Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

IDEAIS MAXIMAIS CÍCLICOS À ESQUERDA DA ÁLGEBRA DE WEYL $A_2(K)$

por

JOSÉ LUIZ DE OLIVEIRA FERREIRA

Porto Alegre, julho de 2004

Dissertação submetida por José Luiz de Oliveira Ferreira como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Dra. Cydara Cavedon Ripoll

Banca Examinadora:
Dra. Ada Maria de Souza Doering
Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero
Dr. Daniel Levcovitz (USP)

Data de Defesa: 02 de julho de 2004.

"Prezado Professor:

Sou sobrevivente de um campo de concentração.
Meus olhos viram o que nenhum homem deveria ver.
Câmaras de gás construídas por engenheiros formados.
Crianças envenenadas por médicos diplomados.
Recém-nascidos mortos por enfermeiras treinadas.
Mulheres e bebês fuzilados e queimados por graduados de colégios e universidades.
Assim, tenho minhas suspeitas sobre a Educação.
Meu pedido é: ajude seus alunos a tornarem-se humanos.
Seus esforços nunca deverão produzir monstros treinados ou psicopatas hábeis.
Ler, escrever e saber aritmética só são importantes
*se fizerem nossas crianças mais humanas."**

" O amor, o trabalho e o conhecimento são as fontes da nossa vida. Deveriam também governá-la."

Wilhelm Reich

* Texto encontrado após a Segunda Guerra Mundial, num campo de concentração nazista.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço, em primeiro lugar, ao programa de Pós-graduação em Matemática Pura da UFRGS, pela oportunidade que me foi dada;

Em especial, aos professores Artur Lopes e Ivan Pan, pelo lado humano e pelo estímulo;

Aos funcionários da Biblioteca de Matemática da UFRGS e, em particular, à Jane Camboim Penteado, por haverem me acolhido nos momentos difíceis;

Aos colegas da Pós-graduação e aos amigos que me apoiaram;

À Reolina Cardoso, por me ajudar a "colocar os pés no chão";

À minha orientadora, Cydara, pela dedicação à docência, à orientação e pela respondabilidade ímpares;

À minha família, pelo suporte necessário para estar aqui hoje;

E, finalmente, à minha companheira, Linda, que em todos os sentidos é uma verdadeira companheira.

RESUMO:

Neste trabalho, dado um corpo K de característica zero, discutimos a existência de ideais maximais da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n(K)$ gerados por operadores de ordem 1. Para a Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_1(K)$, apresentamos exemplos de ideais maximais cíclicos; para $n \geq 2$, entre especiais operadores de ordem um, nós caracterizamos aqueles que geram ideais maximais. Finalmente, para $n = 2$, mostramos que, para toda derivação simples da forma $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta \in K[X_1, X_2]$, existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tal que $\mathbb{A}_2 \cdot (d + \varepsilon X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2(K)$ e que este resultado é ótimo, no sentido de que a condição "$\varepsilon \in \{1, -1\}$" não pode ser substituída por "ε sempre igual a 1" ou por "ε sempre igual a -1".

ABSTRACT:

In this work, given a field K of characteristic zero, we present examples of cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra $\mathbb{A}_1(K)$ generated by operators of order one; for $n \geq 2$, among special operators of order one, we characterize the ones which generate maximal left ideals. Finally, for $n = 2$, we show that for every simple derivation of the form $d = \partial_1 + \beta\partial_2$ with $\beta \in K[X_1, X_2]$ there exists $\varepsilon \in \{1, -1\}$ such that $\mathbb{A}_2 \cdot (d + \varepsilon X_2)$ is a left maximal ideal of $\mathbb{A}_2(K)$, and that this condition is optimal in the sense that "$\varepsilon = 1$" doesn´t work always and "$\varepsilon = -1$" doesn´t work always.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

A história da Álgebra de Weyl começa com o nascimento da Mecânica Quântica. No ano de 1925, vários pesquisadores estavam trabalhando na tentativa de estabelecer os princípios da mecânica a nível dos fenômenos atômicos. Um deles era o físico alemão Werner Heisenberg. Este percebeu a necessidade de introduzir, em um novo modelo, variáveis de caráter não-comutativo.

Paul Dirac escolheu como ponto de partida as relações entre as variáveis dinâmicas, abordagem que denominou *Álgebra Quântica.* O ponto-de-vista de Dirac envolve expressões polinomiais nas variáveis dinâmicas *momentum* (p) e posição (q). Assume-se que estas satisfazem a relação (normalizada)

$$pq - qp = 1.$$

Isto é o que hoje denominamos a primeira Álgebra de Weyl. Em particular, Dirac mostrou como se poderia usar a relação entre p e q para diferenciar expressões polinomiais em relação a estas variáveis. Álgebras de Weyl de índice superior surgiram quando se consideraram sistemas com vários graus de liberdade.

Hoje, denotamos por $\mathbb{A}_n(K) = K[X_1, ..., X_n]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ a $n-$ésima álgebra de Weyl sobre um corpo K de característica zero (aqui, ∂_n denota a derivação usual $\partial/\partial X_n$).

O matemático Littlewood estabeleceu muitas das propriedades básicas da Álgebra de Weyl. Ele mostrou que os elementos desta álgebra têm uma forma canônica e que a Álgebra de Weyl não possui divisores de zero. Ele também mostrou que a relação $pq - qp = 1$ não é compatível com nenhuma outra relação ou, como dizemos hoje, que o único ideal bilateral próprio desta álgebra é o ideal nulo.

Em 1963, a teoria da Álgebra de Weyl foi relacionada com álgebras de Lie nilpotentes num trabalho de Dixmier (veja [4]).

O crescente interesse pelos anéis noetherianos não-comutativos, o intenso desenvolvimento da teoria das álgebras envolventes das álgebras de Lie e a teoria de $D-$*módulos* que surgiu na década de 70 contribuíram para manter o interesse nas Álgebras de Weyl.

Dado seu importante papel, é natural tentar conhecer a estrutura das Álgebras de Weyl. Como já mencionamos, Littlewood já havia estabelecido que a Álgebra de Weyl não possui ideais bilaterais não-triviais, ou seja, $\mathbb{A}_n$ é uma álgebra simples. E, com relação à existência de ideais maximais principais, atualmente estão sendo feitas várias pesquisas focalizadas neste aspecto (cabe aqui mencionar que procurar ideais maximais principais à esquerda é equivalente a procurar ideais maximais principais à direita - veja Capítulo 3).

O primeiro autor a abordar o problema da existência de ideais maximais foi Stafford [12] que, em 1985, exibiu explicitamente alguns exemplos de ideais à direita maximais de $\mathbb{A}_n(K)$ com K de característica zero tal que $\dim_{\mathbb{Q}} K \geq n$. Alguns destes exemplos foram generalizados por Coutinho [3] em 1999: partindo de uma derivação d de $K[X_1, ..., X_n]$ que torna $K[X_1, ..., X_n]$ $d-$simples (veja Definição 31), ele encontrou uma perturbação de d, isto é, um polinômio $\gamma \in K[X_1, ..., X_n]$ tal que o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é maximal (aqui, pela primeira vez, encontra-se uma forte relação entre $d-$simplicidade de $K[X_1, ..., X_n]$ e a existência de ideais maximais principais de $\mathbb{A}_n(K)$).

Outros exemplos de Stafford foram ampliados por Bratti-Takagi [1] (2002), mas para $n = 2$ e $K = \mathbb{C}$ e utilizando métodos analíticos. Estes mesmos resultados foram generalizados por Lequain, Levcovitz, Souza Jr. [7] para n

qualquer, K qualquer e sem a utilização de métodos analíticos.

Lequain, Levcovitz e Souza Jr. provaram também que se d é uma derivação e existe uma perturbação $\gamma \in K[X_1, ..., X_n]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é maximal, então $K[X_1, ..., X_n]$ é d-simples.

Diante deste último resultado, a questão que naturalmente se impõe é: dada uma derivação d de $K[X_1, ..., X_n]$ que torna $K[X_1, ..., X_n]$ d-simples, podemos afirmar que sempre existe $\gamma \in K[X_1, ..., X_n]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal à esquerda maximal? A resposta é afirmativa para o caso $n = 2$ e $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, $\beta \in K[X_1, X_2]$, e, neste caso, prova-se inclusive que podemos tomar $\gamma = \varepsilon X_2$ para algum $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, sendo esta condição ótima. Este resultado encontra-se em Doering, Lequain, Ripoll [6], e é exatamente o objeto principal desta dissertação.

Tentou-se minimizar os pré-requisitos para a leitura deste trabalho. É necessário um conhecimento das estruturas algébricas básicas (anel, corpo, domínio, módulo e espaço vetorial) ao nível de seus conceitos e propriedades mais elementares. Em particular, os conceitos de operador linear, isomorfismo e endomorfismo de estruturas algébricas se farão necessários para a compreensão de certas afirmações. As peculiaridades da divisão euclidiana em anéis de polinômios e do conceito de fatoração nestes anéis serão igualmente exigidos em certas passagens. Finalmente, a familiaridade com o conceito de *derivada formal* e dos resultados mais básicos envolvidos tornará também mais naturais certas manipulações.

A seguir, apresentamos uma descrição de cada capítulo que compõe esta dissertação.

No capítulo 2, introduziremos a definição da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n(K)$ e exporemos os resultados básicos que serão úteis ao desenvolvimento do trabalho. Em especial, definiremos o conceito de *comutador* e estabeleceremos algumas fórmulas importantes envolvendo o comutador de operadores de $\mathbb{A}_n$. Veremos ainda alguns aspectos gerais da estrutura de ideais desta álgebra.

No capítulo 3, mostraremos que a Álgebra de Weyl pode ser vista como um $K[X_1, .., X_n]-$ módulo livre e apresentaremos a definição de *ordem* de um operador. Caracterizaremos também os operadores denominados *derivações*. O conceito de *involução padrão* de $\mathbb{A}_n(K)$ será estabelecido e com ele conseguiremos mostrar que estudar ideais maximais à esquerda de $\mathbb{A}_n$ equivale a estudar ideais maximais à direita.

No capítulo 4, enfocaremos a estrutura de ideais de $\mathbb{A}_n$. Caracterizaremos os ideais maximais principais de $\mathbb{A}_n(K)$ (Teorema 67) e aplicaremos estes resultados à teoria de $d-$simplicidade do anel de polinômios $K[X_1, ..., X_n]$. Em particular, estabeleceremos uma relação entre $d-$simplicidade e ideais maximais principais de $\mathbb{A}_n(K)$. Alguns resultados importantes serão particularizados para $\mathbb{A}_2(K)$, já com vistas ao objetivo final do trabalho.

Finalmente, no capítulo 5, mostraremos que em $\mathbb{A}_2(K)$, dada uma derivação d de $K[X_1, X_2]$, podemos sempre encontrar uma "perturbação" γ de d, $\gamma \in K[X_1, X_2]$, de tal forma que $d + \gamma$ gera um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$. Mais até, provaremos que tal γ pode ser sempre tomado igual a X_2 ou a $-X_2$, e que este resultado é ótimo no sentido de que $\gamma = X_2$ (ou $\gamma = -X_2$) não funciona sempre.

Em relação à notação utilizada neste texto, ressaltamos que:

- se escrevermos A para um conjunto qualquer que contenha o elemento nulo, A^* significará $A \setminus \{0\}$;

- em todo o texto, K denotará um corpo de característica zero e $K[X]$ o anel de polinômios $K[X_1, ..., X_n]$ em n indeterminadas sobre K. Quando quisermos salientar que diminuimos o número de indeterminadas, utilizaremos a notação $K[X_1, .., X_{n-1}]$.

Para falarmos no *grau de um polinômio*, convém definirmos primeiramente o conceito de *multi-índice*:

Definição 1 *Um multi-índice α é um elemento qualquer de $\mathbb{N}^n$. O "comprimento" do multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é definido por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.*

- dado o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, denotaremos por X^α o monômio $X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}$;

- dado $f = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha \in K[X]$ o grau de f, que é o multi-índice α de maior comprimento para o qual X^α apresenta-se como parcela de f com coeficiente não-nulo, será denotado por $grau(f)$. Ao polinômio nulo, atribuímos o grau $-\infty$;

- $grau_{X_n}(f)$ denotará o grau de f como elemento de $K[X_1, ..., X_{n-1}][X_n]$.

2 A ÁLGEBRA DE WEYL COMO ANEL DE OPERADORES SOBRE $K[X]$

Neste capítulo, a Álgebra de Weyl é introduzida como um anel de operadores sobre um espaço de dimensão infinita.

Sabe-se que o anel $K[X]$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre K. Sua álgebra de operadores lineares é denotada por $(End_K(K[X]), +, \cdot)$ (onde por $\cdot$ estamos denotando a operação de composição). Por questão de simplicidade, porém, escreveremos tão somente $End_K(K[X])$. Denotaremos por 1 o operador identidade.

Em geral, dada uma $K-$álgebra R, denotaremos por $End_K(R)$ a álgebra dos operadores lineares de R.

Como exemplos de elementos de $End_K(K[X])$, citamos os operadores que são denotados por $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}$ e cuja ação sobre um polinômio $p \in K[X]$ é dada simplesmente por

$$\widehat{X_i}(p) = X_i p, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}$$

(multiplicação por X_i), e os operadores $\partial_1, ..., \partial_n$ definidos por

$$\partial_i(p) = \frac{\partial p}{\partial X_i}, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}$$

(derivadas formais).

Dado $p \in K[X]$, denotaremos por $\widehat{p}$ o operador "multiplicação por p ".

A Álgebra de Weyl é definida como uma subálgebra de $End_K(K[X])$:

Definição 2 *A* ***$n-$ésima Álgebra de Weyl*** $\mathbb{A}_n(K)$ *(ou simplesmente* $\mathbb{A}_n$*) é a* $K-$*subálgebra de* $End_K(K[X])$ *gerada pelos operadores* $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}$ *e* $\partial_1, ..., \partial_n$.

Escrevemos

$$\mathbb{A}_n(K) = K[\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}] < \partial_1, ..., \partial_n > .$$

Por questão de consistência, consideramos $\mathbb{A}_0 = K$.

Desta forma, os elementos de $\mathbb{A}_n$ são combinações lineares sobre K de monômios nos geradores $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}, \partial_1, ..., \partial_n$. Porém, afirmamos que $\mathbb{A}_n \neq End_K(K[X])$, mas deixaremos a demonstração deste fato para mais adiante, quando tivermos disponível uma forma canônica para os elementos de $\mathbb{A}_n$.

Como era de se esperar, $\mathbb{A}_n$ não é uma álgebra comutativa: de fato, para cada polinômio $f \in K[X]$, temos, usando a regra de diferenciação de um produto,

$$\partial_i \cdot \widehat{X_i}(f) = X_i \partial_i(f) + f,$$

e, portanto,

$$\partial_i \cdot \widehat{X_i} = \widehat{X_i} \cdot \partial_i + \widehat{1}. \tag{1}$$

Concluímos assim que os operadores $\partial_i \cdot \widehat{X_i}$ e $\widehat{X_i} \cdot \partial_i$ são distintos.

Mais conveniente é reescrevermos a fórmula acima usando comutador, conceito que apresentamos a seguir num contexto mais geral. Em seguida, veremos algumas propriedades do comutador envolvendo os geradores de $\mathbb{A}_n$.

2.1 O comutador e suas propriedades

Definição 3 *Seja R um anel, e sejam $r_1, r_2 \in R$. O* ***comutador*** *de r_1 e r_2 é denotado por $[r_1, r_2]$ e definido por*

$$[r_1, r_2] = r_1 r_2 - r_2 r_1.$$

Proposição 4 *(Propriedades do comutador):*

Seja R um anel, e sejam $r_1, r_2, r_3 \in R$. Então:

i) $[r_1, r_2] \in R$;

ii) $[r_1, r_2] = 0 \Leftrightarrow r_1$ *comuta com* r_2;

iii) $[r_1, r_2] = -[r_2, r_1]$;

- *iv) (Identidade de Jacobi): Dados $a, b, c \in R$,*

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0. \tag{2}$$

Se R for uma $K-$álgebra, valem ainda as seguintes propriedades:

v) o comutador é bilinear;

vi) para todo $\lambda \in K$, $[\lambda r_1, r_2] = \lambda[r_1, r_2] = [r_1, \lambda r_2]$.

Prova. Com efeito, sendo R um anel, temos o fechamento para as operações de produto e soma, e, portanto, claramente *(i)* é verificada. Provamos a seguir apenas *(v)*, já que as demais propriedades são facilmente demonstradas (usando a definição de comutador e um cálculo direto, obtemos a Identidade de Jacobi) e a propriedade *(vi)* é conseqüência imediata da definição de $K-$álgebra.

Dados $r \in R, \lambda_1, \lambda_2 \in K$, temos, pela definição de comutador:

$$[r, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2] = r(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) - (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) r.$$

Usando agora o fato de que R é uma $K-$álgebra, obtemos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} [r, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2] &= r(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) - (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) r \\ &= r\lambda_1 r_1 + r\lambda_2 r_2 - \lambda_1 r_1 r - \lambda_2 r_2 r \\ &= \lambda_1 r r_1 + \lambda_2 r r_2 - \lambda_1 r_1 r - \lambda_2 r_2 r \\ &= \lambda_1 (r r_1 - r_1 r) + \lambda_2 (r r_2 - r_2 r) \\ &= \lambda_1 [r, r_1] + \lambda_2 [r, r_2]. \end{aligned}$$

Fazendo uso de *(iii)* obtém-se facilmente que

$$[\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2, r] = \lambda_1 [r_1, r] + \lambda_2 [r_2, r],$$

ou seja, o comutador é, de fato, bilinear. ■

De (1) obtivemos que

$$\left[\partial_i, \widehat{X_i}\right] = \widehat{1}.$$

Na verdade, $\mathbb{A}_n$ é uma $K-$álgebra não-comutativa onde, de certa forma, a única relação de não-comutatividade entre seus geradores é a que foi dada acima. De fato:

Proposição 5 *(Comutador envolvendo os geradores de $\mathbb{A}_n$). Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$,*

i) $\left[\partial_i, \widehat{X_j}\right] = \widehat{\delta_{ij} \cdot 1}$;

ii) $[\partial_i, \partial_j] = \widehat{0}$;

iii) $\left[\widehat{X_i}, \widehat{X_j}\right] = \widehat{0}$.

Lembramos que δ_{ij} utilizado em *(i)* é o chamado "delta de Kronecker" e que seu valor é 1, se $i = j$, e zero, se $i \neq j$. Salientamos também que, por *(ii)* da Proposição 4, as condições *(ii)* e *(iii)* acima nos dizem que ∂_i comuta sempre com ∂_j e que $\widehat{X_i}$ comuta sempre com $\widehat{X_j}$.

Antes de seguirmos adiante, apresentamos mais alguns cálculos envolvendo o comutador e elementos de $\mathbb{A}_n$ que nos serão úteis neste trabalho.

Proposição 6 *Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e para cada $p \in K[X]$,*

i) $[\partial_i, \widehat{p}] = \widehat{\partial_i(p)}$, *ou seja,* $\partial_i \cdot \widehat{p} = \widehat{p} \cdot \partial_i + \widehat{\partial_i(p)}$;

ii) $\left[\partial_i, \widehat{X_i^k}\right] = \widehat{kX_i^{k-1}}$, *ou seja,* $\partial_i \cdot \widehat{X_i^k} = \widehat{X_i^k} \cdot \partial_i + \widehat{kX_i^{k-1}}$;

iii) $\left[\partial_i^k, \widehat{X_i}\right] = \widehat{k}\partial_i^{k-1}$, *ou seja,* $\partial_i^k \cdot \widehat{X_i} = \widehat{X_i} \cdot \partial_i^k + \widehat{k}\partial_i^{k-1}$;

iv) Fórmula de Leibniz:

$$\partial_i^k \cdot \widehat{X_i^l} = \sum_{j=0}^{k} \widehat{C_k^j}\,\widehat{\partial_i^j \left(X_i^l\right)}\,\partial_i^{k-j}; \tag{3}$$

v) $\left[\partial_i^k, \widehat{X_i^l}\right] = \sum_{j=1}^{k} \widehat{C_k^j}\,\widehat{\partial_i^j \left(X_i^l\right)}\,\partial_i^{k-j}$, *ou seja,*

$$\partial_i^k \cdot \widehat{X_i^l} = \widehat{X_i^l} \cdot \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k} \widehat{C_k^j}\,\widehat{\partial_i^j \left(X_i^l\right)}\,\partial_i^{k-j}.$$

Prova. *i)* Para cada $f \in K[X]$ temos:

$$\begin{aligned}
[\partial_i, \widehat{p}]\,(f) &= (\partial_i \cdot \widehat{p} - \widehat{p} \cdot \partial_i)\,(f) \\
&= \partial_i\,(pf) - p\partial_i(f) \\
&= \partial_i(p)f + p\partial_i(f) - p\partial_i(f) \\
&= \partial_i(p)f
\end{aligned}$$

Ou seja, $[\partial_i, \widehat{p}] = \widehat{\partial_i(p)}$.

ii) Basta aplicar a propriedade anterior, considerando $\widehat{p} = \widehat{X_i^k}$.

iii) Usemos indução sobre k.

Para $k = 1$, vale a Proposição 6 (i). Dado $n \geq 1$, suponhamos válida a propriedade para $k = n$ e mostremos que a mesma vale para $k = n + 1$.

$$\begin{aligned}
\left[\partial_i^{n+1}, \widehat{X_i}\right] &= \partial_i^{n+1}\widehat{X_i} - \widehat{X_i}\partial_i^{n+1} = \partial_i^n \partial_i \widehat{X_i} - \widehat{X_i}\partial_i^n \partial_i \overset{(1)}{=} \\
&= \partial_i^n \left(\widehat{1} + \widehat{X_i}\partial_i\right) - \widehat{X_i}\partial_i^n \partial_i \\
&= \partial_i^n + \partial_i^n \widehat{X_i}\partial_i - \widehat{X_i}\partial_i^n \partial_i = \partial_i^n + \left[\partial_i^n, \widehat{X_i}\right]\partial_i.
\end{aligned}$$

Usando agora a hipótese de indução, obtemos

$$\left[\partial_i^{n+1}, \widehat{X_i}\right] = \partial_i^n + \widehat{n}\partial_i^{n-1}\partial_i = \widehat{(n+1)}\partial_i^n,$$

iv) Também aqui faremos a prova por indução sobre k.

Se $k = 1$, então, pondo $f = X_i^l$,

$$\begin{aligned}\partial_i \widehat{X_i^l} &\overset{(i)}{=} \widehat{X_i^l}\partial_i + \widehat{\partial_i(X_i^l)} \\ &= \sum_{j=0}^{1} \widehat{C_1^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{1-j}.\end{aligned}$$

Vamos supor que a fórmula de Leibiniz seja válida para $k \geq 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\partial_i^{k+1}\widehat{X_i^l} &= \partial_i\partial_i^k\widehat{X_i^l} = \partial_i\sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\partial_i\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k-j} \overset{(i)}{=} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\left(\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i + \partial_i(\widehat{\partial_i^j(X_i^l)})\right)\partial_i^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} + \sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\widehat{\partial_i^{j+1}(X_i^l)}\partial_i^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\widehat{C_k^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} + \sum_{j=1}^{k+1}\widehat{C_k^{j-1}}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} \\
&= \widehat{C_k^0}\widehat{X_i^l}\partial_i^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\widehat{C_k^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\widehat{C_k^{j-1}}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} + \widehat{C_k^k}\widehat{\partial_i^{k+1}(X_i^l)} \\
&= \widehat{X_i^l}\partial_i^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\left(\widehat{C_k^j} + \widehat{C_k^{j-1}}\right)\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} + \widehat{\partial_i^{k+1}(X_i^l)} \\
&= \widehat{C_{k+1}^0}\widehat{X_i^l}\partial_i^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\widehat{C_{k+1}^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j} + \widehat{C_{k+1}^{k+1}}\widehat{\partial_i^{k+1}(X_i^l)} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1}\widehat{C_{k+1}^j}\widehat{\partial_i^j(X_i^l)}\partial_i^{k+1-j}.
\end{aligned}$$

v) De *(iv)*, temos

$$\begin{aligned}
\partial_i^k \widehat{X_i^l} &= \sum_{j=0}^{k} \widehat{C_k^j} \widehat{\partial_i^j (X_i^l)} \partial_i^{k-j} \\
&= \widehat{C_k^0} \widehat{\partial_i^0 (X_i^l)} \partial_i^{k-0} + \sum_{j=1}^{k} \widehat{C_k^j} \widehat{\partial_i^j (X_i^l)} \partial_i^{k-j} \\
&= \widehat{X_i^l} \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k} \widehat{C_k^j} \widehat{\partial_i^j (X_i^l)} \partial_i^{k-j},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left[\partial_i^k, \widehat{X_i^l}\right] &= \partial_i^k \widehat{X_i^l} - \widehat{X_i^l} \partial_i^k = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \widehat{C_k^j} \widehat{\partial_i^j (X_i^l)} \partial_i^{k-j},
\end{aligned}$$

c.q.d. ■

Convenção: A partir de agora, denotaremos o operador $\widehat{X_i}$, "multiplicação por X_i", simplesmente por X_i. Isto objetiva tornar a notação menos carregada. Da mesma forma, dispensaremos o sinal $\cdot$ para a multiplicação em $\mathbb{A}_n$, bem como o índice 1 para os geradores de $\mathbb{A}_1$, escrevendo somente X e ∂. Com isto, escreveremos apenas

$$\mathbb{A}_n = K[X_1, ..., X_n] < \partial_1, ..., \partial_n > .$$

2.2 A base canônica para o $K-$espaço vetorial $\mathbb{A}_n$

A base canônica para a Álgebra de Weyl é mais facilmente descrita se fizermos uso de uma notação envolvendo multi-índice. Complementamos aqui a definição dada na Introdução:

Definição 7 *Um* ***multi-índice*** α *é um elemento qualquer de* $\mathbb{N}^n$. *O* ***comprimento*** *do multi-índice* α *é definido por* $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ *se* $\alpha =$

$(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. *Definimos ainda o* ***fatorial*** $\alpha!$ ***do multi-índice*** α *como sendo o número*

$$\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!.$$

Notação: Dado o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, denotaremos por X^α o monômio $X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}$. Notemos que o par (α, β) de multi-índices em $\mathbb{N}^n$ pode ser visto como um multi-índice de $\mathbb{N}^{2n}$, fazendo sentido, portanto, falarmos no comprimento de (α, β). Denotaremos por e_i o multi-índice em que todas as entradas são zero, com exceção da $i-$ésima entrada, que é igual a 1. Dados os multi-índices $\alpha, \sigma \in \mathbb{N}^n$, denotaremos ainda por $\alpha + \sigma$ o multi-índice $(\alpha_1 + \sigma_1, ..., \alpha_n + \sigma_n)$. Por exemplo, para cada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \neq 0$, $\alpha - e_i$ denotará o multi-índice $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$.

