

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

BILHARES COM REGIÃO DE PESIN DE MEDIDA UN

por

Roberto Markarian Abrahamian

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Porto Alegre

1986

043

1986

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Artur Oscar Lopes e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora: Prof. Artur Oscar Lopes (Orientador)  
Prof. Luiz Fernando Carvalho da Rocha  
Prof. Jorge Lewowicz

Data de Defesa: 19 de dezembro de 1986.

Reconocimiento a Jorge Lewowicz  
Artur Oscar Lopes  
Marcos Sebastiani

por lo que hicieron por el  
reinicio de mi actividad matemática.

Para Leny, por lo mismo y mucho más.

Datilógrafa: Ana María Sánchez  
Desenhista: Jorge Estrada

## RESUMO

Neste trabalho demonstra-se que para uma classe grande de bilhares com fronteiras de curvatura positiva, negativa ou nula, a região de Pesin tem medida um. Também demonstra-se que a condição de Wojtkowski para curvas focalizadoras não é necessária para ter região de Pesin de medida um; mais precisamente, encontram-se condições abertas para curvas  $C^4$  focalizadoras distintas das dadas por Wojtkowski. As demonstrações aqui apresentadas tornam-se bem mais simples que as dos trabalhos até aqui existentes pois utilizamos procedimentos desenvolvidos por Lewowicz sobre o comportamento assintótico de certas formas quadráticas.

## ABSTRACT

We prove that for a large class of billiards with boundaries of positive, negative or null curvature the region of Pesin has measure one. We also prove that Wojtkowski's condition on focal curves is not necessary for Pesin's region of measure one; more precisely, we give open conditions for  $C^4$  focal curves which are distinct from those of Wojtkowski. The proofs presented herein are much simpler than the previously existing ones since we use Lewowicz's results on asymptotic behaviour of certain quadratic forms.

BILHARES COM REGIÃO DE PESIN  
DE MEDIDA UM

Roberto Markarian

I N T R O D U Ç A O

Na base do estudo das propriedades estatísticas dos sistemas dinâmicos está a hipótese de Boltzmann respeito à ergodicidade do modelo (de Boltzmann-Gibbs) dos gases. O modelo mais simples dos gases ideais consiste em bolas rígidas contidas em uma caixa paralelepípeda, batendo elásticamente.

A prova de Sinai (S1), anunciada em 1963, do caso mais simples desta hipótese, é feita no plano e com duas bolas: representa-se uma caixa quadrada pelo toro  $\{(x,y) \bmod 1\}$  toma-se uma das bolas fixa e o movimento da outra, batendo contra ela com a propriedade "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão", é o sistema dinâmico estudado (fig.1).

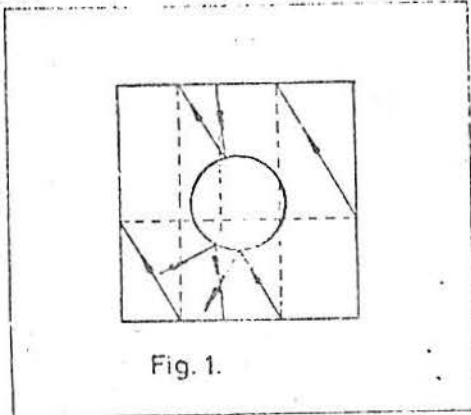


Fig. 1.

Arnold (A3) diz que "esta prova serve como medida da madurez desta teoria". Na mesma obra de Arnold encontram-se outras referências históricas sobre estes assuntos.

O mesmo Arnold, usando ideias já conhecidas por G. Birkhoff ((B1), ch VI.6) e Krylev, deu uma interpretação intuitiva da relação entre os bilhares planos e os fluxos geodésicos em superfícies. O estudo destes fluxos foi a origem da utilização das folheações transversais para demonstrar propriedades estatísticas dos sistemas dinâmicos. Isto foi feito pela primeira vez por Hopf e Hedlund, em separado (1939) e utilizado proveitosamente por Anosov e Sinai (ver, por exemplo (A1)) nos anos 60 para estudar os nomeados sistemas de Anosov (C-Sistemas, na nomenclatura soviética) e problemas conexos.

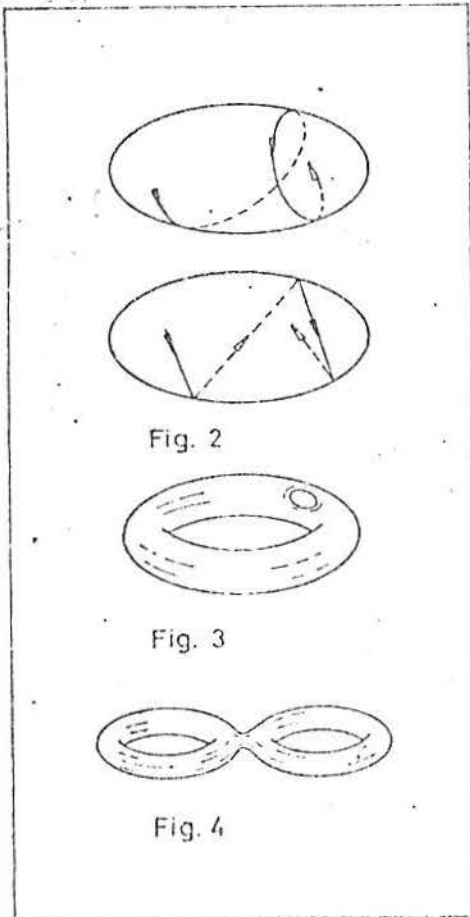


Fig. 2

Fig. 3

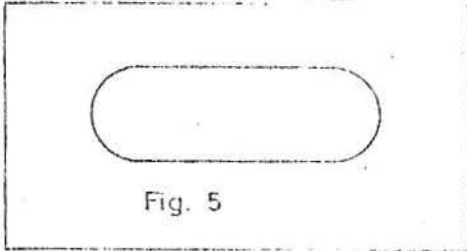
Fig. 4

O movimento da bola de bilhar em uma mesa plana limitada por uma elipse pode ser considerado como o limite do fluxo geodésico na superfície de um elipsoide, quando um eixo tende a zero (fig.2). As geodésicas do elipsoide transformam-se nas trajetórias do bilhar, a elipse pode ser considerada como tendo duas faces e os bateamentos com a fronteira como o passagem da geodésica de uma face para a outra. Da mesma maneira o bilhar tórico pode ser considerado como o limite dos fluxos geodésicos em uma superfície suave. Esta resulta de considerar o toro com o buraco da bola fixa como uma superfície de duas faces, passando-se de uma delas a outra pelo bordo do buraco (fig.3). Esta superfície é homeomorfa a uma esfera com duas alças (fig. 4).

O elipsoide tem curvatura total  $4\pi$ , e a esfera com duas alças  $-4\pi$  (Teor. de Gauss-Bonnet). Nos casos em consideração as curvaturas acumulam-se nas fronteiras (elipse e bordo do buraco, respectivamente) quando passa-se ao limite. Porém pode-se intuir - não é obviamente uma demonstração - que os comportamentos estocásticos dos bilhares e os fluxos são semelhantes: a demonstração da ergodicidade dos fluxos geodésicos em variedades de curvatura negativa desenvolvem as técnicas que são utiliza-

das na demonstração das propriedades ergódicas dos bilhares tóricos.

A situação em que os bilhares tem fronteiras com curvatura positiva apresenta-se mais complicado. De fato, os trabalhos pioneiros de Birkhoff permitiam conjecturar a não ergodicidade do bilhar plano cuja fronteira é uma curva suave de curvatura positiva. O sistema dinâmico na elipse é não ergódico (Ver (C1)Ch 3 3). Bunimovich (B2), (B3) com os mesmos métodos de Sinai mostrou que os bilhares que possuem algum arco de circunferência como parte da fronteira, as partes focalizadoras -arcs de circunferência- suficientemente separados e sem arcos de curvatura negativa (o stadium -fig.5-, por exemplo) são Bernouilli. Sinai (e Bunimovich) utiliza as propriedades das "frentes de onda" para construir pelo método das aproximações sucessivas as fibras contratoras e expansoras do sistema. "As provas destes resultados requerem centenas de páginas e contém uma teoria generalizada dos C-sistemas com folheações descontínuas" (Arnold-Avez (A2)ch 3). Também eles usavam o estudo detalhado das curvas de discontinuidade da transformação do bilhar para construir partições de Markov e obter propriedades dos gases de Lorentz (B4) , (B5).



lizadoras -arcs de circunferência- suficientemente separados e sem arcos de curvatura negativa (o stadium -fig.5-, por exemplo) são Bernouilli. Sinai (e Bunimovich) utiliza as propriedades das "frentes de onda" para construir pelo método das aproximações sucessivas as fibras contratoras e expansoras do sistema. "As provas destes resultados requerem centenas de páginas e contém uma teoria generalizada dos C-sistemas com folheações descontínuas" (Arnold-Avez (A2)ch 3). Também eles usavam o estudo detalhado das curvas de discontinuidade da transformação do bilhar para construir partições de Markov e obter propriedades dos gases de Lorentz (B4) , (B5).

Neste trabalho demonstra-se que para uma classe grande de bilhares com fronteiras de curvatura positiva, negativa ou nula, a região de Pesin tem medida 1. A região de Pesin é, grosso modo, o conjunto dos pontos onde existe uma direção de expansões e outra de contrações, assintóticas, mas sem exigir nenhuma classe de uniformidade como na hiperbolicidade. Ver def. Cap. 2.B.

O estudo da região de Pesin dos bilhares planos é o objeto de um artigo de Wojtkowski (W1) onde usa o método dos conos. Neste trabalho demonstra-se que a condição obtida por Wojtkowski para curvas focalizadoras não é necessária para ter região de Pesin de medida um. Mais precisamente, encontram-se condições abertas para curvas  $C^4$  focalizadoras, distintas das dadas em (W1).

As demonstrações aqui apresentadas tornam-se bem mais simples que nos trabalhos antes referidos pois utilizam-se procedimentos desenvolvidos por Jorge Lewowicz que trazem no comportamento assintótico de certas formas quadráticas a presença das folheações estáveis e instáveis. Estas folheações não são em geral uniformes em comprimento e no ângulo que formam entre si, mas sua existência é "detectada" por dito comportamento assintótico e permite aplicar a teoria de Pesin. Ver (P4) p.58, 61-2, 71-3.

No primeiro capítulo deste trabalho expõem-se os resultados fundamentais da teoria de bilhares necessários para a construção da medida invariante e a prova de que as singularidades da função do bilhar tem medida nula. Também dão-se provas de propriedades das frentes de onda plana.

No segundo capítulo se definem e apresentam propriedades importantes das formas de Liapunov, e constroem-se algumas formas que permitem concluir o resultado principal deste trabalho: certos bilhares tem região de Pesin de medida 1.

No terceiro capítulo se dão exemplos de bilhares que cumprem as condições das formas antes referidas.

Demonstrações de resultados gerais são dadas no anexo.

1. BILHARES

A exposição das duas primeiras seções deste capítulo segue as linhas gerais do §1, ch 6, do livro de Cornfeld, Fomin e Sinai (Cl).

(A). Sejam,  $Q_0$  uma variedade riemanniana  $C^\infty$  de dimensão  $d$ ,  $f_j: Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , funções  $C^\infty$ .  $Q = \{q \in Q_0 : f_i(q) \geq 0, 1 \leq i \leq N\}$  é dita uma variedade riemanniana compacta com fronteira suave por partes se:

- (i)  $Q$  é compacta
- (ii)  $f_i^{-1}(0)$  não contem pontos criticos das funções  $f_i$  e é, portanto, uma variedade de codimensão 1,  $1 \leq i \leq N$ .
- (iii)  $\text{grad } f_i, \text{grad } f_j$  são linearmente independentes em  $q \in f_i^{-1}(0) \cap f_j^{-1}(0)$ ,  $i \neq j$ .

