bar{C}_{n-1} - C_n\bar{C}_{n-1} \\
&= (1 - r_n^2)D_{n-1}\bar{D}_{n-1} - (1 - r_n^2)C_{n-1}\bar{C}_{n-1} \\
&= (1 - r_n^2)(D_{n-1}\bar{D}_{n-1} - C_{n-1}\bar{C}_{n-1})
\end{aligned}$$

Usando este resultado recursivamente obtemos que

$$D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n = (1 - r_n^2)(1 - r_{n-1}^2)\dots\dots(1 - r_0^2)$$

façamos

$$\sigma_n^2 = (1 - r_n^2)(1 - r_{n-1}^2)\dots\dots(1 - r_0^2)$$

Observamos que σ_n^2 é o produto de fatores de transmissão de ida e volta das n camadas de espessura finita, assim:

$$D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n = \sigma_n^2$$

quando $n = N$ na equação anterior obtemos

$$1 - \frac{C_N \bar{C}_N}{D_N \bar{D}_N} = \frac{\sigma_n^2}{D_N \bar{D}_N}$$

disto e usando (3.13) e (3.14) obtemos que

$$1 - R_N \bar{R}_N = \frac{\sigma_N^2 T_N \bar{T}_N}{(t_N \dots t_0)^2}$$

como

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= (1 - r_N^2)(1 - r_{N-1}^2) \dots (1 - r_0^2) \\ &= (1 - r_N)(1 + r_N)(1 - r_{N-1})(1 + r_{N-1}) \dots (1 - r_0)(1 + r_0) \\ &= t'_N t_N \dots t'_0 t_0 \\ &= (t_N \dots t_0)(t'_N \dots t'_0) \end{aligned}$$

Obtemos que

$$1 - R_N \bar{R}_N = \left(\frac{t'_N \dots t'_0}{t_N \dots t_0} \right) T_N \bar{T}_N. \quad (3.15)$$

Podemos observar que a equação (3.15) expressa a lei da conservação da energia, isto é : a energia que entra menos a energia que sai é igual a energia transmitida.

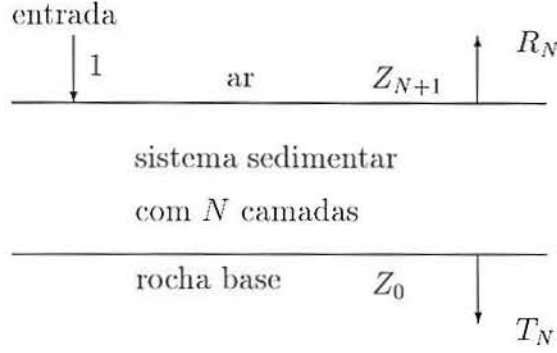
Vejamos que a equação (3.15) é verdadeiramente a lei da conservação da energia.

Sabe-se que o fluxo da energia viajando numa camada é proporcional ao produto da impedância característica da camada ao quadrado da amplitude da onda [Ken 81].

Denotemos com Z_0 a impedância característica da rocha base, e Z_{n+1} a impedância característica do ar. Suponhamos que o sistema sedimentar, inicialmente está em repouso, e a entrada é um pico unitário descendente incidente sobre a superfície.

A saída do sistema é a reflexão resposta R_N refletido para cima dentro do ar e a transmissão resposta T_N transmitida para baixo na rocha base, como se mostra na figura(3.2.1) Como o sistema é sim perdas de energia, então parte da energia de entrada se refleta e parte se transmite.

A energia do pico de entrada é proporcional a Z_{n+1} , a energia da onda de saída



refletida é proporcional a $Z_{N+1}R_N\bar{R}_N$, e a energia da onda de saída transmitida é proporcional a $Z_0T_N\bar{T}_N$.

