

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Efeitos da inclusão de um termo de “harvesting”  
em modelagem de dinâmica populacional

por

Maria de Fátima Rodrigues Corrêa

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale,  
Orientadora

Porto Alegre, novembro de 2002.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Corrêa, Maria de Fátima Rodrigues

Efeitos da inclusão de um termo de "harvesting" em modelagem de dinâmica populacional / Maria de Fátima Rodrigues Corrêa.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2002.

xiii, 126 p. : il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

Orientadora: Varriale, Maria Cristina

Dissertação: Matemática Aplicada  
Modelo, Dissertação

# Efeitos da inclusão de um termo de “harvesting” em modelagem de dinâmica populacional

por

Maria de Fátima Rodrigues Corrêa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não Lineares e Ecologia

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Varriale,

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marat Rafikov,  
UNIJUI

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva  
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano  
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
12 de novembro de 2002.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan  
Coordenador

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	VI
LISTA DE TABELAS . . . . .	XI
RESUMO . . . . .	XII
ABSTRACT . . . . .	XIII
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 MODELOS POPULACIONAIS CONTÍNUOS PARA UMA ÚNICA ESPÉCIE . . . . .	6
2.1 Dois modelos contínuos para uma espécie, sem ceifa . . . . .	8
2.1.1 Modelo de Malthus: Pontos de equilíbrio e análise de estabilidade . . . . .	8
2.1.2 Modelo de Verhulst: Pontos de equilíbrio e análise de estabilidade . . . . .	9
2.2 Três modelos contínuos, para espécie única, com termo de ceifa (harvesting) . . . . .	12
2.2.1 Retirada com esforço constante - EX . . . . .	14
2.2.2 Taxa de retirada constante - $U_0$ . . . . .	20
2.2.3 Taxa de retirada com limite $B$ . . . . .	23
3 MODELOS POPULACIONAIS CONTÍNUOS DO TIPO PRESA-PREDADOR PARA DUAS ESPÉCIES INTERAGENTES . . . . .	30
3.1 Modelo de Lotka-Volterra . . . . .	31
3.2 Modelo com resposta funcional tipo Holling II e presa com crescimento logístico . . . . .	34
3.2.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico . . . . .	37
3.3 Acrescentando um termo de retirada EY ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II . . . . .	44
3.3.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico . . . . .	47
3.4 Acrescentando um termo de retirada $U_0$ ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II . . . . .	55

3.4.1	Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico . . . .	56
3.5	<b>Acrescentando um termo de retirada, limitada pelo parâmetro B, ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II</b> . . . . .	61
3.5.1	Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico . . . .	62
4	<b>GERENCIAMENTO ÓTIMO DE RECURSOS RENOVÁVEIS</b>	<b>73</b>
4.1	Conceitos econômicos . . . . .	74
4.2	A Função Produção . . . . .	76
4.3	Funcional Objetivo . . . . .	77
4.4	Equilíbrio bioeconômico: o modelo de Gordon . . . . .	79
4.5	Política de redução do esforço . . . . .	81
4.6	Política de Ceifa Ótima . . . . .	83
4.6.1	Método de Cálculo Variacional . . . . .	84
4.6.2	Controle Linear . . . . .	87
4.6.3	Teoria do Controle Ótimo . . . . .	92
4.6.3.1	Problema de Controle Unidimensional . . . . .	92
4.6.3.2	Problema de Controle Multidimensional . . . . .	97
4.6.4	Aplicação ao modelo de Schaefer . . . . .	99
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>107</b>
APÊNDICE A	<b>RESPOSTA FUNCIONAL</b> . . . . .	<b>112</b>
APÊNDICE B	<b>ANÁLISE NO PLANO DE FASE - SISTEMA BIDIMENSIONAL</b> . . . . .	<b>115</b>
APÊNDICE C	<b>EQUAÇÃO DE EULER</b> . . . . .	<b>121</b>
BIBLIOGRAFIA	. . . . .	124

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	<i>Um modelo simples de crescimento de biomassa de um estoque. (a) 1 ano; (b) 2 ano; (c) 3 ano; (d) 4 ano. . . . .</i>	2
Figura 2.1	<i>Gráfico de <math>\frac{dX}{dt} \times X</math> (equação(2.10)), para o modelo proposto por Malthus (1798), com <math>b &gt; d &gt; 0</math>. . . . .</i>	9
Figura 2.2	<i>Gráfico da solução (2.11), com <math>b &gt; d &gt; 0</math> mostrando um crescimento exponencial da população a partir de um valor <math>X_0 &gt; 0</math>. . . . .</i>	9
Figura 2.3	<i>Gráfico de <math>\frac{dX}{dt} \times X</math>, para o modelo logístico (Verhulst (1836)). . . . .</i>	10
Figura 2.4	<i>Gráfico da solução (2.16) com diferentes valores de <math>X_0</math>: (a) <math>0 &lt; X_0 &lt; \frac{K}{2}</math>, (b) <math>\frac{K}{2} &lt; X_0 &lt; K</math>, (c) <math>X_0 = K</math> e (d) <math>X_0 &gt; K</math>. . . . .</i>	12
Figura 2.5	<i>Gráfico de <math>f(X) \times X</math>, que corresponde à equação diferencial (2.19) para o modelo logístico com ceifa, onde em (a) <math>E &lt; r</math>, (b) <math>E = \frac{r}{2}</math> e (c) <math>E &gt; r</math>. . . . .</i>	15
Figura 2.6	<i>Determinação dos pontos de equilíbrio de (2.19), a partir da intersecção da curva <math>y = F(X)</math> com a reta <math>u = EX</math>, dados valores distintos para <math>E</math>. . . . .</i>	16
Figura 2.7	<i>Gráfico <math>Y(E) \times E</math> de (2.23); quando <math>E = \frac{r}{2}</math> temos a produção máxima sustentável <math>Y_M = \frac{rK}{4}</math>. . . . .</i>	17
Figura 2.8	<i>- Gráfico de <math>\frac{T_R(E)}{T_R(0)} \times E</math>, da equação (2.26). . . . .</i>	18
Figura 2.9	<i>Gráfico de <math>\frac{T_R(Y)}{T_R(0)} \times \frac{Y}{Y_M}</math> da equação (2.28). . . . .</i>	19
Figura 2.10	<i>Pontos de equilíbrio <math>X_1^*</math> e <math>X_2^*</math> para o modelo logístico com taxa de retirada constante <math>U_0</math> (equação (2.29)). . . . .</i>	20
Figura 2.11	<i>Gráfico de <math>Y(U_0) \times U_0</math> onde temos a produção máxima sustentável <math>Y_M = \frac{rK}{4}</math> em <math>U_0</math>. . . . .</i>	21
Figura 2.12	<i>Gráfico de <math>\frac{T_R(U_0)}{T_R(0)} \times \frac{U_0}{Y_M}</math> da equação (2.33). . . . .</i>	22
Figura 2.13	<i>Taxa de crescimento <math>f(X)</math> da equação diferencial (2.29) com produção <math>U_0</math>. . . . .</i>	23
Figura 2.14	<i>Gráfico de <math>\frac{BX^2}{N^2+X^2}</math>, com <math>B</math> fixo e <math>N</math> variando (<math>N_1 &gt; N_2 &gt; N_3</math>). . . . .</i>	24
Figura 2.15	<i>As intersecções da reta com a curva, dadas por <math>f_1(s) = r_1(1 - \frac{s}{q_1})</math> e <math>f_2(s) = \frac{s}{1+s^2}</math>, respectivamente, nos fornecem os equilíbrios com <math>q_1 = 10</math> e <math>r_1</math> variando: (a) <math>r_1 = 0.3</math>, (b) <math>r_1 = 0.5</math>, (c) <math>r_1 = 0.7</math>, (d) <math>r_1 = 0.383971</math> e (e) <math>r_1 = 0.559525</math> . . . . .</i>	26

Figura 2.16	(1) Neste gráfico a curva central mostra três pontos de equilíbrio além de $s^* = 0$ com valores de parâmetros $q_1 = 10$ e $r_1 = 0.5$ ; (2) Para $q_1 = 10$ , as curvas (d) com $r_1 = 0.383971$ e (e) com $r_1 = 0.559525$ mostram dois pontos de equilíbrio além de $s^* = 0$ .	26
Figura 2.17	Domínio dos parâmetros $r_1$ e $q_1$ para pontos de equilíbrio positivos. A curva é dada parametricamente pela equação (2.40), para $a > 1$ .	27
Figura 3.1	Trajectoria no plano de fase $uv$	33
Figura 3.2	Esquema das direções e pontos de equilíbrio no plano de fase.	36
Figura 3.3	Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.11), com os valores de parâmetros dados em (3.13); a reta paralela ao eixo $y$ satisfaz $\frac{dy}{dt} = 0$ e a parábola satisfaz $\frac{dx}{dt} = 0$ .	38
Figura 3.4	Ponto de sela -Plano de fase para o sistema (3.15) próximo ao equilíbrio $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).	39
Figura 3.5	Ponto de sela -Plano de fase do sistema (3.15) próximo ao equilíbrio $(x_2^*, y_2^*) = (1, 0)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).	40
Figura 3.6	Espiral instável -Plano de fase do sistema (3.15) próximo ao equilíbrio $(x_3^*, y_3^*)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).	42
Figura 3.7	Gráficos do sistema (3.11): (a) e (b) mostram a evolução das populações $x$ e $y$ no tempo e (c) uma trajetória no plano de fase de $x \times y$ com $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ , para os valores de parâmetros dados em (3.13).	43
Figura 3.8	Ciclo limite formado em torno do ponto de equilíbrio $(x_3^*, y_3^*)$ com CI:(a) $x(0) = 1, y(0) = 1$ e (b) $x(0) = 0.1, y(0) = 0.7$ e com valores de parâmetros dados em (3.13).	44
Figura 3.9	Soluções do sistema (3.24), com parâmetros dados em (3.13), onde (a) $y \times t$ , (b) $x \times t$ , (c) $y \times x$ . Valores de $\alpha_1$ em cada curva: (1) $\alpha_1 = 0.25$ ; (2) $\alpha_1 = 0.3$ ; (3) $\alpha_1 = 0.35$ ; (4) $\alpha_1 = 0.4$ ; (5) $\alpha_1 = 0.45$ .	46
Figura 3.10	Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.24) no plano de fase com campo de direções onde os valores de parâmetros são dados em (3.13) e $\alpha_1 = 0.25$ .	47
Figura 3.11	Ponto de sela -Plano de fase do sistema (3.27) próximo ao equilíbrio $(x_1^*, y_1^*)$ , com valores de parâmetros dados em (3.13) e $\alpha_1 = 0.25$ .	49

Figura 3.12	<i>Ponto de sela - Plano de fase do sistema (3.27) próximos ao ponto de equilíbrio <math>(x_2^*, y_2^*)</math>, com os valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_1 = 0.25</math>.</i>	50
Figura 3.13	<i>Espiral estável - Plano de fase do sistema (3.27) próximos ao ponto de equilíbrio <math>(x_3^*, y_3^*)</math>, com os valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_1 = 0.25</math>.</i>	52
Figura 3.14	<i>Gráfico <math>PS \times \alpha_1</math> de (3.37) com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_1 = 0.25</math>. Para <math>\alpha_1 = 0.32</math> temos a produção máxima sustentável.</i>	53
Figura 3.15	<i>Solução do sistema (3.24), com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_1 = 0.25</math>: (a) população <math>x \times t</math>; (b) população <math>y \times t</math>.</i>	54
Figura 3.16	<i>Trajectoria do sistema (3.24) no plano de fase, que corresponde aos gráficos apresentados na figura 3.15.</i>	54
Figura 3.17	<i>Gráfico de <math>y \times t</math>, do sistema (3.40) com valores de parâmetros dados em (3.13), para os seguintes valores de <math>\alpha_2</math>: (a) <math>\alpha_2 = 0.059</math>, (b) <math>\alpha_2 = 0.06</math>, (c) <math>\alpha_2 = 0.061</math>, (d) <math>\alpha_2 = 0.0615</math>, (e) <math>\alpha_2 = 0.0616</math>.</i>	56
Figura 3.18	<i>Isóclinas de inclinação nula e pontos de equilíbrio do sistema (3.40), com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_2 = 0.06</math>.</i>	56
Figura 3.19	<i>Plano de fase do sistema (3.41) próximo ao ponto de equilíbrio <math>(x_1^*, y_1^*) = (0.94, 0.13)</math> com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_2 = 0.06</math> (ponto de sela).</i>	58
Figura 3.20	<i>Plano de fase do sistema (3.41) próximo ao ponto de equilíbrio <math>(x_2^*, y_2^*) = (0.17, 0.92)</math> com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_2 = 0.06</math> (espiral instável).</i>	59
Figura 3.21	<i>Gráficos da solução do sistema (3.40): (a) <math>x \times t</math> e (b) <math>y \times t</math>, com valores de parâmetros dados em (3.13) e <math>\alpha_2 = 0.06</math>.</i>	60
Figura 3.22	<i>(Ciclo limite) Plano de fase do sistema (3.40) com <math>(x(0), y(0)) = (1, 1)</math> e <math>(x(0), y(0)) = (0.12, 0.9)</math>. Os valores dos parâmetros são dados em (3.13) e <math>\alpha_2 = 0.06</math>.</i>	60
Figura 3.23	<i>Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.49).</i>	63
Figura 3.24	<i>Gráficos usados na determinação de: (a) <math>x_3^* \approx 0.44</math> e (b) <math>y_3^* \approx 0.84</math>; os valores de parâmetros são dados em (3.49).</i>	64

Figura 3.25	<i>Determinação de <math>x_3^*</math>, a partir da equação <math>f_1(x) = f_2(x)</math> dadas em (3.50) com <math>a_1 = 1.6</math>, <math>r = 1.4</math>, <math>d_1 = 0.15</math> e (a) <math>\beta = 10</math> e (1) <math>\alpha_3 = 3.5</math>; (2) <math>\alpha_3 = 2,9</math>; (3) <math>\alpha_3 = 2.5</math>; (4) <math>\alpha_3 = 2</math>; (b) <math>\alpha_3 = 2.5</math> e (1) <math>\beta = 6</math>; (2) <math>\beta = 9</math>; (3) <math>\beta = 12</math>; (4) <math>\beta = 15</math>. . . . .</i>	64
Figura 3.26	<i>Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao equilíbrio <math>(0,0)</math>, com valores de parâmetros dados em (3.49) (ponto de sela). . . . .</i>	66
Figura 3.27	<i>Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao equilíbrio <math>(1,0)</math> com valores de parâmetros dados em (3.49) (ponto de sela). . . . .</i>	67
Figura 3.28	<i>Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao ponto de equilíbrio <math>(x_3^*, y_3^*) = (0.44, 0.84)</math>, com valores de parâmetros dados em (3.49) (espiral estável). . . . .</i>	68
Figura 3.29	<i>Gráficos do sistema (3.48): (a) <math>x \times t</math>, (b) <math>y \times t</math> e (c) <math>y \times x</math>, com valores de parâmetros dados em (3.49). . . . .</i>	69
Figura 3.30	<i>Solução do sistema (3.48), gráficos: (a) <math>x \times t</math> e (b) <math>y \times t</math> com <math>\beta = 10</math> e <math>\alpha_3</math> variando: (1) <math>\alpha_3 = 2</math>, (2) <math>\alpha_3 = 2.2</math>, (3) <math>\alpha_3 = 2.4</math>, (4) <math>\alpha_3 = 2.66</math> e (5) <math>\alpha_3 = 2.67</math>. . . . .</i>	70
Figura 3.31	<i>Solução do sistema (3.48): (a) <math>x \times t</math> e (b) <math>y \times t</math> para <math>\alpha_3 = 2.5</math> e <math>\beta</math> variando de 8 a 12. . . . .</i>	71
Figura 4.1	<i>Determinação do esforço <math>e_\infty</math>, que corresponde ao equilíbrio bioeconômico de Gordon, para (a) <math>c &gt; pqK</math>, (b) <math>c &lt; pqK</math> e <math>e_\infty^{(b)} &lt; e_{MSY}</math>, (c) <math>c &lt; pqK</math> e <math>e_\infty^{(c)} &gt; e_{MSY}</math>. . . . .</i>	80
Figura 4.2	<i>Gráfico (<math>\\$ \times</math> Esforço) da regulamentação através do aumento de custos para pesca. As retas representam os custos <math>TC</math> e a curva, receitas <math>TR</math>. . . . .</i>	82
Figura 4.3	<i>Trajetória ótima <math>x = x(t)</math>. . . . .</i>	85
Figura 4.4	<i>Trajetória ótima (curva sólida) para um problema de controle linear. . . . .</i>	89
Figura 4.5	<i>Prova do teorema da aproximação mais rápida. . . . .</i>	91
Figura 4.6	<i>Caminho ótimo para <math>x(t)</math> (curva sólida). . . . .</i>	96
Figura 4.7	<i>Níveis ótimos de populações (adimensionais) <math>z_{\text{ótimo}}</math> como função de <math>z_\infty</math> para vários valores de <math>\gamma</math>. . . . .</i>	103
Figura 4.8	<i>Níveis ótimos de populações (adimensionais) <math>z_{\text{ótimo}}</math> como função da taxa de crescimento bioeconômico <math>\gamma</math> para vários valores de <math>z_\infty</math>. . . . .</i>	103