Lema 8 *Sejam* $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$. *Temos:*

i) Se $|\sigma| \leq |\beta|$ *com* $\sigma \neq \beta$, *então* $\partial^\beta (X^\sigma) = 0$;

ii) Se $\sigma = \beta$, *então* $\partial^\beta (X^\sigma) = \beta!$;

iii) Se $|\sigma| > |\beta|$ *mas existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $\sigma_i < \beta_i$, *então*

$$\partial^\beta (X^\sigma) = 0;$$

iv) Se $|\sigma| > |\beta|$ *e* $\sigma_i \geqslant \beta_i$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$, *então*

$$\partial^\beta (X^\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i - \beta_i)!} X_i^{\sigma_i - \beta_i}.$$

Prova. *i)* Como $|\sigma| \leq |\beta|$ com $\sigma \neq \beta$,existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\sigma_i < \beta_i$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\partial^\beta (X^\sigma) &= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{i-1}^{\beta_{i-1}}\partial_i^{\beta_i}\partial_{i+1}^{\beta_{i+1}}...\partial_n^{\beta_n} \left(X_1^{\sigma_1}...X_{i-1}^{\sigma_{i-1}}X_i^{\sigma_i}X_{i+1}^{\sigma_{i+1}}...X_n^{\sigma_n}\right) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{i-1}^{\beta_{i-1}}\partial_{i+1}^{\beta_{i+1}}...\partial_n^{\beta_n}\partial_i^{\beta_i} \left(X_1^{\sigma_1}...X_{i-1}^{\sigma_{i-1}}X_{i+1}^{\sigma_{i+1}}...X_n^{\sigma_n}X_i^{\sigma_i}\right) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{i-1}^{\beta_{i-1}}\partial_{i+1}^{\beta_{i+1}}...\partial_n^{\beta_n} \left(X_1^{\sigma_1}...X_{i-1}^{\sigma_{i-1}}X_{i+1}^{\sigma_{i+1}}...X_n^{\sigma_n}\partial_i^{\beta_i}(X_i^{\sigma_i})\right) \overset{\sigma_i < \beta_i}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{i-1}^{\beta_{i-1}}\partial_{i+1}^{\beta_{i+1}}...\partial_n^{\beta_n} (0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ii) $\sigma = \beta \Longleftrightarrow (\sigma_1, ..., \sigma_n) = (\beta_1, ..., \beta_n)$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\partial^{\beta}(X^{\sigma}) &= \partial_1^{\beta_1}...\partial_n^{\beta_n}(X_1^{\sigma_1}...X_n^{\sigma_n}) \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_n^{\beta_n}\left(X_1^{\beta_1}...X_n^{\beta_n}\right) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}\left(X_1^{\beta_1}...X_{n-1}^{\beta_{n-1}}\partial_n^{\beta_n}(X_n^{\beta_n})\right) \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}\left(X_1^{\beta_1}...X_{n-1}^{\beta_{n-1}}\beta_n!\right) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-2}^{\beta_{n-2}}\left(X_1^{\beta_1}...X_{n-2}^{\beta_{n-2}}\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}(X_{n-1}^{\beta_{n-1}})\beta_n!\right) \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-2}^{\beta_{n-2}}\left(X_1^{\beta_1}...X_{n-2}^{\beta_{n-2}}\beta_{n-1}!\beta_n!\right) \\
&= ... \\
&= \beta_1!...\beta_n! = \beta!
\end{aligned}$$

iii) Análogo a *(i)*.

iv) Inicialmente, observemos que se $\sigma_i \geqslant \beta_i$, então

$$\partial_i^{\beta_i}(X_i^{\sigma_i}) = \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i - \beta_i)!}X_i^{\sigma_i - \beta_i}.$$

Agora, como isto ocorre por hipótese para todo i, então temos

$$\begin{aligned}
\partial^{\beta}(X^{\sigma}) &= \partial_1^{\beta_1}...\partial_n^{\beta_n}(X_1^{\sigma_1}...X_n^{\sigma_n}) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}(X_1^{\sigma_1}...X_{n-1}^{\sigma_{n-1}}\partial_n^{\beta_n}(X_n^{\sigma_n})) \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}\left(X_1^{\sigma_1}...X_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot \frac{\sigma_n!}{(\sigma_n - \beta_n)!}X_n^{\sigma_n - \beta_n}\right) \overset{Prop.5}{=} \\
&= \partial_1^{\beta_1}...\partial_{n-2}^{\beta_{n-2}}\left(X_1^{\sigma_1}...X_{n-2}^{\sigma_{n-2}}\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}(X_{n-1}^{\sigma_{n-1}})\frac{\sigma_n!}{(\sigma_n - \beta_n)!}X_n^{\sigma_n - \beta_n}\right) \\
&= ... \\
&= \frac{\sigma_1!}{(\sigma_1 - \beta_1)!}X_1^{\sigma_1 - \beta_1}...\frac{\sigma_n!}{(\sigma_n - \beta_n)!}X_n^{\sigma_n - \beta_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i!}{(\sigma_i - \beta_i)!}X_i^{\sigma_i - \beta_i},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Proposição 9 *O $K-$espaço vetorial $\mathbb{A}_n$ admite, para base, o conjunto*

$$B = \left\{X^{\alpha}\partial^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}.$$

Prova. É fácil ver que os elementos de B geram a Álgebra de Weyl como um $K-$espaço vetorial: considere um monômio nos geradores de $\mathbb{A}_n$. A fórmula (1) nos permite reposicionar todas as potências de X_i à esquerda dos operadores "∂_i". Assim, podemos de fato escrever um polinômio da Álgebra de Weyl como uma combinação linear dos elementos de B.

Provemos agora a unicidade. Considere uma combinação linear finita de elementos de B, digamos $D = \sum c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}$, $c_{\alpha\beta} \in K$. Vamos mostrar que se algum $c_{\alpha\beta}$ é não-nulo, então $D \neq 0$, ou seja, existe um polinômio f para o qual $D(f) \neq 0$. Construamos tal f.

Seja σ um multi-índice que satisfaz $c_{\alpha\sigma} \neq 0$ para algum índice α, mas $c_{\alpha\beta} = 0$, para todo β tal que $|\beta| < |\sigma|$ (note que é sempre possível encontrarmos tal σ : se $c_{\alpha\beta}$ é não-nulo então tome $\sigma = \beta_0$, onde β_0 satisfaz $|\beta_0| = \min\{|\beta|, \ c_{\alpha\beta} \neq 0\}$). Afirmamos que $f = X^{\sigma}$ é tal que $D(f) \neq 0$. De fato,

$$D(X^{\sigma}) = \sum_{|\beta|<|\sigma|} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}) + \sum_{|\beta|=|\sigma|} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}) + \sum_{|\beta|>|\sigma|} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}).$$

Pela escolha de σ, a primeira parcela é igual a zero. A terceira parcela também é nula, em virtude do Lema 8. Assim,

$$\begin{aligned} D(X^{\sigma}) &= \sum_{|\beta|=|\sigma|} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}) \\ &= \sum_{\substack{|\beta|=|\sigma| \\ \beta\neq\sigma}} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}) + \sum_{\beta=\sigma} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(X^{\sigma}) \overset{Lema\,8}{=} \\ &= \sigma! \sum_{\alpha} c_{\alpha\sigma}X^{\alpha}, \end{aligned}$$

que é não-nulo, pois $c_{\alpha\sigma} \neq 0$ pela escolha de σ.

Assim, $D(X^{\sigma}) \neq 0$, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 10 *Vejamos como podemos obter a representação na base canônica do operador* $\partial_2^3 X_1 \partial_3 X_3 + X_3 \partial_1 X$. *Fazendo uso da Proposição 5, temos*

$$\begin{aligned}
\partial_2^3 X_1 \partial_3 X_3 + X_3 \partial_1 X_1 &= X_1 \partial_2^3 \partial_3 X_3 + X_3 \partial_1 X_1 \\
&= X_1 \partial_2^3 (1 + X_3 \partial_3) + X_3 (1 + X_1 \partial_1) \\
&= X_1 \partial_2^3 + X_1 \partial_2^3 X_3 \partial_3 + X_3 + X_3 X_1 \partial_1 \\
&= X_1 \partial_2^3 + X_1 X_3 \partial_2^3 \partial_3 + X_3 + X_1 X_3 \partial_1 \\
&= X_3 + X_1 X_3 \partial_1 + X_1 \partial_2^3 + X_1 X_3 \partial_2^3 \partial_3.
\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de mostrar que $\mathbb{A}_n \neq End_K(K[X])$.

Proposição 11 $\mathbb{A}_n \neq End_K(K[X])$.

Prova. Consideremos o operador linear $D \in End_K(K[X])$ definido da seguinte forma: para $\sum_{\eta} a_\eta X^\eta \in K[X]$, $\eta \in \mathbb{N}^n$,

$$D\left(\sum_{\eta} a_\eta X^\eta\right) = a_0,$$

onde o multi-índice 0 representa a $n-$upla $(0, ..., 0)$. Suponhamos que $D \in \mathbb{A}_n$, ou seja, que possamos escrever

$$D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e $c_{\alpha\beta} \in K$. Por conveniência, reescrevamos D, ainda, na forma

$$D = \sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m} X^\alpha \partial_1^m + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \beta_i \neq 0 \text{ para algum } i \geq 2}} c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta, \; m \in \mathbb{N}.$$

Primeiramente, observemos que

$$D\mid_{K[X_1]}=\sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m}X^{\alpha}\partial_1^m,$$

pois, se $f\in K[X_1]$, $\partial^{\beta}(f)=0$ se $\beta_i\neq 0$ para algum $i\geq 2$ e, portanto,

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \beta_i\neq 0 \text{ para algum } i\geq 2}} c_{\alpha,\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta}(f)=0.$$

Como estamos supondo $D\in\mathbb{A}_n(K)$, em $\sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m}X^{\alpha}\partial_1^m$ teremos um número finito de parcelas. Assim, a constante m, no somatório acima, atinge um valor máximo, digamos, m_0, com $c_{\alpha,m_0}\neq 0$ para algum α. Notemos ainda que não é possível ter $c_{\alpha,m_0}=0$ para todo α e todo m, pois isto implicaria $D(a_0)=0$, contrariando a definição de D se $a_0\neq 0$.

Agora, aplicando o operador D no monômio $X_1^{m_0}$, obtemos, por um lado, $D(X_1^{m_0})=0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} D\left(X_1^{m_0}\right) &= \sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m}X^{\alpha}\partial_1^m\left(X_1^{m_0}\right)\\ &= \sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m}X^{\alpha}\frac{m!}{(m_0-m)!}X_1^{m_0-m}. \end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$0=\sum_{\alpha,m} c_{\alpha,m}\frac{m!}{(m_0-m)!}X^{\alpha}X_1^{m_0-m},$$

o que nos dá

$$c_{\alpha,m}=0,$$

para todo α e todo m, já que $m!/(m_0-m)!\neq 0$, o que contraria a hipótese $c_{\alpha,m_0}\neq 0$ para algum α.

Portanto, $D\notin\mathbb{A}_n(K)$. ■

Antes de encerrarmos esta seção, vejamos mais algumas fórmulas que nos serão úteis e que envolvem os geradores e operadores de $\mathbb{A}_n$:

Proposição 12 *Sendo R um anel associativo, para quaisquer $u, v, w \in R$, teremos*

i) $[vw, u] = v\,[w, u] + [v, u]\,w$;

ii) $[u, vw] = v\,[u, w] + [u, v]\,w$.

Prova. *i)* De fato,

$$\begin{aligned}
[vw, u] &= (vw)u - u(vw) \overset{R\ \acute{e}\ associativo}{=} \\
&= vwu - uvw \\
&= vwu - vuw + vuw - uvw \\
&= v\,[w, u] + [v, u]\,w.
\end{aligned}$$

ii) Prova análoga à de *(i)*. ■

Corolário 13 *Sejam $\alpha, \beta, \sigma, \eta \in \mathbb{N}^n$. Temos:*

$$[X^\alpha \partial^\beta, X^\sigma \partial^\eta] = X^\alpha [\partial^\beta, X^\sigma] \partial^\eta + X^\sigma [X^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta.$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
&[X^\alpha \partial^\beta, X^\sigma \partial^\eta] \overset{Prop.12\,(i)}{=} X^\alpha \left[\partial^\beta, X^\sigma \partial^\eta\right] + [X^\alpha, X^\sigma \partial^\eta] \partial^\beta \overset{Prop.12\,(ii)}{=} \\
= \;& X^\alpha X^\sigma \left[\partial^\beta, \partial^\eta\right] + X^\alpha \left[\partial^\beta, X^\sigma\right] \partial^\eta \\
& + X^\sigma [X^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta + [X^\alpha, X^\sigma] \partial^\eta \partial^\beta \overset{Prop.4\,(ii)}{=} \\
= \;& 0 + X^\alpha \left[\partial^\beta, X^\sigma\right] \partial^\eta + X^\sigma [X^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta + 0 \\
= \;& X^\alpha \left[\partial^\beta, X^\sigma\right] \partial^\eta + X^\sigma [X^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta,
\end{aligned}$$

c.q.d ■

Proposição 14 *Sejam α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $p \in K[X]$ e $c_{\alpha,\beta}, c_\alpha \in K$. Então, para cada $i \in \{1, ..., n\}$:*

i) $[\partial_i, X^\alpha] = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i = 0 \\ \alpha_i X^{\alpha - e_i}, \text{ se } \alpha_i \neq 0; \end{cases}$

ii) $\left[\partial^\beta, X_i\right] = \begin{cases} 0, \text{ se } \beta_i = 0 \\ \beta_i \partial^{\beta - e_i}, \text{ se } \beta_i \neq 0; \end{cases}$

iii) $\left[\partial^\beta, X^\alpha\right] = \partial_i \left[\partial^{\beta - e_i}, X^\alpha\right] + [\partial_i, X^\alpha] \partial^{\beta - e_i}$, *desde que tenhamos* $\beta_i \neq 0$;

iv) $\left[\partial^\beta, p\right] = \partial_i \left[\partial^{\beta - e_i}, p\right] + [\partial_i, p] \partial^{\beta - e_i}$, *desde que tenhamos* $\beta_i \neq 0$;

v) $\left[c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta, X_i\right] = \begin{cases} 0, \text{ se } \beta_i = 0 \\ \beta_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta - e_i}, \text{ se } \beta_i \neq 0; \end{cases}$

vi) $\left[\partial_i, c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta\right] = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i = 0 \\ \alpha_i c_{\alpha\beta} X^{\alpha - e_i} \partial^\beta, \text{ se } \alpha_i \neq 0. \end{cases}$

Prova. *i)* Se $\alpha_i = 0$, temos

$$[\partial_i, X^\alpha] = \partial_i X^\alpha - X^\alpha \partial_i \overset{Prop.5}{=} \partial_i X^\alpha - \partial_i X^\alpha = 0.$$

Se $\alpha_i \geq 1$, vale a fórmula (i) da Proposição 6:

$$[\partial_i, X^\alpha] = \partial_i(X^\alpha) = \alpha_i X^{\alpha - e_i}.$$

ii) Se $\beta_i = 0$ temos

$$\left[\partial^\beta, X_i\right] = \partial^\beta X_i - X_i \partial^\beta \overset{Prop.5}{=} X_i \partial^\beta - X_i \partial^\beta = 0.$$

E, se $\beta_i \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \left[\partial^\beta, X_i\right] &= \partial^\beta X_i - X_i \partial^\beta \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\ &= \partial_1^{\beta_1} ... \partial_i^{\beta_i} X_i \partial_{i+1}^{\beta_{i+1}} ... \partial_n^{\beta_n} - X_i \partial^\beta \overset{Prop.6\,(iii)}{=} \\ &= \partial_1^{\beta_1} ... \left(X_i \partial_i^{\beta_i} + \beta_i \partial_i^{\beta_i - 1}\right) \partial_{i+1}^{\beta_{i+1}} ... \partial_n^{\beta_n} - X_i \partial^\beta \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\ &= X_i \partial^\beta + \beta_i \partial^{\beta - e_i} - X_i \partial^\beta \\ &= \beta_i \partial^{\beta - e_i}. \end{aligned}$$

iii) Como $\beta_i \neq 0$, podemos escrever $\partial^\beta = \partial_i \partial^{\beta - e_i}$. Daí temos:

$$\begin{aligned}
\left[\partial^\beta, X^\alpha\right] &= \left[\partial_i \partial^{\beta-e_i}, X^\alpha\right] \overset{Prop.12}{=} \\
&= \partial_i \left[\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha\right] + \left[\partial_i, X^\alpha\right] \partial^{\beta-e_i}.
\end{aligned}$$

iv) Demonstração análoga ao item anterior.

v) Se $\beta_i = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left[c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta, X_i\right] &= c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta X_i - X_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X^{\alpha+e_i} \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^{\alpha+e_i} \partial^\beta = 0.
\end{aligned}$$

Se $\beta_i \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left[c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta, X_i\right] &= c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta X_i - X_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_i^{\beta_i} X_i \partial_{i+1}^{\beta_{i+1}} \ldots \partial_n^{\beta_n} - c_{\alpha\beta} X^{\alpha+e_i} \partial^\beta \overset{Prop.6\,(iii)}{=} \\
&= \beta_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta-e_i} + c_{\alpha\beta} X^{\alpha+e_i} \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^{\alpha+e_i} \partial^\beta \\
&= \beta_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta-e_i}.
\end{aligned}$$

vi) Se $\alpha_i = 0$ então

$$\begin{aligned}
\left[\partial_i, c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta\right] &= \partial_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta \partial_i \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} = 0.
\end{aligned}$$

E se $\alpha_i \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\left[\partial_i, c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta\right] &= \partial_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta \partial_i \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} \ldots \partial_i X_i^{\alpha_i} \ldots X_n^{\alpha_n} \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} \overset{Prop.6\,(ii)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} \ldots \left(X_i^{\alpha_i} \partial_i + \alpha_i X_i^{\alpha_i - 1}\right) X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots X_n^{\alpha_n} \partial^\beta \\
&\quad - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} + \alpha_i c_{\alpha\beta} X^{\alpha-e_i} \partial^\beta - c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta+e_i} \\
&= \alpha_i c_{\alpha\beta} X^{\alpha-e_i} \partial^\beta,
\end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar. ■

Observação: As fórmulas *(iii)* e *(iv)* no enunciado acima não fariam sentido se $\beta_i = 0$, pois ∂_i não estaria presente em ∂^β.

Corolário 15 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *e* $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta \in \mathbb{A}_n$. *Temos:*

$$i)\ [D, X_i] = \begin{cases} 0, \text{ se todas as parcelas de } D \text{ têm } \beta_i = 0 \\ \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \beta_i \neq 0}} \beta_i c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^{\beta - e_i}, \text{ se existe } i \text{ tal que } \beta_i \neq 0; \end{cases}$$

$$ii)\ [\partial_i, D] = \begin{cases} 0, \text{ se todas as parcelas de } D \text{ têm } \alpha_i = 0 \\ \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha_i \neq 0}} \alpha_i c_{\alpha,\beta} X^{\alpha - e_i} \partial^\beta, \text{ se existe } i \text{ tal que } \alpha_i \neq 0. \end{cases}$$

Prova. É uma conseqüência, respectivamente, dos itens *(v)* e *(vi)* da proposição anterior, tendo em vista a bilinearidade do comutador. ■

Como conseqüências da fórmula de Leibniz (Proposição 6 *(iv)*), temos ainda as seguintes propriedades:

Proposição 16 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $p, q \in K[X]$ *e* $c_{\alpha,\beta}, c_\alpha \in K$. *Então temos, para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *e para cada* $k \in \mathbb{N}$,

i) (Generalização da fórmula de Leibniz)

$$\partial_i^k p = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j (p)\, \partial_i^{k-j};$$

ii) $[\partial_i^k, p] = \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p)\, \partial_i^{k-j}$, *ou seja*

$$\partial_i^k p = p \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p)\, \partial_i^{k-j};$$

iii) $[p\partial_i, \partial_i^k] = -\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \partial_i^{j+1} (p)\, \partial_i^{k-j}$;

iv) $[q, p\partial_i^k] = -p \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (q)\, \partial_i^{k-j}$.

Prova. *i)* Escrevendo $p = \sum_\alpha c_a X^\alpha$ e considerando a linearidade do operador ∂_i sobre $K[X]$, é suficiente verificarmos a validade da fórmula para o monômio $c_\alpha X^\alpha$. Teremos:

$$\begin{aligned}
\partial_i^k c_\alpha X^\alpha &= \partial_i^k c_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} X_i^{\alpha_i} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... X_n^{\alpha_n} \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= c_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \partial_i^k X_i^{\alpha_i} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... X_n^{\alpha_n} \overset{Prop.6\,(iv)}{=} \\
&= c_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j \left(X_i^{\alpha_i}\right) \partial_i^{k-j} \right) X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... X_n^{\alpha_n} \overset{Prop.5\,(i)}{=} \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j \left(c_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} X_i^{\alpha_i} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... X_n^{\alpha_n} \right) \partial_i^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j \left(c_\alpha X^\alpha \right) \partial_i^{k-j}.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\left[\partial_i^k, p\right] &= \partial_i^k p - p \partial_i^k \overset{(i)}{=} \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j} - p \partial_i^k \\
&= p \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j} - p \partial_i^k \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\left[p \partial_i, \partial_i^k\right] &= p \partial_i^{k+1} - \partial_i^k p \partial_i \overset{(i)}{=} \\
&= p \partial_i^{k+1} - \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l \partial_i^l (p) \partial_i^{k-l} \right) \partial_i \\
&= p \partial_i^{k+1} - p \partial_i^{k+1} - \sum_{l=1}^{k} C_k^l \partial_i^l (p) \partial_i^{k-(l-1)} \\
&= - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \partial_i^{j+1} (p) \partial_i^{k-j}.
\end{aligned}$$

iv)

$$[q, p\partial_i^k] \overset{Prop.12}{=} p\,[q, \partial_i^k] + \underbrace{[q, p]}_{=0}\partial_i^k \overset{(ii)}{=}$$

$$= -p\sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (q)\, \partial_i^{k-j},$$

c.q.d. ■

2.3 O grau de um operador

O grau de um operador comporta-se, de certa forma, como o grau de um polinômio. As diferenças ficam por conta da não-comutatividade de $\mathbb{A}_n$.

Definição 17 *Seja $D \in \mathbb{A}_n$ e suponhamos que sua expressão na forma canônica é $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta$. O* ***grau de*** *$D$, denotado por $grau(D)$, é o maior comprimento dos multi-índices (α, β) tais que $X^\alpha \partial^\beta$ apresenta-se como parcela de D com coeficiente não-nulo. Como ocorre com o grau de um polinômio, convenciona-se que o grau do operador nulo é $-\infty$.*

Exemplo 18 *O grau de $2X_1\partial_2 + X_1X_2^3\partial_1\partial_2$ é 6.*

Proposição 19 *(Propriedades do grau) Sejam D e $D' \in \mathbb{A}_n$. Então:*

(i) $grau(D+D') \leq \max\{grau(D), grau(D')\}$, ocorrendo igualdade sempre que $grau(D) \neq grau(D')$;

(ii) $grau([D, D']) \leq grau(D) + grau(D') - 2$;

(iii) $grau(X^\alpha\partial^\beta X^\sigma \partial^\eta) = |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta|$. Mais precisamente, $X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta = X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} +$ parcelas de grau $\leq |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2$;

(iv) $grau(DD') = grau(D) + grau(D')$.

Prova. *(i)* Se D e D' estão escritos na forma canônica, então $D + D'$ também estará e, portanto, concluímos que

$$grau(D + D') \leq \max\{grau(D), grau(D')\}.$$

É fácil ver que se $grau(D) \neq grau(D')$, então ocorre igualdade na fórmula.

Antes de provarmos os outros itens, mostraremos que

$$grau\left([\partial^\beta, X^\alpha]\right) \leq |\alpha| + |\beta| - 2 \tag{4}$$

e

$$grau\left(\partial^\beta X^\alpha\right) = |\alpha| + |\beta|. \tag{5}$$

Se $|\beta| = 0$, temos $\partial^\beta = 1$. Daí, $[\partial^\beta, X^\alpha] = 0$, donde

$$grau\left([\partial^\beta, X^\alpha]\right) = -\infty \leq |\alpha| + |\beta| - 2.$$

Ainda,

$$grau\left(\partial^\beta X^\alpha\right) = grau\left(X^\alpha\right) = |\alpha| = 0 + |\alpha| = |\alpha| + |\beta|.$$

Se $|\alpha| = 0$, ou seja, $X^\alpha \in K$, a demonstração é similar.

Seja $k > 0$ e suponhamos que os resultados são válidos sempre que $|\alpha| + |\beta| < k$. Suponhamos agora $|\alpha| + |\beta| = k$ com $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, digamos, $\beta_i \neq 0$ para algum i; então, pelo item (iii) da Proposição 14,

$$[\partial^\beta, X^\alpha] = \partial_i[\partial^{\beta - e_i}, X^\alpha] + [\partial_i, X^\alpha]\partial^{\beta - e_i}.$$

Como

$$grau\left(\partial^{\beta - e_i}\right) + grau\left(X^\alpha\right) = |\beta| - 1 + |\alpha| < k,$$

da hipótese de indução para o item (4), obtemos que

$$grau\left([\partial^{\beta - e_i}, X^\alpha]\right) \leq |\beta| - 1 + |\alpha| - 2 = |\alpha| + |\beta| - 3. \tag{6}$$

Como

$$[\partial_i, X^\alpha] \overset{Prop.6\,(i)}{=} \partial_i\left(X^\alpha\right),$$

teremos, naturalmente,

$$grau\left([\partial_i, X^\alpha]\right) \leq |\alpha| - 1. \tag{7}$$

Pelo Corolário 15 *(ii)*, temos que

$$grau\left(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha]\right) \leq grau\left(\partial_i\right) + grau\left([\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha]\right). \tag{8}$$

Daí, de (6), (7) e (8), temos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} grau\left(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha]\right) &\leq grau\left(\partial_i\right) + grau\left([\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha]\right) \\ &\leq 1 + |\alpha| + |\beta| - 3 = |\alpha| + |\beta| - 2 < k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} grau\left([\partial_i, X^\alpha]\partial^{\beta-e_i}\right) &= grau\left([\partial_i, X^\alpha]\right) + grau\left(\partial^{\beta-e_i}\right) \\ &\leq |\alpha| - 1 + |\beta| - 1 = |\alpha| + |\beta| - 2 < k. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item *(i)*, temos

$$grau\left([\partial^\beta, X^\alpha]\right) = grau\left(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, X^\alpha] + [\partial_i, X^\alpha]\partial^{\beta-e_i}\right) \leq |\alpha| + |\beta| - 2.$$

Além disso, visto que $\partial^\beta X^\alpha = [\partial^\beta, X^\alpha] + X^\alpha\partial^\beta$ e $grau\left(X^\alpha\partial^\beta\right) = |\alpha| + |\beta|$ (pois $X^\alpha\partial^\beta$ está na forma canônica), teremos também, por *(i), que*

$$grau\left(\partial^\beta X^\alpha\right) = |\alpha| + |\beta|.$$

(ii) Suponhamos

$$D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta \text{ e } D' = \sum_{\sigma,\eta} c_{\sigma\eta} X^\sigma \partial^\eta.$$

Usando a bilinearidade do comutador, temos que:

$$\begin{aligned} [D, D'] &= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\sigma,\eta}[c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta, c_{\sigma\eta}X^\sigma\partial^\eta] \\ &= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\sigma,\eta} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}[X^\alpha\partial^\beta, X^\sigma\partial^\eta]. \end{aligned}$$

Daí, por (4) e pelo item (i),

$$\begin{aligned}
& grau([X^\alpha\partial^\beta, X^\sigma\partial^\eta]) \stackrel{Cor.13}{=} grau(X^\alpha[\partial^\beta, X^\sigma]\partial^\eta + X^\sigma[X^\alpha, \partial^\eta]\partial^\beta) \\
\leq \; & \max\{grau(X^\alpha[\partial^\beta, X^\sigma]\partial^\eta), grau(X^\sigma[X^\alpha, \partial^\eta]\partial^\beta)\} \\
\leq \; & |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
grau([D, D']) &\leq \max_{\alpha,\beta,\sigma,\eta} \{grau(c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}[X^\alpha\partial^\beta, X^\sigma\partial^\eta])\} \\
&= \max_{\alpha,\beta,\sigma,\eta} \{grau(X^\alpha[\partial^\beta, X^\sigma]\partial^\eta + X^\sigma[X^\alpha, \partial^\eta]\partial^\beta)\} \\
&\leq \max_{\alpha,\beta,\sigma,\eta} \{|\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2\} \\
&= \max_{\alpha,\beta}\{|\alpha| + |\beta|\} + \max\{|\sigma| + |\eta|\} - 2 \\
&= grau\,(D) + grau\,(D') - 2.
\end{aligned}$$

(iii) Por (4), temos que $grau([X^\sigma, \partial^\beta]) \leq |\sigma| + |\beta| - 2$. Mas $[X^\sigma, \partial^\beta] = X^\sigma\partial^\beta - \partial^\beta X^\sigma$. Então, como $grau\left(X^\sigma\partial^\beta\right) = |\sigma| + |\beta|$, temos, por (i), que necessariamente $grau(\partial^\beta X^\sigma) = |\sigma| + |\beta|$ e, portanto,

$$\partial^\beta X^\sigma = X^\sigma\partial^\beta + \{\text{parcelas com grau} \leq |\sigma| + |\beta| - 2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta &= X^\alpha(X^\sigma\partial^\beta + \{\text{parcelas com grau} \leq |\sigma| + |\beta| - 2\})\partial^\eta \\
&= X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \{\text{parcelas com grau} \leq |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2\}.
\end{aligned}$$

(iv) Escrevendo

$$D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta \quad \text{e} \quad D' = \sum_{\sigma,\eta} c_{\sigma\eta}X^\sigma\partial^\eta,$$

teremos

$$DD' = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \sigma,\eta}} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta.$$

Então, por *(i)*, temos

$$\begin{aligned} grau(DD') &\leq \max_{\alpha,\beta,\sigma,\eta} \left\{ grau\left(c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha}\partial^{\beta}X^{\sigma}\partial^{\eta}\right)\right\} \stackrel{(iii)}{=} \\ &= \max_{\alpha,\beta,\sigma,\eta} \{|\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta|\} \\ &= \max_{\alpha,\beta} \{|\alpha| + |\beta|\} + \max_{\sigma,\eta} \{|\sigma| + |\eta|\} \\ &= grau\,(D) + grau\,(D'). \end{aligned}$$

Assim, $grau(DD') \leq grau\,(D) + grau\,(D')$. Afirmamos que ocorre até igualdade.

Sejam

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=grauD} c_{\alpha\beta}X^{\alpha}\partial^{\beta} \qquad \text{e} \qquad \sum_{|\sigma|+|\eta|=grauD'} c_{\sigma\eta}X^{\sigma}\partial^{\eta}$$

todas as parcelas de D e D' que são responsáveis pelos graus de D e D' respectivamente. Cada parcela $c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha}\partial^{\beta}X^{\sigma}\partial^{\eta}$ que aparece no produto DD' se reescreve, por *(iii)*, na forma

$$c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \{\text{parcelas de grau} \leq |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2\},$$

de modo que

$$\begin{aligned} DD' = &\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=grauD \\ |\sigma|+|\eta|=grauD'}} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \{\text{parcelas de grau} \\ &\text{menor do que alguma parcela já listada acima}\}. \end{aligned}$$

Suponhamos (por absurdo) que $grau\,(DD') < grau\,(D) + grau\,(D')$. Então

$$\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=grauD \\ |\sigma|+|\eta|=grauD'}} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} \tag{9}$$

é o operador nulo.

