

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CAMADAS DE
MISTURA COMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DE ESQUEMAS
DE ALTA PRECISÃO**

Por

NÚBIA LÚCIA GUIMARÃES PEÇANHA

Dissertação submetida como requisito parcial
Para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini

ORIENTADOR

Rio grande, setembro de 2000.

"Se permaneceres em mim, e as minhas palavras permanecerem em vós, pedireis o que quiseres, e vos será feito". João 15.7

Este trabalho é dedicado, em primeiro lugar, a Deus, ao meu esposo Paulo, aos meus pais Nildo e Tânia, aos meus irmãos e à minha avó Elvira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Jesus e a nosso Pai que está nos céus, que foram a luz para os meus pés nos momentos de completa escuridão, não me deixaram desistir e me levaram até a vitória.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Silvestrini, por sua amizade, compreensão e paciência, indispensáveis para que eu chegasse à reta final.

Ao Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes pelo esforço para que esse curso viesse a existir, pela compreensão e pelos conselhos nos momentos difíceis.

À Profa. Dra. Maria Cristina Varriale, por ter permitido que esse curso viesse a acontecer.

Aos meus colegas de curso, pela amizade e troca de experiências. Em particular, ao meu amigo Vitor, que sempre torceu muito por mim.

Ao meu esposo Paulo, que foi a força inicial para que eu começasse a caminhada rumo a realização profissional e colocou seus planos de vida em segundo plano, durante muito tempo, devido a minha carreira profissional.

Aos meus pais e avó, que dedicaram boa parte de suas vidas, perderam sono, levaram sustos, mas não deixaram faltar cuidados, amor e dedicação durante toda a minha vida.

Aos meus irmãos, que sempre se fizeram presentes em todos os momentos da minha vida e são muito importantes pra mim.

RESUMO

Nesta dissertação, apresenta-se um estudo sobre esquemas numéricos de alta precisão para modelagem matemática de camadas de mistura compressíveis em desenvolvimento temporal. O objetivo central é analisar condições de transição em camadas de mistura para diferentes números de Reynolds e Mach. Apresenta-se, em primeiro lugar, a motivação à utilização de esquemas numéricos de alta precisão que visem obter soluções de problemas de escoamentos que envolvem diversas escalas de tempo e espaço, os parâmetros físicos relevantes para o tipo de escoamento aqui analisado e algumas definições essenciais como camada de mistura e instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Descrevem-se, na continuação, as equações que governam os escoamentos viscosos compressíveis, a adimensionalização correspondente dessas equações, o sistema de equações adimensionais e as condições iniciais e de contorno. A Teoria da instabilidade Linear Hidrodinâmica para escoamentos livres incompressíveis e compressíveis é revisada onde, em particular, mostra-se a importância da escolha da taxa de amplificação máxima no tocante aos efeitos de compressibilidade e de viscosidade e constata-se a instabilidade do perfil tangente hiperbólica. São descritos os esquemas de diferenças finitas implícitos compactos de alta que permitem obter melhores resultados que os de ordem inferior com menor custo computacional. São demonstradas aproximações para a primeira e segunda derivadas e formulações para a fronteira da primeira e segunda derivadas, cujos resultados são aproximados aos dos métodos espectrais com a vantagem de usar domínios e condições de fronteira mais gerais. Em seguida, faz-se uma análise dos erros dos esquemas numéricos. Por último, apresentam-se alguns dos resultados obtidos de simulações numéricas comparando-se com toda a teoria física estudada para diversos números de Mach e Reynolds. Em particular, analisa-se a evolução temporal dos vórtices coerentes para diferentes condições de compressibilidade e viscosidade.

ABSTRACT

In this work a study about high precision numerical schemes for the mathematical modeling of compressible temporal mixing layer is presented. The main objective is to analyse the transition conditions for the mixing layer with different Reynolds and Mach numbers. Firstly, the motivation of using high precision schemes to solve flows problems that involved different time and length scales is presented, along with the description of the main physical parameters and others definitions such as mixing layers and Kelvin-Helmholtz instability. Then, the governing equations for compressible viscous flows, their adimensionalisation and the corresponding initial and boundary conditions are established. The linear stability theory is revised for both incompressible and compressible free shear flows. In particular, it is showed the importance of the choice of the maximum amplification rate for the compressibility and viscosity conditions adopted and it is verified the instability of the hyperbolic tangent profile. Then the high precision compact finite differences are presented along with approximation for the first and second derivatives for the central and boundary region of the computational domain. Finally, some results obtained from numerical simulations with different Reynolds and Mach numbers are presented and the temporal evolution of coherent vortices is analysed.

SUMÁRIO

PENSAMENTO	i
DEDICATÓRIA	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
SUMÁRIO	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS	x
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE ANEXOS	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Parâmetros físicos	2
1.2 Camadas de mistura compressíveis	3
1.2.1 Camada de mistura em desenvolvimento espacial.....	4
1.2.2 Camada de mistura em desenvolvimento temporal.....	6
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	10
2.1 Sistema de equações	10
2.2 Adimensionalização das equações	12
2.3 Sistema de equações adimensionais	13
2.4 Condições iniciais	14
2.5 Condições de contorno	16
3. TEORIA DA ESTABILIDADE LINEAR HIDRODINÂMICA	17
3.1 Escoamento incompressíveis	17
3.2 Escoamentos compressíveis	25
4. RESOLUÇÃO NUMÉRICA	27
4.1 Esquemas de diferenças finitas compactos	27
4.1.1 Aproximação da 1ª derivada.....	28

4.1.2 Aproximação da 2ª derivada.....	31
4.1.3 Formulação na fronteira para a 1ª derivada.....	32
4.1.4 Formulação na fronteira para a 2ª derivada.....	33
4.2 Análise de Fourier dos erros.....	35
4.2.1 Análise do erro para a 1ª derivada.....	36
4.2.2 Análise do erro para a 2ª derivada.....	38
4.3 Avanço no tempo.....	40
5. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	41
5.1 Testes preliminares.....	41
5.2 Resumo das simulações realizadas.....	43
5.3 Resultados das simulações para Ma=0,4 e Re=500 e 1.000	45
5.4 Influência do número de Reynolds	47
5.5 Influência do número de Mach	48
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	67
BIBLIOGRAFIA.....	74

LISTA DE SÍMBOLOS

a	velocidade do som
$c = c_r + ic_i$	autovalores
c_p	calor específico à pressão constante
c_r	velocidade de fase
c_v	calor específico à volume constante
D	dilatação
e	energia específica interna
E	energia total
k	termo de condutividade de calor
$L_x = L_y$	comprimento do domínio computacional
Ma	Mach
Mc	Mach convectivo
p	pressão
Pr	Prandtl
\dot{Q}	razão da transferência de calor
R	constante do gás
Re	Reynolds
t	tempo
T	temperatura
$U(x, y)$	velocidade do escoamento
$\bar{U}(y)$	velocidade média longitudinal
$\tilde{U}(x, y)$	perturbação de amplitude infinitesimal
\underline{U}	constante

$\hat{U}(y)$	autofunções
ω	vorticidade
$w_i = \alpha c_i$	taxa de amplificação da perturbação
α	número de onda
δ_i	espessura de vorticidade
$\Phi(y)$	autofunções
$\frac{\partial u}{\partial y}$	velocidade gradiente
λ	comprimento de onda
μ	viscosidade
ν	viscosidade cinemática
Ψ	função corrente
ρ	densidade
τ	tensão de cisalhamento

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

\bar{A}	matriz do sistema de equações do esquema compacto
$\alpha, \beta, a, b, c, d, e,$	coeficientes dos esquemas compactos
Δt	passo de tempo
ε	erro de tolerância
$h = dx = dy$	passos da malha
$i = 1 \dots N$	índice da malha
$f_i(x_i)$	funções de valores conhecidos
$f'_i(x_i)$	funções derivadas primeiras de valores desconhecidos
$f''_i(x_i)$	funções derivadas segundas de valores desconhecidos
\hat{f}_k	coeficientes de Fourier
\hat{f}'_k	coeficiente de Fourier para a primeira derivada exato
$\left(\hat{f}'_k\right)_{edf}$	coeficiente de Fourier para a primeira derivada do esquema de diferença finita
k	subpasso num passo de tempo Δt
K	número de subpassos num passo de tempo Δt
$s = \frac{x}{h}$	nova variável independente
w	número de onda
w'	número de onda modificado para a primeira derivada
w''	número de onda modificado para a segunda derivada
$x_i = h(i - 1)$	variáveis independentes
\bar{X}	vetor das funções derivadas desconhecidas
\bar{Y}	vetor das funções de valores conhecidos

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Perfil de velocidade média de uma camada de mistura espacial	4
Figura 1.2	Camada de mistura em desenvolvimento espacial	5
Figura 1.3	Perfil de velocidade média para uma camada de mistura temporal	7
Figura 1.4	Visualização da formação de um vórtice	9
Figura 3.1	Solução da equação de Orr-Sommerfeld para uma camada de mistura temporal viscosa incompressível	22
Figura 3.2	Máxima taxa de amplificação para uma camada de mistura temporal não viscosa incompressível	23
Figura 3.3	Perfil de velocidade $\bar{u}(y)$ e suas derivadas $\bar{u}'(y)$ e $\bar{u}''(y)$	24
Figura 3.4	Taxa de amplificação máxima para camada de mistura não viscosa compressível	25
Figura 3.5	Curvas da taxa de amplificação máxima para camada de mistura viscosa compressível	26
Figura 4.1	Gráfico do número de onda w versus número de onda modificado w'	37
Figura 4.2	Gráfico do número de onda w versus número de onda modificado w''	39

Figura 5.1	Simulação para $Ma=0,4$ e $Re=500$	48
Figura 5.2	Simulação para $Ma=0,4$ e $Re=1.000$	53
Figura 5.3	Simulação para $Ma=0,4$ e $t=100$	58
Figura 5.4	Simulação para $Ma=0,4$ e $Re=350$	59
Figura 5.5	Simulação para $Re=250$ e $t=75$	60
Figura 5.6	Simulação para $Re=250$ e $t=125$	62
Figura 5.7	Simulação para $Re=250$ e $t=225$	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Comprimentos do domínio computacional para os vários números de Mach	44
Tabela 5.2	Tabela das simulações realizadas	44

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1	Cálculo do sistema de relações entre α e β e a , b e c	71
Anexo 2	Cálculo do erro de truncamento do esquema de sexta ordem	74

1 INTRODUÇÃO:

Grandes esforços têm sido dispensados, e com tendência de crescer ao longo do tempo, para o desenvolvimento de ferramentas numéricas que possam ser empregadas tanto para a realização do que hoje se chama experimentação numérica quanto para a obtenção de informações para a aplicação imediata em atividades de engenharia. Dentre as maiores dificuldades para o desenvolvimento da modelagem matemática dos escoamentos encontra-se a problemática da turbulência.

A maioria dos escoamentos na natureza são turbulentos. Este fenômeno está entre os mais complexos e espetaculares encontrados na natureza. Por isso o desafio de compreender os mecanismos físicos que os governam. Os escoamentos turbulentos são instáveis e contém flutuações que são dependentes do tempo e da posição no espaço. A turbulência e a transição à turbulência a partir de um regime laminar, têm sido um dos assuntos científicos mais seriamente pesquisados no último século. É grande o investimento em pesquisas relacionadas à compreensão e ao controle dos escoamentos turbulentos, devido à enorme gama de implicações práticas advindas, envolvendo sistemas de transportes (aeronaves, navios, automóveis), sistemas de conversão e transmissão de energia (motores, turbinas, compressores, trocadores de calor) e também aplicações geofísicas (meteorologia, qualidade do ar) e biofísicas. Físicos, químicos, engenheiros (mecânicos, aeronáuticos, nucleares, termo-hidráulicos), matemáticos, biólogos, médicos, sociólogos, economistas, meteorologistas e astrofísicos, cada um com suas motivações particulares geradas pela busca de compreender seus problemas, tornam a necessidade de modelos matemáticos e de métodos de solução de equações cada vez mais crescente.

A transição à turbulência, identificada experimentalmente por Reynolds (1883), é caracterizada pelo aparecimento de instabilidades num escoamento originalmente estacionário as quais se multiplicam por um processo não linear e degeneram-se finalmente em um regime turbulento completamente desenvolvido. Em qual-

quer tipo de escoamento, o processo de transição pode ser generalizado como sendo o resultado da amplificação de perturbações injetadas por variadas fontes de ruídos.

Os escoamentos em transição ou turbulentos são governados pelas equações de Navier-Stokes, tanto para os fluxos compressíveis como para os incompressíveis. Porém, devido ao número de graus de liberdade que envolve um escoamento turbulento (Lesieur, 1997), sua solução torna-se difícil e honerosa, principalmente em domínios tridimensionais. O presente trabalho tem por objetivo principal simular numericamente condições de transição em camadas de mistura compressíveis bidimensionais utilizando esquemas numéricos de diferenças finitas de alta precisão. Os escoamentos que serão tratados aqui são os viscosos e compressíveis. Mas, serão feitas análises teóricas sobre vários tipos de escoamentos: viscosos e não viscosos, compressíveis e incompressíveis.

1.1 Parâmetros físicos:

Os parâmetros físicos mais importantes em escoamentos compressíveis turbulentos são:

- **o número de Reynolds**, $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$, indica a magnitude relativa das forças de inércia e de viscosidade.
- **o número de Prandtl**, $Pr = \mu \frac{c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$, mede a razão da difusividade do momentum e difusividade do calor.
- **o número de Mach**, $Ma = \frac{U}{a}$, mede a velocidade do movimento do fluido em relação à velocidade do som. E, portanto, mede o grau de compressibilidade do fluido, uma vez que, $a = \sqrt{\gamma RT}$ (gases perfeitos) e, pela equação dos gases perfeitos, $RT = \frac{p}{\rho}$, tem-se que $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$.

O número de Pr refere-se às propriedades do fluido, enquanto os números de Reynolds e Mach referem-se ao movimento do fluido. Sendo assim, neste trabalho, fez-se Pr constante e variaram-se Re e Ma para as simulações numéricas a realizar.

1.2 Camadas de mistura compressíveis:

Os escoamentos cisalhantes livres são caracterizados pela ausência de paredes e obstáculos no seu interior ou nos seus limites e pode ser subdividido em três tipos: camadas de mistura, jatos e esteiras (Firsh, 1998). Neste trabalho, analisar-se-á simulações de escoamentos do tipo camada de mistura (Brown & Roshko, 1974). Este tipo de fluxo é encontrado em um número grande de aplicações industriais, em aerodinâmica interna de motores de combustão ou externa no descolamento de camadas limites, e geofísicas como a formação de camadas de mistura na atmosfera e nos oceanos.

Uma camada de mistura caracteriza-se por uma região altamente cizalhante que separa dois escoamentos uniformes com velocidades paralelas diferentes U_1 e U_2 (figura 1.1).

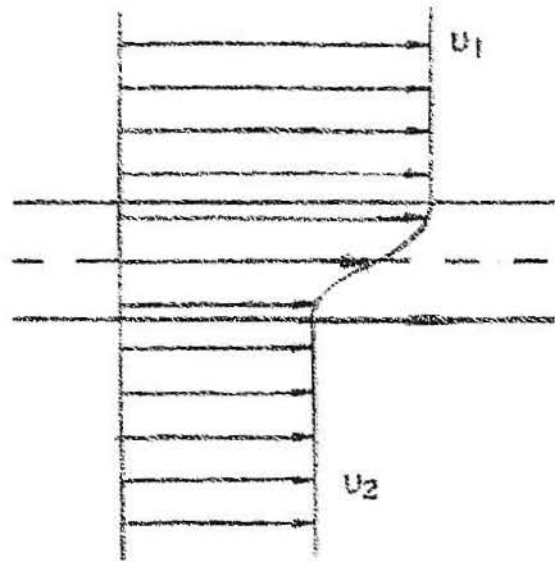


Figura 1.1: Perfil de velocidade média de uma camada de mistura espacial.

Pode-se analisar uma camada de mistura através de um desenvolvimento espacial ou através de uma aproximação temporal, como será descrito a seguir.

1.2.1 Camada de mistura em desenvolvimento espacial:

A figura 1.2 ilustra uma camada de mistura em desenvolvimento espacial (Silveira Neto, 1998). A camada de mistura se forma quando duas correntes de velocidades médias constantes de módulos U_1 e U_2 , separadas horizontalmente por uma placa separatriz, se encontram ocasionando a formação de um campo de velocidade inflexional. Neste caso e como será visto a seguir, o escoamento torna-se instável. É denominada instabilidade de Kelvin-Helmholtz (Drazin & Reid, 1981), dando origem à formação de estruturas turbilhonares ou vórtices. Estes vórtices são transportados pelo escoamento médio à medida que vão se acoplando (pairing) entre vórtices vizinhos (Lesieur, 1997). Na figura 1.2 (b), tem-se uma visualização experimental de uma camada de mistura incompressível (Brown & Rosko, 1974),

mostrando os estágios bidimensionais desde a placa separadora e o comportamento qualitativo dos grandes vórtices da turbulência. Estas estruturas turbilhonares bem organizadas nas grandes escalas são também conhecidas como estruturas ou vórtices coerentes. A descoberta destas estruturas levou a se acreditar que, pelo menos a nível das grandes escalas, a turbulência apresenta um certo nível de organização. Para ser caracterizados como coerentes, diversos requerimentos são exigidos dos vórtices. Assim, Lesieur (1997), caracteriza uma estrutura turbulenta como coerente se ele apresenta:

- uma concentração espacial de vorticidade (ω);
- um tempo de vida maior que o tempo de rotação local (ω^{-1});
- possuir a propriedade de imprevisibilidade, no sentido da sensibilidade às condições iniciais.

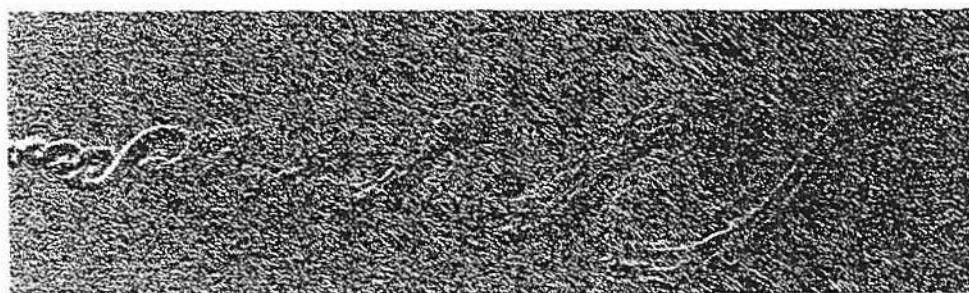
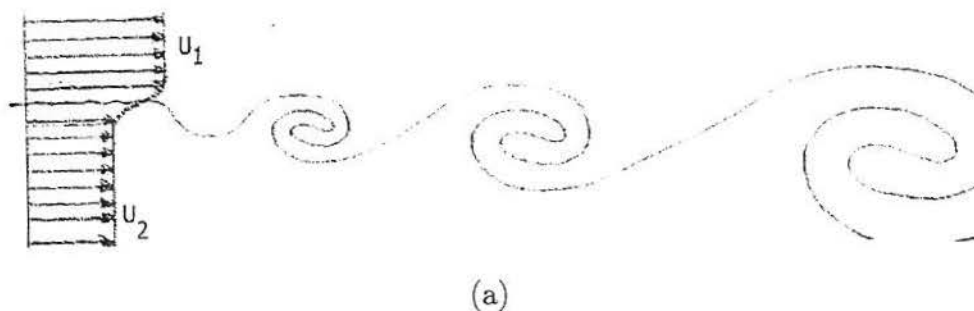


Figura 1.2: Camada de mistura em desenvolvimento espacial.

1.2.2 Camada de mistura em desenvolvimento temporal:

Tomando-se um sistema de referência que se move com uma velocidade média:

$$U_m = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (1.1)$$

e desprezando o alargamento lateral na direção y , acha-se a camada de mistura temporal com velocidade:

$$\begin{aligned} U_1 - \frac{U_1 + U_2}{2} &= \frac{U_1 - U_2}{2} = U \\ U_2 - \frac{U_1 + U_2}{2} &= -\frac{U_1 - U_2}{2} = -U \end{aligned} \quad (1.2)$$

Assim, a distância longitudinal x , no desenvolvimento da camada de mistura espacial corresponde ao tempo transcorrido:

$$t = \frac{2x}{U_1 + U_2} \quad (1.3)$$

na camada de mistura temporal (figura 1.3).

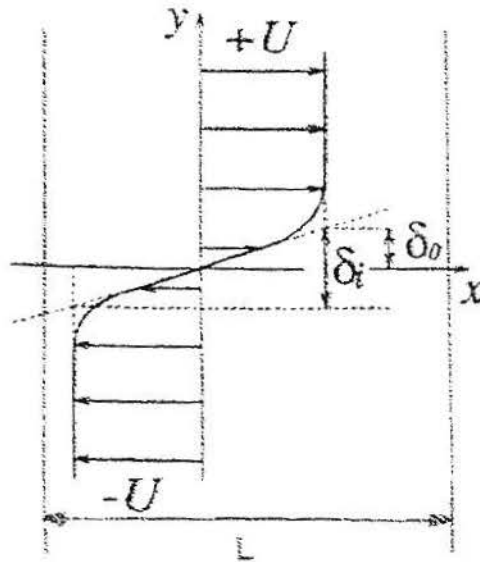


Figura 1.3: Perfil de velocidade média para uma camada de mistura temporal.

Na figura 1.3, L é o comprimento longitudinal do domínio computacional e $\delta_i = 2\delta_0$ é a espessura de vorticidade inicial da camada de mistura. O fluxo é periódico na direção x , logo tem-se uma camada de mistura fixa no espaço e com desenvolvimento temporal.

