

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Correções relativísticas ao modelo de quarks no espalhamento J/ψ -nucleon^{*}

Bruna Cesira Folador

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
Maio de 2015.

^{*} Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

The world as we have created it is a process of our thinking. It cannot be
changing without changing our thinking.
Albert Einstein

Agradecimentos

- ★ Aos meus pais Ildo e Shirlei, pelo carinho e compreensão que me dedicaram neste percurso.
- ★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimiter Hadjmichef, pela orientação dedicada e por ter aceitado mais este desafio comigo.
- ★ A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado.
- ★ Aos meus avós Nilo e Cesira que sempre torceram por mim e entenderam o motivo de minhas visitas se tornarem menos frequentes e mais rápidas.
- ★ Ao meu irmão Luciano, pelas conversas e apoio quando eu muito precisei.
- ★ As minhas amigas de longa data Larissa, Patrícia e Saraiane que me mostraram que *verdadeiras amizades continuam a crescer mesmo a longas distâncias*.
- ★ A Bibi Bailas, grande amiga que fiz em Natal e que sempre esteve a postos pra conversar comigo e dizer que as coisas iam ficar bem.
- ★ Ao Fred Fetter, companheiro de dúvidas e dos muitos cálculos necessários para a realização deste trabalho.
- ★ A Lucila e a Marcela, minha família postiça de Porto Alegre, que me acolheu e me apoiou quando eu passava por um momento difícil.
- ★ A todos que me apoiaram de alguma maneira nesta jornada.

Muito Obrigada!

Resumo

O Método do Grupo Ressonante (RGM) é um método utilizado no estudo da interação hádron-hádron, na qual não são desprezados os graus de liberdade internos destas partículas. Nesta dissertação estudaremos os efeitos associados à interação entre um quark pesado Q com outro leve q no potencial de troca de um glúon chamado de *One Gluon Exchange Potential* (OGEP), tradicionalmente obtido a partir de um potencial relativístico de interação do modelos de quarks, fazendo uma expansão em potências de momentos nos espinores constituintes (potencial de Fermi-Breit). Faremos uma aproximação semi-relativística para o quark leve q , enquanto que o quark pesado Q será considerado não-relativístico. Este potencial semi-relativístico será usado no RGM para estudar a interação entre charmônios e nucleons como no caso da interação J/ψ -nucleon.

Abstract

The Resonating Group Method (RGM) is used in hadron-hadron interactions, when internal degrees of freedom of composite particles can't be neglected. In this dissertation we shall study the effects associated with the interaction between a heavy quark Q with a light quark q , using the the One Gluon Exchange Potential (OGEP) traditionally obtained from a relativistic interaction potential in the quark model, by an expansion in powers of momentum of the constituent spinors (potential Fermi-Breit). We will make a semi-relativistic approach for light quark q , while the heavy quark Q will be considered non-relativistic. This semi-relativistic potential will be used in the RGM to study the interaction between charmonia and nucleons as the case J/ψ -nucleon interaction.

Conteúdo

1. Introdução	2
2. A Cromodinâmica Quântica e a Física de Hádrons	5
2.1 Eletrodinâmica Quântica: exemplo de teoria de calibre	5
2.1.1 A teoria clássica e quântica	5
2.1.2 O calibre de Coulomb	9
2.2 Cromodinâmica Quântica	12
2.2.1 O calibre de Coulomb de cor	15
3. O Potencial de Fermi-Breit e o modelo de Quarks	20
3.1 FAIR-PANDA	20
3.2 Charmônios	22
3.3 O Potencial de Fermi-Breit	23
4. O Potencial Méson-Bárion com Troca de Quarks	29
4.1 O “Resonating Group Method” (RGM).	29
4.2 O Potencial Méson-Bárion	33
5. Correções Relativísticas no Espalhamento J/ψ-Nucleon	41
5.1 O Potencial Pesado-Leve	42
5.2 O Potencial Méson-Bárion Corrigido	50
5.3 Resultados	52
6. Conclusão e Perspectivas	63
A. Identidade	65

B. Funções de Onda	67
B.1 Função de Onda do Méson	67
B.1.1 Espaço	67
B.1.2 Spin-Sabor	67
B.2 Função de Onda do Bárion	69
B.2.1 Espaço	69
B.2.2 Spin-Sabor	73
C. Variáveis de Mandelstam	75
D. Parte espacial de V_{mb}	77
E. Parte spin-sabor-cor de V_{mb}	82
Bibliografia	84

Introdução

A física de mésons e o estudo da interação forte estão profundamente conectados desde o advento do méson π , introduzido teoricamente por Yukawa (1935)[1] e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947) [2].

A teoria fundamental das interações fortes é a Cromodinâmica Quântica, uma teoria de campos de calibre, não-Abeliana e que descreve as interações entre quarks e glúons. É tradicional, inclusive na comunidade brasileira de Física Hadrônica, Partículas Elementares e Teoria Quântica de Campos, referir-se a esta teoria pela sigla inglesa *QCD* associada à expressão *Quantum Chromodynamics*. O mesmo ocorre para a Eletrodinâmica Quântica, cuja a sigla em inglês é *QED* (Quantum Electrodynamics). Nesta dissertação adotaremos estas convenções.

Murray Gell-Mann, George Zweig e Yuval Ne'eman [3],[4] propuseram em 1964 um esquema de classificação e ordenamento da, já então extraordinária, quantidade de bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de Método dos Octetos (Eightfold Way). Este método, baseado na teoria matemática do grupo de simetria $SU(3)$ (o S significa *Special*, o U significa *Unitary* e o três designando a quantidade de elementos básicos da teoria), tinha como propósito descrever a estrutura intrínseca das partículas fortemente interagentes em termos de entidades fundamentais, os blocos elementares de construção de mésons e bárions.

A cor, como uma carga possuindo três valores possíveis foi proposta em 1964 por O. W. Greenberg [5] e como uma simetria de calibre em 1965 por Moo-Young Han e Yoichiro Nambu [6]. Os quarks poderiam possuir uma das três cores fundamentais, vermelho, verde e azul e as suas antipartículas, os antiquarks, as anticores antivermelha (ou ciano), antiverde (ou magenta) e antiazul (ou amarelo). Estas designações são utilizadas para caracterizar o fato de que, devido ao confinamento, a propriedade da cor não é observada quando mésons e bárions são tratados como partículas elementares. Similarmente à cor branca, formada pelas três cores fundamentais do espectro eletromagnético, as cores de três quarks, formando um bárion elementar, ou de um par quark-antiquark, formando um méson elementar, se recombinariam originando uma cor neutra para os bárions e os mésons.

Desta forma, no chamado *Modelo de Quarks*, considera-se que há seis quarks, também chamados de sabores de quarks: up(u), down(d), strange(s), charm(c), bottom(b) e top (t). Os quarks leves (u, d, s) podem ser identificados como os três estados na representação fundamental de SU(3). O sabor SU(3) pode ser interpretado como um grupo de simetria de interações fundamentais. Todas as partículas observadas fisicamente até agora são combinações de três quarks (bárions) ou um par quark-antiquark (mésons), mais um número arbitrário de par quark-antiquark e glúons. As simetrias dos hádrons são ligadas à conservação dos números quânticos, como número bariônico, isospin, hipercarga, carga, entre outros. Isso significa que é impossível destruir ou criar um quark simples, mas podemos aniquilar ou criar um par quark-antiquark [7].

A QCD é a teoria fundamental da interação forte. A interação forte em nível sub-nuclear, envolvendo portanto cargas de cor, é uma das quatro interações fundamentais encontradas na natureza juntamente com as interações gravitacional, fraca e eletromagnética. A QCD prediz que a interação forte apresenta, adicionalmente ao confinamento, uma característica única na natureza, a chamada *liberdade assintótica*. Esta predição da QCD, experimentalmente confirmada, indica que os quarks são assintoticamente livres (para grandes valores de momentum transferidos ou, equivalentemente, quando muito próximos uns dos outros). Este fato permitiu o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite [7].

A descoberta, em Novembro de 1974, da partícula ψ em uma aniquilação e^+e^- perto da energia de centro de massa de 3,1 GeV e, duas semanas depois, de ψ' em 3,7 GeV foi chamada de “Revolução de Novembro”. Independentemente, um grupo descobriu essa mesma partícula e a nomeou J. Assim surgiu a partícula J/ψ . As partículas J/ψ e ψ' são interpretadas como o estado ligado mais baixo de um novo quark e seu antiquark: o charme (c). [8]. A aniquilação de anti-prótons sobre núcleos fornece uma nova possibilidade para o estudo da produção de mésons de charme aberto e a chance de estudar partículas com *charme* na matéria nuclear, medindo a interação de hádrons charmosos. Experimentos nesta direção serão realizados, a partir de 2018, no *Facility for Antiproton and Ion Research* (FAIR), em Darmstadt na Alemanha, junto à colaboração PANDA (AntiProton Annihilation at Darmstadt) [9].

O estudo teórico da interação hádron-hádron, em termos dos graus de liberdade dos quarks, constitui um problema de muitos corpos extremamente complicado no qual partículas compostas (hádrons) e constituintes (quarks e glúons) estão simultaneamente presentes. Entre os métodos utilizados nos estudos da interação hádron-hádron usando quarks e glúons temos

1. Diagramas de troca de linha de quarks (Quark Born Diagram Formalism - QBD)[10]-[12],
2. Formalismo de Fock-Tani [13],
3. Método do Grupo Ressonante (Resonating Group Method- RGM) [14].

Nessa dissertação, deduziremos um potencial méson-bárion semi-relativístico, utilizando o Método do Grupo Ressonante, numa formulação em segunda quantização. No Capítulo 2, faremos uma breve

revisão sobre a Eletrodinâmica Quântica e a Cromodinâmica Quântica no calibre de Coulomb. No Capítulo 3, faremos uma breve exposição sobre o experimento FAIR-PANDA, o qual será uma referência futura para medidas de precisão de charme de hádrons e núcleos. Neste capítulo também faremos uma revisão do modelo de quarks e da obtenção do potencial de Fermi-Breit. O Capítulo 4 será destinado a apresentarmos o “Método do Grupo Ressonante” (RGM) em primeira quantização, e mais detalhadamente, em segunda quantização, a fim de obtermos o potencial méson-bárion usado em nosso estudo. No Capítulo 5, apresentaremos a parte inédita desta dissertação: faremos a aproximação semi-relativística no potencial de Fermi-Breit e este resultado será introduzido no potencial méson-bárion do RGM (V_{mb}). Calcularemos a seção de choque para o espalhamento J/ψ -Nucleon, O Capítulo 6, será de de conclusões e perspectivas futuras. Esta dissertação também conta com 5 apêndices. No Apêndice A mostraremos uma identidade de grande importância em nossas aproximações. No Apêndice B são mostradas em detalhes as funções de onda dos mésons e dos bárions. No Apêndice C são descritas as variáveis de Mandelstam. No Apêndice D são mostrados os detalhes para o cálculo da parte espacial do potencial V_{mb} . No Apêndice E, o cálculo da parte de spin-sabor-cor do potencial V_{mb} .

A Cromodinâmica Quântica e a Física de Hádrons

2.1 Eletrodinâmica Quântica: exemplo de teoria de calibre

2.1.1 A teoria clássica e quântica

A teoria eletromagnética clássica de Maxwell unifica os fenômenos elétricos e magnéticos num conjunto sintético de quatro equações fundamentais. Estas equações denominadas de *equações de Maxwell* são representadas, na literatura, em diferentes sistemas de unidades. No sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, por exemplo, elas são dadas pelas seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético, \vec{J} a densidade de corrente elétrica e ρ a densidade de carga elétrica. As equações (2.1) e (2.2) constituem o par não-homogêneo das equações de Maxwell e refletem a conservação da carga elétrica. Se tomarmos a derivada temporal da equação (2.1), o divergente da equação (2.2) e somar os dois resultados chegaremos em

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

que é nada mais do que a equação da continuidade. As equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante, (tomando $c = 1$) como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu {}^* F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

onde $j^\nu = (\rho, \vec{J})$; $F^{\mu\nu}$ o tensor de campo eletromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

e ${}^* F^{\mu\nu}$ o dual a $F^{\mu\nu}$ definido por

$${}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}. \quad (2.9)$$

Os campos elétrico e magnético são definidos de maneira formal a partir de (2.8)

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -E^i \\ F^{ij} &= -\epsilon^{ijk} B_k, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ é totalmente anti-simétrico com $\epsilon^{0123} = 1$. O tensor de campo $F^{\mu\nu}$ pode ser relacionado com um quadri-vetor potencial A^μ por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.11)$$

Assim vemos que combinando as equações (2.10) e (2.11), o campo elétrico fica

$$E^i = -F^{0i} = -[\partial^0 A^i - \partial^i A^0] = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0, \quad (2.12)$$

ou seja, em termos vetoriais¹

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi. \quad (2.13)$$

A partir do tensor de campo eletromagnético, (2.11) pode-se também obter

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.14)$$

¹ Lembrando a notação relativística usual:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \quad ; \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}) \\ \partial_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned}$$

Se forem realizadas as seguintes mudanças

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad ; \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \theta, \quad (2.15)$$

os campos \vec{E} e \vec{B} definidos em (2.13) e (2.14) permanecem invariantes. Esta mudança é chamada de *transformação de calibre* e uma teoria com esta característica é denominada de *teoria de calibre* (gauge theory, em inglês). Portanto, as chamadas teorias de campo de calibre são um tipo particular das teorias de campo baseadas no princípio de invariância de calibre.

A versão quântica do eletromagnetismo é conhecida como a *Eletrodinâmica Quântica* (QED) e de acordo com o princípio da variacional, as equações de campo são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, através de uma densidade lagrangeana adequada dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\text{mat}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad ; \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu \quad (2.17)$$

com

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.18)$$

Vemos que essa lagrangeana é invariante frente a uma mudança de fase do campo ψ do tipo

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta} \bar{\psi} \quad (2.19)$$

onde θ é uma constante real. Essa mudança é chamada de *transformação de calibre abeliana global*, desde que o parâmetro θ permaneça constante. Esta invariância assegura a conservação da corrente, isto é, (2.18) satisfaz

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.20)$$

tal que a carga

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (2.21)$$

seja conservada. A densidade lagrangeana (2.16) pode ser reescrita introduzindo o conceito de derivada covariante, por através do chamado *acoplamento mínimo*, isto é,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu. \quad (2.22)$$

Assim (2.16) fica

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi. \quad (2.23)$$

Agora, se o parâmetro θ for função de x , (2.23) ainda será invariante frente a mudança de fase local

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta(x)} \bar{\psi} \quad (2.24)$$

se A^μ for transformado ao mesmo tempo de uma maneira apropriada:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \quad (2.25)$$

o que implica

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x). \quad (2.26)$$

Assim, esta transformação com $\theta(x)$ é chamada de *transformação de calibre abeliana local* e a densidade lagrangeana da QED dada por (2.23) é invariante frente a esta transformação.

Podemos, a partir da densidade lagrangeana (2.16), obter uma respectiva densidade hamiltoniana, lembrando que

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 A^\mu)} = F_{\mu 0} \quad (2.27)$$

chamado de “momento canonicamente conjugado”, assim a parte eletromagnética fica

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = \Pi_\mu \partial_0 A^\mu - \mathcal{L}_{\text{em}} = F_{\mu 0} \partial_0 A^\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \partial^0 \vec{A} - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad (2.28)$$

mas por (2.12)

$$\partial^0 \vec{A} = -\vec{E} - \vec{\nabla} A^0 \quad (2.29)$$

a (2.28) pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = -\vec{E} \cdot (-\vec{E} - \vec{\nabla} A^0) - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \frac{1}{2} (E^2 + B^2). \quad (2.30)$$

A expressão (2.30) é uma densidade hamiltoniana que será integrada em todo o espaço, portanto pode-se realizar uma integração por partes no primeiro termo, resultando em $-A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$. Usando a Lei de Gauss (2.1) obtemos

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \rho A^0. \quad (2.31)$$

A parte de interação é $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$, o que resulta numa densidade hamiltoniana total dada por

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \rho A^0 + j_\mu A^\mu + \mathcal{H}_{\text{mat}} \quad (2.32)$$

mas $j_\mu A^\mu = \rho A^0 - \vec{J} \cdot \vec{A}$, ou seja,

$$H_{\text{QED}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{QED}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \vec{J} \cdot \vec{A} + \mathcal{H}_{\text{mat}} \right]. \quad (2.33)$$

2.1.2 O calibre de Coulomb

A invariância de calibre introduz uma complicação para se quantizar a teoria. A tentativa mais ingênua de conciliar a invariância de calibre e a quantização da teoria de Maxwell acaba falhando: partindo do comutador

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi_\nu(\vec{y}, t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.34)$$

no caso $\mu = \nu = 0$ obtemos

$$[A_0(\vec{x}, t), \Pi_0(\vec{y}, t)] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.35)$$

no entanto, da equação (2.27), vemos que

$$\Pi_0(\vec{y}, t) = F_{00} = 0 \quad (2.36)$$

o que é inconsistente com a relação de comutação (2.34). Devido à arbitrariedade do potencial $A_\mu(\vec{x}, t)$, que se reflete na forma de escrever \mathcal{L}_{em} em (2.17), não é possível aplicar o procedimento de quantização canônica diretamente a A_μ . Por outro lado, o que pode ser feito é escolher um determinado calibre, de tal forma a impor uma condição sobre A_μ e então usar os métodos de quantização canônica neste calibre específico. Em princípio uma densidade lagrangeana modificada poderia resolver este problema, fixando o calibre da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (2.37)$$

Pelo fato do calibre estar fixado, a teoria não é mais invariante de calibre. Entretanto, as predições da teoria não deveriam depender deste parâmetro ξ e portanto o valor assumido é irrelevante, por exemplo poderia ser fixado em $\xi = 1$ (calibre de Feynman) ou $\xi \rightarrow 0$ (calibre de Landau). Desta forma o problema descrito em (2.36) desaparece

$$\Pi_\mu = F_{\mu 0} - \frac{1}{\xi} g_{\mu 0} (\partial^\nu A_\nu). \quad (2.38)$$

Nesta dissertação vamos trabalhar no calibre de Coulomb:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.39)$$

Da equação (2.6) temos para $\nu = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = j^0, \quad (2.40)$$

ou seja,

$$-\nabla^2 A^0 - \partial_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \rho. \quad (2.41)$$

Agora usando a condição de Coulomb, eq. (2.39), a equação anterior se reduz a

$$\nabla^2 A^0 = -\rho, \quad (2.42)$$

é uma equação de Poisson com solução geral dada por

$$A^0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.43)$$

Este é o potencial instantâneo de Coulomb, fornecendo o valor de A^0 num tempo t para uma determinada distribuição de carga ρ . Os graus de liberdade restantes A^i , com $i = 1, 2, 3$, estão sujeitos a condição (2.39). Podemos escrever (2.43) como uma integral no espaço de momento, lembrando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{q^2} \\ \rho(\vec{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' \rho(\vec{p}', \vec{p}) e^{i\vec{y} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A escolha de ρ ser não-local no espaço de momento é para uma necessidade futura. Substituindo as definições de (2.44) em (2.43), obtemos

$$A^0(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q d^3p \frac{\rho(\vec{p} - \vec{q}, \vec{p})}{q^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}. \quad (2.45)$$

No calibre de Coulomb separamos os campos em suas componentes transversais (\perp) e longitudinais (\parallel) da seguinte forma

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel \quad (2.46)$$

onde \vec{E}_\perp e \vec{E}_\parallel satisfazem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\parallel = \rho \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_\parallel = 0. \quad (2.47)$$

Destas condições obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} A^0 - \partial_0 \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times (\partial_0 \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} A^0 - \partial_0 \vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A^0) \end{aligned} \quad (2.48)$$

mas o lado esquerdo de (2.48) fornece $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\parallel$ de onde concluímos que

$$\vec{E}_\parallel = -\vec{\nabla} A^0 \quad ; \quad \vec{E}_\perp = -\partial_0 \vec{A}_\perp. \quad (2.49)$$

A integral espacial em (2.33) do campo elétrico pode ser reescrito

$$\begin{aligned} \int d^3x E^2 &= \int d^3x [E_\perp^2 + E_\parallel^2] = \int d^3x [E_\perp^2 + (\vec{\nabla} A^0) \cdot (\vec{\nabla} A^0)] \\ &= \int d^3x [E_\perp^2 - (\nabla^2 A^0) A^0] = \int d^3x [E_\perp^2 + \rho A^0]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto,

$$H_{\text{QED}} = \frac{1}{2} \int d^3x [B^2 + E_{\perp}^2] + \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho A^0 - \vec{J} \cdot \vec{A}_{\perp} \right] + H_{\text{mat}}, \quad (2.51)$$

onde vemos, em (2.51), o aparecimento do termo envolvendo \vec{A}_{\perp} , pela razão mostrada na condição (2.49). Agora, o termo $\frac{1}{2} \rho A^0$ pode ser escrito de outra forma usando as definições (2.44) e (2.45)

$$\frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) A^0(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\rho(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \rho(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2}. \quad (2.52)$$

O termo $\vec{J} \cdot \vec{A}_{\perp}$ de (2.51) pode também ser reescrito, lembrando a definição de \vec{A}_{\perp}

$$\vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.53)$$

Assim, considerando $\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{\perp}$

$$\int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_{\perp}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.54)$$

Semelhante à definição usada para ρ em (2.44) podemos escrever \vec{J}_{\perp} como

$$\vec{J}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' \vec{J}_{\perp}(\vec{p}', \vec{p}) e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}, \quad (2.55)$$

resultando em

$$\int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{\perp}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2}. \quad (2.56)$$

Agora, podemos deduzir uma identidade vetorial que será usada para reescrever (2.56). Sejam dois vetores genéricos $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ e $\vec{v}' = v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} + v'_z \hat{k}$. Considerando as direções (x, y) como transversais e a direção z como longitudinal, podemos definir

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\perp} &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} & ; & & \vec{v}_{\parallel} &= v_z \hat{k} \\ \vec{v}'_{\perp} &= v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} & ; & & \vec{v}'_{\parallel} &= v'_z \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Desta forma o produto escalar entre os vetores de (2.57), fica

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}'_{\perp} + v_{\parallel} v'_{\parallel}, \quad (2.58)$$

mas podemos escrever $v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \hat{k}$ e $v'_{\parallel} = \vec{v}' \cdot \hat{k}$, obtendo assim a identidade na sua forma final

$$\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}'_{\perp} = \vec{v} \cdot \vec{v}' - (\vec{v} \cdot \hat{k})(\vec{v}' \cdot \hat{k}). \quad (2.59)$$

Usando a identidade (2.59) em (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &= - \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\left[\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \hat{q} \right] \left[\vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \hat{q} \right]}{q^2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Substituindo (2.52) e (2.60) em (2.51), encontramos o H_{QED} na sua forma final [15]

$$\begin{aligned} H_{\text{QED}} &= \frac{1}{2} \int d^3x [B^2 + E_\perp^2] + H_{\text{mat}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\rho(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \rho(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &\quad - \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &\quad + \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\left[\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{q} \right] \left[\vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \vec{q} \right]}{q^4}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

O termo Coulombiano de (2.61) pode ser estudado usando uma forma conhecida para ρ

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i e_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (2.62)$$

assim, encontramos

$$\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{e_i^2}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_i|}. \quad (2.63)$$

O último termo é infinito e representa a interação de uma partícula carregada com ela mesma. Normalmente este termo é desprezado, pelo fato de se considerar a interação entre partículas distintas situadas em pontos diferentes.