Afirmação 1: Se $grau\,(DD') < grau\,(D) + grau\,(D')$, então o expoente de ∂ em todas as parcelas deste somatório é sempre o mesmo, isto é, $\beta_i + \eta_i$ é constante para todo e qualquer i.

Sem perda de generalidade, provemos a afirmação para o expoente de ∂_n. Suponhamos por absurdo que os expoentes $\beta_n + \eta_n$ não são todos iguais. Reescrevamos o somatório (9) na forma

$$0 = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=grauD \\ |\sigma|+|\eta|=grauD'}} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} = \sum_{i=0}^{s} D_i\partial_n^i,$$

com $D_i \in K[X_1, ..., X_n] < \partial_1, ..., \partial_{n-1} >$, para cada $i \in \{0, ..., s\}$.

Seja i_0 o menor expoente de ∂_n envolvido na expressão acima com coeficiente não-nulo. Então, separando a parcela com este menor expoente, obtemos

$$D_{i_0}\partial_n^{i_0} = -\sum_{i=i_0+1}^{s} D_i\partial_n^i.$$

Aplicando estes operadores num polinômio da forma

$$X_n^{i_0}f, \quad f \in K[X_1, ..., X_{n-1}],$$

como $\partial_n^{i_0}(X_n^{i_0}) = i_0!$, obtemos

$$D_{i_0}(i_0!f(X_1, ..., X_{n-1})) = \sum_{i=i_0+1}^{s} D_i(0) = 0,$$

e, portanto ,

$$D_{i_0}(f(X_1, ..., X_{n-1})) = 0$$

para qualquer polinômio $f \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$. Portanto, D_{i_0} se anula sobre $K[X_1, ..., X_{n-1}]$.

Afirmamos que $D_{i_0} \equiv 0$, o que proporciona um absurdo pelo caráter minimal de i_0. De fato, dado $g \in K[X_1, ..., X_n]$, escrevamos $g = \sum_{j=0}^{t} f_j X_n^j$, com $f_j \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$. Então, como D_{i_0} não envolve ∂_n, temos

$$D_{i_0}(g) = \sum_{j=0}^{t} D_{i_0}(f_j X_n^j) = \sum_{j=0}^{t} X_n^j D_{i_0}(f_j) = 0,$$

sendo esta última igualdade válida porque D_{i_0} se anula sobre $K[X_1, ..., X_{n-1}]$.

Conclusão: se $grau(DD') < grau\,(D) + grau\,(D')$, então todos os expoentes de ∂_n em (9) são iguais e, como o mesmo raciocínio se aplica para ∂_i $(i = 1, ..., n)$, concluímos que o expoente de ∂ é sempre o mesmo em cada parcela do produto.

Afirmação 2: Analogamente, se $grau\,(DD') < grau\,(D) + grau\,(D')$, então o expoente de X é sempre o mesmo em todas as parcelas do operador (9).

Sem perda de generalidade, provemos esta afirmação para o expoente de X_1. Suponhamos, por absurdo, que em (9) nem todos os expoentes de X_1 são iguais. Reescrevamos o operador na forma

$$0 = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=grauD \\ |\sigma|+|\eta|=grauD'}} c_{\alpha\beta} c_{\sigma\eta} X^{\alpha+\sigma} \partial^{\beta+\eta} = \sum_{i=0}^{s} X_1^i f_i \partial^{\beta+\eta},$$

onde $f_i \in K[X_2, ..., X_n]$ para todo $i \in \{0, ..., s\}$.

Seja i_0 o menor expoente de X_1 envolvido neste último somatório com coeficiente não-nulo. Separando então a parcela com este menor expoente, obtemos uma igualdade da forma

$$X_1^{i_0} f_{i_0} \partial^{\beta+\eta} = \sum_{i=i_0+1}^{s} X_1^i f_i \partial^{\beta+\eta}.$$

Aplicando tais operadores em $X^{\beta+\eta}$, teremos

$$X_1^{i_0} f_{i_0} \partial^{\beta+\eta}(X^{\beta+\eta}) = \sum_{i=i_0+1}^{s} X_1^i f_i \partial^{\beta+\eta}(X^{\beta+\eta}),$$

e fazendo uso do Lema 8, obtemos

$$(\beta+\eta)!X_1^{i_0}f_{i_0} = \sum_{i=i_0+1}^{s}(\beta+\eta)!X_1^{i}f_i.$$

Usando a igualdade de polinômios em $K[X]$, concluímos assim que

$$f_{i_0} = 0 = f_i,$$

para todo $i \in \{i_0+1,...,s\}$, o que é um absurdo, pelo caráter minimal de i_0.

As Afirmações 1 e 2 acima nos permitem reescrever o operador (9) como

$$\left(\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=grauD \\ |\sigma|+|\eta|=grauD'}} c_{\alpha\beta}c_{\sigma\eta}\right) X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta}. \tag{10}$$

Afirmação 3: O somatório acima envolve na verdade uma única parcela, o que nos leva a um absurdo, pois então o operador (9) não seria nulo.

De fato, se D envolvesse no mínimo duas parcelas de grau máximo, digamos

$$X_1^{u_1}...X_n^{u_n}\partial_1^{r_1}\partial_2^{r_2}...\partial_n^{r_n} + X_1^{v_1}...X_n^{v_n}\partial_1^{s_1}\partial_2^{s_2}...\partial_n^{s_n},$$

então, ao multiplicarmos tais parcelas por cada parcela $X_1^{l_1}...X_n^{l_n}\partial_1^{t_1}\partial_2^{t_2}...\partial_n^{t_n}$ de D' de grau máximo, obteríamos DD' envolvendo parcelas nos geradores

$$X_1^{u_1+l_1}...X_n^{u_n+l_n}\partial_1^{r_1+t_1}\partial_2^{r_2+t_2}...\partial_n^{r_n+t_n} \text{ e } X_1^{v_1+l_1}...X_n^{v_n+l_n}\partial_1^{s_1+t_1}\partial_2^{s_2+t_2}...\partial_n^{s_n+t_n}$$

e necessariamente deveria ocorrer, para cada i, pelas Afirmações 1 e 2,

$$u_i + l_i = v_i + l_i,$$

e

$$r_i + t_i = s_i + t_i.$$

Desta forma, teríamos necessariamente $r_i = s_i$ e $u_i = v_i$, $\forall i$. Fazendo raciocínio análogo para o operador D', concluímos que, de fato, o somatório (10) envolve na verdade uma única parcela.

Logo, para quaisquer $D, D' \in A_n$, $grau\,(DD') = grau\,(D) + grau\,(D')$, c.q.d. ■

Salientamos que pode ocorrer igualdade na fórmula *(ii)* da proposição anterior. Vejamos um exemplo:

Exemplo 20 *Seja* $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta \in \mathbb{A}_n$ *e suponhamos que no multi-índice* (α, β) *de maior comprimento para o qual* $X^\alpha \partial^\beta$ *apresenta-se como parcela de* D *com coeficiente não-nulo, ou seja, na parcela que determina o grau de* D*, tenhamos* $\alpha_i \neq 0$*. Então, pelo Corolário 15, teremos*

$$[\partial_i, D] = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha_i \neq 0}} c_{\alpha,\beta} \alpha_i X^{\alpha - e_i} \partial^\beta$$

e, portanto, $grau\,([\partial_i, D]) = grau\,(\partial_i) + grau\,(D) - 2$.

Corolário 21 $\mathbb{A}_n$ *não possui divisores de zero nem à esquerda, nem à direita.*

Prova. É conseqüência imediata do item *(iv)* da Proposição acima. ■

Corolário 22 *Os únicos elementos invertíveis de* $\mathbb{A}_n$ *são os operadores constantes.*

Prova. Também é uma conseqüência imediata do item *(iv)* da Proposição acima. ■

3 A ÁLGEBRA DE WEYL COMO $K[X]-$ MÓDULO LIVRE

Não obstante os significativos resultados que são produzidos quando estudamos a Álgebra de Weyl como uma subálgebra gerada pelos operadores $\partial_1, ..., \partial_n, X_1, ..., X_n$, mostraremos, neste capítulo, que ela também pode ser vista como um $K[X]-$módulo livre e estabeleceremos, nesta outra visão, mais alguns importantes resultados técnicos.

3.1 A base canônica para o $K[X]-$ módulo livre $\mathbb{A}_n$

Notação: Seja $\beta = (\beta_1, .., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Escreveremos simplesmente $p_\beta\partial^\beta$ no lugar de $p_{\beta_1,...\beta_n}\partial_1^{\beta_1}...\partial_n^{\beta_n}$, para cada $p_{\beta_1,...,\beta_n} \in K[X]$.

É fácil ver que $\mathbb{A}_n$ é um $K[X]-$módulo à esquerda. Além disso,

Proposição 23 *A Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n$ é um $K[X]-$módulo livre à esquerda com base $B = \{\partial^\beta : \beta \in \mathbb{N}^n\}$.*

Prova. Seja $D \in \mathbb{A}_n$. Considerando a expressão de D na forma canônica estabelecida na Proposição 9, digamos,

$$D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta,$$

é claro que o conjunto B gera D: pondo

$$p_\beta = \sum_\alpha c_{\alpha\beta}X^\alpha,$$

obtemos

$$D = \sum_\beta p_\beta\partial^\beta. \tag{11}$$

Provemos agora a independência linear dos geradores. Considere uma combinação linear finita de elementos de B, digamos,

$$D = \sum_{\beta} p_\beta \partial^\beta, \text{ com } p_\beta \in K[X].$$

Precisamos mostrar que se $D = 0$, então $p_\beta = 0$ para todo β. Pondo

$$p_\beta = \sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} X^\alpha,$$

reescrevemos D na forma

$$D = \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} X^\alpha \right) \partial^\beta = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta.$$

Daí temos, pela Proposição 9, que se $D = 0$, então $c_{\alpha\beta} = 0$ para todo coeficiente $c_{\alpha\beta}$ envolvido na expressão acima, de modo que $p_\beta = 0$ para todo polinômio p_β envolvido na expressão (11). ■

3.2 A ordem de um operador

Aqui também usaremos as notações de multi-índice e comprimento de um multi-índice que foram estabelecidas na Definição 7.

Definição 24 *Dado $p \in K[X]$ não-nulo, definimos a* **ordem de $p\partial^\beta$** *como sendo $|\beta|$. Para um operador $D \in \mathbb{A}_n$, cuja expressão, em termos da base B explicitada acima, é da forma*

$$D = \sum_{\beta} p_\beta \partial^\beta,$$

definimos a ordem de D como sendo a maior ordem dos operadores que compõem as parcelas não-nulas de D. Ao operador nulo será atribuída ordem $-\infty$. Denotaremos a ordem de D por $ord(D)$.

Exemplo 25 *A ordem de* $X_1^3\partial_2 + X_1^7X_2\partial_1^3\partial_2^2$ *é* 5.

Proposição 26 *(Propriedades da ordem) Sejam* $D, D' \in \mathbb{A}_n$. *Então valem as seguintes propriedades:*

i) $ord(D + D') \leq \max\{ord(D), ord(D')\}$*; valendo a igualdade se* $ord(D) \neq ord(D')$*;*

ii) $ord([D, D']) \leq ord(D) + ord(D') - 1$*;*

iii) $ord(X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta) = |\beta| + |\eta|$. *Mais precisamente,*

$$X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta = X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \text{parcelas de ordem} \leq |\beta| + |\eta| - 1;$$

iv) $ord(DD') = ord(D) + ord(D')$.

Prova. Expressando D e D' em termos da base B explicitada na proposição acima, é fácil mostrar-se *(i)*.

A demonstração dos demais itens, em vários pontos, assemelha-se à demonstração da Proposição 19. Mostraremos as afirmações *(ii)* e *(iv)* por indução sobre $ord(D) + ord(D')$. A afirmação *(iii)* será provada ao longo do processo e ajudará a concluí-lo.

Se $ord(D)$, $ord(D') \leq 0$, então *(iv)* é imediato e *(ii)* segue de $[D, D'] = 0$. Seja $k \geq 1$ e suponhamos que as afirmações *(ii)* e *(iv)* valem quando $ord(D) + ord(D') < k$. A partir desta hipótese, mostraremos, em primeiro lugar, que os itens *(ii)* e *(iv)* serão válidos quando $D' = p \in K[X]$ e $D = \partial^\beta$. Em seguida, obteremos a validade das afirmações quando D e D' forem da forma $D = p\partial^\beta$ e $D' = q\partial^\gamma$, com $p, q \in K[X]$, o que permitirá generalizar *(ii)* para D e D' quaisquer. Finalmente, e usando estes resultados preliminares, provaremos *(iii)* e estaremos em condições de generalizar *(iv)*.

Primeiramente, tomemos então $D' = p \in K[X]$ e $D = \partial^\beta$, com $|\beta| = k$, digamos, $\beta_i \neq 0$. Então, pela Proposição 14 *(iv)*,

$$[\partial^\beta, p] = \partial_i [\partial^{\beta - e_i}, p] + [\partial_i, p]\,\partial^{\beta - e_i}.$$

Como $ord(\partial^{\beta-e_i}) + ord(p) = |\beta| - 1 + 0 = k - 1 < k$, podemos aplicar a hipótese de indução, obtendo

$$ord\left(\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right]\right) \leq |\beta| - 1 + 0 - 1 = k - 2.$$

Agora, como $ord(\partial_i) + ord\left(\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right]\right) \leq 1 + k - 2 = k - 1 < k$, aplicando novamente a hipótese de indução, obtemos

$$ord\left(\partial_i\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right]\right) \leq k - 1.$$

Pela Proposição 6 *(i)*, temos que

$$ord\left([\partial_i, p]\right) = ord(\partial_i(p)) \leq 0,$$

e, portanto,

$$ord\left([\partial_i, p]\,\partial^{\beta-e_i}\right) \leq ord\left(\partial^{\beta-e_i}\right) = |\beta| - 1 = k - 1.$$

Desta forma, por *(i)*,

$$\begin{aligned} ord([D, D']) &= ord\left(\left[\partial^{\beta}, p\right]\right) = ord\left(\partial_i\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right] + [\partial_i, p]\,\partial^{\beta-e_i}\right) \qquad (12) \\ &\leq \max\left\{ord\left(\partial_i\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right]\right),\ ord\left([\partial_i, p]\,\partial^{\beta-e_i}\right)\right\} \\ &\leq k - 1 = ord\left(\partial^{\beta}\right) + ord(p) - 1 \\ &= ord(D) + ord(D') - 1. \end{aligned}$$

Ainda, como $\partial^{\beta} p = \left[\partial^{\beta}, p\right] + p\partial^{\beta}$, então, por *(i)* e por (12), temos

$$\begin{aligned} ord(DD') &= ord\left(\partial^{\beta} p\right) \\ &= ord\left(\left[\partial^{\beta}, p\right] + p\partial^{\beta}\right) \\ &= \max\left\{ord\left(\left[\partial^{\beta}, p\right]\right),\ ord\left(p\partial^{\beta}\right)\right\} \\ &= ord\left(p\partial^{\beta}\right) \\ &= k = ord\left(\partial^{\beta}\right) + ord\left(p\right) \\ &= ord(D) + ord(D'). \end{aligned}$$

Suponhamos agora que D e D' sejam da forma $D = p\partial^\beta$ e $D' = q\partial^\gamma$, com $|\beta| + |\gamma| = k$. Como a equação (12) é satisfeita para todo multi-índice β com $|\beta| \leq k$, então, tomando $M = \left[\partial^\beta, q\right]$, temos que $ord\,(M) \leq |\beta| - 1$ e

$$\begin{aligned} DD' &= p\partial^\beta q\partial^\gamma \\ &= p\left(q\partial^\beta + \left[\partial^\beta, q\right]\right)\partial^\gamma \\ &= pq\partial^{\beta+\gamma} + pM\partial^\gamma. \end{aligned} \tag{13}$$

Daí obtemos, por *(i)*,

$$\begin{aligned} ord(DD') &= ord(pq\partial^{\beta+\gamma} + pM\partial^\gamma) \\ &\leq \max\left\{ord(pq\partial^{\beta+\gamma}),\ ord(pM\partial^\gamma)\right\} \\ &\leq \max\{|\beta| + |\gamma|,\ |\beta| - 1 + |\gamma|\} \\ &= |\beta| + |\gamma| = ord(D) + ord(D'). \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (13), temos

$$DD' = pq\partial^{\beta+\gamma} + Q_1,$$

onde $ord\,(Q_1) = ord(pM\partial^\gamma) \leq |\beta| - 1 + |\gamma| \leq ord\,(D) + ord\,(D') - 1$. Analogamente,

$$D'D = pq\partial^{\beta+\gamma} + Q_2,$$

com $ord\,(Q_2) \leq ord\,(D) + ord\,(D') - 1$. Logo, $[D, D'] = Q_1 - Q_2$. Aplicando *(i)*,

$$\begin{aligned} ord\,([D, D']) &= ord(Q_1 - Q_2) \\ &\leq \max\{ord(Q_1),\ ord(Q_2)\} \\ &= ord\,(D) + ord\,(D') - 1, \end{aligned}$$

o que conclui a indução para este caso.

Agora, dado que a fórmula vale, como vimos acima, nos casos em que D e D' são da forma $p\partial^\beta$, com $p \in K[X]$, o caso geral de *(ii)* é uma conseqüência da bilinearidade do comutador e de *(i)*.

Estamos agora em condições de provar o item *(iii)*. A demonstração é análoga à do item *(iii)* do Teorema 19:

(iii) Já sabemos que $ord([X^\sigma, \partial^\beta]) \leq |\beta| - 1$. Por outro lado, $[X^\sigma, \partial^\beta] = X^\sigma\partial^\beta - \partial^\beta X^\sigma$ donde, por *(i)*,

$$\begin{aligned} ord\left([X^\sigma, \partial^\beta]\right) &= ord(X^\sigma\partial^\beta - \partial^\beta X^\sigma) \\ &\leq \max\left\{ord\left(X^\sigma\partial^\beta\right),\ ord\left(\partial^\beta X^\sigma\right)\right\} \\ &= \max\left\{|\beta|,\ ord\left(\partial^\beta X^\sigma\right)\right\}, \end{aligned}$$

o que nos faz concluir, também por *(i)*, que

$$ord(\partial^\beta X^\sigma) = |\beta|$$

e também que

$$\partial^\beta X^\sigma = X^\sigma\partial^\beta + \{\text{parcelas com ordem} \leq |\beta| - 1\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta &= X^\alpha(X^\sigma\partial^\beta + \{\text{parcelas com ordem} \leq |\beta| - 1\})\partial^\eta \\ &= X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \{\text{parcelas com ordem} \leq |\beta| + |\eta| - 1\} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$ord(X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta) = |\beta| + |\eta|.$$

Completemos agora a prova de *(iv)*. Tomemos D e D' escritos na forma $\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta$. Pelo item *(iv)* da Proposição 19,

$$grau(DD') = grau(D) + grau(D').$$

Então, dada a distributividade em $\mathbb{A}_n$ e o item *(iii)* acima, temos necessariamente $ord\,(DD') = ord\,(D) + ord\,(D')$, o que conclui a demonstração também para o item *(iv)*. ■

3.3 Derivações

Introduziremos, nesta seção, os operadores de ordem 1 mais simples, chamados *derivações*, bem como o conceito de *derivação simples*, assuntos importantes no estudo de ideais maximais principais da Álgebra de Weyl.

Definição 27 *Seja R um anel comutativo. Um operador linear $d : R \to R$ é dito uma* **derivação** *(que se anula sobre K) de R se satisfizer a regra de Leibniz:*

$$d(ab) = ad(b) + bd\,(a)$$

para todos $a, b \in R$.

Denotaremos por $Der_K R$ o conjunto de todas as $K-$derivações de R. Assim, $Der_K K[X] \subseteq End_K(K\,[X])$ e é fácil ver que $Der_K R$ é um $K-$espaço vetorial.

Proposição 28 *i) Se d é uma derivação de $K\,[X]$, então, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e todo $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$d(X_i^k) = kX_i^{k-1}d(X_i);$$

ii) Se d é uma derivação de $K\,[X]$, então

$$d = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i;$$

iii) Toda derivação d de $K[X]$ se escreve, de maneira única, na forma

$$d = \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_i,$$

onde $p_1, ..., p_n \in K[X]$. Ou seja, $Der_K K[X]$ é um $K[X]-$módulo livre com base $B = \{\partial_1, ..., \partial_n\}$.

Prova. *i)* A prova é por indução sobre k : temos, para $k = 1$,

$$d(X_i) = d(X_i^1) = 1X_i^{1-1}d(X_i).$$

Seja $k \geq 1$ e suponhamos que $d(X_i^k) = kX_i^{k-1}d(X_i)$. Então

$$\begin{aligned}
d(X_i^{k+1}) &= d(X_i X_i^k) = X_i d(X_i^k) + X_i^k d(X_i) \\
&= X_i k X_i^{k-1} d(X_i) + X_i^k d(X_i) \\
&= k X_i^k d(X_i) + X_i^k d(X_i) \\
&= (k+1) X_i^k d(X_i).
\end{aligned}$$

ii) Seja $X^\alpha \in K[X]$, com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, e suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Teremos:

$$\begin{aligned}
d(X^\alpha) &= d(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) = X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} d(X_1^{\alpha_1}) + X_1^{\alpha_1} d(X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n}) \overset{(i)}{=} \\
&= X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} d(X_1) + X_1^{\alpha_1} d(X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n}) \\
&= X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} d(X_1) + \\
&\quad + X_1^{\alpha_1} \left(X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n} d(X_2^{\alpha_2}) + X_2^{\alpha_2} d(X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n}) \right) \\
&\overset{(i)}{=} d(X_1)\alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} + X_1^{\alpha_1} X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n} \alpha_2 X_1^{\alpha_2 - 1} d(X_2) \\
&\quad + X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} d(X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n}) \\
&= d(X_1)\partial_1(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) + d(X_2)\partial_2(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) + \\
&\quad + X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} d(X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d(X_1)\partial_1(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) + d(X_2)\partial_2(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) + \\
&\quad + X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}d(X_3^{\alpha_3}...X_n^{\alpha_n}) \\
&= ... \\
&= d(X_1)\partial_1(X^\alpha) + ... + d(X_n)\partial_n(X^\alpha) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i\right)(X^\alpha).
\end{aligned}$$

Como os monômios X^α formam uma base para $K[X]$, concluímos que

$$d = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i.$$

iii) É apenas caso particular de *(ii)*: $p_i = d(X_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$. ∎

Assim, temos que $Der_K K[X] \subseteq \mathbb{A}_n$.

Ainda, dada a Definição 24, temos que os elementos de ordem 1 de $\mathbb{A}_n$ são os elementos do conjunto

$$(Der_K K[X] \setminus \{0\}) + K[X],$$

ou seja: um elemento de ordem 1 é da forma $d + \gamma$, com d uma derivação não-nula e $\gamma \in K[X]$. Por exemplo, o operador

$$\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n + \gamma,$$

onde $\alpha_2, ..., \alpha_n, \gamma \in K[X]$, é um operador de $\mathbb{A}_n$ de ordem 1.

Sobre estes operadores, temos os seguintes resultados técnicos:

Lema 29 *Seja* $d = \alpha_1\partial_1 + ... + \alpha_n\partial_n \in \mathbb{A}_n$ *uma derivação e* $p \in K[X]$. *Então*

$$[d, p] = d(p).$$

Prova. Temos

$$\begin{aligned}[d,p] &= [\alpha_1\partial_1 + ... + \alpha_n\partial_n, p] \\ &= [\alpha_1\partial_1, p] + ... + [\alpha_n\partial_n, p].\end{aligned}$$

Agora observe que, para cada i,

$$[\alpha_i\partial_i, p] = \alpha_i [\partial_i, p] \overset{Prop.6\,(i)}{=} \alpha_i\partial_i (p).$$

Portanto,

$$[d,p] = \alpha_1\partial_1 (p) + ... + \alpha_n\partial_n (p) = d (p). \blacksquare$$

Corolário 30 *Seja S um operador de ordem 1, digamos, da forma $S = d+\gamma$, com d uma derivação não-nula e $\gamma \in K[X]$. Então, para qualquer $p \in K[X]$,*

$$[S,p] = d(p) \in K[X].$$

Prova. Basta lembrar que $[\gamma, p] = 0$, pois polinômios comutam. $\blacksquare$

Trataremos agora do conceito de derivação simples que será usado para aprofundarmos a caracterização dos ideais maximais de $\mathbb{A}_n$.

Definição 31 *Seja d uma derivação de um anel R. Um ideal I de R é um $d-$**ideal** (ou um **ideal estável por** d) se $d(I) \subseteq I$. Dizemos que R é $d-$**simples** e que d é uma **derivação simples** de R se R não contém $d-$ideais além dos triviais $\{0\}$ e R.*

Antes de darmos exemplos de derivações simples, provamos um resultado que simplifica, em muitos casos, a constatação sobre a estabilidade de um ideal, a saber, que mostra que, para verificarmos que um ideal I de um anel R é um $d-$ideal, é suficiente verificar a $d-$estabilidade nos geradores de I.

Proposição 32 *Seja I um ideal de um anel comutativo R gerado pelos elementos $a_1, ..., a_s$, e seja d uma derivação de R. Então I é um $d-$ideal se, e somente se, $d(a_i) \in I$ para todo $i = 1, ..., s$.*

Prova. ($\Rightarrow$) É óbvia.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $d(a_i) \in I$ para todo i. Queremos mostrar que, para todo $a \in I$, ocorre $d(a) \in I$.

Seja $a \in I$, ou seja, $a = \sum_{i=1}^{s} r_i a_i$, onde $r_i \in R$. Temos:

$$\begin{aligned} d(a) &= d\left(\sum_{i=1}^{s} r_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{s} d(r_i a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{s} (d(r_i)a_i + r_i d(a_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{s} d(r_i)a_i + \sum_{i=1}^{s} r_i d(a_i). \end{aligned}$$

E, como $d(a_i) \in I$ para todo i e I é ideal, temos de fato $d(a) \in I$. ■

Exemplo 33 *$K[X_1]$ é ∂_1-simples.*

De fato, Seja $I \subseteq K[X_1]$ um ∂_1-ideal não-nulo. Seja $f \in I$ um polinômio gerador de I (lembramos que $K[X_1]$ é anel a ideais principais). Seja n o grau de f.

Pelo fato de I ser um ∂_1-ideal, temos que

$$\partial_1(f) \in I.$$

Daí, se tivermos $n > 0$ então $\partial_1(f)$ tem grau $n - 1 \geq 0$ em I. Mas isto contraria a minimalidade do grau de f. Portanto, $n = 0$, ou seja, $f \in K^*$ e, conseqüentemente, $I = K[X_1]$. Assim, $K[X_1]$ não contém ∂_1-ideais próprios não-nulos.

Lema 34 *Se d é uma derivação de $K[X]$, então, para todo $c \in K^*$, as derivações d e cd têm exatamente os mesmos ideais estáveis.*

Prova. Imediata. ■

Proposição 35 *As derivações simples de $K[X_1]$ são precisamente os operadores da forma $c\partial_1$ para algum $c \in K^*$.*

Prova. Pelo Lema 34 e pelo Exemplo acima, é claro que, para todo $c \in K^*$, a derivação $c\partial_1$ é simples.

Mostremos agora que se $p \in K[X_1]\backslash K$, então $d = p\partial_1$ não é uma derivação simples de $K[X_1]$. De fato, considerando o ideal $I = pK[X_1]$, temos

$$d(p) = p\partial_1(p) \in pK[X_1].$$

Desta forma, pela Proposição 32, $pK[X_1]$ é um $d-$ideal de $K[X_1]$ que é não-trivial se p não for constante, e, portanto, neste caso, $d = p\partial_1$ não é uma derivação simples. ■

3.4 Involução de módulos

Nesta seção, veremos que determinar ideais à esquerda de $\mathbb{A}_n$ é equivalente a determinar ideais à direita de $\mathbb{A}_n$.

Definição 36 *Seja R uma $K-$álgebra. Uma* ***involução*** *de R é um isomorfismo de $K-$espaços vetoriais $\tau : R \to R$ que satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer a e $b \in R$,*

(1) $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$;

(2) $\tau^2 = Id$, onde Id é a aplicação identidade sobre R.

Sejam τ uma involução de R e M um $R-$módulo à direita. Vamos, a partir de τ e de M, construir um $R-$módulo à esquerda que denotaremos por M^t, da seguinte maneira:

$$M^t = M$$

como grupo abeliano e, para cada $a \in R$ e $u \in M^t$, definimos a ação à esquerda de a em u por

$$a * u = u\tau(a). \tag{14}$$

Esta ação à esquerda é chamada de *ação transposta*. Munidos desta operação, afirmamos que M^t é um $R-$módulo à esquerda. De fato, para quaisquer $u, v \in M$ e $a, b \in R$, teremos, já que M é um $R-$módulo à direita:

$$\begin{aligned}
(a+b) * u &= u\tau(a+b) = u(\tau(a) + \tau(b)) \\
&= u\tau(a) + u\tau(b) = a * u + b * u; \\
(ab) * u &= u\tau(ab) = u(\tau(b)\tau(a)) \\
&= (u\tau(b))\tau(a) = a * (u\tau(b)) = a * (b * u); \\
a * (u+v) &= (u+v)\tau(a) = u\tau(a) + v\tau(a) \\
&= a * u + a * v.
\end{aligned}$$

E se R é um anel com unidade 1, então

$$1 \overset{\tau^2 = Id}{=} \tau(\tau(1)) = \tau(1\tau(1)) = \tau^2(1)\tau(1) = 1\tau(1) = \tau(1).$$

Daí,

$$1 * u = u\tau(1) = u1 = u.$$

Analogamente, a condição *(1)* da definição acima nos permite transformar um $R-$módulo à esquerda N num $R-$módulo à direita N^t como segue: $N^t = N$ como grupo abeliano, enquanto que a operação externa é definida por

$$n \circ r = \tau(r)n, \tag{15}$$

para todo $n \in N$, $r \in R$.