Neste trabalho, será considerada unicamente a camada de mistura na aproximação temporal, porque o domínio de cálculo é menor, o que nos permite escolher números de Reynolds maiores. No caso da camada de mistura compressível, o parâmetro relevante é o número de Mach convectivo, $Mc = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2}$, onde U_1 e U_2 são as velocidades do escoamento e a_1 e a_2 as velocidades do som das duas correntes paralelas (Papamoschou & Roshko, 1988). Considerando o desenvolvimento

temporal da camada de mistura, tem-se que:

$$Mc = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2} = \frac{\frac{a_1 U_1}{a_1} - \frac{a_2 U_2}{a_2}}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 \underline{U}_1}{a_1 + a_2} - \frac{a_2 \underline{U}_2}{a_1 + a_2} \quad (1.4)$$

e tomando-se $a_1 \sim a_2$, então:

$$Mc = \frac{a_1}{2a_1} (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) = \frac{U_1 - U_2}{2} = \underline{U} \quad (1.5)$$

Assim, o número de Mach convectivo para a camada de mistura compressível em desenvolvimento temporal é igual a semi-diferença das velocidades das correntes paralelas.

As instabilidades que se desenvolvem em escoamentos do tipo camada de mistura são o resultado do processo de amplificação de perturbações. Existe, neste caso, um número de onda (α) que será amplificado com taxa de amplificação máxima e que se manifestará em primeiro lugar. Posteriormente, estas instabilidades induzirão outros harmônicos e subharmônicos que se constituirão em novos números de onda até a degeneração em turbulência. A primeira manifestação acontece com a oscilação da napa cisalhante de fluido com o comprimento de onda (λ) correspondendo à máxima taxa de amplificação prevista pela Teoria linear de instabilidade, como ilustra a figura 1.4 (a). Quando estas instabilidades aparecem observa-se a geração de cristas e vales na napa cisalhante inicialmente uniforme, conforme nos mostra a figura 1.4 (b). É natural que sobre as cristas a pressão seja menor que no interior dos vales uma vez que as velocidades são maiores e menores, respectivamente. Além disso, as cristas entram em zonas rápidas e os vales em zonas lentas do escoamento, devido às velocidades serem diferentes ($U_1 \neq U_2$). Desta forma, as cristas serão transportadas mais rapidamente que os vales, o que resulta no processo de enrolamento mostrado na figura 1.4 (c). O mecanismo descrito denomina-se instabilidade de Kelvin-Helmholtz. O mesmo foi evidenciado em um grande número

de experiências de laboratório (Winant e Browand, 1973) e numéricas (Comte et al, 1992).

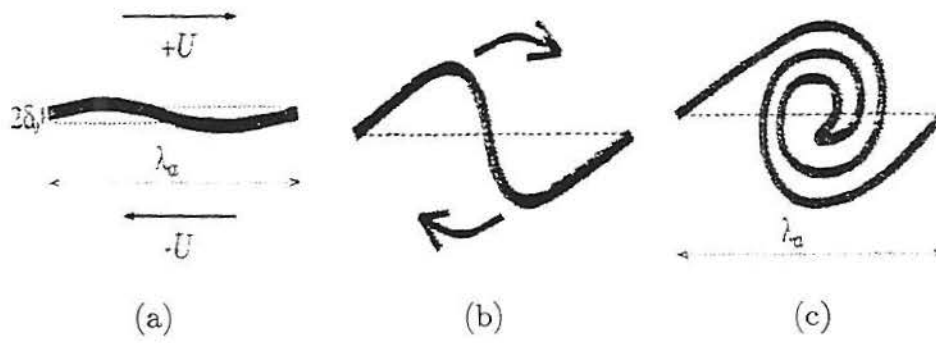


Figura 1.4: Visualização da formação de um vórtice.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES:

O nosso problema consiste na análise da transição à turbulência de escoamentos de fluidos viscosos e compressíveis. Neste capítulo serão apresentadas as equações que representam estes tipos de escoamentos que são descritas, entre outros, por Fletcher (1991).

2.1 Sistema de equações:

Considere-se o vetor velocidade $U(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Para fluidos viscosos compressíveis é necessário resolver as equações da conservação da massa, do momento e da energia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho Ev)}{\partial y} = & -\frac{\partial (pu)}{\partial x} - \frac{\partial (pv)}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{xy})}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial (v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} - \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ou na forma compacta:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (\rho E + p - \tau_{xx})u - v\tau_{yx} + \dot{Q}_x \end{bmatrix} \\
 e \quad G &= \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (\rho E + p - \tau_{yy})v - u\tau_{xy} + \dot{Q}_y \end{bmatrix} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

As tensões de cisalhamento são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= -\frac{2}{3}\mu D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= -\frac{2}{3}\mu D + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $D = \nabla \cdot U = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ é a dilatação, $\dot{Q}_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$ é a razão local de transferência de calor por unidade de área na direção de x_i , $E = e + 0,5U^2$ é a energia total por unidade de volume, $e = c_v T$ a energia específica interna, $U^2 = U \cdot U = u^2 + v^2$ e $0,5U^2$ a energia cinética.

Pode-se observar que o nosso sistema tem quatro equações e cinco incógnitas, a saber: ρ , u , v , p e T . Sendo assim, e como se trata de fluidos compressíveis, acrescenta-se a equação de estado para gases perfeitos:

$$p = \rho RT \quad (2.8)$$

onde p é a pressão, T é a temperatura e R é a constante universal dos gases.

2.2 Adimensionalização das equações:

Para obter o comportamento do fluxo de forma similar com mínimo esforço computacional é desejável agrupar todas as variáveis do problema em número adimensionais (Fletcher(1991), Sandham & Reynolds (1990)). Dois escoamentos são dinamicamente similares se os números adimensionais que os governam têm os mesmos valores, embora os parâmetros contidos nos números adimensionais tenham valores diferentes. A melhor maneira para identificar os grupos adimensionais apropriados é adimensionalizando as equações governantes e as condições de fronteira. Assim, considerem-se as seguintes escalas:

L	escala de comprimento
U_0	escala de velocidade
$t_0 = L/U_0$	escala de tempo
ρ_0	escala de densidade
p_0	escala de pressão
T_0	escala de temperatura
E_0	escala de energia
μ_0	escala de viscosidade
k_0	escala de condutividade

as variáveis adimensionais ficam:

$$\begin{aligned}x &= Lx_a & (2.9) \\y &= Ly_a \\t &= (L/U_0)t_a \implies t = (L/a)t_a \\u &= U_0u_a \implies u = au_a \\v &= U_0v_a \implies v = av_a \\\mu &= \mu_0\mu_a \\\rho &= \rho_0\rho_a\end{aligned}$$

$$k = k_0 k_a$$

$$T = T_0 T_a$$

$$E = E_0 E_a$$

$$p = \rho_0 U_0^2 P_a \implies p = \rho_0 a^2 p_a$$

2.3 Sistema de equações adimensionais:

Substituindo os números adimensionais nas equações (2.1) a (2.4) e eliminando o índice "a" para facilitar a leitura, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} = & -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou na forma compacta:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{xx} \\ \rho uv - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{xy} \\ (\rho E + p - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{xx}) u - \frac{1}{\text{Re}} v \tau_{yx} - \frac{1}{\text{Pr Re}} k \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$e \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{yy} \\ \left(\rho E + p - \frac{1}{\text{Re}} \tau_{yy} \right) v - \frac{1}{\text{Re}} u \tau_{xy} - \frac{1}{\text{Pr Re}} k \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Vê-se que surgem dois grupos adimensionais:

$$\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad e \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{k_0} \quad (2.16)$$

Assim, dois escoamentos são dinamicamente similares se eles têm os mesmos valores de Re e Pr embora os valores característicos (L ou U_0 ou ν), etc, sejam diferentes para os dois fluxos.

2.4 Condições iniciais:

Sejam um escoamento de velocidade média longitudinal:

$$\bar{U}(y) = (\bar{u}(y), 0) \quad (2.17)$$

que é solução de Navier Stokes e uma perturbação de amplitude infinitesimal superposta ao escoamento:

$$\tilde{U}(x, y) = (\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y)) \quad (2.18)$$

A velocidade do escoamento $U(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ será decomposta da seguinte forma:

$$u(x, y) = \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y) \quad (2.19)$$

$$v(x, y) = \tilde{v}(x, y)$$

O perfil de velocidade médio para a camada de mistura compressível será dado por:

$$\bar{u}(y) = \underline{U} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_i}\right) \quad (2.20)$$

onde $\delta_i = 2\delta_0$ é a espessura de vorticidade inicial e $\underline{U} = Mc$ (1.5) na camada de mistura temporal (figura 1.3).

A perturbação acrescida ao escoamento médio será:

$$\tilde{U}(x, y) = \Re \left[\hat{U}(y) \exp i\alpha(x - ct) \right] \quad (2.21)$$

onde \Re representa a parte real do número complexo.

O parâmetro α é o número de onda na direção x e $L = \frac{2\pi}{\alpha}$ é o seu comprimento de onda. Se o número de onda α é real, pode-se ver que (2.21) se torna uma função de senos e cossenos na direção x . Assim, é fácil ver que existe periodicidade em x e o problema é de desenvolvimento temporal. Porém, se α é complexo, (2.21) é uma função exponencial em x , logo o problema seria de desenvolvimento espacial. No nosso caso, será usado α real, para que o problema seja temporal.

As funções $\hat{U}(y) = (\hat{u}(y), \hat{v}(y))$ são as autofunções e $c = c_r + ic_i$ os autovalores da solução do problema de instabilidade linear de Rayleigh, como será visto a seguir.

Pode-se, então, reescrever (2.21) como segue:

$$\tilde{U}(x, y) = \Re \left[\hat{U}(y) \exp \alpha c_i t \exp i\alpha(x - c_r t) \right] \quad (2.22)$$

onde c_r é a velocidade de fase e αc_i é a taxa de amplificação da perturbação. Daí, pode-se ver que quando:

$$\begin{aligned}
\alpha c_i > 0 & \text{ solução instável ou amplificada} \\
\alpha c_i < 0 & \text{ solução estável ou amortecida} \\
\alpha c_i = 0 & \text{ estabilidade marginal ou neutra}
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Os valores dos nossos parâmetros α , c , Re e Mc são obtidos a partir da teoria da instabilidade linear hidrodinâmica.

2.5 Condições de contorno:

A condição de contorno é periódica em x , ou seja, $f(x, y) = f(x + 2\pi, y)$, para toda função f . Já em y , usam-se condições de deslizamento livre, quer dizer:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v = 0 \end{cases}
\tag{2.24}$$

ou seja, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ porque u é constante em relação a y e $v = 0$ porque não existe velocidade vertical. Isso pode ser observado na figura 1.3.

3 TEORIA LINEAR DE INSTABILIDADE HIDRODINÂMICA:

3.1 Escoamentos incompressíveis:

Para o estudo da transição à turbulência serão vistos alguns conceitos de instabilidade linear hidrodinâmica para escoamentos incompressíveis (Drazin & Reid (1981), Lesieur (1997), Schlichting (1968)). Depois, estes conceitos serão estendidos para escoamentos de fluidos compressíveis.

O teorema de Squire (Drazin & Reid, 1981) para fluidos ideais e sua extensão para fluidos viscosos, nos permitem fazer a análise de instabilidade considerando unicamente perturbações bidimensionais.

Seja $U = (u, v)$ a velocidade de um escoamento bidimensional. Considere-se um escoamento paralelo $\bar{U} = (\bar{u}(y), 0)$, de massa específica constante ($\rho = \rho_{cte}$) e com $\bar{u}(y)$ (2.20) solução da equação de Navier-Stokes. Seja também uma perturbação de amplitude infinitesimal superposta ao escoamento:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t) \\p(x, y, t) &= \bar{p}(x, y) + \tilde{p}(x, y, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= \hat{u}(y) \exp i\alpha(x - ct) \\\tilde{v}(x, y, t) &= \hat{v}(y) \exp i\alpha(x - ct)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Substituindo (3.1) nas equações de Navier-Stokes incompressíveis:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 U \quad (3.3)$$

e linearizando-se as equações, obtém-se:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \nabla^2 \tilde{u} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \tilde{v} \quad (3.5)$$

Ainda tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

dado que $\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y = 0$ é solução de Navier-Stokes. Assim, (3.4), (3.5) e (3.6) são as equações finais para as perturbações. Tem-se três equações com três incógnitas: \tilde{u} , \tilde{v} e \tilde{p} . As condições de contorno exigem que \tilde{u} e \tilde{v} sejam nulas suficientemente longe da zona rotacional. Para eliminar \tilde{p} , introduz-se a função corrente:

$$\Psi(x, y, t) = (\bar{u}(y), 0) \quad (3.7)$$

onde $u = \partial \Psi / \partial y$ e $v = -\partial \Psi / \partial x$ e a função vorticidade:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \Psi \quad (3.8)$$

Assim, substituindo $\omega = \bar{\omega} + \tilde{\omega}$ na equação de transporte de vorticidade:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.9)$$

obtém-se a equação linearizada para a perturbação de vorticidade $\tilde{\omega}$:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \nu \nabla^2 \tilde{\omega} \quad (3.10)$$

A função corrente pode também ser decomposta em:

$$\Psi = \bar{\Psi} + \tilde{\Psi} \quad (3.11)$$

Introduz-se uma perturbação do tipo:

$$\tilde{\Psi}(x, y) = \Phi(y) \exp i\alpha(x - ct) \quad (3.12)$$

correspondente ao campo de velocidades $\tilde{u} = \partial\tilde{\Psi}/\partial y$ e $\tilde{v} = -\partial\tilde{\Psi}/\partial x$.

Substituindo (3.12) em (3.10) obtém-se a equação de Orr-Sommerfield que, na sua forma adimensional, é dada por:

$$(\bar{u} - c)(\Phi'' - \alpha^2\Phi) - \bar{u}''\Phi = \frac{i}{\alpha \text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \Phi \quad (3.13)$$

As condições de contorno são $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ em $y = y_A$ e $y = y_B$, ou seja:

$$\Phi' = 0 \text{ e } \Phi = 0 \quad (3.14)$$

As derivadas da função Φ aqui são com respeito a y .

A equação (3.13) com (3.14) é formar um problema de autovalores e autovetores. Dado $\bar{u}(y)$, a equação (3.13) contém quatro parâmetros: α , Re , c_r e c_i . Para o nosso caso, o número de Reynolds (Re) e o comprimento de onda da perturbação ($\lambda = 2\pi/\alpha$), são dados. Assim, a equação (3.13) com condições de contorno (3.14) fornece uma autofunção $\Phi(y)$ com autovalor complexo $c = c_r + ic_i$, para cada par de valores α e Re .

Supondo que os efeitos viscosos sejam desprezíveis na evolução de $\tilde{\Psi}$, a equação de Orr-Sommerfield (3.13) se reduz a:

$$(\bar{u} - c)(\Phi'' - \alpha^2\Phi) - \bar{u}''\Phi = 0 \quad (3.15)$$

que é denominada equação de Rayleigh, com condições de contorno $\Phi = 0$ em $y = y_A$ e $y = y_B$.

Assim, dado u , tem-se que determinar os valores de α (real) e c (complexo), para os quais a equação de Rayleigh admite autofunção complexa Φ .

Na equação de Rayleigh (3.15), se $\Phi_{\alpha,c}$ é solução correspondente a dupla α, c , então $\Phi_{\alpha,c^*} = \Phi_{\alpha,c}^*$ também é solução, onde $*$ denota o conjugado complexo. Sendo assim, e sem perda de generalidade, pode-se restringir nossa procura aos valores de $\alpha > 0$, pois para toda solução amortecida $\alpha c_i < 0$ pode-se associar uma solução amplificadora $\alpha(-c_i) > 0$. Quer dizer, a procura por uma solução instável se reduz à procura por modos não-neutros ($c_i \neq 0$).

Os pontos onde $\bar{u}(y) = c$, denominada camada crítica, só existem nos modos neutros ($c_i = 0$), visto que $\bar{u}(y)$ é real. Assim, funções próprias correspondentes aos modos instáveis devem satisfazer (3.15) dividido por $(\bar{u}(y) - c)$, ou seja:

$$\Phi'' = \left[\frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} + \alpha^2 \right] \Phi \quad (3.16)$$

Para analisar as condições necessária e suficiente de instabilidade assume-se que $c_i \neq 0$ e, assim, $\bar{u} - c \neq 0$. Multiplicando (3.16) por Φ^* :

$$(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) \Phi^* = \frac{\bar{u}'' (\bar{u} - c^*)}{|\bar{u} - c|^2} \Phi \Phi^* \quad (3.17)$$

e integrando no intervalo entre y_A e y_B :

$$- \int_{y_A}^{y_B} (|\Phi'|^2 + \alpha^2 |\Phi|^2) dy = \int_{y_A}^{y_B} |\Phi|^2 \frac{\bar{u}'' (\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2} dy - i c_i \int_{y_A}^{y_B} |\Phi|^2 \frac{\bar{u}''}{|\bar{u} - c|^2} dy \quad (3.18)$$

Uma vez que a parte imaginária da igualdade (3.18) precisa ser nula para a sua veracidade e sendo $c_i \neq 0$, então:

$$\int_{y_A}^{y_B} |\Phi|^2 \frac{\bar{u}''}{|\bar{u} - c|^2} dy = 0 \quad (3.19)$$

Como $|\Phi| \neq 0$, tem-se que \bar{u}'' deve trocar de sinal ao menos uma vez no intervalo $[y_A, y_B]$. Isso quer dizer que $\bar{u}(y)$ tem ao menos um ponto de inflexão. Este é o chamado critério de instabilidade não viscosa do ponto de inflexão de Rayleigh. Esta é uma condição necessária mas não suficiente. A condição suficiente obtém-se da análise da parte real de (3.18):

$$- \int_{y_A}^{y_B} (|\Phi|^2 + \alpha^2 |\Phi|^2) dy = \int_{y_A}^{y_B} |\Phi|^2 \frac{\bar{u}'' (\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2} dy \quad (3.20)$$

Seja $c_r = \bar{u}(y_s)$ onde y_s é o ponto de inflexão, então:

$$\int_{y_A}^{y_B} |\Phi|^2 \frac{\bar{u}'' (\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2} dy < 0 \quad (3.21)$$

para a veracidade da igualdade (3.20). Para que (3.21) seja verdadeira, $\bar{u}'' (\bar{u} - c_r)$ deve ser negativa. Assim, para que o escoamento seja instável deve-se ter $\bar{u}'' (\bar{u} - c_r)$ negativa em algum lugar, ou seja, $\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$ deve ter um máximo local em y_s . Esta é a condição suficiente, chamada critério de Fjortoff (Drazin & Reid, 1981).

Betchov & Szewczyk (1963), apresentam uma solução numérica para o problema da camada de mistura temporal viscosa da equação de Orr-Sommerfeld (3.13). Os resultados calculados para o perfil de velocidade (2.20), com $\underline{U} = L = 1$ e L correspondendo a δ_0 , podem ser observados através do gráfico da figura 3.1.

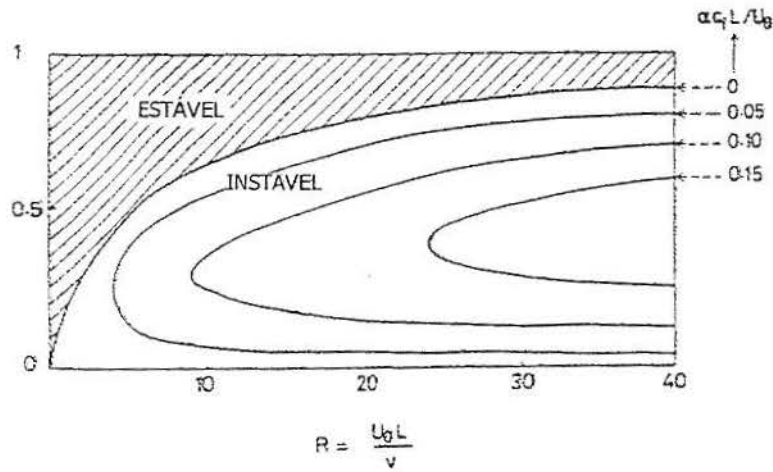


Figura 3.1: Solução da equação de Orr-Sommerfeld para uma camada de mistura temporal viscosa incompressível.

Pode-se observar da figura 3.1 que a curva neutra separa a região estável ($\alpha c_i < 0$) da região instável ($\alpha c_i > 0$). Constata-se, ainda que para $Re > 30 - 40$, a variação do número de Reynolds não altera a taxa de amplificação (αc_i). Então, para valores de Reynolds altos a taxa de amplificação (αc_i) não é mais afetada pela viscosidade e a instabilidade pode ser considerada não viscosa.

Um outro resultado importante para esse trabalho foi obtido por Michalke (1964). Ele resolveu o problema não viscoso de autovalores $c = c_r + ic_i$ e autofunções $\Phi = \Phi_r + i\Phi_i$, dado pela equação de Rayleigh (3.15), para o perfil de velocidade (2.20). A partir de uma tabela para os valores de α e c_i , Michalke (1964) obteve o gráfico da figura 3.2.

