

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Vibrações Forçadas com força axial num  
Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas**

por

**Mariane Kneipp Giaretta**

Dissertação para a obtenção do Grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre

2001

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Mariane Kneipp Giareta

Vibrações Forçadas com força axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas / Mariane Kneipp Giareta.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2001.

61 p.: il.

Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2001. Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Área: Vibrações , Controle e sinais

Palavras-chave: Euler-Bernoulli, Função de Green, Vibrações Forçadas, Base Espectral, Base Clássica, Base Dinâmica

# **Vibrações Forçadas com força axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas**

por

**Mariane Kneipp Giareta**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAP, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

**Mestre em Matemática Aplicada**

Área de Concentração: Vibrações , Controle e sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Mário W. Dávila      FUNREI

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Teresa Tsukazan de Ruiz      UFRGS

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liliane Basso Barichello      UFRGS

Coordenador do PPGMAP  
Porto Alegre, outubro de 2000

## **Agradecimentos**

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen pela orientação e pelo apoio no desenvolvimento do trabalho.

Ao Dr. German Ramon Canahualpa Suazo pela paciência e coleguismo.

Ao Celso e meus familiares pelo carinho e incentivo ao longo desta caminhada.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vi
LISTA DE TABELAS . . . . .	ix
RESUMO . . . . .	xii
ABSTRACT . . . . .	xiii
1 MODELAGEM MATEMÁTICA . . . . .	3
1.1 A teoria de Euler-Bernoulli . . . . .	3
1.2 Condições iniciais e de contorno . . . . .	7
2 VIBRAÇÕES FORÇADAS COM A INFLUÊNCIA DA FORÇA AXIAL . . . . .	9
2.1 Apresentação do problema . . . . .	9
2.2 Os Modos de vibração e a frequência característica . . . . .	10
2.3 Propriedades dos Modos de Vibração . . . . .	12
2.4 A equação modal . . . . .	14
2.5 O método espectral para vibrações forçadas com a influência da força axial . . . . .	16
3 CÁLCULO MODAL DA FUNÇÃO DE GREEN . . . . .	21
3.1 Cálculo dos Modos $X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0$ . . . . .	21
3.2 A Matriz Base $\Phi$ na base espectral clássica e na base dinâmica . . . . .	22

<b>3.3</b>	<b>A Fução de Green</b> . . . . .	<b>25</b>
3.3.1	Viga Apoiada Deslizante . . . . .	26
3.3.2	Viga Apoiada Livre . . . . .	27
3.3.3	Viga Biapoiada . . . . .	28
3.3.4	Viga Deslizante - Deslizante . . . . .	29
3.3.5	Viga Fixa Apoiada . . . . .	30
3.3.6	Viga Fixa Deslizante . . . . .	31
3.3.7	Viga Fixa - Fixa . . . . .	32
3.3.8	Viga Fixa Livre . . . . .	33
3.3.9	Viga Livre Deslizante . . . . .	34
3.3.10	Viga Livre - Livre . . . . .	35
<b>4</b>	<b>VIBRAÇÕES FORÇADAS DECORRENTES DE CARGAS PON- TUAIS E OSCILATÓRIAS</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>A Carga <math>f(t,x)</math></b> . . . . .	<b>36</b>
4.1.1	Carga Pontual . . . . .	36
4.1.2	Soma de Cargas Pontuais . . . . .	37
4.1.3	Pulso Oscilatório . . . . .	37
4.1.4	Soma de Pulsos Oscilatórios . . . . .	38
<b>4.2</b>	<b>Simulações da Vibração Forçada em Vigas</b> . . . . .	<b>39</b>
4.2.1	Viga Apoiada Deslizante . . . . .	40

4.2.1.1	Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da carga pontual . . . . .	42
4.2.1.2	Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação de uma soma de cargas pontuais . . . . .	42
4.2.1.3	Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da carga de pulso oscilatório . . . . .	43
4.2.1.4	Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da soma de cargas de pulso oscilatório . . . . .	43
4.2.2	Viga Apoiada Livre . . . . .	44
4.2.2.1	Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da carga pontual . . . . .	46
4.2.2.2	Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da soma de cargas pontuais . . . . .	46
4.2.2.3	Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da carga de pulso oscilatório . . . . .	47
4.2.2.4	Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da soma de cargas de pulsos oscilatórios . . . . .	47
4.2.3	Viga Biapoiada . . . . .	48
4.2.3.1	Solução para Viga Biapoiada sob ação da carga pontual . . . . .	50
4.2.3.2	Solução para Viga Biapoiada sob ação da Soma cargas pontuais . . . . .	50
4.2.3.3	Solução para Viga Biapoiada sob ação da carga de pulso oscilatório . . . . .	51

4.2.3.4	Solução para Viga Biapoiada sob ação da soma de cargas de pulsos oscilatórios . . . . .	51
4.2.4	Viga Fixa Apoiada . . . . .	52
4.2.4.1	Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da carga pontual . . . . .	54
4.2.4.2	Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da soma de cargas pontuais . . . . .	54
4.2.4.3	Solução para Viga Fixa apoiada sob ação de carga de pulso oscilatório . . . . .	55
4.2.4.4	Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da soma de pulsos oscilatórios . . . . .	56
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>57</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	<b>58</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Viga fixa livre sob ação da força axial $N$ . . . . .	4
Figura 1.2	Vistas do corte transversal da viga fixa livre . . . . .	4
Figura 3.1	Linhas de contorno da Função de Green para a Viga Apoiada Deslizante em $t=3.6$ . . . . .	26
Figura 3.2	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Apoiada Deslizante em $t=3.6$ . . . . .	26
Figura 3.3	Linhas de contorno da Função de Green para Viga Apoiada Livre em $t=3.5$ . . . . .	27
Figura 3.4	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Apoiada Livre em $t=3.5$ . . . . .	27
Figura 3.5	Linhas de Contorno da Função de Green para Viga Biapoiada em $t=4.45$ . . . . .	28
Figura 3.6	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Biapoiada em $t=4.45$ . . . . .	28
Figura 3.7	Linhas de contorno da Função de Green para Viga Deslizante-Deslizante em $t=0.9$ . . . . .	29
Figura 3.8	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Deslizante-Deslizante em $t=0.9$ . . . . .	29
Figura 3.9	Linhas de contorno da Função de Green paraa Viga Fixa Apoiada em $t=3$ . . . . .	30
Figura 3.10	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Fixa Apoiada em $t=3$ . . . . .	30
Figura 3.11	Linhas de contorno da Função de Green da Viga Fixa Deslizante em $t=1.9$ . . . . .	31

Figura 3.12	Gráfico 3D da Função de Green paraa Viga Fixa Deslizante em $t=1.9$ . . . . .	31
Figura 3.13	Linhas de contorno da Função de Green da Viga Fixa-Fixa em $t=2.85$ . . . . .	32
Figura 3.14	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Fixa-Fixa em $t=2.85$	32
Figura 3.15	Linhas de contorno da Função de Green para Viga Fixa Livre em $t=1$ . . . . .	33
Figura 3.16	Gráfico 3D da Função de Green da Viga Fixa Livre em $t=1$ . .	33
Figura 3.17	Linhas de contorno da Função de Green da Viga Livre Deslizante em $t=1.2$ . . . . .	34
Figura 3.18	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Livre Deslizante em $t=1.2$ . . . . .	34
Figura 3.19	Linhas de Contorno da Função de Green da Viga Livre Livre em $t=3$ . . . . .	35
Figura 3.20	Gráfico 3D da Função de Green para Viga Livre Livre em $t=3$ .	35
Figura 4.1	Viga apoiada deslizante sujeita a carga pontual . . . . .	42
Figura 4.2	Viga apoiada deslizante sujeita a soma de cargas pontuais . . .	42
Figura 4.3	Viga apoiada deslizante sujeita a um pulso oscilatório . . . . .	43
Figura 4.4	Viga apoiada deslizante sujeita soma de pulsos oscilatórios . . .	43
Figura 4.5	Viga apoiada livre sujeita a carga pontual . . . . .	46
Figura 4.6	Viga apoiada livre sujeita a soma de cargas pontuais . . . . .	46
Figura 4.7	Viga apoiada livre sujeita a um pulso oscilatório . . . . .	47

Figura 4.8	Viga apoiada livre sujeita a soma de pulsos oscilatórios . . . . .	47
Figura 4.9	Viga biapoiada sujeita a carga pontual . . . . .	50
Figura 4.10	Viga biapoiada sujeita a soma de cargas pontuais . . . . .	50
Figura 4.11	Viga biapoiada sujeita a pulso oscilatório . . . . .	51
Figura 4.12	Viga biapoiada sujeita a soma de pulsos oscilatórios . . . . .	51
Figura 4.13	Viga fixa apoiada sujeita a carga pontual . . . . .	54
Figura 4.14	Viga fixa apoiada sujeita a soma de cargas pontuais . . . . .	54
Figura 4.15	Viga fixa apoiada sujeita a um pulso oscilatório . . . . .	55
Figura 4.16	Viga fixa apoiada sujeita a uma soma de pulsos oscilatórios . . .	56

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Valores de entrada e carga pontual . . . . .	36
Tabela 4.2	Valores de entrada e soma de cargas pontuais . . . . .	37
Tabela 4.3	Valores de entrada e pulso oscilatório . . . . .	37
Tabela 4.4	Valores de entrada e soma de pulsos oscilatórios . . . . .	38

## LISTA DE ABREVIATURAS

$A(x)$	seção transversal
$\alpha$	aceleração angular
$B$	matriz das condições de contorno
$\Delta m$	variação de massa
$\delta$	autovalor
$\epsilon$	autovalor
$E$	módulo elástico de Young
$EI(x)$	rigidez flexural
$I(x)$	momento de inércia
$\mathcal{I}$	operador identidade
$h(t)$	resposta impulso
$h(t, x, s)$	Função de Green
$f(t, x)$	carga ou força externa
$G$	centro de massa de $\Delta m$
$K$	operador diferencial linear espacial de quarta ordem
$L$	comprimento da viga
$m$	$\rho A$
$M$	$m\mathcal{I}$
$M(t, x)$	momento fletor
$\mu$	massa específica do material da viga
$\epsilon$	tensão
$\sigma_y$	largura
$\sigma_z$	espessura
$S(t, x)$	força de cisalhamento
$\omega$	freqüência característica
$\hat{\omega}$	freqüência de entrada

$P_0$	força de entrada
$\Phi$	matriz base
$\Phi^c$	matriz clássica
$\Psi^d$	matriz dinâmica
$\rho$	densidade de massa
$X_n$	modos

**TÍTULO: “VIBRAÇÕES FORÇADAS COM FORÇA AXIAL NUM MODELO DE EULER-BERNOULLI PARA VIGAS”**

## **RESUMO**

O objetivo deste trabalho é calcular as vibrações forçadas de uma viga longa e fina descrita pela equação de Euler-Bernoulli com a influência de uma força axial e da carga  $f(t, x)$ .

Os cálculos simbólicos são realizados utilizando a base espectral clássica, obtida a partir das raízes da equação característica, e a base dinâmica, caracterizada pelas condições iniciais impulsivas.

São apresentados resultados simulados da função de Green com diversas condições de contorno e das vibrações forçadas em vigas apoiadas em uma extremidade livre, fixa, deslizante e apoiada na outra, sujeitas a ação de cargas do tipo pontuais e oscilatórias.

**TITLE:** “FORCED VIBRATION WITH AXIAL FORCE IN THE EULER-BERNOULLI MODEL FOR BEAMS”

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to calculate the forced vibrations of a long and fine beam described by the equation of Euler-Bernoulli with the influence of an axial force and of the load  $f(t,x)$ .

The symbolic calculations are accomplished using the classical spectral basis, obtained starting from the roots of the characteristic equation, and the dynamical basis, characterized by the impulsive initial conditions.

Simulations for the Green function and forced vibrations are presented for a beam supported at one end and free, fastened, sliding and supported at the other end and subject to the action of punctual and oscillatory loads.

# INTRODUÇÃO

A dinâmica de uma estrutura é modelada, em geral, por equações diferenciais parciais, obtidas a partir da aplicação de leis e princípios físicos, sujeitos a um conjunto de condições iniciais e condições de contorno.

Neste trabalho, estuda-se, através da formulação matricial dinâmica, introduzida por Claeysen [CLA 90a], [CLA 99a], [CLA 99b], a obtenção da Função de Green relativas às vibrações transversais de vigas longas e finas, descritas pela equação de Euler-Bernoulli com a influência de uma força axial e de uma carga  $f(t,x)$ ; e um estudo das vibrações forçadas para vigas apoiadas em uma extremidade e na outra deslizante, fixa, apoiada ou livre, sob a influência de quatro cargas distintas.

Esta abordagem é feita em termos de uma base genérica para uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem. Os cálculos simbólicos são realizados utilizando a base espectral clássica, obtida a partir das raízes da equação característica, e a base dinâmica, caracterizada por condições iniciais impulsivas. A seguir, far-se-á uma breve descrição dos capítulos que formam este trabalho.

No capítulo 1 é dada uma descrição do modelo matemático correspondente a uma viga longa e fina, através da obtenção das equações de Euler-Bernoulli e das condições de contorno.

No capítulo 2 é introduzido o Modelo espectral de Fourier; propriedades dos modos de vibração e a formulação para vibrações forçadas em termos da função de Green.

Busca-se a solução geral da equação diferencial parcial não homogênea:

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{EI(x) \partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right) + N \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x)$$

No Capítulo 3 apresentar-se-ão simulações das Funções de Green obtidas para diversas vigas.

No Capítulo 4 mostrar-se-ão os resultados considerando o estudo da viga apoiada em uma extremidade e na outra deslizante, fixa, apoiada e livre, sob a influência de quatro cargas distintas.

Por fim, far-se-ão as conclusões pertinentes.

# 1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Nas equações das teorias estruturais clássicas para vigas, as descrições geométricas são grandemente simplificadas, necessitando-se apenas de uma dimensão (comprimento), uma propriedade da seção transversal (área ou momento de inércia) e uma propriedade constitutiva (Young ou cisalhamento). [FON 99] Entre dezenas de teorias de vigas há duas teorias elementares para a análise infinitesimal de vigas isotrópicas, isto é, vigas que apresentam as mesmas propriedades físicas, quaisquer sejam as direções de propagação dos fenômenos que incidem sobre elas, que são: a Teoria de Euler-Bernoulli [CRA 81], onde o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados e a teoria de Timoshenko, [DIM 95] que inclui o efeito de deformação causado pelo cisalhamento.

Neste capítulo é deduzido o modelo matemático para uma viga flexível sujeita à ação de uma força axial constante que interage com os deslocamentos laterais segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Faz-se a suposição de que as seções transversais planas permanecem sempre planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após o deslocamento. Considera também que as forças cisalhantes nas superfícies superior e inferior são nulas, porque o carregamento é transversal.

## 1.1 A teoria de Euler-Bernoulli

A viga em estudo está sujeita ao efeito de uma força paralela ao eixo horizontal além da força lateral já existente. É assumido por simplicidade que a força axial é constante e que o equilíbrio transversal não é afetado pela força axial, por que sua direção não muda com o deslocamento da viga.