E obvio que se  $Q_0 = \mathbb{R}^2$ ,  $Q$  é uma região limitada por algumas partes das curvas  $f_i = 0$ .

Seja agora  $\partial Q_i = f_i^{-1}(0) \cap Q$   $1 \leq i \leq N$ ,  $\partial Q = \bigcup_{i=1}^N \partial Q_i$ .

Componentes regulares da fronteira são os conjuntos

$$\partial \tilde{Q}_i = \partial Q_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \partial Q_j$$

Cada componente regular é uma subvariedade aberto  $C^\infty$  de codimensão 1. Os pontos  $q \in \bigcup_i \partial \tilde{Q}_i$  são os pontos regulares de fronteira em contraposição aos pontos singulares.

Se  $G_q \subset T_q Q$  é o espaço tangente a  $f_i^{-1}(0)$  em  $q \in \bigcup_i \partial \tilde{Q}_i$ ,  $n(q) \in T_q Q$  é o vector normal unitario a  $G_q$ , dirigido para dentro de  $Q$ . Se  $M_0$  é o fibrado tangente unitario a  $Q_0$ , os pontos de  $M_0$  são  $x = (q, v)$   $q \in Q_0$ ,  $v \in S^{d-1}$  (esfera de dimensão  $d-1$ ).

Se  $\pi: M_0 \rightarrow Q_0$  é a projecção canónica  $\pi(q, v) = q$ , seja  $M = \pi^{-1}(Q)$ . Com as condições da definição inicial,  $M$  é uma variedade de dimensão  $2d-1$  do mesmo tipo que  $Q$  com as fronteiras satisfacendo  $\partial M = \pi^{-1}(\partial Q)$ ;  $\partial \tilde{M}_i = \pi^{-1}(\partial \tilde{Q}_i)$  é uma componente regular da fronteira  $\partial \tilde{M} = \bigcup_i \partial \tilde{M}_i$ .



Em  $Q_0$  a métrica riemanniana induz um elemento de volume  $d$  via a utilização da forma de volume canónica  $w$  tal que a aplicação  $d$ -linear alternada  $w_q = w_{T_q Q_0}$  verifica  $w_q(v_1, \dots, v_{d-1}, -n(q)) = 1$  onde  $\{v_1, v_2, \dots, v_{d-1}, -n(q)\}$  é uma base ortonormal positivamente orientada de  $(M_0)_q$ . Se  $q \in \partial \tilde{Q}$ , faz-se a eleição de modo que  $\{v_1, v_2, \dots, v_{d-1}\}$  seja uma base ortonormal positivamente orientada de  $G_q$  para que  $d\varphi_i$  seja o elemento de volume inducido pela métrica riemanniana via  $w_i$  tal que  $(w_i)_q(v_1, \dots, v_{d-1}) = 1$ . Verifica-se  $n(q) \wedge (w_i)_q = \pm w_q$ . No caso em que a variedade é com borde orientável, tem-se  $n(q) \wedge (w_i)_q = -w_q$ .

Então define-se a medida  $\mu$  em  $M_0$  por  $d\mu = d\varphi(q) d\gamma_q$  onde  $\gamma_q$  é a medida de Lebesgue na esfera  $S^{d-1} = \pi^{-1}(x)$ . Essa definição deve-se interpretar assim: se  $A \subset M_0$  é um boreleano

$$\mu(A) = \int_{Q_0} d\varphi(q) \int_{A \cap S^{d-1}(q)} d\gamma_q(x)$$

Esta definição é análoga a da medida de Liouville para fluxos geodésicos e hamiltonianos. Naturalmente  $\mu$  denota também a restrição dessa medida a  $M$ , que considera-se normalizada:  $\mu(M) = 1$

Com as observações anteriores  $d\vartheta = d\varphi_i(x) d\gamma_q \cdot \{(n(q), x)\}$ ,  $x \in \partial \tilde{M}_i$  define uma medida em  $\partial \tilde{M}$  onde o produto interno é definido por a métrica riemanniana:  $(n(q), x) = (n(q), v)$ ,  $x = (q, v)$ . Os detalhes de compatibilização das medidas são necessários, em primeiro lugar, para a aplicação do teorema da divergência no Teorema 1.

#### (B). O bilhar como sistema dinâmico.

Seja  $N_{ij}$  o conjunto dos pontos interiores  $x \in M$  tal que o segmento da geodésica em  $Q$  (em realidade geodésica em  $Q_0$ , restringida a  $Q$ ) construída na direcção  $x = (q, v)$  intersecta  $\partial Q$  em  $\partial Q_i \cap \partial Q_j$ . Em virtude das definições de geodésica e variedade riemanniana com fronteira suave por partes, pode-se supor que  $N_{ij}$  é uma subvariedade de codimensão 1  $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i \neq j} N_{ij}) = 0$ . Esta é a situação nos bilhares em  $R^d$  (geodésicas retas) ou tórico que estudam-se habitualmente.

Se  $x \in \text{int } M \setminus \bigcup_{i \neq j} N_{ij}$ , o ponto final do segmento da geodésica é um ponto regular da fronteira  $\partial Q$ . Seja  $s$  a mínima distância (ou tempo pois considera-se o movimento sobre a geodésica com velocidade unitária) em que isso sucede. Observe-se que se  $x \in \partial M, (n(q), x) < 0 \Rightarrow s=0$ .

Se  $y$  é o vetor tangente obtido a partir de  $x$  por traslação paralela ao longo da geodésica, então  $y'$  é o refletido de  $y$  em  $q = \mathcal{W}(y)$  de acordo a lei "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão", ou seja  $y' = y - 2(n(q), y) n(q)$ . Se  $(n(q), y) = 0$ ,  $y'$  será dirigido para dentro de  $Q$ .

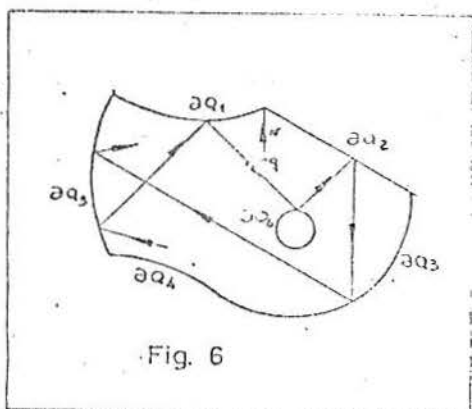


Fig. 6

Se  $y' \notin N_{ij}$ , segue-se a trajetória da mesma maneira tomando o segmento de geodésica por  $y'$ , sendo seu outro extremo a seguinte interseção com a fronteira. Ver fig. 6 para  $Q_0 = \mathbb{R}^2$ ;  $z = (q, v) \in N_{12}$ .

Em  $M$  está definida uma involução natural  $I$  tal que se  $x = (q, v) \in M$ ,  $Ix = (q, -v)$ . Uma construção semelhante à que se fez para  $s \geq 0$  pode-se fazer no sentido contrário.

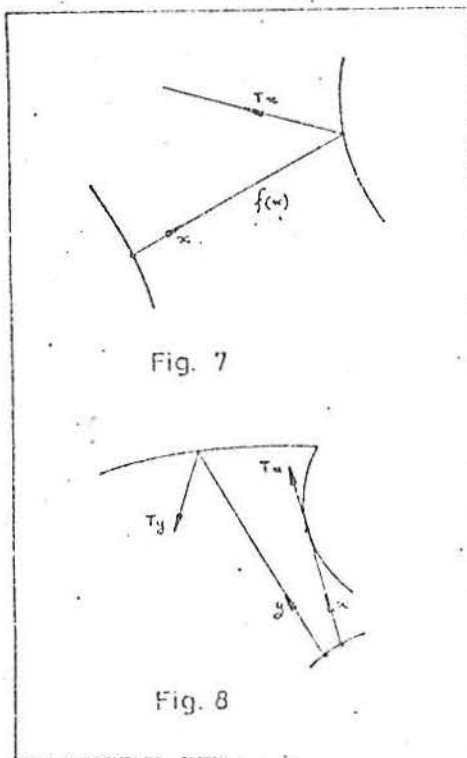
Se  $Q_0$  é qualquer variedade poderia suceder que a geodésica por  $x$ , ou  $y'$ , ou..., não interceptara  $Q$  (exemplos simples podem-se mostrar em um hiperboloide de uma folha); nessa situação mais geral só consideram-se os casos em que isso sucede em conjuntos de  $\mu$ -medida nula.

Seja agora  $N_1$  o conjunto dos  $x \in M$  que estão contidos em  $\bigcup_{i \neq j} N_{ij}$  em alguma etapa da construção anterior. Prova-se facilmente que  $\mu(N_1) = 0$  ((Cl) ch 6, lemma 3). Em  $M \setminus N_1$  seja  $N_2$  o conjunto dos  $x$  para os quais o procedimento anterior leva a infinitas reflexões em tempo finito. Prova-se também que  $\mu(N_2) = 0$ . Ver comentários que seguem à demonstração do teorema 1. Se  $M' = M \setminus (N_1 \cup N_2)$  define-se o grupo a um parâmetro de transformações  $\{T^t\}$  em  $M'$  fazendo  $T^t x$  igual ao vetor tangente obtido pela traslação de  $x$  ao longo da trajetória,

uma distancia (tempo)  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Se  $t$  é o momento em que a fronteira é alcançada, toma-se  $T^t x = \lim_{t' \rightarrow t^+} T^{t'} x$ . Se nesta última situação identificamos  $y$  (tal que  $\Pi(y) = q \in \partial Q$ ) com  $y'$  antes referido, resultam  $\lim_{t' \rightarrow t^-} T^{t'} x$ ,  $\lim_{t' \rightarrow t^+} T^{t'} x$  sempre identificados. O conjunto obtido a partir de  $M'$  por tal identificação será nomeado também  $M'$ .

O grupo de transformações  $\{T^t\}$  é o bilhar em  $Q$ . Pode-se nomear espaço de configurações do bilhar a  $Q$  (ou simplesmente bilhar, se não ha confusão entre a dinâmica e a geometria do problema).

O bilhar  $\{T^t\}$  está diretamente relacionado com a transformação  $T$  do conjunto  $M_1 = \{x \in \partial \tilde{M}; (n(q), x) > 0, q = \Pi(x)\}$  definida da seguinte maneira: considera-se o segmento de geodésica na direção  $x \in M_1$  com origem em  $q = \Pi(x) \in \partial Q$ , ponto final em a primeira intersecção com a fronteira, e reflêta-se o vetor tangente no final do segmento. O vetor resultante é  $Tx$ . Se  $x$  está no conjunto em que  $T^t$  está definido, então  $Tx = T^{f(x)} x$  onde  $f(x)$  é o comprimento do segmento de geodésica (Fig. 7).



Observe-se que se  $Tx \notin M_1$ ,  $T$  pode ser não continua em  $x$ . O estudo dos pontos como o  $x$  da fig. 8 é fundamental nos metodos de Sinai para bilhares dispersores. Mas se  $Tx \in M_1$ ,  $T$  está definida e é continua em uma vizinhanza  $A \subset \partial \tilde{M}$  de  $x$ .

O resultado seguinte é a chave para mostrar a invariância de  $\mu$  e  $\nu$  sob  $T$  e  $T^t$  respectivamente. Sua demonstração permite entender o significado de  $\nu$ , e trabalhar em  $M_1$ .