A lei da conservação da energia estabelece que a energia de entrada no sistema sedimentar deveria ser igual à energia da saída do sistema sedimentário; isto é:

$$Z_{N+1} = Z_{N+1}R_N\bar{R}_N + Z_0T_N\bar{T}_N$$

daqui segue-se que

$$1 - R\bar{R}N = \left(\frac{Z_0}{Z_{n+1}}\right)T_N\bar{T}_N \quad (3.16)$$

Sabemos também que os coeficientes de transmissão t_n e t'_n estão dados em função das impedancias características Z_{n+1} e Z_n para as camadas $m + 1$ e n por:

$$t_n = \frac{2Z_{n+1}}{Z_{n+1} + Z_n} \quad t'_n = \frac{2Z_n}{Z_{n+1} + Z_n}$$

daqui segue-se que

$$\frac{t'_n}{t_n} = \frac{Z_n}{Z_{n+1}}$$

portanto temos que

$$\frac{t'_N \dots t'_1 t'_0}{t_N \dots t_1 t_0} = \frac{Z_N \dots Z_1 Z_0}{Z_{N+1} \dots Z_2 Z_1} = \frac{Z_0}{Z_{N+1}} \quad (3.17)$$

(3.17) diz que $\frac{Z_0}{Z_{N+1}}$ é dado pelo cociente do fator de transmissão $t'_0 t'_1 \dots t'_N$ ascendente através do sistema sedimentário e pelo fator de transmiassão $t_0 t_1 \dots t_{N-1} t_N$

descendente através do sistema sedimentário.

Substituindo (3.17) em (3.16) ou (3.17) em (3.15) se segue que (3.15) e (3.16) são iguais, o qual prova que (3.15) expressa a lei da conservação da energia.

Como a reflexão resposta R_N é observada no traço sísmico e portanto está a nossa disposição, definimos a *função espectral* Φ como segue

$$\Phi = 1 - R_N \bar{R}_N. \quad (3.18)$$

Agora de (3.16) temos que

$$\Phi = \left(\frac{Z_0}{Z_{n+1}} \right) T_N \bar{T}_N;$$

e como $T_N = \frac{t_N \dots t_1 t_0}{D_N}$

segue-se que

$$\Phi = \frac{(t'_N \dots t'_1 t'_0)(t_N \dots t_1 t_0)}{D_N \bar{D}_N},$$

isto dá

$$\Phi = \frac{\sigma_N^2}{D_N \bar{D}_N}; \quad (3.19)$$

assim o polinômio feedback e a constante σ_N^2 podem-se encontrar da função espectral conhecida Φ , usando um dos métodos de fatorização espectral de mínimo retardo, tratado na seção 2.6 deste trabalho, também pode ver [Pap 88].

Como

$$D_N T_N = t_n \dots t_1 t_0 = cste$$

O polinômio D_N é a função geratriz do operador erro-predição que reduz a onda transmitida de mínimo retardo a um pico.

As camadas sedimentárias atuam como um sistema de dois componentes uma feed-forward e a outra feedback produzindo a onda refletida de saída R_N (istoé o traço sísmico observado).

Ademais, a componente feedback é idêntico a um sistema feedback puro que produz

a onda transmitida de saída. Assim a função geratriz do traço sísmico é dado por:

$$R_N = \frac{C_N}{D_N}.$$

Onde o polinômio C_N de grau N representa a componente feed-forward, e o polinômio D_N de grau N representa a componente feedback, é o mesmo que aparece em (3.19). Pode-se agora deconvoluir o traço sísmico observado com o operador erro-predição calculado de (3.19). Em termos das funções geratrizes, esta deconvolução é dado por:

$$R_N D_N = C_N$$

Aqui a componente feed-forward C_N representa a estrutura dinâmica desejada do sistema sedimentar (isto é, os coeficientes de reflexão), enquanto que a componente feedback representa os efeitos reverberantes do sistema sedimentar.

Explicitamente vejamos que a componente feed-forward representa a estrutura dinâmica: escrevemos explicitamente C_N para $N = 3$ usando as fórmulas recursivas derivadas anteriormente.