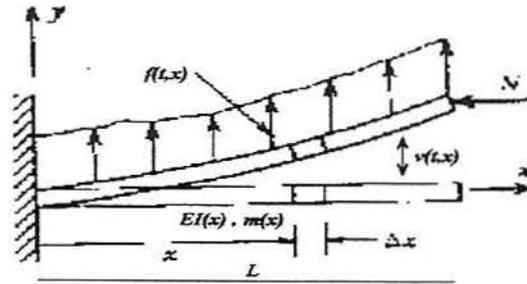


Figura 1.1 Viga fixa livre sob ação da força axial  $N$

A figura (1.1) mostra o esquema de uma viga fixa-livre de comprimento  $L$ , onde  $v(t, x)$  é o deslocamento transversal modificado por uma força axial  $N$  e  $f(t, x)$  é a força externa ou carga.

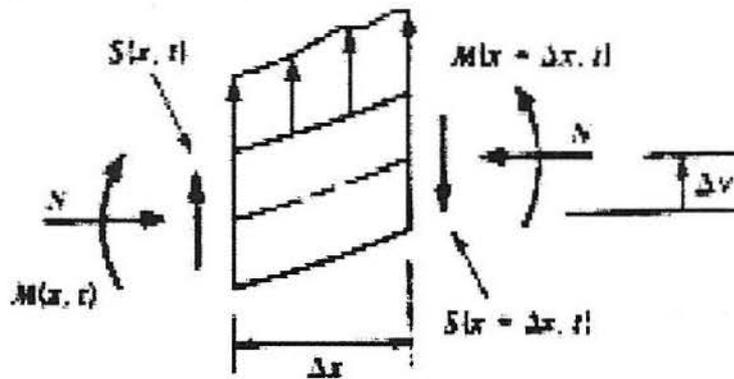


Figura 1.2 Vistas do corte transversal da viga fixa livre

No corte transversal da viga ilustrada na figura (1.2) temos  $M(t, x)$  o momento fletor da viga e  $S(t, x)$  a força cisalhamento. A viga é retangular com seção transversal  $A(x)$ , com largura  $\sigma_y$ , espessura  $\sigma_z$  e comprimento  $x$ . Também associada à viga está a rigidez flexural  $EI(x)$ , sendo  $E$  o módulo elástico de Young para a viga e  $I(x)$ , o momento de inércia sobre o eixo  $z$  e  $\rho$  a massa por unidade de volume, ou densidade de massa.

A teoria de Euler-Bernoulli supõe que:

- a) Existe um eixo da viga o qual não é submetido a extensão ou contração . O eixo  $x$  é localizado ao longo do eixo neutro.
- b) O corte transversal é perpendicular ao eixo neutro e permanece plano e perpendicular à deformação do corte, portanto, a força de cisalhamento é desconsiderada.
- c) O material é linearmente elástico e a viga é homogênea em qualquer secção do corte transversal;
- d) O plano  $xy$  é o plano principal;
- e)  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são desprezíveis comparando com  $\sigma_x$  .

Supõe, ainda, que é feito uma análise estática da viga onde se assume que a rotação de inércia pode ser desprezada na equação do momento.[CRA 81]

Da cinemática a tensão pode ser relacionada pela curvatura  $,1/\mu$ , da viga por:

$$\varepsilon = \frac{-y}{\mu} \tag{1.1}$$

onde  $\mu$  é a massa específica do material e  $y$  é a distância da secção do corte transversal ao eixo neutro. Então, para uma viga linearmente elástica cujas propriedades são independentes da posição na secção do corte transversal, o momento fletor pode ser escrito para a curvatura por:

$$M(t, x) = \frac{EI}{\mu} \tag{1.2}$$

A equação do momento para massa  $\Delta m$  no caso da viga fixa-livre pode ser representada através da segunda lei de Newton que diz:

$$\sum F_y = (\Delta m)a_y \tag{1.3}$$

e

$$\sum M_G = (\Delta I_G)\alpha \tag{1.4}$$

onde  $G$  é o centro de massa de  $\Delta m$  e  $\alpha$  é a aceleração angular. Citou-se anteriormente que a rotação de inércia poderia ser desprezada na equação do momento, reduzindo a equação (1.4) para

$$\sum M_G = 0, \quad (1.5)$$

que fornece a relação

$$S = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Se o giro,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , da viga permanece pequeno, a curvatura pode ser aproximada por  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , então a equação (1.2) que representa a equação de flexão, vem:

$$M(t, x) = EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

Segundo a mecânica dos materiais, a viga sustenta o momento fletor onde relaciona a rigidez de Young  $EI$  com o deslocamento  $v(t, x)$ . [MOS 99] Aplica-se a equação (1.3) na figura (1.2), tem-se

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + f(t, x) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.8)$$

que representa a força de cisalhamento  $S$  e o deslocamento transversal  $v(t, x)$ .

A segunda relação de equilíbrio é obtida quando aplica-se a equação (1.5) na figura (1.2).

$$M(t, x + \Delta x) - M(t, x) + N[v(t, x + \Delta x) - v(t, x)] - S(t, x + \Delta x)\Delta x = 0, \quad (1.9)$$

divide-se a equação (1.9) por  $\Delta x$  e fazendo-se o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se:

$$S = \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.10)$$

deriva-se a equação (1.10) em relação a  $x$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

e substitui-se (1.11) em (1.8) vem,

$$-\left[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + f(t, x) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.12)$$

decorre que,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(t, x). \quad (1.13)$$

Por fim, da equação (1.7) chega-se à expressão:

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{EI(x) \partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right) + N \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), \quad (1.14)$$

tal expressão representa no segundo termo o carregamento distribuído ao longo da viga que está relacionado ao momento fletor.[CLO 93]

## 1.2 Condições iniciais e de contorno

Para um problema clássico de uma viga de comprimento  $L$ , modelada pela equação (1.14), são necessárias quatro condições de contorno, duas em cada extremidade,  $x = 0$  e  $x = L$  (ocorrem derivadas de até terceira ordem de  $v(t, x)$  em relação a  $x$ ). A equação é de segunda ordem no tempo, portanto é necessário conhecer as condições iniciais, que correspondem ao deslocamento e à velocidade inicial da viga, dadas por  $v(0, x) = v_0(x)$  e  $v_t(0, x) = \dot{v}_0(x)$  onde  $v_0$  e  $\dot{v}_0$  são funções conhecidas. A configuração comum é fixa livre como se ilustra na figura (1.1). Além da fronteira ser fixa ou livre, a extremidade da viga poderá estar apoiada sobre um suporte restringindo o momento fletor e o deslocamento. Esta situação é chamada de simplesmente apoiada. Uma fronteira deslizante é aquela em que o deslocamento

é permitido, mas não a rotação. A força de cisalhamento para a fronteira deslizante é zero.

Se a viga em vibração transversal é livre em uma extremidade, o deslocamento e o giro para a extremidade são irrestritos, mas o momento fletor e a força de cisalhamento devem dissipar-se:

$$\begin{aligned} \text{Momento Fletor: } EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \text{Força de cisalhamento: } \frac{\partial}{\partial x} [EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Se, por outro lado, a extremidade da viga é fixa (ou engastada), o momento fletor e a força cortante são irrestritos, mas o deslocamento e o giro devem dissipar-se na extremidade:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento: } v &= 0, \\ \text{Giro: } \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para um suporte simples ou extremidade apoiada (rotulada), o giro e a força de cisalhamento são irrestritos, e o deslocamento e o momento fletor devem dissipar-se:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento: } v &= 0, \\ \text{Momento fletor: } EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Para a extremidade deslizante, o giro ou a rotação é zero, e nenhuma força cortante é permitida. Por outro lado, o deslocamento e o momento fletor são irrestritos. Conseqüentemente, para a fronteira deslizante,

$$\begin{aligned} \text{Giro: } \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \text{Força de cisalhamento: } \frac{\partial}{\partial x} [EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Outras condições de fronteira são possíveis pela conexão da extremidade para uma variedade de dispositivos iguais, tais como massas concentradas, molas, etc.[MOS 99].

## 2 VIBRAÇÕES FORÇADAS COM A INFLUÊNCIA DA FORÇA AXIAL

Apresentar-se-á neste capítulo a utilização dos modos no estudo de um problema relativo a uma viga sujeita ao efeito de uma força paralela ao eixo horizontal, além da força lateral já existente. A solução deste problema é obtida através do Método Espectral de Fourier .

### 2.1 Apresentação do problema

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (2.1)$$

A equação (2.1) representa uma equação diferencial parcial evolutiva de segunda ordem no tempo e de quarta ordem espacial que descreve o Modelo de Euler-Bernoulli modificado pela ação da força axial, cujo  $m$  representa  $\rho A$ , sujeitas às condições iniciais  $v(0, x) = v_0(x)$  e  $v_t(0, x) = \dot{v}_0(x)$ . As condições de contorno deste problema, podem ser escritas na forma genérica [CLA 99b],[NAI 67].

$$x = 0 \begin{cases} A_{11}v(t, 0) + B_{11}v_x(t, 0) + C_{11}v_{xx}(t, 0) + D_{11}v_{xxx}(t, 0) = 0 \\ A_{12}v(t, 0) + B_{12}v_x(t, 0) + C_{12}v_{xx}(t, 0) + D_{12}v_{xxx}(t, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

e

$$x = L \begin{cases} A_{21}v(t, L) + B_{21}v_x(t, L) + C_{21}v_{xx}(t, L) + D_{21}v_{xxx}(t, L) = 0 \\ A_{22}v(t, L) + B_{22}v_x(t, L) + C_{22}v_{xx}(t, L) + D_{22}v_{xxx}(t, L) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ou, matricialmente,

$$B_1 v(0) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t, 0) \\ v_x(t, 0) \\ v_{xx}(t, 0) \\ v_{xxx}(t, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$B_2 v(L) = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t, L) \\ v_x(t, L) \\ v_{xx}(t, L) \\ v_{xxx}(t, L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A equação(2.1) por ter coeficientes constantes pode ser escrita na forma

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + K v = f(t, x) \quad (2.8)$$

onde  $M$  é o operador  $m\mathcal{I}$ , onde  $\mathcal{I}$  denota o operador identidade e  $K$  é o operador diferencial linear espacial de quarta ordem

$$K = EI \frac{d^4}{dx^4} + N \frac{d^2}{dx^2}, \quad (2.9)$$

que satisfaz as condições iniciais  $v(0, x) = v_0(x)$  e  $v_t(0, x) = \dot{v}_0(x)$  e as condições de contorno  $B_1 v(0) = 0$ ,  $B_2 v(L) = 0$ .

## 2.2 Os Modos de vibração e a frequência característica

Uma vez que a viga em estudo não está sujeita à ação de uma força externa, isto é,  $f(t, x) = 0$ , a equação é descrita na forma,

$$M \frac{\partial v^2}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (2.10)$$

que representa a vibração livre da viga onde a oscilação ocorre sob a ação de forças que lhe são inerentes e sobre a ausência da ação de qualquer força externa. [THO 78].

No Método Espectral procuram-se encontrar soluções do tipo oscilatório na forma:

$$v(t, x) = e^{i\omega t} X(x), \quad (2.11)$$

na representação exponencial ou,

$$v(t, x) = [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)], X(x) \quad (2.12)$$

na forma real.

Aplica-se (2.11) em (2.8) e considera-se  $f(t, x) = 0$  decorre a relação

$$KX(x) - m\omega^2 X(x) = 0, \quad (2.13)$$

cujas condições de contorno são  $B_1 X(0) = 0$  e  $B_2 X(L) = 0$ .

Outra relação é obtida, substituindo-se (2.11) em (2.10) de onde extrai-se a equação modal

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0, \quad (2.14)$$

cujos coeficientes  $g^2$  e  $a^4$  são dados por:

$$g^2 = \frac{N}{EI} \quad a^4 = \frac{m\omega^2}{EI}. \quad (2.15)$$

Da relação (2.15) chega-se à expressão:

$$\omega = a^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.16)$$

que representa a frequência característica dos modos de vibração .

## 2.3 Propriedades dos Modos de Vibração

Os modos de vibração gozam das propriedades de simetria e ortogonalidade.

Para demonstrar a simetria dos modos considera-se o caso da viga fixa livre, cujas condições de contorno são:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 & \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L) = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para tanto, escreve-se a equação modal (2.14) em termos de  $\phi(x)$ ,

$$\phi^{iv}(x) + g^2 \phi^{ii}(x) - a^4 \phi(x) = 0 \quad (2.18)$$

multiplica-se (2.18) à esquerda por  $\psi(x)$  e integra-se de 0 a  $L$

$$\int_0^L \psi(x) \phi^{iv}(x) dx + g^2 \int_0^L \psi(x) \phi^{ii}(x) dx - a^4 \int_0^L \psi(x) \phi(x) dx = 0 \quad (2.19)$$

Integra-se por partes quatro vezes a primeira integral e duas vezes por partes a segunda integral e aplicam-se as condições de contorno, vem

$$\int_0^L \phi(x) \psi^{iv}(x) dx + g^2 \int_0^L \phi(x) \psi^{ii}(x) dx - a^4 \int_0^L \phi(x) \psi(x) dx = 0, \quad (2.20)$$

Comparam-se as equações (2.20) e (2.19) verifica-se a propriedade de simetria em relação aos modos  $\phi$  e  $\psi$ .

A ortogonalidade mostrar-se-á escrevendo para dois modos distintos, no caso  $\psi$  e  $\phi$  e pelas frequências  $\omega$  e  $\gamma$ .

Substituim-se os modos e as frequências na equação (2.13),

$$K\psi(x) = \omega^2\psi(x), \quad (2.21)$$

$$K\phi(x) = \gamma^2\phi(x) \quad (2.22)$$

que satisfaz as condições de contorno citadas em (2.17).

Multiplica-se (2.21) por  $\phi(x)$  e (2.22) por  $\psi(x)$  vem,

$$\phi(x)K\psi(x) = \phi(x)\omega^2\psi(x) \quad (2.23)$$

e

$$\psi(x)K\phi(x) = \psi(x)\gamma^2\phi(x) \quad (2.24)$$

Subtrai-se (2.24) de (2.23), decorre a expressão:

$$\phi(x)K\psi(x) - \psi(x)K\phi(x) = (\omega^2 - \gamma^2)\psi(x)\phi(x); \quad (2.25)$$

integra-se (2.25) de 0 a  $L$  e sabendo-se que  $K$  é um operador simétrico, escreve-se:

$$(\omega^2 - \gamma^2) \int_0^L \psi(x)\phi(x)dx = 0; \quad (2.26)$$

se  $\omega \neq \gamma$ ,  $\psi$  e  $\phi$  são ortogonais.

## 2.4 A equação modal

A solução da equação diferencial homogênea

$$X^{iv}(x) + g^2 X''(x) - a^4 X(x) = 0 \quad (2.27)$$

cujas condições de contorno são:

$$x = 0 \begin{cases} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) + C_{11}X''(0) + D_{11}X'''(0) = 0 \\ A_{12}X(0) + B_{12}X'(0) + C_{12}X''(0) + D_{12}X'''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

e

$$x = L \begin{cases} A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) + C_{21}X''(L) + D_{21}X'''(L) = 0 \\ A_{22}X(L) + B_{22}X'(L) + C_{22}X''(L) + D_{22}X'''(L) = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

é dada por uma combinação linear das soluções:

$$X(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4, \quad (2.30)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  são constantes e o conjunto  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  é uma base de soluções, onde o Wroskiano ( $x$ ) é não nulo.