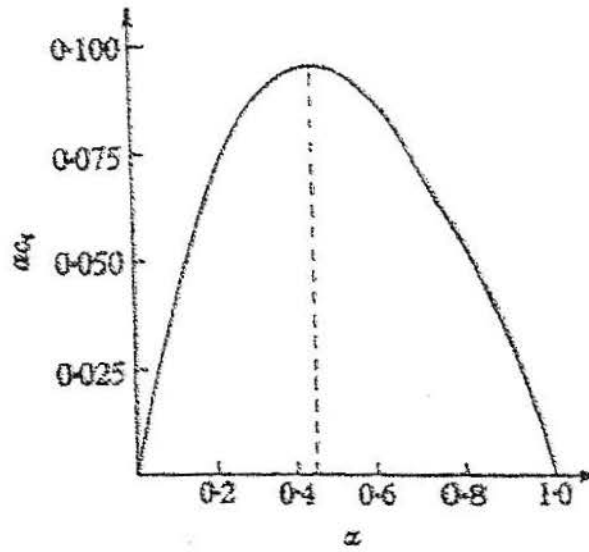


Figura 3.2: Máxima taxa de amplificação para uma camada de mistura temporal não viscosa incompressível.

Assim, constata-se que para o perfil tangente hiperbólica, a máxima taxa de amplificação ocorre para $\alpha = 0,4446$. Portanto, o número de onda de máxima taxa de amplificação será:

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} \delta_0 &= 0,44 \\ \alpha_{\max} &= 0,44 \delta_0^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

e o seu correspondente comprimento de onda:

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{\alpha_{\max}} = \frac{2\pi}{0,44 \delta_0^{-1}} = 14,28 \delta_0 \simeq 7 \delta_i \quad (3.23)$$

É interessante observar que, na figura 3.1, para Re altos, a máxima taxa de amplificação ocorre também para $\alpha_{\max} = 0,4446$. Sendo assim, para Re

altos, vê-se da figura 3.1 que o número de onda α_{\max} que corresponde à máxima taxa de amplificação é o mesmo e o seu comprimento de onda é $\lambda_{\max} = 7\delta_i$.

Para obter, em uma simulação numérica, a máxima taxa de amplificação das perturbações deve-se dimensionar o domínio de cálculo como múltiplo de λ_{\max} . Assim, será falado de cálculo a "n" comprimentos de onda fundamentais quando o domínio tenha um comprimento $L = n\lambda_{\max}$.

A partir do estudo da Teoria da instabilidade linear hidrodinâmica pode-se garantir, também, que o perfil de velocidade $\bar{u}(y)$ (2.20), que está-se utilizando neste trabalho, satisfaz as condições necessária e suficiente para a ocorrência da instabilidade. Analise-se os gráficos de $\bar{u}(y)$, $\bar{u}'(y)$ e $\bar{u}''(y)$.

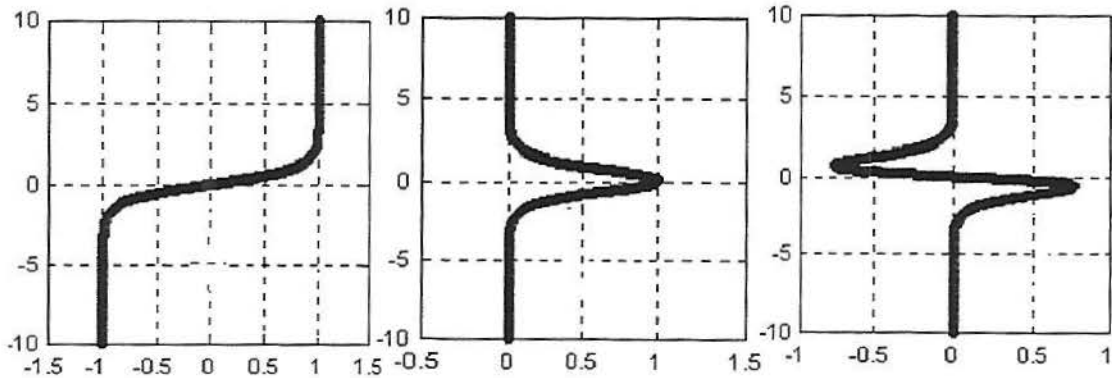


Figura 3.3: Perfil de velocidade $\bar{u}(y)$ e suas derivadas $\bar{u}'(y)$ e $\bar{u}''(y)$.

Observa-se que $\bar{u}(y)$ tem ponto de inflexão, visto que $\bar{u}''(y)$ troca uma vez de sinal, satisfazendo o critério de Rayleigh. Além disso, $\bar{u}'' \cdot \bar{u}$ é sempre negativa, logo satisfaz o critério de Fjortoff. Portanto, (2.20) é instável do ponto de vista não viscoso.

3.2 Escoamentos compressíveis:

Agora a teoria da instabilidade linear hidrodinâmica será estendida a escoamentos compressíveis. Sandham e Reynolds (1990), em uma análise da estabilidade não viscosa para fluidos compressíveis verificou os efeitos do número de Mach Mc para a taxa de amplificação máxima ($w_i = \alpha c_i$) de ondas bidimensionais. Isso pode ser mostrado no gráfico da figura 3.4.

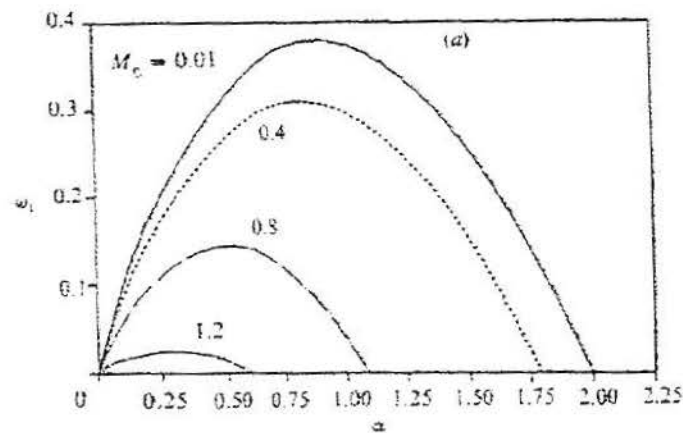


Figura 3.4: Taxa de amplificação máxima para camada de mistura não viscosa compressível.

Pode-se observar que o fator de amplificação destas ondas é rapidamente reduzido à medida que Mc cresce. Deve-se escolher o número de onda α_{max} que tem máxima taxa de amplificação, conforme já foi visto, para adimensionalizar o domínio de cálculo. Assim, para $Mc = 0.4$, por exemplo, ter-se-á $\alpha_{max} \cong 0,75\delta_i$ e:

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi}{\alpha_{max}} = \frac{2\pi}{0,75\delta_i^{-1}} = 7,854\delta_i \quad (3.24)$$

é a dimensão do domínio necessária para representar graficamente um vórtice. Neste trabalho, serão feitas representações gráficas de $n = 4$ vórtices, logo a dimensão total do domínio de cálculo para esse valor de Mc será:

$$L = n\lambda_{\max} = 4 \times 7,854\delta_i \approx 32\delta_i \quad (3.25)$$

Encontrou-se em Sandham e Reynolds (1990) outro resultado importante como pode-se ver na figura 3.5. As escolhas dos números de Re e Mc influenciam na natureza da instabilidade linear. Para que se tenha máxima taxa de amplificação, independente da viscosidade, deve-se escolher os números de Reynolds onde as curvas referentes aos diferentes valores de Mc apresentam-se constantes. Isto quer dizer que quanto maior o número de Mach, maior deve ser o número de Reynolds, para que a taxa de amplificação seja máxima. Na prática, isto não é sempre possível devido ao grande número de graus de liberdade necessários para simular numericamente escoamentos turbulentos com números de Reynolds elevados.

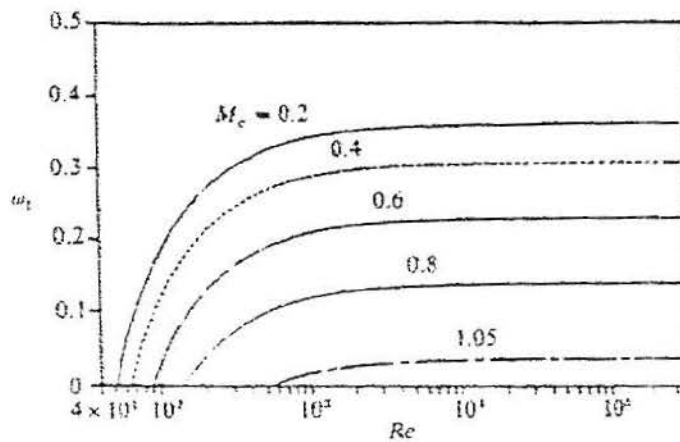


Figura 3.5: Curvas da taxa de amplificação máxima para camada de mistura viscosa compressível.

4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA:

4.1 Esquemas de diferenças finitas compactos:

Muitos fenômenos físicos possuem um conjunto de escalas de tempo e espaço, sendo um exemplo bem comum disso os escoamentos de fluidos turbulentos. Simulações numéricas diretas destes processos requerem todas as escalas relevantes para que sejam apropriadamente representados no modelo numérico. Para isso se torna necessário o uso de esquemas de alta precisão, o que tem conduzido ao uso de métodos espectrais (Lele,1991). O uso de métodos espectrais é, entretanto, limitado a escoamentos com domínios e condições de fronteira simples. Estas dificuldades podem ser superadas pelo emprego alternativo de aproximações numéricas (Lele,1991), como por exemplo, esquemas de diferenças finitas implícitos e explícitos. Simulações diretas de escoamentos turbulentos usando estes esquemas alternativos é um assunto relativamente novo.

Para um esquema de diferenças finitas explícito tradicional de 2ª ordem seriam necessários 3 pontos, para um de 4ª ordem seriam necessários de 5 pontos, para um de 6ª ordem seriam necessários de 7 pontos, e assim por diante. Serão apresentados aqui esquemas de diferenças finitas implícitos. Ver-se-á que um esquema implícito de 6ª ordem utiliza apenas 5 pontos. Portanto, esquemas de diferenças finitas implícitos comparados aos esquemas de diferenças finitas explícitos tradicionais apresentam a mesma precisão com menor número de pontos. Devido a isso são denominados esquemas compactos. Este aspecto leva-os próximos a métodos espectrais, enquanto que existe uma liberdade na escolha da geometria da malha e das condições de fronteira.

4.1.1 Aproximação da 1ª derivada:

Dados os valores de uma função em um conjunto de nós, a aproximação por diferença finita para a derivada da função é expressa como uma combinação linear dos valores da função dada. Considere-se uma malha uniformemente espaçada onde os nós são indexados por i . As variáveis independentes nos nós são $x_i = h(i - 1)$ para $1 \leq i \leq N$ e os valores da função nos nós $f_i = f(x_i)$ são dados. A aproximação por diferenças finitas f'_i para a primeira derivada $(df/dx)(x_i)$ no nó i depende dos valores da função em nós próximos a i . Para diferenças centrais de segunda e quarta ordens a aproximação f'_i depende dos conjuntos (f_{i-1}, f_{i+1}) e $(f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2})$, respectivamente. Nos métodos espectrais, entretanto, os valores de f'_i dependem de todos os valores nodais. Os esquemas de diferenças finitas compactos imitam esta dependência global como pode-se ver das aproximações:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (4.1)$$

A equação (4.1) será utilizada para pontos no interior do domínio com i variando de 4 a $(N - 3)$, pois são dados os valores das funções conhecidas de x : $f_1, f_2, f_3, \dots, f_N$. Para os demais pontos na fronteira serão usados relações apropriadas que serão vistas mais adiante.

Fazendo i variar de 4 até $(N - 3)$ na equação (4.1) obtém-se, então, um sistema que pode ser representado na forma matricial por:

$$\overline{\overline{A}} \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \quad (4.2)$$

onde \bar{X} é o vetor de derivadas desconhecidas, \bar{Y} é o vetor de funções de x conhecidas e \bar{A} é a matriz pentadiagonal:

$$\begin{pmatrix} \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta & & & & & & \\ & \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta & & & & & \\ & & \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta & & & & \\ & & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & & & \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Sendo assim, esse sistema linear é denominado sistema pentadiagonal cíclico. Neste trabalho, será feito o uso de sistemas tridiagonais, isto é, $\beta = 0$. Estes sistemas lineares podem ser resolvidos numericamente utilizando algoritmos para matrizes tridiagonais (Strikwerda, 1989).

Para determinar as relações entre α , β e a , b , c igualam-se os coeficientes das séries de Taylor de várias ordens na equação (4.1), como pode ser visto no *anexo 1*. Estas relações são:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta & 2^{\text{ª}} \text{ordem} \\ a + 2^2 b + 3^2 c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) & 4^{\text{ª}} \text{ordem} \\ a + 2^4 b + 3^4 c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) & 6^{\text{ª}} \text{ordem} \\ a + 2^6 b + 3^6 c = 2 \frac{7!}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) & 8^{\text{ª}} \text{ordem} \\ a + 2^8 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) & 10^{\text{ª}} \text{ordem} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (4.4)$$

Se as variáveis dependentes são periódicas em x , então as relações do sistema (4.4) escritas para cada nó podem ser resolvidas junto com um sistema linear de equações para valores de derivadas desconhecidos (4.1).

Para pontos no interior do domínio serão usados esquemas com precisão de 6ª ordem. Deve-se, portanto, resolver um sistema com as três primeiras equações

de (4.4), de onde obtém-se:

$$a = \frac{1}{6}(9 + \alpha) \quad b = \frac{1}{15}(32\alpha - 9) \quad c = \frac{1}{10}(1 - 3\alpha) \quad (4.5)$$

Essa é uma família de um parâmetro (α) do esquema de 6ª ordem. Fazendo uma escolha de $\alpha = \frac{1}{3}$, tem-se:

$$\beta = 0 \quad a = \frac{14}{9} \quad b = \frac{1}{9} \quad c = 0 \quad (4.6)$$

Assim, a equação (4.1) fica:

$$\frac{1}{3}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{3}f'_{i+1} = \frac{1}{36h}(f_{i+2} - f_{i-2}) + \frac{7}{9h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (4.7)$$

que é uma aproximação de 6ª ordem para a 1ª derivada. Essa equação forma um sistema de equações quando i varia de 1 a N . E, como já foi dito, será utilizado o algoritmo de Gauss para resolver este sistema.

O erro de truncamento é obtido a partir dos primeiros coeficientes das séries de Taylor de várias ordens não igualados na equação (4.1). Assim, para essa família de um parâmetro de 6ª ordem, o erro de truncamento é dado por $\frac{4}{7!}h^6 f^{(7)}$, como pode ser visto no *anexo 2*.

Este esquema apresenta três incógnitas (f'_{i-1}, f'_i, f'_{i+1}) no lado esquerdo da equação (4.1) e cinco funções de valores conhecidos ($f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$) no lado direito desta equação.

4.1.2 Aproximação da 2ª derivada:

As aproximações para a 2ª derivada são escritas na forma:

$$\begin{aligned} & \beta f''_{i-2} + \alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} + \beta f''_{i+2} = \\ & = c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Igualando, na equação (4.8), os coeficientes das séries de Taylor de várias ordens, obtém-se as relações entre α , β e a , b , c abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad 2^{\text{ª}} \text{ ordem} \\ a + 2^2b + 3^2c = \frac{4!}{2!} (\alpha + 2^2\beta) \quad 4^{\text{ª}} \text{ ordem} \\ a + 2^4b + 3^4c = \frac{6!}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \quad 6^{\text{ª}} \text{ ordem} \\ \dots \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Também para a 2ª derivada serão utilizados esquemas de 6ª ordem para pontos no interior do domínio. Assim, resolvendo um sistema com as três primeiras equações do sistema (4.9) obtém-se:

$$a = \frac{3}{4} (2 - 3\alpha) \quad b = \frac{1}{5} (24\alpha - 3) \quad c = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{11}{2}\alpha \right) \quad (4.10)$$

denominada família de um parâmetro de 6ª ordem para a 2ª derivada de um sistema tridiagonal ($\beta = 0$):

Fazendo $\alpha = \frac{2}{11}$ tem-se:

$$a = \frac{12}{11} \quad b = \frac{3}{11} \quad c = 0 \quad (4.11)$$

e a equação (4.8) fica:

$$\frac{2}{11} f''_{i-1} + f''_i + \frac{2}{11} f''_{i+1} = \frac{3}{44h^2} (f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}) + \frac{12}{11h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (4.12)$$

que é uma aproximação de 6ª ordem para a 2ª derivada. Da mesma forma que na aproximação para a 1ª derivada, fazendo i variar de 1 a N obtém-se um sistema de equações que será resolvido numericamente pelo algoritmo de Gauss.

O erro de truncamento para esta família de um parâmetro de 6ª ordem, que é obtido a partir dos primeiros coeficientes de Taylor não igualados na equação (4.8), será $-\frac{8.23}{11.8!}h^6 f^{(8)}$.

Este esquema apresenta três incógnitas ($f''_{i-1}, f''_i, f''_{i+1}$) no lado esquerdo da equação (4.9) e cinco funções de valores conhecidos ($f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$) no lado direito desta equação.

4.1.3 *Formulação na fronteira para a 1ª derivada:*

Uma aproximação para a 1ª derivada na fronteira $i = 1$ pode ser obtida de uma relação da forma:

$$f'_1 + \alpha f'_2 = \frac{1}{h} (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) \quad (4.13)$$

Igualando os coeficientes das séries de Taylor de várias ordens na equação (4.13), obtém-se as relações entre α e a, b, c, d :

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 3d = 1 + \alpha \quad 1^\text{ª ordem} \\ b + 2^2c + 3^2d = 2!\alpha \quad 2^\text{ª ordem} \\ b + 2^3c + 3^3d = \frac{3!}{2!}\alpha \quad 3^\text{ª ordem} \\ \dots \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Para a fronteira $i = 1$ será usado um esquema de 3ª ordem. Assim, deve-se resolver o sistema (4.14) com as quatro primeiras equações obtendo a família de

um parâmetro de 3ª ordem:

$$a = -\frac{11 + 2\alpha}{6} \quad b = \frac{6 - \alpha}{2} \quad c = \frac{2\alpha - 3}{2} \quad d = \frac{2 - \alpha}{6} \quad (4.15)$$

E, fazendo $\alpha = 2$, tem-se:

$$a = -5/2 \quad b = 2 \quad c = 1/2 \quad d = 0 \quad (4.16)$$

Assim, a aproximação de 3ª ordem na fronteira $i = 1$ fica representada por:

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{h} \left(-\frac{5}{2}f_1 + 2f_2 + \frac{1}{2}f_3 \right) \quad (4.17)$$

Procedendo da mesma forma em $i = N$ obtém-se também $\alpha = 2$, $a = -5/2$, $b = 2$, $c = 1/2$ e $d = 0$. Já para $i = 2$ e $i = N - 1$, será utilizado procedimento análogo, porém com aproximação de 4ª ordem, obtendo $\alpha = 1/4$, $a = 3/4$, $b = c = d = 0$, nos dois casos.

4.1.4 **Formulação na fronteira para a 2ª derivada:**

A aproximação para a 2ª derivada na fronteira $i = 1$ pode ser obtida da relação:

$$f''_1 + \alpha f''_2 = \frac{1}{h^2} (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 + ef_5) \quad (4.18)$$

Igualando os coeficientes das séries de Taylor de várias ordens na equação (4.18) obtém-se as relações entre α e a, b, c, d, e :

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c + d + e = 0 \\ b + 2c + 3d + 4e = 0 \\ b + 2^2c + 3^2d + 4^2e = 2!(1 + \alpha) \quad 1^{\text{a}}\text{ordem} \\ b + 2^3c + 3^3d + 4^3e = 3!\alpha \quad 2^{\text{a}}\text{ordem} \\ b + 2^4c + 3^4d + 4^4e = \frac{4!}{2!}\alpha \quad 3^{\text{a}}\text{ordem} \\ \dots \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Também será utilizado na fronteira $i = 1$ para a 2ª derivada, esquemas de 3ª ordem. Assim, tem-se que resolver o sistema (4.19) com as cinco equações, obtendo uma família de um parâmetro de 3ª ordem:

$$a = \frac{11\alpha + 35}{12} \quad b = -\frac{5\alpha + 26}{3} \quad c = \frac{\alpha + 19}{2} \quad d = \frac{\alpha - 14}{3} \quad e = \frac{11 - \alpha}{12} \quad (4.20)$$

E, tomando $\alpha = 11$, tem-se:

$$a = 13 \quad b = -27 \quad c = 15 \quad d = -1 \quad e = 0 \quad (4.21)$$

Assim, a aproximação de 3ª ordem na fronteira $i = 1$ é dada por:

$$f_1'' + 11f_2'' = \frac{1}{h^2} (13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (4.22)$$

De forma análoga, obtém-se os mesmos resultados da fronteira $i = 1$ para a fronteira $i = N$. Já em $i = 2$ e $i = N - 1$, serão utilizados procedimento análogo, porém com aproximação de 4ª ordem, obtendo $\alpha = 1/10$, $a = 6/5$, $b = c = d = e = 0$, para ambos.

As equações das aproximações de 6ª ordem para a 1ª e 2ª derivadas formam, cada uma delas, um sistema de equações, como foi visto, quando faz-se i variar de 1 a N . E, como também já foi dito, utiliza-se o algoritmo de Gauss para resolver este sistema.

4.2 Análise de Fourier dos erros:

A análise de Fourier do esquema de diferenciação nos mostrará qual aproximação por diferenças apresenta os melhores resultados, ou seja, os resultados mais próximos da solução exata (Lele, 1991). Seja o domínio periódico $[0, L]$, isto é, $f_1 = f_{N+1}$, para toda f e $h = L/N$. As variáveis dependentes podem ser decompostas em seus coeficientes de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \hat{f}_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) \quad (4.23)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Introduz-se um número de onda:

$$w = \frac{2\pi k h}{L} = \frac{2\pi k}{N} \quad (4.24)$$

e uma coordenada $s = x/h$. Assim:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{k=N/2} \hat{f}_k \exp(i w s) \quad (4.25)$$

e $0 < w < \pi$.