A condição (2) nos garante que, para todo $R-$módulo à direita M e para todo $R-$módulo à esquerda N, $(M^t)^t = M$ e $(N^t)^t = N$. De fato, para quaisquer $r \in R$, $u \in M$ e $v \in N$,

$$\begin{aligned} ur &= \tau(r) * u = u \circ \tau(\tau(r)) = u \circ r; \\ rv &= v \circ \tau(r) = \tau(\tau(r)) * v = r * v. \end{aligned}$$

Proposição 37 *Sejam R uma $K-$álgebra, τ uma involução de R e M um $R-$módulo à esquerda (à direita). Então M' é um $R-$submódulo à esquerda (à direita) próprio de M se, e somente se, M'^t é um $R-$submódulo à direita (à esquerda) próprio de M^t.*

Prova. Suponhamos M' um $R-$submódulo à esquerda próprio de M. Já sabemos que $M'^t = M'$ como grupo abeliano, portanto, se M' é um subconjunto próprio de M, então M'^t é um subconjunto próprio de M^t. Finalmente, o fato de M'^t ser um $R-$submódulo à direita vem da forma como definimos a ação transposta em (14).

A volta prova-se de maneira análoga. ■

Definição 38 *Dizemos que um $R-$módulo à esquerda (à direita) M é um* ***$R-$módulo simples*** *se M não possui $R-$submódulos à esquerda (à direita) próprios.*

Corolário 39 *Sejam R uma $K-$álgebra, τ uma involução de R e M um $R-$módulo à esquerda (à direita). Então M é simples se, e somente se, M^t é simples.*

Prova. Suponhamos que M^t é simples. Seja N um submódulo não-nulo à esquerda de M. Pela Proposição 37, N^t é um submódulo não-nulo à direita de M^t e, portanto, como M^t é simples, $N^t = M^t$. Daí,

$$N = (N^t)^t = (M^t)^t = M,$$

ou seja, M é simples.

Para provar a ida, basta lembrar que $(M^t)^t = M$ e aplicar a mesma prova acima. ∎

Proposição 40 *Sejam R uma $K-$álgebra, τ uma involução de R e M um $R-$módulo à esquerda (à direita).Então M' é um $R-$submódulo à esquerda (à direita) cíclico de M se, e somente se, M'^t é um $R-$submódulo à direita (à esquerda) cíclico de M^t.*

Prova. É conseqüência da forma como foram definidas as ações transpostas em (14) e (15). ∎

Proposição 41 *Considere a $K-$álgebra $\mathbb{A}_n$. A transformação linear $\tau : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$, induzida por*

$$\tau(f\partial^\alpha) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f$$

para cada $f \in K[X]$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, é uma involução de $\mathbb{A}_n$.

Prova. Deixamos ao leitor conferir que τ é um isomorfismo de $K-$espaços vetoriais, e verificaremos aqui as condições (1) e (2) da Definição 36.

Provemos inicialmente que $\tau(DD') = \tau(D)\tau(D')$ para quaisquer $D, D' \in \mathbb{A}_n$. Se algum dos elementos, D ou D' de $\mathbb{A}_n$, é o operador nulo, então a igualdade se verifica trivialmente. Assim, podemos supor $D \neq 0 \neq D'$ e vamos provar a igualdade por indução em $ord(D) + ord(D')$. Se $ord(D) + +ord(D') = 0$, então $ord(D) = ord(D') = 0$, ou seja,

$$D = f \in K[X],\ D' = g \in K[X].$$

Daí

$$\tau(DD') = \tau(fg) = (-1)^{|0|}\partial^0 fg = fg = gf = \tau(D')\tau(D).$$

Seja $k \geq 1$ e suponhamos que a igualdade $\tau(DD') = \tau(D)\tau(D')$ se verifique para quaisquer $D,\ D' \in \mathbb{A}_n$ tais que $ord(D) + ord(D') < k$. Tomemos $D,\ D' \in \mathbb{A}_n$ tais que $ord(D) + ord(D') = k$. Como τ é linear, é suficiente mostrarmos que vale a igualdade para o caso em que $D = f\partial^\alpha$ e $D' = g\partial^\beta$, com $f,\ g \in K[X]$ e $|\alpha| + |\beta| = k$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
\tau(DD') &= \tau(f\partial^\alpha g\partial^\beta) = \tau\left(f(g\partial^\alpha + [\partial^\alpha, g])\partial^\beta\right) \\
&= \tau(fg\partial^{\alpha+\beta} + f[\partial^\alpha, g]\partial^\beta) \\
&= \tau(fg\partial^{\alpha+\beta}) + \tau(f[\partial^\alpha, g]\partial^\beta).
\end{aligned}$$

Como, pela Proposição 26, $ord(f[\partial^\alpha, g]\partial^\beta) \leq |\alpha| - 1 + |\beta| < k$, podemos aplicar a hipótese de indução e escrever

$$\begin{aligned}
\tau(DD') &= \tau(fg\partial^{\alpha+\beta}) + \tau(f[\partial^\alpha, g]\partial^\beta) \overset{h.i.}{=} \\
&= \tau(fg\partial^{\alpha+\beta}) + \tau(\partial^\beta)\tau([\partial^\alpha, g])\tau(f) \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\partial^{\alpha+\beta}fg + (-1)^{|\beta|}\partial^\beta(\tau(\partial^\alpha g) - \tau(g\partial^\alpha))f \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\partial^{\alpha+\beta}fg + (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f - (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(g\partial^\alpha)f \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\partial^{\alpha+\beta}fg + (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f - (-1)^{|\beta|}\partial^\beta(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha gf \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\partial^{\alpha+\beta}fg + (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f - (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\partial^{\alpha+\beta}fg \\
&= (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Se $|\alpha| = 0$, então $D = f$ e $\tau(D) = f$. Assim, $\tau(DD') = (-1)^{|\beta|}\partial^\beta gf = = \tau(D')\tau(D)$. Agora, se $|\alpha| \geq 1$, então existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Como

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha g &= \partial^{\alpha-e_i}\partial_i g \\
&= \partial^{\alpha-e_i}(g\partial_i + [\partial_i, g]) \overset{Prop.6\,(i)}{=} \\
&= \partial^{\alpha-e_i}g\partial_i + \partial^{\alpha-e_i}\partial_i(g),
\end{aligned}$$

tomando $E = \partial^{\alpha-e_i}$ e $E' = g\partial_i$, podemos escrever

$$\partial^\alpha g = EE' + \partial^{\alpha-e_i}\partial_i(g).$$

Assim, como $ord(\partial^{\alpha-e_i}\partial_i(g)) = |\alpha| - 1 \leq |\alpha| - 1 + |\beta| < k$, teremos

$$\begin{aligned}
\tau(\partial^\alpha g) &= \tau(EE') + \tau(\partial^{\alpha-e_i}\partial_i(g)) \\
&= \tau(EE') + \tau(\partial_i(g))\tau(\partial^{\alpha-e_i}) \\
&= \tau(EE') + \partial_i(g)(-1)^{|\alpha-e_i|}\partial^{\alpha-e_i} \\
&= \tau(EE') + (-1)^{|\alpha|-1}\partial_i(g)\partial^{\alpha-e_i} \\
&= \tau(EE') - (-1)^{|\alpha|}\partial_i(g)\partial^{\alpha-e_i}.
\end{aligned}$$

Por (16), para quaisquer D, D' das formas $D = f\partial^\alpha$ e $D' = g\partial^\beta$, teremos

$$\tau(DD') = \tau(f\partial^\alpha g\partial^\beta) = (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f.$$

Então, colocando E e E' nos lugares de D e D' na fórmula acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(EE') &= \tau(\partial^{\alpha-e_i}g\partial_i) \\
&= \tau\left(\partial^{\alpha-e_i}g\partial^{e_i}\right) \\
&= (-1)^1\partial^{e_i}\tau(\partial^{\alpha-e_i}g) \\
&= (-1)\,\partial_i\tau\left(\partial^{\alpha-e_i}g\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução em $\tau(\partial^{\alpha-e_i}g)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\tau(EE') &= (-1)\partial_i\tau(\partial^{\alpha-e_i}g) \\
&= (-1)\partial_i g(-1)^{|\alpha-e_i|}\partial^{\alpha-e_i} \\
&= (-1)(-1)^{|\alpha-e_i|}(\partial_i g\partial^{\alpha-e_i}) \\
&= (-1)^{|\alpha|}(\partial_i g\partial^{-e_i}).
\end{aligned}$$

Sabemos que $[\partial_i, g] = \partial_i g - g\partial_i = \partial_i(g)$. Logo, $\partial_i g = \partial_i(g) + g\partial_i$. Então,

$$\tau(EE') = (-1)^{|\alpha|}(\partial_i(g) + g\partial_i)\partial^{\alpha-e_i}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\tau(\partial^\alpha g) &= \tau(EE') - (-1)^{|\alpha|}\partial_i(g)\partial^{\alpha-e_i} \\
&= (-1)^{|\alpha|}\partial_i(g)\partial^{\alpha-e_i} + (-1)^{|\alpha|}g\partial_i\partial^{\alpha-e_i} - (-1)^{|\alpha|}\partial_i(g)\partial^{\alpha-e_i} \\
&= (-1)^{|\alpha|}g\partial^\alpha. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Usando (17), podemos reescrever a expressão em (16) obtendo

$$\begin{aligned}
\tau(DD') &= (-1)^{|\beta|}\partial^\beta\tau(\partial^\alpha g)f \\
&= (-1)^{|\beta|}\partial^\beta(-1)^{|\alpha|}g\partial^\alpha f \\
&= (-1)^{|\beta|}\partial^\beta g(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f \\
&= \tau(D')\tau(D),
\end{aligned}$$

o que demonstra (1) da Definição 36.

Agora, vamos mostrar que $\tau^2 = Id$. Usando a definição de τ, teremos, para cada gerador $f\partial^\alpha$ com $f \in K[X]$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned}
\tau(\tau(f\partial^\alpha)) &= \tau((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}\tau(\partial^\alpha f) \stackrel{(17)}{=} \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}f\partial^\alpha = f\partial^\alpha = Id(f\partial^\alpha).
\end{aligned}$$

Como τ é linear, podemos concluir que $\tau^2 = Id$. Assim, τ é de fato uma involução de $\mathbb{A}_n$. ■

Definição 42 *A involução apresentada no lema anterior é conhecida como a* ***involução padrão*** *de* $\mathbb{A}_n$.

As proposições 37, 40 e 41 fundamentam o fato de que determinar ideais principais maximais à esquerda de $\mathbb{A}_n$ é equivalente a determinar ideais principais maximais à direita de $\mathbb{A}_n$, que deverá ser visto, neste caso, como um $\mathbb{A}_n$−módulo livre.

4 ESTRUTURA DE IDEAIS DA ÁLGEBRA DE WEYL

Apesar de muitos anéis não-comutativos admitirem ideais bilaterais, veremos que este não é o comportamento de $\mathbb{A}_n$.

4.1 A simplicidade de $\mathbb{A}_n$

Definição 43 *Um anel é dito **simples**, se seu único ideal bilateral próprio é o ideal gerado pelo zero.*

Teorema 44 *A álgebra $\mathbb{A}_n$ é simples.*

Prova. Seja I um ideal bilateral não-nulo de $\mathbb{A}_n$. Tomemos um elemento $D \neq 0$ de menor grau em I. Se D tem grau zero, ele é uma constante e $I = \mathbb{A}_n$. Portanto, podemos supor que D tenha grau $r > 0$ e verificaremos que isto nos leva a uma contradição.

Suponhamos que (α, β) é um multi-índice de comprimento r de D, isto é, $X^\alpha \partial^\beta$ é uma parcela de D com coeficiente não-nulo tal que $|\alpha| + |\beta| = r$. Se $\beta_i \neq 0$ para algum i, então $[X_i, D]$ é não-nulo e tem grau $r - 1$, dado o Corolário 15. Visto que I é um ideal bilateral de $\mathbb{A}_n$ e $D \in I$, temos que $[X_i, D] \in I$. Mas isto contradiz a minimalidade do grau de D. Desta forma, temos $\beta = (0, ..., 0)$. Agora, como $r > 0$, devemos ter $\alpha_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Assim, $[\partial_i, D]$ é um elemento não-nulo de I de grau $r - 1$ (de novo pelo Corolário 15), o que nos leva novamente a uma contradição. ∎

Observação 45 *O conceito de ordem de um operador permite também discutir a estrutura de ideais da Álgebra de Weyl. Como exemplo, damos uma* *outra prova para o resultado acima, apoiados agora na propriedade (ii) da Proposição 26. A idéia da demonstração é essencialmente a mesma.*

Outra prova para o Teorema 44. Seja $I \neq 0$ um ideal bilateral de $\mathbb{A}_n$. Tomemos um elemento não-nulo $D \in I$ de ordem mínima possível. Suponha que $ord\,(D) \geq 1$. Então, expressando D em termos da base B explicitada na Proposição 23, temos que existe uma parcela não-nula $p\partial^\beta$ de D, com $\beta_i \neq 0$ para algum i. Pelo Corolário 15, $[X_i, D] \neq 0$; além disso, como $D \in I$ e I é ideal bilateral, temos que $[X_i, D] \in I$. Mas, pela Proposição 26 *(ii)*, $ord\,([X_i, D]) < ord\,(D)$, o que contradiz a minimalidade da ordem de D em I. Logo, concluímos que $ord\,(D) = 0$ e, portanto, $K\,[X] \cap I \neq \{0\}$.

Desta forma, seja p um polinômio não-nulo de grau mínimo em I. Suponha que $grau\,(p) \geq 1$. Seja kX^α um monômio de p, com $\alpha_i \neq 0$ para algum i, sendo $\alpha = grau(p)$. Então, por um lado, $[\partial_i, p] \in I$, e, por outro lado, dado o item *(i)* da Proposição 6, temos que $[\partial_i, p] = \partial_i\,(p) \neq 0$. Mais até:

$$grau\,([\partial_i, p]) = grau\,(\partial_i\,(p)) < grau\,(p)\,,$$

o que contradiz a minimalidade do grau de p em I. Assim sendo, $p \in K^*$ e, portanto, $K \cap I \neq \{0\}$, donde $I = \mathbb{A}_n$. Conseqüentemente, $\mathbb{A}_n$ é simples. ∎

Sabe-se que todo anel comutativo simples é um corpo. No entanto, isto não necessariamente ocorre com anéis não-comutativos, isto é, nem todo anel não-comutativo simples é um anel de divisão. De fato, apesar de $\mathbb{A}_n$ ser simples, temos:

Teorema 46 *A álgebra $\mathbb{A}_n$ não é um anel de divisão.*

Prova. É conseqüência imediata do Corolário 22. ∎

Corolário 47 *Todo elemento não-constante de $\mathbb{A}_n$ gera um ideal unilateral não-trivial.*

A Álgebra de Weyl não é, tampouco, um anel a ideais principais à esquerda (ou à direita).

Antes de continuarmos, convém lembrar o que foi estabelecido na seção anterior: o fato de que determinar ideais à esquerda de $\mathbb{A}_n$ é equivalente a determinar ideais à direita de $\mathbb{A}_n$: lembrando que um ideal à esquerda de um anel R é precisamente um R–submódulo à esquerda de R, basta fazer uso da involução padrão de $\mathbb{A}_n$ apresentada na Proposição 41. Assim, o que estabelecermos, a partir de agora, para ideais à esquerda, valerá, igualmente, para ideais à direita.

Proposição 48 *$\mathbb{A}_n$ não é anel a ideais principais à esquerda.*

Prova. Para $n = 1$, prova-se que o ideal à esquerda $J = \mathbb{A}_1\partial_1^2 + \mathbb{A}_1 (X_1\partial_1 - 1)$ não é principal (veja [2], pág. 19, exerc. 4.8 e 4.9).

Para $n \geq 2$, afirmamos que o ideal à esquerda gerado por $\partial_1, ..., \partial_n$ não é principal. Com efeito, suponhamos que $D \in \mathbb{A}_n$ é um gerador deste ideal, que denotaremos por I. Como $\partial_1 \in I$, existe $D' \in \mathbb{A}_n$ tal que

$$\partial_1 = D'D. \tag{18}$$

Assim, pela Proposição 19, D tem grau 0 ou 1. Afirmamos que I é um ideal não-trivial, e portanto D tem grau 1. De fato, se tivéssemos $I = \mathbb{A}_n$, então, dado $k \in K^*$, existiriam $D_1, ..., D_n$ tais que $D_1\partial_1 + ... + D_n\partial_n = k$, o que é impossível por razões de grau (já que todos os termos não-nulos que estiverem no lado esquerdo da igualdade terão, no mínimo, *grau* 1). Portanto, da igualdade em (18), obtemos que $D' \in K$ e $D = c_1\partial_1$ para algum $c_1 \in K^*$.

Desenvolvendo, agora, o mesmo raciocínio, com ∂_2 no lugar de ∂_1, obtemos que $D = c_2\partial_2$ para algum $c_2 \in K$; uma contradição. Portanto, I não é um ideal principal. ∎

Apesar de $\mathbb{A}_n$ não ser um anel a ideais principais à esquerda (ou à direita), prova-se que todo ideal lateral de $\mathbb{A}_n$ é gerado por dois elementos. Este é um importante resultado devido a J. T. Stafford (veja [11]). Nos limitaremos, aqui, a apresentar um exemplo, uma vez que não faremos uso deste fato neste trabalho.

Exemplo 49 *O ideal à esquerda gerado por ∂_1, ∂_2 e ∂_3 pode também ser gerado por $D_1 = \partial_1$ e $D_2 = \partial_2 + X_1\partial_3$.*

Prova. É claro que $I = \mathbb{A}_n \cdot \langle D_1, D_2 \rangle \subseteq \mathbb{A}_n \cdot \langle \partial_1, \partial_2, \partial_3 \rangle$. É evidente também que $\partial_1 \in I$. Afirmamos que $\partial_3 = [D_1, D_2]$ e, portanto, é um elemento de I. De fato,

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2] &= \partial_1 (\partial_2 + X_1\partial_3) - (\partial_2 + X_1\partial_3)\,\partial_1 \\
&= \partial_1\partial_2 + \partial_1 X_1 \partial_3 - \partial_2\partial_1 - X_1\partial_3\partial_1 \\
&= \partial_1\partial_2 + (X_1\partial_1 + 1)\,\partial_3 - \partial_1\partial_2 - X_1\partial_1\partial_3 \\
&= \partial_3.
\end{aligned}$$

Daí, $\partial_3 \in I$, donde $\partial_2 = D_2 - X_1\partial_3 \in I$.

Concluímos, então, que $\mathbb{A}_n \cdot \langle D_1, D_2 \rangle = \mathbb{A}_n \cdot \langle \partial_1, \partial_2, \partial_3 \rangle$. ■

Passemos, agora, a procurar ideais principais maximais (note que, tendo em vista o Corolário 47, é uma questão natural perguntarmo-nos quais ideais principais são maximais). De forma ainda mais específica, o que vimos na Seção 3.4 fundamenta a idéia de que abordar o problema de buscar ideais principais maximais à esquerda em $\mathbb{A}_n(K)$ é equivalente a determinar ideais principais maximais à direita em $\mathbb{A}_n(K)$: se τ é a involução padrão de $\mathbb{A}_n(K)$ (veja Proposição 41) e $S\mathbb{A}_n(K)$ é um ideal à direita maximal principal, então $\mathbb{A}_n(K)\,\tau(S)$ é um ideal à esquerda maximal principal de $\mathbb{A}_n(K)$ (veja Proposições 37 e 40).

Preocuparemo-nos então, a partir daqui, exclusivamente com ideais maximais principais à esquerda.

4.2 A procura de ideais maximais principais à esquerda de $\mathbb{A}_n$

Concentraremo-nos nos geradores de ordem 1 e, nesta direção, começaremos com os operadores de ordem 1 mais simples, a saber, as derivações. No entanto, o que obtemos são os seguintes resultados:

Proposição 50 *Uma derivação $p\partial_1$, com $p \in K[X_1]$, gera um ideal principal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_1$ se, e somente se, $p \in K^*$.*

Prova. ($\Leftarrow$) Como $K^* \subset \mathbb{A}_1$, não há diferenças entre o ideal gerado por $p\partial_1$, com $p \in K^*$, e o ideal gerado por ∂_1. Basta mostrar, então, que $\mathbb{A}_1\partial_1$ é um ideal principal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_1$.

Escrevendo os elementos de $\mathbb{A}_1$ em termos da base $\{\partial_1^\beta : \beta \in \mathbb{N}\}$, vemos que os operadores não-nulos de $\mathbb{A}_1\partial_1$ são todos os operadores de $\mathbb{A}_1$ do tipo

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i, \text{ com } p_i \in K\left[X_1\right],$$

ou seja, que não possuem um "termo independente".

Seja agora J um ideal à esquerda de $\mathbb{A}_1$ tal que $\mathbb{A}_1\partial_1 \subsetneq J$. Afirmamos que $J = \mathbb{A}_1$. De fato, seja D um operador de J que não pertença a $\mathbb{A}_1\partial_1$. Então, ele é do tipo

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i + p_0, \text{ com } p_i \in K\left[X_1\right] \text{ e } p_0 \neq 0.$$

Como $-\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i \in \mathbb{A}_1\partial_1 \subsetneq J$, temos $p_0 \in J$. Assim, $\partial_1 p_0 \in J$ (pois J é ideal) e $p_0\partial_1 \in J$ (pois $\mathbb{A}_1\partial_1 \subsetneq J$); portanto

$$[\partial_1, p_0] \in J,$$

ou seja, pela Proposição 6, $\partial_1(p_0) \in J$.

Agora, pondo $p_0' = \partial_1(p_0) \in J$, temos que p_0' tem grau menor do que p_0; daí, repetindo o raciocínio acima para p_0', vamos concluir que

$$\partial_1(p_0') \in J.$$

Prosseguindo com este raciocínio, chegaremos à conclusão que em J existe um polinômio de grau zero:

$$K \cap J \neq \{0\}$$

e, portanto, $J = \mathbb{A}_1$. Assim, $\mathbb{A}_1\partial_1$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_1$.

($\Rightarrow$) Mostraremos que, se $grau(p) \geq 1$, então o ideal $\mathbb{A}_1 p\partial_1$ não é maximal.

Primeiramente, observemos que, pela Proposição 19, para todo $D \in \mathbb{A}_1 p\partial_1$, temos $grau(D) \geq grau(p\partial_1) \geq 2$. Portanto, como $grau(\partial_1) = 1$, $\partial_1 \notin \mathbb{A}_1 p\partial_1$.

Ainda, temos que

$$\mathbb{A}_1 p\partial_1 + \mathbb{A}_1\partial_1 = \mathbb{A}_1\partial_1,$$

no qual, pela Proposição 26, só ocorrem operadores de ordem maior ou igual a 1. Desta forma, como $ord(1) = 0$, $\mathbb{A}_1\partial_1 \neq \mathbb{A}_1$.

Pelo exposto, concluímos que

$$\mathbb{A}_1 p\partial_1 \subsetneq \mathbb{A}_1 p\partial_1 + \mathbb{A}_1\partial_1 = \mathbb{A}_1\partial_1 \subsetneq \mathbb{A}_1$$

e, portanto, $\mathbb{A}_1 p\partial_1$ não é um ideal maximal. ∎

Proposição 51 *Para $n \geq 2$, nenhuma derivação de $K[X]$ gera um ideal principal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$.*

Prova. Seja

$$d = \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_i,$$

com $p_i \in K[X]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, uma derivação de $K[X]$. Afirmamos que $I = \mathbb{A}_n d$ não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

Inicialmente salientamos que o ideal $J = \mathbb{A}_n \partial_1 + ... + \mathbb{A}_n \partial_n$ é um ideal próprio. De fato, se ocorresse $1 \in J$ então existiriam $D_1, ..., D_n \in \mathbb{A}_n$ tais que

$$D_1 \partial_1 + ... + D_n \partial_n = 1.$$

Aplicando os dois lados da igualdade em $c \in K^*$, teremos

$$0 = (D_1 \partial_1 + ... + D_n \partial_n)(c) = 1(c) = 1c = c;$$

absurdo.

Vamos agora dividir a demonstração em dois casos.

1.ºCaso: existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $p_i = 0$.

Primeiramente, verifiquemos que

$$I = \mathbb{A}_n d \subsetneq J = \mathbb{A}_n \partial_1 + ... + \mathbb{A}_n \partial_n.$$

Que ocorre a inclusão é trivial; que ela é própria vem do fato de que $\partial_i \in J \setminus I$. Se não, vejamos: se tivéssemos $\partial_i \in I$, então existiria $D \in \mathbb{A}_n$ tal que $Dd = \partial_i$. Porém, como $p_i = 0$, ∂_i deve estar presente em D. Assim, $ord(D) \geq 1$ e, pela Proposição 26, $ord(Dd) \geq 2$. Absurdo, pois $Dd = \partial_1$.

Assim, temos

$$I = \mathbb{A}_n d \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}_n,$$

e, portanto, I não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

2.ºCaso: para todo $i \in \{1, ..., n\}$, temos $p_i \neq 0$.

Afirmamos que, também aqui,

$$I = \mathbb{A}_n d \subsetneq J = \mathbb{A}_n \partial_1 + ... + \mathbb{A}_n \partial_n.$$

De fato, temos que $\partial_1 \in J \diagdown I$: por absurdo, suponhamos $\partial_1 \in I$, ou seja, existe $D \in \mathbb{A}_n$ tal que

$$\begin{aligned} \partial_1 &= Dd = D \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_i = \sum_{i=1}^{n} D p_i \partial_i \\ &= D p_1 \partial_1 + ... + D p_n \partial_n. \end{aligned}$$

Desta forma, teremos

$$(1 - Dp_1)\, \partial_1 = Dp_2 \partial_2 + ... + Dp_n \partial_n.$$

Se $ord(D) = m$, então sabemos que $ord(Dp_i) = m$. Pela Proposição 16 *(i)*, temos que os multi-índices de ordem m que aparecem em Dp_i são os mesmos que aparecem em D. Com isto, no lado esquerdo da igualdade acima, os multi-índices de comprimento $m+1$ são da forma $\beta + e_1$, com β envolvido em D, enquanto que, do lado direito, os multi-índices de comprimento $m+1$ são da forma $\beta + e_i$, com $i \geq 2$, o que é um absurdo, pela Proposição 23.

Assim, novamente teremos

$$I = \mathbb{A}_n d \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}_n$$

e I não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$. ∎

Passamos agora a examinar se é possível operadores de ordem 1 do tipo $d + \gamma$, onde d é uma derivação de $K[X]$ e $\gamma \in K[X]$, gerarem ideais maximais de $\mathbb{A}_n$.

4.3 Sobre operadores de ordem 1 que geram ideais maximais à esquerda de $\mathbb{A}_n$

Definição 52 *Sejam d uma derivação de $K[X]$ e $\gamma \in K[X]$. Com relação ao operador $d + \gamma$, denominamos γ* ***uma perturbação de*** *d.*

Para $n = 1$ nos restringiremos ao seguinte resultado:

Proposição 53 *Todo ideal da forma $I = \mathbb{A}_1.(c_1\partial_1 + c_2)$, com $c_1, c_2 \in K$ e $c_1 \neq 0$, é um ideal maximal de $\mathbb{A}_1(K)$.*

Prova. O caso $c_2 = 0$ já foi considerado na Proposição 50. E, para $c_2 \neq 0$, temos que $c_1\partial_1 + c_2$ e $\partial_1 + c_2/c_1$ geram o mesmo ideal. Assim, denotando c_2/c_1 simplesmente por c, resta-nos mostrar que todo ideal da forma $\mathbb{A}_1.(\partial_1 + c)$, com $c \in K^*$, é maximal.

Primeiramente, verifiquemos que $\partial_1 \notin \mathbb{A}_1$, e, portanto, $I \neq \mathbb{A}_1$. Com efeito, se $\partial_1 \in I$, existe $D \in \mathbb{A}_1$ tal que

$$\partial_1 = D \cdot (\partial_1 + c).$$

Como $grau(\partial_1) = grau(\partial_1 + c) = 1$, pela Proposição 19 *(iv)*, $grau(D) = 0$, i.e., $D \in K^*$, o que inviabiliza a igualdade acima, dado que $c \neq 0$ (veja Proposição 23).

Antes de continuarmos a prova, vejamos duas afirmações que nos serão úteis.

Afirmação 1:

$$(\partial_1 + c)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j c^j \partial_1^{k-j}. \tag{19}$$

De fato, trata-se da fórmula do Binômio de Newton que vale, neste caso, pois ∂_1 comuta com c.