$$\begin{aligned} C_3(z) &= r_3 D_2(z) + C_2(z)z \\ &= r_3 [D_1(z) + r_2 C_1(z)z] + [r_2 D_1(z) + C_1(z)z]z \\ &= r_3 [D_0(z) + r_1 C_0(z)z] + r_2 r_3 [r_1 D_0(z) + C_0(z)]z \\ &\quad + r_2 [D_0(z) + r_1 C_0(z)z]z + [r_1 D_0(z) + C_0(z)z]z^2 \\ &= r_3 [1 + r_1 r_0 z] + r_2 r_3 [r_1 + r_0 z]z + r_2 [1 + r_1 r_0 z]z^2 \\ &\quad + (r_1 + r_0 z)z^2 \\ C_3(z) &= r_3 + (r_2 + r_0 r_1 r_3 + r_1 r_2 r_3)z + (r_1 + r_0 r_1 r_2 + r_0 r_2 r_3)z^2 + r_0 z^3 \end{aligned}$$

Como $|r_n| < 1$, logo o produto de três ou mais coeficientes de reflexão serão de uma ordem de magnitude menor que qualquer coeficiente de reflexão

simples, portanto:

$$C_3 \approx r_3 + r_2z + r_1z^2 + r_0z^3;$$

em geral para N camadas temos

$$C_N \approx r_N + r_{N-1}z + \dots + r_1z^{N-1} + r_0z^N.$$

Visto que o processo de deconvolução produz os coeficientes de C_N , o processo determina aproximadamente os coeficientes de reflexão, o qual representa a estrutura dinâmica desejada do sistema sedimentar.

Em retrospectiva, o traço sísmico podemos escrever como:

$$R_N = C_N \frac{1}{D_N}$$

o qual no domínio tempo é:

$$\text{traço sísmico} = (\text{série de reflexão dinâmica}) * (\text{reverberações de mínimo retardo})$$

o processo de deconvolução é

$$(\text{traço sísmico}) * (\text{operador erro-predição}) = \text{série de reflexão dinâmica}$$

Isto é o processo de deconvolução produz a estrutura dinâmica desejada e destrói o efeito reverberante não desejado, portanto também se chama a este processo o método de *Deconvolução Preditiva Dinâmica*.

3.2.2 *Processo Computacional*

O processo computacional para a deconvolução dinâmica preditiva em termos do modelo geofísico é como segue:

O traço sísmico observado (isto é, a reflexão resposta do sistema sedimentário para um pico unitário) é a série no tempo

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

(a função geratriz desta série de tempo é R_N)

primeiro passo:

Computar a autocorrelação ψ_s do traço sísmico observado mediante a fórmula

$$\psi_s = \sum_{i=0}^w x_{i+s} x_i$$

tendo em conta (3.18) calculamos a função de autocorrelação ϕ dado por:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1 - \psi_0 \\ \phi_s &= -\psi_s, \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

Nota.- a função geratriz da autocorrelação ϕ_s é a função espectral Φ

segundo passo:

Computamos o operador erro-predição (isto é, o operador de deconvolução) $d_0 = 1, d_1, d_2, \dots, d_N$ solução do sistema de equações normais.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N & \phi_{N-1} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_N^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde $d_0 = 1, d_1, d_2, \dots, d_N$ são os coeficientes do polinômio feedback D_N

terceiro passo:

deconvoluímos o traço sísmico c_i pela fórmula

$$c_i = \sum_{s=0}^N d_s x_{i-s}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

O traço deconvoluido é o conjunto de coeficientes do polinômio feed-forward C_N , e representa aproximadamente o conjunto de coeficientes de reflexão, isto é

$$(c_0, c_1, \dots, c_N) \approx (r_N, r_{N-1}, \dots, r_0)$$

Onde $c_0 = r_N$ e $c_N = r_0$.

Observações

1.- Podemos decompor os coeficientes polinomiais dos polinômios feedback e feed-forward para produzir os coeficientes de reflexão exatamente, usando as fórmulas recursivas dadas anteriormente e resolvendo para C_{n-1} e D_{n-1} em termos de C_n e D_n , isto é

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= (1 - r_n^2)^{-1} (C_n - r_n D_n) z^{-1} \\ D_{n-1} &= (1 - r_n^2)^{-1} (D_n - r_n C_n) z^{-1} \end{aligned}$$

Onde $D_n(0) = 1$, $C_n(0) = r_n$

Visto que depois do terceiro passo computacional, conhecemos os coeficientes (c_0, c_1, \dots, c_N) e (d_0, d_1, \dots, d_N) dos polinômios $C_N(z)$ e $D_N(z)$, $r_N = C_N = C_0$ podemos obter os polinômios $C_{N-1}(z)$, $D_{N-1}(z)$ e $r_{N-1} = C_{N-1}(0)$.