4.2.1 Análise do erro para a 1ª derivada:

A primeira derivada exata da expressão (4.25), com respeito a s , gera a função com coeficientes de Fourier:

$$\widehat{f}'_k = iw\widehat{f}_k \quad (4.26)$$

O erro de diferenciação do esquema para a 1ª derivada pode ser calculado comparando os coeficientes Fourier das derivadas obtidas pelo esquema de diferenças finitas $(\widehat{f}'_k)_{edf}$ com os coeficientes de Fourier exatos \widehat{f}'_k . Para esquemas de diferenças centrais $(\widehat{f}'_k)_{edf} = iw'\widehat{f}_k$, onde a cada esquema de (4.1) corresponde uma função particular:

$$w'(w) = \frac{a \operatorname{sen}(w) + (b/2) \operatorname{sen}(2w) + (c/3) \operatorname{sen}(3w)}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (4.27)$$

A diferenciação exata corresponde a função $w'(w) = w$. Os métodos espectrais apresentam $w'(w) = w$ para $w \neq \pi$ e $w'(w) = 0$ para $w = \pi$.

O conjunto de números de onda sobre o qual o número de onda modificado $w'(w)$ aproxima da diferenciação exata $w'(w) = w$ com um erro de tolerância define um conjunto de ondas bem resolvidas. É razoável que este erro de tolerância seja fixado quando compara-se diferentes esquemas de diferenças finitas. O erro de tolerância é definido como:

$$\frac{|w'(w) - w|}{w} \leq \varepsilon \quad (4.28)$$

Veja os gráficos dos números de onda modificado $w'(w)$ versus número de onda w para aproximações da 1ª derivada na figura 4.1.

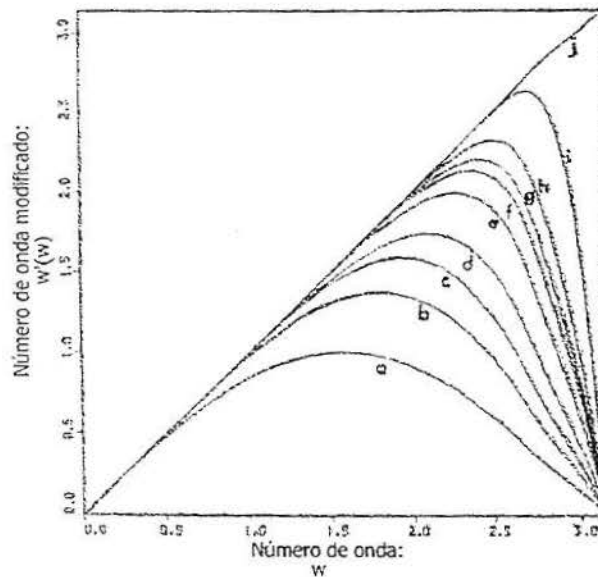


Figura 4.1: Gráfico do número de onda (w) versus número de onda modificado ($w'(w)$) para as aproximações da 1ª derivada para os diferentes esquemas compactos.

O caso em que se está trabalhando refere-se à letra "e", ou seja, um esquema tridiagonal de sexta ordem com $\beta = 0$, $c = 0$, $\alpha = 1/3$. Fazendo-se uma análise das soluções de alguns esquemas comparando-os com a solução exata (item j), pode-se observar pela figura 4.1 que um esquema central de 2ª ordem (item a) consegue representar menos de 20% das soluções exatamente, sendo bastante impreciso. Já o esquema espectral (item i) apresenta os melhores resultados, isto é, 80% das soluções são obtidas exatamente. Porém, este método tem uso mais restrito podendo ser utilizado para condições iniciais e de contorno bem simples. Assim, escolhe-se trabalhar com o esquema tridiagonal de 6ª ordem (item e), que apresenta mais de 50% das soluções obtidas com exatidão e com a possibilidade de uso de condições iniciais e de contorno mais amplas.

4.2.2 Análise do erro para a 2ª derivada:

A análise do erro de aproximações para a 2ª derivada procede similarmente à análise para a 1ª derivada. A 2ª derivada exata de (4.25), com respeito a s , gera a função com coeficientes de Fourier:

$$\widehat{f}_k'' = -w^2 \widehat{f}_k \quad (4.29)$$

As aproximações numéricas (4.8) correspondem a $(\widehat{f}_k'')_{edf} = -w'' \widehat{f}_k$ onde:

$$w''(w) = \frac{2a(1 - \cos(w)) + (b/2)(1 - \cos(2w)) + (2c/9)(1 - \cos(3w))}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (4.30)$$

A diferença entre $w''(w)$ e w^2 é a medida do erro da aproximação para a 2ª derivada. O conjunto de números de onda sobre o qual o número de onda $w''(w)$ aproxima a diferenciação exata w^2 com um erro de tolerância específico:

$$\frac{|w''(w) - w^2|}{w^2} \leq \varepsilon \quad (4.31)$$

define o conjunto de ondas bem resolvidas.

Veja na figura 4.2 os gráficos do número de onda modificado $w''(w)$ versus número de onda w .

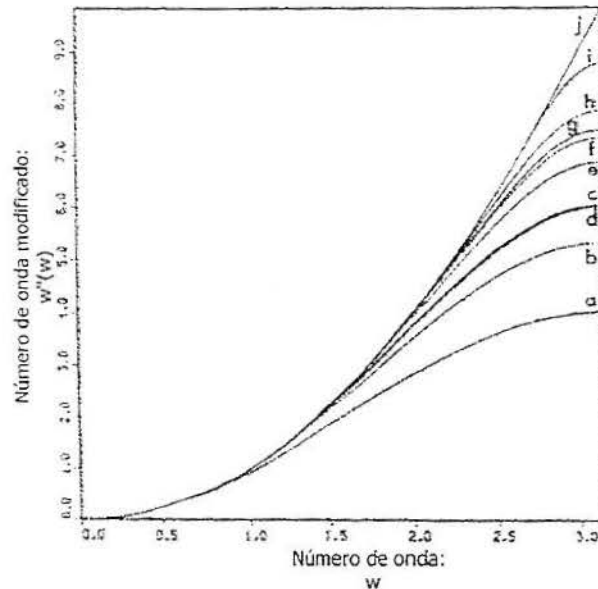


Figura 4.2: Gráfico do número de onda (w) versus número de onda modificado ($w'(w)$) para as aproximações da 2ª derivada para os diferentes esquemas compactos.

Para a 2ª derivada também utilizou-se um esquema tridiagonal de 6ª ordem (letra "e") com $\beta = 0$, $c = 0$, $\alpha = 2/11$. Compare-se as soluções de alguns esquemas com a solução exata (item j). Pode-se observar, pela figura 4.2, que um esquema central de 2ª ordem (item a) tem apenas aproximadamente 28% das suas soluções obtidas exatamente. Já o esquema espectral (item i) consegue obter mais de 90% das soluções exatamente. Este método apresenta os melhores resultados, mas, como já foi comentando anteriormene, métodos espectrais tem uso mais restrito. Assim, escolhe-se trabalhar com o esquema tridiagonal de 6ª ordem que consegue apresentar aproximadamente 70% de suas soluções exatamente.

4.3 Avanço no tempo:

O desenvolvimento da simulação no tempo é feito pelo método de Runge-Kutta de 3ª ordem. Um membro de uma família do esquema de Runge Kutta de 3ª ordem é usado para o avanço no tempo das equações (2.10). Estes esquemas aplicados à equação modelo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) \quad (4.32)$$

são definidos por:

$$u^{(k+1)} = u^k + \Delta t (c_k f(u^{(k)}) + d_k f(u^{(k-1)})) \quad (4.33)$$

onde $k = 1, K$ indica o subpasso num passo de tempo Δt e K é o número de subpassos num passo de tempo. O conjunto particular de parâmetros usados aqui são:

$$\begin{aligned} K &= 3 \\ c_1 &= 8/15 \quad d_1 = 0 \\ c_2 &= 5/12 \quad d_2 = -17/60 \\ c_3 &= 3/4 \quad d_3 = -5/12 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Este esquema é compacto no sentido de que requer armazenagem e aritmética de 2ª ordem, mas com precisão de 3ª ordem. Esquemas de Runge-Kutta de 3ª ordem são estáveis para números de CFL menores que $\sqrt{3}$.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS:

5.1 TESTES PRELIMINARES:

O programa de cálculo com o qual realizou-se as simulações foi desenvolvido por E. Lamballais e J. Silvestrini com o objetivo de ter uma ferramenta numérica de alta precisão para calcular escoamentos turbulentos ou em transição compressíveis bi e tridimensionais em geometrias cartesianas. Para primeira aplicação foi necessário realizar uma série de testes de validação como de otimização de subrotinas.

Começou-se a testar o programa para $Ma = 0,4$ e $Re = 500$ no que se refere à condição inicial, dado que nosso interesse fundamental nesse trabalho é a camada de mistura temporal. Fez-se, assim, três testes com a condição inicial forçada para que ocorrem 2 "pairings". Isto implica num cálculo a quatro vórtices de tal forma que ocorrem as passagens de quatro para dois e de dois para um vórtices. Primeiro fez-se uma simulação com uma condição inicial forçada para a velocidade flutuante longitudinal do tipo:

$$\tilde{u}(x, y) = Af(y)\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + Bf(y)\text{sen}2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (5.1)$$

Esta função é dada pela soma de duas funções seno: uma que provoca a formação dos dois vórtices (dois comprimentos de onda no domínio) e outra provocando a formação de apenas um vórtice (um comprimento de onda no domínio). Os gráficos obtidos realmente apresentaram-se como se esperava. Houve a formação inicial de dois vórtices, depois um pairing e o vórtice final resultante.

No segundo teste, acrescentou-se na condição inicial forçada uma função seno de período quatro:

$$\tilde{u}(x, y) = Af(y)\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + Bf(y)\text{sen}2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + Cf(y)\text{sen}4\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (5.2)$$

que será responsável pela formação dos quatro vórtices iniciais. Porém, os gráficos não apresentaram quase nenhuma diferença para com o primeiro teste. Isso quer dizer que houve uma tendência muito forte para a formação inicial de somente dois vórtices.

Então, num terceiro teste, retirou-se da condição inicial forçada os termos referentes aos períodos um e dois, deixando só o termo de período quatro, como segue:

$$\tilde{u}(x, y) = Cf(y)\text{sen}4\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (5.3)$$

Houve, como era esperado, a formação de quatro vórtices em todos tempos. Isso levou a necessidade de diminuir a energia dos modos referentes aos períodos um e dois, para amenizar a tendência de ocorrência de um e dois vórtices, permitindo assim a ocorrência dos quatro vórtices. Assim, foram feitas mais uma série de testes onde dividiu-se os coeficientes A e B pelos respectivos constantes até obter a formação de quatro vórtices iniciais. Desta forma, foi obtida a condição inicial que ficou finalmente na forma:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{A}{6}f(y)\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{B}{6}f(y)\text{sen}2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + Cf(y)\text{sen}4\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (5.4)$$

onde foi possível visualizar a melhor formação dos quatro, dois e um vórtices e, conseqüentemente, dos dois "pairings". Todos os resultados encontrados daqui em diante foram computados com essas condições iniciais.

5.2 RESUMO DAS SIMULAÇÕES REALIZADAS:

Em seguida, começou-se a calcular os resultados utilizando um domínio de comprimento $L_x = L_y = 25\delta_i$, onde L_x e L_y representam os comprimentos do domínio nas direções x e y , respectivamente. Utilizando uma matriz de tamanho $nx = ny = 151$, conseguiu-se obter os resultados para $Re = 250$ e $Re = 500$. Porém, para $Re = 1000$ foi necessário aumentar o número de pontos da matriz. Aumentou-se para $nx = ny = 201$, porém, devido a obtenção de $CFL > 1$, geraram-se perturbações nos gráficos, pois perdeu-se a estabilidade do esquema numérico.

O CFL é:

$$CFL = (u \pm c) \frac{dt}{dx} + (u \pm c) \frac{dt}{dy} \quad (5.5)$$

e, para menores dx e dy foi necessário reduzir dt (ou aumentar h):

$$dx = \frac{L_x}{nx} \quad (5.6)$$

$$dy = \frac{L_y}{ny} \quad (5.7)$$

Primeiro, tentou-se reduzir o dt , o que nos levou a mais uma série de testes. Porém, em seguida, viu-se que a resposta para o problema era aumentar o comprimento do domínio $L_x = L_y$. Isso foi verificado teoricamente na teoria da instabilidade linear. Chegou-se, pela teoria, aos seguintes resultados da tabela:

Ma	0.2	0.4	0.6	0.8
α_{\max}	0.875	0.75	0.625	0.5
λ_{\max}	7.181	7.854	10.053	12.568
$L_x = L_y$	29	32	40	50

Tabela 5.1: Comprimentos do domínio computacional

para os vários números de Ma .

Como foi visto, α_{\max} é o número de onda para a taxa de amplificação máxima obtida para cada número de Mach da figura 3.4 e λ_{\max} e $L_x = L_y$ foram calculados a partir das fórmulas (3.24) e (3.25).

Como foi visto pela teoria, o desenvolvimento é temporal. Assim, a simulação evolui ao longo do tempo, de $itime = 1$ até $itime = 7.000$. De 500 em 500 $itimes$ foi-se guardando os resultados da vorticidade e da pressão em arquivos de dados separados. Isso nos dá um total de quinze arquivos de dados para a vorticidade e quinze para a pressão, referentes aos quinze tempos diferentes: 0, 25, 50, ..., 350. Assim, para cada simulação tem-se trinta gráficos. Foram feitas doze simulações variando os números de Re e Ma , conforme a tabela:

	$Re = 250$	$Re = 500$	$Re = 1.000$
$Ma = 0.2$	X	X	X
$Ma = 0.4$	X	X	X
$Ma = 0.6$	X	X	
$Ma = 0.8$	X		

Tabela 5.2: Tabela das simulações realizadas.

Dessas doze conseguiu-se os resultados completos, isto é, para *itime* de 1 a 7.000 para os que estão assinalados com "X". Assim, tem-se 270 gráficos plotados. Para os casos não assinalados não foi possível encontrar todos os resultados porque, segundo a tabela 5.1, para $Ma = 0,6$ deve-se ter $L_x = L_y \cong 40\delta_i$ e para $Ma = 0,8$ deve-se ter $L_x = L_y \cong 50\delta_i$. Porém, utilizou-se em todas as simulações $L_x = L_y \cong 32\delta_i$.

São apresentadas aqui algumas das nove simulações, a saber:

- $Ma = 0,4$ e $Re = 500$
- $Ma = 0,4$ e $Re = 1000$
- $Ma = 0,4$ e $t = 100$ ($Re = 250$, $Re = 500$ e $Re = 1.000$)
- $Ma = 0,4$ e $t = 350$ ($Re = 250$, $Re = 500$ e $Re = 1.000$)
- $Re = 250$ e $t = 75$ ($Ma = 0,2$; $Ma = 0,4$; $Ma = 0,6$ e $Ma = 0,8$)
- $Re = 250$ e $t = 125$ ($Ma = 0,2$; $Ma = 0,4$; $Ma = 0,6$ e $Ma = 0,8$)
- $Re = 250$ e $t = 225$ ($Ma = 0,2$; $Ma = 0,4$; $Ma = 0,6$ e $Ma = 0,8$)

5.3 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Ma = 0,4$ e $Re = 500$ e 1.000:

Analisando os gráficos da pressão e vorticidade para $Ma = 0,4$ e $Re = 500$ (figura 5.1), vê-se o perfeito desenvolvimento ao longo tempo com os vórtices centrados no domínio que corresponde ao desenvolvimento temporal da camada de mistura. Pode-se enumerar as seguintes etapas:

- 1ª etapa: escoamento laminar ($t = 0$);

- 2ª etapa: início da transição com o aparecimento dos quatro vórtices ($t = 25, 50, 75$);
- 3ª etapa: ocorrência do primeiro "pairing", ou seja, passagem de quatro para dois vórtices ($t = 100, 125$);
- 4ª etapa: primeiro "pairing" concluído, ficando somente dois vórtices ($t = 150, 175$);
- 5ª etapa: ocorrência do segundo "pairing", ou seja, passagem de dois para um vórtice ($t = 200, 225, 250, 275$);
- 6ª etapa: segundo "pairing" concluído, restando apenas um vórtice ($t = 300, 325, 350$).

É importante notar que o gráfico da pressão também nos retrata o número de vórtices do tempo em questão, correspondendo ao número encontrado no gráfico da vorticidade. Em $t = 50$, na figura 5.1, pode-se observar que existem quatro vórtices no gráfico da vorticidade e oito curvas no gráfico da pressão. Como era esperado, fisicamente, existem duas curvas fechadas no gráfico da pressão para cada vórtice no gráfico da vorticidade. Cada uma dessas curvas representa a pressão baixa e a pressão alta. As curvas com cores tendendo ao vermelho representam as altas pressões e com tendência ao azul, as baixas pressões. Então, pode-se ver que há uma perfeita sincronia com o gráfico da vorticidade. Observando os gráficos da pressão, neste tempo, vê-se primeiro uma curva amarela que representa a pressão baixa e depois uma curva rosa que representa a pressão alta, para o primeiro vórtice. Pode-se ver que a curva correspondente a pressão baixa ocorre quando está-se no pico do vórtice e vice-versa. E, de fato, é fisicamente constatado que no pico do vórtice a pressão é mais baixa do que no seu vale. Pode-se observar também que, ao longo do tempo, o número de curvas no gráfico da pressão acompanha o número de vórtices no gráfico da vorticidade, para um mesmo tempo. Quer dizer, quando passa-se de quatro para dois vórtices o número de curvas da pressão diminui de oito

para quatro; assim como quando passa-se de dois para um vórtice, o número de curvas da pressão diminui de quatro para duas.

Toda a análise feita para $Ma = 0,4$ e $Re = 500$ (figura 5.1) pode ser constatada para $Ma = 0,4$ e $Re = 1.000$ (figura 5.2) e para as demais simulações feitas mas não apresentadas aqui. O aumento do número de Reynolds, como será visto a seguir, acelera o desenvolvimento dos vórtices, ou seja, acelera a transição à turbulência.

5.4 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE REYNOLDS:

Por uma análise em $Ma = 0,4$ e $t = 100$ (figura 5.3) e em $Ma = 0,4$ e $t = 350$ (figura 5.4) dos gráficos da pressão e vorticidade para $Re = 250$, $Re = 500$ e $Re = 1.000$, vê-se que quanto maior o número de Reynolds mais rapidamente se desenvolve o processo, quer dizer, mais cedo ocorrem os "pairings". Isso ocorre porque a viscosidade do fluido é inversamente proporcional ao número de Reynolds. Assim, quanto maior o número de Reynolds, menor a viscosidade e, quanto menor a viscosidade, menor a resistência do fluido ao movimento. Portanto, vemos a influência da viscosidade no desenvolvimento da turbulência.. Observou-se que quando o problema é compressível, isto é, o número de Mach é maior que 0,3, quanto maior o número de Mach, maior deverá ser o número de Reynolds (figura 3.5), para que a taxa de amplificação seja máxima. No caso de $Ma = 0,4$, para não haver a influência da viscosidade, seria necessário tomar o valor de Re onde a curva referente a $Ma = 0,4$, na figura 3.5, apresenta-se constante ($Re \geq \pm 1.000$).

5.5 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MACH:

Agora, serão comparados os resultados gráficos para o mesmo número de Reynolds ($Re = 250$) e valores de Mach diferentes ($Ma = 0,2$; $Ma = 0,4$; $Ma = 0,6$ e $Ma = 0,8$). Para isso escolheu-se três dos quinze tempos para os quais tem-se os gráficos da pressão e vorticidade plotados. Escolheu-se o tempo $t = 75$ de ocorrência dos quatro vórtices (figura 5.5), o tempo $t = 125$ de ocorrência do primeiro "pairing" (figura 5.6) e o tempo $t = 225$ de ocorrência do segundo "pairing" (figura 5.7). Pela figura 5.5 ($t = 75$), vê-se que para este mesmo tempo tem-se quatro vórtices para $Ma = 0,2$, uma passagem de quatro para dois para $Ma = 0,4$, dois vórtices para $Ma = 0,6$ e apenas um vórtice para $Ma = 0,8$. Isso pode ser constatado, também, analisando o número de curvas nos gráficos da pressão (cada duas curvas nos gráficos da pressão representam um vórtice no gráfico da vorticidade). Observou-se que os vórtices ficavam mais elípticos (menos circulares) à medida que aumenta o número de Mach e a evolução do processo se torna mais rápido. Isso era esperado porque como viu-se o número de Mach é diretamente proporcional à densidade. Assim, quanto maior o número de Mach maior a densidade do fluido, ou seja, maior a variação da massa específica por unidade de volume o que aumenta a compressibilidade do fluido. Para valores de Mach baixos pode-se observar vórtices mais cilíndricos (figura 5.1). O aumento do número de Mach (e, conseqüentemente, da compressibilidade), provoca a formação de vórtices menos cilíndricos (quer dizer, os vórtices se tornam mais "achatados"). Como conseqüência, pode-se observar os "pairings" ocorrerem de forma mais rápida.

O mesmo pode ser constatado para $t = 125$ (figura 5.6) e $t = 225$ (figura 5.7). Portanto, vemos aqui a forte influência da compressibilidade do fluido no desenvolvimento da turbulência.