2.2 Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) baseia-se no postulado de simetria local (invariância de calibre) $SU(3)$ associada à carga de cor; a sua densidade lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}_\xi (i \gamma^\mu D_\mu - \sum_i m) \psi_\xi \quad (2.64)$$

onde há soma sobre índice repetido, $\psi_\xi(x)$ é o campo de quarks, $\xi \equiv (f, s, c)$ é uma notação compacta que representa um índice coletivo de sabor, spin e cor respectivamente; γ^μ são as matrizes de Dirac e m a matriz de massa dos quarks. O tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$ e a derivada covariante D_μ são dados por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.65)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a. \quad (2.66)$$

Esta é uma teoria de Yang-Mills (TYM), também chamada de teoria de calibre não-abeliana e que estende a álgebra do grupo $U(1)$ da teoria eletromagnética (TEM). Na TEM as cargas elétricas Q obedecem uma álgebra comutativa, característica do grupo $U(1)$ que as descreve. A extensão realizada pela TYM adota uma álgebra não-comutativa do grupo de simetria. Neste sentido, um campo de Yang-Mills $A_\mu^a(x)$ e um campo espinorial $\psi(x)$ se transformam usualmente sob uma representação irredutível do grupo $SU(2)$ ou do $SU(3)$. Pode-se, como ocorre na eletrodinâmica, definir um “momento canonicamente conjugado” Π_μ^a dado por

$$\Pi_\mu^a \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 A^{a\mu})} = F_{\mu 0}^a \quad (2.67)$$

e proceder numa tentativa de conciliar a invariância de calibre e a quantização da teoria partindo novamente do comutador

$$[A_\mu^a(\vec{x}, t), \Pi_\nu^b(\vec{y}, t)] = i \delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.68)$$

no caso $\mu = \nu = 0$ obtemos

$$[A_0^a(\vec{x}, t), \Pi_0^b(\vec{y}, t)] = i \delta^{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.69)$$

no entanto, da equação (2.67), vemos que

$$\Pi_0^b(\vec{y}, t) = F_{00}^b = 0 \quad (2.70)$$

o que é inconsistente com a relação de comutação (2.69). Novamente podemos definir, como na QED, uma densidade lagrangeana modificada para resolver este problema, fixando o calibre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.71)$$

Como foi discutido na eletrodinâmica quântica, pelo fato do calibre estar fixado, a teoria não é mais invariante de calibre e aqui também as predições da teoria não deveriam depender deste parâmetro ξ e portanto o valor assumido é irrelevante, por exemplo poderia ser fixado em $\xi = 1$ (calibre de Feynman) ou $\xi \rightarrow 0$ (calibre de Landau). Desta forma o problema descrito em (2.70) desaparece

$$\Pi_\mu^a = F_{\mu 0}^a - \frac{1}{\xi} g_{\mu 0} (\partial^\nu A_\nu^a). \quad (2.72)$$

Em teorias abelianas como a QED este procedimento permite uma quantização consistente. No entanto, em teorias não-abelianas como a QCD outro problema aparece, ao realizar cálculos perturbativos de um loop para a autoenergia $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$ do glúon, como da figura (2.1). Utilizando uma lagrangeana como a descrita em (2.71), é possível mostrar que $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$ não satisfaz a condição de invariância de calibre

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = 0. \quad (2.73)$$

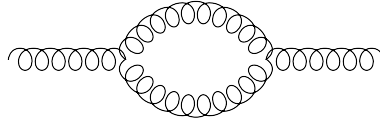


Fig. 2.1:

Este problema nas teorias não-abelianas foi primeiro notado por Feynman no contexto da quantização do campo gravitacional. Um método “heurístico” para resolver essa dificuldade foi sugerido por Feynman e posteriormente desenvolvido por DeWitt [16]. Depois este método foi reformulado por Faddeev e Popov de uma maneira unificada, quantizando o sistema por integrais de caminho. O método consiste na introdução de novos campos fictícios chamados de “Fantasma de Faddeev-Popov”. O campo fantasma é um campo escalar com uma propriedade fermiônica, isto é, ele se constitui num campo escalar com uma álgebra anticomutante. A regra para a inclusão da contribuição do fantasma é adicioná-lo a todo diagrama de loop do campo de calibre. Como é visto na figura (2.2), a linha pontilhada denota o loop no fantasma [7].

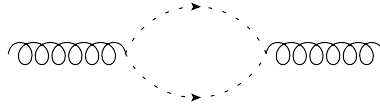


Fig. 2.2:

A descrição da física de hádrons a partir da QCD não é trivial, pois no regime de energia onde existem os estados ligados de hádrons a QCD é não-perturbativa. Portanto, há uma necessidade de se procurar por outras simetrias ou outros aspectos não necessariamente ligados à expansão de uma série perturbativa. Por exemplo, pode-se mostrar que a densidade lagrangeana da QCD de 3 sabores (2.64) no chamado *limite quiral*, isto é, $m_u = m_d = m_s = 0$, possui uma invariância global do tipo $U(3)_L \otimes U(3)_R$, onde L representa esquerdo (left) e R direito (right). Este grupo de simetria pode ser decomposto em componentes vetoriais e axiais obtendo

$$U(3)_L \otimes U(3)_R \equiv SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.74)$$

A simetria $U(1)_A$ é quebrada no processo de quantização, não sendo portanto uma simetria da respectiva teoria quântica [17], [18]. Acredita-se que a simetria quiral é espontaneamente quebrada como

$$U(3)_L \otimes U(3)_R / U(1)_A \longrightarrow SU(3)_V \otimes U(1)_V \quad (2.75)$$

com o aparecimento de oito bósons de Goldstone, sem massa, que formam o octeto pseudoescalar de mésons: $\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$. A simetria $SU(3)_V$ corresponde à conservação do isospin e da

estranheza, nas interações fortes, enquanto que a simetria $U(1)_V$ está relacionada com a conservação do número bariônico. Entre as propriedades mais importantes da QCD de baixa energia estão a quebra dinâmica da simetria quiral e o confinamento da cor.

2.2.1 O calibre de Coulomb de cor

Os êxitos do modelo de quarks da década de 1960 levaram diretamente para o desenvolvimento da QCD no início de 1970. A característica central das primeiras versões do modelo de quarks foi a utilização de quarks constituintes como os graus de liberdade relevantes dos campos de matéria. Embora o advento da QCD tem desafiado os detalhes do modelo, os quarks constituintes leves têm se tornado um padrão e a troca de um glúon é normalmente usada para descrever a dinâmica de curto alcance.

A QCD também indica onde o modelo de quarks pode falhar. A versão canônica não-relativística, depende de um potencial para a descrição da dinâmica de quarks e, portanto, negligencia o efeito de muitos corpos da QCD. Relacionado a estes aspectos está a questão da confiabilidade das aproximações não-relativísticas, a importância dos decaimentos hadrônicos, e a natureza quiral do pión, sendo que estes dois últimos dependem do comportamento não-perturbativo do glúon e são cruciais para o desenvolvimento de modelos robustos de QCD.

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da QCD bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região da QCD. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da QCD na rede. Nesta formulação, os quarks estão localizados nos sítios de uma rede do espaço-tempo, e os campos de calibre são associados às ligações entre sítios vizinhos. As simetrias de calibre do modelo são as rotações independentes do $SU(3)$ nos sítios da rede. Apesar de em princípio não haver dificuldade em calcular qualquer propriedade hadrônica usando esta técnica, a limitação é de ordem computacional que impõe restrições ao uso de redes de tamanhos realistas.

A abordagem hamiltoniana no calibre de Coulomb é apropriada para um exame do problema de estado ligado, porque os métodos familiares da Mecânica Quântica podem ser empregados e porque todos os graus de liberdade são físicos. Além disso, um potencial independente do tempo existe e que permite a construção de estados ligados em um espaço Fock fixo.

Uma forma de verificar que a QCD generaliza a teoria eletromagnética é obter as respectivas equações de Maxwell de cor. Para tanto, podemos calcular as equações de movimento para os campos, a partir de (2.64), usando a equação de Euler-Lagrange, obtendo

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} - g f^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} = g J^{a\mu}, \quad (2.76)$$

onde foi definida a corrente fermiônica como

$$J^{a\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi. \quad (2.77)$$

A eq. (2.76) pode ser escrita de outra forma (trocando os índices mudos $b \leftrightarrow c$)

$$\delta^{ab} \partial_\mu F^{b\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^c F^{b\mu\nu} = g J^{a\nu}, \quad (2.78)$$

ou seja

$$[\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c] F^{b\mu\nu} = g J^{a\nu}. \quad (2.79)$$

Podemos definir a seguinte derivada

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c \quad (2.80)$$

Assim (2.76) fica

$$D_\mu^{ab} F^{b\mu\nu} = g J^{a\nu} \quad (2.81)$$

que é a forma covariante da equação de Maxwell de cor. Partindo da definição de $F_{\mu\nu}^a$ em (2.65) vamos encontrar uma expressão para os campos cromo-elétrico \vec{E}^a e cromo-magnético \vec{B}^a , lembrando que

$$A^{a\mu} = (A^{0a}, \vec{A}^a) \quad ; \quad J^{a\mu} = (\rho_q^a, \vec{J}^a). \quad (2.82)$$

Podemos fazer a identificação dos campos \vec{E}^a e \vec{B}^a com o tensor $F_{\mu\nu}^a$ de forma similar ao eletromagnetismo.

$$\begin{aligned} E^{ai} &= -F^{a0i} \\ B^{ai} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a \quad \text{ou} \quad F^{aij} = -\epsilon^{ijk} B_k^a \end{aligned} \quad (2.83)$$

assim

$$E^{ai} = -[\partial^0 A^{ai} - \partial^i A^{a0} - g f^{abc} A^{b0} A^{ci}] = -\left[\frac{\partial A^{ai}}{\partial t} - \frac{\partial A^{0a}}{\partial x_i} - g f^{abc} A^{0b} A^{ci} \right] \quad (2.84)$$

ou na forma vetorial

$$\vec{E}^a = -\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - \vec{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c \quad (2.85)$$

Para o campo magnético de cor B_μ^a temos

$$\begin{aligned} B^{ai} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} [\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a - g f^{abc} A_j^b A_k^c] \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_k A_j^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} g f^{abc} A_j^b A_k^c \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ikj} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} g f^{abc} A_j^b A_k^c \\ &= -\epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon^{ijk} A_j^b A_k^c \end{aligned} \quad (2.86)$$

ou na forma vetorial

$$\vec{B}^a = \vec{\nabla} \times \vec{A}^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \vec{A}^b \times \vec{A}^c \quad (2.87)$$

Podemos reescrever a derivada D_μ^{ab} de (2.80) na forma não-covariante

$$D_0^{ab} \implies \partial_t^{ab} = \delta^{ab} \frac{\partial}{\partial t} + g f^{abc} A^{0c} \quad (2.88)$$

$$D_j^{ab} \implies \vec{D}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c. \quad (2.89)$$

Voltando à eq. de Maxwell de cor (2.76), vamos abrir esta expressão: considerando $\nu = 0$

$$D_\mu^{ab} F^{b\mu 0} = D_0^{ab} \underbrace{F^{b00}}_{=0} + D_j^{ab} F^{bj0} = g J^{a0} \quad (2.90)$$

ou ainda, a “Lei de Gauss” para o campo elétrico de cor fica

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}^b = g \rho_q^a. \quad (2.91)$$

Muitas vezes é conveniente isolar a derivada usual $\vec{\nabla}$ na lei de Gauss, obtendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = g \rho_q^a + g f^{abc} \vec{E}^b \cdot \vec{A}^c. \quad (2.92)$$

Assim como no caso eletromagnético, no calibre de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a = 0 \quad (2.93)$$

e separamos o campo \vec{E}^a em suas componentes transversais (\perp) e longitudinais (\parallel) de forma análoga

$$\vec{E}^a = \left(1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a + \left(\vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \quad (2.94)$$

onde

$$\vec{E}_\perp^a = \left(1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \quad ; \quad \vec{E}_\parallel^a = \left(\vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a = -\vec{\nabla} \phi^a. \quad (2.95)$$

Pelas definições (2.95) é trivial verificar que as componentes \vec{E}_\perp^a e \vec{E}_\parallel^a satisfazem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp^a = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_\parallel^a = 0. \quad (2.96)$$

A lei de Gauss em (2.91) pode ser reescrita

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}_\perp^b - \left(\vec{D}^{ab} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi^b = g \rho_q^a, \quad (2.97)$$

mas

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}_\perp^b = \left(\delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c \right) \cdot \vec{E}_\perp^b = -g f^{abc} \vec{E}_\perp^b \cdot \vec{A}^c \equiv -g \rho_g^a \quad (2.98)$$

onde foi usado a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp^a = 0$ e

$$\rho_g^a = f^{abc} \vec{E}_\perp^b \cdot \vec{A}^c, \quad (2.99)$$

assim (2.97) fica

$$-\left(\vec{D}^{ab} \cdot \vec{\nabla}\right) \phi^b = g \rho^a, \quad (2.100)$$

com $\rho^a = \rho_q^a + \rho_g^a$ é a densidade total de carga de cor e ρ_g^a de (2.99) é a densidade de carga de cor dos glúons transversos. A equação de movimento para a componente longitudinal do campo elétrico é

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\parallel^a \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - \vec{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c \right) \right] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c \right) A^{0b} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{ab} A^{0b}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

mas sabemos por (2.95) que $\vec{E}_\parallel^a = -\vec{\nabla} \phi^a$, assim comparando com (2.101) encontramos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{ab} A^{0b} = \nabla^2 \phi^a. \quad (2.102)$$

Combinando as equações (2.100) e (2.102), podemos obter uma solução formal para A^{0b}

$$A^{0b} = \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} g \rho^a, \quad (2.103)$$

De uma forma similar o campo transversal pode ser escrito

$$\vec{\Pi}^a \equiv \vec{E}_\perp^a = \partial_0 \vec{A}^a + g \left(1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c. \quad (2.104)$$

Após a quantização canônica, o campo transversal $\vec{\Pi}^a$ se torna o momento canonicamente conjugado ao vetor potencial \vec{A} transversal. A formulação Hamiltoniana no calibre de Coulomb foi amplamente estudada na literatura e a obtenção do respectivo Hamiltoniano é conhecido e bastante elaborado [19]. A seguir vamos apenas escrever estas expressões. A interação não-abeliana instantânea de Coulomb é

$$H_C = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\vec{x}) K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \rho^b(\vec{y}), \quad (2.105)$$

onde

$$K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \equiv \langle \vec{x}, a | \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} | \vec{y}, b \rangle, \quad (2.106)$$

e a densidade total de carga de cor é

$$\rho^a(\vec{x}) = \rho_q^a(\vec{x}) + \rho_g^a(\vec{x}) = f^{abc} \vec{A}^b(\vec{x}) \cdot \vec{\Pi}^c(\vec{x}) + \psi^\dagger(\vec{x}) \frac{\lambda^a}{2} \psi(\vec{x}). \quad (2.107)$$

A forma final para o Hamiltoniano da QCD fica

$$H = H_q + H_g + H_{qg} + H_C, \quad (2.108)$$

onde

$$\begin{aligned} H_q &= \int d^3x \psi^\dagger \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \\ H_g &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\mathcal{J}^{-1/2} \vec{\Pi} \mathcal{J} \cdot \vec{\Pi} \mathcal{J}^{-1/2} + \vec{B} \cdot \vec{B} \right), \\ H_{qg} &= -g \int d^3x \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{A} \psi, \\ H_C &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{J}^{-1/2} \rho^a(x) \mathcal{J}^{1/2} K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \mathcal{J}^{1/2} \rho^b(y) \mathcal{J}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

com \mathcal{J} sendo o determinante de Faddeev-Popov dado por

$$\mathcal{J} = \det(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}). \quad (2.110)$$

Uma dedução rigorosa do Hamiltoniano quântico não-abeliano no calibre de Coulomb foi dada por Schwinger [20] e Cristo e Lee [21], enquanto Zwanziger mostrou como obter o este Hamiltoniano com a regularização na rede [22]. O Hamiltoniano quântico pode ser obtido transformando o Hamiltoniano canônico no calibre $A^0 = 0$ para o calibre de Coulomb.

O Potencial de Fermi-Breit e o modelo de Quarks

Neste capítulo faremos uma revisão de vários assuntos que serão essenciais no decorrer desta dissertação. Inicialmente apresentaremos uma motivação experimental atual no estudo dos hádrons: o experimento FAIR-PANDA, que será num futuro próximo uma referência para medidas de precisão do conteúdo de charme de hádrons e núcleos. A seguir faremos uma revisão do modelo de quarks e da respectivamente obtenção do potencial de Fermi-Breit.

3.1 FAIR-PANDA

O detector PANDA será construído por uma colaboração internacional composta por 400 físicos para estudar os problemas fundamentais da interação forte [23]. O próprio nome PANDA é um acrônimo que significa antipróton de aniquilação em Darmstadt (anti-Proton ANnihilations at DArmstadt). Ele será dedicado aos chamados “estudos de precisão” da interação forte na faixa de energia correspondente à transição da QCD perturbativa ao regime não-perturbativo. Esta região apresenta uma grande complexidade, mas é essencial para a compreensão da natureza, por exemplo, do regime de confinamento, da geração de massas de hádrons etc.

Os experimentos com o detector PANDA serão realizados no High-Energy Storage Ring (HESR), que é o anel de armazenamento de alta energia, do Centro Internacional de Pesquisa, FAIR de Darmstadt, Alemanha. O anel de armazenamento de alta energia vai gerar feixes de antiprótons na faixa de momento da ordem de 1.5 - 15 GeV/c com precisão sem precedentes e intensidade (10^{11} antiprótons que circulam em operação normal). Todos os estados do charmônio podem ser formados e estudados de forma direta.

Os principais temas experimentais de PANDA serão as medições de alta precisão da interação forte nos seguintes campos:

- Espectroscopia de charmônio: medição de precisão das massas, larguras e decaimentos de todos os estados de charmônio para extrair informações sobre o potencial de confinamento de quarks.

- Estados exóticos: estabelecimento das excitações gluônicas previstas pela QCD (híbridos charmosos, glueballs) na faixa de massa $3\text{-}5 \text{ GeV}/c^2$.
- Procurar por modificações de propriedades dos mésons no meio nuclear no setor de charme e sua possível relação com a restauração parcial da simetria quiral.

Assim, os fenômenos do confinamento de quarks, a existência de glueballs e híbridos, a origem da massa da interação forte, sistemas compostos relacionados ao confinamento e à quebra de simetria quiral são quebra-cabeças de longa data e representam um grande desafio intelectual em nossa tentativa de compreender a natureza da interação forte e da matéria hadrônica. O GSI tem feito contribuições importantes para a física das interações fortes, em especial a física nuclear. O experimento PANDA permitirá que o FAIR desempenhe um papel significativo na interação forte, proporcionando uma ligação entre a física nuclear e física de hádrons.

O detector PANDA incorpora as mais recentes tecnologias, a fim de alcançar os critérios de desempenho exigidos em massa, momento e energia. A combinação do feixe de antipróton de alta qualidade e o sistema de detecção fornece um recurso poderoso e único, sem paralelo em todo o mundo, para a realização da pesquisa. O detector é capaz de controlar as partículas para momentos baixos de $100 - 200 \text{ MeV}/c$ e até um valor máximo de $8 \text{ GeV}/c$. A visão geral do PANDA, baseado em dois espectrômetros magnéticos, é mostrada na figura (3.1).

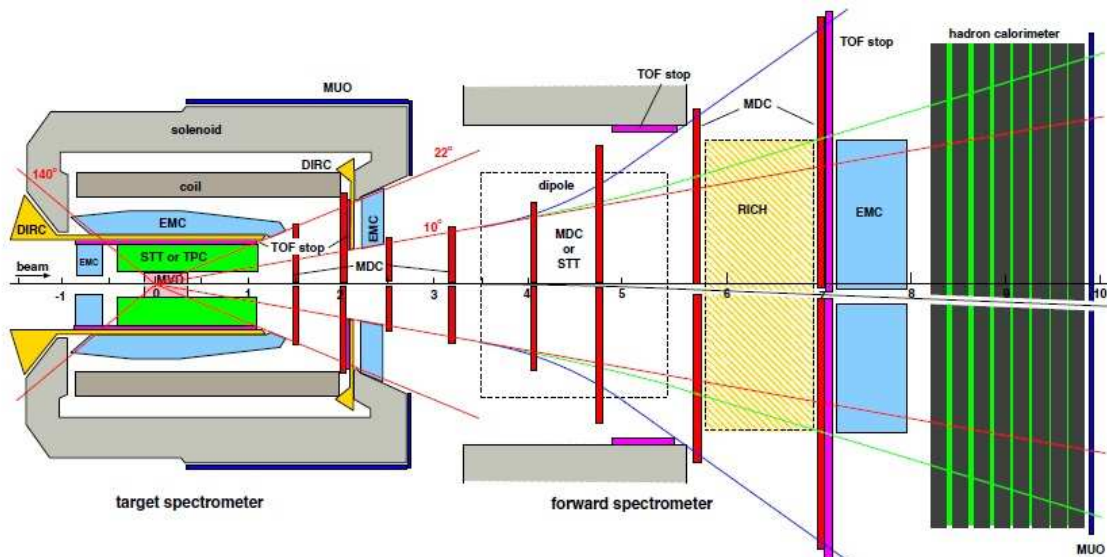


Fig. 3.1: FAIR-PANDA

3.2 Charmônios

Na década de '70 iniciou-se um vigoroso estudo sobre as propriedades de decaimentos de *mésons leves*. Embora esta denominação não seja rigorosa, entende-se por méson leve os mésons apresentados na tabela (3.1).

Estado	S	L	J	P	C	J^{PC}	Mésons	Tipo
1S_0	0	0	0	-	+	0^{-+}	π, η, η', K	pseudo-escalar
3S_1	1	0	1	-	-	1^{--}	ρ, ω, ϕ, K^*	vetor
1P_1	0	1	1	+	-	1^{+-}	b_1, h_1, h'_1, K_1	pseudo-vetor
3P_0	1	1	0	+	+	0^{++}	a_0, f_0, f'_0, K_0^*	escalar
3P_1	1	1	1	+	+	1^{++}	a_1, f_1, f'_1, K_1	vetor-axial
3P_2	1	1	2	+	+	2^{++}	a_2, f_2, f'_2, K_2^*	tensor

Tab. 3.1: *Mésons leves*

Há outros mésons que, na literatura, também se encaixam nesta classificação, porém na tabela (3.1) há um conjunto representativo dos mais leves. A primeira coluna desta tabela apresenta o estado físico na notação usual da espectroscopia, ou seja, $^{2S+1}L_J$. Nas demais colunas temos o spin S , o momento angular L , o momento angular total J , a paridade P , a conjugação de carga C .

A espectroscopia hadrônica, por sua vez, desenvolveu uma nomenclatura própria para descrever os diversos setores dos hádrons, por exemplo *quarkônio estranho* são mésons leves (u, d, s) com ao menos um quark ou antiquark estranho na sua componente $q\bar{q}$ de valência. Estes mésons são chamados de *kaônio* se o estado de base dominante é $n\bar{s}$ (onde $n \equiv u, d$) e *antikaônio* se $s\bar{n}$ e *estranhônio* se $s\bar{s}$. Um estado ligado $c\bar{c}$ é, por sua vez, denominado de *charmônio*. De um modo geral quando um méson é composto por dois quarks de sabores diferentes (por exemplo, $d\bar{s}$) ele é chamado de *méson de sabor aberto*. O respectivo *méson de sabor fechado* é o *estranhônio*, *charmônio*, etc.

Historicamente, a grande explosão no conhecimento sobre a espectroscopia hadrônica iniciou-se após a chamada *Revolução de Novembro* [24], há mais de 30 anos, com a descoberta do méson J/ψ . Esta descoberta conseqüentemente implicou na confirmação da existência de um novo quark: o charme.