Figura 4.9	Gráfico da população ótima $x_{\text{ótimo}}$ , em função da taxa de desconto anual (a) hipoglosso (halibut) (b) baleia de barbatana (fin whale).	105
Figura 4.10	Gráfico da produção anual sustentável $Q_{\text{ótimo}}$ em função da taxa de desconto anual $\delta$ (a) hipoglosso (halibut) (b) baleia de barbatana (fin whale).	106
Figura A.1	Gráficos de: (a) resposta funcional tipo I - $R(X) = b$ ; (b) resposta $XR(X) = bX$ do predador $Y$ à densidade de presas $X$ , para a resposta funcional tipo I.	113
Figura A.2	Gráficos de: (a) resposta funcional tipo II - $R(X) = \frac{A}{X+B}$ ; (b) resposta do predador $XR(X) = \frac{AX}{X+B}$ à densidade de presas $X$ , para a resposta funcional tipo II.	114
Figura A.3	Gráficos de: (a) resposta funcional tipo II - $R(X) = A \frac{[1-e^{-aX}]}{X}$ ; (b) resposta do predador $XR(X) = A[1 - e^{-aX}]$ à densidade de presas $X$ , para a resposta funcional tipo II.	114
Figura A.4	Gráficos de: (a) resposta funcional tipo III - $R(X) = \frac{AX}{X^2+B^2}$ ; (b) resposta do predador $XR(X) = \frac{AX^2}{X^2+B^2}$ à densidade de presas $X$ , para a resposta funcional tipo III.	114
Figura B.1	Resumo mostrando como o $\text{tr}A$ e $\text{det}A$ determinam o tipo de singularidade no plano de fase.	120
Figura C.1	$C_0$ representa a curva ótima para $a \leq t \leq b$ e $C_\epsilon$ uma curva vizinha.	121

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Síntese da análise dos equilíbrios para o modelo de Schaefer, com esforço constante de pesca $E$ . . . . .	16
Tabela 2.2	Síntese da análise dos equilíbrios, para a equação logística de Verhulst, com retirada constante $U_0$ . . . . .	21
Tabela 2.3	Síntese da análise dos equilíbrios não nulos da equação (2.36), para cada uma das curvas traçadas nas figuras 2.15 e 2.16. . . .	28
Tabela 3.1	Estados assintóticos do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.13), mantendo fixo $\beta = 10$ e variando $\alpha_3$ . . . . .	70
Tabela 3.2	Estados assintóticos do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.13), mantendo fixo $\alpha_3 = 2.5$ e variando $\beta$ . . . . .	71
Tabela B.1	Propriedades da estabilidade linear de pontos de equilíbrio $(x^*, y^*)$ envolvidos no cálculo da matriz $A$ em (B.6). . . . .	119

## RESUMO

Este trabalho é o resultado do nosso interesse em estudar os princípios fundamentais que envolvem a questão do desenvolvimento sustentável, mais especificamente a questão do gerenciamento econômico ótimo de recursos biológicas renováveis. Modificamos modelos populacionais extremamente simples incluímos retirada contínua. Em relação à pesca, examinamos com maior detalhe o modelo de produção geral de Schaefer.

Calculamos e analisamos a estabilidade linear em cada ponto de equilíbrio dos sistemas com os quais trabalhamos. O comportamento dinâmico global é obtido pela integração numérica. A partir da modelagem de exploração de recursos biológicos, introduzimos o conceito de produção máxima sustentável (*MSY*), que é o objetivo de muitas agências de gerenciamento de recursos renováveis. Após observarmos a ineficiência da *MSY* por não incorporar os custos de exploração de recursos, estudamos o modelo bioeconômico de Gordon, e a definição de produção máxima econômica (*MEY*). Aprendemos da teoria econômica padrão o conceito de “desconto”, que reflete o valor do tempo, e então o problema dinâmico é formulado para determinar a função que maximize o valor presente descontado. Após uma breve discussão sobre o problema variacional linear e a teoria de controle, concluimos que, ao considerar os custos de exploração e o valor do tempo, a política de retirada ótima consiste na política de aproximação mais rápida (*MRAP*) ao nível do estoque de equilíbrio ótimo, ao qual corresponde a produção econômica ótima (*OEY*). Como casos especiais, observamos que se ambos os custos de exploração e a taxa de desconto forem nulos, então a *MSY* é ótima; e se a taxa de desconto for zero mas o custo de exploração for maior que zero, então a *MEY* é ótima. Finalmente, incluímos também um exemplo baseado no modelo de Schaefer, no qual podemos observar que o nível do estoque de equilíbrio ótimo pode ser muito sensível à taxa do desconto.

## ABSTRACT

We are interested in studying the fundamental principles underlying the problem of sustainable development, more specifically the economics of optimal management of biological renewable resources harvesting. We modify extremely simple population models to allow for continuous harvesting. Concerning fisheries, we examine in greater detail the Schaefer's general production model.

We calculate and develop the linear stability analysis for each equilibrium state of the systems we are concerned with. The global dynamic behavior is obtained by numerical integration. From the modeling of biological resource exploitation, we introduce the Maximum Sustainable Yield (MSY) concept, which is the objective of many resource management agencies. After realizing the failure of MSY to incorporate costs of resource exploitation, we study the bioeconomic Gordon's model and the definition of Maximum Economic Yield (MEY). We learn from standard economic theory the "discounting" concept, for reflecting the "value of time", and so the dynamic problem is formulated as to determine the function effort that maximizes the discounted present value. After a brief discussion about linear variational problem and control theory, we conclude that, when both exploitation costs and value of time are considered, the optimal harvest policy consists of the most rapid approach policy (MRAP) to the optimal equilibrium stock level, corresponding to the Optimal Economic Yield (OEY). As special cases, we observe that if both exploitation costs and the discount rate are zero, then MSY is optimal; and if the discount rate is zero but the costs are greater than zero, then MEY is optimal. Finally, we also include examples based on the Schaefer model, from which we can observe that the optimal equilibrium stock level can be quite sensitive to the rate of discount.

# 1 INTRODUÇÃO

Quantas toneladas de peixes podem ser pescadas neste ano, de um estoque particular, de modo que no ano seguinte exista uma quantidade de peixes suficiente que permita a pesca nas mesmas quantidades? A idéia central para a solução deste problema é a capacidade de se ter uma *produção sustentável*.

No caso da indústria pesqueira, a informação desejada é saber qual a quantidade máxima que pode ser pescada sem prejudicar a produção dos próximos anos. Pesquisadores da *University of Bath* (HAYWARD 1992) usaram um modelo não realístico com o qual auxiliam o entendimento de como um estoque pode crescer e decrescer em tamanho e como pode ser pescado sem danificar futuras produções. O estudo mostra também a relação entre tamanho de estoque, quantidade de esforço despendido para a pesca e produção sustentável. A figura 1.1 ilustra o modelo citado, mostrando de forma esquemática, o crescimento do estoque de uma espécie de peixe que vive durante 3 anos. O primeiro ano inicia com 2 peixes, um macho e uma fêmea, cada um com uma unidade de biomassa. No segundo ano, ambos crescem uma unidade de biomassa e produzem ovos fertilizados, o suficiente para recrutar (adicionar) 2 novos peixes à população, com uma unidade de biomassa cada um. O estoque tem agora 6 unidades de biomassa. Repetindo o processo, no terceiro ano, o estoque é de 14 unidades de biomassa. No quarto ano, os 2 peixes originais morrem após a terceira desova. Os peixes presentes no estoque crescem uma unidade de biomassa cada um e 8 novos recrutas são agregados a população. O total de biomassa agora é de 22 unidades. Foi observado que o tamanho do estoque em quatro anos depende:

- 1- do tamanho do estoque inicial ( $S$ );
- 2- do acréscimo de biomassa por crescimento dos peixes existentes ( $G$ );
- 3- do acréscimo de biomassa por recrutamento ( $R$ );
- 4- perda de biomassa por mortalidade ( $M$ ).

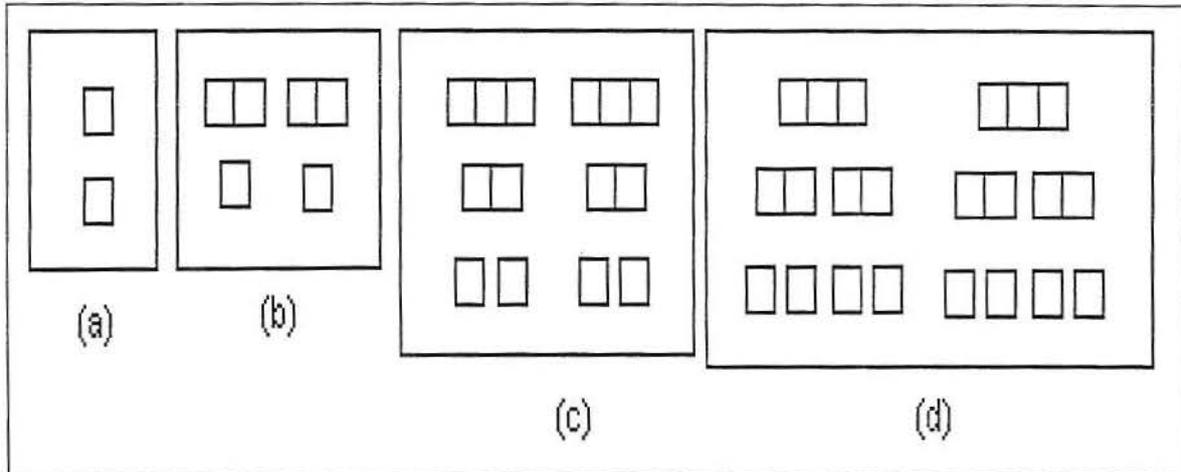


Figura 1.1: Um modelo simples de crescimento de biomassa de um estoque. (a) 1 ano; (b) 2 ano; (c) 3 ano; (d) 4 ano.

Ao combinar estes termos, é obtida uma importante equação:

$$S_n = S_{n-1} + G + R - M,$$

onde  $S_n$  é o tamanho do estoque atual e  $S_{n-1}$  é o tamanho do estoque no ano anterior. Por exemplo, a situação de 22 unidades de biomassa em (d) pode ser obtida a partir das 14 unidades em (c), como segue:  $14 + 6 + 8 - 6$ . Como o estoque de biomassa não pode crescer indefinidamente, existem fatores naturais que fazem a taxa de crescimento diminuir, atingindo um certo tamanho de equilíbrio ( $K$ ) no qual a quantidade permanece a mesma por anos ( $S_n = S_{n-1}$ ). Esta é uma situação de equilíbrio entre a morte natural e o crescimento e recrutamento de biomassas, isto é,  $G + R - M = 0$ .

A estimativa de parâmetros pode se dar pela obtenção de informações junto aos pescadores sobre quais os mecanismos usados para a pesca e quais os tamanhos das malhas das redes utilizadas para cada classe de peixes. Estes dados são, então, complementados por exames em embarcações pesqueiras onde pode-se, por amostragem, classificar os peixes por tamanho e idade. Tais amostras habilitam os biólogos a calcular a taxa de crescimento ( $G$ ) através da identificação da idade do peixe e a estimar a média de biomassa em cada grupo etário.

A mortalidade total pode ser estimada anotando o número de peixes em cada classe etária e sua variação ao longo dos anos. Assim, subtraindo a mortalidade por pesca da mortalidade total pode ser calculada a mortalidade natural ( $M$ ). O recrutamento ( $R$ ) pode ser estimado calculando o número de ovos que cada fêmea pode produzir, levando em consideração que a sobrevivência da larva depende de fatores ambientais tais como temperatura da água, disponibilidade de alimento e ação de predadores. As informações sobre a sobrevivência das larvas (ARINO, O., HBID, M.L. & LAPARRA 1998) fornecem dados inestimáveis aos biólogos no sentido de poder prever quando será boa ou não a pesca de determinada espécie, permitindo o gerenciamento e, principalmente, a alteração das estratégias de pesca para que os estoques sejam conservados em anos pobres e mais explorados em anos bons.

A diferença entre crescimento (nascimento e recrutamento) e morte natural representam a produção ( $Y$ ) excedente, que é a quantidade de peixes que se pode pescar sem danificar o estoque. Analisando este excedente, verifica-se que o mesmo cresce com o crescimento do tamanho do estoque. Entretanto, os estoques não mantêm a mesma taxa de crescimento sempre. Esta taxa pode decrescer em função de alterações no meio ambiente e o estoque passa a ter uma nova quantidade de equilíbrio. Para qualquer tamanho de estoque, onde a produção excedente é máxima, temos a máxima produção sustentável  $MSY$  (maximum sustainable yield).

O gerenciamento de recursos renováveis, onde tem sido aplicado, é baseado na  $MSY$ . Para a maioria das populações, o nível de  $MSY$  é encontrado entre 40% e 60% (CLARK 1990) da capacidade de suporte do meio ambiente.

O conceito de  $MSY$  tem beneficiado a exploração de recursos ignorando o lado dos custos. Qualquer indústria comercial pesa os benefícios juntamente com os custos de exploração. Existem fatos que nos mostram resultados que hoje são considerados ótimos do ponto de vista dos exploradores de recursos, mas podem estar longe do ótimo considerando o ponto de vista social. Com a intenção de corrigir esta falha, surgiu a tendência de trocar o conceito de  $MSY$  pelo conceito de

produção ótima sustentável *OSY* (optimum sustainable yield). A idéia fundamental do gerenciamento ótimo de recursos é baseada no critério de custo-benefício padrão de maximização do valor presente dos rendimentos econômicos líquidos (SILBERBERG 1990). Este critério é relevante para tomada de decisões tanto no âmbito público quanto no privado.

A crescente preocupação com a preservação dos recursos naturais tem levado pesquisadores ao estudo de “quanto” e “como” estes recursos podem ser explorados. Mais especificamente, na área da pesca, estudos sobre a coexistência das espécies nas cadeias alimentares ((KOOI, B.W., BOES, M.P. & KOOIJMAN 1999), (WANIEWSKI & JEDRUCH 1999), (DAI & TANG 1998)) que podem envolver variações do meio ambiente (BRAUMANN 1999), faixas etárias ((ZHANG, X., CHEM, L. & NEUMANN 2000), (SONG & CHEN 2001)), retardo no tempo, efeitos sazonais entre outros fatores que afetam o sistema, fazem parte da política de ceifa ótima, que estabelece quanto e de que modo pode-se pescar sem comprometer a existência da espécie retirada bem como de outras espécies que fazem parte da mesma cadeia alimentar.

O aspecto econômico é outro alvo de interesse entre os pesquisadores. As pesquisas na área de *controle ótimo de produção* ((ALVAREZ 1999), (WILLIAMS 1996), (BUSONI & MATUCCI 1997)) envolvem a dinâmica custo-preço (HANSON & RYAN 1998) na busca do equilíbrio bioeconômico (BHATTACHARYA & BEGUM 1996).

Nosso objetivo no presente trabalho é investigar os efeitos causados por diferentes tipos de pesca nas populações envolvidas, determinando os pontos de equilíbrio, a estabilidade ou instabilidade de cada ponto, o limite máximo de retirada que o sistema suporta sem que haja extinção da espécie pescada bem como o tempo de recuperação que a população necessita para atingir um novo estado de equilíbrio.

No capítulo 2, que inicia com uma revisão de modelos contínuos unidimensionais sem termos de pesca enfatizando os modelos de Malthus e de Verhulst, acrescentaremos à equação logística de Verhulst os termos de retirada:  $EX$  (esforço constante),  $U_0$  (cota constante) e  $\frac{BX^2}{N^2+X^2}$  (retirada com um limite dado por  $B$ ).