2.- Temos visto também que o traço sísmico de reflexão pode-se escrever como

$$R_N = \frac{C_N}{D_N};$$

onde C_N e D_N são polinômios cujos coeficientes são funções dos coeficientes de reflexão $r_0, r_1, r_2, \dots, r_N$; por exemplo se $N = 3$, então

$$C_3(z) = r_3 + (r_2 + r_0r_1r_3 + r_1r_2r_3)z + (r_1 + r_0r_1r_2 + r_0r_2r_3)z^2 + r_0z^3;$$

$$D_3(z) = 1 + (r_1r_0 + r_2r_1 + r_3r_2)z + (r_2r_0 + r_3r_1 + r_3r_2r_1r_0)z^2 + r_3r_0z^3.$$

Geralmente os coeficientes individuais de reflexão são pequenos em magnitude. Portanto se desprezamos o produto de três ou mais coeficientes de reflexão então C_3 e D_3 podem-se escrever como

$$C_3(z) \approx r_3 + r_2z + r_1z^2 + r_0z^3$$

$$D_3(z) \approx 1 + (r_1r_0 + r_2r_1 + r_3r_2)z + (r_2r_0 + r_3r_1)z^2 + r_3r_0z^3$$

$$\approx 1 + \gamma_1z + \gamma_2z^2 + \gamma_3z^3$$

Onde

$$\gamma_1 = \sum_{i=0}^2 r_{i+1}r_i, \quad \gamma_2 = \sum_{i=0}^1 r_{i+2}r_i, \quad \gamma_3 = \sum_{i=0}^0 r_{i+3}r_i$$

Em geral para esta aproximação temos

$$C_N(z) \approx r_N + r_{N-1}z + \dots + r_1z^{N-1} + r_0z^N$$

$$D_N(z) \approx 1 + \gamma_1z + \gamma_2z^2 + \dots + \gamma_Nz^N$$

Onde $\gamma_j = \sum_{i=0}^{N-j} r_{i+j}r_i, \quad j = 1, 2, \dots, N$

assim o traço do sismograma pode ser escrito como

$$R_N \approx \frac{r_N + r_{N-1}z + \dots + r_0z^N}{1 + \gamma_1z + \gamma_2z^2 + \dots + \gamma_Nz^N}.$$

3.3 Esquema Recursivos para Equações Normais que Involuem a Matriz Toeplitz

A solução do problema de filtrado ótimo por mínimos quadrados significa resolver um conjunto de equações simultâneas chamadas as equações normais. A técnica recursiva envolve inicialmente achar um filtro de comprimento um, logo usando este filtro se constroe o filtro de comprimento dois e assim sucessivamente até alcançar o filtro de comprimento desejado.

O enfoque faz uso da forma especial da matriz de autocorrelação R , chamada a forma toeplitz. Esta forma pode-se escrever como

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_m \\ r_{-1} & r_0 & \dots & r_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{-m} & r_{-m+1} & \dots & r_0 \end{bmatrix}$$

Assim, dadas as entradas na coluna esquerda e na linha superior a matriz fica completamente definida.

As matrizes toeplitz pertencem na classe de matrizes *persimétricas*. Isto é, são simétricas com respeito na diagonal nordeste, sudoeste. Isto equivale ao seguinte:

$$R = ER^tE$$

Onde

$$E = [e_n, \dots, e_1]$$

é a matriz de permutação de n -ésima ordem. Uma importante propriedade é que a inversa de uma matriz toeplitz não singular é persimétrica [Gol 84]. Tendo em conta que trabalharemos com processos estacionários, resolveremos as matrizes toeplitz para o caso simétrico, é dizer: $r(-m) = r(m)$ e definida positiva.