Estudos posteriores revelaram, na comparação entre os decaimentos hadrônicos do J/ψ e ψ' , que as excitações radiais dos charmônios estão longe de serem “repetições” simples dos estados fundamentais. O espectro da QCD é mais rico do que a do próprio modelo de quarks, pois os glúons, que antes eram apenas mediadores da força forte entre quarks, podem agora atuar como principais componentes de novos tipos de hádrons. Estes “hádrons gluônicos”, se dividem em duas categorias:

os glueballs e os híbridos. Glueballs são, predominantemente, estados excitados de “glue” (nome genérico atribuído a presença de um ou mais glúons), enquanto os híbridos são ressonâncias que consistem em grande parte de um quark, um antiquark e glue excitado. Os graus de liberdade adicionais carregados pelos glúons permitem aos glueballs e aos híbridos terem spin e números quânticos exóticos J^{PC} . Os números quânticos exóticos proporcionam a melhor oportunidade de distinguir hádrons gluônicos e estados $q\bar{q}$. As propriedades dos glueballs e híbridos são determinadas pelas características de longa distância de QCD e seu estudo trará uma nova visão fundamental da estrutura do vácuo da QCD.

Outro aspecto a ser estudado no FAIR-PANDA é o chamado *charme no núcleo*. Atualmente, a investigação de modificações médias de hádrons na matéria hadrônica é uma das principais atividades de investigação no GSI. A meta é entender a origem das massas de hádrons no contexto da quebra espontânea da simetria quiral na QCD e sua modificação devido à dinâmica quiral e a restauração parcial da simetria quiral em um ambiente hadrônico.

A interação de curta distância dos estados de charmônio, com hádrons singletos de cor, é regida pela troca de dois ou mais glúons. Portanto, investigar a interação de mésons $c\bar{c}$ com nucleons e com núcleos é uma maneira de explorar aspectos fundamentais da dinâmica de glúons na QCD. No entanto, os cálculos recentes indicam apenas pequenas reduções na massa dentro do meio, da ordem de $5\text{-}10 \text{ MeV}/c^2$, para os estados de charmônio mais leves J/ψ e η_c .

A informação experimental sobre propagação de charme na matéria nuclear é escassa e as previsões teóricas são altamente dependentes de modelo. De modo a formar uma base para uma melhor compreensão das propriedades dos hádrons charmosos na matéria nuclear, os primeiros estudos do programa de pesquisa FAIR-PANDA devem concentrar-se na medição da produção de seções de choque de produção de mésons J/ψ e mésons D , na aniquilação de \bar{p} numa série de alvos nucleares.

3.3 O Potencial de Fermi-Breit

Como foi discutido nas seções anteriores, do ponto de vista histórico, o modelo de quarks precedeu ao desenvolvimento da QCD e da ideia de glúons. A descoberta da simetria $SU(3)$ dos bárions e mésons abriu o caminho para criar o modelo de quarks, cuja versão mais simples foi a de um modelo não-relativístico (sem cor) introduzido para explicar os números quânticos do espectro bariônico e mesônico de baixa energia [25], [26]. Este modelo foi estendido para tratar de todas as possíveis propriedades dos hádrons utilizando-se das hipóteses dinâmicas mais simples [27]. Os resultados obtidos para a aniquilação núcleon-antinúcleon, *splittings* de massa dos hádrons, propriedades eletromagnéticas, etc estavam, surpreendentemente, em boa concordância com os resultados da espectroscopia hadrônica. O grau de liberdade de cor foi introduzido em modelos de quarks fenomenológicos em 1973 [28].

Após a introdução dos conceitos de liberdade assintótica e confinamento nas teorias de calibre não-abelianas, A. De Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow (DGG) propuseram [29] introduzir idéias da QCD no modelo de quarks. Eles atribuíram a dependência em spin da interação de dois corpos à parte dependente de spin da interação de troca de um glúon. Isto explicou pela primeira vez o sinal do splitting hiperfino, isto é, porque a Δ é mais pesada que o núcleon e relacionou as respectivas magnitudes do splitting hiperfino às massas dos quarks.

As principais hipóteses deste modelo são:

1. Numa primeira aproximação, os hádrons podem ser classificados em multipletos de $SU(6)$.
2. Os quarks são confinados por forças de longo alcance invariantes por $SU(3) \otimes SU(2)$, sendo que a simetria $SU(3)$ é quebrada via $m_u = m_d \neq m_s$.
3. Liberdade assintótica na QCD para obtenção de potencial dependente de spin através da redução não-relativística do diagrama correspondente à troca de um glúon, analogamente à obtenção do potencial de Fermi-Breit, no caso Coulombiano.

O Hamiltoniano do modelo de quarks neste contexto pode ser descrito por duas partes: uma que usualmente é chamada de *hiperfina* e a outra responsável pelo confinamento

$$H = H_{\text{hip}} + H_{\text{conf}}. \quad (3.1)$$

A partir da parte hiperfina vamos obter o potencial de Fermi-Breit de interação entre quarks, inspirado no Hamiltoniano da QED no calibre de Coulomb (2.61):

$$H_{\text{hip}} = T_{\text{qq}} + V_{\text{qq}} \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\text{qq}} &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \left[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi(\vec{x}) \\ V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3x d^3y J^\mu(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) J^\nu(\vec{y}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{F}^a \equiv \lambda^a/2$, $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, $D_{\mu\nu}$ é o potencial de troca de um glúon e $\psi(x)$ é o campo de Dirac para os quarks. Para H_{hip} ser o análogo ao calibre de Coulomb de (2.61), escreveremos o potencial de troca de um glúon da seguinte forma

$$D_{00}(\vec{q}) = -\frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \quad ; \quad D_{0i}(\vec{q}) = 0 \quad ; \quad D_{ij}(\vec{q}) = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right). \quad (3.4)$$

O campo de quarks pode ser expandido por

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s [u_s(\vec{p})q_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p})\bar{q}_s^\dagger(-\vec{p})] \quad (3.5)$$

onde apenas o índice de spin é mostrado explicitamente; q^\dagger , q são os operadores de criação e destruição de quarks e \bar{q}^\dagger , \bar{q} são os operadores de criação e destruição de anti-quarks respectivamente, obedecendo às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{fsc}(\vec{p}), q_{f's'c'}(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}(\vec{p}')\} = 0, \\ \{q_{fsc}(\vec{p}), q_{f's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{ff'} \delta_{ss'} \delta_{cc'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Onde os índices f , s e c representam a parte de sabor, spin e cor, respectivamente. Os espinores de (3.5) são

$$u_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} f(\vec{p}) \chi_s \\ g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s \end{pmatrix} ; \quad v_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s^c \\ f(\vec{p}) \chi_s^c \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

com

$$f(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} ; \quad g(\vec{p}) = \frac{1}{E_p + m} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \quad (3.8)$$

e $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ e o espinor de Pauli definido por $\chi_s^c = -i\sigma^2 \chi_s^*$, sendo normalizado da seguinte forma

$$\chi_s^* \chi_{s'} = \chi_s^{c*} \chi_{s'}^c = \delta_{ss'}. \quad (3.9)$$

A densidade de corrente de (3.3) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} J^\mu(\vec{x}) &= \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \psi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} \sum_{ss'} \left[u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 \gamma^\mu u_s(\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') q_s(\vec{p}) \right. \\ &\quad + u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 \gamma^\mu v_s(-\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \\ &\quad + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 \gamma^\mu u_s(\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}') q_s(\vec{p}) \\ &\quad \left. + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 \gamma^\mu v_s(-\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vamos nos concentrar, momentaneamente, apenas na parte que envolve quarks em (3.10), pelo fato da parte de antiquarks ter um resultado similar, isto é,

$$\begin{aligned} J^\mu(\vec{x}) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 \gamma^\mu u_s(\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') q_s(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} \sum_{ss'} J_{ss'}^\mu(\vec{p}', \vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') q_s(\vec{p}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e também

$$D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) = \int d^3p e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} D_{\mu\nu}(\vec{p}). \quad (3.12)$$

O potencial de interação de (3.3), considerando apenas a interação quark-quark e o fato $D_{0i}(\vec{p}) = 0$ em (3.4), resulta em

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \sum_a \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \sum_{s_n, i_m} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_4 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\
 &\quad + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4)] q_{I_1}^\dagger(\vec{p}_1) q_{I_2}(\vec{p}_2) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}_3) q_{I_4}(\vec{p}_4) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

com $I \equiv (f, s)$ ou escrevendo (3.13) em *ordenamento normal*:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3 p_1 \dots d^3 p_4 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\
 &\quad + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4)] q_{I_1}^\dagger(\vec{p}_1) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}_3) q_{I_2}(\vec{p}_2) q_{I_4}(\vec{p}_4). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

A expressão (3.14) pode ser reescrita fazendo $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$, $\vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}$, $\vec{p}_4 \rightarrow \vec{p}'$ e integrando em \vec{p}_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3 q d^3 p d^3 p' \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) D_{00}(\vec{q}) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) D_{ij}(\vec{q}) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')] \\
 &\quad \times q_{I_1}^\dagger(\vec{p} + \vec{q}) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}' - \vec{q}) q_{I_2}(\vec{p}) q_{I_4}(\vec{p}'). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Usando o restante da definição do potencial D_{00} e D_{ij} de (3.4) em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3 q d^3 p d^3 p' \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times \left[-\frac{4\pi \alpha_s}{q^2} J_{I_1 I_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') + \frac{4\pi \alpha_s}{q^2} \vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\pi \alpha_s}{q^4} [\vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{q}] [\vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \vec{q}] \right] \\
 &\quad \times q_{I_1}^\dagger(\vec{p} + \vec{q}) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}' - \vec{q}) q_{I_2}(\vec{p}) q_{I_4}(\vec{p}'). \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Com a , s_n e i_m representando a parte de cor, sabor e spin. Vamos introduzir a seguinte notação

$$f_1 = f(\vec{p}_1) \quad ; \quad g_1 = g(\vec{p}_1) \quad ; \quad \text{etc...} \quad (3.17)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^0 u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 f_2 \delta_{s_1 s_2} + g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} \\
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^i u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} + f_2 g_1 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \sigma^i \chi_{s_2}. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Para obter o respectivo Hamiltoniano não-relativístico o operador de quarks $\psi(\vec{x})$ precisa ser escrito em termos de uma expansão em potências do momento \vec{p} :

$$f(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m} \quad ; \quad g(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m}. \quad (3.19)$$

Após as respectivas substituições e algumas manipulações algébricas, obtemos o potencial de Fermi-Breit de troca de um glúon que escreveremos na notação usual

$$\begin{aligned} V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}} = & \frac{\alpha_s}{r} - \frac{\alpha_s}{2m_i m_j} \left(\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{r} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_i)(\vec{r} \cdot \vec{p}_j)}{r^3} \right) - \frac{\pi\alpha_s}{2} \delta^3(\vec{r}) \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \\ & - \frac{\alpha_s}{2r^3} \left\{ \frac{1}{m_i^2} \vec{L}_i \cdot \vec{S}_i - \frac{1}{m_j^2} \vec{L}_j \cdot \vec{S}_j + \frac{1}{m_i m_j} \left[2 \vec{L}_i \cdot \vec{S}_j - 2 \vec{L}_j \cdot \vec{S}_i \right] \right\} \\ & - \frac{\alpha_s}{m_i m_j} \left\{ \frac{8\pi}{3} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \delta(\vec{r}) + \frac{1}{r^3} \left[\frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r})(\vec{S}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde r_i , p_i , m_i , são a posição, momento e massa do i -ésimo quark, $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ e $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular. No potencial de Fermi-Breit destacamos alguns pontos importantes. A força spin-spin

$$V_{\text{ss}}(\vec{r}) = - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \delta(\vec{r}) \quad (3.21)$$

que é responsável por uma categoria muito importante de *splittings* como, por exemplo, o splitting de massa $\Delta - N$ nos bárions e $\rho - \pi$ e $K^* - K$ nos mésons. A força da forma

$$V_{\text{SO}}(\vec{r}) \sim \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (3.22)$$

é chamada de spin-órbita e descreve, no modelo de quarks, o splitting $L - S$. O espaçamento não-uniforme dos níveis $L = 1$ e $S = 1$ pode ser compreendido se pensarmos em termos de um potencial tensorial do tipo

$$V_T(\vec{r}) \sim \frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r})(\vec{S}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j. \quad (3.23)$$

Para propósitos futuros, pode-se utilizar a convenção de soma, agora incluindo índices contínuos, na expressão para V_{qq} de (3.14) para escrever

$$V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv - \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta_{f_\mu f_\rho} \delta_{f_\nu f_\sigma} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \quad (3.24)$$

onde o termo $V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}}$ é de troca de um glúon dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv & \left[J_{I_\mu I_\rho}^0(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\rho) D_{00}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\rho) J_{I_\nu I_\sigma}^0(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\sigma) \right. \\ & \left. + J_{I_\mu I_\rho}^i(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\rho) D_{ij}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\rho) J_{I_\nu I_\sigma}^j(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Podemos escrever, V em (3.14), numa forma simples e compacta

$$V_{qq} = \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \quad (3.26)$$

onde os índices μ, ν, \dots representam momento, spin, sabor e cor. Assim, o Hamiltoniano H_{hip} completo do modelo escrito em segunda quantização fica

$$\begin{aligned} H_{\text{hip}} = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (3.27)$$

O Potencial Méson-Bárion com Troca de Quarks

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos aspectos gerais do chamado “método do grupo ressonante” (Resonating Group Method - RGM). Na primeira seção vamos apresentar o método em primeira quantização. Ele será mostrado num exemplo específico e mais simples, considerando a interação méson-méson. Neste exemplo, vamos adotar a notação e argumentação apresentada na tese no estudo de mésons no trabalho de doutorado de Sérgio Szpigel (USP/1995) [30]. Na segunda seção vamos mostrar a dedução do potencial méson-bárion, usando uma versão em segunda quantização do RGM.

4.1 O “Resonating Group Method” (RGM).

O Resonating Group Method (RGM) foi proposto em 1937 por Wheeler [31] e é utilizado na solução de problemas envolvendo interações entre partículas compostas. Nos anos 1940 e 1950, este método foi amplamente empregado por grupos da Universidade de Londres para estudar os problemas de dispersão e reações nucleares. Os resultados obtidos concordaram bastante bem com o experimento. No entanto, devido a dificuldades de cálculo, apenas os sistemas muito leves poderiam ser investigados [32]. A este método foi dada uma interpretação física em 1958 por Wildermuth e Kanellopoulos [33]. Estes autores sustentaram que, por causa da natureza atrativa das forças nucleares, existem nos núcleos correlações de relativamente longo alcance que se manifestam através da formação de aglomerados nucleônicos chamados de *clusters*. Em particular, eles enfatizaram a importância do papel desempenhado pelo princípio de exclusão de Pauli que faz com que essas correlações de cluster se tornem mais fortes na região da superfície nuclear.

Consideremos um sistema de dois mésons, compostos por quarks e antiquarks de massas iguais, α ($q_1\bar{q}_3$) e β ($q_2\bar{q}_4$). Sejam \vec{r}_i ($i = 1, 4$) as coordenadas dos quarks e antiquarks [10, 14]. As coordenadas relativas internas para cada “cluster”, $\vec{\xi}_\alpha$ e $\vec{\xi}_\beta$, e a coordenada relativa entre os dois “clusters”, $\vec{R}_{\alpha\beta}$,

são dadas por:

$$\vec{\xi}_\alpha = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \quad (4.1)$$

$$\vec{\xi}_\beta = \vec{r}_2 - \vec{r}_4 \quad (4.2)$$

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_3) - \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_4) . \quad (4.3)$$

O estado de espalhamento de dois mésons correspondente é descrito pela função de onda RGM, que pode ser escrita na forma

$$\mathcal{A}\Psi(\vec{\xi}_\alpha, \vec{\xi}_\beta, \vec{R}_{\alpha\beta}) = \mathcal{A} \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \chi(\vec{R}_{\alpha\beta}) \right] , \quad (4.4)$$

onde ϕ_α e ϕ_β são, respectivamente, as funções de onda espaciais dos mésons α e β , χ é a “função de onda relativa” entre os dois “clusters”, $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$ é um fator que contém a parte correspondente às funções de onda de spin, sabor e cor. O operador de anti-simetrização, \mathcal{A} , é definido por

$$\mathcal{A} = 1 - \mathcal{A}' = 1 - \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} P_{ij} , \quad (4.5)$$

onde P_{ij} é o operador de permutação das partículas i e j . Consideremos uma interação entre quarks do tipo de dois corpos, tal que o Hamiltoniano microscópico é dado por:

$$H = K + V , \quad (4.6)$$

$$K = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + m_i \right) - K_G \quad (4.7)$$

$$V = \sum_{i>j} V_{ij} \quad (4.8)$$

onde $m_i = m_q$ ($i = 1, 4$) são as massas dos quarks e antiquarks e K_G é a energia cinética do centro de massa. Dado o Hamiltoniano microscópico, H , e conhecidas as funções de onda dos mésons, a equação de movimento para a função χ é obtida utilizando-se o princípio variacional,

$$\frac{\delta}{\delta \chi^\dagger} \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta \Psi^\dagger(\vec{\xi}_\alpha, \vec{\xi}_\beta, \vec{R}_{\alpha\beta}) (H - E) \mathcal{A}\Psi(\vec{\xi}_\alpha, \vec{\xi}_\beta, \vec{R}_{\alpha\beta}) = 0 , \quad (4.9)$$

onde E é a energia total do sistema de dois mésons no centro de massa. Assim, obtemos

$$\int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] (H - E) \mathcal{A} \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \chi(\vec{R}_{\alpha\beta}) \right] = 0 . \quad (4.10)$$

Definimos, então, o Hamiltoniano RGM, $H(\vec{R}', \vec{R})$, e o “kernel de normalização”, $N(\vec{R}', \vec{R})$, dados por

$$H(\vec{R}', \vec{R}) = K(\vec{R}', \vec{R}) + V(\vec{R}', \vec{R}) \quad (4.11)$$

$$K(\vec{R}', \vec{R}) = K^{dir}(\vec{R}) \delta(\vec{R}' - \vec{R}) - K^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) \quad (4.12)$$

$$V(\vec{R}', \vec{R}) = V^{dir}(\vec{R}) \delta(\vec{R}' - \vec{R}) - V^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) \quad (4.13)$$

$$N(\vec{R}', \vec{R}) = N^{dir}(\vec{R}) \delta(\vec{R}' - \vec{R}) - N^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) , \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K^{dir} \\ V^{dir} \\ N^{dir} \end{pmatrix} (\vec{R}) &= \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta d\vec{R}_{\alpha\beta} \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \begin{pmatrix} K \\ V \\ 1 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha\beta}) \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K^{ex} \\ V^{ex} \\ N^{ex} \end{pmatrix} (\vec{R}', \vec{R}) &= \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta d\vec{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{R}' - \vec{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \begin{pmatrix} K \\ V \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{A}' \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Utilizando essas definições, obtemos a equação RGM

$$\int d\vec{R} \mathcal{L}(\vec{R}', \vec{R}) \chi(\vec{R}) = 0, \quad (4.17)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{R}', \vec{R}) &= H(\vec{R}', \vec{R}) - EN(\vec{R}', \vec{R}) \\ &= \left[-\frac{1}{2\mu_{13;24}} \nabla_{\vec{R}}^2 + V_{rel}^{dir}(\vec{R}) - E_{rel} \right] \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}') \\ &\quad - \left[K^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + V^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) - EN^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $\mu_{13;24}$ é a “massa reduzida” do sistema de dois mésons, dada por

$$\mu_{13;24} = \frac{(m_1 + m_3)(m_2 + m_4)}{(m_1 + m_3) + (m_2 + m_4)} = m_q. \quad (4.19)$$

A interação direta entre os mésons, V_{rel}^{dir} , é dada por

$$\begin{aligned} V_{rel}^{dir}(\vec{R}) &= \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta d\vec{R}_{\alpha\beta} \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} V_{ij} \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha\beta}) \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

A energia relativa dos dois “clusters”, E_{rel} , é dada por

$$E_{rel} = E - E_{int}, \quad (4.21)$$

onde E_{int} é a energia interna total do sistema de dois mésons, dada por

$$E_{int} = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta = \frac{P_\alpha^2}{4m_q} + m_\alpha + \frac{P_\beta^2}{4m_q} + m_\beta, \quad (4.22)$$

onde \vec{P}_α e \vec{P}_β denotam os momentos e m_α e m_β denotam as energias internas (massas) dos mésons. Uma vez que as ϕ 's são auto-funções do Hamiltoniano, podemos escrever

$$K^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + V^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) = H_{int} N^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + \mathcal{K}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + \mathcal{V}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}), \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) &= \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta d\vec{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{R}' - \vec{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \left(-\frac{\nabla_{\vec{R}_{\alpha\beta}}^2}{2\mu_{13;24}} \right) \mathcal{A}' \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) &= \int d\vec{\xi}_\alpha d\vec{\xi}_\beta d\vec{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{R}' - \vec{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\vec{\xi}_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\vec{\xi}_\alpha) \mathbf{C}_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} V_{ij} \mathcal{A}' \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\vec{\xi}_\alpha) \phi_\beta(\vec{\xi}_\beta) \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{R}', \vec{R}) &= \left[-\frac{1}{2\mu_{13;24}} \nabla_{\vec{R}}^2 + V_{rel}^{dir}(\vec{R}) - E_{rel} \right] \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}') \\ &- \left[\mathcal{K}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + \mathcal{V}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) - E_{rel} N^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

Escrevemos a Eq. (4.17) numa forma adequada para problemas de espalhamento,

$$(\nabla_{\vec{R}}^2 + k_{rel}^2) \chi(\vec{R}) = 2\mu_{13;24} \int d\vec{R}' U(\vec{R}, \vec{R}') \chi(\vec{R}') \quad (4.27)$$

onde $k_{rel}^2 = 2\mu_{13;24} E_{rel}$ e

$$U(\vec{R}, \vec{R}') = V_{rel}^{dir}(\vec{R}) - \mathcal{K}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) - \mathcal{V}^{ex}(\vec{R}', \vec{R}) + E_{rel} N^{ex}(\vec{R}', \vec{R}). \quad (4.28)$$

Esta equação pode ser escrita na forma de uma equação de Lippmann-Schwinger,

$$\chi(\vec{R}) = \chi_0(\vec{R}) + 2\mu_{13;24} \int d\vec{R}' G^0(\vec{R}, \vec{R}') U(\vec{R}, \vec{R}') \chi(\vec{R}'), \quad (4.29)$$

onde G^0 é a função de Green livre para o operador $(\nabla_{\vec{R}}^2 + k_{rel}^2)$. Para χ_0 tomamos uma onda plana,

$$\chi_0(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k}_{rel} \cdot \vec{R}}. \quad (4.30)$$

Obtemos, assim, uma equação auto-consistente para a função de onda relativa χ , cuja solução iterativa corresponde à série de Born completa [10]. Para o potencial tipo oscilador harmônico, essa equação pode ser resolvida exatamente [10]. É importante observar que a função χ obtida não pode ser interpretada como a função de onda relativa usual dos dois “clusters”, devido à presença do “kernel de normalização”, N , na Eq. (4.18). Isto é, a função χ não está normalizada da maneira usual em mecânica quântica. Definimos [14] a função de onda “renormalizada”,

$$\chi_R(\vec{R}) = \int d\vec{R}' N^{\frac{1}{2}}(\vec{R}, \vec{R}') \chi(\vec{R}'). \quad (4.31)$$

A função χ_R é normalizada da maneira usual, e satisfaz uma equação do tipo Schrodinger ordinária,

$$\int d\vec{R}' \mathcal{H}(\vec{R}, \vec{R}') \chi_R(\vec{R}') = E \chi_R(\vec{R}), \quad (4.32)$$

onde \mathcal{H} é o Hamiltoniano “renormalizado”, definido por

$$\mathcal{H}(\vec{R}, \vec{R}') = \int d\vec{R}'' d\vec{R}''' N^{-\frac{1}{2}}(\vec{R}, \vec{R}'') H(\vec{R}'', \vec{R}''') N^{-\frac{1}{2}}(\vec{R}''', \vec{R}'), \quad (4.33)$$

de modo que pode ser interpretada como a função de onda relativa dos dois “clusters”.