Figura 5.1: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, para $Ma = 0,4$ e $Re = 500$ ($t = 0, 25, 50$)

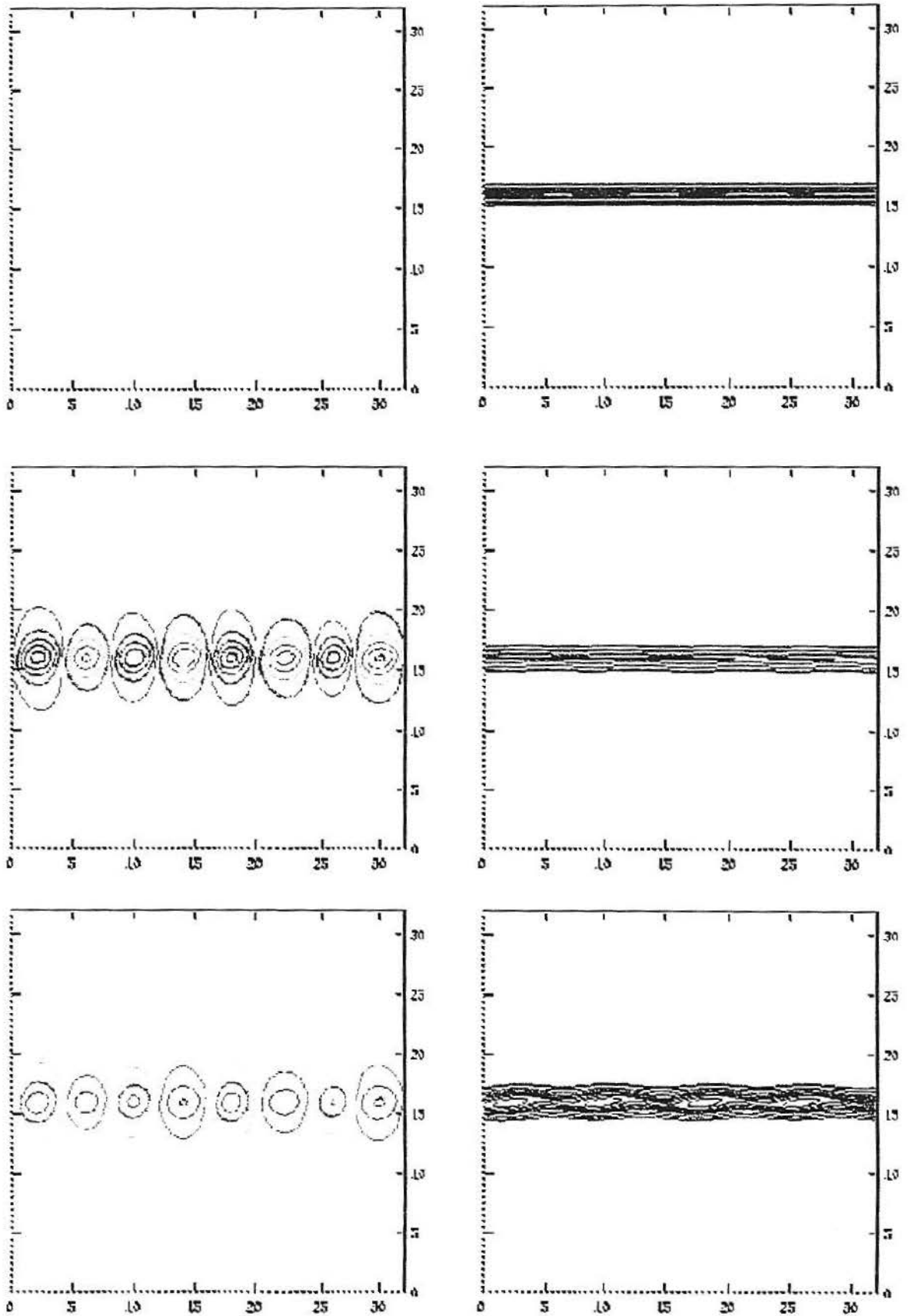


Figura 5.1: Continuação ($t = 75, 100, 125$)

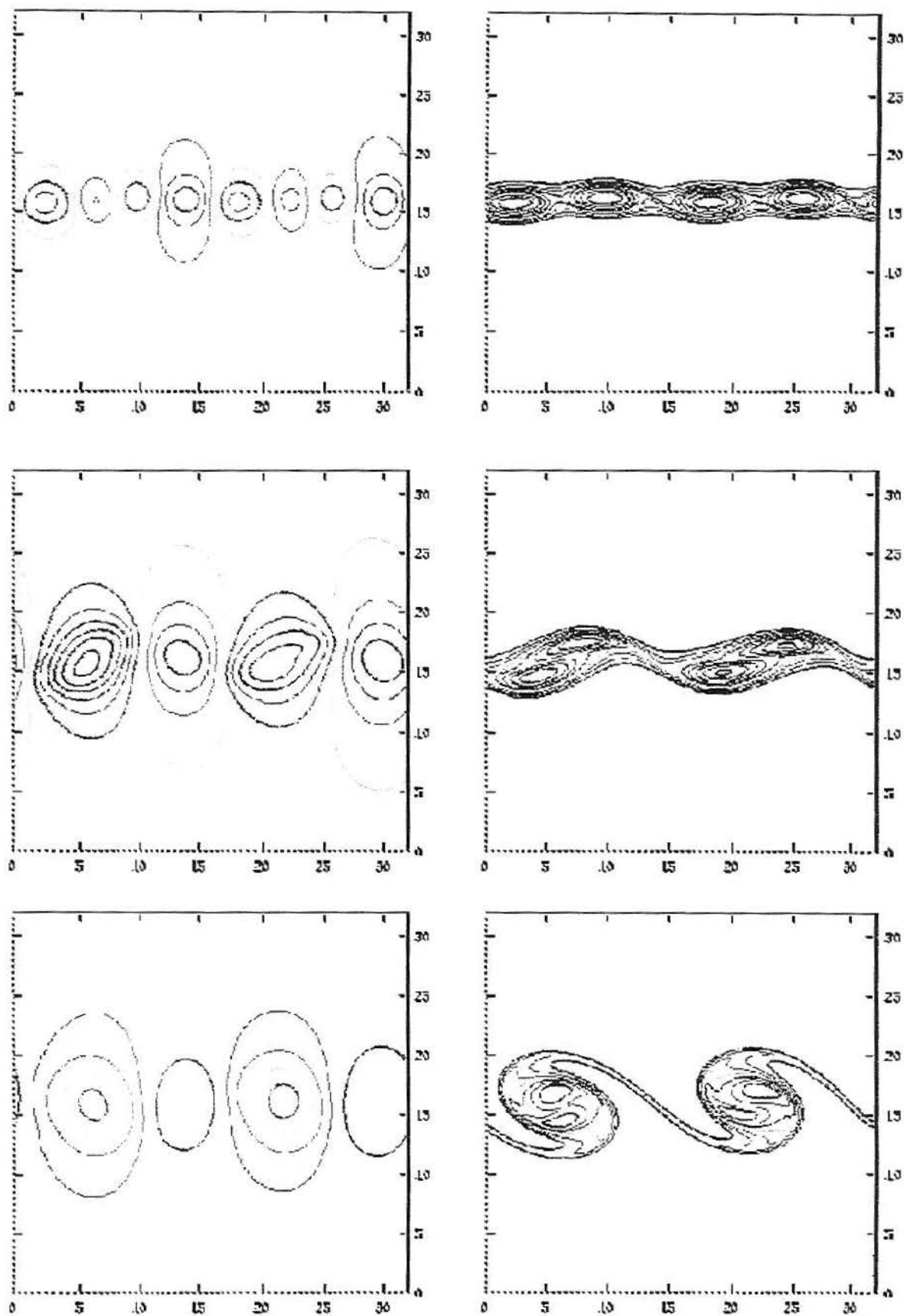


Figura 5.1: Continuação ($t = 150, 175, 200$)

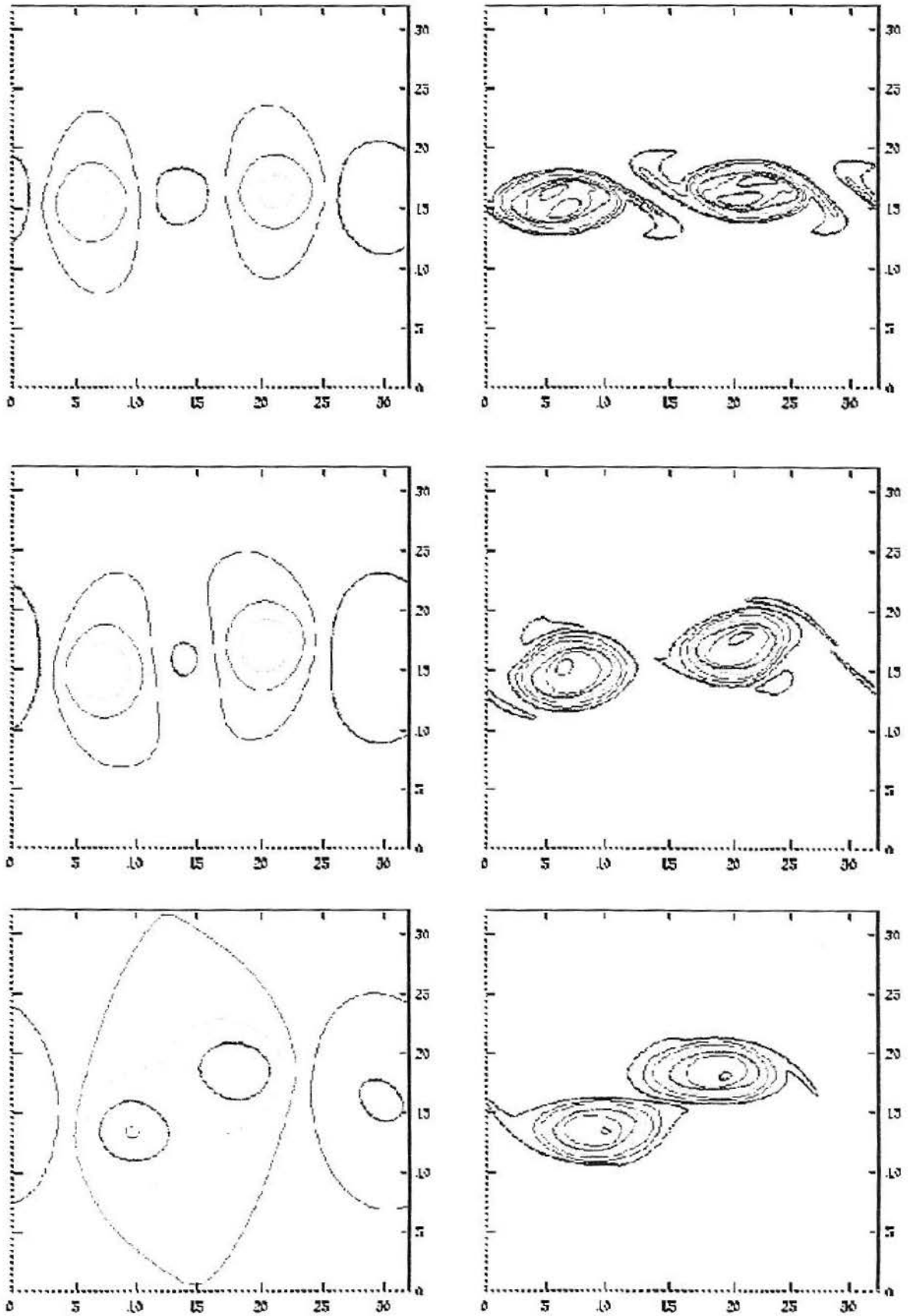


Figura 5.1: Continuação ($t = 225, 250, 275$)

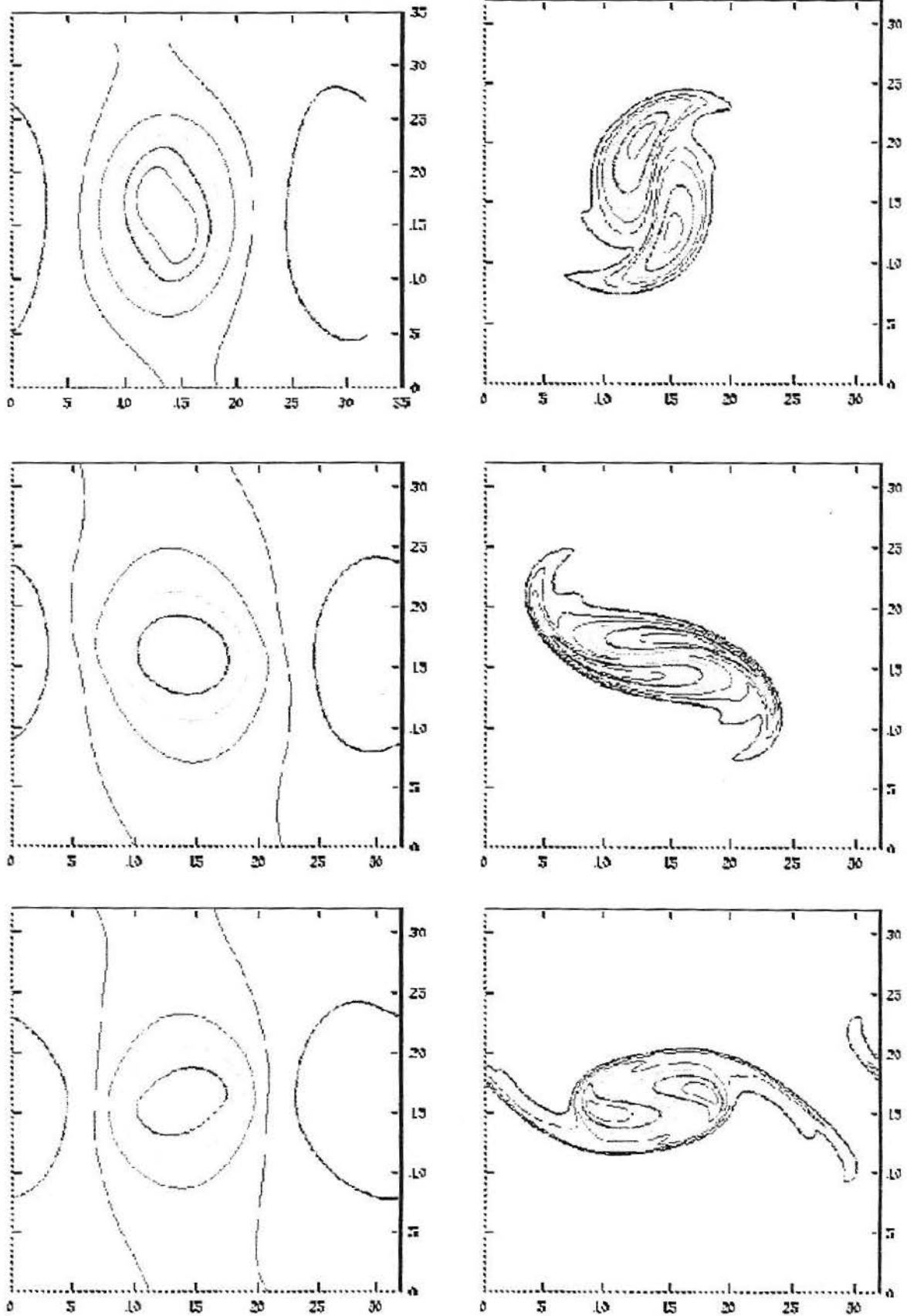


Figura 5.1: Continuação ($t = 300, 325, 350$)

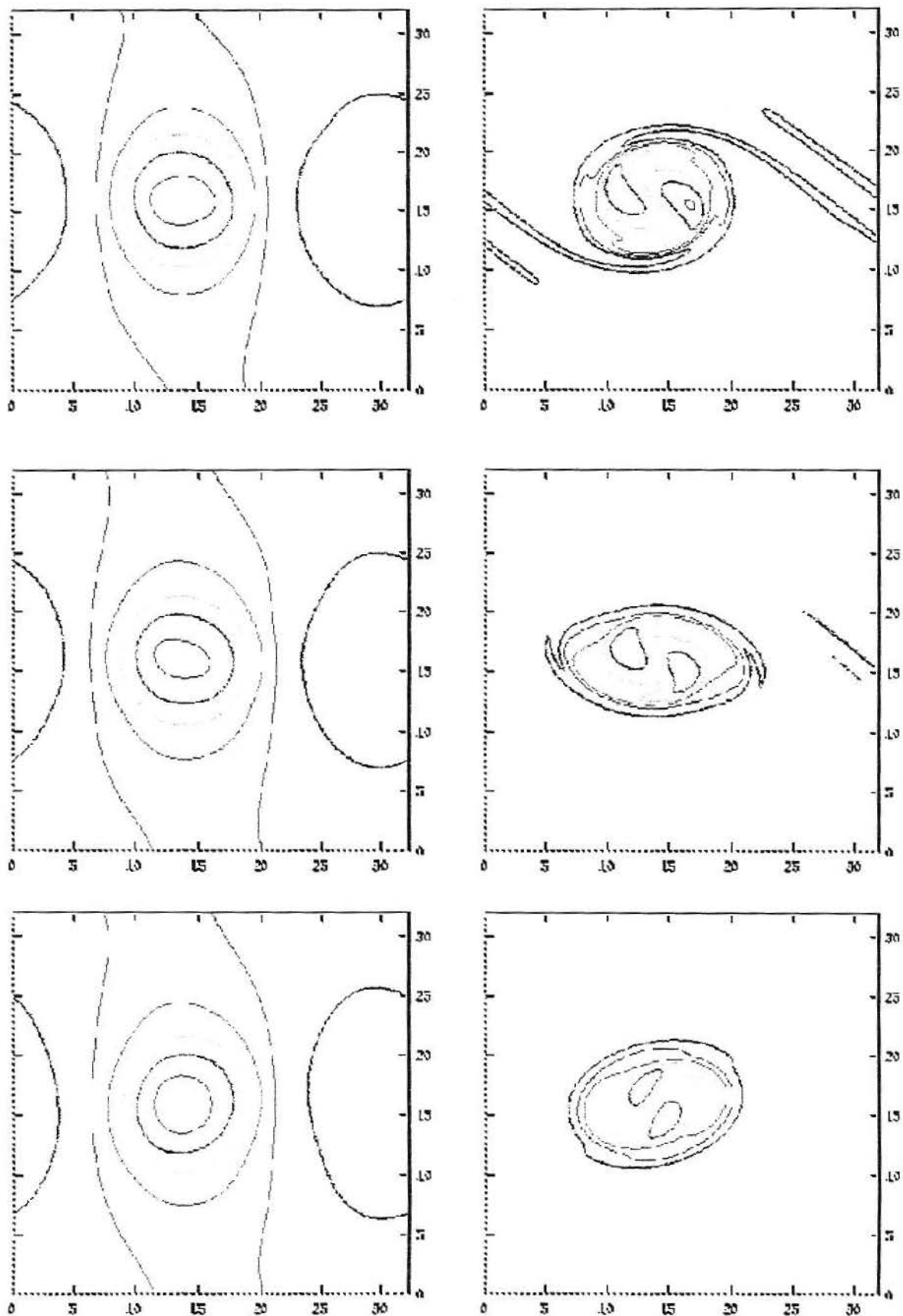


Figura 5.2: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, para $Ma = 0,4$ e $Re = 1000$ ($t = 0, 25, 50$)

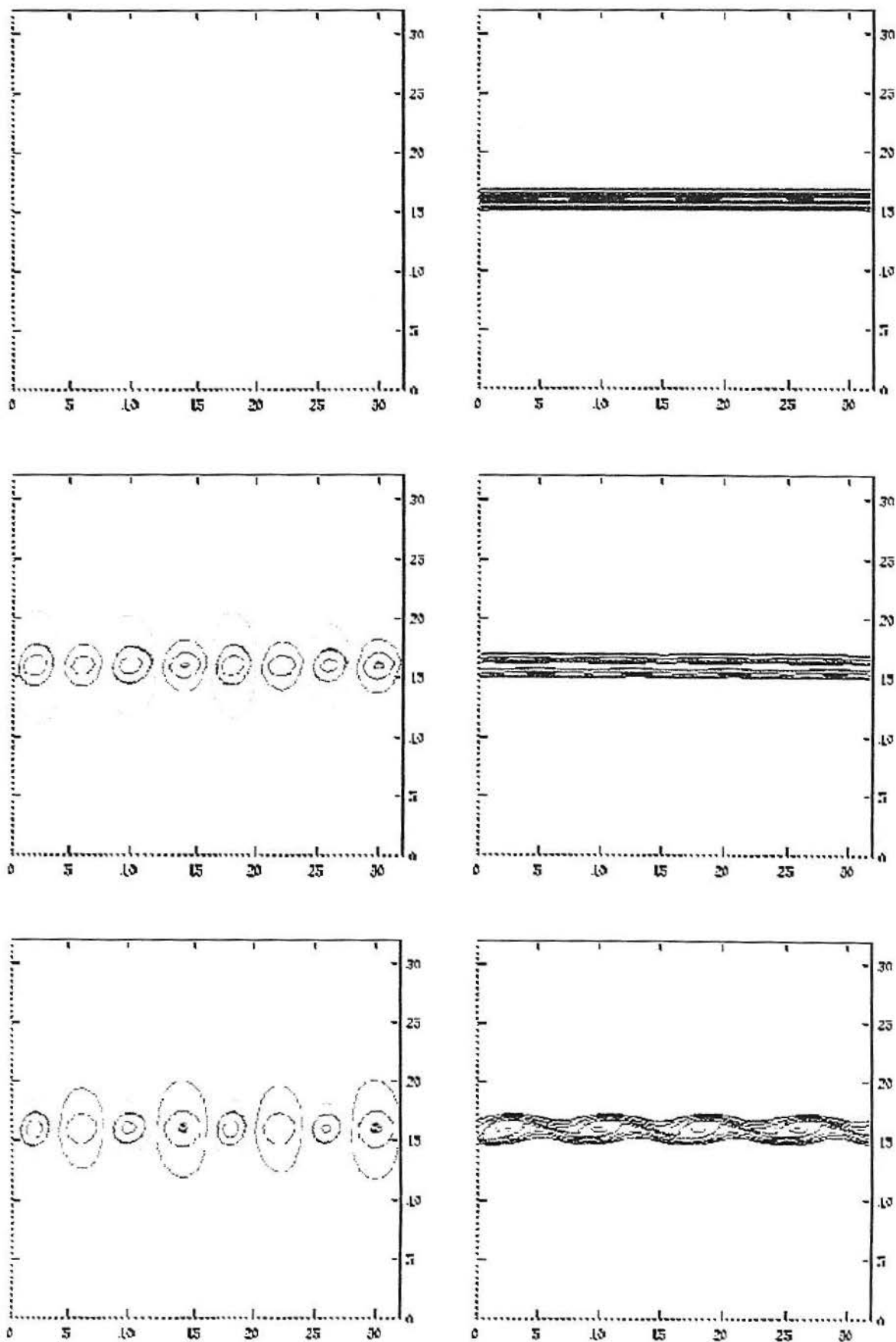


Figura 5.2: Continuação ($t = 75, 100, 125$)