Afirmação 2: Todo elemento de $\mathbb{A}_1$ pode ser expresso na forma

$$\sum_{i=0}^{m} p_i (\partial_1 + c)^i ,$$

para algum $m \in \mathbb{N}$ e com $p_i \in K[X_1]$ para todo i. Com efeito, o resultado é trivial para o operador nulo. Seja $D \in \mathbb{A}_1$ um operador de ordem m, digamos

$$D = \sum_{i=0}^{m} h_i \partial_1^i .$$

Se $m = 0$, então o resultado é também trivial. Seja agora $m \geq 0$ e suponhamos que a afirmação vale para todo operador de ordem menor ou igual a m. Se $D = \sum_{i=0}^{m+1} h_i \partial_1^i$, com $h_{m+1} \neq 0$, teremos

$$\begin{aligned} D - h_{m+1} (\partial_1 + c)^{m+1} &\overset{(19)}{=} \sum_{i=0}^{m+1} h_i \partial_1^i - h_{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j c^j \partial_1^{m+1-j} \\ &= h_{m+1}\partial_1^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} h_i \partial_1^i - h_{m+1}\partial_1^{m+1} - h_{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_{m+1}^j c^j \partial_1^{m+1-j} . \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$D - h_{m+1} (\partial_1 + c)^{m+1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} h_i \partial_1^i}_{ord \leq m} - \underbrace{h_{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_{m+1}^j c^j \partial_1^{m+1-j}}_{ord \leq m} .$$

Ora, o operador do lado direito da igualdade acima tem ordem menor ou igual a m, pela Proposição 26. Daí, usando a hipótese de indução no lado direito da igualdade, tem-se

$$D - h_{m+1} (\partial_1 + c)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} p_i (\partial_1 + c)^i ,$$

onde $p_i \in K[X_1]$, ou seja, escrevendo $p_{m+1} = h_{m+1}$, obtemos

$$D = \sum_{i=0}^{m+1} p_i (\partial_1 + c)^i ,$$

o que demonstra a Afirmação 2.

Seja agora J um ideal de $\mathbb{A}_1$ tal que $I \subsetneq J$. Verifiquemos que, neste caso, $J = \mathbb{A}_1$.

Tomemos D um elemento de J que não pertença a I. Dada a Afirmação 2, podemos escrever D na forma

$$D = \sum_{i=0}^{m} p_i (\partial_1 + c)^i,$$

com $p_0 \neq 0$, pois se $p_0 = 0$, teríamos $D \in I$. Daí, como $D - p_0 \in I \subsetneq J$, temos que $p_0 = D - (D - p_0) \in J$.

Desta forma, temos que $(\partial_1 + c) p_0 \in J$ e $p_0 (\partial_1 + c) \in I \subsetneq J$. Assim, $[\partial_1 + c, p_0] \in J$. Por outro lado

$$[\partial_1 + c, p_0] = [\partial_1, p_0] + \underbrace{[c, p_0]}_{=0} = [\partial_1, p_0] \overset{Prop.6\,(i)}{=} \partial_1 (p_0).$$

Portanto, $\partial_1 (p_0) \in J$ e, analogamente, $\partial_1^k (p_0) \in J$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $grau\,(p_0) = l$, $\partial_1^l (p_0) \in J$ e é tal que $\partial_1^l (p_0) \in K^*$, ou seja, $J = \mathbb{A}_1$ e, conseqüentemente, I é um ideal maximal de $\mathbb{A}_1$, c.q.d. ■

Coutinho [3], que generalizou exemplos de ideais maximais apresentados inicialmente por Stafford [12], foi o primeiro a evidenciar a forte relação existente entre d-simplicidade de $K[X]$ e ideais maximais de $\mathbb{A}_n$: a partir de uma derivação d que torna o anel $K[X]$ d-simples, ele exibiu uma perturbação $\gamma \in K[X]$ de d tal que $d + \gamma$ gera um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$.

Mais tarde, Lequain, Levcovitz e Souza Jr. [7] provaram que, com a derivação d submetida a certas condições, se existe $\gamma \in K[X]$ tal que o ideal $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é maximal, então $K[X]$ é d-simples. Veremos este resultado no próximo capítulo (Corolário 72).

Nesta seção, buscamos uma caracterização dos operadores de ordem 1 da forma $d + \gamma$, onde

$$d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$$

e $\gamma, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K[X]$, que geram ideais maximais da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n$ quando $n \geq 2$. Conseguimos estabelecê-la no caso em que $n = 2$ e para especiais operadores de ordem 1, numa generalização do resultado de Bratti e Takagi [1] e que foi obtido por Lequain, Levcovitz e Souza Jr. [7]. Para $n > 2$, apenas resultados parciais são obtidos (veja Teorema 67).

Antes de iniciarmos com alguns lemas técnicos que prepararão a demonstração dos resultados mencionados no parágrafo acima, justificamos nossa restrição ao estudo de operadores de ordem 1 envolvendo apenas derivações da forma

$$d = 1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n. \tag{20}$$

Inicialmente, observemos que, se d é uma derivação de $K[X]$ e $n \geq 2$, então não temos, necessariamente, $d|_{K[X_1]} \subset K[X_1]$. Mas, se ocorrer $d|_{K[X_1]} \subset K[X_1]$, teremos que $d|_{K[X_1]}$ será uma derivação de $K[X_1]$ e tal que, se d for simples, então $d|_{K[X_1]}$ também o será:

Proposição 54 *Suponhamos $n \geq 2$ e seja d uma derivação de $K[X]$ tal que $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação de $K[X_1]$. Se d é simples, então $d|_{K[X_1]}$ também o é.*

Prova. Escrevendo

$$d = \sum_{i=1}^{n} p_i\partial_i,$$

com $p_i \in K[X]$, se $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação de $K[X_1]$, então devemos ter $d|_{K[X_1]} = p_1\partial_1$, com $p_1 \in K[X_1]$.

Considerando o ideal $I = K[X]p_1$, como d é simples, devemos ter $p_1 \in K^*$. Do contrário, teríamos

$$d(p_1) = d|_{K[X_1]}(p_1) = p_1\partial_1(p_1) \in K[X]p_1$$

e, neste caso, I seria um $d-$ideal próprio de $K[X]$.

Desta forma, pela Proposição 35, $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação simples de $K[X_1]$. ∎

Ora, como salientamos acima, queremos abordar o estudo de ideais maximais via derivações simples. Então, é um tanto natural considerarmos, inicialmente, o caso de operadores que provêm de derivações que, quando restritas a $K[X_1]$, ainda sejam derivações de $K[X_1]$. Ainda, se queremos que tais derivações sejam simples, então, pelo Lema 34 e pelas Proposições 50 e 54, necessariamente elas devem ser da forma (20).

Convenção: Em todo o restante deste texto, convencionaremos como $\mathbb{A}_{n-1}$ a $K-$subálgebra de $\mathbb{A}_n$ gerada por $X_2, ..., X_n$ e $\partial_2,...,\partial_n$ (ao invés de $X_1, ..., X_{n-1}$ e $\partial_1,...,\partial_{n-1}$). Assim, teremos

$$\mathbb{A}_{n-1}[X_1] = K[X_1, ..., X_n]\langle\partial_2, ..., \partial_n\rangle = K[X]\langle\partial_2, ..., \partial_n\rangle,$$

e, com o que já discutimos até o momento, é fácil convencer-se que $\mathbb{A}_n$ é um $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]-$módulo livre:

$$\mathbb{A}_n = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{A}_{n-1}[X_1]\partial_1^k. \tag{21}$$

Com esta observação, ficará claro o significado de "a ordem de um operador em ∂_1".

Lema 55 *Seja R um elemento de $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Então $\partial_1 R = R\partial_1 + R'$, onde $R' \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, e, portanto, $[\partial_1, R] \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$.*

Prova. Dada a bilinearidade do comutador, é suficiente demonstrar apenas o caso em que R é um monômio. Suponhamos então

$$R = c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (0, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ e $c_{\alpha\beta} \in K$ para todo α e todo β. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\partial_1 R &= \partial_1 c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} \\
&= c_{\alpha\beta} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n} \left(\partial_1 X_1^{\alpha_1}\right) \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} \overset{Prop.6}{=} \\
&= c_{\alpha\beta} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n} \left(X_1^{\alpha_1} \partial_1 + \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1}\right) \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} \\
&= c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} \partial_1 + \alpha_1 c_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n}
\end{aligned}$$

e, portanto, $\partial_1 R$ tem, de fato, a forma $R\partial_1 + R'$, onde $R' \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. ■

Lema 56 *(Algoritmo da Divisão) Para toda derivação de $\mathbb{A}_n$ da forma*

$$d = \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + ... + \alpha_n \partial_n,$$

com $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$, e para todo $\gamma \in K[X]$, vale a seguinte propriedade: dado $D \in \mathbb{A}_n$, existem únicos $Q \in \mathbb{A}_n$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ tais que

$$D = Q.(d + \gamma) + R.$$

Prova. Primeiramente, mostraremos que vale a propriedade para $D = \partial_1^k$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, usando indução sobre k.

Observemos que $\alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n + \gamma \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, de modo que podemos escrever $\partial_1 = 1(d + \gamma) + R_1$, onde $R_1 = -(\alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n + \gamma)$.

Suponhamos, agora, $k \geq 1$ e que o resultado é válido para $D = \partial_1^k$, digamos, $\partial_1^k = Q_k.(d + \gamma) + R_k$, com $Q_k \in \mathbb{A}_n$, $R_k \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Então

$$\partial_1^{k+1} = \partial_1 \partial_1^k \overset{h.i.}{=} \partial_1 (Q_k.(d + \gamma) + R_k) = \partial_1 Q_k.(d + \gamma) + \partial_1 R_k.$$

Pelo Lema anterior, temos

$$\partial_1^{k+1} = \partial_1 Q_k. (d+\gamma) + R_k \partial_1 + R_2, \quad R_2 \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1].$$

Ainda, como temos, pela base de indução, $\partial_1 = (d+\gamma) + R_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_1^{k+1} &= \partial_1 Q_k. (d+\gamma) + R_k ((d+\gamma) + R_1) + R_2 \\ &= (\partial_1 Q_k + R_k). (d+\gamma) + R_k R_1 + R_2 \end{aligned}$$

e, portanto, ∂_1^{k+1} é da forma

$$\partial_1^{k+1} = Q. (d+\gamma) + R,$$

onde $Q = (\partial_1 Q_k + R_k) \in \mathbb{A}_n$ e $R = R_k R_1 + R_2 \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Isto completa a indução.

Agora, se $D \in \mathbb{A}_n$ é qualquer, podemos escrever D na forma

$$D = E_k \partial_1^k + ... + E_1 \partial_1 + E_0,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $E_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo $i \in \{0, ..., k\}$. Assim, pelo que acabamos de mostrar acima, temos

$$D = \sum_{i=0}^{k} E_i (Q_i. (d+\gamma) + R_i),$$

onde $Q_i \in \mathbb{A}_n$ e $R_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo i. Então

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=0}^{k} (E_i Q_i. (d+\gamma) + E_i R_i) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} E_i Q_i \right). (d+\gamma) + \sum_{i=0}^{k} E_i R_i \end{aligned}$$

e, portanto, D é da forma $D = Q. (d+\gamma) + R$, onde $Q = \sum_{i=0}^{k} E_i Q_i \in \mathbb{A}_n$ e $R = \sum_{i=0}^{k} E_i R_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$.

Provemos agora a unicidade. Seja $P \in \mathbb{A}_n$ e sejam $R, R' \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ e $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}_n$ tais que

$$P = Q_1.(d+\gamma) + R = Q_2.(d+\gamma) + R'.$$

Então,

$$Q.(d+\gamma) = R' - R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]\,, \text{ onde } Q = Q_1 - Q_2 \in \mathbb{A}_n. \tag{22}$$

Separando as parcelas de Q que envolvem ∂_1 podemos escrever

$$Q = \widetilde{Q}\partial_1 + \widetilde{R},$$

com $\widetilde{Q} \in \mathbb{A}_n$ e $\widetilde{R} \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Levando também em conta que $d+\gamma = \partial_1 + R_1$, onde $R_1 \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, teremos que

$$\begin{aligned} Q.(d+\gamma) &= \left(\widetilde{Q}\partial_1 + \widetilde{R}\right).(\partial_1 + R_1) \\ &= \widetilde{Q}\partial_1^2 + \widetilde{Q}\partial_1 R_1 + \widetilde{R}\partial_1 + \widetilde{R}R_1 \overset{Lema\,55}{=} \\ &= \widetilde{Q}\partial_1^2 + \widetilde{Q}(R_1\partial_1 + R'') + \widetilde{R}\partial_1 + \widetilde{R}R_1 \\ &= \widetilde{Q}\partial_1^2 + \left(\widetilde{Q}R_1 + \widetilde{R}\right)\partial_1 + \widetilde{Q}R'' + \widetilde{R}R_1, \end{aligned}$$

onde $R'' \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$.

Como $Q.(d+\gamma) \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, temos que a ordem de $Q.(d+\gamma)$ em ∂_1 é zero; concluímos, então, que $\widetilde{Q} = 0$, pois, caso contrário, olhando para $\widetilde{Q}$ como um polinômio em ∂_1 com coeficientes em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, teríamos que $\widetilde{Q}\partial_1^2$ produziria o único termo de maior ordem em ∂_1 em $Q.(d+\gamma)$, absurdo. Assim,

$$Q.(d+\gamma) = \widetilde{R}\partial_1 + \widetilde{R}R_1.$$

Analogamente, concluímos que $\widetilde{R} = 0$. Mas, daí, $Q.(d+\gamma) = 0$, o que implica $Q = 0$ e, portanto, por (22), $R = R'$ e $Q_1 = Q_2$. ∎

Lema 57 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$. Então, para cada $\gamma \in K[X]$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, temos*

$$[d + \gamma, R] \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1].$$

Prova. Escrevendo $d + \gamma = \partial_1 + R'$, com $R' = \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n + \gamma \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, temos

$$\begin{aligned}
[d + \gamma, R] &= [\partial_1 + R', R] \\
&= [\partial_1, R] + [R', R].
\end{aligned}$$

É claro que $[R', R] \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. E, pelo Lema 55, temos que $[\partial_1, R] \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Assim, $[d + \gamma, R] \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. ∎

Lema 58 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$. Então, para cada $\gamma \in K[X]$, temos que o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$ se, e somente se,*

$$\mathbb{A}_n.(d + \gamma) + \mathbb{A}_n R = \mathbb{A}_n$$

para todo $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \setminus \{0\}$.

Prova. ($\Longrightarrow$) Inicialmente, afirmamos que, se $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \setminus \{0\}$, então $R \notin \mathbb{A}_n.(d + \gamma)$. De fato: supondo que $R \in \mathbb{A}_n.(d + \gamma)$, ou seja, $R = Q.(d+\gamma)$ para algum $Q \in \mathbb{A}_n$, podemos repetir a argumentação utilizada na demonstração da unicidade no Lema 56, chegando à contradição de que $Q = 0$ e que, portanto, $R = 0$. Desta forma, $\mathbb{A}_n.(d + \gamma) + \mathbb{A}_n R = \mathbb{A}_n$, pois, por hipótese, $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{A}_n R$ é um ideal não-nulo de $\mathbb{A}_n$.

($\Longleftarrow$) Sabemos que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$ se, e somente se, $\mathbb{A}_n.(d + \gamma) + \mathbb{A}_n P = \mathbb{A}_n$ para todo $P \notin \mathbb{A}_n.(d + \gamma)$.

Suponhamos $P \notin \mathbb{A}_n.(d+\gamma)$. Pelo Lema 56, temos que $P = Q.(d+\gamma)+R$ para algum $Q \in \mathbb{A}_n$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ e, ainda, $R \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_n P &= \mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_n(Q.(d+\gamma)+R) \\ &= \mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_n R \overset{hipótese}{=} \mathbb{A}_n, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Lema 59 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \ldots + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K[X]$. Então, para cada $\gamma \in K[X]$ e $k \in \mathbb{N}$, o operador ∂_1^k se escreve de maneira única na forma*

$$\partial_1^k = (d+\gamma)^k + R_{k-1}.(d+\gamma)^{k-1} + \ldots + R_1.(d+\gamma) + R_0, \tag{23}$$

onde $R_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Prova. O caso $k = 0$ é evidente, tanto para a existência quanto para a unicidade. Para os demais casos, vejamos, primeiramente, a existência.

Observe que $\partial_1 = d+\gamma+R$, onde $R = -\alpha_2\partial_2 - \ldots - \alpha_n\partial_n - \gamma \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, de modo que o resultado é válido para $k = 1$. Suponhamos agora $k \geq 1$ e que o resultado é válido para k; digamos,

$$\partial_1^k = (d+\gamma)^k + B_{k-1}.(d+\gamma)^{k-1} + \ldots + B_1.(d+\gamma) + B_0,$$

onde $B_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Então

$$\begin{aligned} \partial_1^{k+1} &= \partial_1\partial_1^k \overset{h.i.}{=} \partial_1 \sum_{i=0}^{k} B_i.(d+\gamma)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \partial_1 B_i.(d+\gamma)^i \overset{Lema\,55}{=} \\ &= \sum_{i=0}^{k} (B_i\partial_1 + R_i).(d+\gamma)^i, \end{aligned}$$

onde $R_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Como $\partial_1 = (d+\gamma) + R$, temos:

$$\begin{aligned}
\partial_1^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k} \{B_i((d+\gamma)+R)+R_i\} . (d+\gamma)^i \overset{B_k=1}{=} \\
&= (d+\gamma)^{k+1} + C_k (d+\gamma)^k + ... + C_1 (d+\gamma) + C_0, \qquad (24)
\end{aligned}$$

onde $C_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para $i \in \{0, ..., k\}$.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que haja duas seqüências de coeficientes, digamos, $B_{k-1}, ..., B_0$ e $B'_{k-1}, ..., B'_0$, com $B_i, B'_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, satisfazendo a fórmula (23). Então

$$(B_{k-1} - B'_{k-1})(d+\gamma)^{k-1} + ... + (B_1 - B'_1)(d+\gamma) + (B_0 - B'_0) = 0.$$

Desta forma, é suficiente mostrarmos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tivermos

$$\widetilde{B}_k (d+\gamma)^k + ... + \widetilde{B}_1 (d+\gamma) + \widetilde{B}_0 = 0,$$

onde $\widetilde{B}_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo i, então $\widetilde{B}_i = 0$ para todo i. Mostraremos isto por indução.

Para $k = 0$ o resultado é óbvio.

Seja $k \geq 0$ e suponhamos que o resultado é válido para k. Suponhamos ainda

$$\widetilde{B}_{k+1} (d+\gamma)^{k+1} + \widetilde{B}_k (d+\gamma)^k + ... + \widetilde{B}_1 (d+\gamma) + \widetilde{B}_0 = 0, \qquad (25)$$

onde $\widetilde{B}_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo i; por (24), podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{B}_{k+1}\left(\partial_1^{k+1} + C_k (d+\gamma)^k + ... + C_1 (d+\gamma) + C_0\right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k} \widetilde{B}_i (d+\gamma)^i,
\end{aligned}$$

onde $C_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Ou ainda, a expressão acima se reescreve na forma

$$\widetilde{B}_{k+1}\partial_1^{k+1} + \text{termos com ordem em } \partial_1 < k+1 = 0. \qquad (26)$$

Desta forma, olhando para a expressão (26), a única parcela que envolve ∂_1^{k+1} é a primeira. Assim, por (21), concluímos que $\widetilde{B}_{k+1} = 0$ e, portanto,

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{B}_i \,(d+\gamma)^i .$$

Agora basta aplicar a hipótese de indução para concluir que $\widetilde{B}_i = 0$ para todo i. ■

Corolário 60 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$. Então, para cada $\gamma \in K[X]$, temos que o conjunto $\{(d+\gamma)^m,\ m \in \mathbb{N}\}$ é também uma base para o $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]-$módulo livre $\mathbb{A}_n$.*

Nos lemas anteriores, nós consideramos operadores $d + \gamma$ tais que o coeficiente da derivação parcial ∂_1 em d era, exatamente, 1. Para os próximos dois resultados, não precisaremos desta hipótese e, para chamar a atenção para este fato, utilizaremos a notação $S = d + \gamma$ para denotar um operador de ordem 1 qualquer (isto é, quando d é uma derivação qualquer).

Lema 61 *Sejam S um operador de ordem 1 e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ um operador, com $ord(R) > 0$, tais que*

$$\mu\,[S, R] = \eta R \tag{27}$$

para algum $\mu \in K[X]^*$ e $\eta \in K[X]$.

Então, existem $\widetilde{R} \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, com $ord(\widetilde{R}) = ord(R)$ e $\tilde{\eta} \in K[X]$, tais que

$$\left[S, \widetilde{R}\right] = \tilde{\eta}\widetilde{R}.$$

Prova. Escrevamos R na forma

$$R = \sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} p_{i_2,...,i_n}\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n},$$

onde $p_{i_2,\ldots,i_n} \in K[X]$. Daí, se ω_0 denota o máximo divisor comum dos polinômios $p_{i_2,\ldots,i_n}$ em $K[X]$, podemos reescrever R na forma $R = \omega_0 \widetilde{R}$, não existindo agora fator irredutível comum a todos os coeficientes de $\widetilde{R}$. Reescrevendo (27), obtemos

$$\mu[S,R] = \eta\omega_0\widetilde{R}$$

e, como $\mu \in K[X]^*$, podemos concluir que todo fator irredutível de μ é também fator irredutível de $\eta\omega_0$. Assim, podemos escrever

$$\eta\omega_0 = \mu\zeta$$

para algum $\zeta \in K[X]$. Daí, podemos concluir que

$$[S,R] = \zeta\widetilde{R}$$

ou, ainda,

$$\left[S, \omega_0\widetilde{R}\right] = \zeta\widetilde{R}.$$

A idéia agora é eliminar ω_0 na expressão acima. Para tal, observe que

$$\begin{aligned} \zeta\widetilde{R} &= \left[S, \omega_0\widetilde{R}\right] \overset{Prop.12}{=} \\ &= [S,\omega_0]\,\widetilde{R} + \omega_0\left[S,\widetilde{R}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\omega_0\left[S,\widetilde{R}\right] = (\zeta - [S,\omega_0])\,\widetilde{R} = \lambda\widetilde{R}, \tag{28}$$

onde, dado o Corolário 30, $\lambda \in K[X]$. Novamente pelo fato de não existir fator irredutível comum a todos os coeficientes de $\widetilde{R}$, temos que ω_0 divide λ, ou seja, $\lambda = \tilde{\eta}\omega_0$ para algum $\tilde{\eta} \in K[X]$. Desta forma, eliminando ω_0 na expressão acima, obtemos

$$\left[S,\widetilde{R}\right] = \tilde{\eta}\widetilde{R}.$$

Finalmente, resta apenas observar que, como $R = \omega_0 \widetilde{R}$, é claro que $\widetilde{R}$ tem mesma ordem que R. ■

Observação 62 *É interessante observarmos o que aconteceria se a condição "$\operatorname{ord}(R) > 0$" fosse simplesmente suprimida das hipóteses do lema anterior.*

No caso em que R fosse uma constante não-nula, teríamos $[S, R] = 0$ e, portanto, necessariamente $\eta = 0$. Bastaria então tomar $\tilde{\eta} = 0$ para obtermos o resultado.

Já no caso de R ser um polinômio não-constante, teríamos (utilizando as mesmas notações da demonstração acima) $R = \omega_0 \in K[X] \backslash K$ (isto é, $\widetilde{R} = 1$, também um operador de ordem zero) e, por hipótese,

$$\mu [S, \omega_0] = \eta \omega_0, \tag{29}$$

com $\mu, \eta \in K[X]$ e $\mu \neq 0$. Como $[S, \omega_0] \in K[X]$, teríamos que μ divide $\eta\omega_0$; daí:

- se μ dividisse η, obteríamos, cancelando μ,

$$[S, \omega_0] = \tilde{\eta}\omega_0, \text{ com } \tilde{\eta} \in K[X],$$

o que completaria a prova;

- mas no caso em que μ não divide η, é impossível chegarmos a uma expressão da forma

$$[S, \omega_0] = \tilde{\eta}\omega_0,$$

já que isto implicaria, reescrevendo (29):

$$\mu\tilde{\eta}\omega_0 = \eta\omega_0,$$

ou ainda,

$$\mu\tilde{\eta} = \eta,$$

absurdo, já que μ não divide η.

O Lema a seguir explicita restrições ao operador de ordem zero, bem como ao polinômio μ, para que um resultado análogo possa ser garantido:

Lema 63 *Sejam S um operador de ordem 1 e $p \in K[X] \diagdown K$, digamos, com $grau_{X_n}(p) > 0$. Suponha que*

$$g[S, p] = hp \tag{30}$$

para algum $g \in K[X_1, ..., X_{n-1}]^*$ e $h \in K[X]$.

Então, existem $\tilde{p} \in K[X] \diagdown K$, com $grau_{X_n}(\tilde{p}) > 0$, e $\tilde{h} \in K[X]$ tais que

$$[S, \tilde{p}] = \tilde{h}\tilde{p}.$$

Prova. Expressemos p como um polinômio em X_n :

$$p = \sum_{i=0}^{N} q_i X_n^i,$$

com $q_i \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$ para todo i, e escrevamos $p = \omega_0\tilde{p}$, onde ω_0 é o *mdc* dos polinômios q_i em $K[X_1, ..., X_{n-1}]$, não existindo, portanto, fatores irredutíveis de $K[X_1, ..., X_{n-1}]$ comuns a todos os coeficientes de $\tilde{p}$. É claro que $grau_{X_n}(\tilde{p}) = grau_{X_n}(p)$. Ainda, por (30), é claro que g divide $hp = h\omega_0\tilde{p}$. Então, pela definição de $\tilde{p}$, g divide $h\omega_0$, digamos,

$$h\omega_0 = g\zeta$$

para algum $\zeta \in K[X]$. Assim,

$$g[S, \omega_0\tilde{p}] = g[S, p] = hp = h\omega_0\tilde{p} = g\zeta\tilde{p},$$

donde

$$[S, \omega_0\tilde{p}] = \zeta\tilde{p}.$$

Agora, com raciocínio análogo ao que foi utilizado nesta etapa no Lema anterior, chegamos a

$$\omega_0 [S, \tilde{p}] = \lambda \tilde{p}$$

para algum $\lambda \in K[X]$. Como $\omega_0 \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$ e, por construção, não existem fatores irredutíveis comuns a todos os coeficientes de $\tilde{p}$ (visto como um polinômio em $K[X_1, ..., X_{n-1}] \langle X_n \rangle$), concluímos que ω_0 divide λ, ou seja, $\lambda = \tilde{h}\omega_0$ para algum $\tilde{h} \in K[X]$. Desta forma,

$$\omega_0 [S, \tilde{p}] = \lambda \tilde{p} = \tilde{h}\omega_0 \tilde{p},$$

donde

$$[S, \tilde{p}] = \tilde{h}\tilde{p},$$

o que completa a prova. ■

Lema 64 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$, e sejam $\gamma \in K[X]$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Se*

$$[d + \gamma, R] = \eta R$$

para algum $\eta \in K[X]$, então, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$[(d+\gamma)^m, R] = \sum_{k=0}^{m-1} B_k (d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_k (d+\gamma)^k R,$$

onde $B_i, C_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ para todo $i \in \{0, ..., m-1\}$.

Prova. Mostraremos este resultado por indução sobre m. Para $m = 1$, temos, por hipótese, que $[d + \gamma, R] = \eta R$. Neste caso, tomando $B_0 = 0$ e $C_0 = \eta$, temos a validade da afirmação.

Suponhamos agora que $m \geq 1$ e que o resultado é válido para m. Então existem $E_i, F_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, $i = 0, 1, ..., m-1$, tais que

$$\begin{aligned}
& \left[(d+\gamma)^{m+1}, R\right] = (d+\gamma)^{m+1}R - R(d+\gamma)^{m+1} \\
= \; & (d+\gamma)(d+\gamma)^m R - R(d+\gamma)^{m+1} \\
= \; & (d+\gamma)\left(R(d+\gamma)^m + [(d+\gamma)^m, R]\right) - R(d+\gamma)^{m+1} \overset{h.i.}{=} \\
= \; & (d+\gamma)\left(R(d+\gamma)^m + \sum_{k=0}^{m-1} E_k(d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m-1} F_k(d+\gamma)^k R\right) \\
& -R(d+\gamma)^{m+1} \\
= \; & (d+\gamma)R(d+\gamma)^m + \sum_{k=0}^{m-1}(d+\gamma)E_k(d+\gamma)^k \\
& + \sum_{k=0}^{m-1}(d+\gamma)F_k(d+\gamma)^k R - R(d+\gamma)^{m+1} \overset{hip.}{=} \\
= \; & \left(R(d+\gamma) + \eta R\right)(d+\gamma)^m + \sum_{k=0}^{m-1}(d+\gamma)E_k(d+\gamma)^k \\
& + \sum_{k=0}^{m-1}(d+\gamma)F_k(d+\gamma)^k R - R(d+\gamma)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 57, existem $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ tais que

$$\begin{aligned}
\left[(d+\gamma)^{m+1}, R\right] &= R(d+\gamma)^{m+1} + \eta R(d+\gamma)^m \\
& \quad + \sum_{k=0}^{m-1}\left(E_k(d+\gamma) + \widetilde{E}_k\right)(d+\gamma)^k \\
& \quad + \sum_{k=0}^{m-1}\left(F_k(d+\gamma) + \widetilde{F}_k\right)(d+\gamma)^k R - R(d+\gamma)^{m+1} \\
&= \eta R(d+\gamma)^m + \sum_{k=0}^{m-1}\left(E_k(d+\gamma) + \widetilde{E}_k\right)(d+\gamma)^k \\
& \quad + \sum_{k=0}^{m-1}\left(F_k(d+\gamma) + \widetilde{F}_k\right)(d+\gamma)^k R.
\end{aligned}$$

Assim, reagrupando os termos da expressão acima, obtemos que o comutador $\left[(d+\gamma)^{m+1}, R\right]$ se escreve na forma

$$\sum_{k=0}^{m} B_k (d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m} C_k (d+\gamma)^k R, \text{ onde } B_i, C_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1],$$

c.q.d. ∎

Antes de enunciarmos o Lema a seguir, que será útil na demonstração do teorema principal desta seção, salientamos que, se $d \in \mathbb{A}_n$ é uma derivação, $\gamma \in K[X]$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, então, pela Proposição 26,

$$ord([d+\gamma, R]) \leq ord(d+\gamma) + ord(R) - 1 = ord(R),$$

não ocorrendo necessariamente igualdade. No entanto:

Lema 65 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2 \in K[X_1, X_2], ..., \alpha_n \in K[X_1, X_n]$, e sejam $\gamma \in K[X]$ e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Se $ord(R) = N$ então os multi-índices de comprimento N das parcelas envolvidas em $[d+\gamma, R]$ já ocorrem nas parcelas envolvidas na expressão de R.*

Prova. Escrevamos R na forma

$$R = \sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} p_{i_2,...,i_n} \partial_2^{i_2} ... \partial_n^{i_n}, \tag{31}$$

onde $p_{i_2,...,i_n} \in K[X]$. Então

$$\begin{aligned} [d+\gamma, R] &= \sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} \left[\partial_1, p_{i_2,...,i_n} \partial_2^{i_2} ... \partial_n^{i_n}\right] \\ &+ \sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} \sum_{s=2}^{n} \left[\alpha_s\partial_s, p_{i_2,...,i_n} \partial_2^{i_2} ... \partial_n^{i_n}\right] \\ &+ \sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} \left[\gamma, p_{i_2,...,i_n} \partial_2^{i_2} ... \partial_n^{i_n}\right] \end{aligned} \tag{32}$$

Queremos analisar os termos de ordem N em $[d+\gamma, R]$ que não necessariamente se cancelam.