4.2 O Potencial Méson-Bárion

Nesta seção vamos estudar o espalhamento de dois clusters, usando o RGM na linguagem de segunda quantização, para um sistema de clusters contendo um méson e um bárion.

Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons aplicados ao vácuo, operadores estes que podem ser definidos em termos de combinações lineares de produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado $|\alpha\rangle$ no espaço de Fock, \mathcal{F} , que descreve esse méson, é dado por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (4.34)$$

onde M_α^\dagger é o operador de criação de um méson composto no estado α e $|0\rangle$ é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0; \quad (4.35)$$

nesta representação q_μ representa o operador aniquilação de um quark contendo números quânticos representados por μ e \bar{q}_ν denota o operador aniquilação de um antiquark com números quânticos representados por ν ; o operador M_α^\dagger é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (4.36)$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do estado ligado do méson sendo q_μ^\dagger e \bar{q}_ν^\dagger os correspondentes conjugados hermitianos de q_μ e \bar{q}_ν . O índice α representa, de uma maneira compacta, os números quânticos do méson: $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$. Os índices μ e ν identificam os números quânticos de quarks e antiquarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$. É conveniente ademais trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.37)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de orto-normalização apresentada na equação (4.37), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (4.39)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (4.40)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (4.41)$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ apresentado na Eq. (4.40) e que aparece na relação não-canônica (4.39) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ e $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$ não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson,

M_α e M_α^\dagger , não são variáveis dinâmicas convenientes. Seguindo do mesmo modo, a forma explícita do operador de criação de bárions B_α^\dagger é dada por

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{6}} \Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad (4.42)$$

com a normalização da função de onda dada por

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.43)$$

Da mesma forma do que foi descrito para o méson temos

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger |0\rangle \quad (4.44)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo (sem quarks). Usando as relações de anticomutação entre os quarks (3.6) pode-se mostrar que o operador B_α obedece as seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{B_\alpha, B_\beta\} &= 0 \\ \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde

$$D_{\alpha\beta} = 3\Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1 \mu_2 \nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_3} - \frac{3}{2} \Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1 \nu_2 \nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3}. \quad (4.46)$$

A presença do operador $D_{\alpha\beta}$ na relação de anticomutação revela a natureza composta dos operadores de bárions. Outras relações importantes são as seguintes

$$\begin{aligned} \{q_\mu, B_\alpha\} &= 0 \\ \{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\alpha^{\mu \mu_2 \mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Em $\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\}$ também vemos a interferência da estrutura interna do bárion, revelando a falta de independência cinemática entre o operador de bárion e o de quarks.

O “ansatz” para o estado de méson-bárion é dado por:

$$|\Lambda\rangle = \varphi_\Lambda^{*\alpha\beta} M_\alpha^\dagger B_\beta^\dagger |0\rangle \quad (4.48)$$

onde $\varphi_\Lambda^{*\alpha\beta}$ é a função de onda ansatz para o estado de méson-bárion que descreve o movimento dos dois clusters; Λ identifica os números quânticos do estado méson-bárion. A condição de normalização para $|\Lambda\rangle$ é dada por

$$\langle \Lambda' | \Lambda \rangle = \varphi_{\Lambda'}^{*\alpha\beta} N(\alpha\beta; \gamma\delta) \varphi_\Lambda^{\gamma\delta}, \quad (4.49)$$

onde $N(\alpha\beta; \gamma\delta)$ é o “kernel de normalização” que pode ser avaliado, lembrando que

$$\langle 0 | B_\beta M_\alpha M_\gamma^\dagger B_\delta^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - 3\Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\rho\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu} \Psi_\delta^{\mu_2\mu_3} \quad (4.50)$$

Assim,

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - N_E(\alpha\beta; \gamma\delta) , \quad (4.51)$$

e

$$N_E(\alpha\beta; \gamma\delta) = 3\Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\rho\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \quad (4.52)$$

é o kernel de troca. A equação de movimento para $\varphi_\Lambda^{\alpha\beta}$ é obtida por meio do princípio variacional:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{\Lambda'}} \langle \Lambda' | (H_{\text{hip}} - E_\Lambda) | \Lambda \rangle = 0 . \quad (4.53)$$

onde H_{hip} é o Hamiltoniano hiperfino (3.27), isto é,

$$\begin{aligned} H_{\text{hip}} = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para calcular $\langle \Lambda' | H_{\text{hip}} | \Lambda \rangle$, será necessário avaliar os seguintes termos

$$\begin{aligned} (a) & \quad \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger q_\mu | \Lambda \rangle \\ (b) & \quad \langle \Lambda' | \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu | \Lambda \rangle \\ (c) & \quad \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle \\ (d) & \quad \langle \Lambda' | \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma | \Lambda \rangle \\ (e) & \quad \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para avaliar o primeiro termo (a), lembramos a seguinte identidade, que pode ser demonstrada usando (4.41) e (4.47)

$$q_\mu M_\gamma^\dagger B_\delta^\dagger | 0 \rangle = \Phi_\gamma^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger B_\delta^\dagger | 0 \rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger M_\gamma^\dagger | 0 \rangle \quad (4.56)$$

e da mesma forma

$$\langle 0 | B_\beta M_\alpha q_\mu^\dagger = \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} \langle 0 | B_\beta \bar{q}_{\nu'}^\dagger + \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{*\mu\mu'_2\mu'_3} \langle 0 | M_\alpha q_{\mu'_3}^\dagger q_{\mu'_2}^\dagger . \quad (4.57)$$

Juntando (4.56), (4.57) e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger q_\mu | \Lambda \rangle &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \langle 0 | B_\beta M_\alpha q_\mu^\dagger q_\mu M_\gamma^\dagger B_\delta^\dagger | 0 \rangle \\ &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \left[\delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\tau} + 3 \delta_{\alpha\gamma} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} - 3 \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \right. \\ & \quad \left. - 3 \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} + 6 \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_2\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\mu\mu_3} \right] . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por procedimentos similares os outros termos de (4.55) ficam

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda' | \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu | \Lambda \rangle &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \left[\delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\tau\nu} \Phi_\gamma^{\tau\nu} - 3 \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\tau\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\tau\nu} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \right] \\
 \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \left[6 \delta_{\alpha\gamma} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} - 6 \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_3\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\rho} \right. \\
 &\quad - 12 \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} + 12 \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\mu_3} \\
 &\quad \left. + 6 \Phi_\alpha^{*\nu\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} - 6 \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \right] \\
 \langle \Lambda' | \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma | \Lambda \rangle &= 0 \\
 \langle \Lambda' | q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \left[\delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} - 3 \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \right. \\
 &\quad - 3 \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} + 3 \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 &\quad \left. - 6 \Phi_\alpha^{*\tau\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\tau\sigma\mu_3} \right]. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Juntando (4.58) e (4.59), podemos obter $\langle \Lambda' | H_{\text{hip}} | \Lambda \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda' | H_{\text{hip}} | \Lambda \rangle &= \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \left[T(\mu) \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\tau} + 3 T(\mu) \delta_{\alpha\gamma} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \right. \\
 &\quad - 3 T(\mu) \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \\
 &\quad - 3 T(\mu) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 &\quad + 6 T(\mu) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_2\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\mu\mu_3} \\
 &\quad + T(\nu) \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\tau\nu} \Phi_\gamma^{\tau\nu} \\
 &\quad - 3 T(\nu) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\tau\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\tau\nu} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 &\quad + 3 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \delta_{\alpha\gamma} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\
 &\quad - 3 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_3\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\rho} \\
 &\quad - 6 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\
 &\quad + 6 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\mu_3} \\
 &\quad + 3 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu\tau} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 &\quad - 3 V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 &\quad + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \\
 &\quad - 3 V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 &\quad - 3 V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 &\quad + 3 V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 &\quad \left. - 6 V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\tau\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\tau\sigma\mu_3} \right] \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

ou seja

$$\langle \Lambda' | H_{\text{hip}} | \Lambda \rangle = \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha} \varphi_{\Lambda}^{\gamma\delta} \left[V^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^{\text{exc}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) \right] \quad (4.61)$$

onde

$$V^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\nu\nu_2} \Psi_{\beta}^{*\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu_2} \Psi_{\delta}^{\sigma\mu_2\mu_3} - 3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\rho} \Psi_{\delta}^{\sigma\mu_2\mu_3}, \quad (4.62)$$

correspondendo à interação méson-báron com troca de um glúon sem troca de quarks (termo direto).

$$\begin{aligned} V^{\text{exc}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_2} \Psi_{\beta}^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu_2} \Psi_{\delta}^{\sigma\mu_2\mu_3} - 3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\sigma\rho} \Psi_{\delta}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ &\quad - 3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_2} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\nu_2} \Psi_{\delta}^{\sigma\rho\mu_3} - 6V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\nu_1\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\rho} \Psi_{\delta}^{\nu_1\sigma\mu_3}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

correspondendo à interação méson-báron com troca de um glúon com troca de quarks (termo de troca ou *exchange*). O último termo V^{intra} está relacionado com troca de um glúon dentro do mesmo hádron definido por

$$\begin{aligned} V^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= H_M(\mu\nu; \sigma\rho) \delta_{\beta\delta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\sigma\rho} + H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \delta_{\alpha\gamma} \Psi_{\beta}^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_{\delta}^{\sigma\rho\mu_3} \\ &\quad - 3H_M(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\sigma\rho} \Psi_{\delta}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ &\quad - H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_3\tau} \Psi_{\delta}^{\mu_1\sigma\rho} \\ &\quad - H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\tau} \Psi_{\delta}^{\sigma\rho\mu_3} \\ &\quad + H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\rho\tau} \Psi_{\delta}^{\mu_1\sigma\mu_3}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Os Hamiltonianos H_M e H_B em (4.64) são definidos como

$$\begin{aligned} H_M(\mu\nu; \sigma\rho) &= T(\mu) \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + T(\nu) \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \\ H_B(\mu\nu; \sigma\rho) &= 3 [T(\mu) \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)] \end{aligned} \quad (4.65)$$

e satisfazem equações de Schrödinger de estado ligado

$$\begin{aligned} H_M(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\sigma\rho} &= \epsilon_{[\alpha]}^M \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu} \\ H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_{\alpha}^{\sigma\rho\tau} &= \epsilon_{[\alpha]}^B \Psi_{[\alpha]}^{\mu\nu\tau} \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde a notação de índice entre colchetes $[\alpha]$ significa que não há soma sobre estes índices repetidos.

Agora, usando (4.66) na definição do V^{intra} obtemos

$$\begin{aligned} V^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \epsilon_{[\gamma]}^M \delta_{\beta\delta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\mu\nu} + \epsilon_{[\delta]}^B \delta_{\alpha\gamma} \Psi_{\beta}^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_{\delta}^{\mu\nu\mu_3} - 3\epsilon_{[\gamma]}^M \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu_2\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu\nu} \Psi_{\delta}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ &\quad - \epsilon_{[\delta]}^B \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_3\tau} \Psi_{\delta}^{\mu_1\mu\nu} - \epsilon_{[\delta]}^B \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\tau} \Psi_{\delta}^{\mu\nu\mu_3} \\ &\quad - \epsilon_{[\delta]}^B \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\tau} \Psi_{\beta}^{*\rho\sigma\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\rho\tau} \Psi_{\delta}^{\mu_1\sigma\mu_3}. \\ &= (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} - 3(\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\tau} \Psi_{\delta}^{\mu\nu\mu_3} \\ &= (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) [\delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} - 3\Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\tau} \Psi_{\delta}^{\mu\nu\mu_3}] \\ &= (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) N(\alpha\beta; \gamma\delta). \end{aligned} \quad (4.67)$$

A equação do RGM (4.53) fica

$$\left[V^{dir}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^{exc}(\alpha\beta; \gamma\delta) + (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B - E_\Lambda) N(\alpha\beta; \gamma\delta) \right] \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} = 0. \quad (4.68)$$

uma forma alternativa de escrever (4.68) é separando o V^{intra} em dois termos

$$\begin{aligned} V^{intra}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) [\delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} - 3 \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\mu\nu\mu_3}] \\ &= T_{RGM} + h^{intra} \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde

$$T_{RGM} = (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} \quad ; \quad h^{intra} = -(\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) N_E(\gamma\delta; \alpha\beta). \quad (4.70)$$

Assim, a equação (4.68) fica

$$[H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda N(\alpha\beta; \gamma\delta)] \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} = 0, \quad (4.71)$$

onde

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (4.72)$$

e

$$V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V^{dir}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^{exc}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (4.73)$$

O que vamos chamar de “potencial méson-báron” serão os termos associados ao V^{exc} de V_{RGM} , pois os termos diretos V^{dir} serão nulos por representarem a troca de um gluon entre hádrons sem, no entanto, haver troca de quarks. Este fato implica que o elemento de matriz de cor será nulo. Desta forma podemos definir o “potencial méson-báron” V_{mb} como sendo

$$V_{mb}(\alpha\beta; \delta\gamma) = V^{exc}(\alpha\beta; \delta\gamma) = \sum_{i=1}^4 V_i(\alpha\beta; \delta\gamma) \quad (4.74)$$

onde

$$\begin{aligned} V_1(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu_2} \Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ V_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ V_3(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu_2} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\ V_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Estes termos do potencial podem ser representados diagramaticamente como é visto na figura (4.1) O Hamiltoniano do RGM pode ser “renormalizado” :

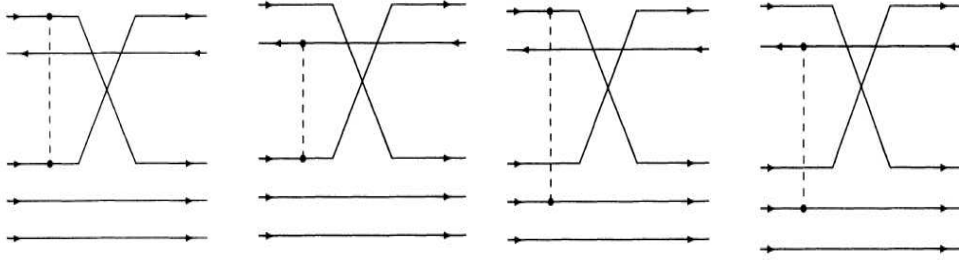


Fig. 4.1: Diagramas correspondendo a V_1 , V_2 , V_3 e V_4

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta')H_{RGM}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta')N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta), \quad (4.76)$$

de modo que a equação de movimento RGM “renormalizada” pode ser escrita como:

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \bar{\varphi}_\Lambda^{\gamma\delta} = 0. \quad (4.77)$$

Expandindo a matriz $N^{-\frac{1}{2}}$ de acordo com

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}N_E + \frac{3}{4}N_E^2 + \dots \quad (4.78)$$

obtemos

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (4.79)$$

onde $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ contém potências de $\Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}$ e $\Psi_\alpha^{\mu\nu\tau} \Psi_\alpha^{*\rho\sigma\lambda}$.

Correções Relativísticas no Espalhamento J/ψ -Nucleon

Neste capítulo vamos apresentar a parte inédita do nosso estudo: a obtenção de um novo potencial microscópico de troca de um glúon entre quarks para aplicar no espalhamento J/ψ -nucleon.

Pretende-se, neste trabalho de mestrado, estudar na interação méson-bárion, os efeitos associados à interação entre um quark pesado Q com outro quark leve q no potencial de troca de um glúon chamado de *One Gluon Exchange Potential* (OGEP). Como foi descrito no Capítulo 2, usualmente o OGEP é obtido a partir de um potencial de interação relativístico de dois corpos do modelo de quarks como definido na equação (3.3), fazendo uma expansão em potências do momento dos espinores constituintes. Esta expansão é truncada em segunda ordem na potência, obtendo o que é conhecido como o *potencial de Fermi-Breit*, isto é,

$$\begin{array}{ccc}
 V_{\text{I}}^{\text{relativístico}} & \longrightarrow & V_{\text{Fermi-Breit}}^{\text{qq}} \\
 & \uparrow & \\
 & \text{aprox. não-relativística} &
 \end{array}$$

Este potencial, também chamado de *potencial microscópico*, é usado nos principais estudos sobre decaimento e espalhamento de mésons e bárions, modelando a parte de curto alcance da interação. Entretanto, quando se trata do sistema J/ψ -nucleon, como pode ser visto na figura (5.1) para um típico processo, um glúon é trocado entre um quark pesado Q e outro quark leve q . O procedimento usual para a obtenção do potencial de Fermi-Breit, tradicionalmente desconsidera este aspecto e trata as massas como sendo da mesma ordem de grandeza na aproximação não-relativística.

Neste estudo, será feita uma aproximação semi-relativística para o quark leve q , enquanto que o quark pesado Q será considerado totalmente não-relativístico como é visto na figura (5.2). O potencial microscópico semi-relativístico V_{Qq} (pesado-leve) resultante será usado dentro do contexto do Resonating Group Method (RGM) para estudar a interação entre os charmônios com o núcleon.

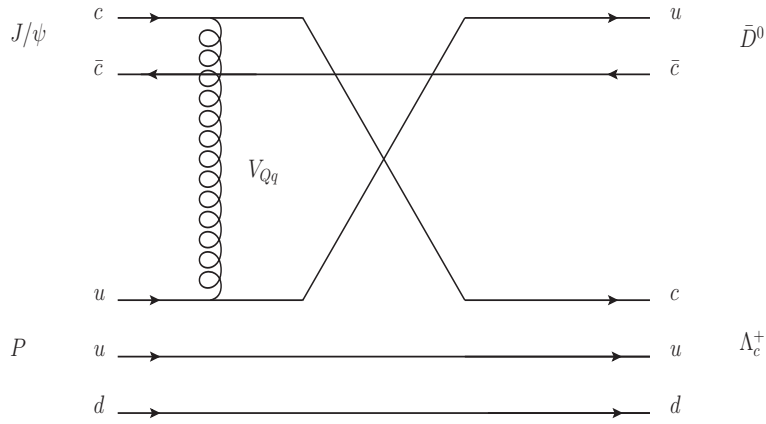


Fig. 5.1: Diagrama correspondendo ao espalhamento J/ψ -próton

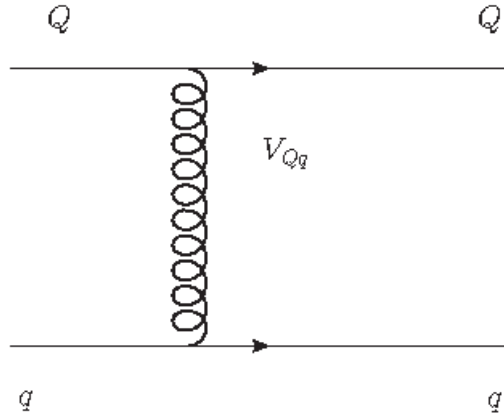


Fig. 5.2: V_{Qq}

5.1 O Potencial Pesado-Leve

A produção de quarkonium pesado em colisões de íons pesados tem sido considerada um possível diagnóstico para o aparecimento de fases exóticas na QCD em colisões de íons pesados relativísticos. As seções de choque de dissociação do J/ψ , por exemplo, foram estimadas utilizando-se modelos de troca de mésons, assumindo, por exemplo, troca de um méson charmoso no canal- t ou usando um lagrangeano hadrônico efetivo. Os resultados destes modelos para a seção de choque de espalhamento J/ψ -méson resultaram em valores na faixa de poucos mb [34]. Cálculos semelhantes foram obtidos para o espalhamento J/ψ -N e também encontram seções de choque totais próximos do limiar de poucos mb [35, 36]. Embora estes modelos de troca de méson sejam de grande interesse como possíveis descrições realistas desses processos, eles sofrem de incertezas devido a fatores de forma

de vértice mal compreendidos, espaço de Fock truncados no conjunto de partículas trocadas etc [37]. Muitos dos problemas encontrados em outras tentativas foram evitados implementando uma descrição “microscópica” envolvendo quarks e glúons nesses processos de espalhamento, por exemplo, usando o modelo de quark constituinte [38]-[42].

Estas abordagens descrevem interações hadrônicas e estados ligados em termos do modelo de quarks não-relativísticos, e geralmente assumem que as amplitudes de espalhamento são dadas com precisão suficiente em ordem de aproximação de Born na interação de quarks-glúons. No trabalho de J. P. Hilbert et al. descrito na referência [37], o Hamiltoniano de interação entre quarks que foi usado é

$$H_I = \sum_{ij} \mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j \left[V_{\text{Conf}}(ij) + V_{\text{Hip}}(ij) \right] \quad (5.1)$$

onde V_{Coul} é a parte de Coulomb de cor, V_{Conf} é o termo de confinamento linear e V_{Hip} a contribuição hiperfina, dados por

$$\begin{aligned} V_{\text{Conf}}(ij) &= -\frac{3}{4} b r_{ij} \\ V_{\text{Hip}}(ij) &= \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{8\alpha_s \sigma^3}{3\sqrt{\pi} m_i m_j} e^{-\sigma^2 r_{ij}^2} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde o somatório se estende sobre todos os quarks e antiquarks. A contribuição hiperfina contém apenas o termo spin-spin; a estrutura de cor é dada pela forma perturbativa $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}^a = \lambda^a/2$ para o quark e $\mathcal{F}^a = -\lambda^{aT}/2$ para o antiquark.

Vamos descrever a seguir o procedimento para obter o chamado *potencial pesado-leve*. Um fato importante precisa ser destacado neste momento: o nosso novo potencial será uma correção relativística apenas ao termo de spin-spin do potencial de J. P. Hilbert et al. (5.2). Esta escolha, num primeiro momento, simplifica bastante os cálculos.