O resultado seguinte é a chave para mostrar a invariância de  $\mu$  e  $\nu$  sob  $T$  e  $T^t$  respectivamente. Sua demonstração permite entender o significado de  $\nu$ , e trabalhar em  $M_1$ .

Previamente é util recordar uma versão do teorema da divergência em variedades (Lang (L4), ch IX; Abraham-Marsdem (A4), ch2). Sejam  $V$  uma variedade riemanniana,  $W$  a forma de volume riemanniana canônica em  $V$ ,  $w$  a forma de volume em  $V$ ,  $N$  o campo vetorial dos vetores unitarios dirigidos para afora de  $V$  e  $X$  um campo vetorial  $C^1$  a suporte compacto. Então  $\int_V (\text{div}_w X) w = \int_{\partial V} (N, X) W$ . O teorema da divergência é generalizavel ao caso em que  $\partial V$  tem singularidades em conjuntos de medida nula, que é a situação utilizada na demonstração seguinte.

**Teorema I** Se  $A$  é um aberto de  $M_1$  tal que  $T(A) \subset M_1$ , então a restrição de  $T$  a  $A$  preserva a medida.

**Prova:** Uma demonstração direta para  $Q_0 = \mathbb{R}^2$  foi dada por Birkhoff em 1927 ((B1)ch8). Sejam  $C$  qualquer boreliano de  $A$ ,  $X$  o campo geodésico em  $TQ_0$ ; ou seja o campo cujo fluxo é o fluxo geodésico  $(\gamma_x(t), \gamma'_x(t)) \in M_0$  onde  $\gamma_x$  é a geodésica de  $Q_0$  por

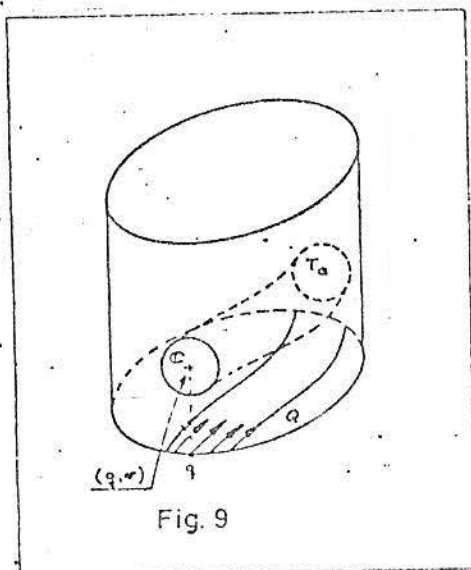


Fig. 9

$x = (q, v) \in M$ .  $R_1 = \{(\gamma_x(t), \gamma'_x(t)) : x = (q, v_1) \in C\}$  com  $v_1 \in T_q Q_0$  fixo, define uma subvariedade de  $M$ , difeomorfa a  $\{\gamma_x(t)\} \subset Q$ . Pode-se escrever: em cada ponto  $(\gamma_x(t), \gamma'_x(t))$  de  $M$ ,  $X = (\gamma''_x(t), 0)$  e, em particular, se  $Q_0 = \mathbb{R}^d$ ,  $\gamma'_x(t) = v_1$ ;  $X = (v_1, 0)$  onde  $a$  indica as  $d-1$  coordenadas nos vetores l.i. que com uma base de  $TR_1$  formam uma base de  $TM$ .

Sejam agora  $M_1^- = \{x \in \partial M : (n(q), x) < 0\}$  e a transformação  $T^- : M_1 \rightarrow \overline{M_1^-}$  dada por  $T^-x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_x^{f(x) - \varepsilon}$ ; então  $V = R_1 \cap M$  é um "tubo de fluxos geodésicos" limitado por  $C$ ,  $T^-(C)$  é uma superfície cilíndrica paralela a  $X$  onde  $(N, X) = 0$  (ver Fig. 8). Como os fluxos geodésicos preservam a medida gerada por  $w$  de  $M$ , o teorema de Liouville permite concluir que  $\text{div}_w X = 0$  (cf. Mañé (M1)I.3). Então  $\int_C (-N, X)W = \int_{T^-(C)} (N, X)W$ . Este resultado indica a igualdade dos fluxos através de  $C$  e  $T^-(C)$ . Mas  $N = -n(q)$  e temos demonstrado  $\int_C d\tilde{\nu} = \int_{T^-(C)} (-n(q), X)W$  onde  $X$  pode ser interpretado como o vetor tangente das trajetórias de bilhar em  $\tilde{M}$ , sem refletir.

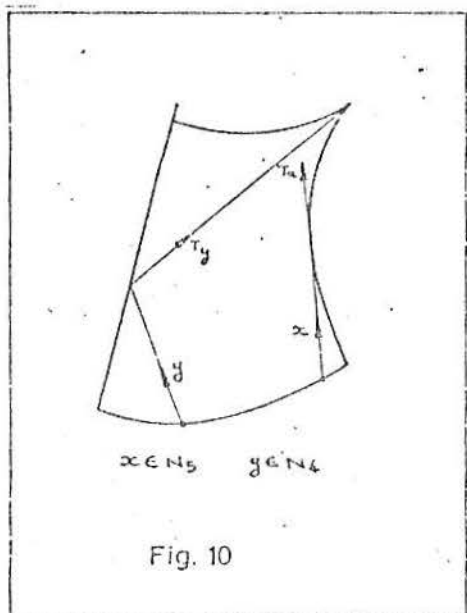
Para terminar, seja  $\tilde{\nu}$  a restrição de  $\nu$  a  $M_1^-$  e  $S : M_1 \rightarrow M_1$  definida por  $Sy = y - 2(n(q), y)n(q)$ ,  $q = \Pi(y)$ . Para  $y$  fixo esta transformação é isométrica de  $\tilde{\nu}$  em  $\nu$  e  $T = ST^-$ . Então:

$$\int_C d\nu = \int_{T^-(C)} (-n(q), X)W = \int_{T^-(C)} d\tilde{\nu} = \int_{ST^-(C)} d\tilde{\nu} = \int_{T(C)} d\nu$$

o que termina a prova do teorema.

A prova da invariância de  $\mu$  sob  $\{T^k\}$  segue-se sim muita dificuldade deste teorema, mas não é necessaria para este trabalho.

Para assegurar o bom comportamento de  $T$  restringa-se agora o conjunto  $M_1$ . Se  $N_3$  é o conjunto dos  $x \in M_1$  tais que  $Tx$  não é definido, então  $N_3$  é união de um numero finito de subvariedades de codimensão 1 e  $\nu(N_3)=0$ . Se  $N_4$  é o conjunto dos  $x \in M_1$  tais que  $T^k x \in N_3$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\nu(N_4)=0$ . Pode-se postular que o conjunto  $N_5$  dos  $x \in M_1$  tais que  $T^k x \in M_1$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$  tem



tambem  $\nu$ -medida nula. Esta é de fato a situação nos bilhares planos que estudam-se em detalhe neste trabalho (Fig. 10).

Assim, aplicando o teorema 1 no conjunto  $M_1 \setminus (N_4 \cup N_5)$  pode-se considerar  $H \subset M_1$ ,  $\nu(H)=1$  tal que  $T:H \rightarrow H$  é mensuravel, bijetiva, continua e preserva a medida.

Então pode-se aplicar o teorema de recorrência de Poincaré para concluir que

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = +\infty \quad \nu\text{-q.t. } x \in H.$$

Efetivamente:  $f(x) > 0 \quad \nu\text{-q.t. } x \in H \Rightarrow$  se  $A_m = \{x \in H : f(x) > 1/m\} \quad m=1,2,\dots$

cumpra-se  $\nu(\{y : T^k y \in A_m \text{ para infinitos } k \in \mathbb{N}\}) = \nu(A_m) \Rightarrow$

$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = +\infty \quad \nu\text{-q.t. } x \in A_m$  e a conclusão final sai

de que  $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ . O conjunto de  $\nu$ -medida nula que não cumpre essa condição é o correspondente para  $T$ , do  $N_2$  para  $\{T^k\}$ ; porém esta é a base da demonstração que  $\mu(N_2)=0$  (Cf. (C1), ch 6 l Lemma 2).

Nota: A transformação  $T$  definida neste trabalho, seguindo (C1) é a inversa da transformação dos artigos iniciais de Sinai, Bunimovich, Gallavotti, etc., mas é a mesma dos artigos mais recentes de Sinai-Bunimovich. Algo semelhante sucede com o conjunto em que  $T$  atua e porém com o signo de  $\cos \theta$  na seguinte seção.

(C). Bilhares planos

A seguir neste trabalho  $Q_0 = \mathbb{R}^2$ , e as geodésicas são retas. As componentes regulares da fronteira são curvas  $\partial Q_1$  que consideram-se parametrizadas por  $\alpha(s)$  ( $s$  comprimento de arco) de modo que  $n = i\alpha'(s)$  seja a normal dirigida para o interior do bilhar  $Q$ .

Se  $\alpha'' = \frac{dn}{ds} = kn = ki\alpha'$  é a definição da curvatura com sinal,  $k > 0$  ( $k < 0$ ) indica que curva e normal estão no mesmo (distintos) semiplano respeito a  $\alpha'$ . (Ver fig. 11). Resultam assim partes da fronteira  $\partial Q^+$ ,  $\partial Q^-$ ,  $\partial Q^0$  respectivamente componentes regulares com curvatura positiva (partes focalizadoras), curvatura negativa (partes dispersoras) e nula (partes neutras) da fronteira.

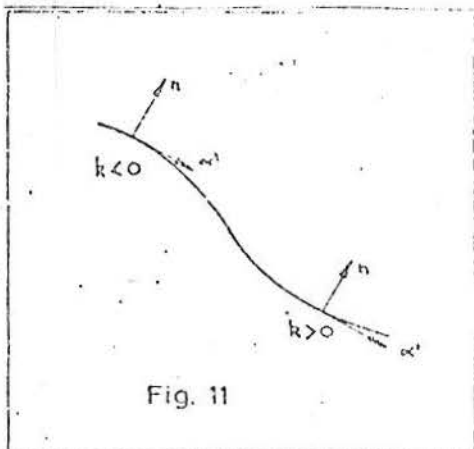


Fig. 11

Nota: Novamente esta nomenclatura é a oposta dos trabalhos clássicos sobre bilhares; os bilhares dispersores de Sinai-Bunimovich tem curvatura positiva.

O sistema de coordenadas natural em  $x=(q,v) \in \partial \tilde{M}_1$  é  $(s, \phi)$  com  $\phi$  o ângulo de  $n(q)$  com  $v$  medido no sentido anti-horário. Assim, para  $x \in M_1$  tem-se  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ ,  $\cos \phi > 0$ .

É claro que as discontinuidades de  $T$  em  $M_1$  vem dos batimentos tangentes a  $\partial Q_1$  no caso dispersor;  $\nu(N_5) = 0$ . Por isso considerase  $H \cap N_4 = H \cap N_5 = \emptyset$ . Ainda mais, demonstra-se que  $T: H \rightarrow H$ ,  $T_x^{f(x)} = Tx$  é um difeomorfismo de ordem uno menor que  $\partial \tilde{Q}$ . ((K1), Part V, Th 4.1).