Inicialmente, observe que, se denotarmos, por um momento, $p_{i_2,\ldots,i_n}$ simplesmente por p, teremos

$$\begin{aligned}\left[\partial_1, p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\right] &\overset{Prop.12}{=} p\underbrace{\left[\partial_1, \partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\right]}_{=0} + [\partial_1, p]\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} \\ &\overset{Prop.6\,(i)}{=} \partial_1(p)\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n},\end{aligned}$$

de modo que $\sum_{i_2+\ldots+i_n=0}^{N}\left[\partial_1, p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\right]$ só envolve monômios com ordens que já são envolvidas na expressão de R; em particular, as parcelas de ordem N nesta expressão serão

$$\sum_{i_2+\ldots+i_n=N} \partial_1\left(p_{i_2,\ldots,i_n}\right)\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}. \tag{33}$$

E, para $s=2$, denotando novamente $p_{i_2,\ldots,i_n}$ por p, temos,

$$\begin{aligned}\left[\alpha_2\partial_2, p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\right] &= \alpha_2\partial_2 p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} - p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\alpha_2\partial_2 \overset{Prop.6\,(i)}{=} \\ &= \alpha_2\left(p\partial_2 + \partial_2(p)\right)\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} - p\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\alpha_2\partial_2 \overset{\alpha_2\in K[X_1,X_2]}{=} \\ &= \alpha_2 p\partial_2^{i_2+1}\partial_3^{i_3}\ldots\partial_n^{i_n} + \alpha_2\partial_2(p)\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} \\ &\quad -p\partial_2^{i_2}\alpha_2\partial_2\partial_3^{i_3}\ldots\partial_n^{i_n} \overset{\alpha_2\in K[X_1,X_2]\; e Prop.16}{=} \\ &= \alpha_2 p\partial_2^{i_2+1}\partial_3^{i_3}\ldots\partial_n^{i_n} + \alpha_2\partial_2(p)\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} \\ &\quad -p(\alpha_2\partial_2^{i_2+1}\partial_3^{i_3}\ldots\partial_n^{i_n} + i_2\partial_2(\alpha_2)\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} + \text{parcelas} \\ &\quad \text{de ordem menor do que } i_2+\ldots+i_n) \\ &= \alpha_2\partial_2(p)\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} - pi_2\partial_2(\alpha_2)\,\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n} + \text{parcelas} \\ &\quad \text{de ordem menor do que } i_2+\ldots+i_n).\end{aligned}$$

Assim, as parcelas de ordem N que aparecem em

$$\sum_{i_2+\ldots+i_n=0}^{N}\left[\alpha_2\partial_2, p_{i_2,\ldots,i_n}\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}\right]$$

são

$$\sum_{i_2+...+i_n=N} \left(\left(\alpha_2\partial_2\left(p_{i_2,...,i_n}\right) - i_2 p_{i_2,...,i_n}\partial_2\left(\alpha_2\right)\right)\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}\right). \tag{34}$$

Analogamente, pode-se mostrar que os termos com ordem N em

$$\sum_{i_2+...+i_n=0}^{N} \left[\alpha_j\partial_j, p_{i_2,...,i_n}\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}\right],$$

onde $j = 2, ..., n$, são:

$$\sum_{i_2+...+i_n=N} \left(\left(\alpha_j\partial_j\left(p_{i_2,...,i_n}\right) - i_j p_{i_2,...,i_n}\partial_j\left(\alpha_j\right)\right)\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}\right). \tag{35}$$

Note que $ord\left(\left[\gamma, p_{i_2,...,i_n}\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}\right]\right) \leq i_2 + ... + i_n - 1 \leq N - 1$ (veja Proposição 26 (ii)). Então, por (33), (34) e (35), concluímos que os termos com ordem N em (32) são:

$$\sum_{i_2+...+i_n=N} \left(\partial_1\left(p_{i_2,...,i_n}\right) + \sum_{j=2}^{n}\left(\alpha_j\partial_j\left(p_{i_2,...,i_n}\right) - i_j p_{i_2,...,i_n}\partial_j\left(\alpha_j\right)\right)\right)\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}.$$

Observe agora que, para $i_2+...+i_n = N$, se o coeficiente $p_{i_2,...,i_n}$ de $\partial_2^{i_2}...\partial_n^{i_n}$ em (31) é nulo, então o correspondente coeficiente

$$\partial_1\left(p_{i_2,...,i_n}\right) + \sum_{j=2}^{n}\left(\alpha_j\partial_j\left(p_{i_2,...,i_n}\right) - i_j p_{i_2,...,i_n}\partial_j\left(\alpha_j\right)\right)$$

em (32) também o é. Assim, os multi-índices de ordem N com coeficientes não-nulos que eventualmente aparecem em $[d+\gamma, R]$, já aparecem em R. ■

Definição 66 *Seja D um operador em $\mathbb{A}_n$. Um elemento*

$$R \in \mathbb{A}_{n-1}\left[X_1\right] \setminus K$$

*é dito um **operador de Darboux para** D em $\mathbb{A}_{n-1}\left[X_1\right]$, se*

$$[D, R] \in K\left[X\right] R.$$

Teorema 67 *Seja d uma derivação da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, onde $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$, e seja $\gamma \in K[X]$.*

(i) Se $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$, então $d+\gamma$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$.

(ii) E, quanto à recíproca: se $\alpha_2 \in K[X_1, X_2], ..., \alpha_n \in K[X_1, X_n]$ e, além disso, $d+\gamma$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, então $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

Prova. (i) Seja $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \setminus K$. Queremos mostrar que $[d+\gamma, R] \notin K[X]R$.

Sendo $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ um ideal maximal, então, pelo Lema 58, para tal R, existem $U, V \in \mathbb{A}_n$ tais que

$$U.(d+\gamma) + VR = 1.$$

Pela igualdade acima, vemos que, se $ord_{\partial_1}(U) = m$, então necessariamente $ord_{\partial_1}(V) = m+1$. Escrevamos U e V na forma:

$$\begin{aligned} U &= \widetilde{D}_m\partial_1^m + ... + \widetilde{D}_1\partial_1 + \widetilde{D}_0, \\ V &= \widetilde{E}_{m+1}\partial_1^{m+1} + ... + \widetilde{E}_1\partial_1 + \widetilde{E}_0, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{D}_i, \widetilde{E}_j \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, $\widetilde{D}_m \neq 0, \widetilde{E}_{m+1} \neq 0$. Usando o Lema 59, segue que podemos reescrever U e V na forma:

$$\begin{aligned} U &= D_m.(d+\gamma)^m + ... + D_1.(d+\gamma) + D_0, \\ V &= E_{m+1}.(d+\gamma)^{m+1} + ... + E_1.(d+\gamma) + E_0, \end{aligned}$$

onde $D_i, E_j \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, $D_m \neq 0, E_{m+1} \neq 0$. Logo,

$$1 = U.(d+\gamma) + VR = \sum_{k=0}^{m} D_k.(d+\gamma)^{k+1} + \sum_{k=0}^{m+1} E_k.(d+\gamma)^k R. \tag{36}$$

Suponhamos que $[d+\gamma, R] = \eta R$ para algum $\eta \in K[X]$ e verifiquemos que isto nos leva a uma contradição. Segue do Lema 64 que

$$[(d+\gamma)^{m+1}, R] = \sum_{k=0}^{m} B_k(d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m} C_k(d+\gamma)^k R,$$

onde $B_i, C_i \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$; donde

$$(d+\gamma)^{m+1}R = R(d+\gamma)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} B_k(d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m} C_k(d+\gamma)^k R. \quad (37)$$

Reescrevemos, então, (36):

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{m} D_k.(d+\gamma)^{k+1} + \sum_{k=0}^{m+1} E_k.(d+\gamma)^k R \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} D_k.(d+\gamma)^{k+1} + \sum_{k=0}^{m} E_k.(d+\gamma)^k R + D_m(d+\gamma)^{m+1} \\
&\quad + E_{m+1}(d+\gamma)^{m+1} R \overset{Por\ (37)}{=} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} D_k.(d+\gamma)^{k+1} + \sum_{k=0}^{m} E_k.(d+\gamma)^k R + D_m(d+\gamma)^{m+1} \\
&\quad + E_{m+1}(R(d+\gamma)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} B_k(d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m} C_k(d+\gamma)^k R) \\
&= (D_m + E_{m+1}R)(d+\gamma)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \widetilde{B}_k(d+\gamma)^k + \sum_{k=0}^{m} \widetilde{C}_k(d+\gamma)^k R).
\end{aligned}$$

Como $ord_{\partial_1}(1) = 0$, temos necessariamente

$$D_m + E_{m+1}R = 0$$

(note que, como ∂_1 se faz presente unicamente nos fatores $d+\gamma$, é do termo $(D_m + E_{m+1}R)(d+\gamma)^{m+1}$ que sairia o único termo de maior ordem em ∂_1). Assim,

$$D_m.(d+\gamma)^{m+1} = -E_{m+1}R.(d+\gamma)^{m+1}. \quad (38)$$

Reescrevemos agora a expressão (36):

$$\begin{aligned}
1 &= U(d+\gamma)+VR=\sum_{k=0}^{m}D_k.(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m+1}E_k.(d+\gamma)^kR \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}D_k.(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m}E_k.(d+\gamma)^kR+D_m.(d+\gamma)^{m+1} \\
&\quad +E_{m+1}.(d+\gamma)^{m+1}R \overset{Por\,(38)}{=} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}D_k.(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m}E_k.(d+\gamma)^kR-E_{m+1}R.(d+\gamma)^{m+1} \\
&\quad +E_{m+1}.(d+\gamma)^{m+1}R \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}D_k.(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m}E_k.(d+\gamma)^kR \\
&\quad +E_{m+1}\left((d+\gamma)^{m+1}R-R.(d+\gamma)^{m+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}D_k.(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m}E_k.(d+\gamma)^kR+E_{m+1}\left[(d+\gamma)^{m+1},R\right].
\end{aligned}$$

Usando (37), podemos reescrever a expressão acima e obter

$$1=U(d+\gamma)+VR=\sum_{k=0}^{m-1}F_k(d+\gamma)^{k+1}+\sum_{k=0}^{m}G_k(d+\gamma)^kR$$

para alguns $F_k, G_k \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$. Esta expressão tem a mesma forma de (36), mas ela envolve apenas as potências $(d+\gamma)^i$ com $i \leq m$, e não mais até $m+1$.

Repetindo o raciocínio m vezes, chegaremos a

$$\begin{aligned}
1 &= U(d+\gamma)+VR=F_0(d+\gamma)+G_0R+G_1(d+\gamma)R \overset{[d+\gamma,R]=\eta R}{=} \\
&= F_0(d+\gamma)+G_0R+G_1(R(d+\gamma)+\eta R) \\
&= (F_0+G_1R)(d+\gamma)+(G_0+\eta G_1)R=\widetilde{G}_0R,
\end{aligned}$$

pois novamente, como $ord_{\partial_1}(1)=0$, necessariamente $F_0+G_1R=0$.

Logo,

$$1=\widetilde{G}_0R,$$

donde concluímos que $R \in K$, uma contradição. Portanto, $[d+\gamma, R] \notin K[X]R$.

Agora provaremos *(ii)*. Para tal, vamos mostrar que, dado $d+\gamma$ como na hipótese e $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]\backslash\{0\}$, temos $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR = \mathbb{A}_n$ e, portanto, pelo Lema 58, segue que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$.

Suponhamos, inicialmente, $ord(R) = N > 0$. Essencialmente, a demonstração consiste em, a partir de R, exibirmos operadores pertencentes a $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR$ de ordem cada vez menor, o que culminará no fato de que $(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap(K[X]\setminus\{0\}) \neq \emptyset$. Em seguida, continuando o processo, iremos expor operadores em $K[X]$ de grau cada vez menor, chegando, finalmente, a $(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap K^* \neq \emptyset$, donde poderemos então concluir que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR = \mathbb{A}_n$. Veremos ainda que a demonstração para o caso $ord(R) = 0$ sairá como parte deste processo.

Escrevamos R na forma:

$$R = \sum_{i_2+\ldots+i_n=0}^{N} p_{i_2,\ldots,i_n}\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}, \text{ onde } p_{i_2,\ldots,i_n} \in K[X],$$

sabendo que algum $p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}$, com $i_{2_0}+\ldots+i_{n_0} = N$, é não-nulo.

Como $ord([d+\gamma, R]) \leq ord(d+\gamma)+ord(R)-1 = 1+N-1 = N$, também podemos escrever $[d+\gamma, R]$ na forma

$$[d+\gamma, R] = \sum_{i_2+\ldots+i_n=0}^{N} q_{i_2,\ldots,i_n}\partial_2^{i_2}\ldots\partial_n^{i_n}, \text{ onde } q_{i_2,\ldots,i_n} \in K[X].$$

Definimos agora o operador

$$\widetilde{R} = p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}[d+\gamma, R] - q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R.$$

É claro que o coeficiente de $\partial_2^{i_{2_0}}\ldots\partial_n^{i_{n_0}}$ em $\widetilde{R}$ é o polinômio nulo. Afirmamos que, no entanto, $\widetilde{R}$ é não-nulo. De fato, caso contrário, teríamos

$p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}[d+\gamma, R] = q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R$, donde, pelo Lema 61, poderíamos obter um operador de Darboux para $d+\gamma$ em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$, o que não existe, por hipótese.

Assim,

$$0 \leq ord(\widetilde{R}) \leq N.$$

Observemos igualmente que

$$\begin{aligned}
\widetilde{R} &= p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}[d+\gamma, R] - q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R \\
&= p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}((d+\gamma)R - R.(d+\gamma)) - q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R \\
&= p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}(d+\gamma)R - p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R.(d+\gamma) - q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R \\
&= \underbrace{\left(-p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}R\right)}_{\in\mathbb{A}_n}.(d+\gamma) - \underbrace{\left(p_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}(d+\gamma) - q_{i_{2_0},\ldots,i_{n_0}}\right)}_{\in\mathbb{A}_n}R.
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos em $\mathbb{A}_n(d+\gamma) + \mathbb{A}_nR$ um operador não-nulo $\widetilde{R}$ de ordem menor ou igual a N, mas tal que o termo $\partial_2^{i_{2_0}}\ldots\partial_n^{i_{n_0}}$ (que tem ordem N e que efetivamente aparecia em R) não aparece em $\widetilde{R}$ (isto é, tem coeficiente nulo).

Deste modo, se $\widetilde{R}$ possui outro termo com ordem N (isto é, se $\widetilde{R}$ ainda tem ordem N) podemos repetir o processo acima, com $\widetilde{R}$ no lugar de R, eliminando também este outro termo de ordem N de $\widetilde{R}$. Salientamos que, devido ao Lema 65, o processo acima não permite o aparecimento de outros termos de ordem N além dos já envolvidos em R (ou, agora, em $\widetilde{R}$) ou, em particular, o reaparecimento dos termos de ordem N que eliminamos anteriormente.

Assim, após um número finito de repetições deste processo, produziremos um operador não-nulo em $\mathbb{A}_n.(d+\gamma) + \mathbb{A}_nR$ com ordem estritamente menor do que N. Repetindo então o processo para este operador de ordem menor do que N tantas vezes quanto necessário, chegamos a um operador não-nulo de ordem zero em $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR$, ou seja:

$$(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap(K[X]\setminus\{0\})\neq\emptyset. \tag{39}$$

Seja então $p\in\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR$ um polinômio não-nulo com o menor grau possível em X_n, digamos, m. Se m for estritamente maior do que zero, então, pelo algoritmo euclidiano usual aplicado a $[d+\gamma,p]=d(p)$ e p (considerados como elementos de $K(X_1,...,X_{n-1})[X_n]$), temos que

$$[d+\gamma,p]=\frac{\eta_1}{\eta_2}p+\frac{r_1}{r_2}, \tag{40}$$

onde $\eta_1,r_1\in K[X_1,...,X_{n-1},X_n]$, $\eta_2,r_2\in K[X_1,...,X_{n-1}]\backslash\{0\}$ com $r_1/r_2=0$ ou $grau_{X_n}(r_1/r_2)<grau_{X_n}(p)$.

De (40), obtemos, pondo $t=\eta_2r_2\in K[X_1,...,X_{n-1}]\backslash\{0\}$,

$$t[d+\gamma,p]=\eta p+r,$$

onde $\eta,r\in K[X]$ e $grau_{X_n}(r)<grau_{X_n}(p)$ ou $r=0$. Afirmamos que, necessariamente, $r=0$. De fato,

$$\begin{aligned} r &= t[d+\gamma,p]-\eta p \\ &= t((d+\gamma)p-p(d+\gamma))-\eta p \\ &= -tp.(d+\gamma)+(t(d+\gamma)-\eta)p \\ &= p_0(d+\gamma)+q_0p, \end{aligned}$$

onde $p_0,q_0\in\mathbb{A}_n$. Ainda, como $p\in\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR$, podemos concluir que também $r\in\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR$. Assim,

$$r\in(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap K[X],$$

de modo que, se r fosse não-nulo, teríamos necessariamente $grau_{X_n}(r)<grau_{X_n}(p)$, o que iria contrariar a minimalidade do grau de p em X_n como

elemento não-nulo do conjunto $(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap K[X]$. Portanto, $r=0$ e

$$t\,[d+\gamma,p]=\eta p,$$

com $t\in K[X_1,...,X_{n-1}]\backslash\{0\}$, o que também é uma contradição, pois, pelo Lema 63, obteríamos, assim, um operador de Darboux para $d+\gamma$ em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]$.

Logo, $0=m=grau_{X_n}(p)$.

Desta forma,

$$p\in(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap(K[X_1,...,X_{n-1}]\setminus\{0\}).$$

Queremos agora repetir o argumento para as demais indeterminadas e concluir que p é necessariamente um polinômio que só envolve X_1. Mas, para tal, precisamos nos certificar que é possível aplicar o Algoritmo da Divisão para $[d+\gamma,p]$ e p em $K(X_1,...,X_{n-2})[X_{n-1}]$. Em outras palavras, precisamos garantir que $[d+\gamma,p]$ não envolve X_n. E, de fato, como p não envolve X_n e pela hipótese feita sobre os α_i's, temos

$$\begin{aligned}
&[d+\gamma,p]\overset{Corol.30}{=}d(p)\\
=\;&\partial_1(p)+\alpha_2\partial_2(p)+...+\alpha_{n-1}\partial_{n-1}(p)\in K[X_1,...,X_{n-1}].
\end{aligned}$$

Isto nos permite repetir o raciocínio acima, dividindo $[d+\gamma,p]$ por p em $K(X_1,...,X_{n-2})[X_{n-1}]$ e, assim, sucessivamente. Procedendo desta maneira, obtemos que p é um polinômio que só envolve X_1 e, portanto,

$$(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap(K[X_1]\setminus\{0\})\neq\emptyset.$$

Mas ainda, com $p\in K[X_1]$, temos

$$[d+\gamma,p]=d(p)=\partial_1(p),$$

e, assim, conseguimos também baixar o grau de p.

Repetindo este novo argumento várias vezes, começando com o polinômio $\partial_1(p)$ no lugar de p, finalmente, chegamos à conclusão que

$$(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap K^*\neq\emptyset$$

e, portanto, $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR=\mathbb{A}_n$, encerrando assim a prova para o caso $ord(R)>0$.

No caso em que $ord(R)=0$, ou seja, $R=p\in K[X]\setminus\{0\}$, temos que

$$p=0.(d+\gamma)+1.p\in\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR.$$

Portanto, temos

$$(\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR)\cap(K[X]\setminus\{0\})\neq\emptyset$$

e podemos repetir a argumentação desenvolvida a partir de (39), acima, para concluir que, também neste caso, $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)+\mathbb{A}_nR=\mathbb{A}_n$. ∎

Corolário 68 *Seja d uma derivação de $\mathbb{A}_2$ da forma $d=\partial_1+\beta\partial_2$, onde $\beta\in K[X_1,X_2]$ e seja $\gamma\in K[X_1,X_2]$. Então $\mathbb{A}_2.(d+\gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_2$ se, e somente se, $d+\gamma$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_1[X_1]$.*

Observação 69 *O corolário acima é o resultado de Bratti e Takagi (veja [1]) generalizado para um corpo qualquer de característica zero.*

4.4 Maximalidade × simplicidade

A seguir, queremos mostrar que o conceito de derivação simples é útil para aprofundarmos a caracterização dos ideais maximais de $\mathbb{A}_n$ gerados por operadores de ordem 1. Mais precisamente, queremos mostrar que simplicidade é uma condição necessária para que certos operadores de ordem 1 gerem ideais maximais. Comecemos com resultados preparatórios:

Teorema 70 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, com $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K[X]$, e seja $\gamma \in K[X]$. Se $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$, então nenhum ideal principal não-trivial de $K[X]$ é um d-ideal.*

Prova. Suponha que $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$. Pelo Teorema 67 (i), temos que, para todo operador $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \setminus K$,

$$[d+\gamma, R] \notin K[X]R.$$

Em particular, para todo $p \in K[X] \setminus K$,

$$[d+\gamma, p] \notin K[X]p.$$

Como $[d+\gamma, p] \overset{Corol.30}{=} d(p)$, temos que $d(p) \notin K[X]p$ e, portanto, pela Proposição 32, o ideal gerado por p não é um $d-$ideal. ∎

Teorema 71 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, com $\alpha_i \in K[X_1, ..., X_i]$ para $i = 2, ..., n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $K[X]$ é $d-$simples;

(ii) Nenhum ideal principal não-trivial de $K[X]$ é um $d-$ideal.

Prova. Pelo própria definição de $d-$simplicidade (Definição 31), é suficiente mostrar que (ii) implica (i).

Por contraposição, suponhamos que $K[X]$ não é $d-$simples. Seja I um $d-$ideal próprio não-nulo de $K[X]$.

Seja f um polinômio não-nulo pertencente a I e com o menor grau em X_n, digamos, l.

Se $l > 0$, então, pelo algoritmo da divisão usual aplicado a $d(f)$ e f considerados como elementos de $K(X_1, ..., X_{n-1})[X_n]$, temos que

$$gd(f) = hf + r$$

para certos $g \in K[X_1, ..., X_{n-1}] \setminus \{0\}$ e $h, r \in K[X]$, com $grau_{X_n}(r) < l = grau_{X_n}(f)$ ou $r = 0$.

Daí, como $f \in I$ e I é um d-ideal, temos $r = gd(f) - hf \in I$. Pelo caráter minimal com que foi tomado f em I, concluímos que, necessariamente, $r = 0$. Assim,

$$hf = gd(f) = g[d, f].$$

Mas então, pelo Lema 63, existem $\tilde{h} \in K[X]$ e $\tilde{f} \in K[X] \setminus K$ com $grau(\tilde{f}) > 0$ tais que

$$\left[d, \tilde{f}\right] = \tilde{h}\tilde{f}$$

ou ainda

$$d(\tilde{f}) = \tilde{h}\tilde{f},$$

e, portanto, pela Proposição 32, o ideal principal gerado por $\tilde{f}$ é um $d-$ideal não trivial, já que $grau(\tilde{f}) > 0$.

Agora, se $l = grau_{X_n}(f) = 0$, então $I \cap K[X_1, ..., X_{n-1}] \neq (0)$. Como $\alpha_i \in K[X_1, ..., X_i]$, temos

$$d\mid_{K[X_1,...,X_{n-1}]}(K[X_1, ..., X_{n-1}]) \subseteq K[X_1, ..., X_{n-1}],$$

ou seja, $d\mid_{K[X_1,...,X_{n-1}]}$ é uma derivação de $K[X_1, ..., X_{n-1}]$. Neste caso, repetimos o argumento supondo, inicialmente,

$$m = grau_{X_{n-1}}(f) > 0$$

e aplicando o algoritmo da divisão para $d(f)$ e f considerados agora como elementos de $K(X_1, ..., X_{n-2})[X_{n-1}]$. Novamente concluiremos, após um processo análogo ao exposto acima, que existe um $d-$ideal principal não-trivial de $K[X]$.

Supomos, então, $l = m = 0$ e $s = grau_{X_{n-2}}(f) > 0$, repetindo o argumento pela terceira vez. E assim por diante.

Após um número finito de repetições deste procedimento ($n - 1$ vezes, para sermos mais precisos), obteremos que ou existe um $d-$ideal principal não-trivial de $K[X]$, ou

$$I \cap K[X_1] \neq (0).$$

Mas isto é impossível, pois, como $d\mid_{K[X_1]} = \partial_1$, temos, por um lado, que $I \cap K[X_1]$ é ∂_1-estável e, por outro, que $K[X_1]$ é ∂_1-simples. ■

Corolário 72 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, com $\alpha_i \in K[X_1, ..., X_i]$ para $i = 2, ..., n$, e seja $\gamma \in K[X]$. Se $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$, então $K[X]$ é d-simples. Em particular, para $n = 2$: se $\mathbb{A}_2.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$, então $K[X_1, X_2]$ é d-simples.*

Prova. Suponhamos que $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$. Pelo Teorema 70, temos que $K[X]$ não possui ideais principais não-triviais que sejam d-ideais. Daí, pelo Teorema 71, $K[X]$ é d-simples. ■

Este último resultado nos dá um ponto de partida na procura de ideais maximais principais de $\mathbb{A}_2(K)$ gerados por operadores de ordem 1: as derivações simples de $K[X_1, X_2]$ da forma $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2$ com $\alpha_2 \in K[X_1, X_2]$. A questão que naturalmente se impõe, neste caso, é: dada uma derivação simples d de $K[X_1, X_2]$, existirá sempre uma perturbação $\gamma \in K[X_1, X_2]$ que torna $\mathbb{A}_2.(d + \gamma)$ um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$?

Mais geralmente, a partir do Corolário acima, somos levados também à seguinte conjectura:

Conjectura 73 *Seja* $d = \partial_1 + \alpha_1\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$ *uma derivação de* $K[X]$, *com* $\alpha_i \in K[X]$ *para cada* i, *tal que* $K[X]$ *é d-simples. Então, existe* $\gamma \in K[X]$ *tal que* $\mathbb{A}_n.(d+\gamma)$ *é um ideal maximal de* $\mathbb{A}_n(K)$.

No próximo capítulo, veremos que, de fato, esta conjectura é verdadeira no caso em que $n = 2$.

5 IDEAIS MAXIMAIS DE $\mathbb{A}_2(K)$

Retomamos agora a discussão sobre a existência de ideais maximais principais à esquerda de $\mathbb{A}_n(K)$. Já verificamos que as derivações não geram ideais maximais de $\mathbb{A}_n(K)$ se $n \geq 2$ (Proposição 51). Nosso próximo passo será pesquisar se operadores do tipo $d + \gamma$, onde d é uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta, \gamma \in K[X_1, X_2]$, podem gerar ideais maximais de $\mathbb{A}_2(K)$.

A questão que naturalmente pode ser colocada é:

> **Questão 1:** Existirão operadores do tipo $d + \gamma$ que geram ideais maximais de $\mathbb{A}_n(K)$?

A resposta a esta questão é afirmativa: Coutinho [3], em 1997, partindo de uma derivação d de $K[X]$ que o torna d-simples, encontrou uma perturbação $\gamma \in K[X]$ tal que o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é maximal. Aparece aí, então, pela primeira vez, uma forte relação entre d-simplicidade de $K[X]$ e a existência de ideais maximais principais de $\mathbb{A}_n$. Esta relação é bem explicitada no Corolário 72, devido a Lequain, Levcovitz e Souza Jr. [7].