Escreve-se matricialmente a solução da equação modal (2.14):

$$X = \phi c, \quad (2.31)$$

onde,

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Substituem-se, as condições de contorno indicadas em (2.28) e(2.29) na equação (2.30)

$$x = 0 \begin{cases} A_{11}\phi(0)c + B_{11}\phi'(0)c + C_{11}\phi''(0)c + D_{11}\phi'''(0)c = 0 \\ A_{12}\phi(0) + B_{12}\phi'(0) + C_{12}\phi''(0) + D_{12}\phi'''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

e

$$x = L \begin{cases} A_{21}\phi(L)c + B_{21}\phi_x(L)c + C_{21}\phi''(L)c + D_{21}\phi'''(L)c = 0 \\ A_{22}\phi(L)c + B_{22}\phi'(L)c + C_{22}\phi''(L)c + D_{22}\phi'''(L)c = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

matricialmente, tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \\ \phi''(0) \\ \phi'''(0) \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(L) \\ \phi'(L) \\ \phi''(L) \\ \phi'''(L) \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde ,  $B_1$  e  $B_2$  são as matrizes das condições de contorno,  $\phi$  é o vetor da base espectral e  $c$  vetor das constantes.

Escreve-se (2.35) e (2.36) de forma compacta descrita por,

$$B\Phi c = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \\ \phi''(0) \\ \phi'''(0) \\ \phi(L) \\ \phi'(L) \\ \phi''(L) \\ \phi'''(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

representam a matriz das condições de contorno, o vetor das incógnitas e a matriz da base respectivamente.

## 2.5 O método espectral para vibrações forçadas com a influência da força axial

Supõe-se que o problema de contorno simétrico possua um conjunto ortonormal completo de autofunções [BIR 62] com respeito ao produto interno funcional

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^L \phi \psi dx \quad (2.40)$$

para  $\phi, \psi$ , funções contínuas no intervalo  $[0, L]$ . Denota-se por

$$\|\psi\| = \left[ \int_0^L \psi^2 dx \right]^{1/2} \quad (2.41)$$

a norma de uma função [DAV 90]

A solução geral da equação (2.8), pelo método espectral, escreve-se na forma:

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x) \quad (2.42)$$

onde  $X_n(x)$  são os modos relativos às condições de contorno do problema e os coeficientes temporais  $v_n(t)$  obtêm-se da seguinte maneira:

Substitui-se a equação (2.42) na equação (2.8):

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\ddot{v}_n X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n K X_n(x) = f(t, x), \quad (2.43)$$

Da equação (2.13) vem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [m\ddot{v}_n(t) + m\omega^2 v_n(t)] X_n(x) = f(t, x). \quad (2.44)$$

Efetua-se o produto interno com o modo  $X_p(x)$  nos dois termos da equação

$$\langle X_p(x), \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{v}_n(t) + \omega^2 v_n(t)] \rangle = \frac{1}{m} \langle X_p(x), f(t, x) \rangle, \quad (2.45)$$

e assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{v}_n(t) + \omega^2 v_n(t)] \int_0^L X_p(x) X_n(x) dx = \frac{1}{m} \int_0^L f(t, x) X_p(x) dx. \quad (2.46)$$

Pela a ortogonalidade dos modos (2.26),

$$\int_0^L X_p(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ \|X_n\|^2, & \text{se } p = n \end{cases} \quad (2.47)$$

decorre que:

$$\ddot{v}_n(t) + \omega^2 v_n(t) = Q_n(t) \quad (2.48)$$

em que

$$Q_n(t) = \frac{1}{m\|X_n\|^2} \int_0^L f(t, x)X_n(x)dx \quad (2.49)$$

Busca-se encontrar a solução da equação (2.48) , para tanto, considera-se

$$h(t) = \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}, \quad (2.50)$$

que satisfaz o problema de valor inicial

$$\ddot{h} + \omega^2 h = 0 \quad (2.51)$$

onde

$$h(0) = 0 \text{ e } \dot{h}(0) = 1 \quad (2.52)$$

Escreve-se a equação(2.48) em termos de  $\tau$

$$\ddot{v}_n(\tau) + \omega^2 v_n(\tau) = Q_n(\tau) \quad (2.53)$$

e multiplicam-se ambos os lados da equação (2.53) por

$$h(t - \tau) = \frac{\text{sen}\omega_n(t - \tau)}{\omega_n} \quad (2.54)$$

decorre que

$$\int_0^t \ddot{v}_n(\tau) \frac{\text{sen}\omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau + \omega^2 \int_0^t v_n(\tau) \frac{\text{sen}\omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau = \int_0^t Q_n(\tau) \frac{\text{sen}\omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau \quad (2.55)$$

Integram-se duas vezes por partes o primeiro termo e resolve-se para  $v_n(t)$ , tem-se:

$$v_n(t) = \cos(\omega_n t)v_n(0) + \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \dot{v}_n(0) + \int_0^t Q_n(\tau) \frac{\text{sen}\omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau \quad (2.56)$$

Da equação(2.41) e das condições iniciais prescritas no problema,  $v(0, x) = v_0(x)$  e  $v_t(0, x) = \dot{v}_0(x)$ , obtêm-se os valores iniciais  $v_n(0)$  e  $\dot{v}_n(0)$ . Mais precisamente,

da relação

$$v(0, x) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)X_n(x)dx; \tag{2.57}$$

Aplica-se a ortogonalidade dos modos para obter

$$v_n(0) = \frac{\int_0^L v_0(x)X_n(x)dx}{\|X_n\|^2}. \tag{2.58}$$

Igualmente, com a derivada inicial, decorre

$$\dot{v}_n(x) = \frac{\int_0^L \dot{v}_0(x)X_n(x)dx}{\|X_n\|^2}. \tag{2.59}$$

Utilizando (2.58) e (2.59), chega-se a expressão:

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(w_n t) (\frac{\int_0^L v_0(x)X_n(x)dx}{\|X_n\|^2}) + \frac{\text{sen}(w_n t)}{w_n} (\frac{\int_0^L \dot{v}_0(x)X_n(x)dx}{\|X_n\|^2}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^t Q_n(\tau) \frac{\text{sen}w_n(t-\tau)}{w_n} d(\tau))] X_n(x) \tag{2.60}$$

Troca-se a ordem do somatório pela integral em (2.60), vem

$$v(t, x) = \int_0^L [\frac{\partial h}{\partial t}(t, x, s)mv_0(s) + h(t, x, s)m\dot{v}_0(s) + \int_0^t h(t - \tau, x, s)f(\tau, s)d\tau] ds \tag{2.61}$$

onde

$$h(t, x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{X_n(s)X_n(x)}{\|X_n\|^2}) \frac{\text{sen}w_n t}{w_n} \frac{1}{m} \tag{2.62}$$

vem ser a Função de Green de valor inicial ou resposta impulso do sistema distribuído, onde  $\|X_n\|$  denota a norma integral quadrática do modo  $X_n$ . Na equação (2.61) tem-se nos dois primeiros termos a vibração livre e no terceiro termo a vibração forçada de uma viga sujeita à força axial e à carga externa  $f(t,x)$

Para condições iniciais nulas, isto é,  $v(0) = 0$  e  $\dot{v}(0) = 0$  a equação (2.61) pode ser escrita na forma compacta

$$v(t, x) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) F(\tau) d\tau, \quad (2.63)$$

onde  $\mathbf{h}$  é abreviação do operador

$$\mathbf{h}(t)\phi(x) = \int_0^L \mathbf{h}(t, x, s)\phi(s)ds. \quad (2.64)$$

Para cada  $\tau$ ,  $F(\tau)$  denota a função  $f(\tau, s)$ , no intervalo  $0 \leq s \leq L$ .

### 3 CÁLCULO MODAL DA FUNÇÃO DE GREEN

Mostrar-se-ão neste capítulo simulações da Função de Green, equação(2.62), para vigas sujeitas a diversas condições de contorno citadas no Cap.1, para tanto, serão utilizados os modos obtidos em [SOD 00].

Consideram-se duas bases: a base espectral clássica, obtida a partir das raízes da equação característica, associada com a equação diferencial ordinária linear de quarta ordem e a base dinâmica, introduzida por Claeysen [CLA 90a], [CLA 95], [CLA 99a], [CLA 99b], que se consegue a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas.

#### 3.1 Cálculo dos Modos $X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0$

Os modos são obtidos resolvendo-se o sistema :

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0 \quad (3.1)$$

sujeito as condições de contorno

$$x = 0 \begin{cases} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) + C_{11}X''(0) + D_{11}X'''(0) = 0 \\ A_{12}X(0) + B_{12}X'(0) + C_{12}X''(0) + D_{12}X'''(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$x = L \begin{cases} A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) + C_{21}X''(L) + D_{21}X'''(L) = 0 \\ A_{22}X(L) + B_{22}X'(L) + C_{22}X''(L) + D_{22}X'''(L) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Isto equivale a obter soluções não nulas da equação modal

$$Uc = 0, \tag{3.4}$$

onde,

$$U = B\Phi \tag{3.5}$$

e por sua vez, as matrizes  $U$  e  $\Phi$  são indicadas por:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

### 3.2 A Matriz Base $\Phi$ na base espectral clássica e na base dinâmica

A solução da equação modal (2.14) é feita da maneira usual com a introdução da solução espectral

$$X(x) = e^{\lambda x}, \tag{3.7}$$

onde se extrai a equação característica

$$\lambda^4 + g^2\lambda^2 - a^4 = 0, \tag{3.8}$$

cujas raízes fornecem os autovalores  $\lambda$  e as autofunções associadas  $X$ .

Resolve-se o polinômio característico de ordem 4 onde se obtém os seguintes autovalores :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\delta \quad \lambda_{3,4} = \pm \epsilon \tag{3.9}$$

cujo  $\delta$  e  $\epsilon$  estão indicados por,

$$\delta = \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} + \frac{g^2}{2}} \quad \epsilon = \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} - \frac{g^2}{2}} \quad (3.10)$$

em que,

$$g^2 = \frac{N}{EI} \quad a^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (3.11)$$

Escreve-se a solução encontrada na forma trigonométrica e sua correspondente na forma hiperbólica, chega-se à solução geral da equação (2.14):

$$X(x) = c_1 \text{sen}(\delta x) + c_2 \text{cos}(\delta x) + c_3 \text{senh}(\epsilon x) + c_4 \text{cosh}(\epsilon x). \quad (3.12)$$

Da solução geral, apresentada em (3.12) com relação à base espectral clássica, obtiveram-se as seguintes funções:

$$\phi_1 = \text{sen}(\delta x), \quad \phi_2 = \text{cos}(\delta x), \quad \phi_3 = \text{senh}(\epsilon x), \quad \phi_4 = \text{cosh}(\epsilon x) \quad (3.13)$$

Assim, apresenta-se a matriz clássica:

$$\Phi^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \delta & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\delta^2 & 0 & \epsilon^2 \\ -\delta^3 & 0 & \epsilon^3 & 0 \\ \text{sen}(\delta L) & \text{cos}(\delta L) & \text{senh}(\epsilon L) & \text{cosh}(\epsilon L) \\ \delta \text{cos}(\delta L) & -\delta \text{sen}(\delta L) & \epsilon \text{cosh}(\epsilon L) & \epsilon \text{senh}(\epsilon L) \\ -\delta^2 \text{sen}(\delta L) & -\delta^2 \text{cos}(\delta L) & \epsilon^2 \text{senh}(\epsilon L) & \epsilon^2 \text{cosh}(\epsilon L) \\ -\delta^3 \text{cos}(\delta L) & \delta^3 \text{sen}(\delta L) & \epsilon^3 \text{cosh}(\epsilon L) & \epsilon^3 \text{senh}(\epsilon L) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Já na Base Dinâmica, a resposta impulso  $h(x)$  é determinada quando se resolve o sistema homogêneo

$$h^{iv}(x) + g^2 h^{ii}(x) - a^4 h(x) = 0 \quad (3.15)$$

com as condições iniciais impulsivas  $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, h'''(0) = 1$ , o conjunto  $h, h', h'', h'''$  é uma base de soluções, dado por:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = h(x) &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \frac{-1}{\delta} \text{sen}(\delta x) + \frac{1}{\epsilon} \text{senh}(\epsilon x) \right), \\ \Psi_2 = h'(x) &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( -\cos(\delta x) + \cosh(\epsilon x) \right), \\ \Psi_3 = h''(x) &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \delta \text{sen}(\delta x) + \epsilon \text{senh}(\epsilon x) \right), \\ \Psi_4 = h'''(x) &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \delta^2 \cos(\delta x) + \epsilon^2 \cosh(\epsilon x) \right), \end{aligned}$$

cujo  $\delta$  e  $\epsilon$  estão indicados em (3.10).

Neste caso, a matriz Dinâmica é indicada por:

$$\Psi^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\delta^2 + \epsilon^2 \\ 1 & 0 & -\delta^2 + \epsilon^2 & 0 \\ \frac{-\text{sen}(\delta L) + \frac{\text{senh}(\epsilon L)}{\epsilon}}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\cos(\delta L) + \cosh(\epsilon L)}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\text{sen}(\delta L)\delta + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\cos(\delta L)\delta^2 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^2}{\delta^2 + \epsilon^2} \\ \frac{-\cos(\delta L) + \cosh(\epsilon L)}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\text{sen}(\delta L)\delta + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\cos(\delta L)\delta^2 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^2}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\text{sen}(\delta L)\delta^3 + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon^3}{\delta^2 + \epsilon^2} \\ \frac{\text{sen}(\delta L)\delta + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\cos(\delta L)\delta^2 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^2}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\text{sen}(\delta L)\delta^3 + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon^3}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\cos(\delta L)\delta^4 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^4}{\delta^2 + \epsilon^2} \\ \frac{\cos(\delta L)\delta^2 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^2}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\text{sen}(\delta L)\delta^3 + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon^3}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{-\cos(\delta L)\delta^4 + \cosh(\epsilon L)\epsilon^4}{\delta^2 + \epsilon^2} & \frac{\text{sen}(\delta L)\delta^5 + \text{senh}(\epsilon L)\epsilon^5}{\delta^2 + \epsilon^2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Para maiores detalhes, cita-se [SOD 00].

### 3.3 A Função de Green

Mostrar-se-á aqui o gráfico da Função de Green,

$$h(t, x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{X_n(s)X_n(x)}{m\|X_n(x)\|^2} \right) \frac{\text{sen}w_n t}{w_n} \quad (3.17)$$

para diversas vigas, em intervalos finitos de  $t$ .

Para melhorar a visualização foi realizado uma simplificação de forma linear nos parâmetros encontrados em [MOS 99]:

$$\begin{aligned} L &= 1\text{m} \\ EI &= 8\text{Nm}^2 \\ N &= 16 \text{ N} \\ m &= 3 \text{ kg/m} \\ I &= 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A escolha do do valor de  $t$  foi determinada através de testes, na busca de uma melhor apresentação da Função de Green, o qual foi aproximada com o uso dos primeiros cinco modos.