No capítulo 3, após revisar o modelo de Lotka-Volterra, estudaremos um modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II, primeiramente sem pesca e depois com a inclusão, na equação que representa o predador, dos mesmos termos acrescentados no capítulo 2. A cada termo incluído, encontraremos os pontos de equilíbrio, a produção sustentável, analisaremos a estabilidade e o tempo de recuperação da população retirada  $Y$  nos pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis.

No capítulo 4, apresentaremos alguns conceitos econômicos, a função produção e a política de ceifa ótima, onde abordaremos três técnicas diferentes para solução de problemas de maximização do valor presente, que são: método da aproximação formal, método do controle linear e teoria do controle ótimo. Faremos um breve estudo do aspecto econômico referente ao tipo de pesca que envolve esforço constante  $EX$ , quando acrescentado a equação logística de Verhulst. Utilizando a teoria do controle ótimo, deduziremos, para este modelo, uma expressão para a taxa de desconto contínua anual, através da maximização do valor presente.

## 2 MODELOS POPULACIONAIS CONTÍNUOS PARA UMA ÚNICA ESPÉCIE

Como na natureza as espécies interagem física e biologicamente, ecologistas têm composto ecossistemas em laboratórios, para organismos reais, tais como *Paramecium*, *Drosophila* e outros, com o objetivo de observar o comportamento individual de cada espécie (SMITH 1974). Tais modelos biológicos têm sido uma ponte entre modelos matemáticos e ecossistemas reais, fornecendo uma boa idéia dos efeitos que influenciam a dinâmica de tais populações. Sendo  $X(t)$  a população de uma espécie no tempo  $t$ , então a equação de conservação para a população tem a forma:

$$\frac{dX}{dt} = (\text{taxa de nascimentos}) - (\text{taxa de mortes}) + (\text{taxa de migrações}). \quad (2.1)$$

Genericamente, a dinâmica de uma população é dada por:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \quad (2.2)$$

onde  $F(X, t)$  é uma função de  $X$  e de  $t$ . Se  $F(X, t)$  não depender de  $t$ , então

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (2.3)$$

e, nesse caso, diz-se que se trata de um modelo autônomo.

Define-se *estado estacionário* ou *ponto de equilíbrio*, como a solução  $X^*$ , tal que  $\left. \frac{dX}{dt} \right|_{X=X^*} = 0$ , isto é,

$$f(X^*) = 0. \quad (2.4)$$

Isto significa que, em  $X = X^*$ , a taxa de variação da população em relação ao tempo é nula.

Para determinar se um ponto de equilíbrio é estável ou instável, tomaremos valores de  $X(t)$  próximos a  $X^*$  e consideraremos um pequeno afastamento  $\varphi(t)$ , negativo ou positivo, tal que

$$X(t) = X^* + \varphi(t). \quad (2.5)$$

Efetuada a expansão em série de Taylor de  $f(X^* + \varphi(t))$  em torno de  $X^*$ , a equação (2.3) torna-se:

$$\frac{d(X^* + \varphi(t))}{dt} = f(X^* + \varphi) \approx f(X^*) + \varphi f'(X^*) + O(\varphi^2). \quad (2.6)$$

Lembrando que  $f(X^*) = 0$  e considerando pequenos deslocamentos em torno de  $X^*$ , desprezamos os termos de ordem maior ou igual a dois em  $\varphi$ , donde obtemos genericamente, em torno de qualquer ponto de equilíbrio  $X^*$ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \varphi f'(X^*), \quad (2.7)$$

que tem como solução:

$$|\varphi(t)| = ce^{f'(X^*)t} \rightarrow |X(t) - X^*| = ce^{f'(X^*)t}, \quad (2.8)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Com a condição inicial,  $X(0) = X_0$ , temos  $c = |X_0 - X^*|$  e portanto,

$$|X(t) - X^*| = |X_0 - X^*|e^{f'(X^*)t}. \quad (2.9)$$

Da solução (2.9), podemos observar que se  $X_0 \neq X^*$ , o sinal de  $f'(X^*)$  determina se a distância  $|X(t) - X^*|$  cresce ou decresce com o passar do tempo  $t$ . Se  $f'(X^*) > 0$ , então  $|X(t) - X^*| \rightarrow \infty$ , significando que qualquer perturbação, afastando o sistema do equilíbrio, cresce em módulo quando  $t \rightarrow \infty$  e identificando, desta forma,  $X^*$  como um *ponto de equilíbrio instável*. Por outro lado, se  $f'(X^*) < 0$  então a distância  $|X(t) - X^*| \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é, qualquer perturbação imposta ao sistema, a partir do ponto de equilíbrio, nos leva de volta a ele e, assim,  $X^*$  é um *ponto de equilíbrio linearmente assintoticamente estável* (BOYCE & DIPRIMA 1999). Se  $X_0 = X^*$ , então  $|X(t) - X^*| = 0$  indicando que não existe variação da população em relação ao tempo.

Na solução (2.9), observamos que caso  $f'(X^*)$ , que tem dimensão de inverso de tempo, seja negativo, a escala de tempo da resposta da população a uma pequena perturbação, a partir de um valor de equilíbrio  $X^*$ , é da ordem de  $|f'(X^*)|^{-1}$ , por este motivo, para um problema descrito por (2.3),  $|f'(X^*)|^{-1}$  é denominado *tempo de recuperação* para o estado de equilíbrio  $X^*$ . O cálculo do tempo de recuperação só faz sentido quando o equilíbrio for estável.

## 2.1 Dois modelos contínuos para uma espécie, sem ceifa

### 2.1.1 Modelo de Malthus: Pontos de equilíbrio e análise de estabilidade

Nos modelos mais simples, desconsiderando a taxa de migração e sendo as taxas de nascimento  $bX(t)$  e mortalidade  $dX(t)$  proporcionais a  $X(t)$ , com  $b > 0$  e  $d > 0$ , temos de (2.1):

$$\frac{dX}{dt} = bX - dX, \quad (2.10)$$

que tem por solução:

$$X(t) = X_0 e^{(b-d)t}, \quad (2.11)$$

onde  $X(0) = X_0$  é a população inicial ( $t = 0$ ). Para  $b > d$  e  $X_0 \neq 0$ , visualizamos o modelo e sua solução nas figuras 2.1 e 2.2, respectivamente. Representando por colchetes as dimensões das variáveis e parâmetros temos:  $[b]=[d]=[t]^{-1}$  e  $[X]=[população]$ .

A taxa de crescimento *per capita*, neste caso, é uma constante, pois de (2.10) temos:

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = b - d. \quad (2.12)$$

O modelo da equação (2.10) proposto por Malthus (1798), citado em (MURRAY 1993) não representa um modelo realístico, pois pela solução (2.11), considerando  $X_0 \neq 0$  e  $b > d$ , a população cresce exponencialmente.

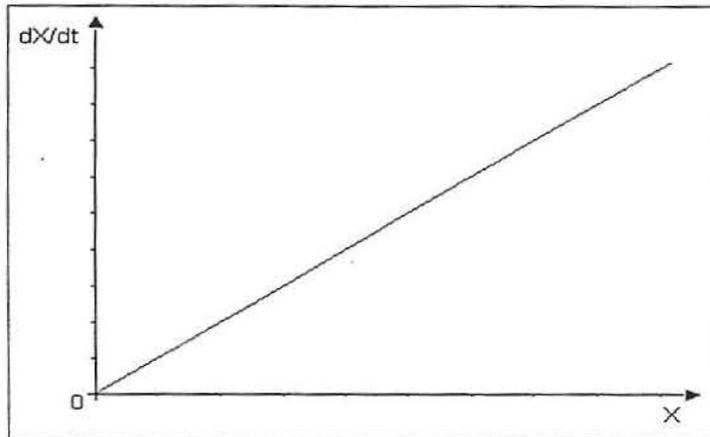


Figura 2.1: Gráfico de  $\frac{dX}{dt} \times X$  (equação (2.10)), para o modelo proposto por Malthus (1798), com  $b > d > 0$ .

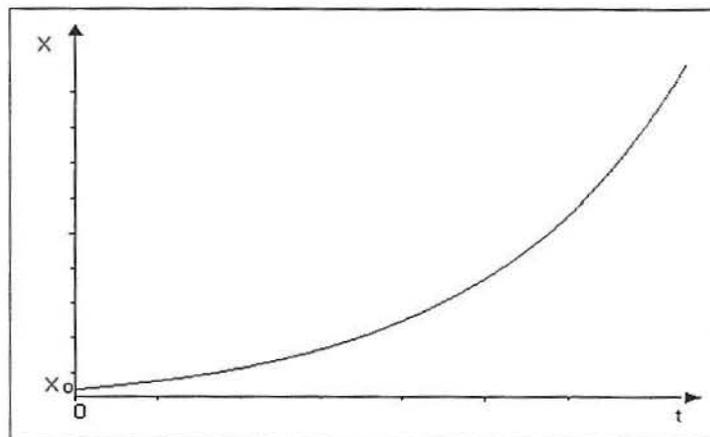


Figura 2.2: Gráfico da solução (2.11), com  $b > d > 0$  mostrando um crescimento exponencial da população a partir de um valor  $X_0 > 0$ .

A partir da condição  $\left. \frac{dX}{dt} \right|_{X=X^*} = 0$ , obtemos da equação (2.10) um único ponto de equilíbrio que é  $X^* = 0$ . Usando (2.9) com  $f(X) = (b - d)X$ , de onde decorre que  $f'(X^*) = b - d > 0$ , observa-se que este ponto será instável.

### 2.1.2 Modelo de Verhulst: Pontos de equilíbrio e análise de estabilidade

Visto que o modelo de Malthus não correspondia à realidade, quanto ao crescimento populacional, Verhulst sugeriu, em 1836, incluir um processo autoli-

mitante que deveria entrar em operação sempre que a população se tornasse muito grande. Ele propôs o seguinte modelo:

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right), \quad (2.13)$$

onde  $K > 0$ , denominada *capacidade de suporte* do ambiente determinada pelos recursos disponíveis (comida, espaço, predadores e outros), tem a mesma dimensão de  $X$  e  $r > 0$  é a *taxa de crescimento intrínseco per capita* da população, que tem por unidade  $[t]^{-1}$ . Esta equação é denominada *equação logística* e observamos que a *taxa de crescimento per capita*  $r(1 - \frac{X}{K})$ , é uma função de  $X$ .

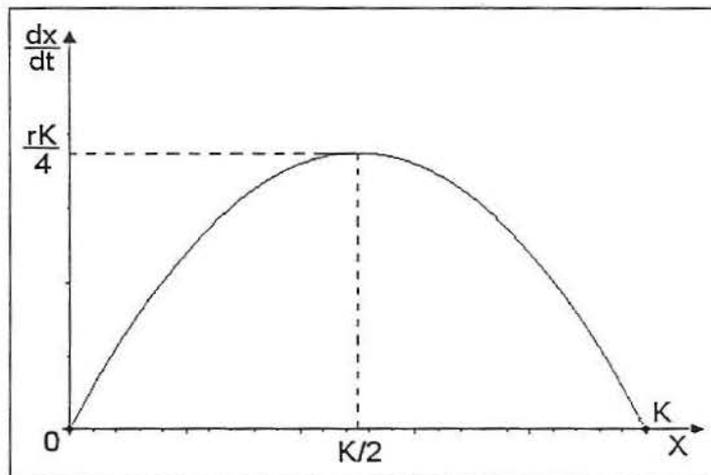


Figura 2.3: Gráfico de  $\frac{dX}{dt} \times X$ , para o modelo logístico (Verhulst (1836)).

Do gráfico de  $\frac{dX}{dt}$  em função  $X$  (figura 2.3), vemos que  $\frac{dX}{dt}$  cresce quando  $X$  cresce de 0 até  $\frac{K}{2}$  e decresce quando  $X$  cresce de  $\frac{K}{2}$  até  $K$ . O valor máximo de  $\frac{dX}{dt}$  ocorre quando  $X = \frac{K}{2}$ .

Igualando a zero o lado direito da equação (2.13), encontra-se os pontos de equilíbrio que são, neste caso,  $X^* = 0$  e  $X^* = K$  que podem ser visualizados na figura 2.3. Tem-se da equação (2.13):

$$f(X) = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right),$$

donde

$$f'(X^*) = r \left( 1 - \frac{2X^*}{K} \right). \quad (2.14)$$

Visto que  $f'(0) = r > 0$ , concluímos que  $X^* = 0$  é um ponto de equilíbrio instável. Por outro lado, visto que  $f'(K) = -r < 0$  tem-se que  $X^* = K$  é um ponto de equilíbrio linearmente assintoticamente estável, e a ele corresponde um tempo de recuperação

$$|f'(X^*)|^{-1} = \frac{1}{|f'(X^*)|} = \frac{1}{r}. \quad (2.15)$$

Fazendo  $X(0) = X_0$ , a solução da equação (2.13) é

$$X(t) = \frac{K X_0 e^{rt}}{K + X_0 (e^{rt} - 1)}, \quad (2.16)$$

de onde observa-se que quando  $t$  tende a infinito, para  $X_0 \neq 0$ , a população tende à capacidade de suporte, ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = K. \quad (2.17)$$

Conclui-se, portanto, que a capacidade de suporte  $K$  determina o tamanho da população no estado de equilíbrio estável, enquanto que a taxa de crescimento intrínseco  $r$  dá uma medida da taxa com a qual este equilíbrio é alcançado, isto é, é uma medida da dinâmica populacional.

O gráfico da solução (2.16) é apresentado na figura 2.4, para um determinado  $K$  e três valores diferentes de  $X_0 \neq 0$ . Vemos que, se  $X_0 > K$ , a curva que representa  $X(t)$ , decresce ( $\frac{dX}{dt} < 0$ ) monotonicamente aproximando-se de  $K$ ; se  $X_0 < K$ ,  $X(t)$  cresce ( $\frac{dX}{dt} > 0$ ) monotonicamente aproximando-se de  $K$ , existindo neste caso três situações a serem analisadas;

- (a) se  $0 < X_0 < \frac{K}{2}$ ,  $X(t)$  tem forma sigmoideal, isto é, a curva tem um ponto de inflexão em  $t = t_m = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{K - X_0}{X_0} \right) > 0$ , que corresponde a  $X(t_m) = \frac{K}{2}$ ,
- (b) se  $\frac{K}{2} < X_0 < K$  não se verifica ponto de inflexão para valores positivos de  $t$ ,
- (c) se  $X_0 = \frac{K}{2}$  o ponto de inflexão situa-se sobre o eixo  $X$ .

Este modelo de crescimento proposto por Verhulst, é o modelo não linear mais simples, mais usado e que mais variações recebe (LEVIN 1989).

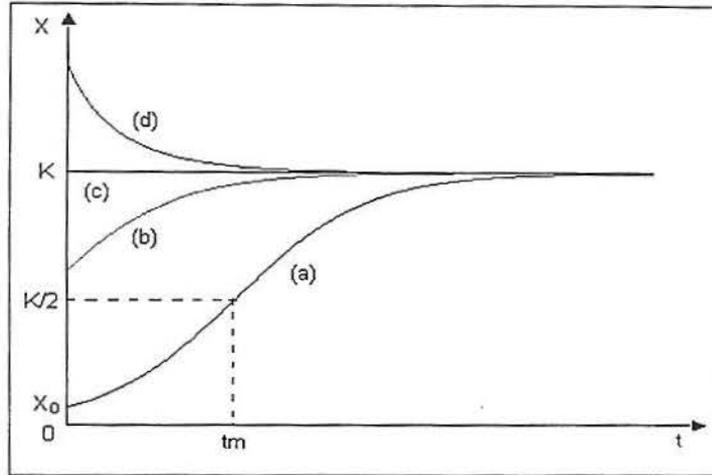


Figura 2.4: Gráfico da solução (2.16) com diferentes valores de  $X_0$ : (a)  $0 < X_0 < \frac{K}{2}$ , (b)  $\frac{K}{2} < X_0 < K$ , (c)  $X_0 = K$  e (d)  $X_0 > K$ .

## 2.2 Três modelos contínuos, para espécie única, com termo de ceifa (harvesting)

A partir desta seção, trataremos especificamente de populações de peixes. Portanto, o termo *ceifa* (harvesting) será, de agora em diante, usado como sinônimo de pesca ou retirada.

Representando por  $F(X)$  a função que fornece a taxa de crescimento natural da população, e  $u(X)$ , a taxa de remoção ou de pesca, que iremos supor ser função apenas da população existente, o modelo para exploração de recursos biológicos que usaremos tem a forma:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - u(X). \quad (2.18)$$

Neste modelo não estão sendo considerados efeitos sazonais, retardos no tempo, nem faixas etárias, e supõe uma distribuição espacialmente homogênea da população. De (2.18), observamos que se  $u(X) = F(X)$ , temos  $\frac{dX}{dt} = 0$ ; por isso, diz-se que  $F(X)$  é a *produção sustentável*, que pode ser pescada enquanto o nível da população é mantido constante.