Naturalmente, a próxima questão passaria a ser, então, caracterizar todos os operadores da forma $d + \gamma$ descrita acima que são geradores de ideais maximais de $\mathbb{A}_n(K)$. Levando em conta o Corolário 72, um ponto de partida seriam as derivações simples (pelo menos nos casos em que tivermos $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$, com $\alpha_i \in K[X_1, ..., X_i]$). Daí surge, naturalmente, a seguinte conjectura:

Conjectura 74 *Seja $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n$ uma derivação de $K[X]$, com $\alpha_i \in K[X]$ para cada i, tal que $K[X]$ é d-simples. Então, existe uma perturbação $\gamma \in K[X]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n(K)$.*

Neste capítulo, provamos a validade desta conjectura no contexto da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_2(K)$, isto é, quando $n = 2$. Mais precisamente, mostraremos que:

Teorema 75 *Seja $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta \in K[X_1, X_2]$, uma derivação de $K[X_1, X_2]$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$;

(ii) existe $\gamma \in K[X_1, X_2]$ tal que $\mathbb{A}_2.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$;

(iii) existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tal que $\mathbb{A}_2.(d + \varepsilon X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$.

Mostraremos também que a condição *(iii)* acima, a saber, "$\varepsilon \in \{-1, 1\}$" é ótima, no sentido de que não pode ser substituída por apenas "$\varepsilon = -1$" ou "$\varepsilon = 1$".

Vejamos, inicialmente, um lema técnico envolvendo a derivação presente no teorema acima e que será útil nas seções subseqüentes.

Lema 76 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta\partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Então, para todo $t \in \mathbb{N}$ e para todos $p, \gamma \in K[X_1, X_2]$, teremos:

(i) $[d, p\partial_2^t] = (d(p) - tp\partial_2(\beta))\,\partial_2^t - p\sum\limits_{j=1}^{t-1} C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta)\,\partial_2^{t-j}$;

(ii) $[d + \gamma, p\partial_2^t] = (d(p) - tp\partial_2(\beta))\,\partial_2^t -$
$-p\sum\limits_{j=1}^{t} \left(C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta) + C_t^j\partial_2^j(\gamma)\right)\partial_2^{t-j}$.

Prova. (i) Temos:

$$
\begin{aligned}
& \left[d, p\partial_2^t\right] \overset{Prop.12}{=} p\left[d, \partial_2^t\right] + \left[d, p\right]\partial_2^t \\
= \;& p\left[\partial_1 + \beta\partial_2, \partial_2^t\right] + \left[d, p\right]\partial_2^t \\
= \;& p\left(\underbrace{\left[\partial_1, \partial_2^t\right]}_{=0} + \left[\beta\partial_2, \partial_2^t\right]\right) + \left[d, p\right]\partial_2^t \overset{Lema\,29}{=} \\
= \;& p\left[\beta\partial_2, \partial_2^t\right] + d(p)\,\partial_2^t \overset{Prop.16\,(iii)}{=} \\
= \;& -p\sum_{j=0}^{t-1} C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta)\,\partial_2^{t-j} + d(p)\,\partial_2^t \\
= \;& -pt\partial_2(\beta)\,\partial_2^t - p\sum_{j=1}^{t-1} C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta)\,\partial_2^{t-j} + d(p)\,\partial_2^t \\
= \;& \left(d(p) - tp\partial_2(\beta)\right)\partial_2^t - p\sum_{j=1}^{t-1} C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta)\,\partial_2^{t-j}.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\left[d + \gamma, p\partial_2^t\right] &= \left[d, p\partial_2^t\right] + \left[\gamma, p\partial_2^t\right] \overset{(i)\,e\,Prop.16\,(iv)}{=} \\
&= \left(d(p) - tp\partial_2(\beta)\right)\partial_2^t - \sum_{j=1}^{t-1} C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta)\,p\partial_2^{t-j} \\
&\quad -p\sum_{j=1}^{t} C_t^{j}\partial_2^{j}(\gamma)\,\partial_2^{t-j} \\
&= \left(d(p) - tp\partial_2(\beta)\right)\partial_2^t - p\sum_{j=1}^{t}\left(C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta) + C_t^{j}\partial_2^{j}(\gamma)\right)\partial_2^{t-j},
\end{aligned}
$$

c.q.d. ■

Para provar o Teorema 75, precisaremos antes abordar um caso particular, a saber, o caso em que $grau_{X_2}(\beta) = 1$. Esta parte do trabalho é o assunto da próxima seção e baseia-se em Lequain [5].

5.1 Prova da conjectura para o caso $n = 2$ e d uma derivação da forma $\partial_1+(aX_2 + b)\,\partial_2$, com $a, b \in K[X_1]$

Nesta seção, mostraremos que se $a, b \in K[X_1]$ são tais que $d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_1$ é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$, então o ideal $\mathbb{A}_2.(d + X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$. Iniciaremos com uma série de resultados preliminares que apoiarão a prova deste resultado. O primeiro deles é um lema devido a Shamsuddin [9] e que relaciona simplicidade com não-existência de solução para uma equação diferencial:

Lema 77 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Então a equação

$$d(Z) = aZ + b$$

não tem solução em $K[X_1]$.

Prova. Suponhamos que existe $c \in K[X_1]$ tal que

$$d(c) = ac + b.$$

Vamos mostrar que neste caso d não é simples. De fato, consideremos o ideal $I = (X_2 - c)\,K[X_1, X_2]$. Teremos:

$$\begin{aligned}
d(X_2 - c) &= d(X_2) - d(c) \\
&= \partial_1(X_2) + (aX_2 + b)\,\partial_2(X_2) - d(c) \\
&= aX_2 + b - (ac + b) \\
&= aX_2 - ac \\
&= a(X_2 - c) \in (X_2 - c)\,K[X_1, X_2] = I.
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 32, I é um $d-$ideal próprio de $K[X_1, X_2]$. ∎

Lema 78 *Sejam $u, v, q, r \in K[X_1]$, com $u \neq 0$, tais que*

$$v = uq + r, \tag{41}$$

com $grau\,(r) < grau\,(u)$.

Seja $f \in K[X_1]$. Então f é uma solução da equação

$$Z' = uZ + v \tag{42}$$

se, e somente se, $f + q$ é uma solução da equação

$$Z' = uZ + (q' + r). \tag{43}$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned} f &\in K[X_1] \text{ é solução de } (42) \\ &\Leftrightarrow f' = uf + v \overset{(41)}{=} uf + uq + r \overset{somando\ q'}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f' + q' = uf + uq + r + q' \\ &\Leftrightarrow (f+q)' = u(f+q) + q' + r' \\ &\Leftrightarrow f + q \text{ é solução de } (43), \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Lema 79 *Sejam $u, v \in K[X_1]$, $u \neq 0$. Considere a seqüência de igualdades:*

$$\begin{aligned} &v = uq_1 + r_1 \\ &q_1' = uq_2 + r_2 \\ &\vdots \\ &q_t' = u0 + r_{t+1}, \end{aligned}$$

onde $q_1, ..., q_t, r_1 ..., r_{t+1} \in K[X_1]$, $grau\,(r_i) < grau\,(u)$ para todo i e q_i' denota a derivada formal de q_i em $K[X_1]$.

Se $u \in K^*$ então:

$$\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0.$$

Prova. Suponhamos que $u \in K^*$. Temos então:

$v = u\left(\frac{1}{u}v\right) + 0$, ou seja, $r_1 = 0$;

$\left(\frac{1}{u}v\right)' = \frac{1}{u}v' = u\left(\frac{1}{u^2}v'\right) + 0$, ou seja, $r_2 = 0$;

$\left(\frac{1}{u^2}v'\right)' = \frac{1}{u^2}v'' = u\left(\frac{1}{u^3}v''\right) + 0$, ou seja, $r_3 = 0$;

$\vdots$

$0 = u0 + 0$, ou seja, $r_{t+1} = 0$;.

Assim, $\sum\limits_{i=1}^{t+1} r_i = 0$. ■

Lema 80 *Sejam* $u, v \in K[X_1]$, $u \neq 0$ *e consideremos a seqüência de polinômios* $r_1, ..., r_{t+1}$ *obtida no Lema 79.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A equação $Z' = uZ + v$ *tem solução em* $K[X_1]$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{t+1} r_i = 0$.

Prova. Seja $f \in K[X_1]$. Aplicando sucessivas vezes o Lema 78, temos:

$$\begin{aligned} f \text{ é solução de } Z' &= uz + v \overset{v=uq_1+r_1}{\Longleftrightarrow} \\ f + q_1 \text{ é solução de } Z' &= uZ + (q_1' + r_1) \overset{q_1'+r_1=uq_2+r_2+r_1}{\Longleftrightarrow} \\ f + q_1 + q_2 \text{ é solução de } Z' &= uZ + (q_2' + r_1 + r_2) \Longleftrightarrow \\ &\ldots, \end{aligned}$$

de modo que, após a $t-$ésima etapa, obtemos:

$$\begin{aligned} f \text{ é solução de } Z' &= uZ + v \Leftrightarrow f + \sum_{i=1}^{t} q_i \text{ é solução de} \\ Z' &= uZ + q_t' + \sum_{i=1}^{t} r_i = uZ + \sum_{i=1}^{t+1} r_i. \end{aligned}$$

Notemos que

$$grau\left(\sum_{i=1}^{t+1} r_i\right) < grau\,(u),$$

pois, para cada i, temos $grau\,(r_i) < grau\,(u)$. Daí:

- se $grau\,(u) \geq 1$, então, por razões de grau, a equação $Z' = uZ + \sum_{i=1}^{t+1} r_i$ tem solução em $K[X_1]$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$ e a solução é o polinômio nulo;

- se $grau\,(u) = 0$, então $r_i = 0$ para todo i. Logo, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$ e, portanto, 0 é solução de $Z' = uZ + \sum_{i=1}^{t+1} r_i$.

Concluímos que existe em $K[X_1]$ solução para $Z' = uZ + v$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$. ■

Proposição 81 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Se d é simples então:

i) $a \neq 0$;

ii) se $r_1, ..., r_{t+1}$ denotam a seqüência de polinômios obtida como no Lema 79 a partir de $u = a$ e $v = b$, então $\sum_{i=1}^{t+1} r_i \neq 0$.

Prova. Vamos mostrar (i) por contraposição. Suponhamos que $a = 0$ e denotemos por $\int b$ o polinômio de $K[X_1]$ cuja derivada é igual a b. Consideremos o ideal próprio $I = \left(X_2 - \int b\right) K[X_1, X_2]$. Temos então

$$\begin{aligned} d\left(X_2 - \int b\right) &= \partial_1\left(X_2 - \int b\right) + b\partial_2\left(X_2 - \int b\right) \\ &= -b + b + 0 = 0 \in I, \end{aligned}$$

donde I é um $d-$ideal próprio e, portanto, d não é simples.

Provemos agora *(ii)*. Pelo Lema 77, se d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$, então a equação $d(Z) = aZ + b$ não tem solução em $K[X_1]$. Ou seja, a equação $Z' = aZ + b$ não tem solução em $K[X_1]$. Pelo Lema 80, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i \neq 0$. ■

Corolário 82 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Então, $grau(a) \geq 1$.

Prova. Como d é simples, então, em decorrência da proposição anterior, $a \neq 0$ e ainda, considerando a seqüência de polinômios $r_1, ..., r_{t+1} \in K[X_1]$ obtida como no Lema 79 a partir de $u = a$ e $v = b$, temos $\sum_{i=1}^{t+1} r_i \neq 0$. Desta forma, pelo mesmo Lema 79, temos, necessariamente, também $a \notin K^*$ e, portanto, $grau(a) \geq 1$. ■

Lema 83 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Então, para cada $r \in \mathbb{N}^*$,

$$[d, \partial_2^r] = -ra\partial_2^r, \text{ ou seja, } \partial_2^r d = d\partial_2^r + ra\partial_2^r.$$

Prova. É conseqüência do Lema 76, dado que, quando $\beta = aX_2 + b$ e $p = 1$, teremos $\partial_2(\beta) = \partial_2(aX_2 + b) = a$ e $\partial_2^r(\beta) = 0$ se $r \geq 2$. ■

Lema 84 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Seja $g \in K[X_1, X_2]$ tal que

$$d(g) = ug + v,$$

com $u \in K[X_1]$, $v \in K[X_1, X_2]$, $grau_{X_2}(v) = t \geq 0$. Então:

(i) $\partial_2^{t+1}(g) \in K$;

(ii) $\partial_2^{t+1}(g) = 0$ *se* $u \neq (t+1)a$.

Prova. Aplicando ∂_2^{t+1} na igualdade $d(g) = ug + v$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_2^{t+1}(d(g)) &= \partial_2^{t+1}(ug+v) \overset{u\in K[X_1]}{=} \\
&= u\partial_2^{t+1}(g) + \partial_2^{t+1}(v) \overset{grau_{X_2}(v)=t}{=} \\
&= u\partial_2^{t+1}(g).
\end{aligned} \tag{44}$$

Por outro lado, pelo Lema 83, temos que:

$$\partial_2^{t+1}d = d\partial_2^{t+1} + (t+1)a\partial_2^{t+1}.$$

Usando esta expressão em (44), obtém-se:

$$u\partial_2^{t+1}(g) = \partial_2^{t+1}(d(g)) = d\partial_2^{t+1}(g) + (t+1)a\partial_2^{t+1}(g),$$

ou seja,

$$d\left(\partial_2^{t+1}(g)\right) = d\partial_2^{t+1}(g) = \underbrace{(u-(t+1)a)}_{\in K[X_1]}\partial_2^{t+1}(g). \tag{45}$$

Desta forma, pela Proposição 32, $\partial_2^{t+1}(g)K[X_1, X_2]$ é um d–ideal de $K[X_1, X_2]$. Visto que $K[X_1, X_2]$ é d–simples, necessariamente este ideal é trivial, ou seja, $\partial_2^{t+1}(g) \in K$, o que completa a prova de *(i)*.

Além disso, como conseqüência, obtemos $d(\partial_2^{t+1}(g)) = 0$; daí, por (45), concluímos que

$$(u-(t+1)a)\partial_2^{t+1}(g) = 0,$$

donde $\partial_2^{t+1}(g) = 0$ se $u \neq (t+1)a$, pois $K[X_1, X_2]$ é um domínio, o que completa a prova de *(ii)*. ■

Lema 85 *Sejam d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$ *e* $g \in K[X_1, X_2]$ *com* $grau_{X_2}(g) \geq 1$. *Então, para cada* $r \in \mathbb{N}^*$ *e cada* $p \in K[X_1, X_2]$,

(i) $[d, p\partial_2^r] = (d(p) - rap)\,\partial_2^r$;

(ii) $[g, p\partial_2^r] = -rp\partial_2(g)\partial_2^{r-1}$ *+ termos com ordem* $\leq r-2$.

Prova. (i) De fato,

$$\begin{aligned}
& [d, p\partial_2^r] \overset{Prop.12}{=} p[d, \partial_2^r] + [d, p]\partial_2^r \overset{Lema\,29}{=} \\
= \;& p[d, \partial_2^r] + d(p)\partial_2^r \overset{Lema\,83}{=} \\
= \;& p\left(-ra\partial_2^r\right) + d(p)\partial_2^r \\
= \;& (d(p) - rap)\partial_2^r.
\end{aligned}$$

(ii) Dado que $grau_{X_2}(g) \geq 1$, teremos:

$$\begin{aligned}
& [g, p\partial_2^r] \overset{Prop.16\,(iv)}{=} -p\sum_{j=1}^{r} C_r^j \partial_2^j(g)\,\partial_2^{r-j} \\
= \;& -rp\partial_2(g)\,\partial_2^{r-1} - p\sum_{j=2}^{r} C_r^j \partial_2^j(g)\,\partial_2^{r-j} \\
= \;& -rp\partial_2(g)\,\partial_2^{r-1} + \text{termos com ordem} \leq r-2,
\end{aligned}$$

c.q.d. ∎

Lema 86 *Sejam d uma derivação simples de* $K[X_1, X_2]$, *da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$, $\gamma \in K[X_1, X_2]$ *e R um operador de* $\mathbb{A}_1[X_1]$ *da forma*

$$R = \sum_{i=0}^{r} p_i \partial_2^i,$$

com $r \geq 1$ *e* $p_i \in K[X_1, X_2]$ *para todo i, sendo* $p_r \neq 0$.

Se

$$[d + \gamma, R] = fR \tag{46}$$

para algum $f \in K[X_1, X_2]$, *então:*

(i) p_r *é constante, digamos,* $p_r = k_r \in K^*$;

(ii) $ra = -f$;

(iii) p_{r-1} *é uma solução para a equação* $d(Z) = -aZ + rk_r\partial_2(\gamma)$.

Prova. (i) Por um lado, temos

$$\begin{aligned}[d+\gamma, R] &= \sum_{i=0}^{r}\left[d, p_i\partial_2^i\right] + \sum_{i=0}^{r}\left[\gamma, p_i\partial_2^i\right] \overset{Lema\ 85}{=} \\ &= \left(d(p_r) - rap_r\right)\partial_2^r + \text{ termos de ordem } \leq r-1. \end{aligned} \tag{47}$$

Por outro lado, o termo de ordem r de fR é igual a

$$fp_r\partial_2^r. \tag{48}$$

Então, por (46), (47) e (48), temos

$$d(p_r) - rap_r = fp_r,$$

ou seja,

$$d(p_r) = (f + ra)p_r. \tag{49}$$

Portanto, pela Proposição 32, $K[X_1, X_2]p_r$ é um $d-$ideal. Como $K[X_1, X_2]$ é $d-$simples, concluímos que $p_r \in K$.

(ii) É claro que $d(k_r) = 0$. Então, de (49), obtemos que $f + ra = 0$, já que, por hipótese, $p_r \neq 0$. Logo, $ra = -f$.

(iii) Vamos calcular o termo de ordem $r-1$ de

$$[d+\gamma, R] = \sum_{i=0}^{r}\left[d, p_i\partial_2^i\right] + \sum_{i=0}^{r}\left[\gamma, p_i\partial_2^i\right].$$

Em vista do Lema 85, as contribuições vêm exclusivamente das parcelas $\left[d, p_{r-1}\partial_2^{r-1}\right]$ e $\left[\gamma, k_r\partial_2^r\right]$. Mais precisamente:

– em $\left[d, p_{r-1}\partial_2^{r-1}\right]$, a parcela de ordem $r-1$ é

$$(d(p_{r-1}) - (r-1)ap_{r-1})\partial_2^{r-1};$$

– em $[\gamma, k_r\partial_2^r]$, a parcela de ordem $r-1$ é

$$-rk_r\partial_2(\gamma)\partial_2^{r-1}.$$

Assim, o coeficiente de ∂_2^{r-1} em $[d+\gamma, R]$ é igual a

$$d(p_{r-1}) - (r-1)ap_{r-1} - rk_r\partial_2(\gamma) \tag{50}$$

e, como o coeficiente do termo de ordem $r-1$ de $fR = -raR$ é igual a

$$-rap_{r-1}, \tag{51}$$

por (46), (50) e (51), obtemos

$$d(p_{r-1}) - (r-1)\,ap_{r-1} - rk_r\partial_2(\gamma) = -rap_{r-1},$$

ou seja,

$$d(p_{r-1}) = -ap_{r-1} + rk_r\partial_2(\gamma).$$

Portanto, p_{r-1} é solução em $K[X_1, X_2]$ para a equação

$$d(Z) = -aZ + rk_r\partial_2(\gamma),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Estamos agora em condições de provar o resultado principal desta seção:

Teorema 87 *Sejam d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + (aX_2 + b)\,\partial_2,$$

com $a, b \in K[X_1]$. Então $\mathbb{A}_2.(d+X_2)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_2(K)$.

Prova. Pelo Corolário 82, temos $grau(a) \geq 1$. Em particular, $a \neq 0$. Dado o Corolário 68, devemos mostrar que, para todo $R \in \mathbb{A}_1[X_1] \setminus K$,

$$[d + X_2, R] \notin K[X_1, X_2]R.$$

Se $ord(R) = 0$, i.e., se $R \in K[X_1, X_2] \setminus K$, então é verdade que

$$[d + X_2, R] \stackrel{Corol.30}{=} d(R) \notin K[X_1, X_2]R,$$

visto que d é simples.

Suponhamos então $ord(R) = r \geq 1$ e que $[d + X_2, R] = fR$, para algum $f \in K[X_1, X_2]$. Escrevamos $R = \sum_{i=0}^{r} p_i \partial_2^i$, com $p_i \in K[X_1, X_2]$ para todo i e $p_r \neq 0$. Pelo Lema 86, $p_r = k_r \in K^*$ e

$$d(p_{r-1}) = -ap_{r-1} + rk_r\partial_2(X_2) = -ap_{r-1} + rk_r. \tag{52}$$

Como $grau_{X_2}(rk_r) = 0$, então, por (52) acima e pelo Lema 84 (pondo $t = 0$, $u = -a$, $g = p_{r-1}$), temos

$$\partial_2^{0+1}(p_{r-1}) = 0,$$

já que $-a \neq (0 + 1)a = a$ e $a \neq 0$.

Assim, $p_{r-1} \in K[X_1]$ e, portanto,

$$d(p_{r-1}) = \partial_1(p_{r-1}).$$

Reescrevendo (52), obtemos

$$\partial_1(p_{r-1}) = -ap_{r-1} + rk_r,$$

o que é um absurdo por questões de grau, dado que $grau_{X_1}(a) \geq 1$ e $rk_r \in K$.

Portanto, de fato,

$$[d + X_2, R] \notin K[X_1, X_2]R$$

também no caso em que $ord(R) \geq 1$, o que completa a prova. ■

5.2 A prova da conjectura para $n = 2$

Queremos nesta seção provar o Teorema 75, resultado que confirma a Conjectura no caso $n = 2$. Apresentamos antes alguns resultados preparatórios.

Lema 88 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta\partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Se d é simples, então $grau_{X_2}(\beta) \geq 1$.

Prova. Suponhamos $grau_{X_2}(\beta) = 0$, ou seja, $\beta \in K[X_1]$. Denotemos por $\int \beta$ o polinômio de $K[X_1]$ cuja derivada é β, e consideremos o ideal $I = \left(X_2 - \int \beta\right) K[X_1, X_2]$. Temos então:

$$\begin{aligned} d\left(X_2 - \int \beta\right) &= \partial_1\left(X_2 - \int \beta\right) + \beta\partial_2\left(X_2 - \int \beta\right) \\ &= 0 - \beta + \beta - 0 = 0 \in I. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 32, I é um $d-$ideal próprio de $K[X_1, X_2]$, o que contraria a hipótese de ser d uma derivação simples. ∎

O resultado acima nos mostra que, na seção anterior, consideramos derivações das menos complicadas dentre aquelas com os quais nos propúnhamos trabalhar: as derivações simples.

Lema 89 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta\partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Sejam $p, q \in K[X_1, X_2]$, $p \neq 0$, e

$$P(Z) = \partial_1(Z) + \beta\partial_2(Z) + p \cdot Z + q.$$

Então, a equação $P(Z) = 0$ tem, no máximo, uma solução em $K[X_1, X_2]$.

Prova. Sejam $h_1, h_2 \in K[X_1, X_2]$ tais que $P(h_1) = 0 = P(h_2)$. Então

$$\begin{aligned} & P(h_1) - P(h_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \partial_1 (h_1 - h_2) + \beta \partial_2 (h_1 - h_2) + p \cdot (h_1 - h_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & d(h_1 - h_2) = -p(h_1 - h_2), \end{aligned} \tag{53}$$

e, portanto, o ideal à esquerda $K[X_1, X_2](h_1 - h_2)$ é um $d-$ideal de $K[X_1, X_2]$. Visto que d é simples, temos necessariamente $(h_1 - h_2) \in K$, do que resulta $d(h_1 - h_2) = 0$. Então, de (53), concluímos que, necessariamente, $h_1 - h_2 = 0$, visto que $p \neq 0$. Ou seja, $h_1 = h_2$, c.q.d. ∎

Definição 90 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta \partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ e $\gamma \in K[X_1, X_2]$ definimos uma seqüência de expressões da seguinte forma: começamos com

$$P_{m,m-1}(Z, \gamma) := \partial_1 (Z) + \beta \partial_2 (Z) + \partial_2 (\beta) Z - \left(C_m^2 \partial_2^2 (\beta) + C_m^1 \partial_2 (\gamma) \right).$$

Se a equação $P_{m,m-1}(Z, \gamma) = 0$ não tem nenhuma solução em $K[X_1, X_2]$ ou se $m = 1$, paramos o processo e definimos

$$\mathfrak{B}_m(\gamma) = \{ P_{m,m-1}(Z, \gamma) \}.$$

Se a equação $P_{m,m-1}(Z, \gamma) = 0$ tem uma solução em $K[X_1, X_2]$ e $m \geq 2$, denotemos por $\xi_{m,m-1}$ esta solução. (Observe que, como d é simples, dado o Lema 88, temos $\partial_2(\beta) \neq 0$. Desta forma, pelo Lema 89, a solução $\xi_{m,m-1}$ é única.) Definimos então

$$\begin{aligned} P_{m,m-2}(Z, \gamma) \ :\ & = \partial_1 (Z) + \beta \partial_2 (Z) + 2 \partial_2 (\beta) Z - \\ & - \left(C_{m-1}^2 \partial_2^2 (\beta) + C_{m-1}^1 \partial_2 (\gamma) \right) \xi_{m,m-1} - \\ & - \left(C_m^3 \partial_2^3 (\beta) + C_m^2 \partial_2^2 (\gamma) \right). \end{aligned}$$

Novamente, se a equação $P_{m,m-2}(Z,\gamma) = 0$ *não tem solução em* $K[X_1, X_2]$ *ou se* $m = 2$*, paramos o processo e tomamos*

$$\mathfrak{B}_m(\gamma) = \{P_{m,m-1}(Z,\gamma)\,,\ P_{m,m-2}(Z,\gamma)\}\,.$$

Se a equação $P_{m,m-2}(Z,\gamma) = 0$ *tem uma solução em* $K[X_1, X_2]$ *e se* $m \geq 3$*, denotemos por* $\xi_{m,m-2}$ *esta solução (única, pelos mesmos motivos expostos acima). Definimos então*

$$\begin{aligned} P_{m,m-3}(Z,\gamma) \ :&= \partial_1(Z) + \beta\partial_2(Z) + 3\partial_2(\beta)Z - \\ &- \left(C^2_{m-2}\partial^2_2(\beta) + C^1_{m-2}\partial_2(\gamma)\right)\xi_{m,m-2} - \\ &- \left(C^3_{m-1}\partial^3_2(\beta) + C^2_{m-1}\partial^2_2(\gamma)\right)\xi_{m,m-1} - \\ &- \left(C^4_m\partial^4_2(\beta) + C^3_m\partial^3_2(\gamma)\right). \end{aligned}$$

Por indução, seja $2 \leq i \leq m$ *e suponhamos que as expressões*

$$P_{m,m-1}(Z,\gamma)\,, \ldots, P_{m,m-i}(Z,\gamma)$$

e os polinômios

$$\xi_{m,m-1}, \ldots, \xi_{m,m-i+1} \in K[X_1, X_2]$$

tenham sido já construídos. Se a equação $P_{m,m-i}(Z,\gamma) = 0$ *não tem nenhuma solução em* $K[X_1, X_2]$ *ou se* $m = i$*, paramos o processo e tomamos*

$$\mathfrak{B}_m(\gamma) = \{P_{m,m-1}(Z,\gamma)\,, \ldots, P_{m,m-i}(Z,\gamma)\}\,.$$

Se a equação $P_{m,m-i}(Z,\gamma) = 0$ *tem uma solução em* $K[X_1, X_2]$ *e* $i < m$*, denotemos por* $\xi_{m,m-i}$ *esta (única) solução e definamos*

$$\begin{aligned} P_{m,m-(i+1)}(Z,\gamma) \ :&= \partial_1(Z) + \beta\partial_2(Z) + (i+1)\,\partial_2(\beta)Z - \\ &- \sum_{j=0}^{i-1}\left(C^{j+2}_{m-i+j}\partial^{j+2}_2(\beta) + C^{j+1}_{m-i+j}\partial^{j+1}_2(\gamma)\right)\xi_{m,m-i+j} - \\ &- \left(C^{i+2}_m\partial^{i+2}_2(\beta) + C^{i+1}_m\partial^{i+1}_2(\gamma)\right). \end{aligned} \tag{54}$$

Evidentemente, este processo cessará e, então, teremos construído um conjunto de expressões

$$\mathfrak{B}_m(\gamma) = \{P_{m,m-1}(Z,\gamma), ..., P_{m,J_m(\gamma)}(Z,\gamma)\},$$

onde $J_m(\gamma)$ é um inteiro tal que $0 \leq J_m(\gamma) \leq m-1$.

Em virtude do Corolário 68, estamos interessados em controlar o conjunto

$$\{\text{operadores de Darboux para } d+\gamma\},$$

pois ele nos diz que $d+\gamma$ gera um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2(K)$ se, e somente se, este conjunto é vazio. O resultado a seguir nos mostra a relação que existe entre a seqüência de expressões

$$J_m(\gamma), P_{m,m-1}(Z,\gamma), ..., P_{m,J_m(\gamma)}(Z,\gamma), \xi_{m,m-1}, ..., \xi_{m,J_m(\gamma)+1}$$

construída acima e a existência de operadores de Darboux de ordem m para $d+\gamma$. Ainda, nos mostra também que, quando o conjunto acima não é vazio, então todos os operadores de ordem m são da forma $kR_{d+\gamma}$, onde $k \in K^*$ e $R_{d+\gamma}$ é um operador bem definido associado a $d+\gamma$.