### 3.3.1 Viga Apoiada Deslizante

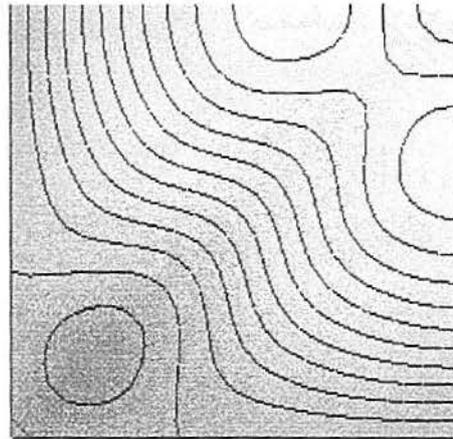


Figura 3.1 Linhas de contorno da Função de Green para a Viga Apoiada Deslizante em  $t=3.6$

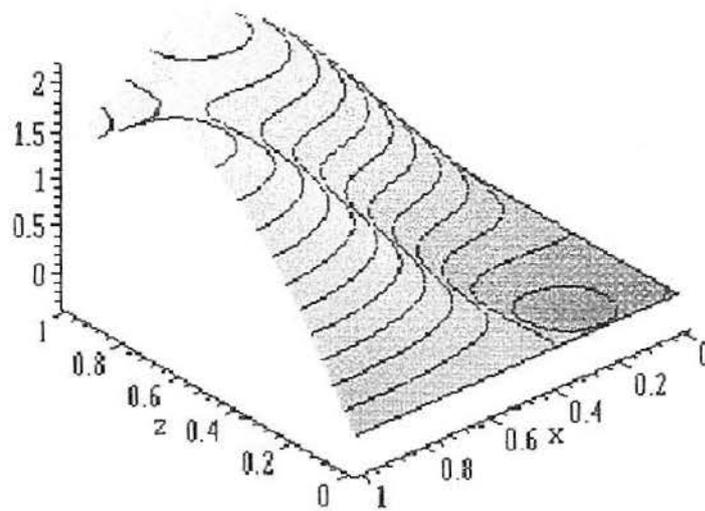


Figura 3.2 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Apoiada Deslizante em  $t=3.6$

### 3.3.2 Viga Apoiada Livre

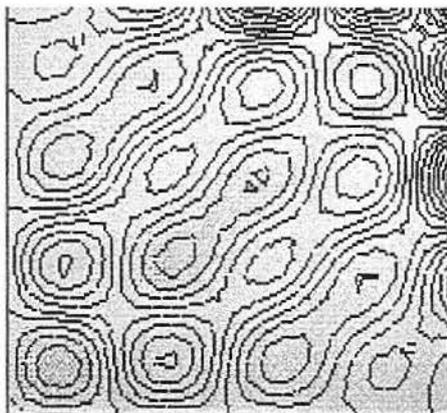


Figura 3.3 Linhas de contorno da Função de Green para Viga Apoiada Livre em  $t=3.5$

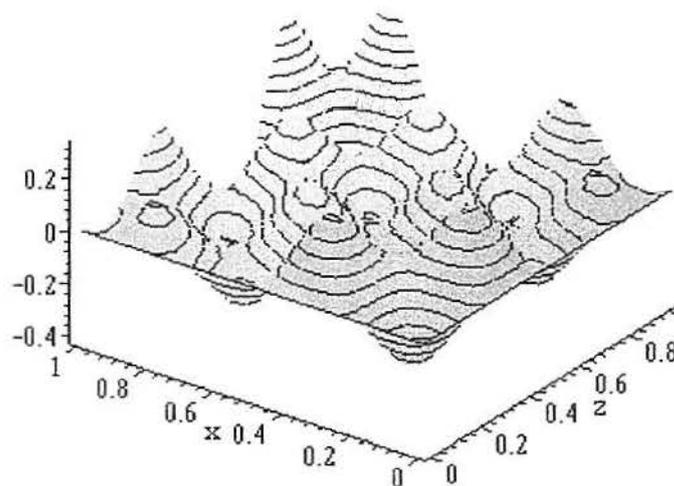


Figura 3.4 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Apoiada Livre em  $t=3.5$

### 3.3.3 Viga Biapoiada

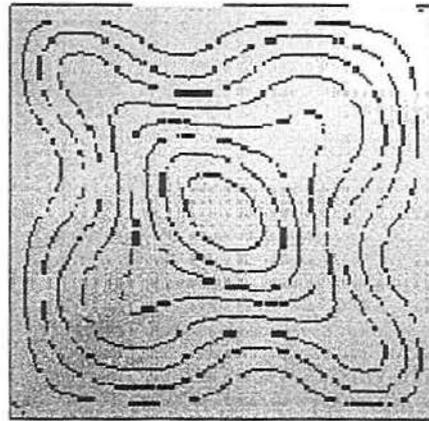


Figura 3.5 Linhas de Contorno da Função de Green para Viga Biapoiada em  $t=4.45$

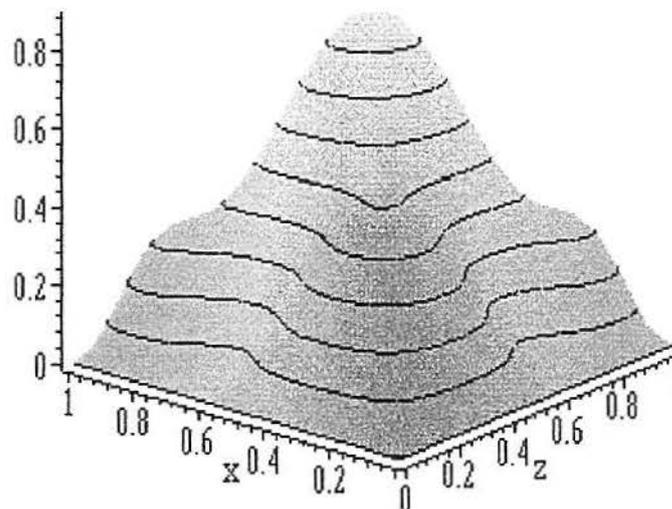


Figura 3.6 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Biapoiada em  $t=4.45$

### 3.3.4 Viga Deslizante - Deslizante

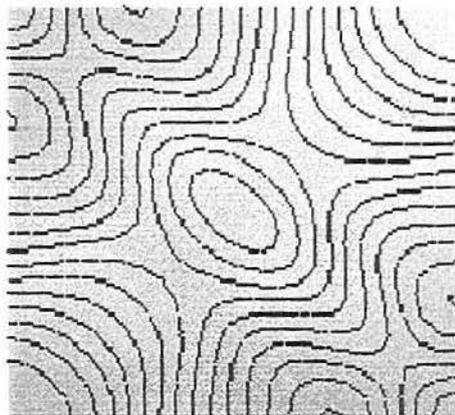


Figura 3.7 Linhas de contorno da Função de Green para Viga Deslizante-Deslizante em  $t=0.9$

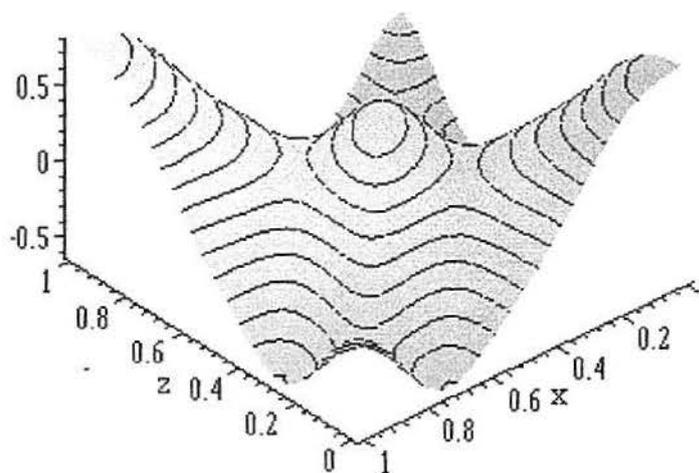


Figura 3.8 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Deslizante-Deslizante em  $t=0.9$

### 3.3.5 Viga Fixa Apoiada

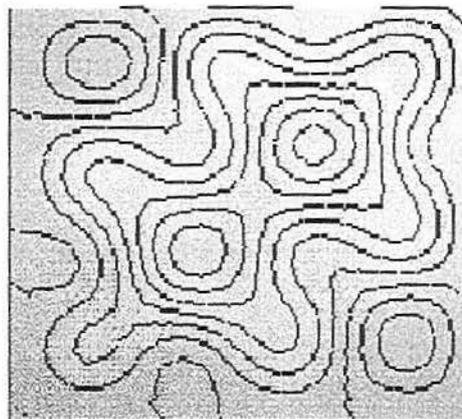


Figura 3.9 Linhas de contorno da Função de Green paraa Viga Fixa Apoiada em  $t=3$

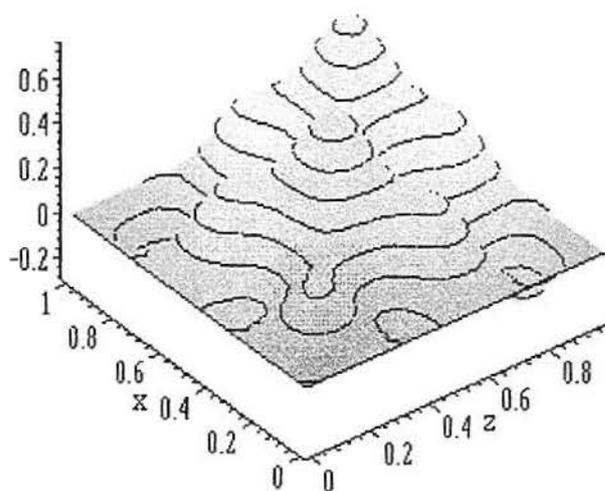


Figura 3.10 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Fixa Apoiada em  $t=3$

### 3.3.6 Viga Fixa Deslizante

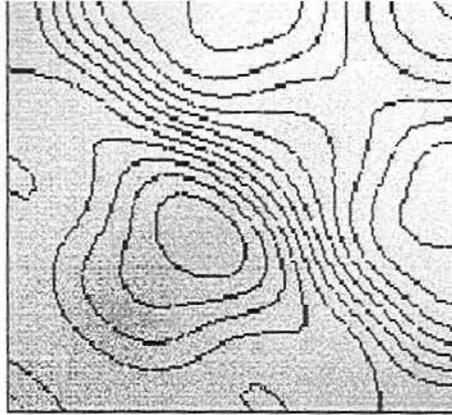


Figura 3.11 Linhas de contorno da Função de Green da Viga Fixa Deslizante em  $t=1.9$

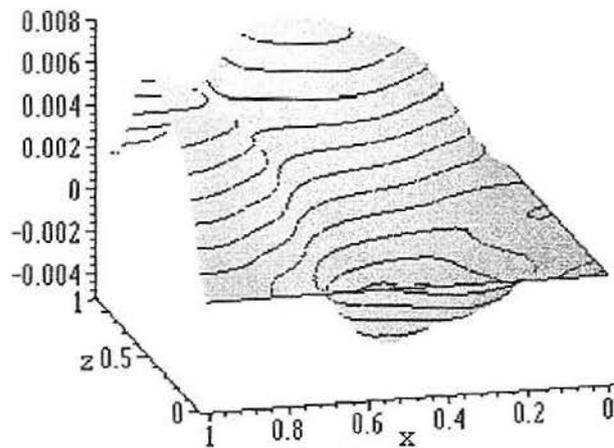


Figura 3.12 Gráfico 3D da Função de Green paraa Viga Fixa Deslizante em  $t=1.9$

### 3.3.7 Viga Fixa - Fixa

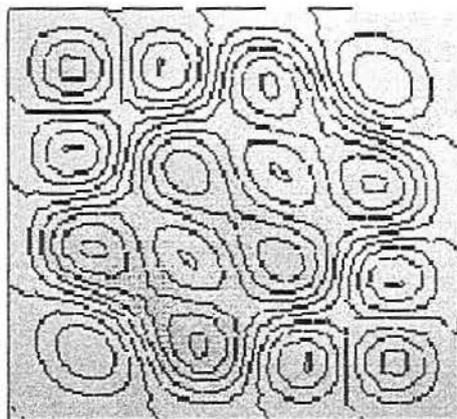


Figura 3.13 Linhas de contorno da Função de Green da Viga Fixa-Fixa em  $t=2.85$

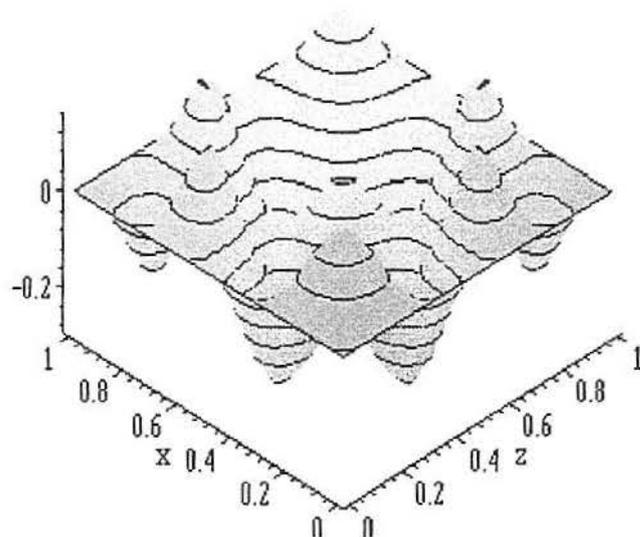


Figura 3.14 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Fixa-Fixa em  $t=2.85$

### 3.3.8 Viga Fixa Livre

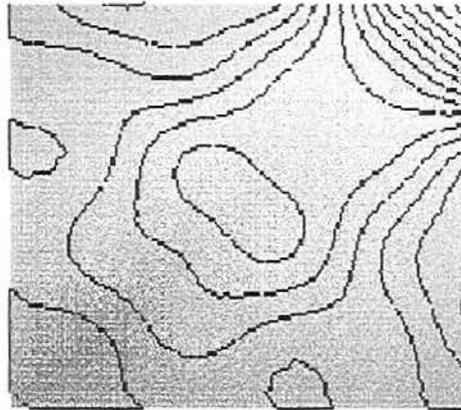


Figura 3.15 Linhas de contorno da Função de Green para Viga Fixa Livre em  $t=1$

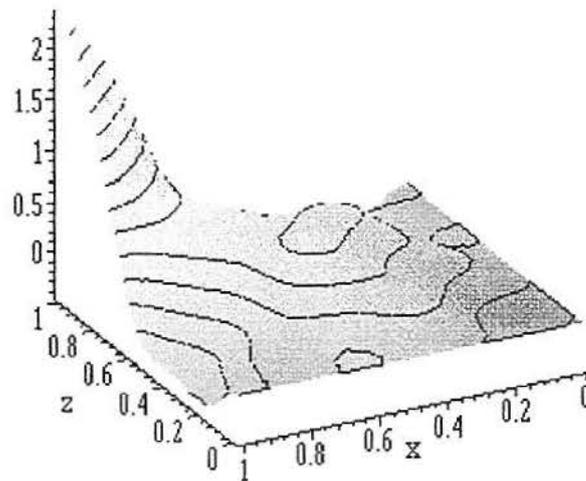


Figura 3.16 Gráfico 3D da Função de Green da Viga Fixa Livre em  $t=1$

### 3.3.9 Viga Livre Deslizante

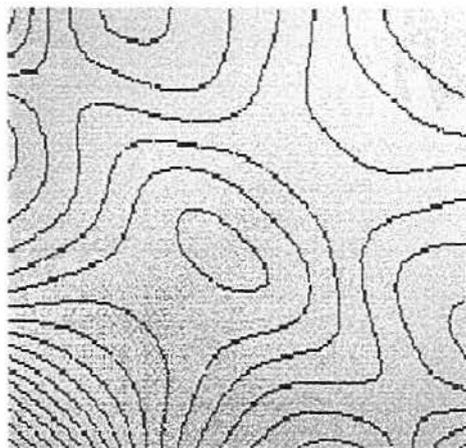


Figura 3.17 Linhas de contorno da Função de Green da Viga Livre Deslizante em  $t=1.2$