O gerenciamento de recursos renováveis geralmente tem se baseado no conceito de *produção máxima sustentável*, abreviado por *MSY* (maximum sustainable yield) que considera o fato de que um estoque de recursos não pode ser excessivamente explorado, sem que haja uma perda de produtividade. A *MSY*, por sua vez, é baseada em um modelo de crescimento biológico que supõe que em uma população com o número de indivíduos abaixo da capacidade de suporte do meio ambiente ( $K$ ) exista uma produção excedente que pode ser eternamente retirada sem alterar o nível do estoque. Por outro lado, se o excedente não for retirado, ocorrerá um crescimento no nível de estoque, que acabará se aproximando da capacidade de suporte  $K$ , o que corresponde a uma produção excedente nula. Visto que a produção excedente é igual à *produção sustentável*, em cada nível populacional, segue que a *MSY* é alcançada no nível populacional onde o excedente é máximo, isto é, onde a taxa de crescimento da população é maximizada. Para  $F(X)$  do tipo logístico, a produção máxima é dada por  $\frac{rK}{4}$ . Quando a produção excede a *MSY* ocorre uma super exploração.

É necessário desenvolver uma estratégia que seja ecologicamente aceitável para explorar recursos renováveis como plantas, peixes ou animais, e é importante também conhecer qual a produção máxima sustentável que podemos ter com um mínimo de esforço despendido. As espécies em geral têm uma taxa de crescimento que depende do tamanho de sua população, que a mantém aproximadamente constante e igual à capacidade de suporte ( $K$ ). Em outras palavras, as taxas de crescimento e de mortalidade são quase iguais. A ceifa altera a taxa de mortalidade, e mostraremos que se ela não for excessiva, a população se adapta e tende a um novo ponto de equilíbrio  $X^* < K$ . O problema é como maximizar a produção sustentável ao determinar, em um modelo populacional, uma taxa de ceifa, que mantenha a população numa taxa de crescimento máximo.

Nas seções seguintes, analisaremos o efeito de três tipos distintos de retirada, para uma população cujo crescimento natural é do tipo logístico, isto é, em (2.18) substituiremos  $F(X)$  por  $rX(1 - \frac{X}{K})$ . Nesta equação,  $r$  e  $K$  são cons-

tantes positivas sendo  $K$  a capacidade de suporte do meio ambiente e  $r$  a taxa de crescimento intrínseca per capita da população, com unidades  $[t]^{-1}$  e [população], respectivamente.

### 2.2.1 Retirada com esforço constante - EX

Começaremos por incluir, na taxa de variação  $\frac{dX}{dt}$ , o termo de taxa de retirada  $u = EX$ , que é proporcional à própria população, e representa a quantidade pescada por unidade de tempo.  $E$  tem a mesma unidade que a taxa de crescimento intrínseco  $r$ , isto é,  $[E] = [t]^{-1}$ , donde poderíamos denominar  $E$  como uma taxa de mortalidade per capita devido à pesca. Nesta expressão, tem-se  $E = qe$  sendo  $e$  a quantidade de esforço cuja unidade é, por exemplo, [barcos] e  $q$  uma constante chamada *coeficiente de captura* com unidade [barco] $^{-1}$ [t] $^{-1}$ . A equação diferencial resultante é conhecida como modelo de *Schaefer* (MURRAY 1993), e possui a forma:

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - EX, \quad (2.19)$$

obtida a partir de (2.18), com

$$F(X) = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) \quad e \quad u(X) = EX. \quad (2.20)$$

De  $u = qeX$ , temos que para um esforço  $e$  fixo, a taxa de captura é proporcional à abundância do estoque. Também podemos escrever  $\frac{u}{e} = qX$ , donde vemos que a captura por unidade de esforço é proporcional à abundância de estoque.

### Pontos de equilíbrio, análise de estabilidade e aspecto dinâmico

Impondo na equação diferencial (2.19), a condição  $\frac{dX}{dt} \Big|_{X=X^*} = 0$ , obtém-se como ponto de equilíbrio, além de  $X^* = 0$ , um novo ponto

$$X_E^* = K \left(1 - \frac{E}{r}\right),$$

desde que  $E$  seja menor que  $r$  (caso contrário, teríamos  $X_E^* \leq 0$ ). Se o esforço para a pesca  $E$  for maior que a taxa de crescimento linear  $r$ , quando a população for baixa,

a espécie se extinguirá. Ou seja, se  $E \geq r$ , o único estado de equilíbrio realístico é  $X^* = 0$ . Na figura 2.5, traçamos de

$$f(X) = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - EX, \quad (2.21)$$

para três valores distintos de  $E$ .

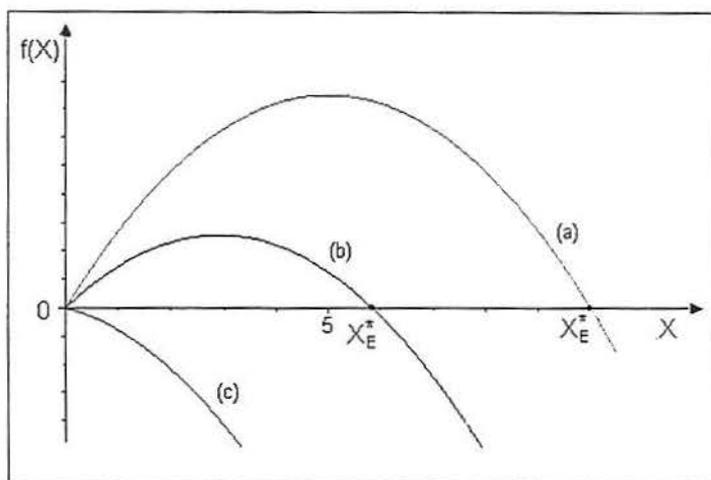


Figura 2.5: Gráfico de  $f(X) \times X$ , que corresponde à equação diferencial (2.19) para o modelo logístico com ceifa, onde em (a)  $E < r$ , (b)  $E = \frac{r}{2}$  e (c)  $E > r$ .

De (2.19) e (2.9) temos

$$f'(X^*) = r \left(1 - \frac{2X^*}{K}\right) - E. \quad (2.22)$$

Usando (2.22) juntamente com os equilíbrios existentes, dependendo do valor de  $E$ , construímos a seguinte tabela:

O sinal de  $f'$  em cada ponto de equilíbrio também pode ser verificado a partir do gráfico apresentado na figura 2.5, através da declividade no ponto.

O estado estacionário  $X_E^*$  tem população menor do que aquele sem termo de pesca ( $X^* = K$ ), e corresponde a uma quantidade pescada ou produção ( $Y$ ) igual a:

$$Y(E) = EX_E^* = EK \left(1 - \frac{E}{r}\right). \quad (2.23)$$

$E$	Equilíbrios	Estabilidade
Se $E < r$	$X^* = 0$ $X_E^* = K \left(1 - \frac{E}{r}\right)$	$f'(0) = r - E > 0 \Rightarrow$ instável $f'(X_E^*) = E - r < 0 \Rightarrow$ linearmente estável
Se $E = r$	$X^* = 0$	$f'(0) = r - E = 0 \Rightarrow$ neutralmente estável
Se $E > r$	$X^* = 0$	$f'(0) = r - E < 0 \Rightarrow$ linearmente estável

Tabela 2.1: Síntese da análise dos equilíbrios para o modelo de Schaefer, com esforço constante de pesca  $E$ .

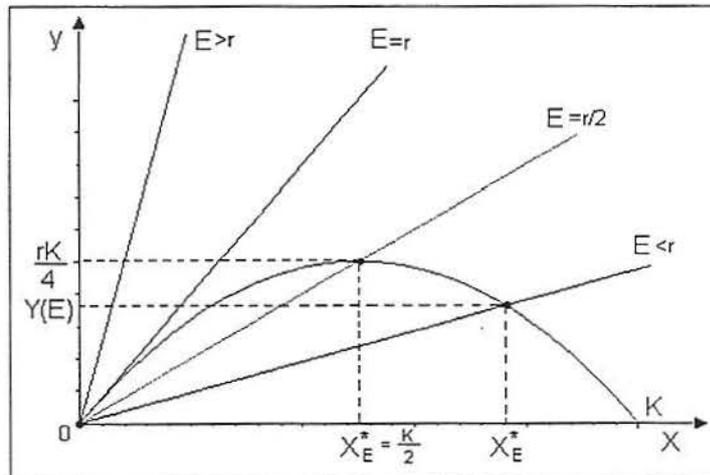


Figura 2.6: Determinação dos pontos de equilíbrio de (2.19), a partir da intersecção da curva  $y = F(X)$  com a reta  $u = EX$ , dados valores distintos para  $E$ .

Uma outra forma de determinarmos os pontos de equilíbrio é ilustrado na figura 2.6, onde podemos ver a intersecção da reta que representa o termo de pesca  $EX$  com a função  $F(X)$  (equação 2.20). Estas intersecções são os pontos de equilíbrio, onde a quantidade pescada não altera o tamanho da população. Podemos observar que para  $E \geq r$  existe somente um ponto de equilíbrio, chamado *trivial*, que é  $X^* = 0$ . Para qualquer outro valor de  $E$  que seja menor que  $r$ , sempre haverá dois pontos de equilíbrio, sendo um deles o trivial. Quando  $E = \frac{r}{2}$  o outro equilíbrio é  $X^* = \frac{K}{2}$  no qual mostraremos a seguir que temos a produção máxima sustentável.

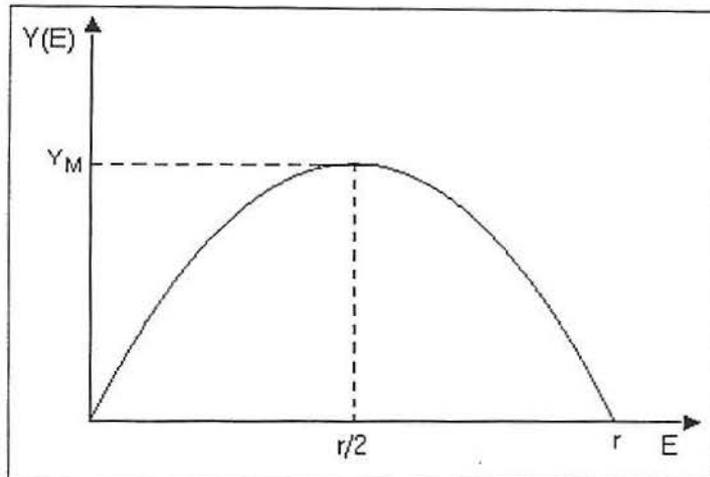


Figura 2.7: Gráfico  $Y(E) \times E$  de (2.23); quando  $E = \frac{r}{2}$  temos a produção máxima sustentável  $Y_M = \frac{rK}{4}$ .

Na figura 2.7, apresentamos a curva produção sustentável  $Y(E)$  versus esforço  $E$ , onde observamos que em  $E = \frac{r}{2}$  temos a produção máxima sustentável ( $Y_M$ ), sem prejuízo para a espécie, cujo valor pode ser obtido a partir da equação (2.23), como segue:

$$Y_M = Y(E)|_{E=\frac{r}{2}} = \frac{rK}{4}$$

que corresponde a

$$X_E^*|_{Y_M} = X_{E=\frac{r}{2}}^* = \frac{K}{2}. \quad (2.24)$$

Outro aspecto interessante de se observar é a suavidade da relação entre o esforço e a produção sustentável no modelo de Schaefer. Com níveis crescentes de esforço, a produção sustentável sobe suavemente até um nível máximo em  $E = \frac{r}{2}$  e então declina igualmente suavemente até zero em  $E = r$ . Esta relação suave é altamente desejável em pesca, visto que implica em métodos incrementais que podem ser bem sucedidos quando aplicados em políticas de gerenciamento.

O tempo de recuperação (ver subseção 2.1.2) correspondente a  $X_E^*$ , para  $E < r$ , é dado por

$$|f'(X_E^*)|^{-1} = \frac{1}{r - E}. \quad (2.25)$$

No caso onde não existe retirada, ou seja  $E = 0$ , o tempo de recuperação  $T_R$  é da ordem  $O(\frac{1}{r})$  que é a escala de tempo de crescimento reprodutivo, o que está de acordo com o que obtivemos em (2.15). Se  $E \neq 0$  e  $0 < E < r$ , temos que o tempo

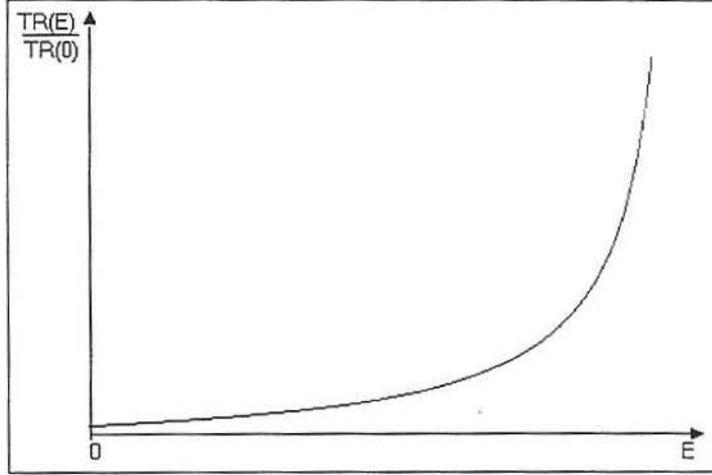


Figura 2.8: - Gráfico de  $\frac{T_R(E)}{T_R(0)} \times E$ , da equação (2.26).

de recuperação do equilíbrio  $X_E^*$ , numa situação de pesca é

$$T_R(E) = O\left(\frac{1}{r-E}\right),$$

e a razão entre  $T_R(E)$  e  $T_R(0)$  é de

$$\frac{T_R(E)}{T_R(0)} = O\left(\frac{\frac{1}{r-E}}{\frac{1}{r}}\right) = O\left(\frac{1}{1-\frac{E}{r}}\right). \quad (2.26)$$

Assim, para um  $r$  fixo, como ilustrado na figura 2.8, a razão entre o tempo de recuperação com retirada  $T_R(E)$  e sem retirada  $T_R(0)$  aumenta, à medida que  $E$  aumenta. Para  $E = \frac{r}{2}$ , que corresponde à *produção máxima sustentável*  $Y_M$  (ver figura 2.7) obtém-se de (2.26)  $T_R(E = \frac{r}{2}) = 2T_R(0)$ .

Visto que o que se mede é a produção  $Y$ , é de interesse obter uma expressão para o tempo de recuperação, em função de  $Y$ . Para isso, resolvemos a equação (2.23) para  $E$  em termos de  $Y$ :

$$E = \frac{r}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Y}{Kr}} \right), \quad (2.27)$$

e que substituído em (2.26) fornece:

$$\frac{T_R(Y)}{T_R(0)} = O \left( \frac{2}{1 \pm \left(1 - \frac{Y}{Y_M}\right)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (2.28)$$

O lado direito da equação acima, está representado na figura 2.9 onde os ramos  $L+$  e  $L-$  são obtidos das raízes positiva e negativa, respectivamente.

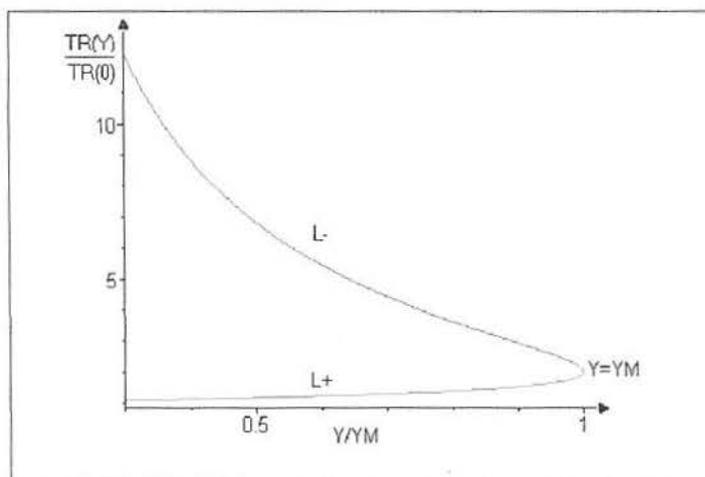


Figura 2.9: Gráfico de  $\frac{T_R(Y)}{T_R(0)} \times \frac{Y}{Y_M}$  da equação (2.28).