Considera-se agora uma "frente de onda" que sai de um arco  $\partial Q_j$  e

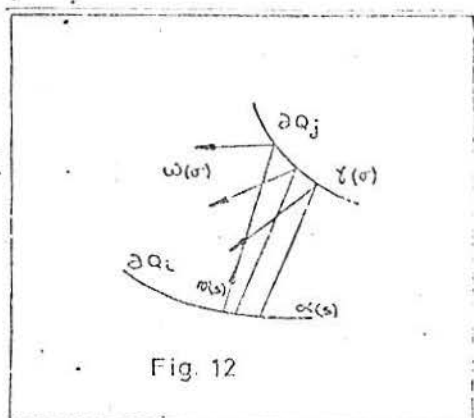


Fig. 12

bate em  $\partial Q_j$ . Uma frente de onda é dado por uma curva  $(\alpha(s), v(s))$  contida em  $M_1$ , onde  $v$  é o vetor da frente, e seu estado após o batimento em  $\partial Q_j$  é  $(\gamma(\sigma(s)), w(\sigma(s)))$ . Ou seja  $T(\alpha, v) = (\gamma, w)$ . ' designará indistintamente a derivada respeito a  $s$  ou  $\sigma$  (comprimento de arco de  $\gamma$ ). Ver fig. 12.

No que segue neste capítulo todos os calculos estam referidos á

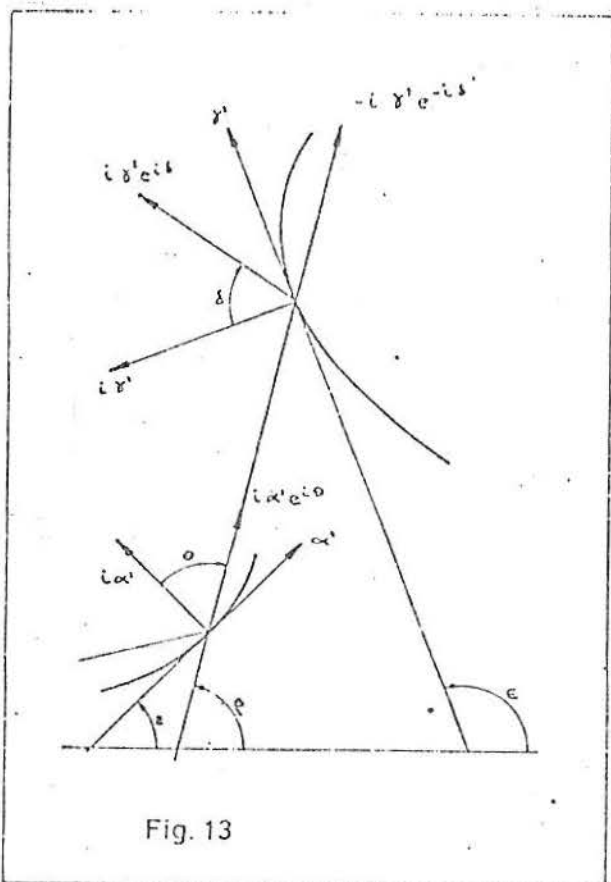


Fig. 13

fig. 13. Se  $\theta$  e  $\phi$  são os respectivos ângulos com as normais das frentes que saem de  $\partial Q_i$  e após bater em  $\partial Q_j$ , tem-se

$$v(s) = i \alpha'(s) e^{i\theta(s)}$$

$$w(s) = i \gamma'(\sigma(s)) e^{i\phi(\sigma(s))}$$

$$(1) \gamma(\sigma(s)) = \alpha(s) + f(s) i \alpha'(s) e^{i\theta(s)}$$

onde  $f(s)$  é o tempo (comprimento) entre um batimento e outro. Também

$$(2) i \alpha' e^{i\theta} = -i \gamma' e^{-i\phi}$$

Derivando respeito a  $s$ , e usando as definições das curvaturas  $k_0$ ,

$k_1$  em  $\partial Q_i, \partial Q_j$  respectivamente

resulta

$$i \alpha'' e^{i\theta} - \theta' \alpha' e^{i\theta} = -\sigma' i \gamma'' e^{-i\phi} - \sigma' \phi' \gamma' e^{-i\phi}$$

$$(k_0 + \theta') \alpha' e^{i\theta} = \sigma' (-k_1 + \phi') \gamma' e^{-i\phi}$$

$$(k_0 + \theta') \alpha' e^{i\theta} = -\sigma' (-k_1 + \phi') \alpha' e^{i\theta}$$

$$(3) k_0 + \frac{d\theta}{ds} = \left( k_1 - \frac{d\phi}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \quad (*)$$

Derivando agora (1), e multiplicando escalarmente por  $\alpha' e^{i\theta}$ , tem-se

$$(\sigma' \gamma'; \alpha' e^{i\theta}) = (\alpha' + f' i \alpha' e^{i\theta} + f i \alpha'' e^{i\theta} - f \theta' \alpha' e^{i\theta}, \alpha' e^{i\theta})$$

$$\sigma' (i \gamma', i \alpha' e^{i\theta}) = (\alpha', \alpha' e^{i\theta}) + 0 - f k_0 - f \theta'$$

$$\sigma' (i \gamma', -i \gamma' e^{-i\phi}) = \cos \theta - f (k_0 + \theta')$$

(\*) Outra maneira de provar esta fórmula é assim:

Em lugar de tomar o ângulo  $\theta$  da frente saliente respeito à normal, toma-se  $\beta$  respeito a um eixo fixo: tem-se

$$E + (\pi - \beta) + \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = \pi \Rightarrow \frac{dE}{ds} - \frac{d\beta}{ds} + \frac{d\theta}{ds} = 0 \Rightarrow k_0 + \theta' = \frac{d\beta}{ds}$$

$$\beta + (\pi - E) + \left( \frac{\pi}{2} + \phi \right) = \pi \Rightarrow \frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{dE}{d\sigma} + \frac{d\phi}{d\sigma} = 0 \Rightarrow -\phi' + \phi_1' = \frac{d\beta}{d\sigma}$$

}  $\Rightarrow (3)$

$$(4) -\sigma' \cos \theta = \cos \theta - f(k_0 + \theta')$$

e usando (3)

$$(5) \cos \theta = \frac{d\sigma}{ds} \left[ f \left( k_1 - \frac{d\theta}{d\sigma} \right) - \cos \theta \right]$$

Estas formulas correspondem ao lema 2.3 de Sinai(S1) corrigida em lema 3 de (B2) e são fundamentais para a construção das fibras contratoras e dispersoras no caso ergódico. Mais precisamente, de (3) e (4) resulta:

$$(6) \frac{1}{\cos \theta} \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{k_1}{\cos \theta} + \frac{1}{-f + \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} (k_0 + \frac{d\theta}{d\sigma})}}$$

que permite deduzir imediatamente, se  $k < 0$  (bilhares dispersores):

$$\frac{d\theta}{ds} \leq 0 \text{ (frente decrescente)} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\sigma} \leq 0 \text{ (imagen da frente decrescente)}$$

$$\text{e } (-k)_{\min} \leq -\frac{d\theta}{d\sigma} \leq (-k)_{\max} + \frac{1}{f_{\min}}$$

Na mesma situação, (4) permite deduzir

$$-\frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} \geq 1 + f_{\min} (-k)_{\min} = \lambda_0 \text{ (def)}$$

Então, se  $\Gamma, T^{-1}\Gamma, \dots, T^{-k}\Gamma$  é uma seqüência de curvas suaves tais que  $T^{-k}\Gamma$  é decrescente (porém  $T^{-i}\Gamma$  é decrescente para todo  $0 \leq i \leq k$ , e definem-se os comprimentos do arco  $\Delta \subset M_1$

$$p(\Delta) = \int_{\Delta} \cos \theta ds, \quad s(\Delta) = \int_{\Delta} ds$$

$$\text{resulta } p(T^{-i}\Gamma) \leq \lambda_0^{-i} p(\Gamma)$$

$$s(T^{-i}\Gamma) \leq \frac{\lambda_0^{-(i-1)}}{\lambda_0^{-1}} s(\Gamma)$$

Segue da limitação uniforme da derivada  $-d\theta/d\sigma$  que o comprimento euclidiano de  $\Delta$  no  $(s, \theta)$ -plano é equivalente ao  $s$ -comprimento (projeção sobre o eixo  $s$ ). E resulta natural buscar uma fibra expansora como uma curva  $\Gamma_e$  tal que  $T^{-1}\Gamma_e, T^{-2}\Gamma_e$  é uma seqüência de fibras decrescentes.

A construção da fibra em  $x$  se faz por aproximações sucessivas (Metodo Hadamard-Perron). Se  $\Gamma_e^0(y)$  é a solução de  $\frac{d\theta}{ds} = k(s)$



num certo intervalo, (usando (\*)) observa-se que corresponde a uma frente refletida plana),  $\Gamma_e^k(x)$  é a curva  $T^k(\Gamma_e^0(T^{-k}x))$  que cumpre a condição de ter suas iteradas para trás decrescentes (por ser iteradas para frente de  $\Gamma_e^0(T^{-k}x)$ ).

Na mesma forma constroem-se curvas "pre-contratoras".

As complexidades da demonstração surgem quando estuda-se a suavidade dessas curvas, seus comprimentos quando  $x$  aproxima-se as curvas de discontinuidade de  $T$ , é obviamente, quando utiliza-se a existência de estas fibras locais para deduzir propriedades ergódicas.

O propósito dos comentários que seguem á fórmula (5) é dar uma explicação "intuitiva" de sua importância. Neste trabalho as fórmulas (3) e (5) usam-se em um contexto muito mais formal no seguinte capítulo.

## 2. FORMAS QUADRÁTICAS EM BILHARES

(A). Dada uma variedade  $M$ ,  $B:TM \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma quadrática em  $M$  se  $B_x = B_{T_x M}$  é uma forma quadrática no sentido algébrico.

$B$  é não degenerada se a matriz associada a  $B_x$  para cada  $x \in M$  não tem valores próprios nulos e tem valores próprios negativos e positivos.  $B$  é positiva ( $B > 0$ ) se  $B_x v > 0$  para todo  $v \in T_x M$ ,  $v \neq 0$  e todo  $x \in M$ .

Se  $f$  é um difeomorfismo e  $B$  uma forma quadrática em  $M$ , denota-se por  $f^{\#}B$  ("pull-back" de  $B$  por  $f$ ) a forma quadrática definida por  $(f^{\#}B)_x u = B_{f(x)}(f_x u)$  para todo  $u \in T_x M$ .

Normalmente não se escrevem os pontos de  $M$  onde aplicam-se as formas ou os operadores derivadas.

Lewowicz (L1) provou que se  $f$  é um  $C^r$ -difeomorfismo,  $r \geq 1$  em uma variedade compacta  $M$ , então  $f$  é Anosov se e somente se existe uma forma quadrática contínua não degenerada,  $B:TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f^{\#}B - B > 0$ . Ainda mais, no mesmo trabalho é demonstrado que a existência de uma função (de Liapunov)  $V:M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e que cumpre certas condições relacionadas com a hiperbolicidade de  $f$

( $V(x, \exp_x v) < 0$ ,  $v \in S_x$ , por exemplo), tal que para algum  $a > 0$ ,  $\bar{V}(x, y) = V(f(x), f(y)) - V(x, y) > 0$  se  $x, y \in M$  e  $0 < \text{dist}(x, y) \leq a$ , é suficiente para que  $f$  seja topologicamente estável. (Outras aplicações do mesmo método em (L2), (L4)).

Em um sentido laxo as formas de Liapunov são os primeiros termos do desenvolvimento de Taylor das funções de Liapunov:

$$V(x, y) = B_x(\exp_x^{-1} y - x) + b(x, y) \text{ com } b(x, y) \|y - x\|^{-2} \rightarrow 0 \text{ se } y \rightarrow x$$

é a diferença de uma função de Liapunov que permite demonstrar a estabilidade estrutural do difeomorfismo de Anosov  $f$ .