Assumamos que temos os escalares r_1, \dots, r_{n-1} e que as matrizes

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots, n$$

são todas definidas positivas. Descreveremos dois algoritmos para resolver equações que involucram matrizes toeplitz:

1.- O algoritmo de Durbin, para resolver o problema de *Yule-Walker*

$$R_n y = -(r_1 \dots r_n)^t$$

2.- O algoritmo de Levinson para resolver o problema

$$R_n x = b$$

Na dedução do método denotaremos a matriz de permutação de ordem k por $E_k = [e_k^{(k)}, \dots, e_1^{(k)}]$.

O Algoritmo De Durbin

Consideremos os números reais $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots, r_n$ e suponhamos que temos resolvido o sistema de Yule-Walker de k -ésima ordem

$$R_k y = -(r_1 \dots r_k)$$

Calculamos a solução do sistema de $(k + 1)$ -ésimo ordem

$$\begin{bmatrix} R_k & E_k r \\ r^t E_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ -r_{k+1} \end{bmatrix}$$

Do anterior sistema podemos observar que

$$z = R_k^{-1}(-r - \alpha E_k r) = y - \alpha R_k^{-1} E_k r$$

e

$$\alpha = -r_{k+1} - r^t E_k z.$$

Da persimetria de R_k^{-1} segue que

$$R_k^{-1} E_k = E_k R_k^{-1}$$

e assim

$$z = y + \alpha E_k y$$

Substituindo z na anterior expressão para α , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= -r_{k+1} - r^t E_k (y + \alpha E_k y) \\ &= -\frac{r_{k+1} + r^t E_k y}{1 + r^t y} \end{aligned}$$

Baseando-nos neste resultado apresentamos o algoritmo que resolve o sistema de Yule-Wolker

$$R_k y^{(k)} = -(r^k) = -(r_1 \dots r_k)^t$$

for $k = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} y^1 &= -r_1 \\ \text{for } k &= 1, \dots, n-1 \\ \beta_k &= 1 + r^{(k)t} y^{(k)} \\ \alpha_k &= (r_{k+1} + r^{(k)t} E_k y^{(k)}) / \beta_k \\ z^{(k)} &= y^{(k)} + \alpha_k E_k y^{(k)} \end{aligned}$$

$$y^{(k+1)} = \begin{bmatrix} z^{(k)} \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Este algoritmo requer $\frac{3}{2}n^2$ laços para gerar a solução. Embora podemos diminuir a quantidade de trabalho modificando o algoritmo e tendo em conta que

$$\begin{aligned} \beta_k &= 1 + r^{(k)t} y^k \\ &= 1 + \begin{bmatrix} r^{(k-1)t} & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k-1)} + \alpha_{k-1} E_k y^{(k-1)} \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= 1 + r^{(k-1)t} y^{(k-1)} + \alpha_{k-1} (r^{(k-1)t} E_{k-1} y^{(k-1)} + r_k) \\ &= \beta_{k-1} + \alpha_{k-1} (-\beta_{k-1} \alpha_{k-1}) \\ &= (1 - \alpha_{k-1}^2) \beta_{k-1} \end{aligned}$$

Assim o algoritmo modificado fica

$$y_1 := -r_1$$

$$\beta := 1$$

$$\alpha := -r_1$$

for $k = 1, \dots, n-1$

$$\beta := (1 - \alpha^2) \beta$$

$$\alpha := -(r_{k+1} + \sum_{i=1}^k r_{k+1-i} y_i) / \beta$$

for $i = 1, \dots, k$

$$z_i := y_i + \alpha y_{k+1-i}$$

$$y_i := z_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$y_{k+1} := \alpha$$

Este algoritmo requiere n^2 laços para encontrar a solução.

O Algoritmo De Levinson

Consideremos os vetores formados por números reais $(r_0 = 1 \ r_1 \ r_2 \dots r_n)^t$, $b =$

$(b_1 b_2 \dots b_n)^t$ e suponhamos que temos resolvido o sistema de k -ésima ordem $1 \leq k < n$

$$R_k x = b = (b_1 \dots b_k)^t$$

Calculemos a solução do sistema de $(k+1)$ -ésimo ordem

$$\begin{bmatrix} T_k & E_k r \\ r^t E_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