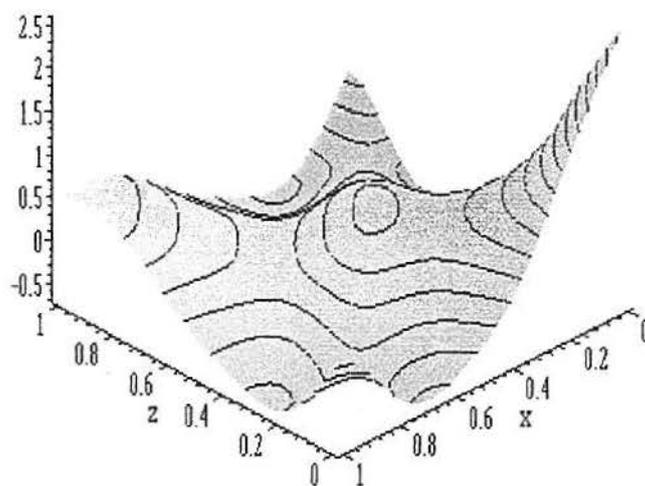
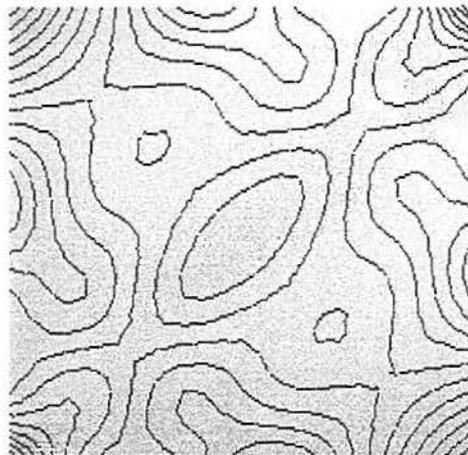
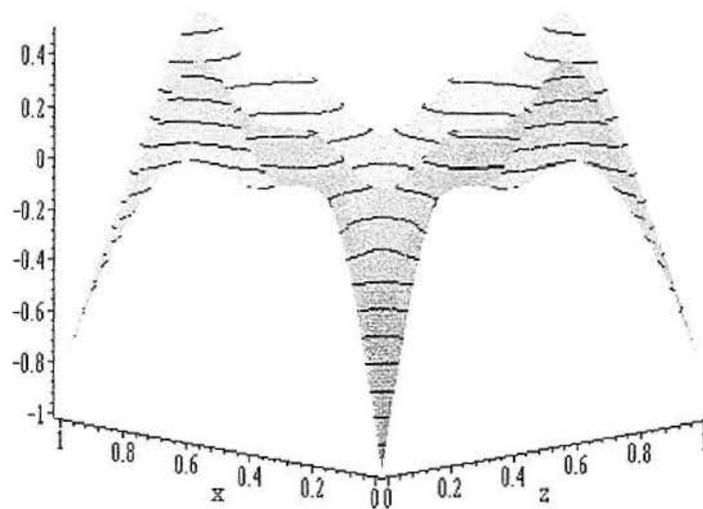


Figura 3.18 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Livre Deslizante em  $t=1.2$

## 3.3.10 Viga Livre - Livre

Figura 3.19 Linhas de Contorno da Função de Green da Viga Livre Livre em  $t=3$ Figura 3.20 Gráfico 3D da Função de Green para Viga Livre Livre em  $t=3$

## 4 VIBRAÇÕES FORÇADAS DECORRENTES DE CARGAS PONTUAIS E OSCILATÓRIAS

Apresentar-se-à, neste capítulo, os resultados simulados para as vigas apoiadas em um extremo e deslizante, livre, apoiada e fixa no outro extremo. Para estas vigas estuda-se a ação de cargas do tipo :pontual e de pulso oscilatório

### 4.1 A Carga $f(t,x)$

Nesta parte expor-se-ão os tipos de cargas que serão aplicadas às vigas apoiada em uma extremidade. Considera-se o comprimento da viga igual a um ( $L = 1$ ).

#### 4.1.1 Carga Pontual

Sobre um ponto  $a$  da viga aplica-se-á uma carga cuja equação e os parâmetros de entrada estão indicados na tabela a seguir:

Valores de Entrada			Carga
$P_0$	$\hat{\omega}$	$a$	$f(t, x)$
1000	10	1/2	$P_0 \text{sen}(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$

Tabela 4.1 Valores de entrada e carga pontual

### 4.1.2 Soma de Cargas Pontuais

Observar-se-á a influência de um conjunto de cargas pontuais aplicados em diferentes pontos da viga indicadas na tabela abaixo:

Valores de entrada				Carga
$n$	$P_{0,n}$	$\hat{\omega}_n$	$a_n$	$f(t, x)$
1	1000	20		$\sum_{n=1}^N P_{0,n} \text{sen}(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a_n)$
2	250	40	1/3	
3	1000/9	60	1/2	
4	125/2	80	2/3	
5	40	100	5/6	

Tabela 4.2 Valores de entrada e soma de cargas pontuais

### 4.1.3 Pulso Oscilatório

Sobre uma região da viga,  $[a, b]$ , aplicar-se-á uma carga de pulso oscilatório a qual é constituída pela função Heaviside, conforme tabela:

Valores de entrada				Carga
$P_0$	$\hat{\omega}$	$a$	$b$	$f(t, x)$
1000	10	1/2	4/5	$P_0 \text{sen}(\hat{\omega}_n t) [H(x - a) - H(x - b)]$

Tabela 4.3 Valores de entrada e pulso oscilatório

#### 4.1.4 Soma de Pulsos Oscilatórios

Aplicar-se-ão ao longo da viga mais de um pulso, neste estudo assumir-se-ão os seguintes valores de entrada e a carga descrita na tabela:

Valores de Entrada					Carga
$n$	$P0_n$	$\hat{\omega}_n L$	$a_n$	$b_n$	$f(t, x)$
1	1000	20	0.2	0.3	$\sum_{n=1}^N P_{0,n} \text{sen}(\hat{\omega}_n t) [H(x - a_n) - (H - b_n)]$
2	250	40	0.5	0.6	
3	1000/9	60	0.8	0.9	

Tabela 4.4 Valores de entrada e soma de pulsos oscilatórios

## 4.2 Simulações da Vibração Forçada em Vigas

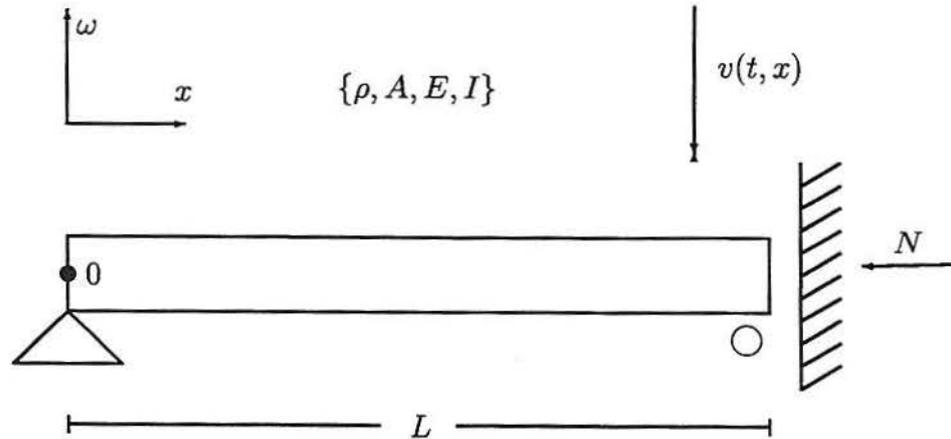
Nesta seção apresentar-se-ão os resultados obtidos através de simulações realizadas com auxílio do software MapleV para vigas apoiadas em uma extremidade.

Utilizou-se condições iniciais nulas para que se possa observar o efeito da parte forçada quando a viga está sujeita a ação da carga  $f(t, x)$  em estudo.

Para melhor visualização dos resultados mostrar-se-ão os seguintes gráficos:

- (a) Deslocamento  $3D$  ao longo da viga
- (b) Deslocamento  $3D$  da viga no tempo

## 4.2.1 Viga Apoiada Deslizante



**Equação governante:**

$$\rho A v_{tt}(t, x) + EI v_{xxxx}(t, x) + N v_{xx}(t, x) = f(t, x)$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= v_{xx}(t, 0) = 0, \\ v_x(t, L) &= v_{xxx}(t, L) = 0 \end{aligned}$$

**Equação modal:**

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} X(0) &= X''(0) = 0 \\ X'(L) &= X'''(L) = 0 \end{aligned}$$

**Equação característica:**

$$\cos(\delta L) \cosh(\epsilon L) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} + \frac{g^2}{2}} \\ \epsilon &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} - \frac{g^2}{2}} \end{aligned}$$

**Frequência natural e Autovalores**

$n$	$\omega_n$	$\delta_n L$	$\epsilon_n L$
1	5.421652980	1.570796327	2.113622743I
2	37.86103515	4.712388981	4.920021332I
3	102.3511951	7.853981635	7.980289940I
4	199.0595023	10.99557429	11.08614694I
5	327.9981076	14.13716695	14.20772640I

Modos Clássicos e Dinâmicos e a Função de Green			
$X_n^c$	$X_n^d$	$\sigma_n^d$	$h(t, x, s)$
$\phi_1(x)$	$\Psi_1(x)\sigma_n^d + \Psi_3(x)$	$\frac{(\cos(\delta_n L)\delta_n^2 + \cosh(\epsilon_n L)\epsilon_n^2)}{(\cos(\delta_n L) - \cosh(\epsilon_n L))}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(s)X_n(x)}{m X_n ^2} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}$

Onde,

$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{sen}(\delta x), \\ \Psi_1 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \frac{-1}{\delta} \text{sen}(\delta x) + \frac{1}{\epsilon} \text{senh}(\epsilon x) \right), \\ \Psi_3 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} (\delta \text{sen}(\delta x) + \epsilon \text{senh}(\epsilon x)). \end{aligned}$	(4.1)
---	-------

## 4.2.1.1 Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da carga pontual

$$v(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\delta_n a)(\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega} t)) \text{sen}(\delta_n x)}{\omega_n (\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

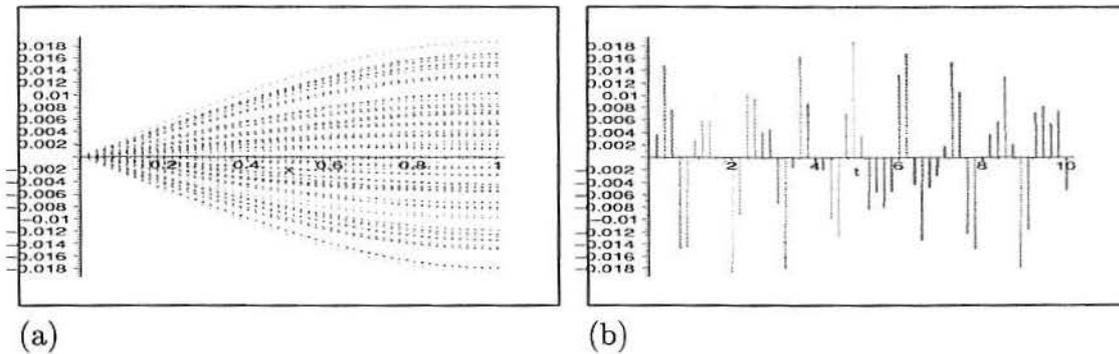


Figura 4.1 Viga apoiada deslizante sujeita a carga pontual

## 4.2.1.2 Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação de uma soma de cargas pontuais

$$v(t, x) = \frac{1}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{P_{0,p} \text{sen}(\delta_n a_p)(\hat{\omega}_p \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}_p t)) \text{sen}(\delta_n x)}{\omega_n (\hat{\omega}_p^2 - \omega_n^2) \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

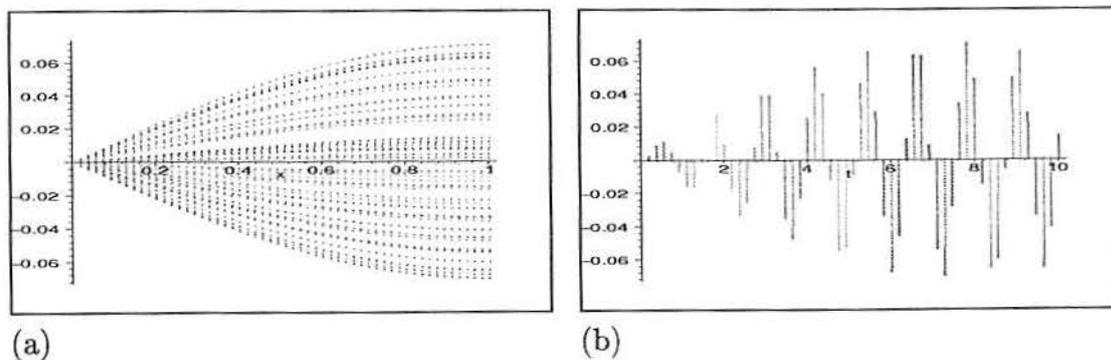


Figura 4.2 Viga apoiada deslizante sujeita a soma de cargas pontuais

#### 4.2.1.3 Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da carga de pulso oscilatório

$$v(t, x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-P_0(-\cos(\delta_n a) + \cos(\delta_n b))(-\text{sen}(\hat{\omega}t)\omega_n) + \text{sen}(\omega_n t)\hat{\omega}) \text{sen}(\delta_n x)}{\delta_n(\hat{\omega} + \omega_n)(\hat{\omega} - \omega_n)}}{\rho A \omega_n \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