Quando  $E$  aumenta até  $E = \frac{r}{2}$  onde  $Y = Y_M$  (ver figura 2.7), estaremos em  $L+$ , e se continuarmos aumentando  $E$  passaremos para o ramo  $L-$ . Mostraremos a seguir que ficar no ramo  $L+$  é vantajoso, enquanto que no ramo  $L-$  é desastroso. Suponhamos iniciar uma pesca com um esforço ( $E$ ) pequeno, a população de peixes no equilíbrio  $X^* = K(1 - \frac{E}{r})$ , está próxima a  $K$  e  $X^* > \frac{K}{2}$  que é a população de equilíbrio para a máxima produção  $Y_M$ . Como inicialmente a razão entre os tempos de recuperação  $\frac{T_R(E)}{T_R(0)}$  é aproximadamente 1, aumentando  $E$  e conseqüentemente a produção, estaremos no ramo  $L+$  em direção à produção máxima ( $Y_M$ ), com  $X^*$  decrescendo para  $\frac{K}{2}$ . Neste ramo, a população continua aumentando, só que em quantidades menores. Quando chegamos ao ponto onde  $\frac{Y}{Y_M} = 1$  (ver figura 2.9), estaremos com  $X^* = \frac{K}{2}$  e  $E = \frac{r}{2}$ . Se continuarmos aumentando  $E$ , teremos  $X^* < \frac{K}{2}$ , o tempo de recuperação é também aumentado só que com um decréscimo da produção; estaremos então no ramo  $L-$ , que poderá levar a população à extinção,



Obtemos a estabilidade ou instabilidade dos pontos de equilíbrio substituindo  $X_1^*$  e  $X_2^*$  na equação

$$f'(X^*) = r \left( 1 - \frac{2X^*}{K} \right). \quad (2.31)$$

Usando (2.31) juntamente com os equilíbrios (2.30), construímos a seguinte tabela:

$U_0$	Equilíbrios	Estabilidade
Se $U_0 < \frac{Kr}{4}$	$X_1^* = \frac{K}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4U_0}{Kr}} \right)$ $X_2^* = \frac{K}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4U_0}{Kr}} \right)$	$f'(X_1^*) > 0 \Rightarrow$ instável $f'(X_2^*) < 0 \Rightarrow$ linearmente estável
Se $U_0 = \frac{Kr}{4}$	$X^* = \frac{K}{2}$	$f'(X^*) = 0 \Rightarrow$ semi-estável
Se $U_0 > \frac{Kr}{4}$	não existe equilíbrio	

Tabela 2.2: Síntese da análise dos equilíbrios, para a equação logística de Verhulst, com retirada constante  $U_0$ .

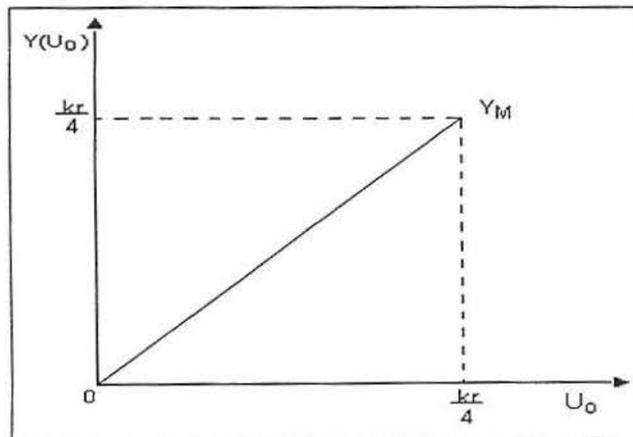


Figura 2.11: Gráfico de  $Y(U_0) \times U_0$  onde temos a produção máxima sustentável -  $Y_M = \frac{rK}{4}$  em  $U_0$ .

Ainda, das figuras 2.10 e 2.13 temos que aumentando  $U_0$ , os equilíbrios  $X_1^*$  e  $X_2^*$  se aproximam um do outro, mais rapidamente. Quando o ponto estável  $X_2^*$  está muito próximo de  $X_1^*$ , uma pequena perturbação em  $X_2^*$  pode levar a população  $X$  para valores  $X < X_1^*$ , fazendo com que  $X \rightarrow 0$  em um tempo finito. Em  $X_1^* = X_2^*$  temos a produção máxima sustentável  $Y_M$  que apresentamos na figura 2.11, no gráfico de  $Y(U_0) \times U_0$ .

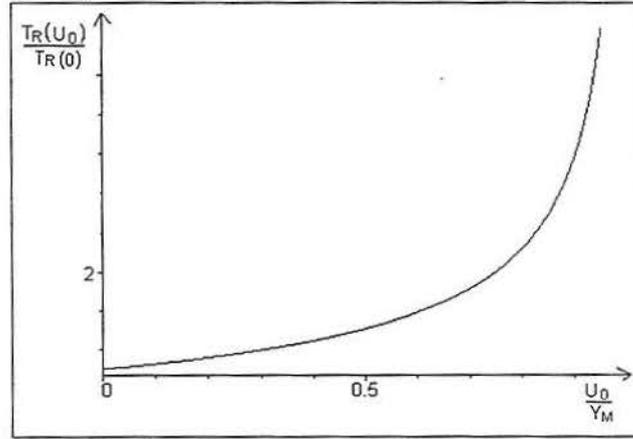


Figura 2.12: Gráfico de  $\frac{T_R(U_0)}{T_R(0)} \times \frac{U_0}{Y_M}$  da equação (2.33).

O tempo de recuperação de uma população no ponto de equilíbrio  $X_2^*$  dado em (2.30), com uma cota de retirada fixa  $0 < U_0 < Y_M$  é dado por

$$T_R(U_0) = \frac{1}{r \left(1 - \frac{U_0}{Y_M}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.32)$$

Então, a razão entre  $T_R(U_0)$  e  $T_R(0)$  é da ordem de

$$\frac{T_R(U_0)}{T_R(0)} = O\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{U_0}{Y_M}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{com} \quad Y_M = \frac{Kr}{4}. \quad (2.33)$$

Logo, para  $r$  e  $K$  fixos, aumentando  $U_0$  aumenta o tempo de recuperação (figura 2.12) e

$$\frac{T_R(U_0)}{T_R(0)} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad U_0 \rightarrow Y_M.$$

Este modelo é muito mais sensível a qualquer perturbação que o modelo anterior,

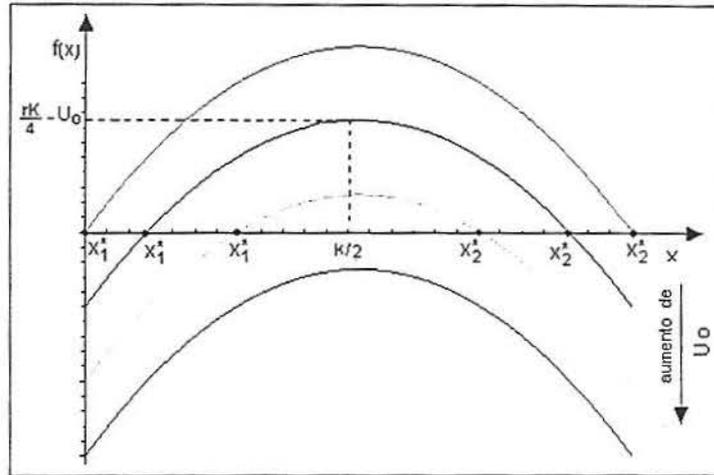


Figura 2.13: Taxa de crescimento  $f(X)$  da equação diferencial (2.29) com produção  $U_0$ .

não sendo por isso, uma boa estratégia de produção.

### 2.2.3 Taxa de retirada com limite $B$

O modelo descrito a seguir, foi proposto por Ludwig (1978) quando estudava o desfolhamento do *abeto* (por larvas) que é um tipo de árvore resinosa, da família das *pináceas* (conhecida como árvore de natal), muito comum no Canadá (LUDWIG, D., JONES, D.D. & HOLLING 1978). Utilizaremos este modelo em uma população de peixes. A dinâmica de  $X(t)$  é governada pela equação

$$\frac{dX}{dt} = rX \left( 1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{BX^2}{N^2 + X^2}, \quad (2.34)$$

onde  $B$  é a quantidade limite de retirada e, visto que  $u(X = N) = \frac{B}{2}$ ,  $N$  é o valor do nível populacional de presas quando a taxa de retirada da população é a metade de seu valor máximo, sendo  $B$  e  $N$  constantes positivas com dimensões [população]  $\times$  [ $t^{-1}$ ] e [população], respectivamente.

Nota-se na figura 2.14, pela forma sigmoidal da curva, que o ponto de inflexão é um valor limite no qual se a população  $X$  estiver abaixo deste ponto a retirada é pequena e a curva cresce lentamente até o limite  $B$  enquanto que se  $X$

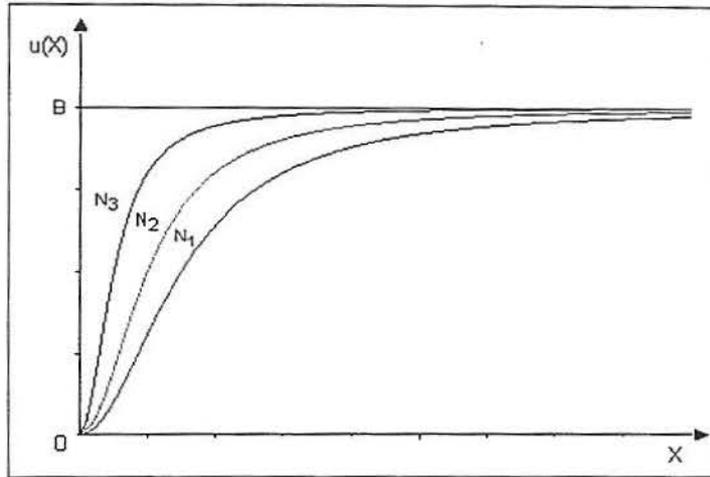


Figura 2.14: Gráfico de  $\frac{BX^2}{N^2+X^2}$ , com  $B$  fixo e  $N$  variando ( $N_1 > N_2 > N_3$ ).

estiver acima, a retirada é grande e a curva se aproxima rapidamente de  $B$ . Portanto, quanto menor o valor de  $N$  mais rapidamente o limite  $B$  é atingido.

A *adimensionalização* além de proporcionar a redução do número de parâmetros, tem a vantagem de salientar os parâmetros relevantes do problema. Por exemplo, dizer que uma população  $X$  é pequena ou grande não tem significado em número absoluto de indivíduos; por outro lado, a razão  $\frac{X}{K}$  entre uma população e a capacidade de suporte do meio ambiente é um número adimensional que tem o significado desejado. Frequentemente, existe mais de uma possibilidade de adimensionalização de um mesmo modelo; a escolha dependerá do aspecto que se queira focalizar. O primeiro passo para se efetuar uma adimensionalização é investigar as unidades de todas as quantidades envolvidas no modelo em questão.

Para as unidades dos parâmetros da equação (2.34) temos:

$$[K] = [N] = [X], \quad [r] = [t]^{-1} \quad e \quad [B] = [X] \times [t]^{-1},$$

de onde resulta que pode ser adimensionalizado através da definição da variável dependente  $s$  e variável independente  $\tau$ , de acordo com:

$$s \equiv \frac{X}{N} \quad e \quad \tau \equiv \frac{Bt}{N}. \quad (2.35)$$

Dessa forma, a partir de (2.34) obtemos

$$\frac{ds}{d\tau} = rs \left( 1 - \frac{s}{q_1} \right) - \frac{s^2}{1+s^2} = f(s; r, q_1), \quad (2.36)$$

que envolve apenas dois parâmetros adimensionais definidos por:

$$r_1 \equiv \frac{Nr}{B}, \quad q_1 \equiv \frac{K}{N}. \quad (2.37)$$

### Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico

Os pontos de equilíbrio são solução de

$$f(s; r_1, q_1) = 0, \quad r_1 s \left( 1 - \frac{s}{q_1} \right) = \frac{s^2}{1+s^2}. \quad (2.38)$$

Um dos pontos de equilíbrio  $s = 0$  é fácil de ser identificado em (2.38), os outros, se existirem, são soluções de

$$r_1 \left( 1 - \frac{s}{q_1} \right) = \frac{s}{1+s^2}. \quad (2.39)$$

É conveniente neste caso, determinarmos as soluções de (2.39) graficamente (LUDWIG, D., ARONSON, D.G. & WEINBERGER 1979), como mostram as figuras 2.15 e 2.16.

As linhas retas nos gráficos representam o lado esquerdo de (2.39), com um  $q_1$  fixo e três valores diferentes para  $r_1$  e a curva representa o lado direito da mesma equação ( $r_1$  e  $q_1$  serão apresentados a seguir, em (2.40)). A cada intersecção entre a reta e a curva, temos uma solução que representa ponto de equilíbrio.

As fronteiras da cúspide, figura 2.17, são obtidas sob forma paramétrica, de acordo com (MURRAY 1993):

$$q_1 = \frac{2a^3}{a^2 - 1} \quad e \quad r_1 = \frac{2a^3}{(1 + a^2)^2}, \quad \text{para } a > 1, \quad (2.40)$$

sendo que o ponto  $P$  corresponde a  $a = \sqrt{3}$ .

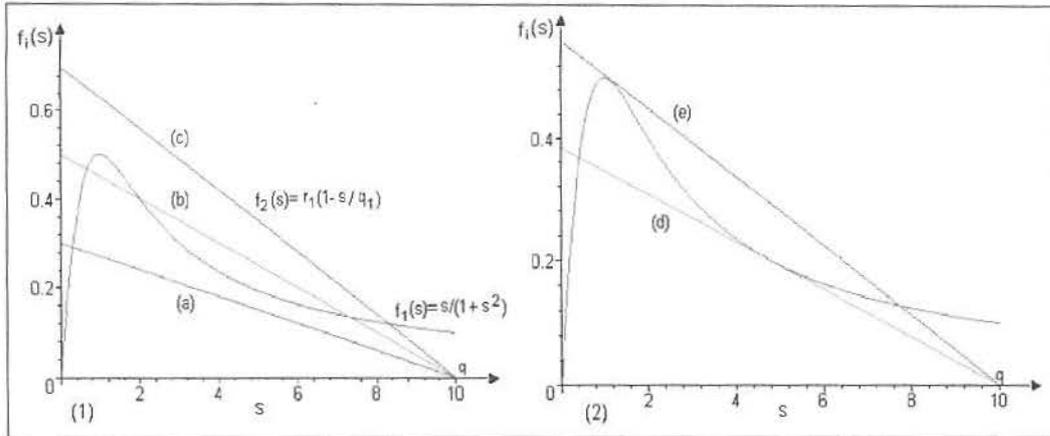


Figura 2.15: As intersecções da reta com a curva, dadas por  $f_1(s) = r_1(1 - \frac{s}{q_1})$  e  $f_2(s) = \frac{s}{1+s^2}$ , respectivamente, nos fornecem os equilíbrios com  $q_1 = 10$  e  $r_1$  variando: (a)  $r_1 = 0.3$ , (b)  $r_1 = 0.5$ , (c)  $r_1 = 0.7$ , (d)  $r_1 = 0.383971$  e (e)  $r_1 = 0.559525$

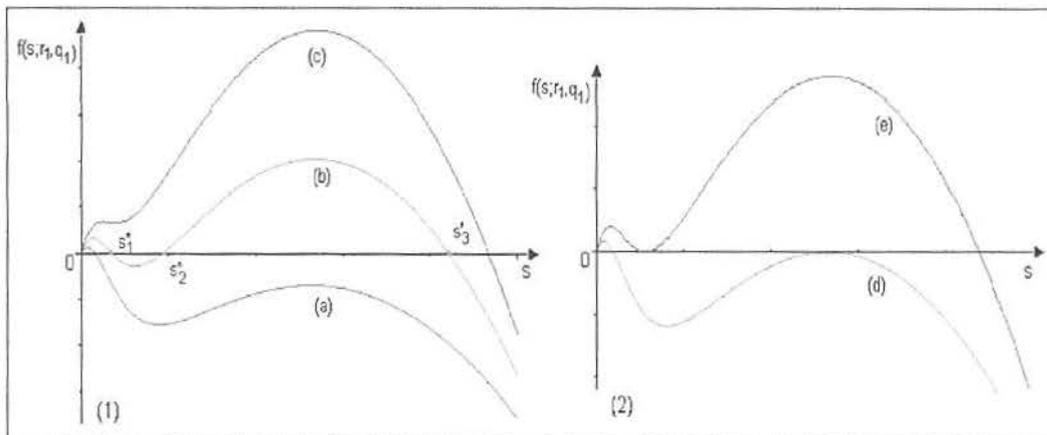


Figura 2.16: (1) Neste gráfico a curva central mostra três pontos de equilíbrio além de  $s^* = 0$  com valores de parâmetros  $q_1 = 10$  e  $r_1 = 0.5$ ; (2) Para  $q_1 = 10$ , as curvas (d) com  $r_1 = 0.383971$  e (e) com  $r_1 = 0.559525$  mostram dois pontos de equilíbrio além de  $s^* = 0$ .