O ponto de partida será novamente o potencial V_{qq} de (3.16), isto é,

$$\begin{aligned} V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3q d^3p d^3p' \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\ &\times \left[-\frac{4\pi \alpha_s}{q^2} J_{I_1 I_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') + \frac{4\pi \alpha_s}{q^2} \vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi \alpha_s}{q^4} [\vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{q}] [\vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \vec{q}] \right] \\ &\times q_{I_1}^\dagger(\vec{p} + \vec{q}) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}' - \vec{q}) q_{I_2}(\vec{p}) q_{I_4}(\vec{p}'). \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde as correntes de (5.3) são obtidas de (3.18), ou seja,

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^0 u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 f_2 \delta_{s_1 s_2} + g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} \\ J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^i u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} + f_2 g_1 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \sigma^i \chi_{s_2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para obter o respectivo potencial semi-relativístico pesado-leve, o operador de quarks $\psi(\vec{x})$ precisa ser escrito novamente em termos de uma expansão em potências do momento \vec{p} . Vamos definir a aproximação “pesada” do problema como sendo idêntica à (3.19):

$$f_p(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m} \quad ; \quad g_p(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m} \quad (5.5)$$

e as funções espinoriais f e g ganham o subscrito “p” de pesado. A aproximação que chamaremos de “leve” introduz uma correção relativística ao problema pela adição, às funções f e g , do próximo termo da expansão em momento

$$f_l(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m} + \frac{11p^4}{128m^4} \quad ; \quad g_l(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m} - \frac{3p^2}{16m^3} \quad (5.6)$$

e as funções espinoriais f e g ganham o subscrito “l” de leve. O potencial (5.3) tem a seguinte estrutura

$$J^\mu D_{\mu\nu}(\vec{q}) J^\nu = -\frac{D_0}{q^2} J^0 J^0 + \frac{D_0}{q^2} \vec{J} \cdot \vec{J} - \frac{D_0}{q^4} (\vec{J} \cdot \vec{q})(\vec{J} \cdot \vec{q}). \quad (5.7)$$

onde D_0 é uma constante. A análise que será feita a seguir será para a interação quark-quark, mas o resultado é também válido para a interação quark-antiquark, para tanto basta fazer a seguinte modificação

$$\chi_s \longrightarrow \chi_s^c$$

nas correntes J^μ . Como estamos interessados apenas na correção relativística para o termo de spin-spin, vamos investigar quais destes três termos de (5.7) que podem contribuir com uma estrutura operatorial do tipo

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$$

Para tanto, lembremos as seguintes identidades vetoriais envolvendo as matrizes de Pauli

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (5.8)$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (5.9)$$

$$\sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = p^i - i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \quad (5.10)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \sigma^i = p^i + i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \quad (5.11)$$

e também

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \quad (5.12)$$

Vamos também chamar

$$\vec{\sigma}_{12} \equiv \vec{\sigma} \quad ; \quad \vec{\sigma}_{34} \equiv \vec{\sigma}' \quad ; \quad \delta_{12} \equiv \delta \quad ; \quad \delta_{34} \equiv \delta' \quad (5.13)$$

Feitas estas considerações vemos, usando (5.4), que o termo $J^0 J^0$ de (5.7) gera contribuições do tipo

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \quad \text{ou} \quad [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2)]^2 \quad (5.14)$$

e por (5.8) vemos que não irá gerar um termo do tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$. O terceiro termo de (5.7) é do tipo $(\vec{J} \cdot \vec{q})(\vec{J} \cdot \vec{q})$, mas vemos usando (5.10) e (5.11) que

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{q} &\sim [\vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \vec{q} - i(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} \\ &\text{ou} \\ &\sim [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\vec{\sigma}] \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \vec{q} + i(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} \end{aligned} \quad (5.15)$$

desta forma vemos que

$$\begin{aligned} (\vec{J} \cdot \vec{q})(\vec{J} \cdot \vec{q}) &\sim [\vec{p} \cdot \vec{q} - i(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \vec{q}]^2 \\ &\text{ou} \\ &\sim [\vec{p} \cdot \vec{q} + i(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \vec{q}]^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

e portanto vemos que este termo também não irá gerar um termo do tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$. A contribuição virá do segundo termo $\vec{J} \cdot \vec{J}$

$$\vec{J} \cdot \vec{J} \sim [\vec{p} \pm i(\vec{\sigma} \times \vec{p})] \cdot [\vec{p}' \pm i(\vec{\sigma}' \times \vec{p}')] \quad (5.17)$$

Vemos que há produtos do tipo $(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot (\vec{\sigma}' \times \vec{p}')$ que podem ser avaliados, usando a identidade (5.12), ou seja,

$$(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot (\vec{\sigma}' \times \vec{p}') = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')(\vec{p} \cdot \vec{p}') - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma}' \cdot \vec{p}) \quad (5.18)$$

onde aparece explicitamente o termo proporcional a $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$. O segundo termo de (5.18) também poderá contribuir, lembrando a fórmula (que será útil, mais tarde)

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}{q^2} = \frac{1}{r^3} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' - 3 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{r})}{r^2} \right] + \frac{4\pi}{3} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \delta(\vec{r}). \quad (5.19)$$

Agora a conservação de momento estabelece a seguinte relação entre os momentos que aparecem nas correntes \vec{J}

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \vec{q} \quad ; \quad \vec{p}_2 = \vec{p} \quad ; \quad \vec{p}_3 = \vec{p}' - \vec{q} \quad ; \quad \vec{p}_4 = \vec{p}'. \quad (5.20)$$

Destas forma a corrente fica

$$J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = f_1 g_2 [\delta_{12} p_2^i - i(\vec{\sigma} \times \vec{p}_2)^i] + f_2 g_1 [\delta_{12} p_1^i + i(\vec{\sigma} \times \vec{p}_1)^i] \quad (5.21)$$

ou ainda, usando a conservação de momento (5.20) temos

$$J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) = (f_1 g_2 + f_2 g_1) \delta_{12} p^i - i (f_1 g_2 - f_2 g_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i + f_2 g_1 [\delta_{12} q^i + i (\vec{\sigma} \times \vec{q})^i]. \quad (5.22)$$

Assim as duas correntes ficam

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &= (f_1 g_2 + f_2 g_1) \delta_{12} p^i - i (f_1 g_2 - f_2 g_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i + f_2 g_1 [\delta_{12} q^i + i (\vec{\sigma} \times \vec{q})^i] \\ J_{s_3 s_4}^j(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= (f_3 g_4 + f_4 g_3) \delta_{34} p'^j - i (f_3 g_4 - f_4 g_3) (\vec{\sigma}' \times \vec{p}')^j - f_4 g_3 [\delta_{34} q^j + i (\vec{\sigma}' \times \vec{q})^j] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Vamos adotar a seguinte convenção

$$\begin{aligned} \vec{J}_{s_1 s_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &\implies \text{corrente pesada} \\ \vec{J}_{s_3 s_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &\implies \text{corrente leve} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Os produtos relevantes para nosso estudo são

$$\begin{aligned} f_1 g_2 - f_2 g_1 &\simeq -\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{8m_p^3} - \frac{q^2}{16m_p^3} \\ f_2 g_1 &\simeq \frac{1}{2m_p} - \frac{p^2}{16m_p^3} \\ f_3 g_4 - f_4 g_3 &\simeq -\frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{4m_l^3} + \frac{q^2}{8m_l^3} \\ f_4 g_3 &\simeq \frac{1}{2m_l} - \frac{p'^2}{4m_l^3} + \frac{3\vec{p}' \cdot \vec{q}}{8m_l^3} - \frac{3q^2}{16m_l^3} \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde m_p e m_l são as massas do quark pesado e leve, respectivamente. Para a corrente pesada, os termos relevante são

$$J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \implies -i (f_1 g_2 - f_2 g_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i + f_2 g_1 i (\vec{\sigma} \times \vec{q})^i \quad (5.26)$$

Quando apresentamos a aproximação não-relativística usual do potencial de Fermi-Breit, no Capítulo 2, a corrente $J_{s_1 s_2}^i$ em questão era o que agora estamos chamando de “pesado” e em termos de potência de momento era de ordem 1, isto é,

$$J_{s_1 s_2}^i \sim p. \quad (5.27)$$

Como na expressão (5.26) de $J_{s_1 s_2}^i$ os termos que envolvem spin, $(\vec{\sigma} \times \vec{p})$ e $(\vec{\sigma} \times \vec{q})$ já são de ordem 1 em momento, as funções $f_1 g_2 - f_2 g_1$ e $f_2 g_1$ não podem contribuir com momento, então das aproximações (5.25) obtemos

$$\begin{aligned} f_1 g_2 - f_2 g_1 &\simeq 0 \\ f_2 g_1 &\simeq \frac{1}{2m_p}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Desta forma a corrente “pesada” se reduz a

$$J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \implies \frac{i}{2m_p} (\vec{\sigma} \times \vec{q})^i. \quad (5.29)$$

Para a corrente “leve” devemos considerar a primeira potência de momento acima da considerada para a corrente “pesada”, nas funções f e g . Assim temos para a corrente “leve”:

$$J_{s_3 s_4}^j(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \implies -i (f_3 g_4 - f_4 g_3) (\vec{\sigma}' \times \vec{p}')^j - i f_4 g_3 (\vec{\sigma}' \times \vec{q})^j \quad (5.30)$$

A menor potência é

$$\begin{aligned} f_3 g_4 - f_4 g_3 &\simeq -\frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{4m_l^3} + \frac{q^2}{8m_l^3} \\ f_4 g_3 &\simeq \frac{1}{2m_l} - \frac{p'^2}{4m_l^3} + \frac{3\vec{p}' \cdot \vec{q}}{8m_l^3} - \frac{3q^2}{16m_l^3}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Assim a corrente “leve” se reduz a

$$J_{s_3 s_4}^j(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \implies -i \left[\frac{q^2}{8m_l^3} - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{4m_l^3} \right] (\vec{\sigma}' \times \vec{p}')^j - i \left[\frac{1}{2m_l} - \frac{p'^2}{4m_l^3} + \frac{3\vec{p}' \cdot \vec{q}}{8m_l^3} - \frac{3q^2}{16m_l^3} \right] (\vec{\sigma}' \times \vec{q})^j \quad (5.32)$$

onde vemos que a corrente “leve” é de ordem 3 no momento, isto é,

$$J_{s_3 s_4}^i \sim p^3 \quad (5.33)$$

Desta forma o potencial “pesado-leve”

$$J_{s_1 s_2}^i J_{s_3 s_4}^i \sim p^4. \quad (5.34)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} \vec{J}_{s_1 s_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{s_3 s_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &\implies \left[\frac{q^2}{16m_p m_l^3} - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{8m_p m_l^3} \right] S(\vec{q}, \vec{p}') \\ &+ \left[\frac{1}{4m_p m_l} - \frac{p'^2}{8m_p m_l^3} + \frac{3\vec{p}' \cdot \vec{q}}{16m_p m_l^3} - \frac{3q^2}{32m_p m_l^3} \right] S(\vec{q}, \vec{q}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde

$$S(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{\sigma} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\sigma}' \times \vec{B}), \quad (5.36)$$

mas a definição de $S(\vec{A}, \vec{B})$ foi avaliada exatamente em (5.18), resultando em

$$\begin{aligned} S(\vec{q}, \vec{p}') &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')(\vec{q} \cdot \vec{p}') - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q}) \\ S(\vec{q}, \vec{q}) &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') q^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q}) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Podemos definir um potencial

$$V = \frac{D_0}{q^2} \vec{J}_{s_1 s_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{s_3 s_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \quad (5.38)$$

ou seja

$$V = \frac{D_0}{q^2} \left[\frac{q^2}{16m_p m_l^3} - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{8m_p m_l^3} \right] S(\vec{q}, \vec{p}') + \frac{D_0}{q^2} \left[\frac{1}{4m_p m_l} - \frac{p'^2}{8m_p m_l^3} + \frac{3\vec{p}' \cdot \vec{q}}{16m_p m_l^3} - \frac{3q^2}{32m_p m_l^3} \right] S(\vec{q}, \vec{q}). \quad (5.39)$$

O potencial V definido em (5.39) ainda não é a correção relativística à interação spin-spin, pelo resultado (5.19), vemos que termos do tipo $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})$ ou $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})$ poderiam, em princípio, contribuir. Para fazer esta análise vamos escrever (5.39) de outra forma

$$V = \sum_{i=1}^6 U_i \quad (5.40)$$

onde

$$\begin{aligned} U_1 &= b_1 S(\vec{q}, \vec{p}') & ; & & U_2 &= b_2 \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2} S(\vec{q}, \vec{p}') & ; & & U_3 &= b_3 \frac{1}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q}) \\ U_4 &= b_4 \frac{p'^2}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q}) & ; & & U_5 &= b_5 \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q}) & ; & & U_6 &= b_6 S(\vec{q}, \vec{q}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

com

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{D_0}{16m_p m_l^3} & ; & & b_2 &= -\frac{D_0}{8m_p m_l^3} & ; & & b_3 &= \frac{D_0}{4m_p m_l} & ; & & b_4 &= -\frac{D_0}{8m_p m_l^3} \\ b_5 &= \frac{3D_0}{16m_p m_l^3} & ; & & b_6 &= -\frac{3D_0}{32m_p m_l^3} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Vamos avaliar cada termo de (5.41) para encontrar as contribuições do tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$

- U_1 :

$$U_1 = b_1 S(\vec{q}, \vec{p}') = b_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') (\vec{q} \cdot \vec{p}') - b_1 \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}}$$

Assim a contribuição é

$$U_1 \longrightarrow b_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') (\vec{q} \cdot \vec{p}')$$

- U_2 :

$$U_2 = b_2 \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2} S(\vec{q}, \vec{p}') = b_2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \underbrace{\frac{(\vec{p}' \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2}}_{\text{usando (A.9)}} - b_2 \underbrace{\frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}}$$

Assim a contribuição é

$$U_2 \longrightarrow \frac{b_2}{3} p'^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')$$

- U_3 :

$$U_3 = b_3 \frac{1}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q}) = b_3 \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}{q^2} \right] = b_3 \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') - \frac{1}{3} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \right]$$

Assim a contribuição é

$$U_3 \longrightarrow \frac{2}{3} b_3 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')$$

- U_4 :

$$U_4 = b_4 p'^2 \underbrace{\frac{1}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q})}_{\text{similar ao } U_3} = \frac{2}{3} b_4 p'^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')$$

Assim a contribuição é

$$U_4 \longrightarrow \frac{2}{3} b_4 p'^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')$$

- U_5 :

$$U_5 = b_5 \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2} S(\vec{q}, \vec{q}) = b_5 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') (\vec{p}' \cdot \vec{q}) - b_5 \underbrace{(\vec{p}' \cdot \vec{q}) \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}{q^2}}_{\text{não contribui}}$$

Assim a contribuição é

$$U_5 \longrightarrow b_5 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') (\vec{p}' \cdot \vec{q})$$

- U_6 :

$$U_6 = b_6 S(\vec{q}, \vec{q}) = b_6 \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') q^2 - \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}} \right]$$

Assim a contribuição é

$$U_6 \longrightarrow b_6 q^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}')$$

Juntando tudo encontramos

$$\begin{aligned} V_{ss} &= \left[b_1 (\vec{p}' \cdot \vec{q}) + \frac{b_2}{3} p'^2 + \frac{2}{3} b_3 + \frac{2}{3} b_4 p'^2 + b_5 (\vec{p}' \cdot \vec{q}) + b_6 q^2 \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \\ &= \left[\frac{2}{3} b_3 + b_6 q^2 + (b_1 + b_5) (\vec{p}' \cdot \vec{q}) + \left(\frac{2}{3} b_4 + \frac{b_2}{3} \right) p'^2 \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Considerando $D_0 = -4\pi\alpha_s$, obtemos finalmente o potencial pesado-leve de spin-spin com correção relativística:

$$V_{ss} = \left[a_1 + a_2 q^2 + a_3 (\vec{p}' \cdot \vec{q}) + a_4 p'^2 \right] \vec{S} \cdot \vec{S}' \quad (5.44)$$

onde $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ e os coeficientes a_i novos ¹

$$a_1 = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_p m_l} \quad ; \quad a_2 = \frac{3\pi\alpha_s}{2m_p m_l^3} \quad ; \quad a_3 = -\frac{4\pi\alpha_s}{m_p m_l^3} \quad ; \quad a_4 = \frac{2\pi\alpha_s}{m_p m_l^3} \quad (5.45)$$

5.2 O Potencial Méson-Báron Corrigido

Como foi mostrado o potencial méson-báron (4.74) é

$$V_{mb}(\alpha\beta; \delta\gamma) = \sum_{i=1}^4 V_i(\alpha\beta; \delta\gamma) \quad (5.46)$$

onde

$$\begin{aligned} V_1(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ V_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ V_3(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\ V_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

A parte espacial do potencial quark-quark (ou quark-antiquark) que será usado em (5.47) pode ser escrita na forma

$$V_{qq}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu, \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\rho) = \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho) v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) \quad (5.48)$$

onde v_{qq} será o potencial pesado-leve de spin-spin com correção relativística (5.44),

$$v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) = \left[a_1 + a_2 (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma)^2 + a_3 \vec{p}_\sigma \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma) + a_4 p_\sigma^2 \right] \vec{S} \cdot \vec{S}' \quad (5.49)$$

¹ Deve ser observado que $a_1/(2\pi)^3 = \kappa_{ss}$ das referências [43], [44]. Este fator $1/(2\pi)^3$ é global na definição das integrais de V_{mb} no espaço de momento. Portanto, no cálculo numérico que será realizado deve-se substituir $a_i \rightarrow a_i/(2\pi)^3$.

A amplitude de espalhamento, na aproximação de Born do potencial em V_{mb} , é uma delta de conservação vezes o elemento de matriz de V_{mb} entre estados independentes do tempo na representação de Heisenberg

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) V_{\text{mb}}(\alpha\beta; \delta\gamma). \quad (5.50)$$

Devido à invariância translacional, o elemento de matriz de (5.50) pode ser escrito

$$V_{\text{mb}}(\alpha\beta; \delta\gamma) = \delta(P_f - P_i) h_{fi},$$

onde a amplitude de espalhamento h_{fi} pode ser escrita

$$(h_{fi})_k = \omega_k I_k^e \quad (5.51)$$

onde I_k^e são as integrais da parte espacial e ω_k o fator de cor-spin-sabor. A amplitude de espalhamento total será

$$h_{fi} = \omega_1 I_1^e + \omega_2 I_2^e + \omega_3 I_3^e + \omega_4 I_4^e. \quad (5.52)$$

Detalhes do cálculo de I_i^e pode ser encontrados no apêndice D, que consiste em substituir v_{qq} e realizar as integrais restantes, o resultado final pode ser expresso no centro de massa do sistema méson-bárion $\vec{p}_\alpha = \vec{p}$, $\vec{p}_\beta = -\vec{p}$, $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'$ e $\vec{p}_\delta = -\vec{p}'$:

$$I_i^e = \vec{S} \cdot \vec{S}' [a_1 \eta_1 + \eta_2 (c_0 + c_1 p^2 + c_2 p'^2 + c_3 \vec{p} \cdot \vec{p}')] \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] . \quad (5.53)$$

A seção de choque diferencial para partículas não idênticas (no centro de massa) é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.54)$$

onde $|\vec{p}|$ e $|\vec{p}'|$ são os momentos dos estados inicial e final. Para o nosso caso temos

$$d\Omega = 2\pi d\theta \sin\theta = -2\pi d(\cos\theta) = -2\pi dz$$

Assim temos

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2$$

ou seja

$$\sigma(s) = -\frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{+1}^{-1} dz |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |\mathcal{M}|^2 \quad (5.55)$$

mas

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{n=1}^4 \sqrt{(2\pi)^3 2E_n} h_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{[(2\pi)^3 2E_A][(2\pi)^3 2E_B][(2\pi)^3 2E_C][(2\pi)^3 2E_D]} h_{fi} \\ &= 4(2\pi)^3 \sqrt{E_A E_B E_C E_D} h_{fi} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Substituindo (5.56) em (5.55)

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz [16(2\pi)^6 E_A E_B E_C E_D] |h_{fi}|^2 \\ &= \frac{32\pi^5}{s} E_A E_B E_C E_D \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |h_{fi}|^2\end{aligned}\quad (5.57)$$

mas, no centro de massa temos

$$\sqrt{s} = (E_A + E_B) = (E_C + E_D)$$

e assim podemos escrever $s = \sqrt{s} \sqrt{s}$, ou seja,

$$s = (E_A + E_B)(E_C + E_D). \quad (5.58)$$

Definindo

$$\mu_{AB} = \frac{E_A E_B}{E_A + E_B} \quad (5.59)$$

Usando (5.58) e (5.59) em (5.57) e obtemos finalmente

$$\sigma(s) = 32\pi^5 \mu_{AB} \mu_{CD} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |h_{fi}|^2 \quad (5.60)$$

onde agora $|\vec{p}'| = p'(s)$, $|\vec{p}| = p(s)$, definidos em (C.4)-(C.5) e $h_{fi} = h_{fi}(s, z)$.

5.3 Resultados

Nesta seção calcularemos as seções de choque com e sem correção relativísticas na parte hiperfina das seguintes reações:

1. $J/\psi + p \rightarrow \bar{D}^0 + \Lambda_c^+$
2. $J/\psi + p \rightarrow \bar{D}^{0*} + \Lambda_c^+$
3. $J/\psi + n \rightarrow D^- + \Lambda_c^+$
4. $J/\psi + n \rightarrow D^{*-} + \Lambda_c^+.$

Para tanto, vamos avaliar a seção de choque $\sigma(s)$, substituindo na expressão (5.60) o valor de h_{fi} de (5.52), isto é

$$\sigma(s) = 32\pi^5 \mu_{AB} \mu_{CD} \frac{p'(s)}{p(s)} \sum_{i,j=1}^4 \omega_i \omega_j \int_{-1}^{+1} dz I_i^e(s, z) I_j^e(s, z). \quad (5.61)$$

O cálculo de (5.61) utiliza as informações dos apêndices (B)-(E). Será suficiente estudar os efeitos do potencial pesado-leve nos processos que envolvem, por exemplo, o próton, devido à simetria de isospin o resultado para o neutron será o mesmo. A seção de choque irá depender fortemente dos parâmetros a_i dos potencial pesado-leve (5.45). Destes parâmetros, a_1 está presente no potencial de Fermi-Breit original, enquanto que a_2 , a_3 e a_4 se originam da correção relativística. Todos eles dependem da constante de acoplamento forte α_s . Na física hadrônica, α_s é uma quantidade efetiva e normalmente é tomado como um parâmetro a ser ajustado. No nosso estudo o coeficiente a_1 está associado à parte não-relativística e os três coeficientes a_2 , a_3 e a_4 representando a parte relativística. Portanto, vamos escrever

$$a_1 = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_p m_l} \quad ; \quad a_2 = \frac{3\pi\alpha_s^R}{2m_p m_l^3} \quad ; \quad a_3 = -\frac{4\pi\alpha_s^R}{m_p m_l^3} \quad ; \quad a_4 = \frac{2\pi\alpha_s^R}{m_p m_l^3}, \quad (5.62)$$

onde vamos variar, independentemente, α_s não-relativístico em relação ao α_s^R das contribuições relativísticas. Outros parâmetros livres estão relacionados com as funções de onda do méson e do bárion. Para o méson o parâmetro β que define a largura da gaussiana em (B.2). No caso do bárion, na função de onda (B.27) há dois parâmetros α_λ e α_ρ , ou equivalentemente α_λ e $x = \alpha_\rho/\alpha_\lambda$. Na tabela (5.1) estão listadas as massas das partículas envolvidas no estudo que vão ser consideradas fixas. As funções de onda do méson dependem de dois outros parâmetros adimensionais m_1 e m_2 , definidos na equação (B.3). Estes números estão associados à relação pesado-leve das massas dos quarks no méson. De forma similar a função de onda do bárion tem dois parâmetros adimensionais M_1 e M_2 , definidos na equação (B.14). O valores assumidos por m_1 , m_2 , M_1 e M_2 são fixos e estão listados na tabela (5.2). Os valores de ω_i dependem da respectiva reação e os possíveis valores estão apresentados nas tabelas (5.3) e (5.4).

O cálculo da seção de choque de dissociação $\sigma(s)$, em (5.61), será obtido numericamente, realizando a integral na variável z e depois variando a energia s . Como já foi descrito, há uma perspectiva de num futuro próximo existirem dados experimentais do FAIR-PANDA quando será possível estudar a produção e absorção de hádrons charmosos em alvos nucleares [9]. Neste contexto, um dos interesses centrais será a determinação destas seções choque de dissociação. Elas serão determinadas com medições da produção de J/ψ em reações antiproton-núcleo usando diferentes materiais para o alvo [9]. Portanto, no momento será tomado como base para o ajuste dos parâmetros α_λ , α_ρ , β , α_s , α_s^R o resultado da respectiva seção de choque obtida na referência de J. P. Hilbert et al. [37], como pode ser visto, por exemplo, na figura (5.3) para $J/\psi + p \rightarrow \bar{D}^0 + \Lambda_c^+$. Esta situação, para o nosso cálculo, corresponde a tomar $\alpha_s^R = 0$ e ajustar os parâmetros restantes. O melhor ajuste fornece os seguinte valores

$$\alpha_s = 0.4 - 0.5 \quad ; \quad \beta = 0.3 \text{ GeV} \quad ; \quad \alpha_\lambda = \alpha_\rho = 0.4 \text{ GeV}. \quad (5.63)$$

m_c	$m_{u,d}$	$m_{J/\psi}$	m_{nucleon}	m_D	m_{D^*}	m_{Λ_c}
1.50	0.33	3.09	0.93	1.86	2.00	2.28

Tab. 5.1: Massas em GeV

	J/ψ	Nucleon	D	D^*	Λ_c
m_1	1	-	1.63	1.63	-
m_2	1	-	0.36	0.36	-
M_1	-	$\frac{1}{3}$	-	-	0.15
M_2	-	$\frac{1}{3}$	-	-	0.70

Tab. 5.2: Parâmetros das funções de onda

Nas figuras (5.4) a (5.9), este ajuste corresponde às curvas sólidas (preta). O efeito puramente relativístico pode ser estudado isoladamente tomando $\alpha_s^R \neq 0$ e $\alpha_s = 0$, isto pode ser visto nas curvas traço-ponto (verde) das figuras (5.4) a (5.8), com valores de α_s^R de 0.1 e 0.15. O efeito combinado, deste valores de α_s^R com α_s de (5.63) esta representado pela curva tracejada (vermelha) nas mesmas figuras (5.4) a (5.8). Um fato interessante pode ser visto nos gráficos (5.4) e (5.5): para valores de α_s^R de 0.1 e α_s , tomando os valores de referência (5.63), há uma aparente interferência destrutiva e a seção de choque resultante é menor que a curva não-relativística. Os mesmo efeito não está presente para o acoplamento $J = 3/2$, visto nas figuras (5.7) e (5.8), onde a interferência é construtiva. A última figura, (5.9), testa a sensibilidade da seção de choque para variações do α_s^R . Com as duas contribuições presentes (α_s e α_s^R), α_s^R foi variado de 0 a 0.15. Novamente é observada a interferência destrutiva para valores de $\alpha_s^R \neq 0$ e inferiores a 0.15.