De (3.20) podemos observar que

$$R_k v + E_k r u = b;$$

e

$$r^t E_k v + u = b_{k+1}.$$

Supondo que temos calculado a solução do sistema de Yule-Walker de ordem k . $R_k y = -r$, segue que

$$v = R_k^{-1}(b - u E_k r) = x + u E_k y$$

e

$$\begin{aligned} u &= b_{k+1} - r^t E_k x - u r^t y \\ &= -\frac{b_{k+1} - r^t E_k x}{1 + r^t y} \end{aligned}$$

Estes resultados sugerem que podemos resolver o sistema $R_n x = b$ resolvendo os sistemas

$$R_k x^{(k)} = b^{(k)} = (b_1 \dots b_k)^t$$

$$R_k y^{(k)} = -(r^k) = -(r_1 \dots r_k)^t$$

paralelamente for $k = 1, \dots, n$:

Apresentamos a continuação o algoritmo que resolve $R_n x = b$ baseadas nos resultados anteriores $y_1 := -r_1$

$$\begin{aligned}
x_1 &:= b_1 \\
\beta &:= 1 \\
\alpha &:= -r_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{for } k &= 1, \dots, n-1 \\
\beta &:= (1 - \alpha^2)\beta \\
u &:= (b_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i x_{k+1-i})/\beta \\
v_i &:= x_i + \alpha y_{k+1-i} \quad (i = 1, \dots, k) \\
x_i &:= v_i \quad (i = 1, \dots, k) \\
x_{k+1} &:= u
\end{aligned}$$

se $k < n - 1$, então

$$\begin{aligned}
\alpha &:= -(r_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i x_{k+1-i})/\beta \\
z_i &:= y_i + \alpha y_{k+1-i} \quad (i = 1, \dots, k) \\
y_i &:= z_i \quad (i = 1, \dots, k) \\
y_{k+1} &:= \alpha
\end{aligned}$$

Este algoritmo requiere $2n^2$ laços para gerar a solução do sistema $Tx = b$.

Comentario.- O sistema de equações de Yule-Walker proveêm da suposição de que a Transformada-Z da resposta impulsiva de um Sistema Discreto Invariante no Tempo e a entrada uma sequência aleatória estacionária de media zero é dado por

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a(n)z^{-n}}$$

4 CONCLUSÕES

A energia usada para movimentar carros, avioões, etc, é o petróleo, que se encontra em depósitos profundos. O modo mais comum de encontrar-lo é mediante o método sísmico de reflexão, em áreas geológicas onde os coeficientes de reflexão são pequenos em magnitude, e além disso, aleatórios. O sismograma de reflexão enfatiza as reflexões primárias, e como resultado, tais registros podem ser interpretados visualmente. Tal foi o caso na exploração de petróleo entre 1,930 e 1,960, embora a crescente demanda de petróleo obrigou que se explorassem áreas que não produziam registros sísmicos favoráveis. Em muitos casos, a interpretação de registros de tais áreas não foi possível por que as reflexões múltiplas ocultavam a reflexão primária. Isto acontecia particularmente em áreas costeiras onde o mar produzia coeficientes de reflexão grandes e portanto reverberação. Este fenômeno ocultava completamente as reflexões primárias. Para resolver este problema, desenvolveram-se métodos digitais que transformam os traços sísmicos em dados processados que podem ser interpretados.

Os métodos tratados aqui são ferramentas úteis para a deconvolução do traço sísmico. No caso dos filtros preditivos, permite controlar a saída, ou seja, determinar o grau de resolução desejado para a distância de predição especificada. Conseqüentemente, a habilidade para especificar a distância de predição implica a habilidade para controlar a resolução desejada.

No caso do modelo da terra estratificada horizontalmente além de ser usado para determinar métodos de processamento de dados sísmicos, oferece também uma base a partir da qual podem construir-se modelos mais complexos.

Finalmente podemos dizer que, devido à grande quantidade de dados que devem processar-se, os modelos sísmicos devem ter uma base estatística e, para corresponder à situação de campo, os modelos de estudo devem permitir ruído e dados incertos o que significa que os métodos devem incorporar parâmetros estatísticos.