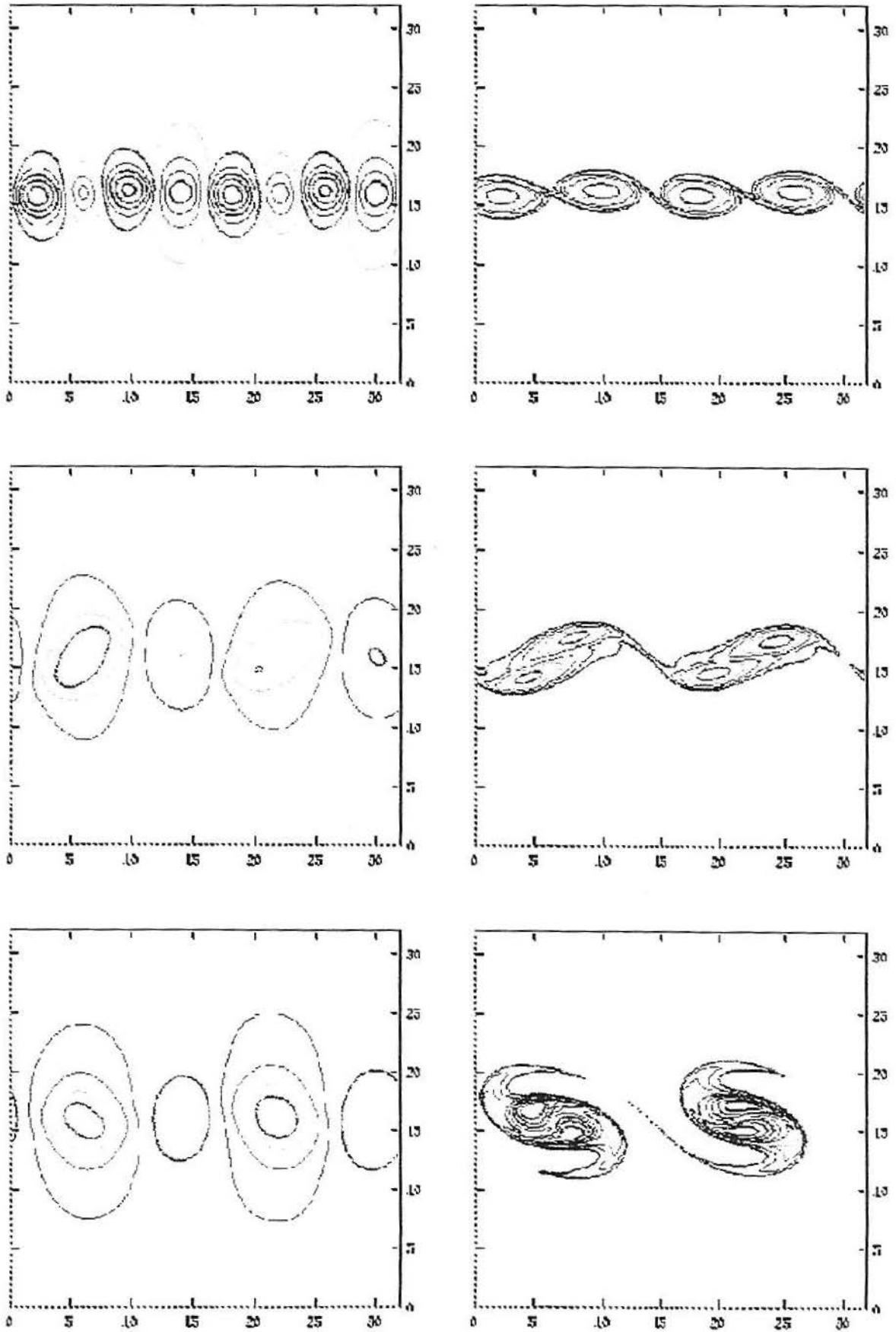


Figura 5.2: Continuação ($t = 150, 175, 200$)

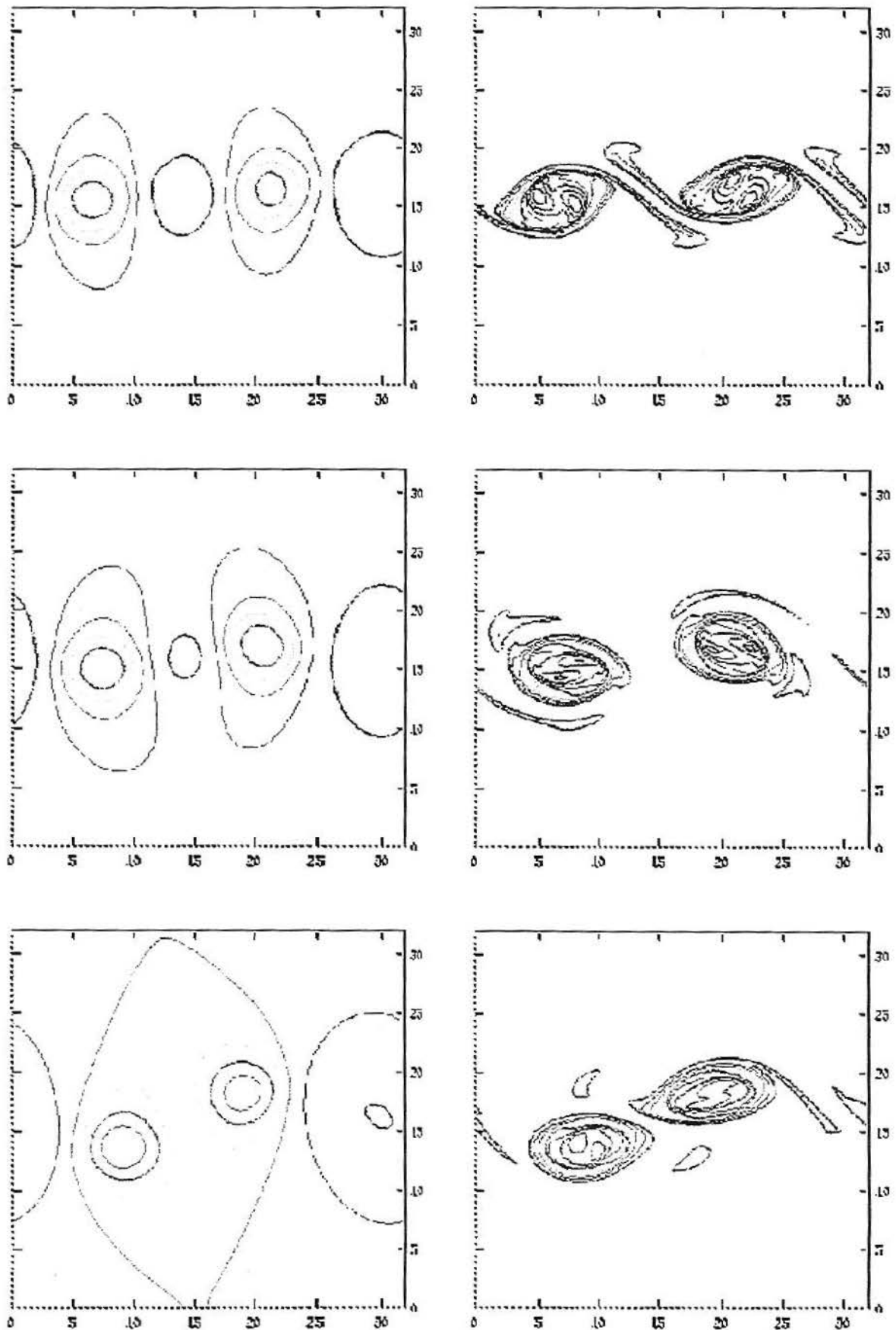


Figura 5.2: Continuação ($t = 225, 250, 275$)

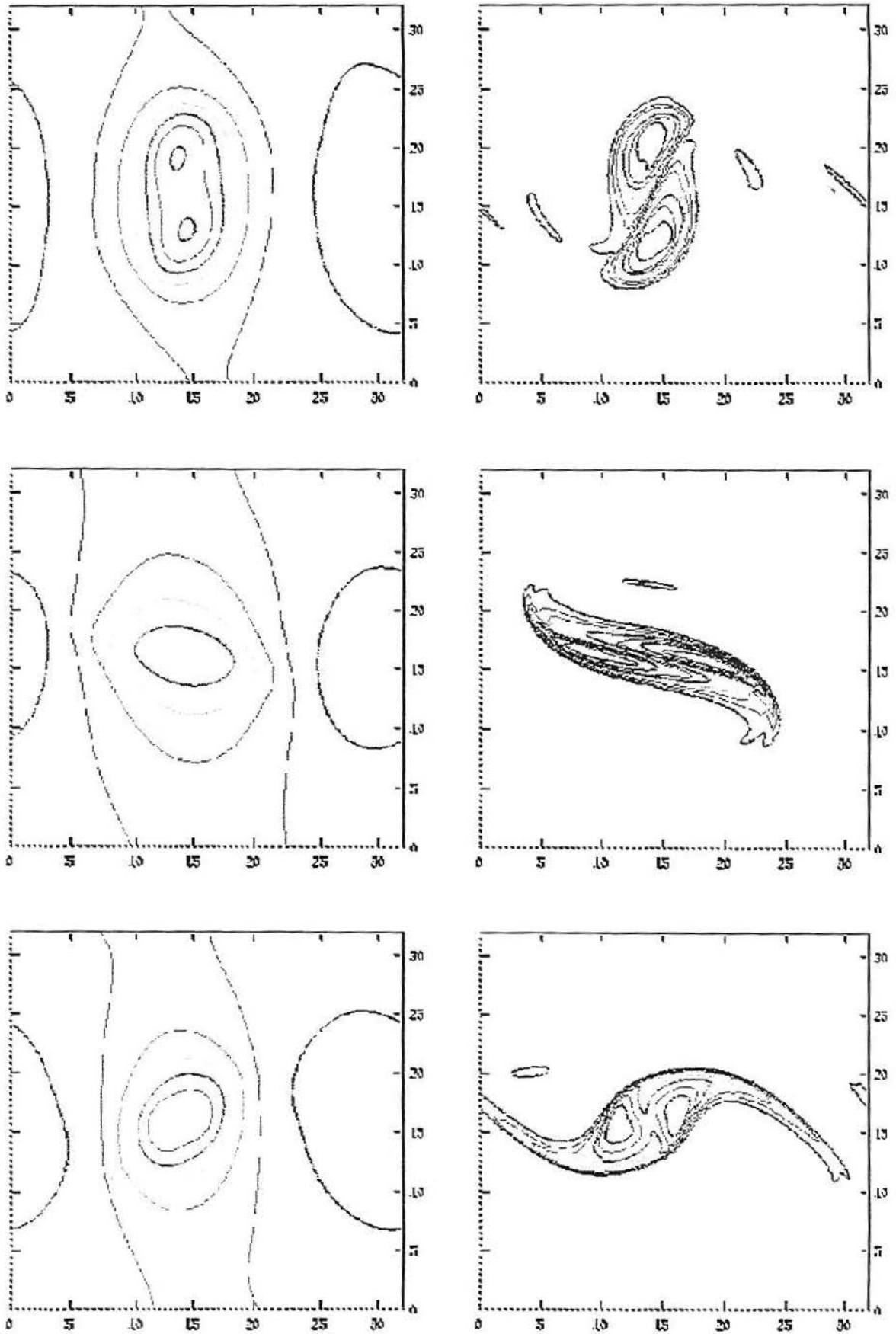


Figura 5.2: Continuação ($t = 300, 325, 350$)

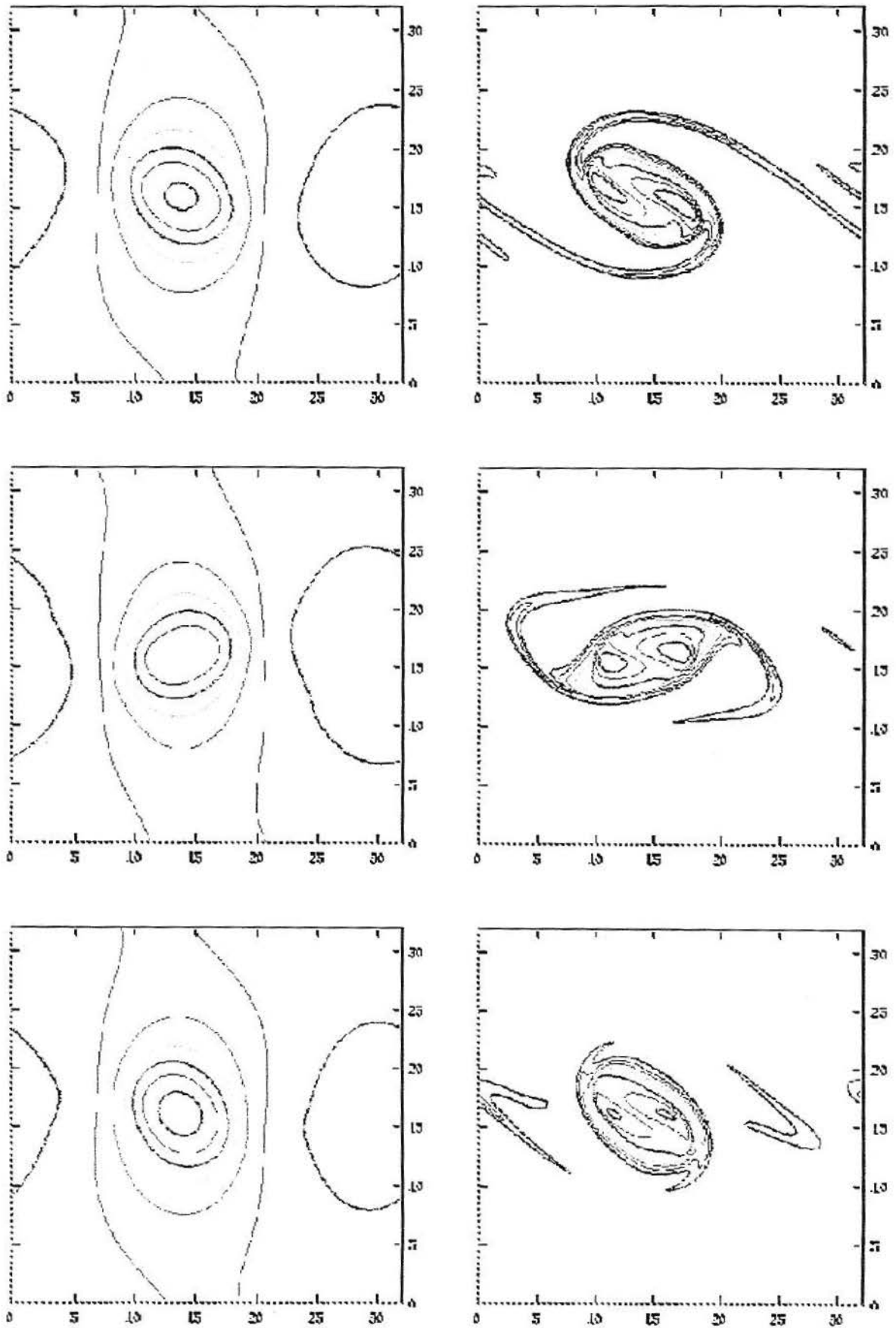


Figura 5.3: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, no tempo = 100 para $Ma=0,4$ e $Re = 250, 500$ e 1000 :

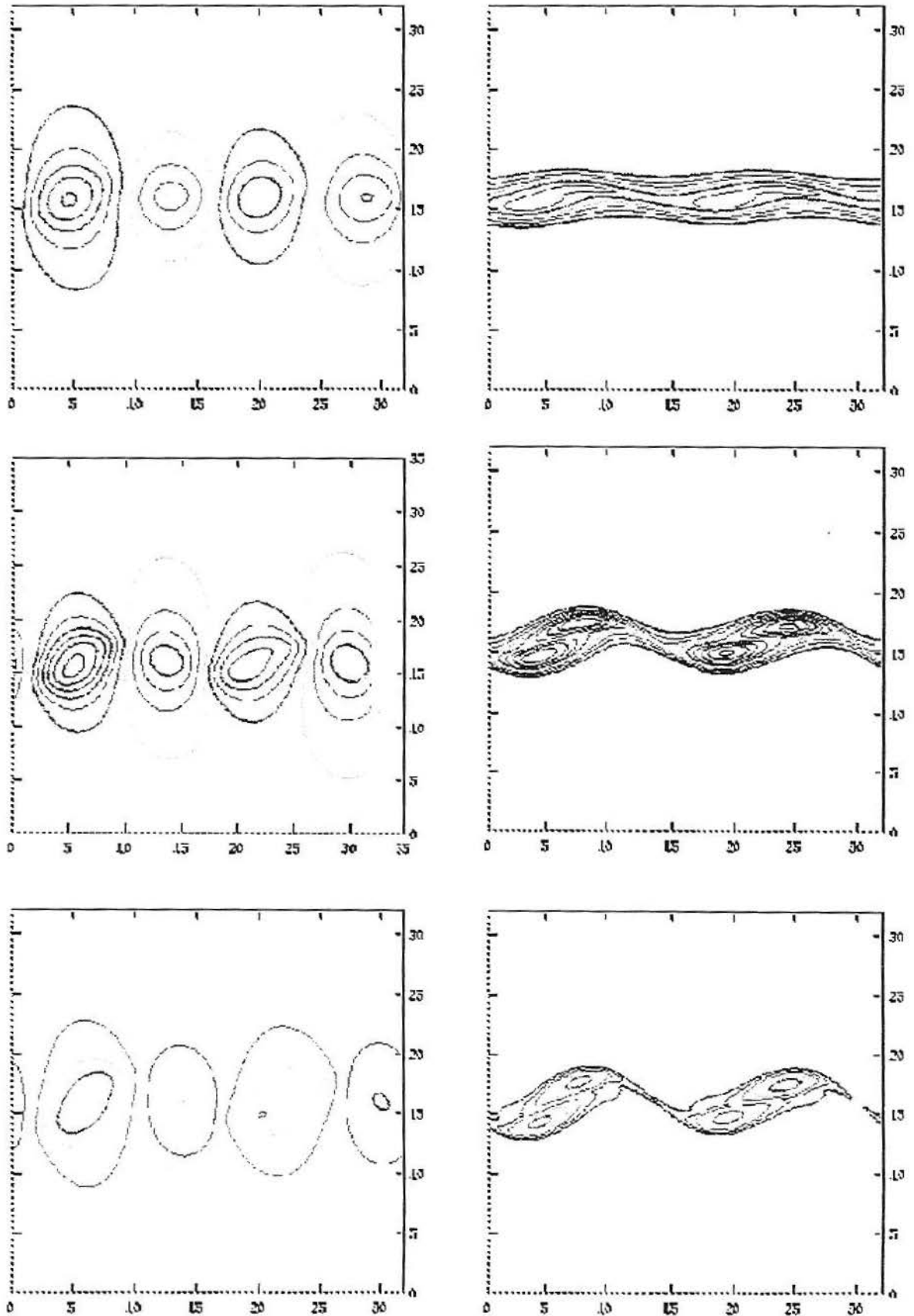


Figura 5.4: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, no tempo = 350 para $Ma=0,4$ e $Re = 250, 500$ e 1000 :