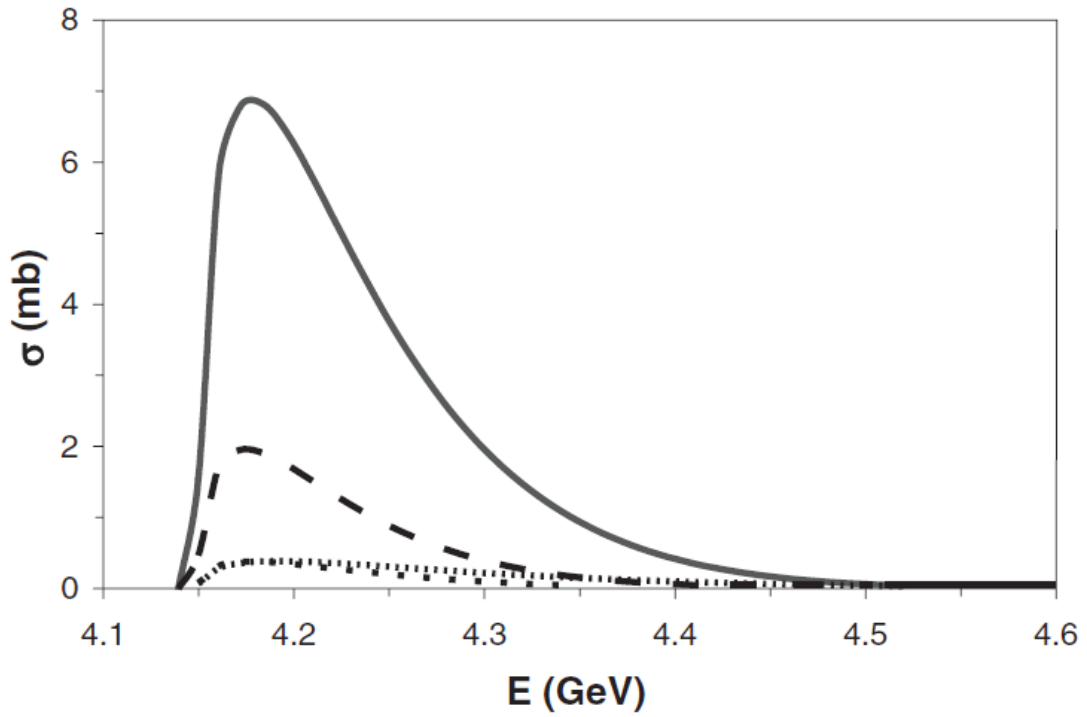


Fig. 5.3: $J/\psi + p \rightarrow \bar{D}^0 + \Lambda_c^+$. Extraído de J. P. Hilbert et al. [37], onde as curvas são as seções de choque total (sólida), spin-spin (pontos), confinamento linear (traço-pequeno) e Coulomb (traço).

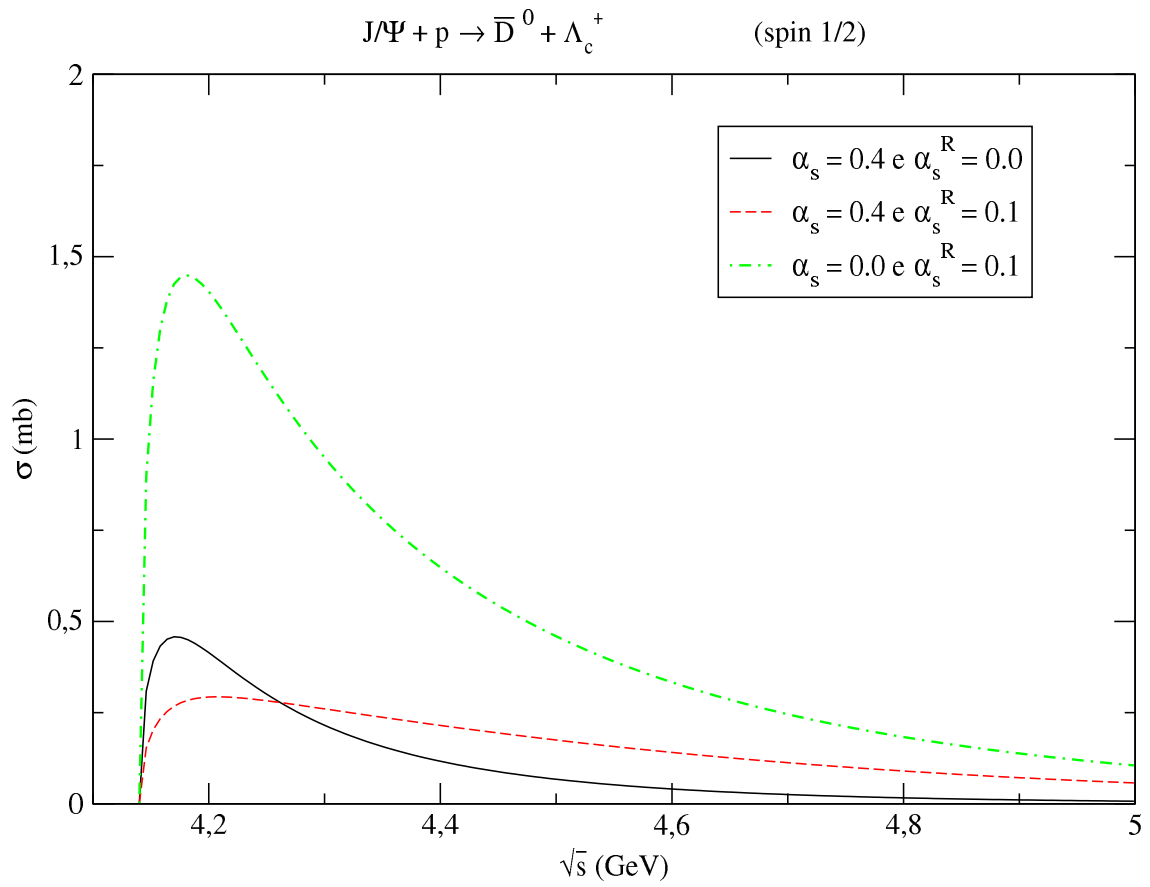


Fig. 5.4: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

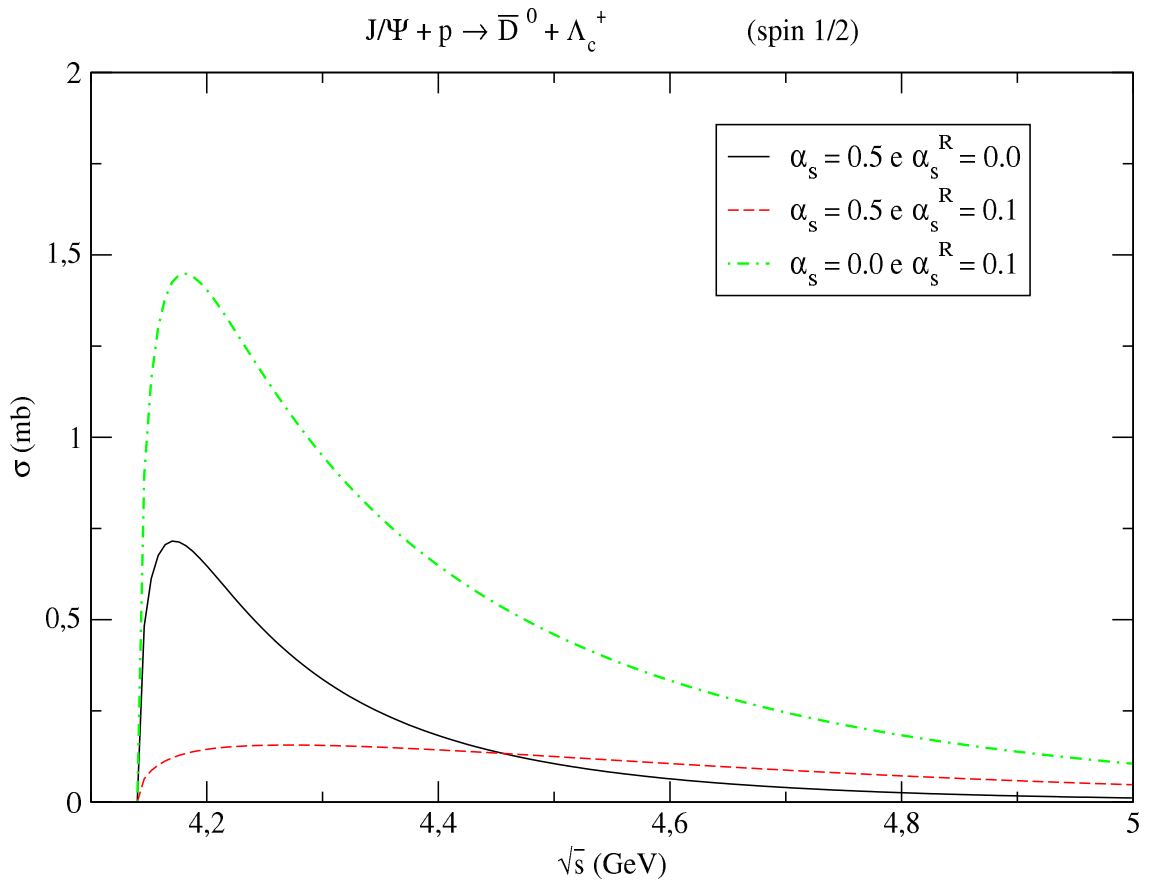


Fig. 5.5: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

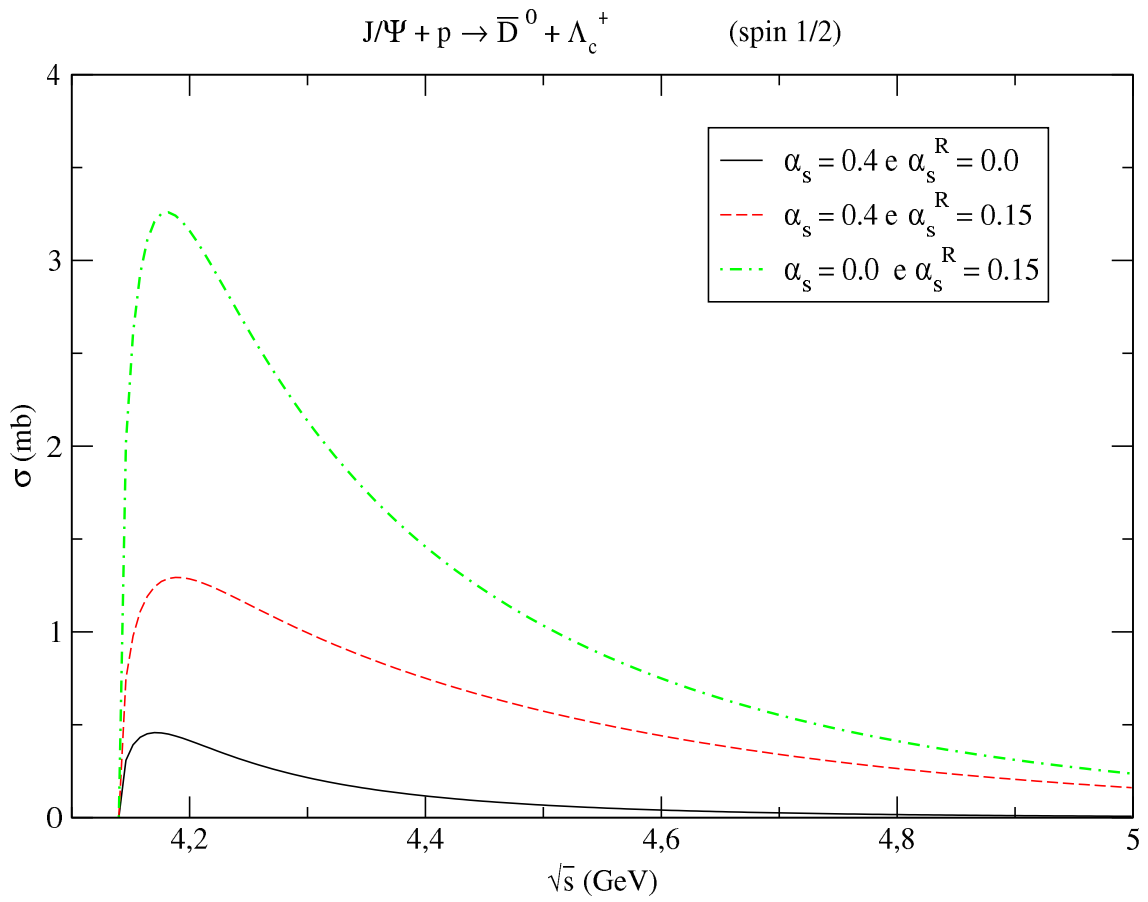


Fig. 5.6: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

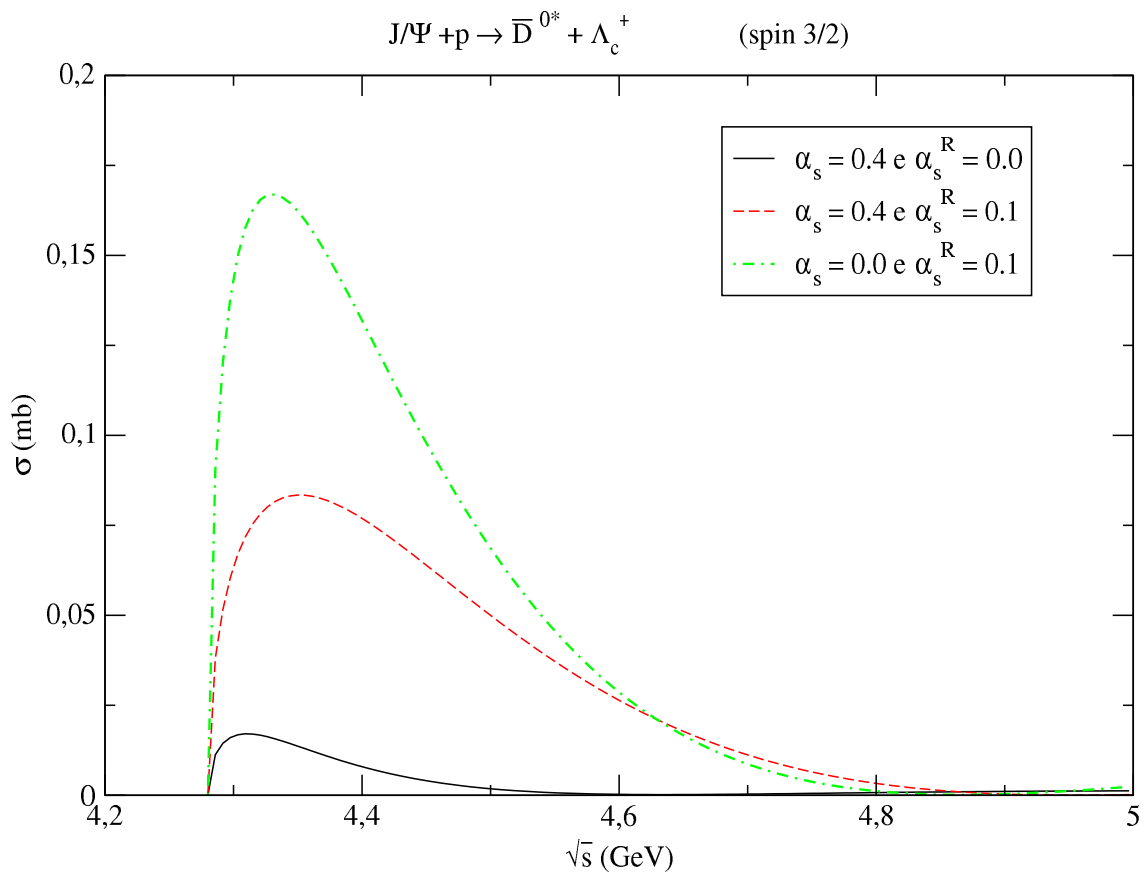


Fig. 5.7: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

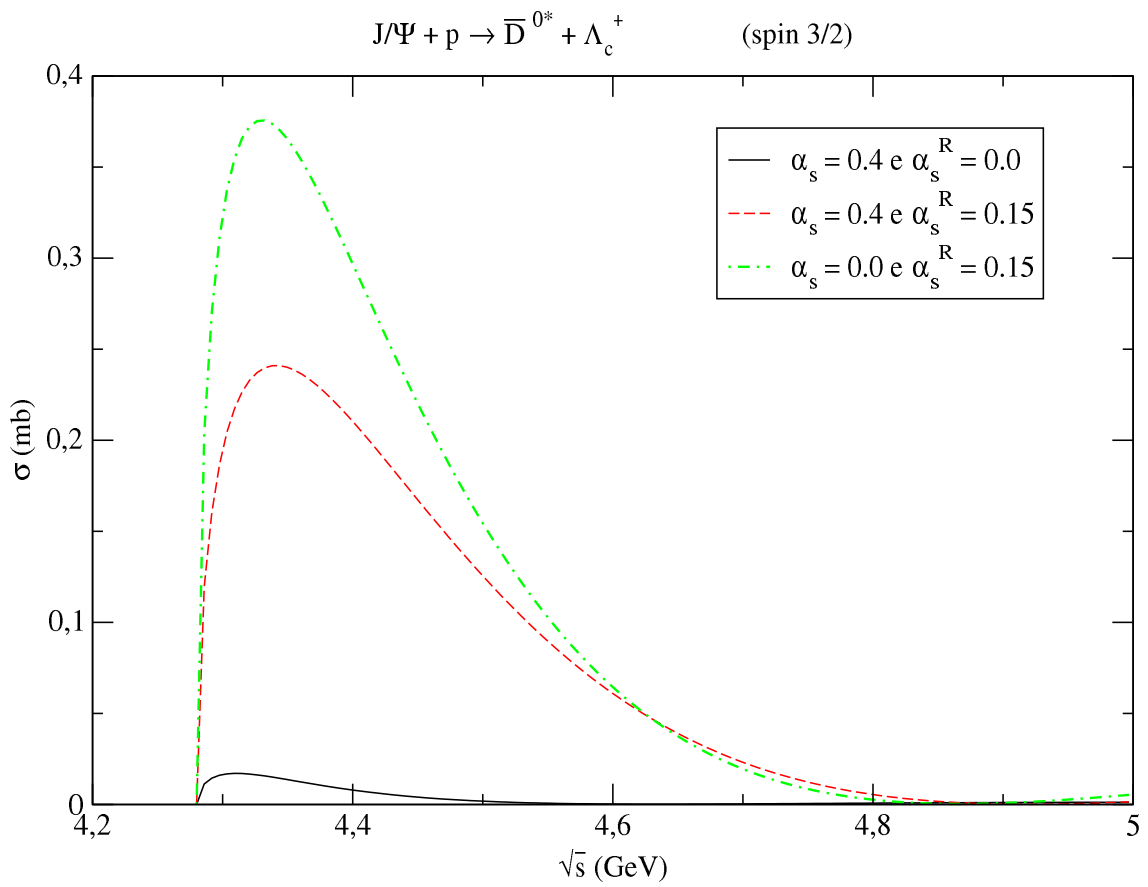


Fig. 5.8: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

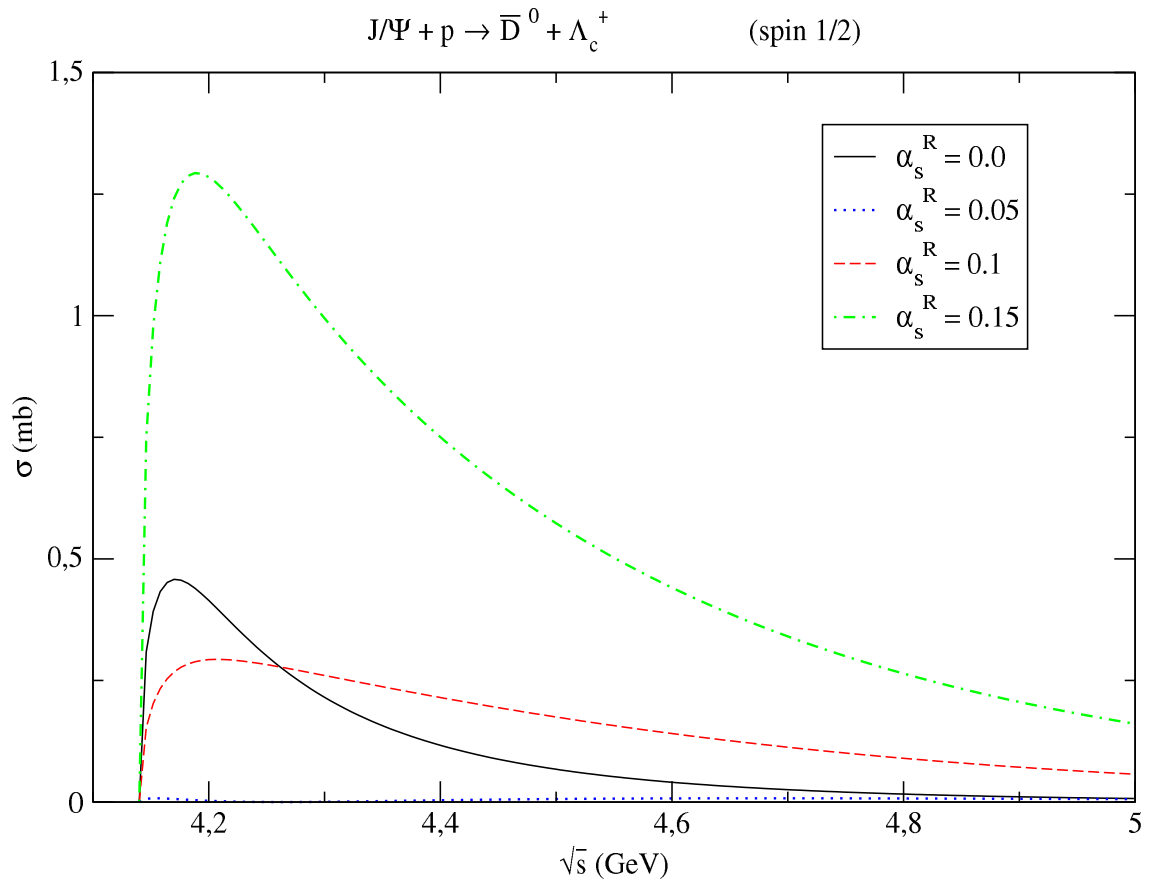


Fig. 5.9: Os parâmetros das funções de onda: $\beta = 0.3$ GeV; $\alpha = 0.4$ GeV, $x = 1$

	$(S = 1/2)$				$(S = 3/2)$			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\bar{D}^0 \Lambda_c^+$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	0	0	—	—	—	—
$\bar{D}^{0*} \Lambda_c^+$	$\frac{5\sqrt{6}}{36}$	$\frac{\sqrt{6}}{36}$	0	0	$\frac{\sqrt{6}}{18}$	$-\frac{\sqrt{6}}{18}$	0	0

Tab. 5.3: $J/\psi + p \rightarrow C + D$

	$(S = 1/2)$				$(S = 3/2)$			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$D^- \Lambda_c^+$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	0	0	—	—	—	—
$D^{*-} \Lambda_c^+$	$\frac{5\sqrt{6}}{36}$	$\frac{\sqrt{6}}{36}$	0	0	$\frac{\sqrt{6}}{18}$	$-\frac{\sqrt{6}}{18}$	0	0

Tab. 5.4: $J/\psi + n \rightarrow C + D$

Conclusão e Perspectivas

O hádrons descritos pelo modelo de quarks são compostos por quarks constituintes, no caso do méson por um par $q\bar{q}$ e para o bárion por um sistema de três quarks qqq . A interação entre eles é do tipo “One Gluon Exchange Potential” (OGEP) e tradicionalmente é obtida pela aproximação não-relativística dos espinores, numa processo de contagem de potências de momento.