Teorema 91 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta\partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Fixados $m \in \mathbb{N}^*$ e $\gamma \in K[X_1, X_2]$, sejam

$$J_m(\gamma), P_{m,m-1}(Z,\gamma), ..., P_{m,J_m(\gamma)}(Z,\gamma), \xi_{m,m-1}, ..., \xi_{m,J_m(\gamma)+1}$$

definidos como acima. Então:

(a) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $d+\gamma$ admite um operador de Darboux de ordem m em $\mathbb{A}_1[X_1]$;

(ii) $J_m(\gamma) = 0$ *e a equação* $P_{m,0}(Z,\gamma) = 0$ *tem uma (única) solução* $\xi_{m,0} \in K[X_1, X_2]$.

(b) Quando as condições (i) e (ii) acima são satisfeitas, então:

(1) $\{$*operadores de Darboux para* $d + \gamma$ *de ordem* $m\} = K^* R_m$, *onde*

$$R_m := \partial_2^m + \sum_{i=0}^{m-1} \xi_{m,i} \partial_2^i;$$

(2) $[d + \gamma, R_m] = -m\partial_2(\beta) R_m$.

Prova. (a) *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* Seja $R \in \mathbb{A}_1[X_1]$ um operador de Darboux para $d + \gamma$ de ordem m, digamos,

$$R = \sum_{i=0}^{m} p_i \partial_2^i,$$

com $p_i \in K[X_1, X_2]$ para cada i e $p_m \neq 0$, e seja $g \in K[X_1, X_2]$ tal que $[d + \gamma, R] = gR$, ou seja,

$$\sum_{i=0}^{m} g p_i \partial_2^i = gR = [d + \gamma, R] = \sum_{i=0}^{m} [d + \gamma, p_i \partial_2^i]. \tag{55}$$

Afirmação 1: Se $[d + \gamma, R] = gR$, então $p_m \in K^*$ e $g = -m\partial_2(\beta)$.

De fato, pelo Lema 76 *(ii)*, temos que, para todo $i \in \{0, ..., m\}$, a i-ésima parcela do somatório da direita é um operador de ordem menor ou igual a i em ∂_2, de modo que o coeficiente de ∂_2^m em $[d + \gamma, R]$ é igual a

$$d(p_m) - m\partial_2(\beta) p_m \tag{56}$$

e, portanto, por (55), obtemos

$$g p_m = d(p_m) - m\partial_2(\beta) p_m,$$

donde

$$d(p_m) = (g + m\partial_2(\beta)) p_m. \tag{57}$$

Mas, então, $K[X_1, X_2]p_m$ é um $d-$ideal não-nulo de $K[X_1, X_2]$ e, como d é simples, concluímos que

$$p_m \in K^*. \tag{58}$$

Ainda, sendo p_m uma constante, temos $d(p_m) = 0$ e, voltando a (57), concluímos, já que $p_m \neq 0$, que

$$g = -m\partial_2(\beta), \tag{59}$$

o que completa a prova da Afirmação 1.

Olhemos agora para os coeficientes de ∂_2^{m-i} em (55), para $1 \leq i \leq m$. Aqui, também pelo Lema 76 *(ii)*, temos que o coeficiente de ∂_2^{m-i} em $[d+\gamma, R]$ é proveniente das parcelas $[d+\gamma, p_t\partial_2^t]$ onde $t \geq m-i$. Como, para cada $t \in \mathbb{N}$, temos, pelo mesmo Lema 76 *(ii)*,

$$\begin{aligned}\left[d+\gamma, p_t\partial_2^t\right] &= \left(d(p_t) - t\partial_2(\beta)p_t\right)\partial_2^t \\ &\quad -p_t\sum_{j=1}^{t}\left(C_t^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta) + C_t^j\partial_2^j(\gamma)\right)\partial_2^{t-j},\end{aligned}$$

obtemos que, para cada $t > m-i$, o coeficiente de ∂_2^{m-i} na expressão acima é ($t-j = m-i$ quando $j = t+i-m$):

$$-p_t\left(C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\beta) + C_t^{t+i-m}\partial_2^{t+i-m}(\gamma)\right).$$

Assim, teremos que o coeficiente do termo ∂_2^{m-i} em $[d+\gamma, R]$ é igual a

$$\begin{aligned}&d(p_{m-i}) - (m-i)\partial_2(\beta)p_{m-i} \\ &\quad - \sum_{t=m-i+1}^{m} p_t\left(C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\beta) + C_t^{t+i-m}\partial_2^{t+i-m}(\gamma)\right).\end{aligned} \tag{60}$$

Daí, olhando para os termos em ∂_2^{m-1} em (55), temos, por (60) e (59),

$$\begin{aligned}-m\partial_2(\beta)p_{m-1} &= d(p_{m-1}) - (m-1)\partial_2(\beta)p_{m-1} \\ &\quad -p_m\left(C_m^2\partial_2^2(\beta) + C_m^1\partial_2(\gamma)\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$d(p_{m-1}) + \partial_2(\beta)\, p_{m-1} - p_m\left(C_m^2 \partial_2^2(\beta) + C_m^1 \partial_2(\gamma)\right) = 0.$$

Evidentemente, $(p_{m-1}/p_m) \in K[X_1, X_2]$, visto que, por (58), $p_m \in K^*$; então, dividindo a equação acima por p_m, obtemos

$$d\left(\frac{p_{m-1}}{p_m}\right) + \partial_2(\beta)\frac{p_{m-1}}{p_m} - \left(C_m^2 \partial_2^2(\beta) + C_m^1 \partial_2(\gamma)\right) = 0,$$

ou seja,

$$P_{m,m-1}\left(\frac{p_{m-1}}{p_m}, \gamma\right) = 0.$$

Por indução, suponhamos $i < m$ e que, para todo $j = m-1, ..., m-i$, tenhamos $P_{m,j}(p_j/p_m, \gamma) = 0$. Então, chamando as soluções p_j/p_m de $\xi_{m,,j}$ e olhando para os termos em ∂_2^{m-i-1} em (55), temos, por (60) e (59),

$$\begin{aligned} -m\partial_2(\beta)\, p_{m-i-1} &= d(p_{m-i-1}) - (m-i-1)\,\partial_2(\beta)\, p_{m-i-1} \\ &- \sum_{t=m-i}^{m} p_t\left(C_t^{t+i-m+2}\partial_2^{t+i-m+2}(\beta) + C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\gamma)\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & d(p_{m-i-1}) + (i+1)\partial_2(\beta)\, p_{m-i-1} \\ & - \sum_{t=m-i}^{m} p_t\left(C_t^{t+i-m+2}\partial_2^{t+i-m+2}(\beta) + C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\gamma)\right) = 0. \end{aligned}$$

Então, dividindo esta igualdade por p_m, obtemos

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{p_{m-i-1}}{p_m}\right) + (i+1)\partial_2(\beta)\frac{p_{m-i-1}}{p_m} \\ & - \sum_{t=m-i}^{m-1}\left(C_t^{t+i-m+2}\partial_2^{t+i-m+2}(\beta) + C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\gamma)\right)\frac{p_t}{p_m} \\ & - \left(C_m^{i+2}\partial_2^{i+2}(\beta) + C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\gamma)\right) = 0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
& d\left(\frac{p_{m-i-1}}{p_m}\right)+(i+1)\partial_2(\beta)\frac{p_{m-i-1}}{p_m} \\
& -\sum_{t=m-i}^{m-1}\left(C_t^{t+i-m+2}\partial_2^{t+i-m+2}(\beta)+C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\gamma)\right)\xi_{m,t} \\
& -\left(C_m^{i+2}\partial_2^{i+2}(\beta)+C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\gamma)\right)=0.
\end{aligned}
$$

Agora, fazendo a mudança de variável $k=t-(m-i)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& d\left(\frac{p_{m-i-1}}{p_m}\right)+(i+1)\partial_2(\beta)\frac{p_{m-i-1}}{p_m} \\
& -\sum_{k=0}^{i-1}\left(C_{m-i+k}^{k+2}\partial_2^{k+2}(\beta)+C_{m-i+k}^{k+1}\partial_2^{k+1}(\gamma)\right)\xi_{m,k+m-i} \\
& -\left(C_m^{i+2}\partial_2^{i+2}(\beta)+C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\gamma)\right)=0,
\end{aligned}
$$

ou seja (veja 54),

$$P_{m,m-(i+1)}\left(\frac{p_{m-(i+1)}}{p_m},\gamma\right)=0.$$

Desta forma, concluímos que $J_m(\gamma)=0$ e que $p_0/p_m\in K[X_1,X_2]$ é uma solução da equação $P_{m,0}(Z,\gamma)=0$, e é única, pelo Lema 89.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Suponhamos que $J_m(\gamma)=0$ e que a equação $P_{m,0}(Z,\gamma)=0$ tenha uma solução em $K[X_1,X_2]$. Para cada $i=1,...m$, seja $\xi_{m,m-i}\in K[X_1,X_2]$ a solução da equação $P_{m,m-i}(Z,\gamma)=0$.

Tomemos

$$R_m:=\partial_2^m+\sum_{i=1}^m\xi_{m,m-i}\partial_2^{m-i}.$$

Afirmamos que R_m é um operador de Darboux para $d+\gamma$. Mais precisamente:

$$[d+\gamma,R_m]=-m\partial_2(\beta)R_m=-m\partial_2(\beta)\partial_2^m+\sum_{i=1}^m-m\xi_{m,m-i}\partial_2(\beta)\partial_2^{m-i}.$$

De fato,

$$[d+\gamma, R_m] = [d+\gamma, \partial_2^m] + \sum_{i=1}^{m} [d+\gamma, \xi_{m,m-i}\partial_2^{m-i}];$$

daí, por um lado, o coeficiente do termo ∂_2^m em $[d+\gamma, R_m]$ é, pelo Lema 76, dado exclusivamente pela parcela $[d+\gamma, \partial_2^m]$ e vale

$$d(1) - m\partial_2(\beta) = -m\partial_2(\beta). \tag{61}$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, temos que o coeficiente do termo ∂_2^{m-i}, $1 \leq i \leq m$, em $[d+\gamma, R_m]$ é proveniente das parcelas $[d+\gamma, \partial_2^m]$ e $[d+\gamma, \xi_{m,t}\partial_2^t]$, com $m-i \leq t < m$, e, portanto, pelo Lema 76, é igual a

$$\begin{aligned}
& d\left(\xi_{m,m-i}\right) - (m-i)\,\partial_2(\beta)\,\xi_{m,m-i} \\
& - \sum_{t=m-i+1}^{m-1} \xi_{m,t}\left(C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\beta) + C_t^{t+i-m}\partial_2^{t+i-m}(\gamma)\right) \\
& + \left(C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\beta) + C_m^{i}\partial_2^{i}(\gamma)\right) \\
= \; & d\left(\xi_{m,m-i}\right) + i\partial_2(\beta)\,\xi_{m,m-i} \\
& - \sum_{t=m-i+1}^{m-1} \xi_{m,t}\left(C_t^{t+i-m+1}\partial_2^{t+i-m+1}(\beta) + C_t^{t+i-m}\partial_2^{t+i-m}(\gamma)\right) \\
& - \left(C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\beta) + C_m^{i}\partial_2^{i}(\gamma)\right) - m\partial_2(\beta)\,\xi_{m,m-i}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $j = t - (m-i+1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& d\left(\xi_{m,m-i}\right) + i\partial_2(\beta)\,\xi_{m,m-i} \\
& - \sum_{j=0}^{i-2} \xi_{m,m+j-i+1}\left(C_{m+j-i+1}^{j+2}\partial_2^{j+2}(\beta) + C_{m+j-i+1}^{j+1}\partial_2^{j+1}(\gamma)\right) \\
& - \left(C_m^{i+1}\partial_2^{i+1}(\beta) + C_m^{i}\partial_2^{i}(\gamma)\right) - m\partial_2(\beta)\,\xi_{m,m-i} \overset{P_{m,m-i}\left(\xi_{m,m-i}\right)=0}{=} \\
= \; & -m\partial_2(\beta)\,p_{m-i}.
\end{aligned}$$

Assim, de fato,

$$[d+\gamma, R_m] = -m\partial_2(\beta)\,R_m.$$

(b) (1) Da prova de *(i)* acima, sabemos que R_m é um operador de Darboux para $d+\gamma$. É fácil ver que, para todo $k \in K^*$, o operador kR_m é também um operador de Darboux de ordem m para $d+\gamma$, de modo que

$K^* R_m \subseteq \{R;\ R$ é um operador de Darboux para $d+\gamma$ de ordem $m\}$.

Reciprocamente, se

$$R = \sum_{i=0}^{m} p_i \partial_2^i,$$

com $p_i \in K[X_1, X_2]$ para cada i e $p_m \neq 0$, é um operador de Darboux de ordem m para $d+\gamma$, então já vimos na prova de $(i) \Rightarrow (ii)$ da parte *(a)* que, necessariamente, temos $p_m \in K^*$ e, para cada $i = m-1, ..., 0$, tem-se $(p_i / p_m) = \xi_{m,i}$, ou seja, $p_i = p_m \xi_{m,i}$. Assim,

$$R = \sum_{i=0}^{m} p_i \partial_2^i = \sum_{i=0}^{m} p_m \xi_{m,i} \partial_2^i = p_m \sum_{i=0}^{m} \xi_{m,i} \partial_2^i = p_m R_m \in K^* R_m.$$

(2) A igualdade $[d+\gamma, R_m] = -m\partial_2(\beta) R_m$ já foi provada em *(ii)$\Rightarrow$(i)* acima. ∎

Corolário 92 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta \partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Então, para cada $\gamma \in K[X_1, X_2]$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathbb{A}_2.(d+\gamma)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$.

(ii) 1) d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$;

2) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $j \in \{0, ..., n-1\}$ tal que a equação $P_{n,j}(Z, \gamma) = 0$ não tem nenhuma solução em $K[X_1, X_2]$.

Prova. É uma conseqüência do teorema anterior e dos Corolários 68 e 72. ■

Finalmente, podemos apresentar o resultado que é o objetivo principal deste texto. Reenunciamos aqui o Teorema 75:

Teorema 93 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \beta\partial_2,$$

com $\beta \in K[X_1, X_2]$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$.

(ii) Existe $\gamma \in K[X_1, X_2]$ tal que $\mathbb{A}_2.(d + \gamma)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$.

(iii) Existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tal que $\mathbb{A}_2.(d + \varepsilon X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$.

Prova. $(iii) \Longrightarrow (ii)$ Trivial.

$(ii) \Rightarrow (i)$ É conseqüência do Corolário 72.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Visto que d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$, pelo Lema 88, temos $grau_{X_2}(\beta) \geq 1$.

Se $grau_{X_2}(\beta) = 1$, então, pelo Teorema 87, $\mathbb{A}_2.(d + X_2)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_2$.

Suponhamos agora que $grau_{X_2}(\beta) \geq 2$ e, portanto, que $\partial_2^2(\beta) \neq 0$. Inicialmente salientamos que, neste caso, não é possível termos ao mesmo tempo

$$(m-1)\,\partial_2^2(\beta) = -2 \tag{62}$$

e

$$(r-1)\,\partial_2^2(\beta) = 2, \tag{63}$$

com $m, r \in \mathbb{N}^*$. De fato, caso contrário teríamos

$$(m-1)\,\partial_2^2(\beta) + (r-1)\,\partial_2^2(\beta) = -2 + 2 = 0,$$

ou seja,

$$((m+r)-2)\,\partial_2^2(\beta)=0. \tag{64}$$

e, como $\partial_2^2(\beta)\neq 0$, obteríamos necessariamente

$$m+r=2.$$

Mas também $m\neq 1\neq r$ (por (62) e (63)). Absurdo, uma vez que $m,r\in\mathbb{N}^*$.

Com isso, temos que existe $\varepsilon\in\{-1,+1\}$ tal que $\varepsilon\notin-\left(\partial_2^2(\beta)/2\right)\mathbb{N}$.

Afirmamos agora que, para todo $m\in\mathbb{N}^*$, a equação

$$P_{m,m-1}(Z,\varepsilon X_2)=0$$

(estabelecida como na Definição 90) não admite solução em $K[X_1,X_2]$, e, assim, pelo Corolário acima, $\mathbb{A}_2.(d+\varepsilon X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$.

De fato, se a equação $P_{m,m-1}(Z,\varepsilon X_2)=0$ tem uma solução $f\in K[X_1,X_2]$, então

$$\partial_1(f)+\beta\partial_2(f)+\partial_2(\beta)f-(m(m-1)/2)\,\partial_2^2(\beta)-m\varepsilon=0.$$

Esta igualdade, dada a fórmula (3), também pode ser escrita como

$$\partial_1(f)+\partial_2(\beta f)-(m(m-1)/2)\,\partial_2^2(\beta)-m\varepsilon=0. \tag{65}$$

Pela escolha de ε, temos $f\neq 0$. De fato, se $f=0$, teríamos

$$-(m(m-1)/2)\,\partial_2^2(\beta)-m\varepsilon=0,$$

ou seja,

$$m\left(((m-1)\,\partial_2^2(\beta))/2+\varepsilon\right)=0$$

e, portanto, como $m\neq 0$,

$$\varepsilon=-(m-1)\,\partial_2^2(\beta)/2\in-\left(\partial_2^2(\beta)/2\right)\mathbb{N},$$

uma contradição com a escolha de ε.

Mas sendo $f \neq 0$, temos que a igualdade (65) é absurda, visto que o grau em X_2 à esquerda da igualdade é igual a $grau_{X_2}(f) + grau_{X_2}(\beta) - 1 \geq 1$, já que $grau_{X_2}(\beta) \geq 2$, e, portanto, o lado esquerdo não pode ser o polinômio nulo. ■

Encerramos este trabalho mostrando que a condição (iii) no Teorema 93 é ótima, no sentido de que não pode ser substituída por nenhuma das condições "$\mathbb{A}_2(d + X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$" ou "$\mathbb{A}_2(d - X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$" (veja Exemplo 96). Enunciaremos alguns resultados preliminares que apoiarão esta afirmação.

Lema 94 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta \in K[X_1, X_2]$ e $grau_{X_2}(\beta) \geq 2$. Seja $\gamma \in K[X_1, X_2]$ tal que*

$$grau_{X_2}(\gamma) \leq grau_{X_2}(\beta) - 1.$$

Então:

(a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\partial_2(\gamma) = -(m-1)\partial_2^2(\beta)/2$;

(ii) A equação $P_{m,m-1}(Z, \gamma) = 0$ tem uma solução em $K[X_1, X_2]$.

Quando as condições (i)-(ii) são satisfeitas, 0 é a única solução desta equação em $K[X_1, X_2]$.

(b) Se existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que a equação $P_{m,m-1}(Z, \gamma) = 0$ tem uma solução em $K[X_1, X_2]$, m é único e igual a $1 - 2\partial_2(\gamma) / \partial_2^2(\beta)$.

Prova. (a) Para cada $f \in K[X_1, X_2]$, temos, pela Definição 90,

$$\begin{aligned} P_{m,m-1}(f, \gamma) \quad : &= \partial_1(f) + \beta\partial_2(f) + \partial_2(\beta) f - \\ &- (m)\left(\left(\frac{m-1}{2}\right)\partial_2^2(\beta) + \partial_2(\gamma)\right) \\ &= \partial_1(f) + \partial_2(\beta f) - (m)\left(\left(\frac{m-1}{2}\right)\partial_2^2(\beta) + \partial_2(\gamma)\right). \end{aligned}$$

Daí, se $f \neq 0$, então

$$\begin{aligned} grau_{X_2}\left(P_{m,m-1}\left(f,\gamma\right)\right) &= grau_{X_2}\left(\beta\right) + grau_{X_2}\left(f\right) - 1 \\ &\geq grau_{X_2}\left(\beta\right) - 1 \overset{grau_{X_2}(\beta)\geq 2}{\geq} 1. \end{aligned}$$

Desta forma, a equação $P_{m,m-1}\left(Z,\gamma\right) = 0$ tem uma solução em $K[X_1, X_2]$ se, e somente se, 0 é uma solução de $P_{m,m-1}\left(Z,\gamma\right) = 0$. E claramente, isto ocorre se, e somente se,

$$\binom{m-1}{2} \partial_2^2\left(\beta\right) + \partial_2\left(\gamma\right) = 0,$$

ou ainda, se, e somente se, m é tal que

$$m = 1 - \frac{2\partial_2\left(\gamma\right)}{\partial_2^2\left(\beta\right)},$$

o que mostra que m é único.

(b) É uma conseqüência imediata da demonstração de (a). ∎

A seguir estabeleceremos uma completa caracterização dos polinômios γ, com $grau_{X_2}\left(\gamma\right) \leq 1$, que tornam $\mathbb{A}_2.\left(d+\gamma\right)$ um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$ quando d é simples e da forma $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta \in K[X_1, X_2]$ e $grau_{X_2}\left(\beta\right) = 2$. Uma completa caracterização dos polinômios γ para os quais $\mathbb{A}_2.\left(d+\gamma\right)$ é maximal quando $grau_{X_2}\left(\beta\right)$ é qualquer pode ser encontrada em [6].

Teorema 95 *Seja d uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ da forma $d = \partial_1 + \beta\partial_2$, com $\beta \in K[X_1, X_2]$ e $grau_{X_2}\left(\beta\right) = 2$. Seja $\gamma \in K[X_1, X_2]$ tal que $grau_{X_2}\left(\gamma\right) \leq grau_{X_2}\left(\beta\right) - 1 = 1$. Então:*

(a) as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathbb{A}_2.\left(d+\gamma\right)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$;

(ii) $\partial_2\left(\gamma\right) \notin -\left(1/2\right)\partial_2^2\left(\beta\right)\mathbb{N}$;

(b) se $\partial_2(\gamma) = -(r/2)\,\partial_2^2(\beta)$, para algum $r \in \mathbb{N}$, então

$$\{\textit{Operadores de Darboux para } d+\gamma \textit{ em } \mathbb{A}_1[X_1]\} = K^*\partial_2^{r+1}.$$

Prova. (a) $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que exista $r \in \mathbb{N}$ tal que $\partial_2(\gamma) = -(r/2)\,\partial_2^2(\beta)$. Então, pelo Lema 76 (ii), temos que

$$\begin{aligned}
\left[d+\gamma, \partial_2^{r+1}\right] &= -(r+1)\,\partial_2(\beta)\,\partial_2^{r+1} - \left(\tfrac{(r+1)r}{2}\partial_2^2(\beta) + (r+1)\,\partial_2(\gamma)\right)\partial_2^r \\
&\quad - \sum_{j=2}^{r+1}\left(C_{r+1}^{j+1}\partial_2^{j+1}(\beta) + C_{r+1}^{j}\partial_2^{j}(\gamma)\right)\partial_2^{r+1-j} \\
&= -(r+1)\,\partial_2(\beta)\,\partial_2^{r+1} \in K[X_1,X_2]\partial_2^{r+1},
\end{aligned}$$

visto que $\partial_2(\gamma) = -(r/2)\,\partial_2^2(\beta)$, o que anula o coeficiente de ∂_2^r, e, ainda, $grau_{X_2}(\beta) = 2$ e $grau_{X_2}(\gamma) \leq 1$, que fazem com que todas as parcelas do somatório se anulem.

Desta forma, ∂_2^{r+1} é um operador de Darboux para $d+\gamma$ e, portanto, pelo Corolário 68, $\mathbb{A}_2.(d+\gamma)$ não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $\mathbb{A}_2(d+\gamma)$ não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$. Pelo Corolário 68, existe um operador $R \in \mathbb{A}_1[X_1] \setminus K$ tal que $[d+\gamma, R] \in K[X_1,X_2]R$. Seja $m = ord(R)$.

Afirmamos que, como d é simples, $m \geq 1$. De fato, caso contrário, teríamos R um polinômio, e então

$$[d+\gamma, R] \overset{Corol.30}{=} d(R).$$

Como $[d+\gamma, R] \in K[X_1,X_2]R$, concluiríamos que $d(R) \in K[X_1,X_2]R$, com R não constante, contrariando a d-simplicidade de $K[X_1,X_2]$.

Desta forma, pelo Teorema 91, a equação $P_{m,m-1}(Z,\gamma) = 0$ tem uma solução em $K[X_1,X_2]$, donde, pelo Lema 94 (a),

$$\partial_2(\gamma) = -\frac{(m-1)}{2}\partial_2^2(\beta) \in -\frac{1}{2}\partial_2^2(\beta)\,\mathbb{N}.$$

(b) Se $\partial_2(\gamma) = -(r/2)\,\partial_2^2(\beta)$, então vimos na prova de (a) $((i) \Rightarrow (ii))$ que

$$\left[d+\gamma, \partial_2^{r+1}\right] = -(r+1)\,\partial_2(\beta)\,\partial_2^{r+1},$$

de modo que ∂_2^{r+1} é um operador de Darboux para $d+\gamma$ em $\mathbb{A}_1[X_1]$. Agora, pelo Lema 94, $r+1$ é o único inteiro $m \geq 1$ tal que a equação $P_{m,m-1}(Z,\gamma) = 0$ tem uma solução em $K[X_1, X_2]$. Desta forma, $d+\gamma$ só admite operadores de Darboux de ordem $r+1$ e, portanto, pelo Teorema 91 (b),

$$\{\text{Operadores de Darboux para } d+\gamma \text{ em } \mathbb{A}_1[X_1]\} = K^{*}\partial_2^{r+1}. \;\blacksquare$$

Exemplo 96 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma*

$$d = \partial_1 + \left(\eta X_2^2 - p\right)\partial_2,$$

com $\eta \in \{-1, +1\}$ e $p \in K[X_1]$ de grau ímpar. Então, temos que:

(a) d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$;

(b) se $\eta = 1$, então $\mathbb{A}_2.(d+X_2)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$, mas $\mathbb{A}_2.(d-X_2)$ não;

(c) se $\eta = -1$, então $\mathbb{A}_2.(d-X_2)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$, mas $\mathbb{A}_2.(d+X_2)$ não.

Prova. (a) É um resultado de Maciejewski, Moulin Ollagnier e Nowicki (veja [8], Teorema 6.2, pág. 5105).

(b) Se $\eta = 1$, então $\beta = \eta X_2^2 - p = X_2^2 - p$ é tal que $\partial_2^2(\beta) = 2$. Daí, pondo $\gamma = X_2$, temos

$$\partial_2(\gamma) = 1 \notin -(1/2)\,\partial_2^2(\beta)\,\mathbb{N}$$

e, pondo $\gamma = -X_2$, temos

$$\partial_2(\gamma) = -1 \in -(1/2)\,\partial_2^2(\beta)\,\mathbb{N}.$$

Desta forma, pelo Teorema 95, $\mathbb{A}_2.(d + X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$, mas $\mathbb{A}_2.(d - X_2)$ não o é.

(c) Prova análoga à prova de (b): Se $\eta = -1$, então $\beta = -X_2^2 - p$ é tal que $\partial_2^2(\beta) = -2$. Daí, pondo $\gamma = X_2$, temos

$$\partial_2(\gamma) = 1 \in -(1/2)\,\partial_2^2(\beta)\,\mathbb{N}$$

e, pondo $\gamma = -X_2$, temos

$$\partial_2(\gamma) = -1 \notin -(1/2)\,\partial_2^2(\beta)\,\mathbb{N}.$$

Novamente fazendo uso do Teorema 95, teremos que $\mathbb{A}_2.(d - X_2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_2$, mas $\mathbb{A}_2.(d + X_2)$ não o é. ∎

Referências

[1] Bratti, G.- Takagi, M. *Differential equations and maximal ideals on the Weyl algebra* $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, n°. 107, p. 209-223, 2002.

[2] Coutinho, S. C. *A Primer of Algebraic D-modules*. Cambridge: Cambridge University. 207 p. (London Mathematical Society Student Texts, 33), 1995. ISBN 0-521-55908-1.

[3] Coutinho, S. C. d-Simple rings and simple D-modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. v.125, p. 405-415, jan. 1999.

[4] Dixmier, J. *Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes*. Anais Acad. Bras. Ciênc., 35, 491-519.

[5] Lequain, Y. *Simple Shamsuddin derivations of* $K[X_1, ..., X_n]$ *and cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra* $\mathbb{A}_n[K]$. preprint.

[6] Lequain, Y.- Doering, A. M.- Ripoll, C. *Cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra* $\mathbb{A}_2[K]$*: an effective approach*. preprint.

[7] Lequain, Y.- Levcovitz, D.- Souza Jr., J.C. *d-simple rings and principal maximal ideals of the Weyl algebra*. preprint.

[8] Maciejewski, A.- Moulin-Ollagnier, J.- Nowicki, A. *Simple quadratic derivations in two variables*. Comm. Algebra 29, p.5095-5113, 2001.

[9] Shamsuddin, A. Thesis - University of Leeds, 1977.

[10] Souza Jr., J. C. de. *Anéis d-simples e ideais maximais da álgebra de Weyl*. Tese de doutorado - Universidade de São Paulo-São Carlos, 2003.

[11] Stafford, J.T. *Module structure of Weyl algebras.* J. London Math. Soc. 18, p. 429-442, 1978.

[12] Stafford, J. T. *Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras.* Inventiones mathematicae, v. 79, p. 619-638, 1985.