Existe um intervalo nos domínios dos parâmetros  $q_1$  e  $r_1$  onde encontramos três pontos de equilíbrio além de  $s^* = 0$ , como podemos ver nas figuras 2.15(2) e 2.16(2) e representado pela região (2) da figura 2.17. Para os valores de  $q_1 = 10$  fixo,  $r_1 = 0.383971$  e  $r_1 = 0.559525$  onde encontramos dois pontos de equilíbrio (figuras 2.15(2) e 2.16(2)), temos os pontos sobre a curva da figura 2.17 e

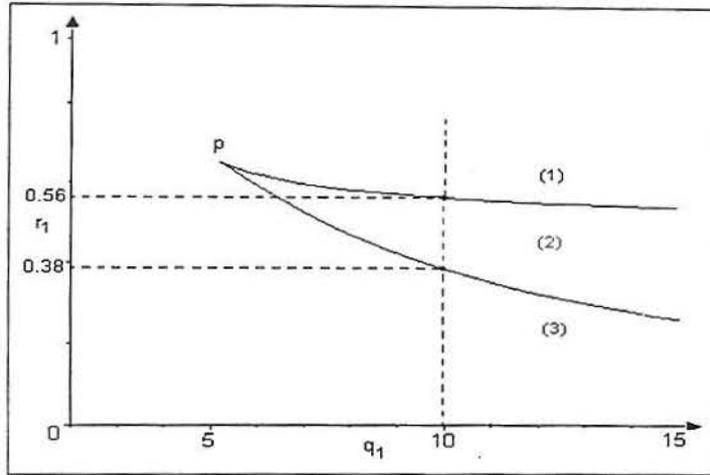


Figura 2.17: Domínio dos parâmetros  $r_1$  e  $q_1$  para pontos de equilíbrio positivos. A curva é dada parametricamente pela equação (2.40), para  $a > 1$ .

um ponto de equilíbrio nas regiões (1) com  $q_1 = 10$  e  $r_1 > 0.559$  e (3) com  $q_1 = 10$  e  $r_1 < 0.383$ .

Dos gráficos da figura 2.16 vê-se que  $f'(0) > 0$  ( $s^* = 0$  é equilíbrio instável) em todas situações apresentadas; quanto aos demais pontos de equilíbrio (raízes de (2.39)), seus valores bem como sua estabilidade é apresentada na tabela 2.3 o que está de acordo com a declividade observada na figura 2.16.

O valor da declividade pode ser obtido de (2.36), como segue:

$$f'(s^*) = r_1 \left( 1 - \frac{2s^*}{q_1} \right) (1 + s^{*2})^2 - 2s^*. \quad (2.41)$$

A instabilidade de  $s^* = 0$  pode ser demonstrada substituindo  $s^*$  por 0 em (2.41) que resulta  $f'(s^*) = r_1$  e a estabilidade ou instabilidade dos outros pontos é obtida substituindo em (2.41) os valores de  $q_1$ ,  $r_1$  e  $s^*$  correspondentes;  $f'(s^*) < 0$  para linearmente estável,  $f'(s^*) > 0$  instável e  $f'(s^*) = 0$  semi-estável.

Na situação em que  $s^*$  significa a população de equilíbrio após ser acrescentado um termo de pesca, podemos afirmar que o ponto de equilíbrio desejável é o  $s_3^*$  por ser aquele equilíbrio estável que corresponde a um nível da população  $X$  alto. Embora  $s_1^*$  seja também estável, está muito próximo de zero.

Curvas	Valores de $r_1$	Pontos de Equilíbrios	Estabilidade
(a)	$r_1 = 0.3$	$s_1^* = 0.32$ $s_2^* = 4.84 - 2.70I$ $s_3^* = 4.84 + 2.70I$	linearmente estável — —
(b)	$r_1 = 0.5$	$s_1^* = 0.68$ $s_2^* = 2$ $s_3^* = 7.32$	linearmente estável instável linearmente estável
(c)	$r_1 = 0.7$	$s_1^* = 0.85 - 0.7I$ $s_2^* = 0.85 + 0.7I$ $s_3^* = 8.30$	— — linearmente estável
(d)	$r_1 = 0.383971$	$s_1^* = 0.44$ $s_2^* = 4.78$ $s_3^* = 4.78$	linearmente estável semi-estável semi-estável
(e)	$r_1 = 0.559525$	$s_1^* = 1.14$ $s_2^* = 1.14$ $s_3^* = 7.72$	semi-estável semi-estável linearmente estável

Tabela 2.3: *Síntese da análise dos equilíbrios não nulos da equação (2.36), para cada uma das curvas traçadas nas figuras 2.15 e 2.16.*

Um gráfico para a quantidade pescada, análogo ao apresentado na figura 2.7, poderia ser construído variando  $B$  e calculando os equilíbrios estáveis correspondentes e substituindo os pontos de equilíbrio  $s^*$  em

$$Y(B) = \frac{Bs^{*2}}{1 + s^{*2}}. \quad (2.42)$$

O tempo de recuperação, quando o equilíbrio for linearmente estável para  $B \neq 0$ , é dado por  $T_R(B) = O\left(\frac{1}{f'(s^*)}\right)$ , onde  $f'(s^*)$  é dada por (2.41), que juntamente com

(2.15), fornece:

$$\frac{T_R(B)}{T_R(0)} = O \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{2s^*}{q_1}\right) - \frac{2s^*}{r_1(1+s^{*2})^2}} \right) \quad (2.43)$$

No próximo capítulo, acrescentaremos os mesmos termos de retirada tratados aqui em um sistema composto por duas espécies do tipo presa-predador.

### 3 MODELOS POPULACIONAIS CONTÍNUOS DO TIPO PRESA-PREDADOR PARA DUAS ESPÉCIES INTERAGENTES

Os seres vivos, quando interagem, afetam a dinâmica populacional de cada uma das espécies envolvidas na *cadeia trófica*. Estas cadeias criam comunidades estruturalmente complexas. Para descrever o crescimento populacional e as interações entre seus componentes, em uma cadeia trófica, os modelos matemáticos que enfocaremos são compostos por sistemas de equações diferenciais, considerando as seguintes hipóteses (MAY 1976):

a) A densidade de uma espécie pode ser representada por uma variável simples, ignorando-se as diferenças de idade, sexo e genótipo (constituição hereditária).

b) Os fenômenos considerados podem ser descritos por equações determinísticas.

c) Os efeitos da interação intra-espécie (entre indivíduos da mesma espécie) e inter espécie (entre espécies distintas) são instantâneas.

Na classificação que faremos a seguir, os sinais entre parênteses são os sinais dos termos de interação, nas equações diferenciais, para a taxa de crescimento de cada uma das populações. O sinal (+) indica que a espécie está sendo beneficiada pela interação com a outra espécie, e o sinal (-) indica que a espécie está sendo prejudicada e sua densidade populacional diminui pela interação com a outra espécie. A alteração na taxa de crescimento se dá pelo aumento ou diminuição na taxa de natalidade e/ou aumento ou diminuição na taxa de mortalidade.

Existem três tipos principais de interações entre duas espécies, que são:

1. Predação (-, +), situação presa-predador, onde a taxa de crescimento de uma população diminui enquanto a outra aumenta.

2. Competição  $(-, -)$  se dá quando a taxa de crescimento da densidade populacional de cada espécie diminui, devido à interação entre as espécies.

3. Mutualismo ou comensalismo  $(+, +)$ , a taxa de crescimento da densidade populacional de cada espécie aumenta.

### 3.1 Modelo de Lotka-Volterra

*Volterra*, em 1926, propôs um modelo simples para a predação de uma espécie por outra, para explicar os níveis oscilatórios de certa captura de peixes no Adriático. *Lotka*, em 1925, havia derivado esta mesma equação para uma reação química hipotética e, por isso, o modelo abaixo descrito é chamado de modelo de *Lotka-Volterra*. Representando a população de presas por  $X(t)$  e a população de predadores por  $Y(t)$ , em um tempo  $t$ , podemos reproduzir o modelo de *Lotka-Volterra*, que é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais: (MURRAY 1993)

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= X(a - bY) \\ \frac{dY}{dt} &= Y(cX - d),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes. Este modelo pressupõe as seguintes hipóteses (MAY 1976):

1. Na ausência de predação, a população de presas cresce exponencialmente de forma *Malthusiana*, isto é, conforme o termo  $aX$ ; supondo-se, portanto, a existência de alimentos disponíveis em abundância para as presas.
2. O efeito da predação é o de reduzir a taxa de crescimento da população de presas por um termo proporcional às populações de presa e predador, que é o termo  $-bXY$  onde  $b$  representa a frequência de captura por predador.
3. A ausência de presas para o sustento do predador resulta no seu decaimento de acordo com uma taxa  $-dY$ ; os predadores sobrevivem alimentando-se de presas.

4. O termo  $cXY$  é a contribuição da população de presas para a taxa de crescimento da população de predadores, isto é, é proporcional a quantidade de presas disponíveis, bem como ao tamanho da população de predadores, onde  $c$  é a frequência de nascimento de predadores por presa consumida.

Os termos  $bXY$  e  $cXY$  representam a conversão de energia de uma espécie para outra. Para a análise do modelo de *Lotka-Volterra*, inicialmente adimensionalizaremos (SEGEL 1972) o sistema (3.1) que tem as dimensões das variáveis e parâmetros dados por:

$$[X] = [Y] = [\text{pop.}], \quad [a] = [d] = [t]^{-1} \quad e \quad [b] = [c] = [\text{pop.}]^{-1} \times [t]^{-1}, \quad (3.2)$$

definindo

$$u(\tau) \equiv \frac{cX(t)}{d}, \quad v(\tau) \equiv \frac{bY(t)}{a} \quad \tau \equiv at, \quad \alpha \equiv \frac{d}{a}, \quad (3.3)$$

tais que, o tempo  $\tau$  seja a nova variável independente adimensional, as populações  $u$  (presas) e  $v$  (predadores) as novas variáveis dependentes adimensionais e  $\alpha$  um parâmetro adimensional. Deste modo, o sistema (3.1) torna-se:

$$\frac{du}{d\tau} \equiv R(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} \equiv S(u, v), \quad (3.4)$$

sendo

$$R(u, v) \equiv u(1 - v) \quad e \quad S(u, v) \equiv \alpha v(u - 1).$$

Neste novo sistema, além de todas as quantidades envolvidas serem adimensionais, o número de parâmetros ficou reduzido de quatro ( $a, b, c, d$ ) para um único parâmetro  $\alpha$  igual à razão entre a taxa de mortalidade dos predadores e a taxa de crescimento linear da população de presas. Os pontos de equilíbrio são as soluções  $(u^*, v^*)$  do sistema algébrico

$$\begin{aligned} u^*(1 - v^*) &= 0 \\ \alpha v^*(u^* - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

de onde obtemos  $(u^*, v^*) = (0, 0)$  e  $(u^*, v^*) = (1, 1)$ .

No plano de fase  $uv$ , as trajetórias são soluções da equação diferencial:

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)},$$

as quais tem a forma

$$\alpha u + v - \ln(u^\alpha v) = M \quad (3.6)$$

onde  $M > M_{min}$  é uma constante arbitrária:  $M_{min} = 1 + \alpha$  é o menor  $M$  de todo o plano  $uv$  e ocorre quando  $u = v = 1$ . Para cada conjunto de condições iniciais  $u(0)$  e  $v(0)$ , determina-se um valor para a constante  $M$ , que substituído em (3.6), fornece uma solução do sistema (3.4). Cada solução representa uma trajetória fechada, mais especificamente uma oscilação no espaço de fase  $uv$  em torno do ponto  $(1, 1)$ , implicando em soluções periódicas em  $\tau$  para  $u$  e  $v$  como nos mostra a figura 3.1. Temos, ainda, que, para qualquer deslocamento a partir de uma certa trajetória, a

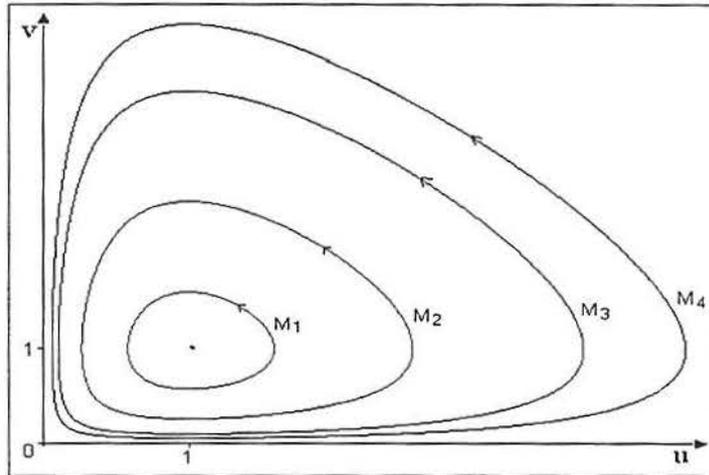


Figura 3.1: *Trajétoria no plano de fase  $uv$*

solução será movida para outra trajetória cujos pontos não estarão à mesma distância da solução original. Como as soluções são *estruturalmente instáveis*, este modelo não é o mais adequado para descrever sistemas reais do tipo presa-predador.

Uma outra razão que torna não realístico o modelo de *Lotka-Volterra*, é o fato de que, na ausência de predação, a população de presas cresce indefinidamente (abundância de alimentos para as presas). Conforme foi escrita a equação (3.1), os

termos do lado direito representam as taxas de crescimento, as quais dependem da densidade da população de uma forma específica. As taxas de crescimento *per capita* de cada espécie dependem apenas da população da outra espécie. Para estarmos mais próximos da realidade, a taxa de crescimento *per capita* de cada população deveria depender tanto da população de presas quanto da população de predadores.

Um modo de tornar o modelo de *Lotka-Volterra* mais realístico é considerar como logístico o crescimento da população de presas na ausência de predadores. Assim, a população cresceria tendendo a um valor limite máximo, o qual é a capacidade de suporte do meio ambiente. Além disso, deveríamos levar em consideração, no termo de interação, a relação entre a quantidade de presas presentes e a voracidade dos predadores.

### 3.2 Modelo com resposta funcional tipo Holling II e presa com crescimento logístico

Uma das diferenças entre o modelo de *Lotka-Volterra* e o modelo presa-predador, que estudaremos a seguir, é quanto ao tipo de resposta funcional. O primeiro apresenta uma resposta funcional tipo *I*, ou seja, a resposta do predador  $R(X)$  à mudança na densidade de presas  $X$  é  $bX$ , que cresce de forma linear à medida que  $X$  cresce enquanto que o segundo, usa a resposta funcional do tipo *II*, onde a população de presas, quando se torna muito grande, tem como resposta do predador a este aumento a captura de cada vez menos presas (Apêndice A).

Na natureza, a interação presa-predador pode resultar em um comportamento oscilatório das populações. Espera-se que, se a população de presas aumentar, a população de predadores aumente também. Mas o que ocorre é que o aumento do número de predadores aumenta o consumo de presas, cuja população começa a decrescer. Com menos alimento, a população de predadores também decresce e quando este nível populacional chega a valores muito baixos, permite o crescimento da população de presas, reiniciando o ciclo. Dependendo do sistema,

tais oscilações podem crescer, decair ou tender a uma oscilação tipo ciclo limite ou até mesmo exibir um comportamento caótico, embora no último caso, para modelos contínuos, é necessário no mínimo três espécies interagentes. Visto que, para os estudos que abordaremos neste capítulo, optamos por nos restringir a valores de parâmetros que nos resultem em ciclos limites, citamos a seguir um teorema muito útil quando se quer garantir a existência dos mesmos (ALIGOOD, K.T., SAUER, T.D. & YORKE 1996).

**Teorema de Poincaré-Bendixson:** “Seja  $R$  uma região limitada e fechada consistindo de pontos não singulares de um sistema  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  tal que alguma trajetória  $H$  do sistema está inteiramente dentro da região  $R$ . Então, ou  $H$  é uma trajetória fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada ou ela termina em um ponto de equilíbrio”.