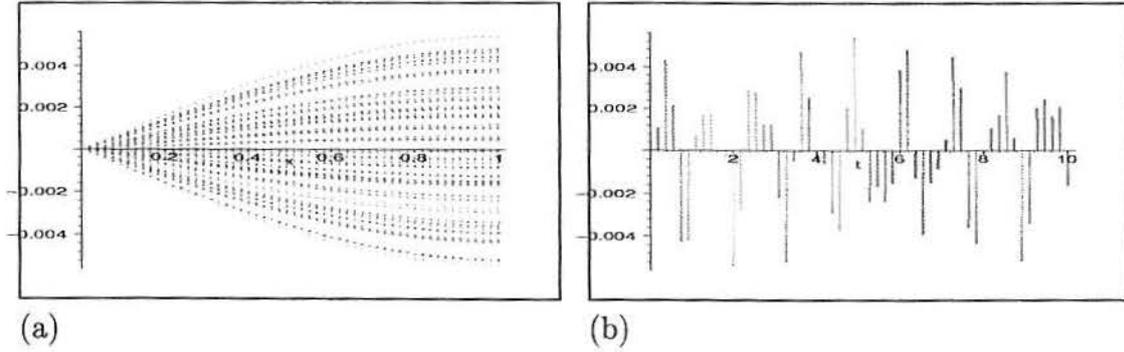


Figura 4.3 Viga apoiada deslizante sujeita a um pulso oscilatório

#### 4.2.1.4 Solução para Viga Apoiada Deslizante sob ação da soma de cargas de pulso oscilatório

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{(-P_{0,p}(-\cos(\delta_n a_p) + \cos(\delta_n b_p))(-\text{sen}(\hat{\omega}_p t)\omega_n) + \text{sen}(\omega_n t)\hat{\omega}_p) \text{sen}(\delta_n x)}{\delta_n(\hat{\omega}_p + \omega_n)(\hat{\omega}_p - \omega_n)} \frac{1}{\rho A \omega_n \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

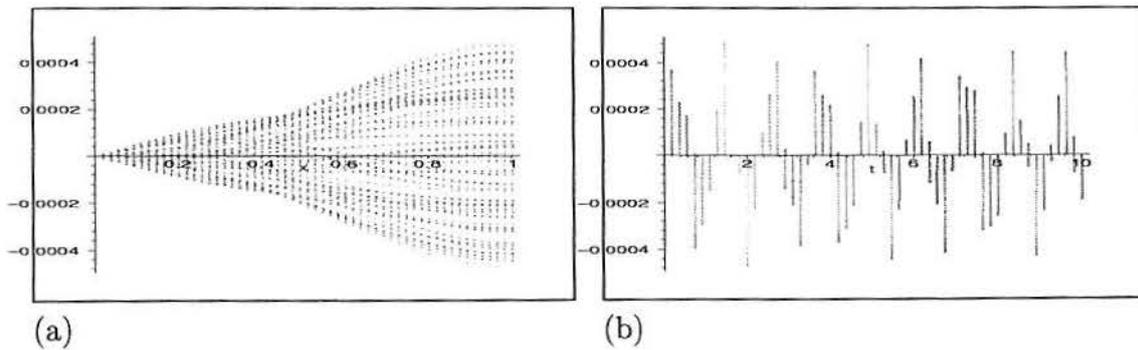
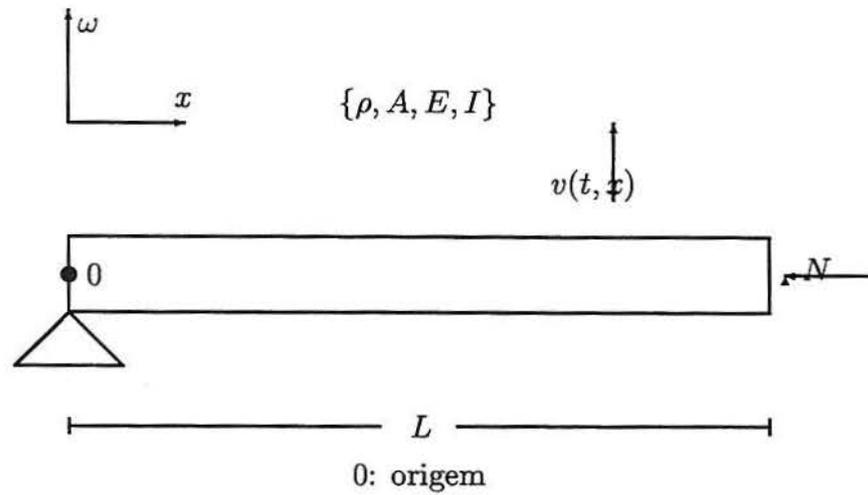


Figura 4.4 Viga apoiada deslizante sujeita soma de pulsos oscilatórios

## 4.2.2 Viga Apoiada Livre

**Equação governante:**

$$\rho A v_{tt}(t, x) + EI v_{xxxx}(t, x) + N v_{xx}(t, x) = f(t, x)$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) &= 0, \\ v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) &= 0 \end{aligned}$$

**Equação modal:**

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} X(0) = X''(0) &= 0 \\ X''(L) = X'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

**Equação característica:**

$$\epsilon \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon^2 + g^2} L) - \sqrt{\epsilon^2 + g^2} \operatorname{tgh}(\epsilon L) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} + \frac{g^2}{2}} \\ \epsilon &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} - \frac{g^2}{2}} \end{aligned}$$

**Freqüência natural e Autovalores**

$n$	$\omega_n$	$\delta_n L$	$\epsilon_n L$
1	27.85077116	3.960454421	3.699351189
2	81.07357187	7.078764482	6.936058637
3	159.1635112	10.21501429	10.11664554
4	212.9233849	13.35458816	13.27949641
5	371.8612939	16.49510583	16.43447034

Modos Clássicos e Dinâmicos e a Função de Green		
$X_n^c$	$X_n^d$	$h(t, x, s)$
$\sigma_n^c \phi_1 + \frac{1}{\sinh(\epsilon_n L)} \phi_3$ M	$\sigma_n^d \Psi_1 + \Psi_3$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{X_n(s) X_n(x)}{m \ X_n\ ^2} \right) \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}$
$\sigma_n^c$	$\sigma_n^d$	
$\frac{\epsilon_n^2}{\delta^2 \text{sen}(\delta_n L)}$	$\frac{\text{sen}(\delta_n L) \delta_n^3 - \text{senh}(\epsilon_n L) \epsilon_n^3}{\text{sen}(\delta_n L) \delta_n + \text{senh}(\epsilon_n L) \epsilon_n}$	

Onde,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \text{sen}(\delta x), \\
 \phi_3 &= \text{senh}(\epsilon x), \\
 \Psi_1 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \frac{-1}{\delta} \text{sen}(\delta x) + \frac{1}{\epsilon} \text{senh}(\epsilon x) \right), \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} (\delta \text{sen}(\delta x) + \epsilon \text{senh}(\epsilon x))
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

## 4.2.2.1 Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da carga pontual

$$v(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\sigma_n^c \text{sen}(\delta_n a) + \text{senh}(\epsilon_n a))(\dot{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\dot{\omega} t))(\sigma_n^c \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)))}{\omega_n (\dot{\omega}^2 - \omega_n^2) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx}$$

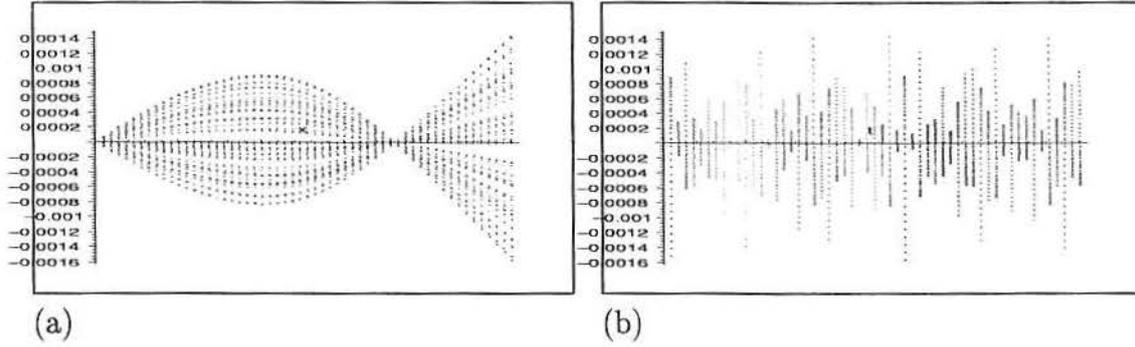


Figura 4.5 Viga apoiada livre sujeita a carga pontual

## 4.2.2.2 Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da soma de cargas pontuais

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{P_{0,p}}{\rho A} \frac{((\sigma_n^c \text{sen}(\delta_n a_p) + \text{senh}(\epsilon_n a_p))(\dot{\omega}_p \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\dot{\omega}_p t))(\sigma_n^c \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)))}{\omega_n (\dot{\omega}_p^2 - \omega_n^2) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx}$$

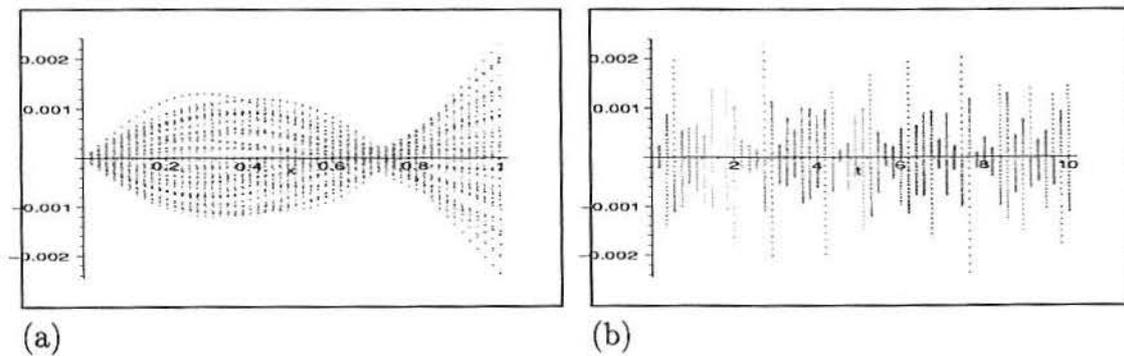


Figura 4.6 Viga apoiada livre sujeita a soma de cargas pontuais

## 4.2.2.3 Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da carga de pulso oscilatório

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0(\omega_n \text{sen}(\hat{\omega}t) - \hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t))(-2\epsilon_n^3 \text{senh}(\epsilon_n L) \cos(\delta_n b) + 2\epsilon_n^3 \text{senh}(\epsilon_n L) \cos(\delta_n a) + \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) e^{\epsilon_n b})}{2\rho A(\epsilon_n(\hat{\omega} + \omega_n)(-\hat{\omega} + \omega_n)\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)\omega_n) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx} + \frac{\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) e^{-\epsilon_n b} - e^{\epsilon_n a} \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) - e^{-\epsilon_n^3 a} \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)(\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))}{2\rho A(\epsilon_n(\hat{\omega} + \omega_n)(-\hat{\omega} + \omega_n)\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)\omega_n) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx}$$

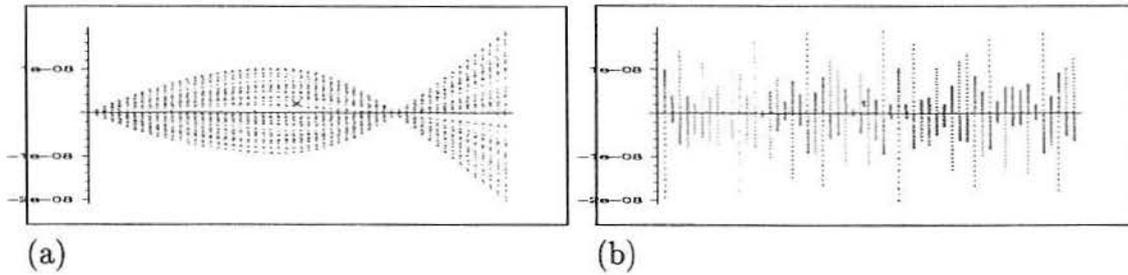


Figura 4.7 Viga apoiada livre sujeita a um pulso oscilatório

## 4.2.2.4 Solução para Viga Apoiada Livre sob ação da soma de cargas de pulsos oscilatórios

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{P_{0,p}(\omega_n \text{sen}(\hat{\omega}_p t) - \hat{\omega}_p \text{sen}(\omega_n t))(-2\epsilon_n^3 \text{senh}(\epsilon_n L) \cos(\delta_n b_p) + 2\epsilon_n^3 \text{senh}(\epsilon_n L) \cos(\delta_n a_p) + \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) e^{\epsilon_n b_p})}{2\rho A(\epsilon_n(\hat{\omega}_p + \omega_n)(-\hat{\omega}_p + \omega_n)\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)\omega_n) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx} + \frac{\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) e^{\epsilon_n b_p} - e^{\epsilon_n a_p} \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L) - e^{-\epsilon_n^3 a_p} \delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)(\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))}{2\rho A(\epsilon_n(\hat{\omega}_p + \omega_n)(-\hat{\omega}_p + \omega_n)\delta_n^3 \text{sen}(\delta_n L)\omega_n) \int_0^L (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x))^2 dx}$$

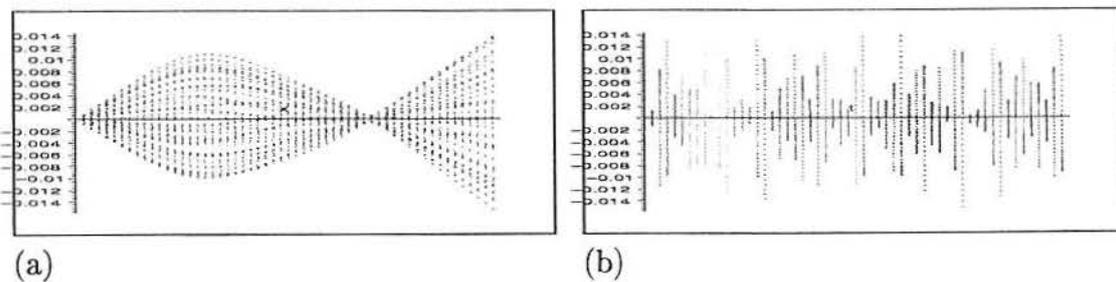
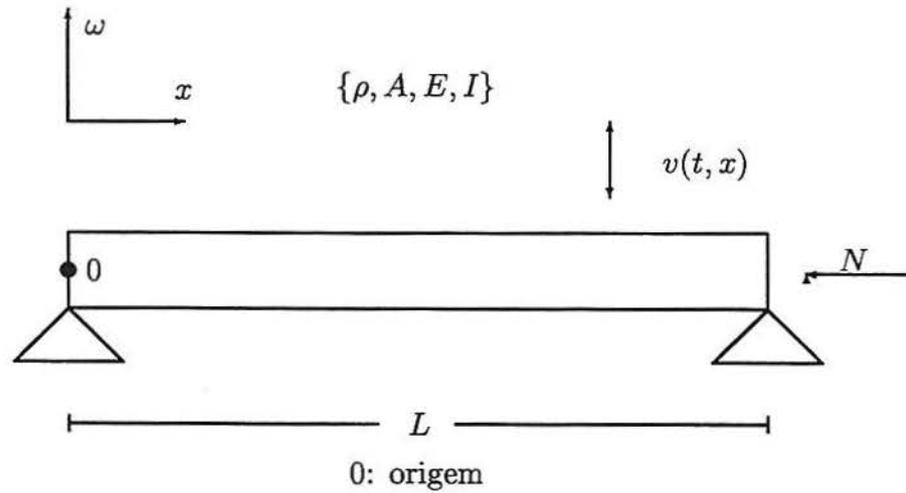