O problema nos bilhares é que a aplicação  $T$  induzida pelas sucessivas batidas não está definida nem é contínua em toda uma variedade compacta. Por isto é necessário trabalhar com conjuntos mais gerais, dando resultados mais fracos do que no caso compacto, mas relacionados com propriedades ergódicas da função  $T$ .

No caso de difeomorfismos em que não se tem hiperbolicidade Lewowicz e Lima de Sá (L3) consideram funções de Liapunov com termos quadráticos degenerados em conjuntos de medida nula para provar que  $f$  é Bernouilli, via o estudo da região de Pesin. A motivação principal desta Tesis foi aplicar um resultado desse tipo aos bilhares e tentar obter algumas condições abertas que aseguraram propriedades ergódicas em bilhares focalizadores.

(B).  $x \in M$  é um ponto regular de  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo se existem números  $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \dots > \lambda_m(x)$ . é uma descomposição

$T_x M = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \dots \oplus E_m(x)$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)_x v\| = \lambda_j(x) \quad \text{para todo } 0 \neq v \in E_j(x) \text{ e todo } 1 \leq j \leq m$$

Demonstra-se que para cada  $x$  os números (expoentes de Liapunov) e a descomposição em espaços próprios de  $f$  são únicos.

Oseledec (O1) demonstrou o nomeado teorema multiplicativo ergódico, um resultado mais geral que o seguinte.

Teorema (Oseledec). Sejam:  $X$  variedade compacta con probabilidade  $\nu$ ,

$Y \subset X$ ,  $\nu(Y)=1$ ,  $f:Y \rightarrow X$ ,  $f$  preserva  $\nu$ ,  $Z = \bigcap_{r=-\infty}^{+\infty} f^r Y$ ,  $f$  difeomorfismo sobre  $Z$ ,  $\log^+ \|(f^{-1})^n\| \in L^1(Z, \nu)$  onde  $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$ .

Então o conjunto dos pontos regulares de  $f$  tem  $\nu$ -medida um.

A condição sobre  $\|f'\|$  é necessaria para aplicar o teorema de Birkhoff-Khinchin.

A região de Pesin de  $f$  ( $\Sigma(f)$ ) é o conjunto dos pontos regulares que nao têm expoentes de Liapunov nulos.

Seja agora  $M$  com uma métrica riemanniana e  $\nu$  gerada por uma forma de volume

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\},$$

os conjuntos estável e instável para  $x$ . Para cada ponto regular, sejam

$$E^s(x) = \bigoplus_{\lambda_j(x) < 0} E_j(x) \quad E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_j(x) > 0} E_j(x)$$

$$\text{Se } x \in \Sigma(f) \quad T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

Teorema (Pesin (P1)). Nas condições do enunciado de acima e definições posteriores e  $f \in C^2$ , então  $T_x W^s(x) = E^s(x)$ ,  $T_x W^u(x) = E^u(x)$ .

Se  $\nu(\Sigma(f)) > 0$  então existem boreleanos disjuntos  $\Sigma_k^m$ ,

$m=1, \dots$   $1 \leq k \leq k_m$  que cobrem q.t.  $\Sigma(f)$  e tais que

a)  $f(\Sigma_k^m) = \Sigma_{k+1}^m$   $1 \leq k \leq k_m - 1$ ,  $f(\Sigma_{k_m}^m) = \Sigma_1^m$

b)  $x, y \in \Sigma_k^m$  implica  $W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Sigma_k^m$

c) para todo  $x \in \Sigma_k^m$  q.t. ponto de  $W^s(x)$  (ou  $W^u(x)$ ) pertence a  $\Sigma_k^m$

d)  $f$  é ergódica em  $\bigcup_k \Sigma_k^m$  para todo  $m \geq 1$

e)  $f|_{\Sigma_k^m}$  é Bernouilli para todo  $m \geq 1$

Sobre todos estos teoremas e definições pode-se consultar, além dos artigos originais citados, o livro de Mañé, cap IV (M1)

A demonstração do teorema seguinte (feita no anexo deste trabalho) esta sugerida no artigo citado de Lewowicz e Lima de Sá.

Teorema 2. Sejam,  $f: H \rightarrow H$ ,  $C^r$ -difeomorfismos,  $r \geq 1$ ,  $\nu$  medida invariante sob  $f$ ;  $H = H_1 \setminus K$ ,  $H_1$  variedade compacta de dimensão 2,  $\nu(K) = 0$ , tais que  $\log^+ \|(f^{+1})'\| \in L^1(H, \nu)$

Sejam,  $B: TH_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma quadrática limitada em  $TH_1$ , contínua e não degenerada em  $TH$  tal que  $P_x = (f^{\#} B - B)_x$  é definida positiva para todo  $x \in H$ , e

$$S_x = \{u \in T_x H: B((f^n)'\cdot u) < 0, n \geq 0\}$$

$$U_x = \{u \in T_x H: B((f^n)'\cdot u) > 0, n \leq 0\}$$

Então  $\nu(\Sigma(f)) = 1$ , e os espaços próprios de  $f$  em  $x$  são  $U_x$  e  $S_x$ .

O teorema de Pesin destaca a importancia deste teorema pois prova a hiperbolicidade não uniforme do sistema e assegura a decomposição de  $H$  em um conjunto numerable de componentes ergódicas para  $f$ . O estudo do número de componentes ergódicas e dos tipos de uniformidade que possuem verificar os conjuntos estável e inestável é o caminho natural para aprofundar o conhecimento das propriedades ergódicas.

Observe-se também que o comportamento assintótico de  $B$  (definição de  $S_x, U_x$ ) permite descobrir a existência de subespaços (próprios

de  $T$ ) associados pelo teorema de Pesin a os conjuntos estável e inestável q.t.  $x \in H$ .

(C). A seção C do capítulo anterior mostra que para aplicar o Teorema 2 só devem-se construir formas  $B$  com as propriedades indicadas. Ou seja formas que para as curvas fronteira dos bilhares que se indicam, e  $f$  a transformação  $T: H \rightarrow H$ ,  $H = M_1 \setminus K$ ,  $\mathcal{V}(K) = \emptyset$ , estão nas condições do teorema.

Para definir uma forma  $B$  em  $TH$  devem-se considerar curvas  $(\alpha(s(t)), v(s(t)))$  em  $H$  tais que para  $t=0$  passam por  $x \in H$ , e a cada vetor tangente  $u = \overline{(\alpha, v)}|_{t=0}$  (derivada respeito a  $t$ ) fazer-le corresponder o número  $B_x u$ . As curvas a considerar são como as da seção C cap 1, excepto que o comprimento de arco  $s$  na fronteira do bilhar depende do parâmetro  $t$  para assim poder gerar todas as curvas diferenciáveis em  $H$  por  $x$ .

Em primeiro lugar consideram-se bilhares com componentes regulares da fronteira de curvatura negativa ou nula (bilhares quasi-dispersores). O análise deste caso é útil pois permite entender melhor o caso seguinte, mais geral.

Se  $B_x u = (\dot{\alpha}_0, iv_0)(\dot{v}_0, iv_0)$  resulta  
 $B_x u = (\alpha'_0 \dot{s}_0, -\alpha'_0 e^{i\theta_0})(\dot{s}_0 \alpha''_0 e^{i\theta_0} - \dot{\theta}_0 \dot{s}_0 \alpha'_0 e^{i\theta_0}, -\alpha'_0 e^{i\theta_0}) =$   
 $= -\dot{s}_0^2 \cos \theta_0 (k_0 + \dot{\theta}_0)$ . Esta expressão pode resultar mais clara no caso de se escrever na linguagem do (\*) do capítulo 1, pois tem-se  
 $-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cos \theta_0 \frac{d\beta}{ds} = -\cos \theta_0 \frac{ds}{dt} \frac{d\beta}{dt}$  onde  $\left\{\frac{ds}{dt}, \frac{d\beta}{dt}\right\}$  é uma base se do espaço tangente quando parametriza-se a superfície  $\tilde{M}_1$ , por  $(s, \beta)$ . Assim considerada a não degeneração da forma resulta evidente pois é do tipo

$ax_1 x_2 = \frac{a}{4} [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2]$  com valores próprios  $\frac{a}{2}, \frac{-a}{2}$  e vetores próprios  $(1, -1), (1, 1)$  respectivamente.

Para calcular  $(T^{\#}B)_x u = B_{Tx}(T'_x u)$  deve-se aplicar  $B$  ao vetor tangente em  $Tx$  à curva  $(\gamma(\sigma(s(t))), w(\sigma(s(t)))) = T(\alpha(s(t)), v(s(t)))$ .

Porém  $T^{\#}B$  tem a mesma forma que  $B$ , mas aparece a derivada  $\sigma'$  do comprimento de arco na imagem, em cada derivada da definição de  $B$ :

$(T^{\#}B)_x u = -(\dot{s}_0 \sigma'_0)^2 \cos \delta'_0 (k_1 + \delta'_0)$ . Assim, sem escrever os sub índices e usando (3) e (5) do cap. 1,

$$P_x u = (T^{\#}B - B)_x u = -\dot{s}^2 [\sigma'^2 \cos \delta (k_1 + \delta') - \cos \theta (k_0 + \theta')] = \\ = (\dot{s} \sigma')^2 [-2k_1 \cos \delta + f(k_1 - \delta')^2] \text{ que é definida positiva para bordes dispersores ou neutros } (k \leq 0) \text{ a menos de conjuntos de } \nu\text{-medida nula em } H.$$

Nota: Se  $k_1 = 0$ , só cumpre-se  $P_x \geq 0$ . Mas isto é suficiente se quasi toda trajetória bate em componentes não neutras em tempo finito; ou seja, para quasi todo  $x \in H$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\Pi(T^k x)$  pertence a uma componente não neutra. Esta hipótese permite aplicar uma versão levemente modificada do teorema. 2, ( $P_x > 0$  "eventualmente").

Esta nota é válida nas seções D e E deste capítulo.

(D.) No caso geral dos bilhares com componentes regulares da fronteira com qualquer curvatura  $C^2$  veram-se dois tipos de formas. Em primeiro lugar, seja (sem escrever os subíndices)

$$B_x u = f(\dot{v}, iv)^2 + 2(\dot{\alpha}, iv)(\dot{v}, iv).$$

Utilizando os calculos anteriores

$$B_x u = f \dot{s}^2 (k_0 + \theta')^2 - 2 \dot{s}^2 \cos \theta (k_0 + \theta') = \dot{s}^2 (k_0 + \theta') [f(k_0 + \theta') - 2 \cos \theta]$$

Novamente, no linguagem de (\*) do Cap 1 tem-se

$B_x u = f \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 - 2 \cos \theta \frac{ds}{dt} \frac{d\beta}{dt}$  ou seja uma forma do tipo  $f x_2^2 - a x_1 x_2$  com valores próprios  $(f \pm \sqrt{f^2 + a^2})/2$  e vetores próprios  $(+1, -(f + \sqrt{f^2 + a^2})/a)$ , respectivamente. Observe-se que estas não são as direções estáveis e inestáveis, pois elas vem dadas por o comportamento assintótico de  $B$  (ver definições de  $S_x, U_x$ ).