O teorema nos diz, em particular, que, se uma trajetória  $H$  permanece dentro da região fechada  $R$ , então  $R$  deve conter uma solução periódica (*ciclo limite*).

A análise gráfica que faremos, nas próximas seções, do modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II, será feita através do plano de fase, onde serão determinadas as *isóclinas* com inclinação nula (nullclines) e o campo de direções. Estas isóclinas são obtidas de  $\frac{dX}{dT} = 0$  e  $\frac{dY}{dT} = 0$  e nas intersecções em que  $\frac{dX}{dT} = 0$  e  $\frac{dY}{dT} = 0$  temos os pontos de equilíbrio. Se colocarmos setas indicando o elemento do campo de direções em cada ponto do plano de fase então, poderemos tomar as curvas que tangenciam essas setas e formar trajetórias que nos mostrarão como o sistema evoluirá (HASTINGS 1996).

Para ilustrar, temos a figura 3.2, cujo gráfico foi obtido a partir do seguinte sistema presa-predador:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= RX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - bXY \\ \frac{dY}{dT} &= cXY - dY,\end{aligned}$$

onde  $b, c, d, R$  e  $K$  são constantes positivas e  $K > \frac{d}{c}$ .

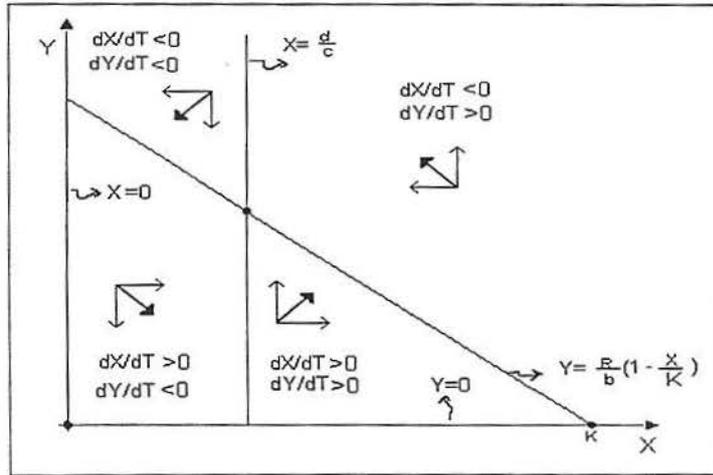


Figura 3.2: Esquema das direções e pontos de equilíbrio no plano de fase.

As retas  $X = 0$  e  $Y = \frac{R}{b} \left(1 - \frac{X}{K}\right)$  constituem as *nullclines* correspondentes a  $\frac{dX}{dt} = 0$ , enquanto que sobre as retas  $Y = 0$  e  $X = \frac{d}{c}$  tem-se  $\frac{dY}{dt} = 0$ . Os pontos de equilíbrio neste caso são  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$  e  $\left(\frac{d}{c}, \frac{R}{b} \left(1 - \frac{d}{cK}\right)\right)$ .

Vejamos agora, o sistema de equações diferenciais ordinárias que constituem o modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II, no qual supõe-se crescimento logístico para a população de presas na ausência de predadores.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} - D_1 Y, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o termo  $\frac{A_1}{B_1 + X}$  representa a resposta funcional (tipo II) do predador  $Y$  à densidade da presa  $X$ , a constante  $C_1^{-1}$  (adimensional) é a taxa de conversão de presa-predador para a espécie  $Y$ ,  $R_0$  a taxa de crescimento intrínseco da população  $X$ ,  $K_0$  a capacidade de suporte do meio ambiente para  $X$  e  $D_1$  a taxa de mortalidade da espécie  $Y$ .

As dimensões das variáveis e parâmetros são:

$$[B_1] = [K_0] = [Y] = [X] \quad e \quad [A_1] = [D_1] = [R_0] = [T]^{-1}. \quad (3.8)$$

Para adimensionalizar o sistema (3.7), definimos as novas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $t$  como:

$$x \equiv \frac{X}{K_0}, \quad y \equiv \frac{C_1 Y}{K_0}, \quad t \equiv A_1 T \quad (3.9)$$

e os novos parâmetros  $r$ ,  $a_1$  e  $d_1$ , como segue:

$$r \equiv \frac{R_0}{A_1}, \quad a_1 \equiv \frac{K_0}{B_1}, \quad d_1 \equiv \frac{D_1}{A_1}. \quad (3.10)$$

Desta forma, obtemos o seguinte sistema adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{a_1 xy}{1+a_1 x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1 xy}{1+a_1 x} - d_1 y. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico

Fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ , encontramos para o sistema (3.11) os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(x_1^*, y_1^*) = (0, 0), \quad (x_2^*, y_2^*) = (1, 0), \quad (x_3^*, y_3^*) = \left( \frac{d_1}{a_1(1-d_1)}, \frac{r(a_1(1-d_1) - d_1)}{a_1^2(1-d_1)^2} \right).$$

Para que o ponto  $(x_3^*, y_3^*)$  tenha coordenadas positivas, é condição necessária que:

$$d_1 < 1 \quad e \quad a_1 > \frac{d_1}{1-d_1}. \quad (3.12)$$

Os valores dos parâmetros  $r$ ,  $a_1$  e  $d_1$ , que serão utilizados em todo este capítulo, foram escolhidos de forma a obtermos ciclo limite em torno do ponto de equilíbrio  $(x_3, y_3)$  e seus valores são:

$$r = 1.4, \quad a_1 = 1.6 \quad e \quad d_1 = 0.15. \quad (3.13)$$

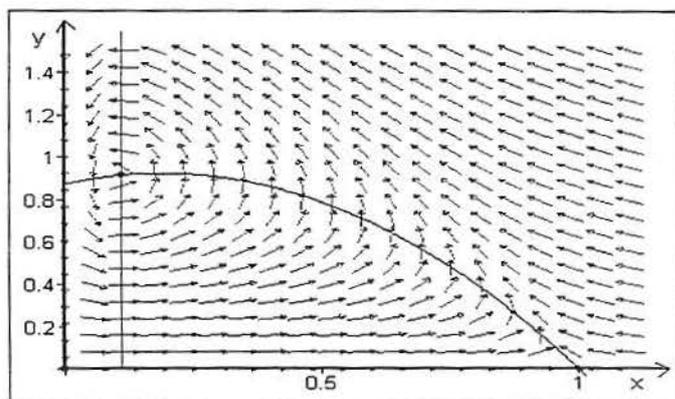


Figura 3.3: *Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.11), com os valores de parâmetros dados em (3.13); a reta paralela ao eixo  $y$  satisfaz  $\frac{dy}{dt} = 0$  e a parábola satisfaz  $\frac{dx}{dt} = 0$ .*

Na figura 3.3 estão representados, plano de fase, os três pontos de equilíbrio determinados pelas intersecções das curvas *isóclinas* de inclinação nula (*nullclines*), do sistema (3.11), dadas como segue: de  $\frac{dx}{dt} = 0$  temos  $x = 0$  e  $y = \frac{r(1-x)(1+a_1x)}{a_1}$  e de  $\frac{dy}{dt} = 0$  temos  $y = 0$  e  $x = \frac{d_1}{a_1(1-d_1)}$ .

Para investigar a estabilidade dos equilíbrios  $(x^*, y^*)$ , consideramos o sistema linearizado (equação B.5 do apêndice B) em torno do cada um dos pontos. Em relação aos pontos  $(x, y)$  que estejam em uma vizinhança próxima de um equilíbrio  $(x^*, y^*)$  do sistema (3.11), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d(x-x^*)}{dt} &\simeq \left[ r(1-2x^*) - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} \right] (x-x^*) - \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} (y-y^*) \\ \frac{d(y-y^*)}{dt} &\simeq \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} (x-x^*) + \left[ \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} - d_1 \right] (y-y^*), \end{aligned} \quad (3.14)$$

que pode ser escrito em forma matricial;

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta y}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1-2x^*) - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} & -\frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} \\ \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} & \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} - d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde  $\Delta x \equiv (x - x^*)$  e  $\Delta y \equiv (y - y^*)$  e a matriz  $2 \times 2$  é a *matriz Jacobiana* ( $\mathbf{J}$ ).

Substituindo cada ponto de equilíbrio em (3.15) obtemos:

- Para  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  (figura 3.4) a matriz Jacobiana é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d_1 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

de onde encontramos  $\det \mathbf{J} = -rd_1$ , os autovalores  $\lambda_1 = r$  e  $\lambda_2 = -d_1$  e os autovetores

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante da matriz  $\mathbf{J}$  é negativo, temos que o ponto é de equilíbrio *instável tipo ponto de sela*. Podemos ver também que os autovalores são números reais com sinais opostos, o que identifica um ponto de sela conforme Apêndice B.

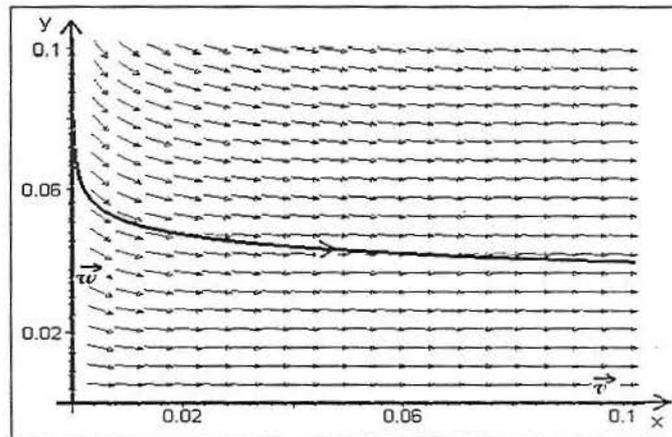


Figura 3.4: *Ponto de sela -Plano de fase para o sistema (3.15) próximo ao equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).*

As soluções do sistema (3.15) próximas ao ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  tem a forma:

$$x(t) = x_1^* + C_1 e^{rt} \quad \text{e} \quad y(t) = y_1^* + C_2 e^{-d_1 t}.$$

O campo de direções da figura 3.4 nos mostra que existe aproximação ao ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  seguindo a direção do vetor  $\mathbf{w}$  e afastamento em qualquer outro

ponto, inclusive na direção do vetor  $\mathbf{v}$ .

- Para  $(x_2^*, y_2^*) = (1, 0)$  (figura 3.5) temos a matriz Jacobiana dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -r & -\frac{a_1}{1+a_1} \\ 0 & \frac{a_1}{1+a_1} - d_1 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

com autovalores  $\lambda_1 = \frac{a_1}{1+a_1} - d_1$  e  $\lambda_2 = -r$  e autovetores correspondentes:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{(1+a_1)(-r-\lambda_1)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As soluções do sistema (3.15) próximas ao equilíbrio  $(1, 0)$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_2^* + C_1 \frac{a_1}{(1+a_1)(-r-d_1) - a_1} e^{\left(\frac{a_1}{1+a_1} - d_1\right)t} + C_2 e^{-rt} \\ y(t) &= y_2^* + C_1 e^{\left(\frac{a_1}{1+a_1} - d_1\right)t}. \end{aligned}$$

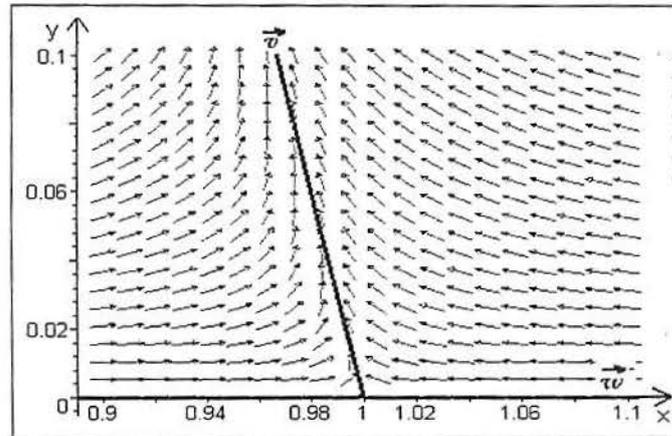


Figura 3.5: *Ponto de sela -Plano de fase do sistema (3.15) próximo ao equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*) = (1, 0)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).*

O traço e o determinante da matriz (3.17) são dados por:

$$\text{tr}\mathbf{J} = -\left(r + d_1 - \frac{a_1}{1+a_1}\right) \quad e \quad \det\mathbf{J} = r \left(d_1 - \frac{a_1}{1+a_1}\right). \quad (3.18)$$

Para qualquer valor que satisfaça a condição (3.12), o determinante será sempre negativo, indicando um ponto de equilíbrio *instável* do tipo *ponto de sela*, que pode ser visto na figura 3.5. Temos também que os autovalores são números reais e  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , o que caracteriza um ponto de sela.

• Para  $(x_3^*, y_3^*) = \left( \frac{d_1}{a_1(1-d_1)}, \frac{r(a_1(1-d_1) - d_1)}{a_1^2(1-d_1)^2} \right)$  (figura 3.6), temos que a condição de existência para este ponto de equilíbrio é a mesma dada em (3.12). Substituindo  $(x_3^*, y_3^*)$  em (3.15), obtemos

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{rd_1(1 + a_1(d_1 - 1) + d_1)}{a_1(d_1 - 1)} & -d_1 \\ \frac{-r(a_1(d_1 - 1) + d_1)}{a_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

cujos traço e determinante são:

$$\text{tr}\mathbf{J} = \frac{rd_1(1 + a_1(d_1 - 1) + d_1)}{a_1(d_1 - 1)} \quad e \quad \det\mathbf{J} = \frac{-rd_1(a_1(d_1 - 1) + d_1)}{a_1}. \quad (3.20)$$

Pela condição (3.12), teremos sempre  $\det\mathbf{J} > 0$  e com os valores de parâmetros dados em (3.13) encontramos  $(x_3^*, y_3^*) = (0.11, 0.91)$  e os autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{J}$ , dados por:

$$\lambda_1 = 0.02 - 0.40I \quad e \quad \lambda_2 = 0.02 + 0.40I$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.38 - 0.02I \\ -I \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0.38 + 0.02I \\ I \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Visto que o traço e o determinante são positivos, temos, então, um ponto de equilíbrio instável. Os autovalores são números complexos com a parte imaginária não nula, portanto, a solução envolve  $e^{0.02t}e^{\pm 0.4It}$ , que implica em um comportamento oscilatório tipo espiral e, como a parte real é positiva, temos uma *espiral instável* (Apêndice B).

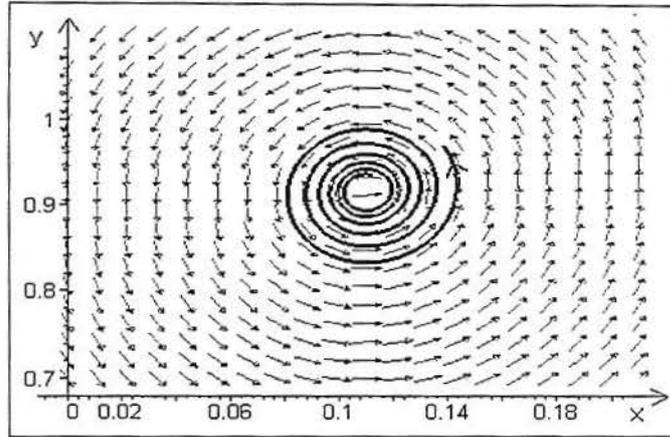


Figura 3.6: *Espiral instável -Plano de fase do sistema (3.15) próximo ao equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13).*

Do sistema (3.11), próximo ao equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*) = (0.11, 0.91)$ , temos que a solução  $x(t)$  é  $x_3^*$  adicionado a uma combinação linear de  $e^{0.02t} \cos 0.40t$  com  $e^{0.02t} \sin 0.40t$  e  $y(t)$  e  $y_3^*$  adicionado a outra combinação linear das mesmas funções.

Nas figuras 3.7(c) e 3.8(a), partindo de  $(x(0), y(0)) = (1, 1)$  longe do equilíbrio, podemos observar a aproximação em espiral e a formação do ciclo limite em torno do equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$ . As figuras 3.7(a) e (b) mostram as oscilações dos níveis dos estoques das populações  $x(t)$  e  $y(t)$  correspondentes. Para uma condição inicial  $(x(0), y(0)) = (0.1, 0.7)$  próxima ao ponto de equilíbrio, há um afastamento do ponto tendendo ao ciclo limite (figura 3.8(b)). Isto está de acordo com o teorema de Poincaré-Bendixon enunciado no início da seção 3.2, pois podemos determinar uma região fechada na qual as soluções são periódicas. Para o ciclo limite observa-se:  $x_{min} = 0.02$ ,  $x_{max} = 0.42$ ,  $y_{min} = 0.5$  e  $y_{max} = 1.45$ .