Figura 4.8 Viga apoiada livre sujeita a soma de pulsos oscilatórios

## 4.2.3 Viga Biapoiada



<p><b>Equação governante:</b></p> $\rho A v_{tt}(t, x) + EI v_{xxxx}(t, x) + N v_{xx}(t, x) = f(t, x)$	<p><b>Condições de contorno:</b></p> $v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$ $v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$
<p><b>Equação modal:</b></p> $X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0$	<p><b>Condições de contorno:</b></p> $X(0) = X''(0) = 0$ $X(L) = X''(L) = 0$
<p><b>Equação característica:</b></p> $\text{sen}(\delta L) \text{senh}(\epsilon L) = 0$	$\delta = \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} + \frac{g^2}{2}}$ $\epsilon = \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} - \frac{g^2}{2}}$

Frequência natural e Autovalores			
$n$	$\omega_n$	$\delta_n L$	$\epsilon_n L$
1	17.67471263	3.141592654	3.445229223I
2	66.08080492	6.283185308	6.440374027I
3	146.6768717	9.424777962	9.530290637I
4	259.4997993	12.56637062	12.64569771I
5	404.5546100	15.70796327	15.77149676I

Modos Clássicos e Dinâmicos e a Função de Green			
$X_n^c$	$X_n^d$	$\sigma_n^d$	$\mathbf{h}(t, x, s)$
$\phi_1(x)$	$\Psi_1(x) + \sigma_n^d \Psi_2(x)$	$-\frac{(\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n - \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n)}{\delta_n \epsilon_n ((\delta_n \text{sen}(\delta_n L) + \epsilon_n \text{senh}(\epsilon_n L)))}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{X_n(s)X_n(x)}{m\ X_n\ ^2} \right) \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}$

Onde,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \text{sen}(\delta x), \\
 \Psi_1 &= v(x) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \frac{-1}{\delta} \text{sen}(\delta x) + \frac{1}{\epsilon} \text{senh}(\epsilon x) \right) \\
 \Psi_2 &= v'(x) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( -\cos(\delta x) + \cosh(\epsilon x) \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

## 4.2.3.1 Solução para Viga Biapoiada sob ação da carga pontual

$$v(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\delta_n a)(\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega} t))(\text{sen}(\delta_n x))}{\omega_n(\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

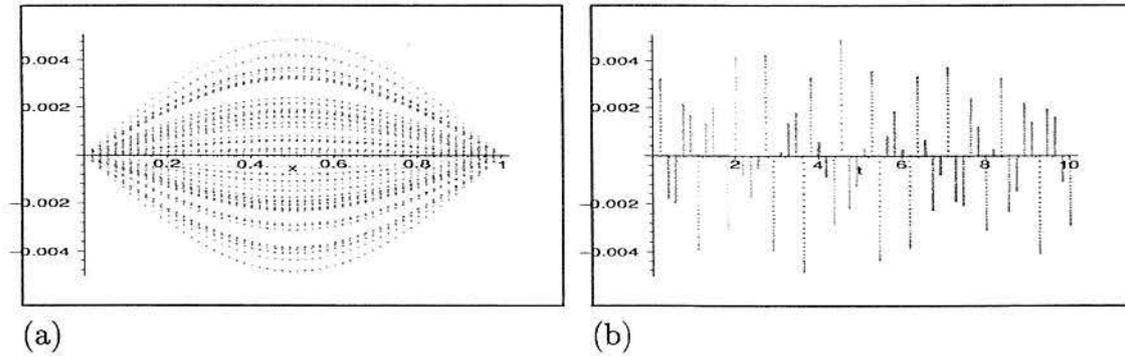


Figura 4.9 Viga biapoiada sujeita a carga pontual

## 4.2.3.2 Solução para Viga Biapoiada sob ação da Soma cargas pontuais

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{P_{0,p}}{\rho A} \frac{\text{sen}(\delta_n a_p)(\hat{\omega}_p \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}_p t))(\text{sen}(\delta_n x))}{\omega_n(\hat{\omega}_p^2 - \omega_n^2) \int_0^L \text{sen}(\delta_n x)^2 dx}$$

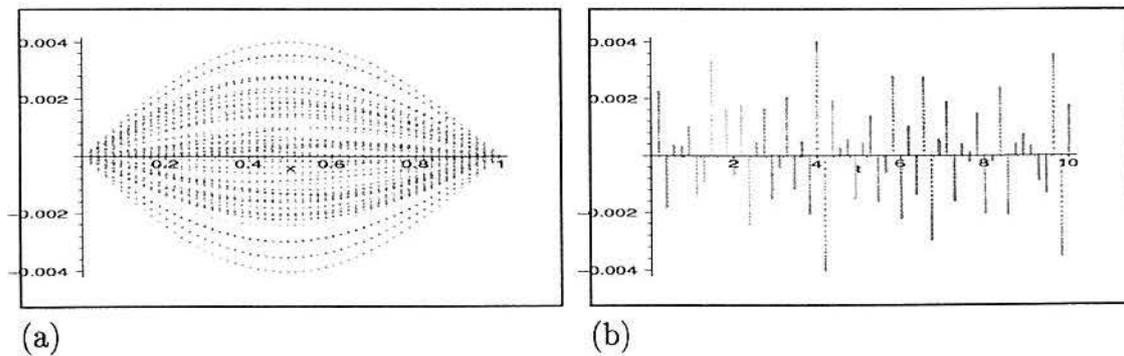


Figura 4.10 Viga biapoiada sujeita a soma de cargas pontuais

## 4.2.3.3 Solução para Viga Biapoiada sob ação da carga de pulso oscilatório

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(\delta_n a) - \cos(\delta_n b)) P_0 (-\sin(\hat{\omega} t) \omega_n + \sin(\omega_n t) \hat{\omega}) \delta_n (\hat{\omega} - \omega_n) (\hat{\omega} + \omega_n) \sin(\delta_n x)}{\rho A \omega_n \int_0^L \sin^2(\delta_n x) dx}$$

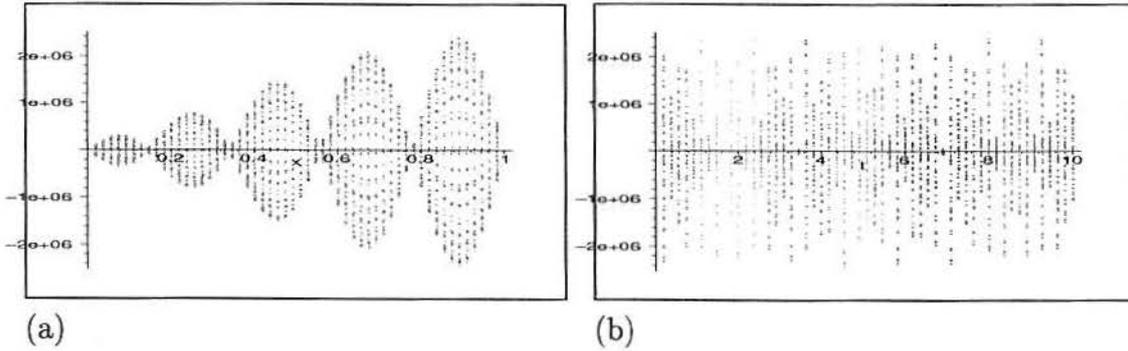


Figura 4.11 Viga biapoiada sujeita a pulso oscilatório

## 4.2.3.4 Solução para Viga Biapoiada sob ação da soma de cargas de pulsos oscilatórios

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{(\cos(\delta_n a_p) - \cos(\delta_n b_p)) P_{0,p} (-\sin(\hat{\omega}_p t) \omega_n + \sin(\omega_n t) \hat{\omega}_p) \delta_n (\hat{\omega}_p - \omega_n) (\hat{\omega}_p + \omega_n) \sin(\delta_n x)}{\rho A \omega_n \int_0^L \sin^2(\delta_n x) dx}$$

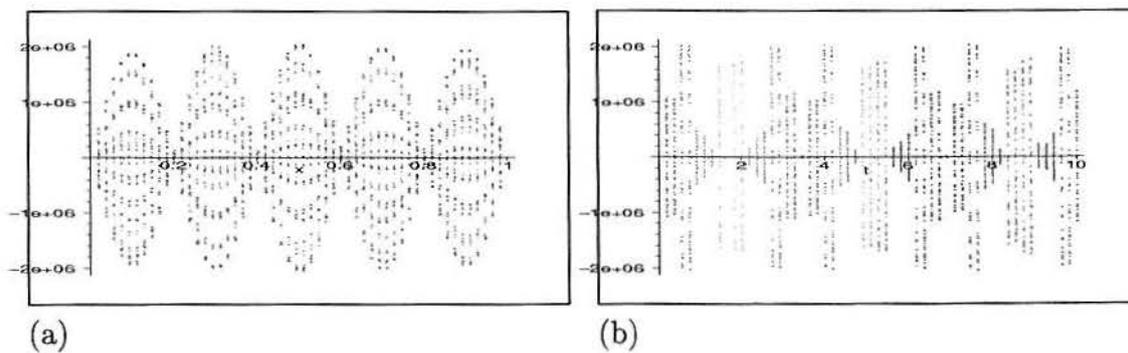
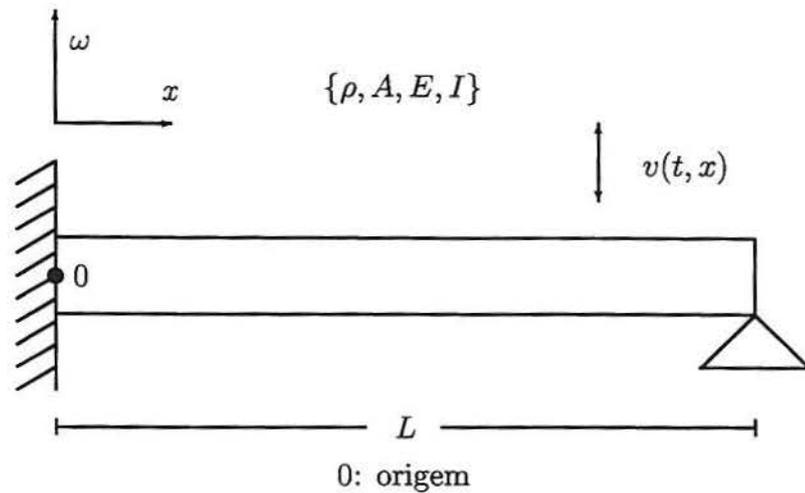


Figura 4.12 Viga biapoiada sujeita a soma de pulsos oscilatórios

## 4.2.4 Viga Fixa Apoiada

**Equação governante:**

$$\rho A v_{tt}(t, x) + EI v_{xxxx}(t, x) + N v_{xx}(t, x) = f(t, x)$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} v(t, 0) = v_x(t, 0) &= 0, \\ v(t, L) = v_{xx}(t, L) &= 0 \end{aligned}$$

**Equação modal:**

$$X^{iv}(x) + g^2 X''(x) - a^4 X(x) = 0$$

**Condições de contorno:**

$$\begin{aligned} X(0) = X'(0) &= 0 \\ X(L) = X''(L) &= 0 \end{aligned}$$

**Equação característica:**

$$\sqrt{\epsilon^2 + g^2} \operatorname{tgh}(\epsilon L) - \epsilon \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon^2 + g^2} L) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} + \frac{g^2}{2}} \\ \epsilon &= \sqrt{(a^4 + \frac{g^4}{4})^{1/2} - \frac{g^2}{2}} \end{aligned}$$

**Freqüência natural e Autovalores**

$n$	$\omega_n$	$\delta_n L$	$\epsilon_n L$
1	26.43920005	3.960454421	3.699351189
2	84.20109935	7.078764682	6.936058637
3	184.1258615	10.21501429	10.11664554
4	415.5114114	13.35458816	13.27949641
5	535.0851734	16.49520583	16.43447034

Modos Clássicos e Dinâmicos e a Função de Green		
$X_n^c$	$X_n^d$	$\mathbf{h}(t, x, s)$
$-\frac{\epsilon_n}{\delta_n}\Phi_1 + \sigma_n^c(\Phi_2 - \Phi_4) + \Phi_3$	$\Psi_1 + \sigma_n^d\Psi_2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{X_n(s)X_n(x)}{m\ X_n\ ^2} \right) \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}$
$\sigma_n^c$	$\sigma_n^d$	
$\frac{-\text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n + \text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n}{-\text{COS}(\epsilon_n L) + \text{COS}(\delta_n L)}$	$\frac{-\text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n + \text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n}{-\text{cosh}(\epsilon_n L) + \text{COS}(\delta_n L))\delta_n \epsilon_n}$	

Onde,

$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{sen}(\delta x), \\ \phi_2 &= \text{cos}(\delta x), \\ \phi_3 &= \text{senh}(\epsilon x), \\ \phi_4 &= \text{cosh}(\epsilon x) \\ \Psi_1 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( \frac{-1}{\delta} \text{sen}(\delta x) + \frac{1}{\epsilon} \text{senh}(\epsilon x) \right), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( -\text{cos}(\delta x) + \text{cosh}(\epsilon x) \right). \end{aligned}$	(4.4)
---	-------

4.2.4.1 Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da carga pontual

$$v(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-\text{sen}(\delta_n a)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n a) - \cosh(\delta_n a)) + \text{sen}(\epsilon_n a)}{\omega_n \int_0^L \left( \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x)) \text{sen}(\epsilon_n x) \right)^2 dx}$$

$$\frac{(\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega} t)) \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x))}{\omega_n \int_0^L \left( \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x)) \text{sen}(\epsilon_n x) \right)^2 dx}$$

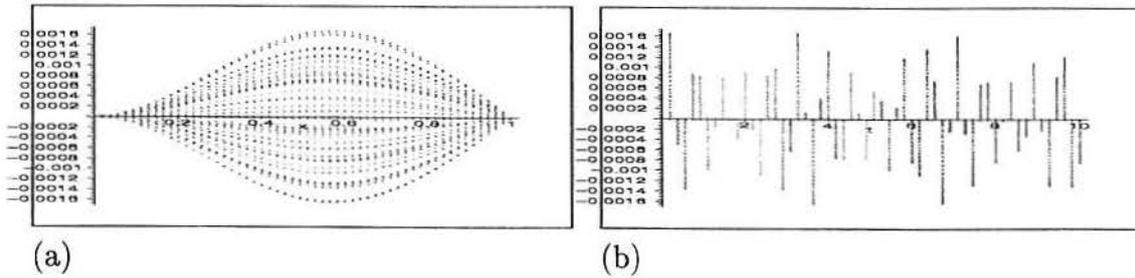


Figura 4.13 Viga fixa apoiada sujeita a carga pontual

4.2.4.2 Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da soma de cargas pontuais

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M \frac{P_{0,p}}{\rho A} \frac{\frac{-\text{sen}(\delta_n a_p)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n a_p) - \cosh(\delta_n a_p)) \text{sen}(\epsilon_n x) +}{\omega_n \int_0^L \left( \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x)) \text{sen}(\epsilon_n x) \right)^2 dx}$$

$$\frac{\text{sen}(\epsilon_n a) (\hat{\omega}_p \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}_p t)) \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x))}{\omega_n \int_0^L \left( \frac{-\text{sen}(\delta_n x)\epsilon_n}{\delta_n} + \sigma_n^c (\cos(\delta_n x) - \cosh(\delta_n x)) \text{sen}(\epsilon_n x) \right)^2 dx}$$