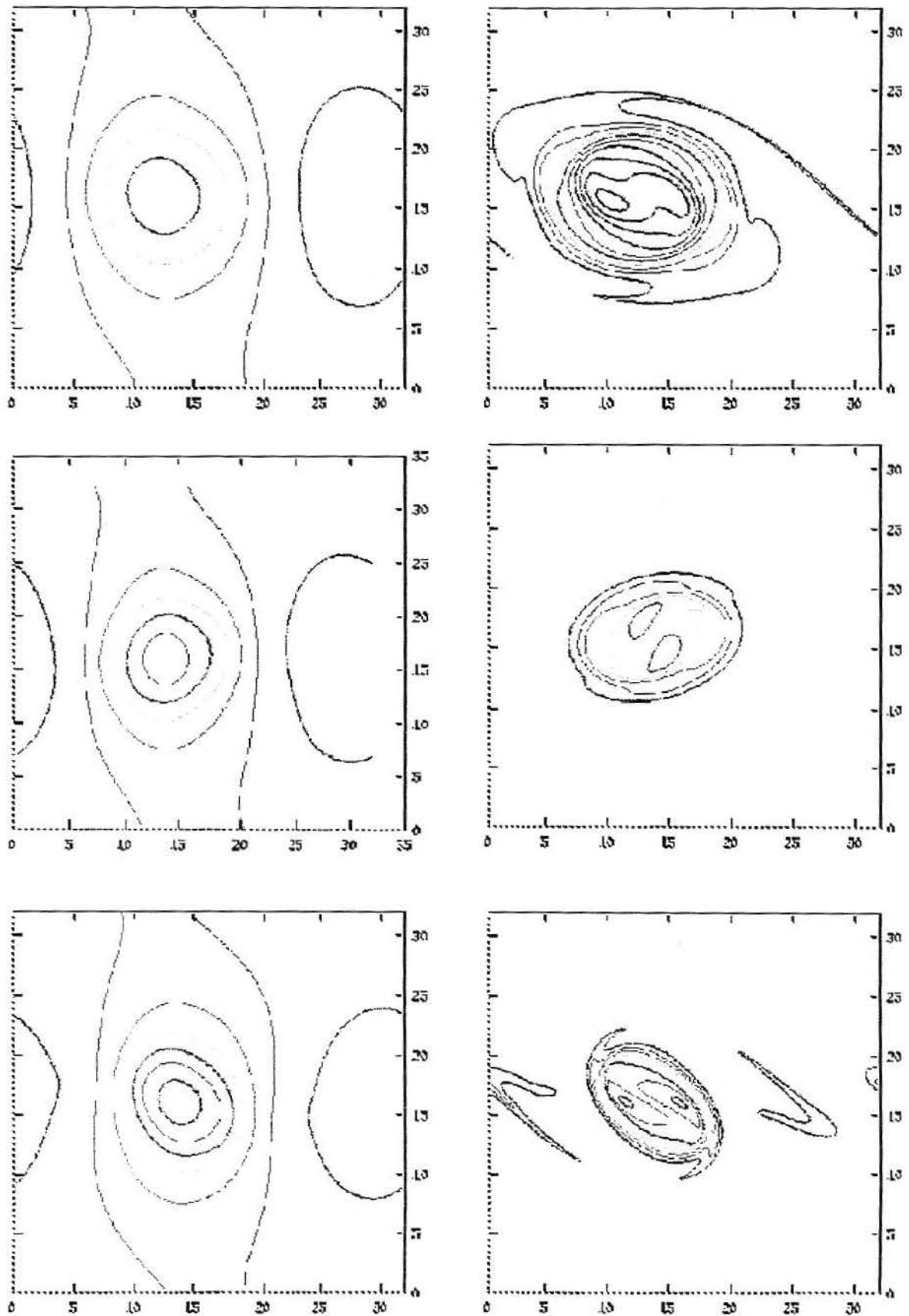


Figura 5.5: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, para $Re = 250$ no tempo = 75 ($Ma = 0.2, 0.4$)

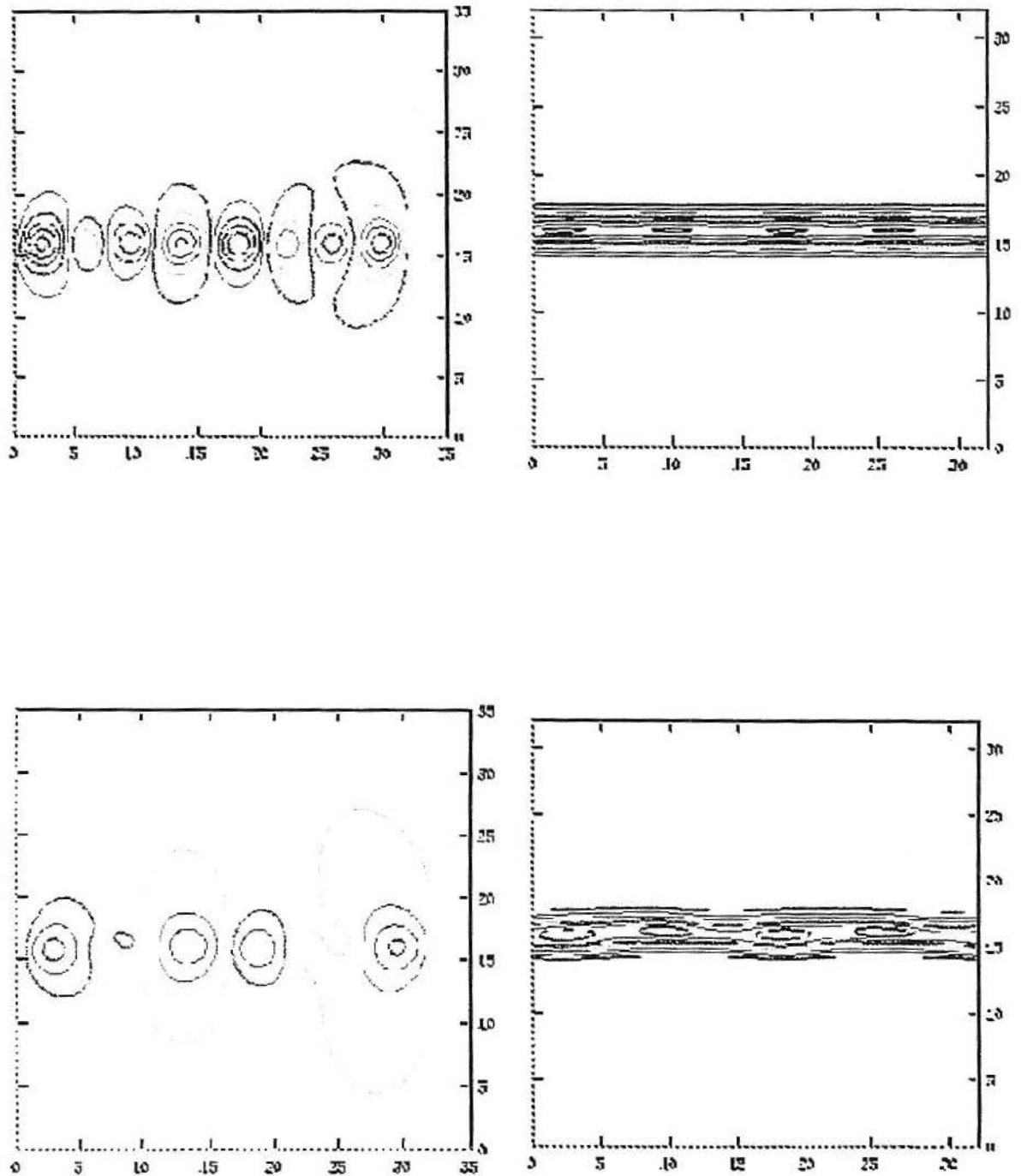


Figura 5.5: Continuação (Ma = 0,6; 0,8)

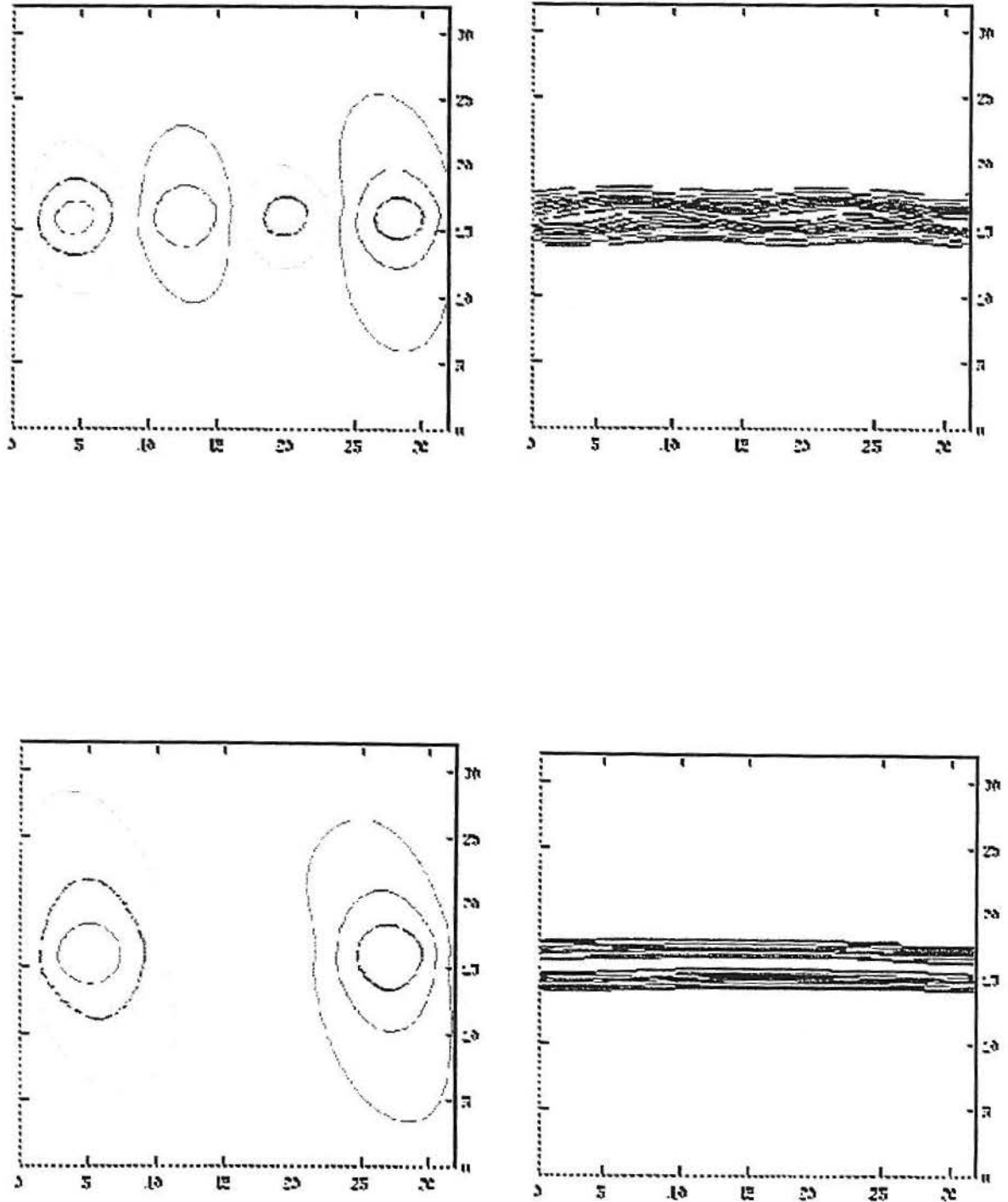


Figura 5.6: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, para $Re = 250$ no tempo = 125 ($Ma = 0.2, 0.4$)

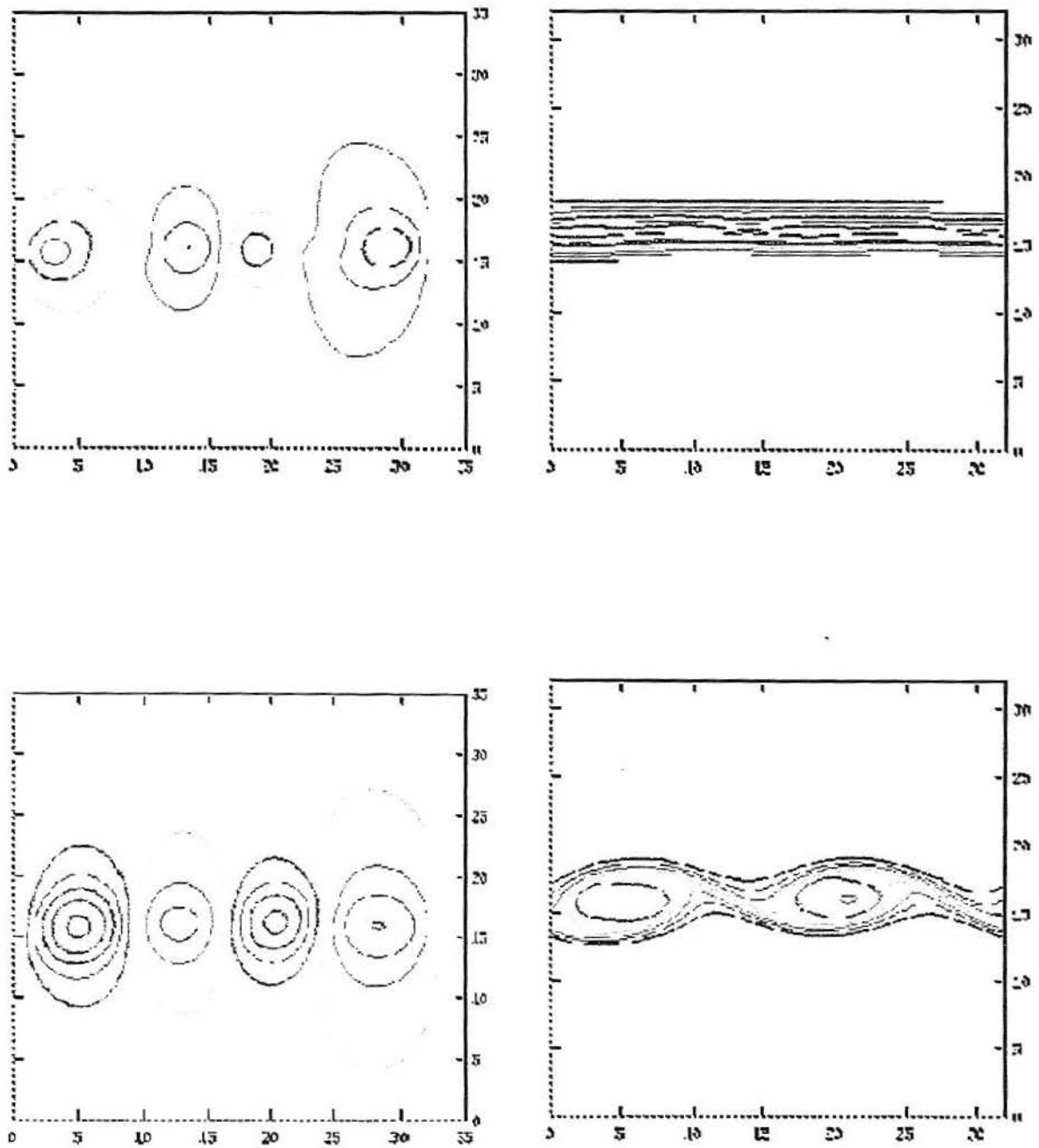


Figura 5.6: Continuação (Ma=0,6; 0,8)

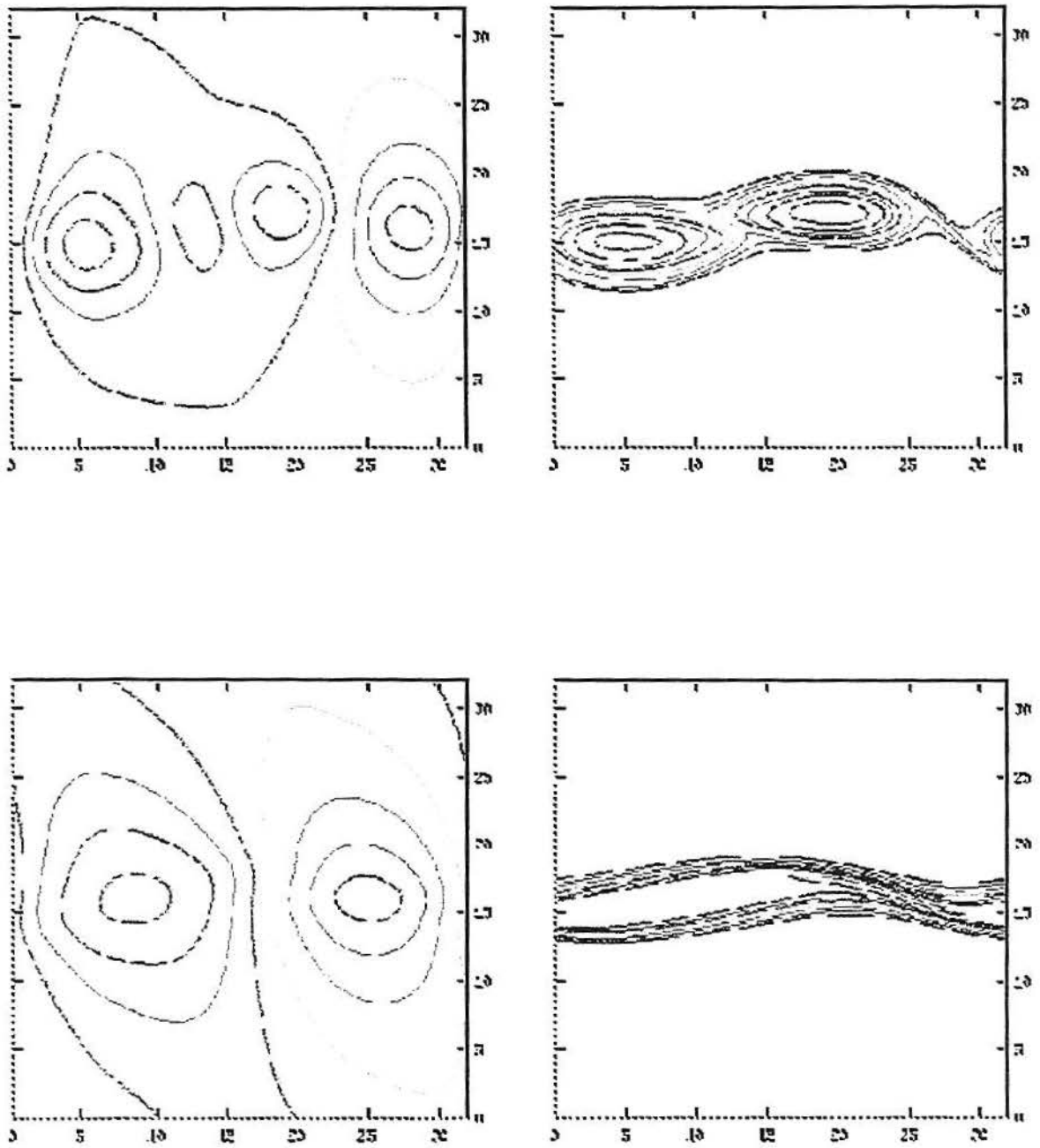


Figura 5.7: Gráficos da pressão e da vorticidade, respectivamente, para $Re = 250$ no tempo = 225 ($Ma = 0.2, 0.4$)