Nesta dissertação estudamos a interação do charmônio J/ψ , que é um méson $c\bar{c}$, com o nucleon, que é composto por três quarks “leves”, quando comparados aos quarks do par $c\bar{c}$. Considerando este fato, deduzimos um novo potencial de Fermi-Breit, onde uma corrente de quarks charmosos $\vec{J}_{s_1s_2}$ (pesada) era interpretada como sendo não-relativística, enquanto uma corrente $\vec{J}_{s_3s_4}$ (leve) composta por quarks u ou d recebia uma correção relativística. O potencial pesado-leve de Fermi-Breit é obtido do produto $\vec{J}_{s_1s_2} \cdot \vec{J}_{s_3s_4}$. Deste potencial, retivemos apenas a parte correspondente à interação spin-spin. Para estudar efetivamente o espalhamento J/ψ -nucleon a partir de uma interação microscópica oriunda dos quarks, usamos o método do grupo ressonante (Resonating Group Method - RGM) e obtivemos o potencial méson-bárion corrigido V_{mb} . Este potencial V_{mb} , na aproximação de Born, forneceu a amplitude de espalhamento h_{fi} que permitiu calcular a seção de choque de dissociação $\sigma(s)$. Do cálculo numérico de $\sigma(s)$ constatamos que

1. há uma forte sensibilidade de $\sigma(s)$ aos valores de α_s e α_s^R ,
2. há uma interferência construtiva e destrutiva na amplitude de espalhamento h_{fi} que se manifesta no comportamento de $\sigma(s)$.

Como comentamos anteriormente, temos uma expectativa para num futuro próximo existirem dados experimentais do FAIR-PANDA, quando será possível estudar a produção e absorção de hádrons charmosos em alvos nucleares. Neste contexto, um dos interesses centrais será a determinação destas seções choque de dissociação. Para este cenário futuro, o nosso cálculo deverá ser completado com a inclusão dos termos Coloumbianos de cor e de confinamento linear. A parte Coloumbiana será outro

termo do tipo Fermi-Breit e portanto deverá ser calculado no contexto pesado-leve. Este termo será obtido a partir do termo $J_{s_1 s_2}^0 J_{s_3 s_4}^0$ de (5.3) e deverá ter a seguinte estrutura

$$V_{\text{Coul}} = \frac{1}{q^2} \left[a'_1 + a'_2 q^2 + a'_3 (\vec{p}' \cdot \vec{q}) + a'_4 p'^2 \right] \quad (6.1)$$

onde a'_i serão constantes proporcionais a α_s e α_s^R a serem determinadas na aproximação semi-relativística pesado-leve. Finalmente, seguindo para além do modelo de quarks este procedimento poderá ser estendido para a própria QCD, partindo do Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb (2.109) e fazendo a aproximação semi-relativística nos espinores contidos nos termos $\rho_q^a(\vec{x})$.

Apêndice A

Identidade

Vamos agora, demonstrar uma identidade importante:

$$\overline{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})} = \frac{1}{3}(\vec{a} \cdot \vec{b})\nabla^2 \quad (\text{A.1})$$

onde a “barra” significa média sobre todas as direções de r , ou seja,

$$\overline{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \quad (\text{A.2})$$

Podemos escrever $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})$ e $(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})$ em coordenadas esféricas:

$$\vec{a} = a \left[\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k} \right] \equiv a \left[X \hat{i} + Y \hat{j} + Z \hat{k} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{b} = b \left[\sin(\theta + \varphi) \cos\phi \hat{i} + \sin(\theta + \varphi) \sin\phi \hat{j} + \cos(\theta + \varphi) \hat{k} \right] \equiv b \left[X' \hat{i} + Y' \hat{j} + Z' \hat{k} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

Assim

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) &= ab \left[X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + Z \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[X' \frac{\partial}{\partial x} + Y' \frac{\partial}{\partial y} + Z' \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= ab \left[XX' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + YY' \frac{\partial^2}{\partial y^2} + ZZ' \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + ab \left[XY' \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + XZ' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right. \\ &\quad \left. + YX' \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + YZ' \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + ZX' \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + ZY' \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Assim vemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta XX' &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta [\sin\theta \cos\phi \sin(\theta + \varphi) \cos\phi] = \frac{1}{3} \cos\varphi \\ \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta YY' &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta [\sin\theta \sin\phi \sin(\theta + \varphi) \sin\phi] = \frac{1}{3} \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta ZZ' &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta [\cos \theta \cos(\theta + \varphi)] = \frac{1}{3} \cos \varphi \\
 \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta XY' &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta XZ' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta YZ' \\
 &= \dots = 0
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Encontramos temos

$$\overline{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})} = \frac{1}{3} ab \cos \varphi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \nabla^2 \tag{A.8}$$

Assim

$$-\overline{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})} \frac{1}{r} = -\frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \delta(\vec{r}) \tag{A.9}$$

Funções de Onda

As funções de onda do méson e do bárion podem ser escritas como um produto das funções de onda dos quarks de cor ($\delta^{c_\mu c_\nu}$ ou $\varepsilon^{c_1 c_2 c_3}$), spin-sabor ($\xi_\alpha^{f_\mu f_\nu}$ ou $\zeta_\alpha^{f_1 f_2 f_3}$) e espaço.

B.1 Função de Onda do Méson

B.1.1 Espaço

Para o méson temos

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \frac{\delta^{c_\mu c_\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\xi_\alpha^{f_\mu f_\nu}}{\sqrt{2}} \varphi(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \quad (\text{B.1})$$

A parte espacial da função de onda do méson é tomada como sendo uma gaussiana

$$\varphi(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}) = (\pi\beta^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{(m_1\vec{p}_q - m_2\vec{p}_{\bar{q}})^2}{8\beta^2}\right] \quad (\text{B.2})$$

com

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \quad ; \quad m_2 = \frac{2m_q}{m_q + m_{\bar{q}}}, \quad (\text{B.3})$$

onde é fácil verificar

$$m_1 + m_2 = 2. \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Spin-Sabor

Méson J/ψ

$$\begin{aligned}
 |J = 1, J_z = +1\rangle &= |\bar{c}_\uparrow c_\uparrow\rangle \\
 |J = 1, J_z = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\uparrow c_\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\downarrow c_\uparrow\rangle \\
 |J = 1, J_z = -1\rangle &= |\bar{c}_\downarrow c_\downarrow\rangle
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Méson D

• Função de onda de spin do D

O méson D tem $J = 0$, escrito na base quark-antiquark $|J, M\rangle_D = |S_q^z, S_{\bar{q}}^z\rangle$:

$$|0, 0\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{2}}|+1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2, +1/2\rangle \tag{B.6}$$

• Função de onda de sabor D

A função de onda de sabor do méson D é

$$\begin{aligned}
 |D^-\rangle_f &= |\bar{c}d\rangle \\
 |\bar{D}^0\rangle_f &= |\bar{c}u\rangle \\
 |D^+\rangle_f &= |c\bar{d}\rangle \\
 |D^0\rangle_f &= -|c\bar{u}\rangle
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

A combinação da função de onda spin-sabor é uma combinação da Eq. (B.6) \otimes Eq. (B.7):

1. D^-

$$|D^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\uparrow d_\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\downarrow d_\uparrow\rangle \tag{B.8}$$

2. \bar{D}^0

$$|\bar{D}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\uparrow u_\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{c}_\downarrow u_\uparrow\rangle \tag{B.9}$$

3. D^+

$$|D^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|c_\uparrow \bar{d}_\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|c_\downarrow \bar{d}_\uparrow\rangle \tag{B.10}$$

4. D^0

$$|D^0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|c_\uparrow \bar{u}_\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|c_\downarrow \bar{u}_\uparrow\rangle \quad (\text{B.11})$$

B.2 Função de Onda do Bárion

A função de onda do bárion pode ser escrita como

$$\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\varepsilon^{c_1c_2c_3} \zeta_\alpha^{f_1f_2f_3}}{\sqrt{6} \sqrt{18}} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} \quad (\text{B.12})$$

B.2.1 Espaço

Para obter $\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3}$ vamos considerar um bárion constituído por dois quarks leves de massa m_l e uma quark pesado de massa m_p , isto é,

$$\text{quarks } (u, d) \quad \longrightarrow \quad m_l \quad ; \quad \text{quark } c \quad \longrightarrow \quad m_p$$

e definir a coordenada do centro de massa \vec{R} e relativas $\vec{\rho}$ e $\vec{\lambda}$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2\vec{r}_3 && \longrightarrow && \text{Centro de massa} \\ \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) && ; && \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

onde

$$M_1 = \frac{m_l}{2m_l + m_p} \quad ; \quad M_2 = \frac{m_p}{2m_l + m_p}. \quad (\text{B.14})$$

Desta definição (B.14) é fácil ver que

$$2M_1 + M_2 = 1 \quad (\text{B.15})$$

A função de onda total definida por Isgur e Karl [45, 46]

$$\Psi_{\vec{P}}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) = \frac{e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}}}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad (\text{B.16})$$

sendo \vec{P} o momento do centro de massa e a função de onda relativa $\psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ é dada por

$$\psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \frac{\alpha_\rho^{3/2}}{\pi^{3/4}} \frac{\alpha_\lambda^{3/2}}{\pi^{3/4}} e^{-\alpha_\rho^2 \rho^2/2} e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2/2} \quad (\text{B.17})$$

É fácil verificar que a função de onda (B.16) é normalizada:

$$\begin{aligned} & \int d\vec{R} d\vec{\rho} d\vec{\lambda} \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) = \int d\vec{R} \frac{e^{-i\vec{R}\cdot(\vec{P}-\vec{P}')}}{(2\pi)^3} \int d\vec{\rho} \frac{\alpha_\rho^3}{\pi^{3/2}} e^{-\alpha_\rho^2 \rho^2} \int d\vec{\lambda} \frac{\alpha_\lambda^3}{\pi^{3/2}} e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2} \\ & = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \frac{\alpha_\rho^3}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\alpha_\rho^2}\right)^{3/2} \frac{\alpha_\lambda^3}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\alpha_\lambda^2}\right)^{3/2} = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

A norma de Ψ nas variáveis $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ tem que ser a mesma que nas variáveis $\vec{R}, \vec{\rho}, \vec{\lambda}$. Para verificar este fato precisamos realizar a integral da norma nas variáveis $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, ou seja,

$$\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (\text{B.19})$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) & = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2}\right)^{3/2} \exp\left[i\vec{P} \cdot (M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3)\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{1}{4}\alpha_\rho^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12}\alpha_\lambda^2(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2\right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Realizando esta integral, encontramos

$$\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 3\sqrt{3} \delta(\vec{P} - \vec{P}') \quad (\text{B.21})$$

Desta forma para garantir a normalização basta substituir

$$\Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \longrightarrow \frac{1}{3^{3/4}} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (\text{B.22})$$

ou seja

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) & = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2 \sqrt{3}}\right)^{3/2} \exp\left[i\vec{P} \cdot (M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3)\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{1}{4}\alpha_\rho^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12}\alpha_\lambda^2(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2\right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

A transformada de Fourier de (B.23) é definida por

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \int \frac{d\vec{r}_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d\vec{r}_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d\vec{r}_3}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) e^{-i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{r}_3)}. \quad (\text{B.24})$$

Agora

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2 \sqrt{3}}\right)^{3/2} = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

Substituindo (B.23) em (B.24)

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \exp \left[i\vec{P} \cdot (M_1 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{4} \alpha_\rho^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12} \alpha_\lambda^2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2 \right] \\ &\times \exp \left[-i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{r}_3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Integrando em \vec{r}_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \\ &\times \int d\vec{r}_3 \exp \left[\frac{i\vec{r}_3 \cdot \left(\alpha_\lambda^2 (2M_1 \vec{P} + M_2 \vec{P} - 2\vec{p}_1 - \vec{p}_3) + 3\alpha_\rho^2 (M_2 \vec{P} - \vec{p}_3) \right) - \alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2 r_3^2 - 3(\vec{p}_1 - M_1 \vec{P})^2}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} \right] \\ &\times \int d\vec{r}_2 \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} r_2^2 + \vec{r}_2 \cdot \frac{\left(\alpha_\rho^2 (2\alpha_\lambda^2 \vec{r}_3 + 6iM_1 \vec{P} - 3i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)) + i\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \right)}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} \right] \end{aligned}$$

Integrando em \vec{r}_2 , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^3 \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \\ &\times \int d\vec{r}_3 \exp \left[i\vec{r}_3 \cdot \left(\underbrace{\vec{P} (2M_1 + M_2)}_{=1} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 \right) \right] \end{aligned}$$

Integrando em \vec{r}_3 , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^3 \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \end{aligned}$$

ou seja

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right].$$

Finalmente encontramos a função de onda (substituindo \vec{P} no expoente)

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 [(1 - 2M_1) \vec{p}_1 + (1 - 2M_1) \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4 \alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

mas por (B.15) temos que

$$1 - 2M_1 = M_2$$

assim função de onda fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 [M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4 \alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \quad (\text{B.27})$$

ou equivalentemente definindo $x = \alpha_\rho / \alpha_\lambda$

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi x \alpha_\lambda^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3x^2 [M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4 \alpha_\lambda^2 x^2} \right]. \quad (\text{B.28})$$

Uma simplificação que pode ser introduzida é considerar $x = 1$,

$$\alpha_\lambda = \alpha_\rho \equiv \alpha$$

Assim a função de onda (B.26) fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3 [M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4 \alpha^2} \right]. \quad (\text{B.29})$$

No caso particular do nucleon,

$$m_l = m_p \quad \longrightarrow \quad M_1 = M_2 = \frac{1}{3} \quad (\text{B.30})$$

e a função de onda (B.29) se reduz ao resultado conhecido no modelo de quarks

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3}{3 \alpha^2} \right]. \quad (\text{B.31})$$

B.2.2 Spin-Sabor

Núcleon

1. Proton spin-up

$$|p_{\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left[2|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle + 2|d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \right. \\ \left. - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle \right] \quad (\text{B.32})$$

2. Proton spin-down

$$|p_{\downarrow}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} \left[2|u_{\downarrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle + 2|u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle + 2|d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\downarrow}\rangle - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - |u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\downarrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle \right. \\ \left. - |u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\downarrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \right] \quad (\text{B.33})$$

3. Neutron spin-up

$$|n_{\uparrow}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} \left[2|d_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle + 2|d_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle + 2|u_{\downarrow}d_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle \right. \\ \left. - |d_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle \right] \quad (\text{B.34})$$

4. Neutron spin-down

$$|n_{\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left[2|d_{\downarrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle + 2|d_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\uparrow}d_{\downarrow}d_{\downarrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |d_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \right. \\ \left. - |u_{\downarrow}d_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - |d_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\downarrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\downarrow}\rangle \right] \quad (\text{B.35})$$

Λ_c^+

A função de onda de spin é

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$

A função de onda de sabor é

$$\Lambda_c^f = \frac{1}{\sqrt{2}} (udc - duc)$$

1. Λ_c^+ spin-up

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{c\uparrow}^+ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\Lambda_c^f \chi + (\text{quark 1} \leftrightarrow \text{quark 3}) + (\text{quark 2} \leftrightarrow \text{quark 3})] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{12}} [u_\uparrow d_\downarrow c_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow c_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow c_\uparrow + d_\downarrow u_\uparrow c_\uparrow] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{12}} [c_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - c_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow - c_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow + c_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{12}} [u_\uparrow c_\uparrow d_\downarrow - u_\downarrow c_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow c_\uparrow u_\downarrow + d_\downarrow c_\uparrow u_\uparrow]
 \end{aligned}$$

2. Λ_c^+ spin-down

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{c\downarrow}^+ &= \frac{1}{\sqrt{12}} [u_\uparrow d_\downarrow c_\downarrow - u_\downarrow d_\uparrow c_\downarrow - d_\uparrow u_\downarrow c_\downarrow + d_\downarrow u_\uparrow c_\downarrow] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{12}} [c_\downarrow d_\downarrow u_\uparrow - c_\downarrow d_\uparrow u_\downarrow - c_\downarrow u_\downarrow d_\uparrow + c_\downarrow u_\uparrow d_\downarrow] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{12}} [u_\uparrow c_\downarrow d_\downarrow - u_\downarrow c_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow c_\downarrow u_\downarrow + d_\downarrow c_\downarrow u_\uparrow]
 \end{aligned}$$

Variáveis de Mandelstam

Seja o seguinte processo

$$A + B \rightarrow C + D$$

Vamos estudar apenas a relação entre s e t

$$\begin{aligned}
 s &= (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \\
 &= (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 = (E_C + E_D)^2 - (\vec{p}_C + \vec{p}_D)^2 \\
 t &= (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 \\
 &= (E_A - E_C)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2 = (E_B - E_D)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_D)^2 \\
 u &= (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2 \\
 &= (E_A - E_D)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_D)^2 = (E_B - E_C)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_C)^2
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

No centro de massa

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p} \quad ; \quad \vec{p}_C = -\vec{p}_D = \vec{p}' \tag{C.2}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
 s &= (E_C + E_D)^2 = (E_A + E_B)^2 \\
 t &= (E_A - E_C)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \\
 &= (E_B - E_D)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2
 \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
 E_A &= \sqrt{p_A^2 + m_A^2} \Rightarrow \sqrt{p^2 + m_A^2} \\
 E_B &= \sqrt{p_B^2 + m_B^2} \Rightarrow \sqrt{p^2 + m_B^2} \\
 E_C &= \sqrt{p_C^2 + m_C^2} \Rightarrow \sqrt{p'^2 + m_C^2} \\
 E_D &= \sqrt{p_D^2 + m_D^2} \Rightarrow \sqrt{p'^2 + m_D^2}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} s &= (E_A + E_B)^2 = E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B = p^2 + m_A^2 + p^2 + m_B^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)} \\ &= 2p^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Resolvendo para p^2 , temos

$$p^2 = \frac{1}{4s} [(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2] \quad (\text{C.4})$$

e para p'^2

$$p'^2 = \frac{1}{4s} [(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2]. \quad (\text{C.5})$$

Para t temos

$$t = (E_A - E_C)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = E_A^2 + E_C^2 - 2E_A E_C - p^2 - p'^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{p}'.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p}' &= \frac{1}{2} [t - E_A^2 - E_C^2 - 2E_A E_C + p^2 + p'^2] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{(m_A^2 - m_B^2 + s)(m_C^2 - m_D^2 + s)}{s} - 2(m_A^2 + m_C^2 - t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[t - m_A^2 - m_C^2 + \frac{1}{2s} (s + m_A^2 - m_B^2)(s + m_C^2 - m_D^2) \right] \end{aligned}$$

ou seja

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = \frac{1}{2} \left[t - m_A^2 - m_C^2 + \frac{1}{2s} (s + m_A^2 - m_B^2)(s + m_C^2 - m_D^2) \right].$$

Agora podemos relacionar a variável z com o ângulo θ entre \vec{p} e \vec{p}'

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta = |\vec{p}| |\vec{p}'| z. \quad (\text{C.6})$$

Assim usando (C.4) e (C.5) em (C.6), obtemos

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = \frac{z}{4s} \sqrt{[(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2][(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2]}. \quad (\text{C.7})$$

Parte espacial de V_{mb}

Vamos, agora calcular as integrais espaciais dos quatro termos de V_{mb} , sendo a primeira contribuição o termo V_1 que iremos mostrar com algum detalhe

$$\begin{aligned}
V_1(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\delta, \vec{p}_\gamma) &= -3 \int d\vec{p}_\mu d\vec{p}_\nu d\vec{p}_\sigma d\vec{p}_\rho d\vec{p}_{\nu_2} d\vec{p}_{\mu_2} d\vec{p}_{\mu_3} \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho) v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_{\nu_2}) \left(\frac{1}{\pi\beta^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(m_f \vec{p}_\mu - (2 - m_f) \vec{p}_{\nu_2})^2}{8\beta^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\nu - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_{\mu_3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \right. \\
&\times \left. \exp \left[-\frac{(\vec{p}_\nu - \vec{p}_{\mu_2})^2 + 3[(1 - 2M_f)\vec{p}_\nu + (1 - 2M_f)\vec{p}_{\mu_2} - 2M_f\vec{p}_{\mu_3}]^2}{4\alpha^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_{\nu_2}) \left(\frac{1}{\pi\beta^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(m_i \vec{p}_\rho - (2 - m_i) \vec{p}_{\nu_2})^2}{8\beta^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\delta - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_{\mu_3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \right. \\
&\times \left. \exp \left[-\frac{(\vec{p}_\sigma - \vec{p}_{\mu_2})^2 + 3[(1 - 2M_i)\vec{p}_\sigma + (1 - 2M_i)\vec{p}_{\mu_2} - 2M_i\vec{p}_{\mu_3}]^2}{4\alpha^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

onde m_i , m_f , M_i e M_f são os parâmetros do estado inicial e do estado final do méson e do bárion, respectivamente. Após a integração nas deltas obtemos

$$\begin{aligned}
V_1(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\delta, \vec{p}_\gamma) &= -3\delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\delta) \frac{3\sqrt{3}}{\pi^{9/2}\alpha^6\beta^3} \int d\vec{p}_\mu d\vec{p}_\sigma d\vec{p}_{\mu_3} v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) \\
&\times \exp \left[-\frac{((m_f - 2)\vec{p}_\alpha + 2\vec{p}_\mu)^2 + (m_i\vec{p}_\gamma - 2\vec{p}_\alpha + 2\vec{p}_\mu)^2}{8\beta^2} \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{(3(M_i - 1)M_i + 1)p_\delta^2 - \vec{p}_\delta \cdot [(2 - 3M_i)\vec{p}_{\mu_3} + \vec{p}_\sigma] + p_{\mu_3}^2 + \vec{p}_{\mu_3} \cdot \vec{p}_\sigma + p_\sigma^2}{\alpha^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\times \exp \left[- \frac{(3(M_f - 1)M_f + 1)p_\beta^2 - \vec{p}_\beta \cdot [\vec{p}_\delta - \vec{p}_\sigma + (1 - 3M_f)\vec{p}_{\mu_3}]}{\alpha^2} \right. \\ \left. - \frac{+p_\delta^2 - \vec{p}_\delta \cdot (\vec{p}_{\mu_3} + 2\vec{p}_\sigma) + p_{\mu_3}^2 + \vec{p}_{\mu_3} \cdot \vec{p}_\sigma + p_\sigma^2}{\alpha^2} \right]$$