As mesmas condições que antes permitem escrever

$(f^{\#}B)_x u = (\dot{s} \sigma')^2 (k_1 + \delta') [f_1(k_1 + \delta') - 2 \cos \delta]$  onde  $f_1$  é o tempo transcurrido entre  $T_x$  e  $T_x^2$ . Utilizando novamente (3) e (5) do capítulo 1, resulta

$$(1) P_x u = (\dot{s} \sigma')^2 [(f_1 + f) \delta'^2 - 2k_1 (f - f_1) \delta' + k_1^2 (f_1 + f) - 4k_1 \cos \delta]$$

Se  $k_1 = 0$ ,  $P_x u = \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 (f_1 + f) \Rightarrow P_x > 0$

Se  $k_1 < 0$ , o discriminante do termo [...] em (1), como expressão de 2<sup>do</sup> grau em  $\phi'$  é do signo de

$$k_1(f-f_1)^2 - (f_1+f) [k_1^2(f_1+f) - 4k_1 \cos \phi] = -4k_1^2 f f_1 + 4k_1(f_1+f) \cos \phi < 0$$

Se  $k_1 > 0$ , buscam-se condições na distancia  $f$  entre os batimentos na fronteira para que (1) seja positivo. Ver Bunimovich (B3), pp 296 e 302; Wojtkowski (W1). Se  $L_1$  é o tempo que a trajetória está no

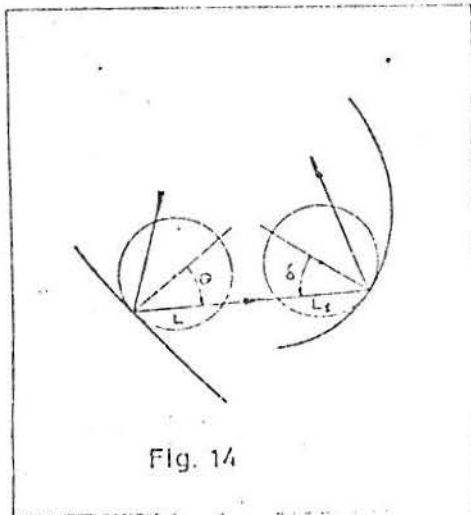


Fig. 14

círculo oscultriz de radio  $R_1 = 1/k_1$  antes (ou depois) do batimento, observe-se na figura 14 que  $\cos \phi = \frac{L_1 k_1}{2}$ , e o estudo do signo do discriminante anterior conduce a  $2k_1^2 [-2ff_1 + L_1(f_1+f)] < 0$ . Ou seja que se a trajetória bate em uma componente focalizadora,  $P_x > 0$  se  $L_1(f_1+f) < 2ff_1$ .

(E). Seja agora  $B_x u = L(\dot{v}, iv)^2 + 2(\alpha, iv)(\dot{v}, iv)$  onde, para

$$k \leq 0, L=0$$

$k > 0$ ,  $L$  é o tempo que a trajetória esta no círculo oscultriz antes (ou depois) do batimento.

Nomina-se círculo de semicurvatura ao círculo que tem radio mitad que o círculo oscultriz, centro dentro da superficie do bilhar, tangente à curva.

Os cálculos anteriores permitem obter

$$B_x u = \dot{s}^2 (k_0 + \theta') [L(k_0 + \theta') - 2 \cos \theta] \text{ e}$$

$$(f \# B)_x u = (\dot{s} \sigma')^2 (k_1 + \phi') [L_1(k_1 + \phi') - 2 \cos \phi]$$

Usando (3) e (5) do cap. 1., tem-se  $P_x u =$

$$= (\dot{s} \sigma')^2 \{ (k_1 + \phi') [L_1(k_1 + \phi') - 2 \cos \phi] - (k_1 - \phi') [L(k_1 - \phi') - 2(f(k_1 - \phi') - \cos \theta)] \}$$

$$= (\dot{s} \sigma')^2 \{ \phi'^2 (L_1 - L + 2f) + 2k_1 \phi' (L_1 + L - 2f) + k_1^2 (L_1 - L + 2f) - 4k_1 \cos \phi \}$$

Para  $k_1 \leq 0$  a forma é positiva se  $2f - L > 0$  que implica que as componentes da fronteira são "suficientemente separadas": as componentes rectilíneas ou dispersoras não têm interseção com os círculos de semicurvatura se  $k_0 > 0$ . Se  $k_0 \leq 0$  não há condição adicional.

Para  $k_1 > 0$  deve ser negativo o discriminante do polinômio de 2<sup>do</sup> grau em  $\phi'$ :

$$(4LL_1 - 8L_1 f) k_1^2 + 4k_1 \cos \phi (L_1 - L + 2f) = k_1^2 L_1 (2L - 4f + L_1 + 2f - L) < 0 \text{ se } L + L_1 < 2f.$$

### 3. CONDIÇÕES NAS FRONTEIRAS E EXEMPLOS

Analisa-se aqui, por separado os casos das seções D e E do capítulo anterior.

(A.) No caso da forma  $B_x u = f(\dot{v}, iv)^2 + 2(\dot{z}, iv)(\dot{v}, iv)$  as condições do teorema 2 verificam-se sempre se  $\Pi(Tx)$  pertence a uma componente neutra ou dispersora. Se  $\Pi(Tx)$  pertence a uma componente focalizadora uma condição suficiente para estar nas condições do teorema 2 é

$$(1) L_1(f_1 + f) < 2ff_1.$$

Neste caso, se as trajetórias verificam

$$(2) L_1 < f, f_1$$

tem-se (se, por exemplo  $f \leq f_1$ ),  $2ff_1 > 2E_1 f_1 \geq L_1(f + f_1)$  e assim (1) cumpre-se com apenas supor que os círculos osculatrizes de cada componente focalizadora não cortam outra componente. Porém o ângulo interior de contato de duas componentes focalizadoras deve ser maior que  $\pi$ . O ângulo de contato entre componentes dispersoras ou neutras com focalizadoras deve ser maior ou igual a  $\pi$ .

Mas (2) não verifica-se em geral se os batimentos são numa mesma

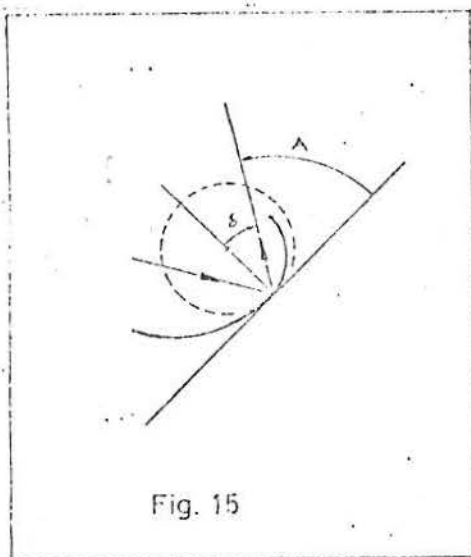


Fig. 15

componente focalizadora e a trajetória é rasante. (Recordar que se  $k(s)$  é monótona o círculo osculatriz corta a curva). Então considera-se a curva em um entorno do ponto de batimento, parametrizada por

$$\gamma(A) = r(A) \gamma'(0) e^{iA}, \quad r(0) = 0$$

$$f_1 = r(A) = \dot{r}(0)A + \ddot{r}(0)A^2/2 + \ddot{\ddot{r}}(0)A^3/6 + \dots$$

$$f = -r(-A) = \dot{r}(0)A - \ddot{r}(0)A^2/2 + \ddot{\ddot{r}}(0)A^3/6 + \dots$$

$$A - \delta = \pi/2, \quad L_1 = 2R \operatorname{sen} A = \frac{2}{k(0)} (A - A^3/6 + \dots)$$

A condição (1) escreve-se  $\frac{2}{k_1} \operatorname{sen} A (r(A) - r(-A)) < -2r(A)r(-A)$ .

Se a curva é simétrica,  $r(A) = -r(-A)$ , obtém-se a condição simples

$$(3) \quad \operatorname{sen} A < \frac{r(A)k(0)}{2}$$

No caso geral, usando os desenvolvimentos



$$\frac{2}{k_1} (\Lambda - \Lambda^3/6 \dots) (2\dot{r}(0)\Lambda + \ddot{r}(0)\Lambda^3/3 \dots) < 2 \left[ \dot{r}^2(0)\Lambda^2 + \Lambda^4 \left( \frac{\dot{r}(0)\ddot{r}(0)}{3} - \frac{\ddot{r}^2(0)}{4} \right) \dots \right]$$

$$\frac{2\dot{r}(0)\Lambda^2 + \Lambda^4 \left( \frac{-\dot{r}(0) + \ddot{r}(0)}{3k_1} \right) \dots < \dot{r}^2(0)\Lambda^2 + \Lambda^4 \left( \frac{\dot{r}(0)\ddot{r}(0)}{3} - \frac{\ddot{r}^2(0)}{4} \right) \dots,$$

Como  $\dot{r}(0) = 2/k_1$  (para as relações entre as derivadas de  $r$  e as derivadas de  $k$ , ver apêndice), para  $\Lambda$  pequena tem-se

$$\frac{\ddot{r}^2(0)}{4} < \frac{2}{3k_1} + \frac{r(0)}{3k_1} \implies 3k\ddot{k} < 2\dot{k}^2$$

Sustituindo por as derivadas respeito a  $s$

$$(4) \quad 3k\ddot{k} < 4\dot{k}^2 \Leftrightarrow \frac{d^2(R^{1/3})}{ds^2} > 0$$

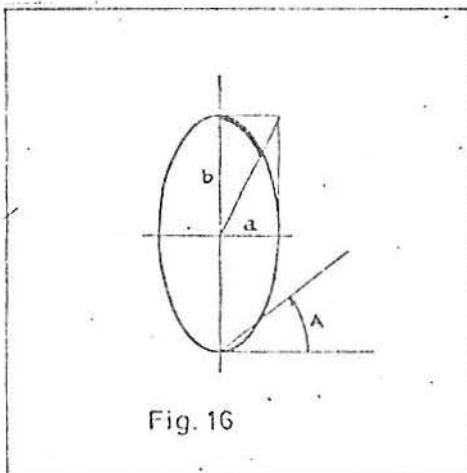
onde  $R=1/k$  é o radio de curvatura.

Observe-se que (3) é uma condição válida em um ponto, para as trajetórias que vem de qualquer ponto da mesma componente focalizadora, mas sendo (1) uma condição aberta, sua validade é em algum entorno do ponto para trajetórias compridas (cf.(2)). Enquanto (4) é uma condição aberta valida em curvas  $C^4$ , mas só garante a positividade de  $P_x$  para trajetórias pertas da tangente que é a situação mais difícil de elucidar. Assim, curvas que verificam com simultaneidade as condições (3) e (4) dam famílias  $C^4$  abertas que cumprem (1) para batimentos sucessivas na mesma componente focalizadora.

Seja  $r(\Lambda)=A$ ,  $-A_0 < \Lambda < A_0 > 0$ , que tem

$$k(\Lambda) = \frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}, \quad k'(\Lambda) = \frac{-\theta^3-4\theta}{(\theta^2+1)^3}, \quad k''(\Lambda) = \frac{3\theta^4+17\theta^2-4}{(\theta^2+1)^{9/2}}$$

e verifica (3) e (4).



No caso da elipse da fig 16

$$r(\Lambda) = \frac{2a^2 b \operatorname{tg} \Lambda}{(b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \Lambda) \cos \Lambda} \quad -\frac{\pi}{2} < \Lambda < \frac{\pi}{2}$$

$$k(0) = \frac{b}{a^2} \quad \text{e a condição (3) e equivalente}$$

a  $a^2 < b^2$  ou seja que  $\Lambda=0$  corresponde ao vertice do eixo maior. Se agora parametriza-se a elipse na forma usual  $x=acost$   $y=bsent$ .