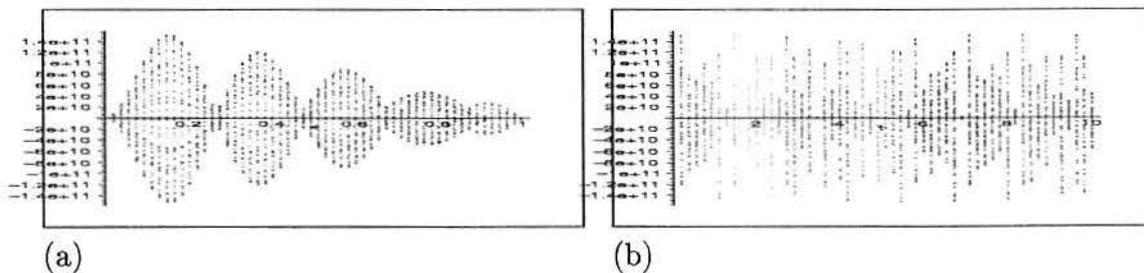


Figura 4.14 Viga fixa apoiada sujeita a soma de cargas pontuais

## 4.2.4.3 Solução para Viga Fixa apoiada sob ação de carga de pulso oscilatório

$$v(t, x) = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\text{sen}(\hat{\omega}t)\omega_n - \text{sen}(\omega_n t)\hat{\omega}}{2(\hat{\omega} + \omega_n)(\hat{\omega} - \omega_n)\epsilon_n \cos(\delta_n L) - \cosh(\epsilon_n L)\delta_n^2 \int_0^L ((\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)) dx)^2} \right]$$

$$(\delta_n^2 e^{\epsilon_n b} \cosh(\epsilon_n L) - \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n b} + 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n b) \cosh(\epsilon_n L) + 2\text{senh}(\epsilon_n L)\text{sen}(\delta_n b)\delta_n \epsilon_n$$

$$+ 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n a) \cos(\delta_n L) + \cos(\delta_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a} - \delta_n^2 e^{\epsilon_n b} \cos(\delta_n L) - 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n a) \cosh(\epsilon_n L)$$

$$+ \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a} - e^{-\epsilon_n a}\delta_n^2 \text{senh}(\epsilon_n L) - 2\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n^2 \text{sen}(\delta_n b) - \text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n \delta_n e^{\epsilon_n a} -$$

$$e^{-\epsilon_n a}\delta_n^2 \cosh(\epsilon_n L) - \delta_n^2 e^{-\epsilon_n b} \cos(\delta_n L) - \text{sen}(\delta_n L)\delta_n \epsilon_n e^{-\epsilon_n a} \delta_n \text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n + 2\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n^2$$

$$\text{sen}(\delta_n a) - 2\text{senh}(\epsilon_n L)\text{sen}(\delta_n a)\delta_n \epsilon_n - 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n b) \cos(\delta_n L) - \cosh(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a}$$

$$+ \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{-\epsilon_n b} \cosh(\epsilon_n L)) (\sigma_n \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)) \omega_n$$

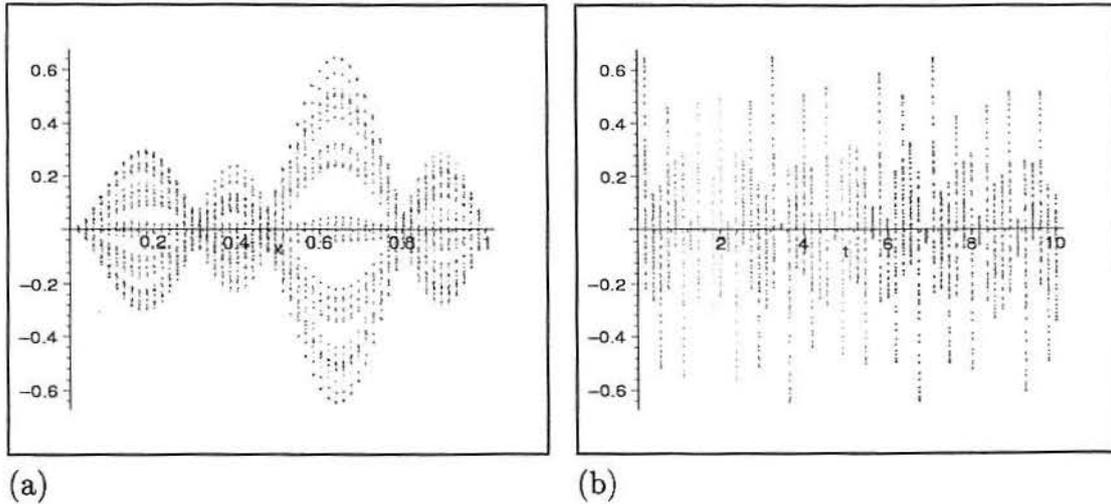


Figura 4.15 Viga fixa apoiada sujeita a um pulso oscilatório

## 4.2.4.4 Solução para Viga Fixa apoiada sob ação da soma de pulsos oscilatórios

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^M [P_{0,p} \frac{(\text{sen}(\hat{\omega}_p t)\omega_n - \text{sen}(\omega_n t)\hat{\omega}_p)}{2(\hat{\omega}_p + \omega_n)(\hat{\omega}_p - \omega_n)\epsilon_n \cos(\delta_n L) - \cosh(\epsilon_n L)\delta_n^2 \int_0^L ((\sigma_n^2 \text{sen}(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)) dx)^2}]$$

$$(\delta_n^2 e^{\epsilon_n b_p} \cosh(\epsilon_n L) - \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a_p} + 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n b_p) \cosh(\epsilon_n L) + 2\text{senh}(\epsilon_n L)$$

$$\text{sen}(\delta_n b_p)\delta_n \epsilon_n + 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n a_p) \cos(\delta_n L) + \cos(\delta_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a_p} - \delta_n^2 e^{\epsilon_n b_p} \cos(\delta_n L) - 2\epsilon_n^2$$

$$\cos(\delta_n a_p) \cosh(\epsilon_n L) + \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a_p} - e^{-\epsilon_n a_p} \delta_n^2 \text{senh}(\epsilon_n L) - 2\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n^2 \text{sen}(\delta_n b_p) -$$

$$\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n \delta_n e^{\epsilon_n a_p} - e^{-\epsilon_n a_p} \delta_n^2 \cosh(\epsilon_n L) - \delta_n^2 e^{-\epsilon_n b_p} \cos(\delta_n L) - \text{sen}(\delta_n L)\delta_n \epsilon_n e^{-\epsilon_n a_p} \delta_n$$

$$\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n + 2\text{sen}(\delta_n L)\epsilon_n^2 \text{sen}(\delta_n a_p) - 2\text{senh}(\epsilon_n L)\text{sen}(\delta_n a_p)\delta_n \epsilon_n - 2\epsilon_n^2 \cos(\delta_n b_p)$$

$$\cos(\delta_n L) - \cosh(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{\epsilon_n a_p} + \text{senh}(\epsilon_n L)\delta_n^2 e^{-\epsilon_n b_p} \cosh(\epsilon_n L)) (\sigma_n \text{sen}$$

$$(\delta_n x) + \text{senh}(\epsilon_n x)) \frac{\omega}{n}$$

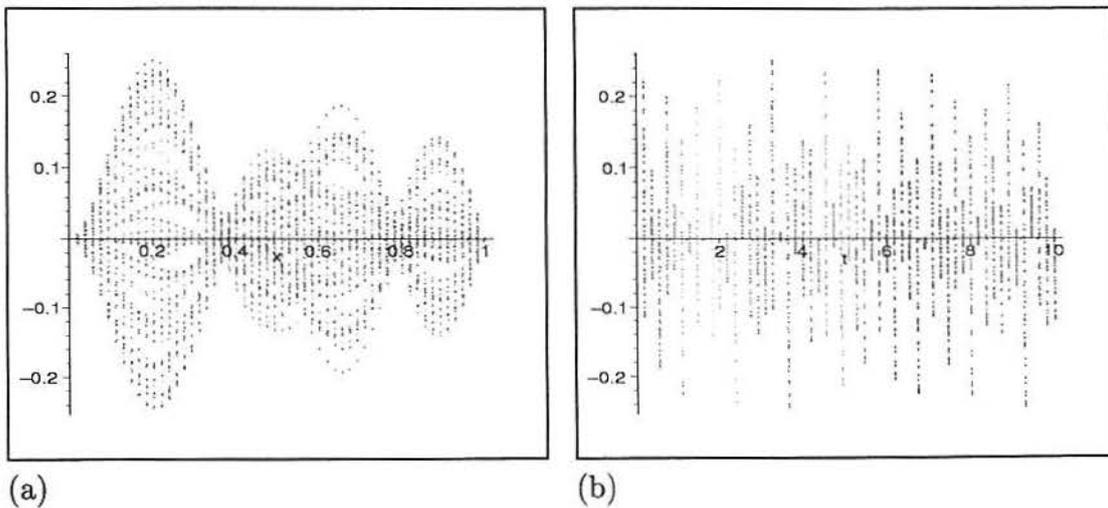


Figura 4.16 Viga fixa apoiada sujeita a uma soma de pulsos oscilatórios

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentaram-se:

- O cálculo aproximado da resposta forçada de uma viga segundo o modelo de Euler-Bernoulli sob a ação de uma força axial e de uma carga  $f(t,x)$ , baseados nos modos determinados em [SOD 00].

- A determinação da função de Green para o modelo de Euler-Bernoulli, mediante a identificação do núcleo  $K(x, \xi)$  a partir da resposta forçada da viga.

- Observa-se a simetria das Funções de Green com respeito aos eixos  $x$  e  $z$  nos gráficos das linhas de contorno. Este fato já era previsto analiticamente. O uso da base clássica ou dinâmica é irrelevante para o cálculo da função de Green devido à normalização dos modos e no que se refere às frequências  $\omega_n$  não se alteram.

- Para o cálculo da resposta forçada utiliza-se um software simbólico com objetivo de aproximar a expansão de Fourier com um número finito de termos. Consideraram-se cargas do tipo pontuais e de pulso oscilatório de diversas frequências de entrada, dando origem, em alguns casos, ao fenômeno de ressonância (figura 4.12) e à aparição de nós. Mostram-se os perfis longitudinais da viga bem como a variação da amplitude no tempo.

Trabalhos futuros:

- Nas Vibrações Forçadas dependendo da complexidade simbólica, as cargas podem ser generalizadas a funções mais elaboradas.

- O procedimento de identificação da Função de Green pode ser estendido pra outros modelos de Euler-Bernoulli, pois o que distingue um caso de outro é simplesmente os modos.

## BIBLIOGRAFIA

- [BIR 62] BIRKHOFF, G & ROTA, G. Ordinary Differential Equations. *Introduction Higher Mathematics*, Ed. Ginn and company, 1962.
- [CHI 00] CHIWIACOWSKY, L. Cálculo Simbólico doas Modos Vibratórios no Modelo de Kuchoff-Love para placas. *Dissertação de Mestrado*. UFRGS/CPGMap, Porto Alegre, 2000.
- [CLA 90a] CLAEYSSSEN, J. C. R. On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSSEN, J. C. R., TSUKAZAN, T. Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLVIII, nº 1, 1990.
- [CLA 95] CLAEYSSSEN, J.C.R. Time and Frequency Response, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.
- [CLA 99a] CLAEYSSSEN, J.C.R., CANAHUALPA, G., JUNG, C. A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations, *Applied Numerical Mathematics*, vol.30, 1999.
- [CLA 99b] CLAEYSSSEN, J. The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems, *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, vol.2, ABCM-SBMAC-SIAM, Ed. J. Baltazhar, 1999.
- [CLO 93] CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. Dynamics of Structures. Prentice Hall, 1993.

- [CRA 81] CRAIG, R.R. Structural Dynamics An Introduction to Computer methods, The University of Texas at Austin, 1981
- [CUD 89] CUDNEY, H. H., INMAN, D. J. Determining Damping Mechanisms in a Composite Beam. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*. vol 4., no. 4, 138-143, 1989.
- [COW 66] COWPER, G. R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 33: 335-340, 1966.
- [DAT 95] DATTA, B. N. *Numerical Linear Algebra and Applications*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1995.
- [DAV 90] DAVIS, P. *Interpolation and Approximation*. Duver. 1990
- [DIM 95] DIMAGORONAS, A. *Vibration for Engineers* second edition. Prentice Hall, 1995.
- [DEN 85] DEN HARTOG, J. P. *Mechanical Vibrations*. Ed. Den J. Hartog, Abril 1985.
- [FON 99] FONCECA, J.O. Mecânica dos sólidos I material de aula do programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica. Porto Alegre, UFRGS, 1999.
- [GAL 87] GALLICCHIO, E. Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior. *Dissertação de Mestrado*. UFRGS/CPGM, Porto Alegre, 1987.
- [GAL 99] GALLICCHIO, E. Sistemas Vibratórios: Um enfoque através da Solução Dinâmica e da Matriz de Transferência. *Tese de Doutorado*. UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 1999.
- [IBR 76] IBRAHIM, S. R., MIKWLICIK, E. C. The Experimental Determination of Vibration Parameters for Time Responses, *Shock and Vibration Bulletin*, nº 46, 1976.

- [INM 89] INMAN, D. *Vibration, with Control, Measurement, and Stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [INM 94] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [JEN 80] JENNINGS, A. C. *Matrix Computations for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, 1980.
- [MEI 75] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975.
- [MOS 99] MOSCHEN, I. D. Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo Euler-Bernoulli para vigas. *Dissertação de Mestrado* UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1999.
- [NAI 67] NAIMARK, *Linear Differential Operation*. Part 1, Frederik Ugar. New York, 1967
- [NAS 85] NASHIF, A. D., JONES, D. I. *Vibration Damping*. Wiley, New York, 1985.
- [NEW 89] NEWLAND, D. E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical, London, 1989.
- [PAL 97] PALACIOS, J. L. Estudo de Técnicas de Controle e Aplicação a Estruturas Flexíveis. *Dissertação de Mestrado*. UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1997.
- [PHI 95] PHILLIPS, C. L. & PARR, J. M. *Signals, Systems and Transforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [SOD 00] SODER, R. A. L. Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial. *Dissertação de Mestrado*. UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 2000.

- [SUA 00] SUAZO,G. A resposta impulso em problemas vibratórios Evolutivos e Modais.*Trabalho de qualificação de Doutorado.UFRGS/PROMEC,Porto Alegre, 2000.*
- [ROS 83] ROSENBERG, R. C. & KARNOPP, D. C. *Introduction to System Dynamics.* Reading, Addison-Wesley, Mass., 1983.
- [TIM 74] TIMOSHENKO, S. P. & WEAVER. W. Jr. *Vibration Problems in Engineering,* John Wiley, New York, 1974.
- [THO 78] THOMSON,W.T. Teoria da vibração com aplicações,Cássio Sigaud,Rio de janeiro :Interciência,1978.
-