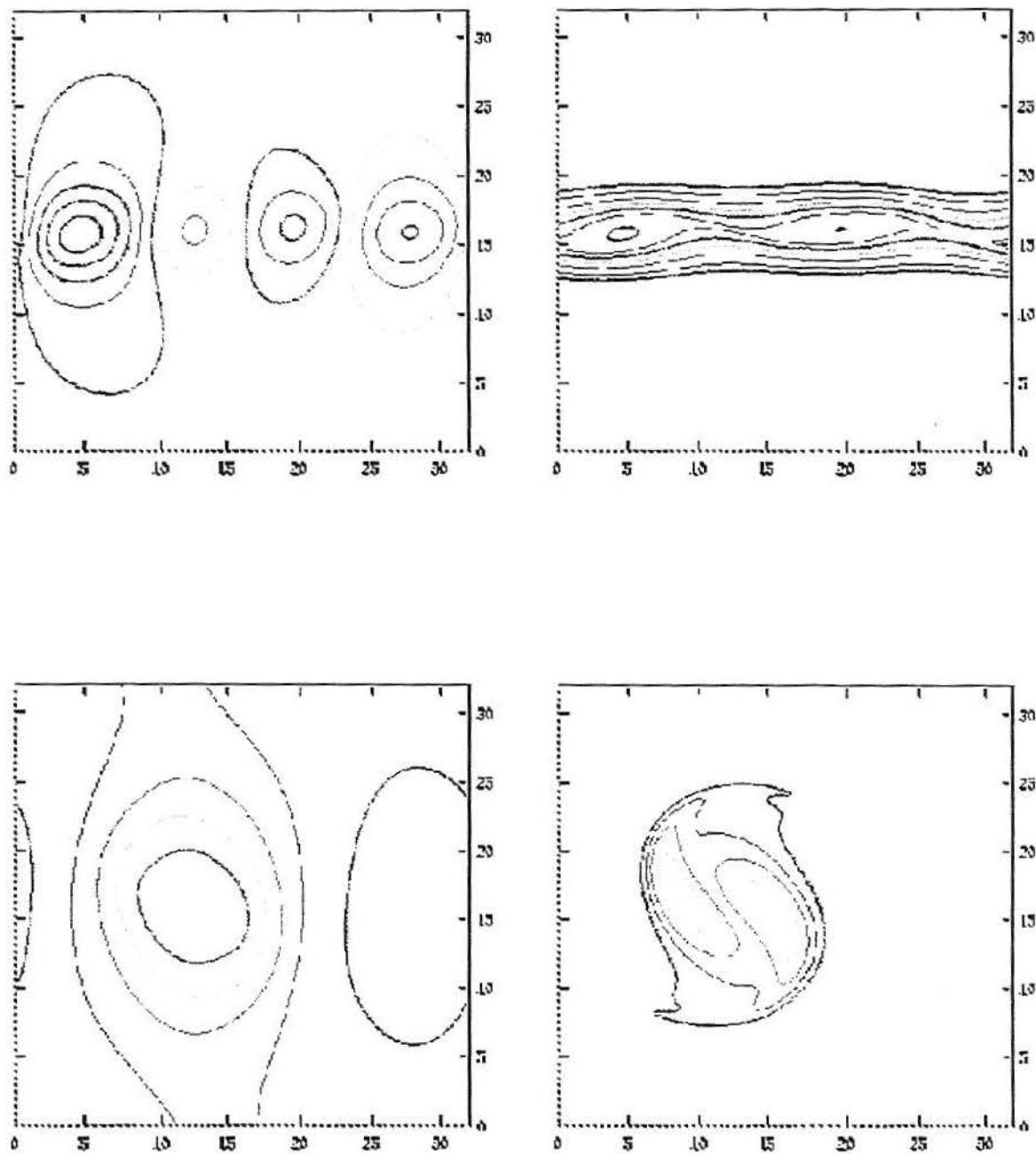
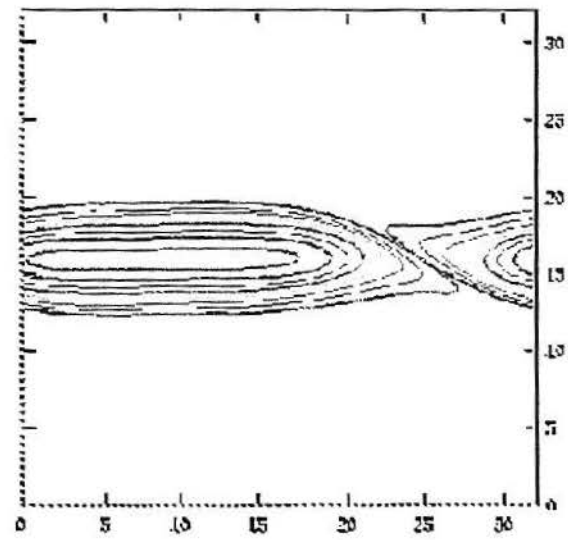
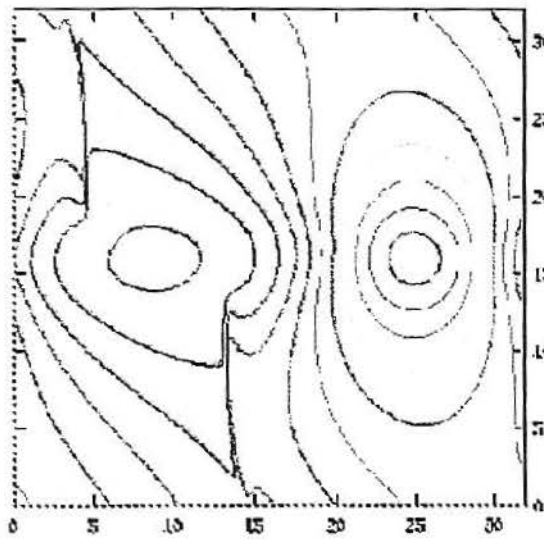
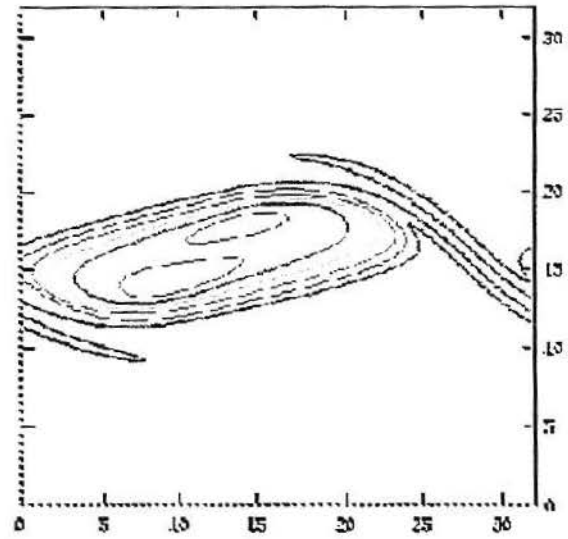
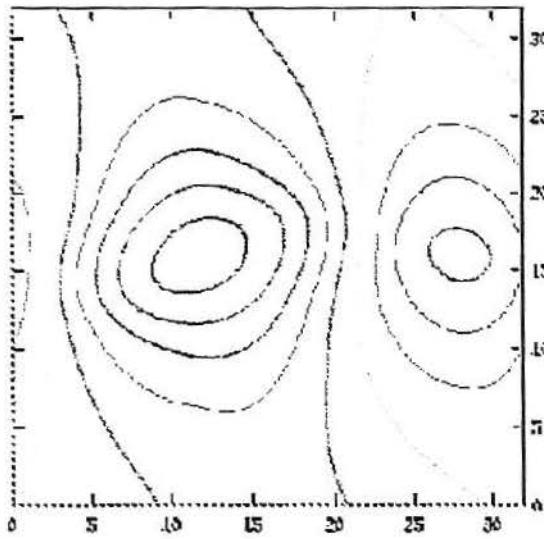


Figura 5.7: Continuação (Ma = 0,6; 0,8)



6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES:

Neste capítulo apresentam-se as conclusões gerais e ainda se indicam sugestões para trabalhos futuros como possíveis continuações da pesquisa da presente dissertação.

O estudo da turbulência usando esquemas numéricos compactos é relativamente novo. A questão da turbulência é um assunto muito abordado devido à maior parte dos escoamentos na natureza serem turbulentos. Além disso, entre as maiores dificuldades para o desenvolvimento da modelagem matemática dos escoamentos encontra-se a problemática da turbulência. Assim, a presente dissertação pretende ser uma contribuição para futuros usuários que buscam solução para os seus modelos matemáticos de problemas envolvendo escoamentos turbulentos.

Apresentou-se no capítulo 1 (Introdução) a motivação para o estudo de esquemas numéricos para a obtenção de soluções de problemas envolvendo a turbulência. O tipo de escoamento que foi utilizado aqui foi a camada de mistura compressível. Foram abordados também neste capítulo os parâmetros utilizados neste tipo de escoamento e algumas definições essenciais como camada de mistura e instabilidade de Kelvin-Helmholtz. É importante enfatizar que, nesta dissertação, fez-se uma análise da camada de mistura em desenvolvimento temporal.

No capítulo 2 (Equações Governantes), apresentou-se as equações que representam escoamentos viscosos e compressíveis que são as equações de Navier-Stokes. Para facilitar o trabalho computacional foi feita uma adimensionalização dessas equações. A estas equações adicionou-se a equação de gases perfeitos para que o problema ficasse bem posto. Apresentou-se também as condições iniciais e de contorno para o nosso problema. A velocidade do escoamento que foi utilizada aqui neste trabalho consta de um perfil médio (perfil tangente hiperbólica) mais uma perturbação, acrescida ao escoamento para que haja a instabilidade.

O capítulo 3 (Teoria Linear de Instabilidade Hidrodinâmica) foi acrescentado a esta dissertação devido à necessidade do cuidado na escolha dos parâmetros nas simulações. Muitos fatores que levaram o programa a não poder ser executado tinham sua explicação na indevida escolha do comprimento do domínio, na quantidade de pontos da malha, no passo de tempo dt , etc. E a escolha desses valores depende de uma análise da teoria da instabilidade linear hidrodinâmica. Apresentaram-se conceitos sobre a teoria da instabilidade linear hidrodinâmica para escoamentos incompressíveis e estendeu-se para escoamentos compressíveis. Verificou-se que o perfil tangente hiperbólica usado nesta dissertação satisfaz às condições necessária e suficiente para ser um perfil instável.

Foi visto que a taxa de amplificação não se altera para valores de Reynolds suficientemente altos. Isto quer dizer que o nosso problema pode ser considerado não viscoso quando escolhe-se valores de Reynolds elevados, o que justifica o estudo de transição em camadas de mistura a partir da instabilidade não-viscosa (3.15). Sendo assim, o comprimento do domínio, o número de pontos da matriz, o passo de tempo, etc. independem do número de Reynolds. Isto facilita o nosso trabalho na escolha das simulações. Mas, quando o problema é compressível (isto é, varia o número de Mach) quanto maior o número de Mach maior deverá ser o número de Reynolds para que a taxa de amplificação seja máxima. Assim, o problema passa a não ter a influência da viscosidade.

Para os diferentes números de Mach, verificou-se que a taxa de amplificação máxima reduz-se bruscamente à medida que Mach cresce. Observou-se, assim, que o comprimento do domínio computacional deve variar junto com a máxima taxa de amplificação, para cada número de Mach. Porém, nesta dissertação, utilizou-se o domínio computacional constante e igual a $32\delta_i$ para todos os números de Mach. Devido a isso viu-se que, para algumas simulações, não foi possível encontrar os resultados completos.

No capítulo 4 (Resolução Numérica) apresentaram-se esquemas de diferenças finitas implícitos compactos, isto é, esquemas com maior ordem de precisão e menor número de pontos. Apresentaram-se aproximações para a primeira derivada, para a segunda derivada e formulações para a fronteira da primeira e da segunda derivadas. Estas aproximações numéricas apresentam resultados aproximados aos dos métodos espectrais com a vantagem de poderem ser usadas para domínios e condições de fronteira mais gerais. Em seguida, foi feita uma análise dos erros dos esquemas numéricos onde observou-se que o esquema utilizado para a primeira derivada consegue apresentar exatamente mais de 50% das soluções e, para a segunda derivada, mais de 60%. Também foi comentado sobre o Método de Runge-Kutta de 3ª ordem, que foi usado para fazer o avanço no tempo.

No capítulo 5 (Resultados Numéricos) verificou-se que o esquema compacto em questão apresenta uma ótima performance, visto que nos forneceu resultados esperados fisicamente em todas as nossas simulações. Todos os resultados encontrados tiveram explicações respaldadas na teoria da linear e não linear de instabilidade hidrodinâmica e nos conceitos físicos mais gerais.

Como continuação futura do presente trabalho tem-se a intenção de:

- simular numericamente uma camada de mistura tridimensional para analisar o efeito da compressibilidade na turbulência tridimensional.
- estudar esquemas compactos de 8ª ordem que utilizam apenas três pontos (Mahesh, 1998).

Finalmente, como a maior parte dos escoamentos na natureza são turbulentos e a turbulência é uma das maiores dificuldades no desenvolvimento da modelagem matemática dos escoamentos, o problema aqui estudado tem bastante aplicação em diversas atividades da engenharia.

ANEXO 1

Cálculo do sistema de relações entre α e β e a , b e c :

Para obter a relação entre α e β e a , b e c consideremos a equação:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (6.1)$$

Desenvolvendo cada função derivada no lado esquerdo da equação (6.1) em série de Taylor obtemos:

$$\begin{aligned} f'_{i-2} &= f'_i - 2\Delta x f''_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f'''_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f^{(4)}_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f^{(5)}_i - \frac{(2\Delta x)^5}{5!} f^{(6)}_i + \\ &\quad + \frac{(2\Delta x)^6}{6!} f^{(7)}_i - o(\Delta x^7) \\ f'_{i-1} &= f'_i - \Delta x f''_i + \frac{\Delta x^2}{2!} f'''_i - \frac{\Delta x^3}{3!} f^{(4)}_i + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(5)}_i - \frac{\Delta x^5}{5!} f^{(6)}_i + \frac{\Delta x^6}{6!} f^{(7)}_i - o(\Delta x^7) \\ f'_{i+1} &= f'_i + \Delta x f''_i + \frac{\Delta x^2}{2!} f'''_i + \frac{\Delta x^3}{3!} f^{(4)}_i + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(5)}_i + \frac{\Delta x^5}{5!} f^{(6)}_i + \frac{\Delta x^6}{6!} f^{(7)}_i + o(\Delta x^7) \\ f'_{i+2} &= f'_i + 2\Delta x f''_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f'''_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f^{(4)}_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f^{(5)}_i + \frac{(2\Delta x)^5}{5!} f^{(6)}_i + \\ &\quad + \frac{(2\Delta x)^6}{6!} f^{(7)}_i + o(\Delta x^7) \end{aligned}$$

Agora, multiplicando em (6.2) f'_{i-2} por β , f'_{i-1} por α , f'_{i+1} por α e f'_{i+2} por β e somando:

$$A = \beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2}$$

obtemos o lado esquerdo da equação (6.1):

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2\alpha + 2\beta) f'_i + \frac{2}{2!} (\alpha + 2^2\beta) \Delta x^2 f'''_i + \frac{2}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \Delta x^4 f^{(5)}_i \\ &\quad + \frac{2}{6!} (\alpha + 2^6\beta) \Delta x^6 f^{(7)}_i + o(\Delta x^8) \quad (6.3) \end{aligned}$$

Da mesma forma com o lado direito da equação (6.1), desenvolvemos cada função conhecida de x em série de Taylor obtendo:

$$\begin{aligned}
 f_{i-3} &= f_i - 3\Delta x f'_i + \frac{(3\Delta x)^2}{2!} f''_i - \frac{(3\Delta x)^3}{3!} f'''_i + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} f_i^{(4)} - \frac{(3\Delta x)^5}{5!} f_i^{(5)} + \\
 &\quad + \frac{(3\Delta x)^6}{6!} f_i^{(6)} - o(\Delta x^7) \\
 f_{i-2} &= f_i - 2\Delta x f'_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f_i^{(4)} - \frac{(2\Delta x)^5}{5!} f_i^{(5)} + \\
 &\quad + \frac{(2\Delta x)^6}{6!} f_i^{(6)} - o(\Delta x^7) \\
 f_{i-1} &= f_i - \Delta x f'_i + \frac{\Delta x^2}{2!} f''_i - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''_i + \frac{\Delta x^4}{4!} f_i^{(4)} - \frac{\Delta x^5}{5!} f_i^{(5)} + \frac{\Delta x^6}{6!} f_i^{(6)} - o(\Delta x^7) \\
 f_{i+1} &= f_i + \Delta x f'_i + \frac{\Delta x^2}{2!} f''_i + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''_i + \frac{\Delta x^4}{4!} f_i^{(4)} + \frac{\Delta x^5}{5!} f_i^{(5)} + \frac{\Delta x^6}{6!} f_i^{(6)} + o(\Delta x^7) \\
 f_{i+2} &= f_i + 2\Delta x f'_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f_i^{(4)} + \frac{(2\Delta x)^5}{5!} f_i^{(5)} + \\
 &\quad + \frac{(2\Delta x)^6}{6!} f_i^{(6)} + o(\Delta x^7) \\
 f_{i+3} &= f_i + 3\Delta x f'_i + \frac{(3\Delta x)^2}{2!} f''_i + \frac{(3\Delta x)^3}{3!} f'''_i + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} f_i^{(4)} + \frac{(3\Delta x)^5}{5!} f_i^{(5)} + \\
 &\quad + \frac{(3\Delta x)^6}{6!} f_i^{(6)} + o(\Delta x^7)
 \end{aligned}$$

Multiplicando em (6.4) f_{i+3} e f_{i-3} por $\frac{c}{6h}$, f_{i+2} e f_{i-2} por $\frac{b}{4h}$ e f_{i+1} e f_{i-1} por $\frac{a}{2h}$ e fazendo:

$$B = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

obtemos a parte direita da equação (6.1):

$$\begin{aligned}
 B &= c \left[f'_i + \frac{(3\Delta x)^2}{3!} f'''_i + \frac{(3\Delta x)^4}{5!} f_i^{(5)} + \frac{(3\Delta x)^6}{7!} f_i^{(7)} + o(\Delta x^8) \right] + \\
 &\quad + b \left[f'_i + \frac{(2\Delta x)^2}{3!} f'''_i + \frac{(2\Delta x)^4}{5!} f_i^{(5)} + \frac{(2\Delta x)^6}{7!} f_i^{(7)} + o(\Delta x^8) \right] \\
 &\quad + a \left[f'_i + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''_i + \frac{\Delta x^4}{5!} f_i^{(5)} + \frac{\Delta x^6}{7!} f_i^{(7)} + o(\Delta x^8) \right] \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Comparando o lado esquerdo (6.3) com o lado direito (6.5) obtemos para aproximações de:

- 2ª ordem $\Rightarrow a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta$

- 4ª ordem $\Rightarrow a + 2^2b + 3^2c = 2\frac{3!}{2!}(\alpha + 2^2\beta)$

- 6ª ordem $\Rightarrow a + 2^4b + 3^4c = 2\frac{5!}{4!}(\alpha + 2^4\beta)$

- 8ª ordem $\Rightarrow a + 2^6b + 3^6c = 2\frac{7!}{6!}(\alpha + 2^6\beta)$

- 10ª ordem $\Rightarrow a + 2^8b + 3^8c = 2\frac{9!}{8!}(\alpha + 2^8\beta)$

ANEXO 2

Cálculo do erro de truncamento do esquema de sexta ordem:

O erro de truncamento de um esquema é, como vimos, obtido a partir dos primeiros termos das séries de Taylor não igualados nos lados esquerdo e direito da equação (6.1). Para o caso do esquema de sexta ordem, são os termos que contém Δx^6 . Assim, o erro de truncamento deste esquema será dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7!} (a + 2^6 b + 3^6 c) \Delta x^6 f_i^{(7)} - \frac{2}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) \Delta x^6 f_i^{(7)} = \\ & = \left[\frac{1}{7!} (a + 2^6 b + 3^6 c) - \frac{2}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) \right] \Delta x^6 f_i^{(7)} \end{aligned}$$

Sendo, $\alpha = 1/3$, $a = 14/9$, $b = 1/9$ e $c = 0$, assim o erro será:

$$\frac{4}{7!} \Delta x^6 f_i^{(7)}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BETCHOV, Robert & SZEWCZYK, Albin. *Stability of a Shear Layer between Parallel Streams*. The Physics of Fluids, vol. 6, n°10, pp. 1391-1396, 1963.
- [2] BRIEL, Jeffrey C. *A Hybrid Numerical Method for Three-Dimensional Spatially-Developing Free-Shear Flows*. Journal of Computational Physics, vol. 95, pp. 313-338, 1991.
- [3] BROWN, Garry L. & ROSHKO, Anatol. *On density effects and large structure in turbulent mixing layers*. J. Fluid Mech., vol. 64, part 4, pp. 775-816, 1974.
- [4] COMTE, Pierre, LESIEUR, Marcel & LAMBALLAIS, Eric. *Large and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in a 3-D temporal mixing layer*. Physics Fluids A, vol. 4, n°12, pp. 2761-2778, 1992.
- [5] DAUBE, O. *Resolution of the 2D Navier-Stokes Equations in Velocity-Vorticity Form by Means of an Influence Matrix Technics*, vol. 103, pp. 402-414, 1992.
- [6] DRAZIN, P.G. & REID, W.H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [7] FASEL, H. *Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations*. J. Fluid Mech., vol. 78, pp. 355-383, 1976.
- [8] FASEL, H. & KONZELMANN, U. *Non parallel stability of a flat-plate boundary layer using the complete Navier-Stokes equations*. J. Fluid Mech., vol. 221, pp. 311-347, 1990.

- [9] FLETCHER, C.A.J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics II: Specific Techniques for Different Flow Categories*. 2 ed.,(Springer Series in Computational Physics), 493 p., Berlin, 1991.
- [10] FRISCH, Uriel. *Turbulence: the legacy of Anatol Kolmogorov*. Cambridge University Press,1998.
- [11] GUJ, G. & STELLA, F. *A Vorticity-Velocity Method for the Numerical Solution of 3D Incompressible Flows*. Journal of Computational Physics, vol. 106, pp. 286-298, 1993.
- [12] LAMBALLAIS, E., MÉTAIS, O. & LESIEUR, M. *Dynamic Model for Large-Eddy Simulations of Turbulent Rotating Channel Flow*. Theoret. Comput. Fluids Dynamics, vol. 12, pp. 149-177, 1998.
- [13] LELE, S. K. *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*.Journal of ComputationalPhysics, vol. 103, pp. 16-42, 1992.
- [14] LESIEUR, Marcel. *Turbulence in fluids*. 3 rd, 515 p., london, 1997.
- [15] LESIEUR, Marcel, STAQUET, Chantal, ROY, Pascal Le & COMTE, Pierre. *The mixing layer and its coherence examined from the point of view of two-dimensional turbulence*. J. Fluid Mech., vol. 192, pp. 511-534, 1988.
- [16] MAHESH, Krishnan. *A Family or High Order Finite Difference Schemes with Good Spectral Resolution*. Journal of Computation Physics, vol. 145, pp. 332-358, 1998.
- [17] MICHALKE, A. *On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile*. J.F.M., pp. 543-556, 1964.
- [18] PAPAMOSCHOU, D. & ROSHKO, A. *The compressible turbulent shear layer: an experiment study*. J. Fluid Mech., vol.197, pp. 453-477, 1988.

- [19] RAGAB, Saad A. & SHEEN, S. *Large-Eddy Simulation of a Mixing Layer*. AIAA J. n°91-0233, pp. 1-16, 1991.
- [20] SANDHAM, N.D. & REYNOLDS, W.C. *Three-dimensional simulations of large edies in the compressible mixing layer*. J. Fluid Mech., vol. 224, pp. 133-158, 1990.
- [21] SCHLICHTING, H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, Inc, 1968.
- [22] SILVESTRINI, J.H., LAMBALLAIS, E. & LESIEUR, M. *Spectral-dynamic model for LES of free and wall shear flows*, International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 19, pp. 492-504, 1998.
- [23] SILVESTRINI, J.H. *Dynamics of coherent vortices in mixing layers using direct numerical and large-eddy simulations*, em: I Escola de Primavera, Rio de Janeiro.
- [24] SILVEIRA NETO, A. da. *Simulação das grandes escalas de escoamentos turbulentos*, em: I Escola de Transição à Turbulência, Rio de Janeiro.
- [25] SILVEIRA NETO, A. da. *Fundamentos da turbulência nos fluidos*, em: I Escola de Transição à Turbulência, Rio de Janeiro.
- [26] STRIKWERDA, John C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. ITP-International Thomson Publishing, 382p., New York, 1989.
- [27] VREMAN, Bert, GEURTS, Bernard & KUERTEN, Hans. *Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer*. J. Fluid Mech., vol. 339, pp. 357-390, 1997.
- [28] WINANT, C.D. & BROWAND, F.K. *Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number*. J.F.M., vol. 63, pp. 237-255, 1973.