$0 \leq t < 2\pi$  resulta  $k(t) = \frac{ab}{D^{3/2}}$ ,  $C_1 R^{1/3} = D^{1/2}$ ,

$C_2 \frac{d^2 R^{1/3}}{ds^2} = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 \cos^4 t - a^2 \sin^4 t + (b^2 - a^2) \sin^2 t \cos^2 t)}{D^2}$

$C_j$  constantes reais  $D = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$

Assim (4) cumpre-se para  $b^2 > a^2$  se  $b^2 - (b^2 + a^2) \sin^2 t < 0$  ou

seja  $\sin^2 t > \frac{b^2}{b^2 + a^2}$  que corresponde,

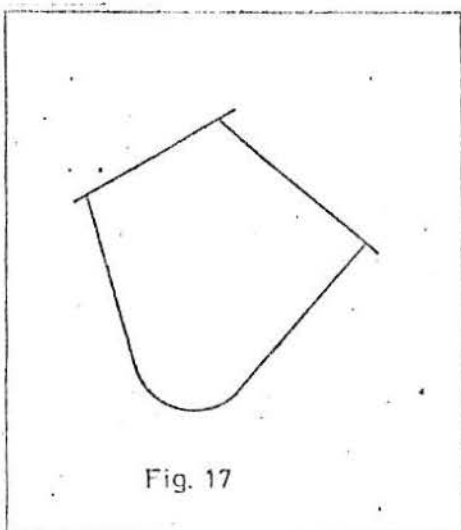


Fig. 17

no primeiro quadrante, a parte da curva sobremarcada na fig. 16.

Estas considerações permitem construir bilhares com região de Pesin de medida um, como na figura 17, onde a parte curva é do tipo dos exemplos anteriores.

(B). Se  $B_x u = L(\dot{v}, iv)^2 + 2(\alpha, iv)(\dot{v}, iv)$ , condições suficientes para que seja válido o teorema 2 forem dadas para os casos de componentes neutras e dispersoras. No caso focalizador a condição

(5)  $L + L_1 < 2f$  é verificada quando os batimentos são entre componentes não neutras distintas ( $k_0, k_1 \neq 0$ ) se os círculos de semicurvatura são disjuntos.

Quando os batimentos são em uma mesma componente focalizadora.

$\gamma(s)$  a condição (5) é equivalente ((W1), Theor. 3) a

(6)  $2k'^2 < kk'' \iff R''(s) = \frac{d^2 R}{ds^2} < 0$

Efetivamente, se o sistema de coordenadas  $Oxy$  é como na fig. 18 (a

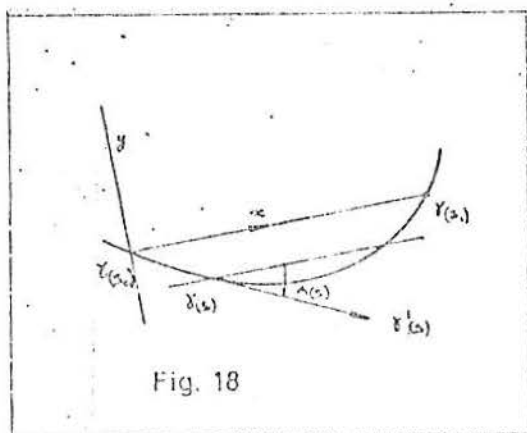


Fig. 18

trajetoria, em  $Ox$ ), o arco  $\gamma(s_0), \gamma(s_1)$

tem  $y(s) \leq 0$  e se  $A$  é o ângulo do eixo

$Ox$  com  $\gamma'(s) = (\cos A, \sin A)$

$$f = \int_{s_0}^{s_1} x'(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} \cos A ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d \sin A}{ds} \frac{ds}{dA} ds =$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} \frac{d \sin A}{ds} R(s) ds =$$

$$= R(s_1)\text{sen}A(s_1) - R(s_0)\text{sen}A(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} \text{sen}A(s)R'(s)ds.$$

$$\text{Mas } A(s_0) + \theta = \frac{\pi}{2}, \quad A(s_1) - \theta = -\frac{\pi}{2} \implies f = (L_1 + L) \frac{1}{2} - \int_{s_0}^{s_1} \text{sen}A(s)R'(s)ds \implies$$

$$f - \frac{L+L_1}{2} = - \int_{s_0}^{s_1} y'(s)R'(s)ds =$$

$$= -y(s_1)R'(s_1) + y(s_0)R'(s_0) + \int_{s_0}^{s_1} y(s)R''(s)ds =$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} y(s)R''(s)ds. \text{ Assim, se } R''(s) < 0 \implies 2f > L+L_1.$$

Inversamente, se  $R''(\bar{s}) > 0$  para algum  $s$ , seja  $s_0, s_1$  suficientemente perto de  $s$ . Tem-se  $2f < L+L_1$ .

A expressão (6) tem a vantagem de ser global. É verificada por qualquer arco de epicicloide, hipocicloide e cicloide. Em particular por a cardioide  $r(A) = 1 + \cos A$ .

No caso da elipse  $x = a \cos t, y = b \sin t$   $-\pi/2 \leq t < 3\pi/2$

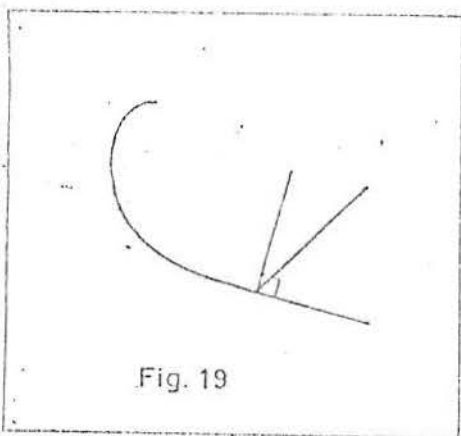
$$R''(s) = \frac{3(a^2 - b^2)\cos 2t}{D^{1/2}} < 0 \quad \text{quando } b^2 > a^2 \text{ se } \cos 2t > 0$$

$$-\pi/4 < t < \pi/4 \quad \text{ou} \quad 3\pi/4 < t < 5\pi/4$$

que é uma parte da elipse disjunta com a indicada na seção anterior.

(C). Em lugar de T pode-se considerar a transformação  $S: H_0 \rightarrow H_0$ .

$H_0$  é o conjunto dos  $x = (q, v) \in H$  tais que  $q \in \partial Q_i$  onde  $\partial Q_i$  é uma componente não neutra ( $k_i = 0$ ) de  $Q$ ;  $Sx = y$  onde  $y = T^k x$  com  $k$  mínimo tal que  $T^k x \in H_0$ . Isto tem sentido se quasi toda trajetória passa por  $H_0$  em tempo finito que é uma hipótese adicional verificada em todos os exemplos simples que interesam. Assim, supondo que  $f$  é a distancia entre os batimentos em duas componentes não neutras, ignorando os batimentos em componentes rectilíneas, as condições (1) e



(5) parecem seguir sendo suficientes para que os bilhares tenham região de Pesin de medida um. Mas agora podem-se juntar uma componente focalizadora com uma neutra com ângulo interior maior que  $\pi/2$ . Esta condição é necessária para evitar que S transforme pontos de uma componente focalizadora em pontos cercanos da mesma componente após bater numa componente neutra.

C O N C L U S Õ E S - Neste trabalho demonstra-se a existencia de dois tipos de bilhares com região de Pesin de medida um, com condições abertas nas curvaturas o que permite realizar pequenas modificações e manter as propriedades ergódicas.

As componentes  $C^2$  da fronteira podem ser de qualquer forma, com as seguintes condições suficientes adicionais (não obrigatoriamente necessárias).

1. No caso A deste capítulo as componentes focalizadoras cumprem (1) (com as observações das expressões (3) e (4) para os tipos de curva  $C^4$  que servem), os círculos osculatrizes das componentes focalizadoras não têm interseção com outras componentes não adjacentes, as componentes focalizadoras formam ângulo interior  $> \pi$ ; componentes focalizadoras e dispersoras formam ângulo interior  $\geq \pi$ ; componentes focalizadoras e neutras suficientemente compridas formam ângulo interior  $> \pi/2$ .

2. No caso B, as componentes focalizadoras  $C^4$  cumprem (6), os círculos de semicurvatura de componentes focalizadoras são disjuntos, as componentes com  $k \leq 0$  não cortam os círculos de semicurvatura das componentes focalizadoras; as condições para componentes adjacentes são as mesmas que em 1.

Os bilhares do tipo 2 são os estudados por Wojtkowski, mas a amplitude da classe 1 demonstra que sua conjectura de que "tipically" a condição (6) "é em algum sentido uma condição necessária para a não anulação dos expoentes de Liapunov" não é certa.

A P E N D I C E

$$\alpha = \alpha(s) \quad \alpha''(s) = k(s) i \alpha'(s)$$

$$\alpha = \overline{\alpha}(A) = r(A) e^{iA} \quad r(0) = 0$$

. derivada respeito ao ângulo A

$$k(A) = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}(0) = \frac{2}{k(0)}$$

$$\dot{k}(0) = \frac{-3\dot{r}^3(0)\ddot{r}(0)}{\dot{r}^5(0)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}(0) = \frac{-4\dot{k}(0)}{3k^2(0)}$$

$$\ddot{k}(0) = \frac{k(0)}{8} \left( \frac{8\ddot{k}(0)}{k^3(0)} - \frac{16}{k^2(0)} + \frac{16\dot{k}^2(0)}{k^4(0)} \right) \Rightarrow \ddot{r}(0) = \frac{-\dot{k}(0)}{k^2(0)} - \frac{2}{k(0)} + \frac{2\dot{k}^2(0)}{k^3(0)}$$

$$ds = \sqrt{r^2(A) + \dot{r}^2(A)} dA \quad ; \quad \text{em } A=0, \quad k > 0, \quad \frac{ds}{dA} = \dot{r}(0)$$

$$\frac{d^2s}{dA^2} = \frac{r\dot{r} + \dot{r}\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{1/2}} \quad ; \quad \text{em } A=0, \quad k > 0 \quad \frac{d^2s}{dA^2} = \ddot{r}(0)$$

$$\dot{k}(0) = \frac{2k'(0)}{k(0)}$$

$$\ddot{k}(0) = \frac{4k''(0)}{k^2(0)} - \frac{8}{3} \frac{k'^2(0)}{k^3(0)}$$

A N E X O

As demonstrações dos dois lemas seguintes estão sugeridas em (L3).

Lema 1 Sejam:  $f: H \rightarrow H$   $C^r$ -difeomorfismo,  $r \geq 1$ ;  $\nu$  medida invariante sob  $f$ ;  $H = H_1 \setminus K$ ,  $H_1$  variedade compacta de dimensão 2;  $\nu(K) = 0$ ;  $B: TH_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma quadrática limitada em  $TH_1$ , contínua e não degenerada em  $TH$  tal que  $P_x = (f^{\#}B - B)_x$  é definida positiva para todo  $x \in H$ .

Então  $\nu$ -q.t.x  $H$

$$S_x = \{u \in T_x H : B((f^n)'u) < 0, \quad n \geq 0\}$$

$$U_x = \{u \in T_x H : B((f^n)'u) > 0, \quad n \leq 0\}$$

são subespaços lineares unidimensionais de  $T_x H$  que dependem continuamente de  $x$ , e  $T_x H = S_x \oplus U_x$ .

Prova: Para  $n > 0$ , seja  $w_n \in T_{f^n(x)} H$  tal que  $B_{f^n(x)} w_n < 0$ . Como

$P_x > 0$ ,  $B_{f^{n-1}(x)}((f^{-1})'w_n) < B_{f^n(x)} w_n < 0$  e aplicando isso mesmo reiteradamente  $B_x((f^{-n})'w_n) < 0$ . Mas  $(f^{-n})'w_n$  tem parcial convergente a  $w_\infty \in T_x H$  com  $(f^{n_i})'w_{n_i}$  convergente a  $(f^{n_i})'w_\infty$ .