5 APÊNDICE

Apresentamos dois programas em Matlab que calculam as soluções dos algoritmos de Durbin e Levinson

Primer Programa

```
% Programa que calcula a solução do sistema de Yule-Wolker usando
% o algoritmo de Durbin.
% O programa tem como dados de entrada os coeficientes de autocorrelação
%  $r_1, r_2, \dots, r_n$  function  $[y] = \text{durbin}(r)$ 
 $n = \text{length}(r);$ 
 $y(1) = -r(1); \beta = 1; \alpha = -r(1);$ 
for  $k = 1 : n - 1,$ 
 $\beta = (1 - \alpha^2) * \beta;$ 
 $\alpha = -(r(k + 1) + r(k : -1 : 1) * y(1 : k)') / \beta;$ 
for  $i = 1 : k,$ 
 $z(i) = y(i) + \alpha * y(k + 1 - i);$ 
end;
 $y(1 : k) = z(1 : k);$ 
 $y(k + 1) = \alpha;$ 
end;
return
```

Segundo Programa

```
% Programa que calcula a solução do Sistema Geral  $T_n x = b$  usando
% o algoritmo de Levinson.
% O programa tem como dados de entrada os coeficientes de autocorrelação
%  $r_1, r_2, \dots, r_n$  e o vetor  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  function  $[x] = \text{levins}(r, b)$ 
 $n = \text{length}(r);$ 
 $y(1) = -r(1); x(1) = b(1); \beta = 1; \alpha = -r(1);$ 
```

```

for k = 1 : n - 1,
    beta = (1 - alpha^2) * beta;
    u = (b(k + 1) - r(k : -1 : 1) * x(1 : k)) / beta;
    for i = 1 : k,
        v(i) = x(i) + u * y(k + 1 - i);
    end;
    x(1 : k) = v(1 : k);
    x(k + 1) = u;
    if k < n - 1
        alpha = -(r(k + 1) + y(k : -1 : 1) * r(1 : k)) / beta;
        for i = 1 : k,
            z(i) = y(i) + alpha * y(k + 1 - i);
        end;
        y(1 : k) = z(1 : k);
        y(k + 1) = alpha;
    end;
end;
return

```


BIBLIOGRAFIA

- [Lev 47] N. Levinson, "The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction", J. Math.Phys., Vol.25, 1947, pp.261-278.
- [FAG 65] F.A.Graybill, Introduction to Matrices Within Statistics, Wadsworth, Belmont, California, 1965.
- [Rob 67] E.A. Robinson, "Predictive Decomposition of Time Series with Applications to Seismic Exploration", Ph.D.Thesis,Departament of Geology and Geophysics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.,1954, also see Geophysics, Vol.32,1967, pp.418-484.
- [Pea 69] K.L Peacock and Trietel, " Predictive Deconvolution -Theory and Practice" Geophysics April 69 vol.34,Number 2, pp.115-484.
- [Woo 75] L.C. Wood and S.Treitel,"Seismic Signal Processing", Proc. IEEE, vol.63, 1975, pp.649-661.
- [Ner 77] Evar D. Nering, Algebra Lineal y Teoría De Matrices, Editorial Limusa-1977.
- [Cyb 80] The Numerical Stability of the Levinson-Durbin Algorithm for Toeplitz Systemas of Equations,Siam J. Sci. Statist.Comp.,1 (1980), pp.303-319.
- [Ken 81] Kenneth, H. Waters Reflections Seismology, a Tool for Energy Resource Exploration, 1981.
- [Gol 84] Golub, G., Van Loan, Ch.,Matrix Computations, John Hopkins Press, 1984.
- [Han 87] Handbook of Digital Signal Processing. Engineering Aplications, Edit by Douglas F. Elliot, 1987.

- [Will 88] William W. Hager, Applied Numerical Linear Algebra, Pennsylvania State University, Prentice Hall Internacional, Inc, 1988.
- [Pap 88] Athanasios Papoulis, Signal Analysis, Mc Graw-Hill International Editions, 4th edition.
- [She 89] Robert E. Sherif, Geophysical Methods, University of Houston, 1989.
- [Har 93] Hari Krishna and Yunbiao Wang "The split Levinson Algorithm is Weakly Stable", Siam Journal On Numerical Analysis, October 93, volume 30, number 5.