Substituindo v_{qq} e realizando as integrais restantes, o resultado final pode ser expresso no centro de massa do sistema méson-báron $\vec{p}_\alpha = \vec{p}$, $\vec{p}_\beta = -\vec{p}$, $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'$ e $\vec{p}_\delta = -\vec{p}'$:

$$I_1^e = \vec{S} \cdot \vec{S}' [a_1\eta_1 + \eta_2 (c_0 + c_1 p^2 + c_2 p'^2 + c_3 \vec{p} \cdot \vec{p}')] \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (D.1)$$

onde

$$A_1 = \frac{\alpha^2 m_f^2 + 8\beta^2(3(M_f - 1)M_f + 1)}{16\alpha^2\beta^2}$$

$$A_2 = \frac{\alpha^2 m_i^2 + 8\beta^2(3(M_i - 1)M_i + 1)}{16\alpha^2\beta^2}$$

$$A_3 = \frac{2\alpha^2 m_f m_i - 8\beta^2(-6M_f M_i + 3M_f + 3M_i - 2)}{16\alpha^2\beta^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\alpha^2 (3x^2 + 1) (a_2 - a_3 + a_4) + \frac{3a_2\beta^2}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{16}a_2(m_f - 2M_f - 2)^2 + \frac{1}{8}a_3(M_f - 1)(m_f - 2(M_f + 1)) + \frac{1}{4}a_4(M_f - 1)^2$$

$$c_2 = \frac{1}{16}a_2(m_i - 2M_i - 2)^2 + \frac{1}{8}a_3(M_i + 1)(m_i - 2(M_i + 1)) + \frac{1}{4}a_4(M_i + 1)^2$$

$$c_3 = \frac{1}{8}a_2(m_f - 2M_f - 2)(m_i - 2M_i - 2) + \frac{1}{8}a_3(M_i + 1)(m_f - 2(M_f + 1)) \\ + \frac{1}{8}a_3(M_f - 1)(m_i - 2(M_i + 1)) + \frac{1}{2}a_4(M_f - 1)(M_i + 1)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 1 \quad (D.2)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para o termo V_2 , obtendo

$$I_2^e = \vec{S} \cdot \vec{S}' [a_1\eta_1 + \eta_2 (c_0 + c_1 p^2 + c_2 p'^2 + c_3 \vec{p} \cdot \vec{p}')] \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (D.3)$$

onde

$$A_1 = \frac{\alpha^2 (3m_f^2 - 6m_f(M_f + 1) + 3M_f(5M_f - 2) + 7) + 12\beta^2(3(M_f - 1)M_f + 1)}{8\alpha^2(\alpha^2 + 3\beta^2)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha^2(3M_i(5M_i - 2) + 7) + 12\beta^2(3(M_i - 1)M_i + 1)}{8\alpha^2(\alpha^2 + 3\beta^2)}$$

$$A_3 = \frac{\alpha^2(3m_f(M_i + 1) + 9(M_f - 1)M_i - 9M_f + 1) + 6\beta^2(M_f(6M_i - 3) - 3M_i + 2)}{4\alpha^2(\alpha^2 + 3\beta^2)}$$

$$c_0 = 12\beta^2 [\alpha^2 (3x^2 + 1) + 12\beta^2] [\alpha^2 (3x^2 + 1) (2a_2 - a_3 + a_4) + 12\beta^2(a_2 - a_3 + a_4)]$$

$$c_1 = a_2 [\alpha^2 m_f (3x^2 + 1) + 12\beta^2(M_f + 1)]^2$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \alpha^4 (3x^2 + 1)^2 (m_i(a_2 m_i - a_3(m_i - 2)) + a_4(m_i - 2)^2) \\
 &\quad - 12\alpha^2 \beta^2 (3x^2 + 1) (2a_2 m_i(-m_i + M_i + 1) + a_3(m_i - 2)(2m_i - M_i - 1) - 2a_4(m_i - 2)^2) \\
 &\quad + 144\beta^4 (a_2(-m_i + M_i + 1)^2 + (m_i - 2)(a_3(-m_i + M_i + 1) + a_4(m_i - 2))) \\
 c_3 &= (\alpha^2 m_f (3x^2 + 1) + 12\beta^2 (M_f + 1)) [\alpha^2 (3x^2 + 1) (a_3(m_i - 2) - 2a_2 m_i) \\
 &\quad + 12\beta^2 (2a_2(-m_i + M_i + 1) + a_3(m_i - 2))] \\
 \eta_1 &= \frac{48\sqrt{6}\beta^3}{(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 12\beta^2)^{3/2}} \\
 \eta_2 &= \frac{12\sqrt{6}\beta^3}{(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 12\beta^2)^{7/2}}. \tag{D.4}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma o procedimento pode ser realizado para o termo V_3 , obtendo

$$I_3^e = \vec{S} \cdot \vec{S}' [a_1 \eta_1 + \eta_2 (c_0 + c_1 p^2 + c_2 p'^2 + c_3 \vec{p} \cdot \vec{p}')] \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \tag{D.5}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{7\alpha^4 m_f^2 + 36\beta^4 (1 - 2M_f)^2 + 12\alpha^2 \beta^2 (4 - m_f + m_f^2 - 2(6 + m_f)M_f + 16M_f^2)}{16\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2)} \\
 A_2 &= \frac{(7\alpha^4 m_i^2 + 36\beta^4 (1 - 2M_i)^2 + 12\alpha^2 \beta^2 (8 - 3m_i + m_i^2 - 2(4 + m_i)M_i + 16M_i^2))}{(16\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2))} \\
 A_3 &= \frac{7\alpha^4 m_f m_i + 36\beta^4 (2M_f - 1)(2M_i - 1) + A'}{8\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2)} \\
 A' &= 6\alpha^2 \beta^2 (4 + 3m_f - 20M_f + m_i + 2M_f m_i + 2(m_f + 12M_f - 8)M_i) \\
 c_0 &= 24\alpha^2 (\alpha^2 (6x^2 + 1) + 6\beta^2) (2x^2 (\alpha^2 (a_2 - a_3 + a_4) + 3\beta^2 (2a_2 - a_3 + a_4)) + 6\alpha^2 x^4 (a_2 - a_3 + a_4) + a_4 \beta^2) \\
 c_1 &= \alpha^4 (4a_2 (x^2 (-3m_f + 6M_f + 9) + 1)^2 \\
 &\quad + (m_f + 6(2M_f - 1)x^2 - 2)(6x^2 (a_3(m_f - 2M_f - 3) + a_4(2M_f - 1)) \\
 &\quad - 2a_3 + a_4(m_f - 2))) + 12\alpha^2 \beta^2 (-3x^2 (4a_2(m_f - 2M_f - 3) + (2M_f - 1)(a_3(-m_f + 2M_f + 5) \\
 &\quad - 4a_4 M_f + 2a_4)) + 4a_2 - a_3(m_f + 2M_f - 3) + a_4(m_f - 2)(2M_f - 1)) \\
 &\quad + 36\beta^4 (4a_2 - 4M_f(a_3 + a_4) + 2a_3 + 4a_4 M_f^2 + a_4) \\
 c_2 &= \alpha^4 (4a_2 (3x^2 (m_i - 2M_i - 1) + 1)^2 + (m_i + 6(2M_i + 1)x^2 - 2)(6x^2 (a_3(m_i - 2M_i - 1) + 2a_4 M_i + a_4) \\
 &\quad + 2a_3 + a_4(m_i - 2))) + 12\alpha^2 \beta^2 (3x^2 (4a_2(m_i - 2M_i - 1) \\
 &\quad + (2M_i + 1)(a_3 m_i - 2a_3 M_i + a_3 + 4a_4 M_i + 2a_4)) \\
 &\quad + 4a_2 + a_3(m_i + 2M_i - 1) + a_4(m_i - 2)(2M_i + 1)) + 36\beta^4 (4a_2 + (2M_i + 1)(2a_3 + 2a_4 M_i + a_4)) \\
 c_3 &= 2(\alpha^4 (4a_2 (3x^2 (m_f - 2M_f - 3) - 1)(3x^2 (m_i - 2M_i - 1) + 1) \\
 &\quad + a_3 (18x^4 (2m_f M_i + m_f + 2M_f (m_i - 4M_i - 2) \\
 &\quad - m_i - 4M_i - 2) + 3x^2 (m_f (2m_i - 2M_i - 3) - 2M_f m_i + 8M_f - 5m_i + 4) + m_f - m_i) \\
 &\quad + a_4 (m_f + 6(2M_f - 1)x^2 - 2)(m_i + 6(2M_i + 1)x^2 - 2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +6\alpha^2\beta^2(3x^2(4a_2(m_f - 2M_f - m_i + 2M_i - 2) \\
 & + a_3(2M_i(m_f - 4M_f - 4) + m_f + 2M_fm_i - m_i - 6) + 4a_4(2M_f - 1)(2M_i + 1)) \\
 & - 8a_2 + a_3(m_f + 2M_f - m_i - 2M_i - 2) + a_4(2m_fM_i + m_f + 2M_f(m_i - 2) - m_i - 4M_i)) \\
 & - 36\beta^4(4a_2 + 2a_3(-M_f + M_i + 1) - a_4(2M_f - 1)(2M_i + 1))) \\
 \eta_1 &= \frac{24\sqrt{3}\alpha^3x^2\sqrt{3x^4+x^2}}{\sqrt{3x^2+1}(\alpha^2(6x^2+1)+6\beta^2)^{3/2}} \\
 \eta_2 &= \frac{3\sqrt{3}\alpha^3(3x^4+x^2)^{7/2}}{2x^4(3x^2+1)^{7/2}(\alpha^2(6x^2+1)+6\beta^2)^{7/2}}. \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para o termo V_4 , obtendo

$$I_4^e = \vec{S} \cdot \vec{S}' [a_1\eta_1 + \eta_2 (c_0 + c_1 p^2 + c_2 p'^2 + c_3 \vec{p} \cdot \vec{p}')] \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \tag{D.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{3(m_f - 2(M_f + 1))^2}{8(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_f - 1)^2}{8(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(1 - 2M_f)^2}{8\alpha^2} \\
 A_2 &= \frac{3(m_i - 2(M_i + 1))^2}{8(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_i - 1)^2}{8(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(1 - 2M_i)^2}{8\alpha^2} \\
 A_3 &= -\frac{3(m_f - 2(M_f + 1))(m_i - 2(M_i + 1))}{4(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_f - 1)(m_i - 1)}{4(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(2M_f - 1)(2M_i - 1)}{4\alpha^2} \\
 c_0 &= 12\alpha^2(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)(\beta^2x^2(2a_2 - a_3)(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2) \\
 & + a_4(\alpha^4x^4 + 3\alpha^2\beta^2x^2(x^2 + 1) + \beta^4(6x^2 + 1))) \\
 c_1 &= \alpha^8x^4(a_4(3x^2(m_f - 2M_f - 1) + 1)^2 \\
 & - m_f(3x^2 + 1)(-3x^2(a_2m_f + a_3(-m_f) + 2a_3M_f + a_3) - a_2m_f + a_3)) \\
 & + \alpha^6\beta^2x^2(2(2a_2m_f(3x^2 + 1)(3(m_f + 1)x^2 + 1) \\
 & + a_4(3x^2(2m_f - 6M_f - 1) - m_f + 3)(3x^2(m_f - 2M_f - 1) + 1)) \\
 & + a_3(9x^4(-4m_f^2 + 10m_fM_f + m_f + 4M_f + 2) \\
 & - 3x^2(m_f(m_f - 6M_f + 6) - 4M_f) + (m_f - 3)m_f - 2)) \\
 & + \alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_f(m_f + 4) + 1) + a_3(-4m_f(m_f - 4M_f + 2) + 20M_f + 6) \\
 & + 4a_4(m_f^2 - 8m_fM_f + M_f(13M_f + 3)) - 3a_4) \\
 & + 6x^2(a_2(8m_f + 4) + a_3(m_f(m_f + 2M_f - 5) + 6M_f - 4) \\
 & + a_4(m_f(-2m_f + 6M_f + 7) - 22M_f - 1)) + 4a_2 + (m_f - 3)(2a_3 + a_4(m_f - 3))) \\
 & + 12\alpha^2\beta^6(4a_2(3(m_f + 1)x^2 + 1) + a_3(3x^2(2(m_f + 4)M_f - 3m_f) + m_f + 2M_f - 4) \\
 & + a_4(2M_f - 1)(3x^2(-2m_f + 6M_f + 1) + m_f - 3)) + 36\beta^8(4a_2 + (2M_f - 1)(2a_3 + a_4(2M_f - 1))) \\
 c_2 &= \alpha^8x^4(m_i(3x^2 + 1)(-3x^2(-a_2m_i + 2a_3M_i + a_3) + a_2m_i - a_3m_i + a_3) + a_4(m_i + (6M_i + 3)x^2 - 1)^2) \\
 & - \alpha^6\beta^2x^2(a_3(m_i^2 + 9(5m_i + 2)(2M_i + 1)x^4 + 3(3m_i + 2)x^2(m_i + 2M_i) + m_i - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2(2a_2m_i(3x^2 + 1)(3(m_i + 1)x^2 + 1) + a_4(m_i + 9(2M_i + 1)x^2 - 1)(m_i + (6M_i + 3)x^2 - 1)) \\
 & + \alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_i(m_i + 4) + 1) + (2M_i + 1)(13(2a_4M_i + a_4) - 2a_3(4m_i + 5))) \\
 & + 6x^2(a_2(8m_i + 4) \\
 & - a_3(m_i + 3)(m_i + 2M_i) + 5a_4(m_i - 1)(2M_i + 1)) + 4a_2 + (m_i - 1)(a_4(m_i - 1) - 2a_3)) \\
 & + 12\alpha^2\beta^6(3x^2(4a_2(m_i + 1) + (2M_i + 1)(3a_4(2M_i + 1) - a_3(m_i + 4))) + 4a_2 - a_3(m_i + 2M_i) \\
 & + a_4(m_i - 1)(2M_i + 1)) + 36\beta^8(4a_2 + (2M_i + 1)(-2a_3 + 2a_4M_i + a_4)) \\
 c_3 = & \alpha^8(-x^4)(2a_4(3x^2(m_f - 2M_f - 1) + 1)(m_i + (6M_i + 3)x^2 - 1) \\
 & - (3x^2 + 1)(a_3(3x^2(m_fm_i + 2m_fM_i + m_f - 2M_fm_i - m_i) + m_f(m_i - 1) + m_i) \\
 & - 2a_2m_fm_i(3x^2 + 1))) \\
 & - \alpha^6\beta^2x^2(9x^4(4a_2(2m_fm_i + m_f + m_i) \\
 & + a_3(-m_f(4m_i + 10M_i + 7) + 10M_fm_i + 4M_f + 3m_i - 4M_i) \\
 & + 2a_4(2M_i + 1)(5m_f - 12M_f - 4)) + 6x^2(4a_2(m_fm_i + m_f + m_i) \\
 & - a_3(2m_fm_i + 3m_fM_i + m_f - 3M_fm_i - 2M_f + 3m_i + 2M_i) \\
 & + a_4(m_f(3m_i - 2M_i - 4) - 8M_fm_i + 8M_f - 2m_i + 12M_i + 8)) \\
 & + 4a_2(m_f + m_i) + a_3(m_f - 5m_i) - 2a_4(m_f - 4)(m_i - 1)) \\
 & - 2\alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_f(m_i + 2) + 2m_i + 1) \\
 & - 2a_3(m_f(m_i + 4M_i + 4) - 4M_fm_i - 5M_f + 5M_i + 1) \\
 & + a_4(2M_i + 1)(8m_f - 26M_f - 3)) + 3x^2(8a_2(m_f + m_i + 1) \\
 & - a_3(2m_fM_i + m_f - 2M_f(m_i + 3) + 7m_i + 6M_i + 4) \\
 & + a_4(m_f(2m_i - 6M_i - 5) - 10M_f(m_i - 1) + m_i + 22M_i + 10)) \\
 & + 4a_2 + a_3(m_f - m_i - 2) - a_4(m_f - 3)(m_i - 1)) - 12\alpha^2\beta^6(3x^2(4a_2(m_f + m_i + 2) \\
 & - a_3(m_f(2M_i + 3) - 2M_f(m_i + 4) + m_i + 8M_i + 4) + 2a_4(2M_i + 1)(m_f - 6M_f + 1)) \\
 & + 8a_2 + a_3(m_f + 2M_f - m_i - 2M_i - 4) \\
 & + a_4(-m_f(2M_i + 1) - 2M_f(m_i - 1) + m_i + 6M_i + 2)) \\
 & - 72\beta^8(4a_2 + 2a_3(M_f - M_i - 1) - a_4(2M_f - 1)(2M_i + 1)) \\
 \eta_1 = & \frac{48\sqrt{6}\alpha^3\beta^3x^3}{(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)^{3/2}(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)^{3/2}} \\
 \eta_2 = & \frac{12\sqrt{6}\alpha^3\beta^3x^3}{(\alpha^2x^2 + 2\beta^2)^{7/2}(\alpha^2(3x^2 + 1) + 6\beta^2)^{7/2}}
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Parte spin-sabor-cor de V_{mb}

O fator de cor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1 &= \left(\frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\nu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\rho\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\sigma\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_2 &= \left(\frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu_1\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\sigma\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_3 &= \left(\frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\nu\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\mu_1\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\sigma\rho\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_4 &= \left(\frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\nu_1\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\mu\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\mu_1\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\nu_1\sigma\mu_3}}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

O resultado é escrito como $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9} \right\}. \tag{E.2}$$

É importante observar que pelo fato deste resultado não depender dos índices de méson e/ou bárion, ele vale para qualquer interação méson-bárion descrito dentro do contexto do nosso formalismo. O fator de spin-sabor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left(\delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu\nu_2} \zeta_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \xi_\gamma^{\rho\nu_2} \zeta_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 \mathcal{S}_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left(\delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu_1\nu} \zeta_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \xi_\gamma^{\sigma\rho} \zeta_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 \mathcal{S}_3(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left(\delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu\nu_2} \zeta_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \xi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \zeta_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\
 \mathcal{S}_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left(\delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\nu_1\nu} \zeta_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \xi_\gamma^{\mu_1\rho} \zeta_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}.
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Estes fatores \mathcal{S} podem ser calculados facilmente, usando a seguinte propriedade das matrizes do $SU(N)$

$$M_{\mu\sigma}^a M_{\nu\rho}^a = 2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - f \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \quad \text{com} \quad f = \begin{cases} 1, & \text{se } M^a = \sigma^a, (a = 1, 2, 3) \\ \frac{2}{3}, & \text{se } M^a = \lambda^a, (a = 1, \dots, 8) \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Os fatores de spin-sabor-cor ω_i que aparecem na amplitude de espalhamento h_{fi} em (5.52) são obtidos a partir de \mathcal{C} e \mathcal{S} :

$$\left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \right\} = \left\{ 3\mathcal{C}_1\mathcal{S}_1, 3\mathcal{C}_2\mathcal{S}_2, 6\mathcal{C}_3\mathcal{S}_3, 6\mathcal{C}_4\mathcal{S}_4 \right\}. \quad (\text{E.5})$$

Como foi comentado no Capítulo 4, os índices $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ são os números quânticos de espaço, spin e isospin dos mésons ou dos bárions do problema. Eles vão ser determinados de acordo com o respectivo processo a ser estudado, sendo muitas vezes necessário usar regras de soma de momento angular para representar o estado em questão.

Bibliografia

- [1] Yukawa H., Proc. Phys.Math. Soc. Jpn.17, 48 (1935)
- [2] Lattes C. M. G.,Muirhead H., Occhialini G. P. S., Powell C. F., Nature 159, 694 (1947).
- [3] Gell-Mann M. , Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [4] Zweig G. , CERN Rep. 8182/TH, p. 401; CERN Rep. 8419/TH, p. 412 (1964).
- [5] Greenberg O. W. , of Baryons and Mesons. Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [6] Han M. Y., Nambu Y. ,Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).
- [7] Greiner W., Schramm S., Stein E., *Quantum Chromodynamics - Third edition*. Springer, 2007
- [8] Halzen F., Martin A. D., *Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley, 1984.
- [9] Paul Bühler, *Measuring the JPsi-Nucleon dissociation cross section with PANDA*, arXiv:1109.3857 (2011).
- [10] Swanson E. S., Ann. Phys. (NY), **220**, 73 (1992).
- [11] Barnes T., Swanson E. S., Phys. Rev. D **46**, 131 (1992);
- [12] Barnes T., Capstick S., Kovarik M. D., Swanson E. S. , Phys. Rev. C **48**, 539 (1993).
- [13] Hadjimichef D. , Krein G., Szpigiel S., Veiga J. S. da , *Ann. Phys.*,Nova York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.
- [14] Oka M., Yazaki K., Phys. Let. B **90**, 41 (1980).
- [15] J. J. Sakurai,*Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Cia. (1967).

-
- [16] Muta. T, *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. Singapore: World Scientific, 1987.
- [17] S. Adler, Phys. Rev. **117**, 2426 (1969).
- [18] J. Bell, R. Jackiw, Nuov. Cimento **60** A, 47 (1969).
- [19] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, Phys. Rev. D **65**, 025012 (2001).
- [20] J. Schwinger, Phys. Rev. **127**, 324 (1962).
- [21] N. H. Christ, T.D. Lee, Phys. Rev. D **22** , 939 (1980).
- [22] D. Zwanziger, Nucl. Phys. B **485**, 185 (1997).
- [23] FAIR - Baseline Technical Report (2005), www.fair-center.de/fileadmin/fair/publications_FAIR/FAIR_BTR_1.pdf.
- [24] E. S. Swanson, *The New Heavy Mesons: A Status Report*, Physics Reports, 429, Issue 5, 243 (2006).
- [25] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [26] G. Zweig ,CERN Report th401,4r12 (1964).
- [27] H. J. Lipkin, Phys. Rep. C **8**, 173, (1973).
- [28] H. J. Lipkin, Phys. Lett. B **45**, 267, (1973).
- [29] A. De Rújula, G. Howard, S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [30] S. Szpigel: *Interação méson-méson no formalismo Fock-Tani*. Tese de doutorado IF-USP, 1995.
- [31] Wheeler, J. A., Phys. Rev. **52** 1083, 1107 (1937).
- [32] Tang Y. C., LeMere M. e Thompson D. R., Phys. Rep. **47**, 3 (1978).
- [33] Wildermuth K., Kanellopoulos Th., Nucl. Phys. **7**, 150 (1958); Nucl. Phys. **9** 449 (1958/59).
- [34] Matinyan S. G., Müller B., Phys. Rev. C **58**, 2994 (1998).
- [35] Haglin K. L., Phys. Rev. C **61**, 031902(R) (2000).
- [36] Sibirtsev A., Tsushima K., Thomas A. W., Phys. Rev. C **63**, 044906 (2001).
- [37] Hilbert J. P., Black N., Barnes T., Swanson E.S., Phys. Rev. C **75**, 064907 (2007)

-
- [38] Barnes T., Swanson E. S., Phys. Rev. D **46**, 131 (1992).
- [39] Swanson E. S., Ann. Phys. (NY) **220**, 73 (1992)
- [40] Wong C. Y., Swanson E. S., Barnes T., Phys. Rev. C **65**, 014903 (2002).
- [41] Wong C. Y., Swanson E. S., Barnes T., Phys. Rev. **66**, 029901(E) (2002).
- [42] Wong C. Y., Swanson E. S., Barnes T., Phys. Rev. **62**, 045201 (2000).
- [43] Barnes T., Swanson E. S., Phys. Rev. C **49**, 1166 (1994).
- [44] Hadjimichef, D., *KN interaction in the quark-gluon exchange framework*, hep-ph/0006330.
- [45] Isgur N., Karl G., Phys Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [46] Faiman D., Hendry A. W., Phys Rev. **173**, 1720 (1968).