Se  $B((f^N)'w_\infty) \geq 0$  para algum  $N \geq 0$  seria  $B((f^{n_j})'w_\infty) > 0$  para  $n_j > N$  e a mesma desigualdade seria válida para os  $w$  de algum entorno de  $(f^{n_j})'w_\infty$ ; absurdo. Assim  $B((f^n)'w_\infty) < 0 \quad \forall n \geq 0$  e  $w_\infty \in S_x$ .

O mesmo é válido para os múltiplos de  $w_n$  e  $w$  pois  $B(\lambda v) = \lambda^2 B(v)$ ; portanto  $S_x$  contém um subespaço 1-dimensional. Idem para  $U_x$ .

Sejam agora  $u, v \in S_x$  vetores l.i. e  $D \subset H$  compacto tal que  $f^{n_k}(x) \in D$  para uma seqüência crescente  $\{n_k\}$ .  $D$  existe para q.t.x  $\in H$  pois se  $L \subset H_1$ , aberto,  $K \subset L$ ,  $\nu(L) > 0$ ,  $\nu(\{y \in H : f^n(y) \in H \setminus L \text{ para infinitos } n \geq 0\}) = \nu(H \setminus L)$  pelo teorema de recorrência de Poincaré.

Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(f^{n_k})'u\| = 0$ . Efetivamente como  $P > 0$  existem  $b, c$  tais que  $c\|w\|^2 \leq P_y w \leq b\|w\|^2$ ,  $c = \inf\{P_y u : \|u\| = 1\}$ ; por ser  $D$  compacto

$b, c$  podem ser escolhidos de tal modo que a relação anterior seja válida para  $w = (f^{n_k})'u$ ,  $u \in T_y H$ ,  $y = f^{n_k}(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Assim

$$B((f^m)'u) - B(u) = \sum_{i=0}^{m-1} P((f^i)'u) \geq c \sum_{k=1}^{n_N} \|(f^{n_k})'u\|^2$$

$n_N \leq m-1 \leq n_{N+1}$  e se  $\|(f^{n_k})'u\| \not\rightarrow 0$  seria  $B((f^m)'u) \rightarrow +\infty$  para  $m \rightarrow +\infty$ , uma contradição. Idem para  $v$ . Daí segue que

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(f^{n_k})'(\lambda u + \mu v)\| = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Isto implica  $B((f^n)'(\lambda u + \mu v)) < 0$  para todo  $n \geq 0$  pois se existe um  $N$  com  $B((f^N)'(\lambda u + \mu v)) \geq 0$  tem-se para  $n_k \geq N$

$$B((f^{n_k})'(\lambda u + \mu v)) > B((f^N)'(\lambda u + \mu v)) \geq 0, \text{ uma contradição com (1).}$$

Mas então, todo o subespaço gerado por  $u, v$  estaria em  $S_x \Rightarrow S_x = T_x H$ ; absurdo. O que implica que  $S_x$  e  $U_x$  são unidimensionais. Como  $f$  faz crescer os valores de  $B$ , tem-se que  $S_x \cap U_x = \{0_x\}$ .

Para deduzir a continuidade de  $S_x$  respeito a  $x$ , seja  $u_n \in S_{x_n}$ ,  $u_n \rightarrow u \in T_x H$ . Pela continuidade de  $B$  e a positividade de  $P$  (mesmos argumentos que para  $w_\infty$ ) resulta  $B((f^n)'u) < 0 \Rightarrow u \in S_x$ .

No lema seguinte necessita-se usar o teorema multiplicativo ergódico de Osedelec que assegura a existência dos expoentes de Liapunov e dos espaços próprios  $\nu$ -q.t. ponto; por isso aparece a condição em  $\log \|f'_x\|$  que é em realidade uma restrição do comportamento de  $f$  perto de  $K$ .

Lema 2 Além das hipóteses do lema 1,  $\log^+ \|(f^1)'_x\| \in L^1(\Pi, \nu)$

onde  $\log^+ s = \max\{0, \log s\}$ . Então, se  $R$  é a região de Pesin para  $f$ ,  $\nu(R) = 1$  e os espaços próprios de  $f$  em  $x$  são  $U_x, S_x$ .

Prova Sejam  $U_x, S_x$  como no lema anterior para todo  $x \in \Pi$  e  $D \subset \Pi$  compacto. Existe  $a > 0$  tal que  $P(u) > a B(u)$  para todo  $u \in U_x$ .

$x \in D$  pois caso contrário, para cada  $x$ , existiria  $u_n, \|u_n\| = 1$  com  $P(U_n) \leq \frac{1}{n} B(u_n)$  e para um ponto de acumulação  $u$  de  $u_n$  resultaria  $P(u) = 0$ ; absurdo. A compacidade assegura que a serve  $\forall x \in D$ .

Porém  $B(f'(u)) = B(u) + P(u) > (1+a)Bu$  e se  $f^{n_k}(x) \in D$  para uma sequência crescente  $\{n_k\}$  resulta

$$\begin{aligned} B((f^{n_k+1})'u) &> (1+a)B((f^{n_k})'u) > (1+a)B((f^{n_k-1+1})'u) > \\ &> (1+a)^2 B((f^{n_k-1})'u) \dots > (1+a)^k B(u) \end{aligned}$$



(O passo em que o fator  $(1+a)$  não muda de expoente poderia não existir, se  $n_k - n_{k-1} = 1$ ). Assim  $B((f^n)'u) > (1+a)^{N_n} B(u)$  onde

$$N_n = \text{card} \{ j : f^j(x) \in D, 0 \leq j \leq n-1 \} \leq n.$$

Por ser  $B$  limitada existe  $b > 0$  tal que  $|B(w)| \leq b \|w\|^2 \forall w \in TH$  ( $b = \max \{ |B(u)| : \|u\| = 1 \}$ ). Por tanto  $\|(f^n)'u\|^2 \geq \frac{1}{b} (1+a)^{N_n} B(u)$  para todo  $n \geq 0$  e, em consequência, como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{B(u)}{b} \right)^{1/n} = 1$ ,

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'u\| \geq \frac{1}{2} \log(1+a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n}{n}$$

Então, considerando a função característica  $X_D$  e aplicando o teorema de Birkhoff-Khinchin, resulta que existe  $\nu$ -q.t.ponto

$$\bar{X}_D(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_D(f^j(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(x)}{n} \quad \text{e como}$$

$$\nu(D) = \int_H X_D d\nu = \int_H \bar{X}_D d\nu \quad \text{temos que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(x)}{n} \text{ é positivo em}$$

$\bar{D}$  com  $\nu(\bar{D}) \geq \nu(D)$  pois  $0 \leq \bar{X}_D \leq 1$

Agora, se  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_i \in E_i(x)$  espaços próprios de  $f$  no ponto regular  $x$ , associado a expoente  $\lambda_1(x), \lambda_1(x) > \lambda_2(x)$  (Ver Cap 2.B),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'v\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log 2 \|(f^n)'v_1\| = \lambda_1(x).$$

Desta inequação e (2) deduce-se que o maior expoente de Liapunov é positivo em  $D$ . Como  $D$  pode ser tomado de medida tão próxima a 1 como se quiser, resulta que o maior expoente de Liapunov é positivo para um conjunto de medida 1. O mesmo raciocínio é válido para demonstrar a negatividade do menor expoente de Liapunov  $\nu$ -q.t.p.

A decomposição de  $T_x H$  em  $U_x, S_x$  coincide com a resultante da definição dos expoentes de Liapunov positivo e negativo, respectivamente, pois se  $w \in E_2(x)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'w\| < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \|(f^n)'w\| = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)'w\| = 0 \Rightarrow$$

$B((f^n)'w) < 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Isto último resultado de caráter limitado de  $B$  ( $B((f^n)'w) \leq b \|(f^n)'w\|^2 \Rightarrow B((f^n)'w) \leq 0$ ) e da positividade de  $P$ .

Por tanto  $E_2(x) \subset S_x$ . Ídem para  $E_1(x) \subset U_x$ , trabalhando com  $n \rightarrow -\infty$ .

R E F E R E N C I A S

- (A1)- ANOSOV, D.V.; SINAI, Ya.G.- Some smooth ergodic Systems. Russ. Math Sur. 22:5(1967) 103-67.
- (A2)- ARNOLD, V.I.; AVEZ, A.- Problèmes ergodiques de la Mécanique Classique. Gauthier - Villars, 1967.
- (A3)- ARNOLD, V.I. - Mathematical Methods of classical Mechanics. Springer Verlag 1978 (Ed. original 1974)
- (A4)- ABRAHAM, Ralph; MARSDEN, Jerrold E.- Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings. 1978.
- (B1)- BIRKHOFF, George D.- Dynamical Systems. A.M.S. Colloquium Publications, 1966 (Ed. original 1927).
- (B2)- BUNIMOVIC, L.A.-On billiards close to dispersing. Math. USSR. Sbornik Vol. 23 (1974) n° 1, 45-67.
- (B3)- BUNIMOVICH, L.A.- On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Commun Math. Phys. 65, 295-312 (1979).
- (B4)- BUNIMOVICH, L.A.-SINAI, Ya.G.-Markov Partitions of Dispersed billiards. Commun. Math. Phys. 78, 247-280 (1980).
- (B5)- BUNIMOVICH, L.A.-SINAI, Ya.G.-Statistical Properties of Lorentz Gas with Periodic Configuration of Scatterers. Commun Math.Phys. 78, 479-497 (1981).
- (C1)- CORNFELD, I.P., FOMIN, S.V., SINAI, Ya.G. -Ergodic Theory. Springer Verlag, 1982 (Ed. original 1980).
- (K1)- KATOK, A; STRELCYN, J.-M. in collaboration with LEDRAPPIER, F.; PRZYTYCKI, F.- Smooth maps with singularities. Invariant Manifolds, Entropy and Billiards. Université Paris-Nord. Prépublications Mathématiques N° 56 (1985). To be published in lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag.
- (G1)- GALLAVOTTI, Giovanni -Lectures on the billiards. Em Lecture Notes in Physics 38 Springer Verlag 1975. Dynamical Systems, Theory and Applications. Battelle Seattle 1974 Rencontres.
- (L1)- LEWOWICZ, Jorge -Lyapunov functions and topological Stability J. Diff. Eq. 38, 192-209 (1980).
- (L2)- LEWOWICZ, Jorge -Persistence in expansive Systems. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1983), 3, 567-578.
- (L3)- LEWOWICZ, Jorge ; LIMA DE SA, Eduardo -Analytical Models of Pseudo-Anosov Maps. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1986), 6, 385-392 .
- (L4)- LEWOWICZ, Jorge -Lyapunov Functions and Stability of Geodesic Flows. Lecture Notes in Mathematics, 1007 -Geometric Dynamics. Proceedings, Rio de Janeiro 1981.
- (L5)- LANG, Serge -Differential Manifolds. Adisson-Wesley 1972.
- (M1)- MAÑE, Ricardo -Introdução à teoria ergódica. IMPA 1983.
- (O1)- OSELEDEC, V.I. -A multiplicaire ergodic theorem. Lyapunov Characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 19 (1968) 197-231.
- (P1)- PESIN, Ya. B. -Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. Russ. Math. Sur, 32:4(1977) 55-112.
- (S1)- SINAI, Ya. G. -Dynamical Systems with Elastic Reflections. Russ. Math. Sur. 25:1 (1970) 137-189.
- (W1)- WOJTKOWSKI, Maciej -Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents. Commun Math. Phys. 105, 391-414 (1986).