No capítulo 2, onde tratamos da equação logística para uma única espécie, vimos que o tempo de recuperação no caso de um ponto de equilíbrio estável ( $f'(X^*) < 0$ ) é estimado pelo inverso do módulo de  $f'(X^*)$ . Neste capítulo 3, ao tratarmos o sistema (3.11) observamos a existência de um ciclo limite contornando um ponto de equilíbrio instável. Quando o ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  for um ponto instável e existir um ciclo limite contornando-o, podemos estimar o tempo de recu-

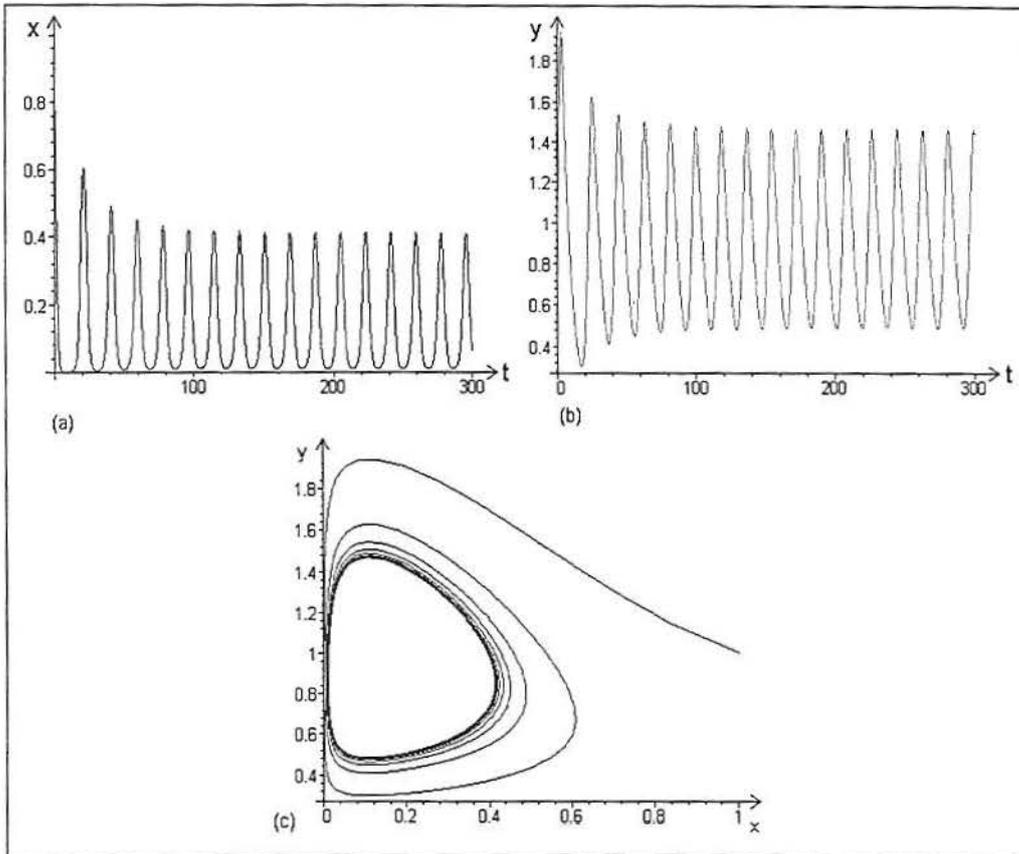


Figura 3.7: Gráficos do sistema (3.11): (a) e (b) mostram a evolução das populações  $x$  e  $y$  no tempo e (c) uma trajetória no plano de fase de  $x \times y$  com  $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ , para os valores de parâmetros dados em (3.13).

peração do ciclo em questão, a partir de uma linearização para soluções próximas ao ciclo limite. Se partíssemos de um ponto exterior ao ciclo, teríamos o tempo de recuperação como sendo o tempo de aproximação ao ciclo no sentido “de fora para dentro” e, da mesma forma, se o ponto estivesse dentro do ciclo limite, o tempo de recuperação seria o tempo de aproximação ao ciclo, no sentido “de dentro para fora”. Neste caso, a solução seria do tipo  $Ae^{-ct} + \text{sen}(\omega t + \varepsilon) + B\text{sen}(\omega t + \varepsilon)$  onde o primeiro termo constitui a parte transiente da solução e a expressão  $B\text{sen}(\omega t + \varepsilon)$  representa a parte estacionária oscilatória periódica da solução (ciclo que permanece); então, o tempo de recuperação pode ser estimado através de  $\frac{1}{c}$ , esta medida dá uma idéia da escala de tempo na qual decresce a amplitude da oscilação até fixar-se em  $B$ .

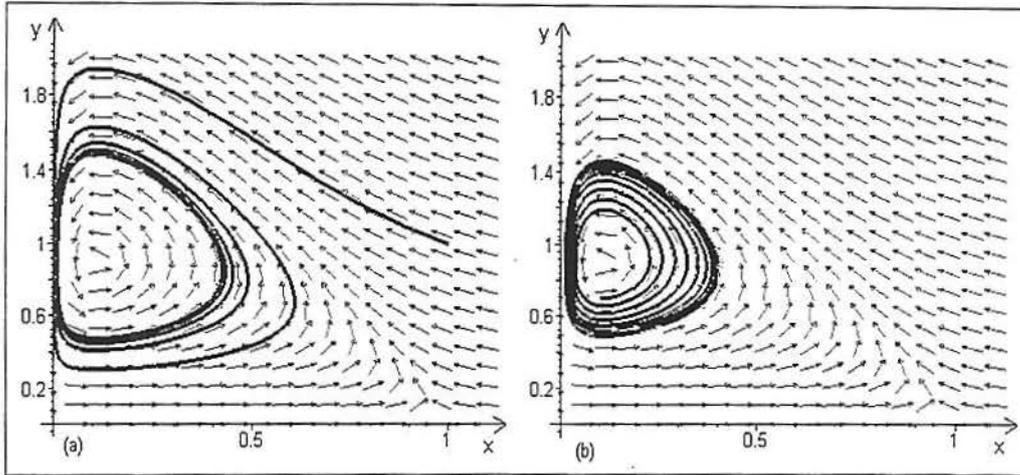


Figura 3.8: *Ciclo limite formado em torno do ponto de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$  com CI: (a)  $x(0) = 1, y(0) = 1$  e (b)  $x(0) = 0.1, y(0) = 0.7$  e com valores de parâmetros dados em (3.13).*

Aplicando esta idéia ao ciclo limite que circunda o ponto de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$  do sistema (3.11), obtemos:

$$T_R = O\left(\frac{1}{0.02}\right) = O(50).$$

Nas seções que seguem, acrescentaremos em cada uma, um termo de retirada no modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II, dimensional, dado em (3.7). Este termo representará o modo como é feita a pesca e será adicionado à equação diferencial que representa a taxa de variação da população do predador  $Y$ . Analisaremos os novos equilíbrios obtidos, após o acréscimo dos termos de retirada.

### 3.3 Acrescentando um termo de retirada $EY$ ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II

Como visto no capítulo 2, adicionar um termo de retirada proporcional à população de predadores  $Y$ , ou seja,  $EY$ , representa o uso de uma *medida de esforço* (indicador) ( $E = qe$ ) constante para a pesca. Em alguns casos, a unidade

de medida de esforço é simplesmente o número total de barcos-dia por unidade de tempo; em casos mais detalhados, é considerado o número de redes, o tipo de malha usada entre outros. A razão entre a quantidade pescada e o esforço é quase sempre uma boa indicação do nível de estoque da população.

Acrescentando  $EY$  à equação para a taxa de variação  $\frac{dY}{dT}$  em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} - D_1 Y - EY,\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde  $E$  tem dimensão  $[t]^{-1}$ .

Para adimensionalizar o sistema (3.22), definimos as novas variáveis como as dadas em (3.9) e os novos parâmetros como:

$$r \equiv \frac{R_0}{A_1}, \quad a_1 \equiv \frac{K_0}{B_1}, \quad d_1 \equiv \frac{D_1}{A_1}, \quad \alpha_1 \equiv \frac{E}{A_1},\tag{3.23}$$

de onde obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{a_1 xy}{1+a_1 x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1 xy}{1+a_1 x} - d_1 y - \alpha_1 y = g(x, y).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Neste novo sistema, todas as quantidades envolvidas são adimensionais e, além disso, o número de parâmetros ficou reduzido de sete ( $A_1, B_1, C_1, D_1, E, K_0, R_0$ ), para quatro ( $a_1, d_1, r_1, \alpha_1$ ). Mantendo os mesmos valores de parâmetros:  $r_1 = 1.4$ ,  $a_1 = 1.6$  e  $d_1 = 0.15$  da seção anterior, introduzimos o novo parâmetro  $\alpha_1$  com o valor 0.25. O valor de  $\alpha_1 = 0.25$  foi escolhido por nos fornecer um ponto de equilíbrio, onde a população pescada  $y$  não corre risco de extinção.

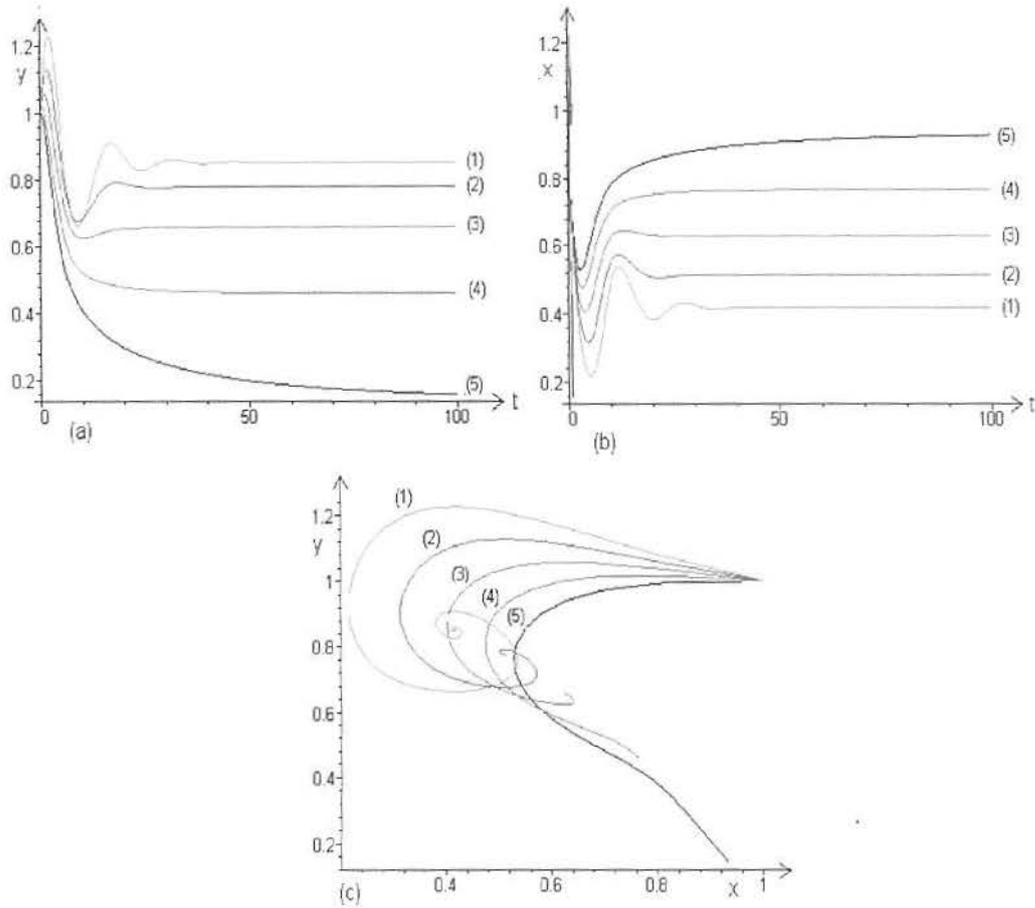


Figura 3.9: Soluções do sistema (3.24), com parâmetros dados em (3.13), onde (a)  $y \times t$ , (b)  $x \times t$ , (c)  $y \times x$ . Valores de  $\alpha_1$  em cada curva: (1)  $\alpha_1 = 0.25$ ; (2)  $\alpha_1 = 0.3$ ; (3)  $\alpha_1 = 0.35$ ; (4)  $\alpha_1 = 0.4$ ; (5)  $\alpha_1 = 0.45$ .

O método utilizado para a escolha de  $\alpha_1$  foi o de tentativas, iniciando com  $\alpha_1 = 0.1$  (que apresentava produção baixa) e aumentando gradativamente até 0.45. Os efeitos das variações de  $\alpha_1$  foram observados nas curvas dos gráficos de  $x(t) \times t$  e  $y(t) \times t$  bem como no plano de fase, sendo que aquelas que correspondem a alguns valores de  $\alpha_1 > 0.25$  estão apresentados na figura 3.9. Queremos observar que este método de tentativas foi o utilizado para a escolha dos parâmetros que envolvem os termos de retirada, nas próximas seções deste capítulo.

### 3.3.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico

Os três pontos de equilíbrio encontrados para o sistema (3.24) são:

$$(x_1^*, y_1^*) = (0, 0), \quad (x_2^*, y_2^*) = (1, 0) \quad e$$

$$(x_3^*, y_3^*) = \left( \frac{d_1 + \alpha_1}{a_1(1 - d_1 - \alpha_1)}, \frac{-r((a_1 + 1)(d_1 + \alpha_1) - a_1)}{a_1^2(d_1 + \alpha_1 - 1)^2} \right).$$

As condições necessárias para que o ponto de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$  seja realístico (coordenadas positivas) são:

$$\alpha_1 < 1 - d_1 \quad e \quad a_1 > (d_1 + \alpha_1)(1 + a_1) \quad (3.25)$$

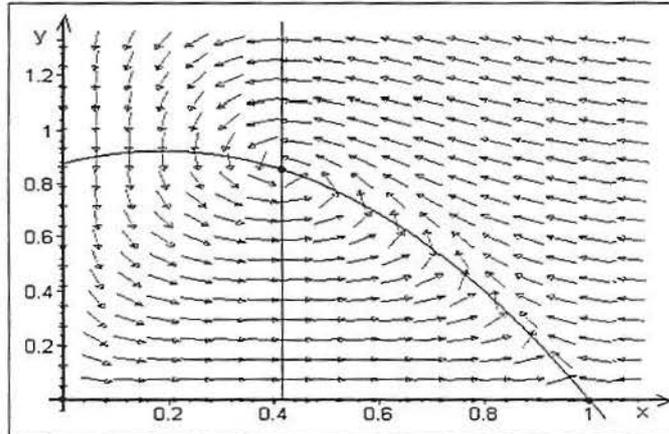


Figura 3.10: *Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.24) no plano de fase com campo de direções onde os valores de parâmetros são dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ .*

A figura 3.10 mostra os três pontos de equilíbrio, no plano de fase, do sistema (3.24) com  $r$ ,  $a_1$  e  $d_1$  dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ . As isóclinas com inclinação nula para a presa  $x$  são  $x = 0$  e  $y = \frac{r(1-x)(1+a_1x)}{a_1}$  que satisfazem  $f(x, y) = 0$  e para o predador ( $y$ ) são  $y = 0$  e  $x = \frac{d_1 + \alpha_1}{a_1(1 - d_1 - \alpha_1)}$  que satisfazem  $g(x, y) = 0$ . Comparando os pontos de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$  sem termo de retirada (figura 3.3) e com o termo  $\alpha_1 y$  (figura 3.10) podemos observar que o ponto foi deslocado para a direita sobre

a curva  $y = \frac{r(1-x)(1+a_1x)}{a_1}$  indicando um aumento no nível do estoque da população  $x$  que passou de 0.11 para 0.42, enquanto a população  $y$  decresceu de 0.91 (sem o termo de pesca) para 0.85 (com o termo de pesca), aproximadamente.

Para determinarmos a estabilidade ou instabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio, linearizamos o sistema (3.24) em torno de um equilíbrio  $(x^*, y^*)$ , donde obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d(x-x^*)}{dt} &\approx \left[ r(1-2x^*) - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} \right] (x-x^*) - \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} (y-y^*) \\ \frac{d(y-y^*)}{dt} &\approx \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} (x-x^*) + \left[ \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} - d_1 - \alpha_1 \right] (y-y^*),\end{aligned}\tag{3.26}$$

que, em forma de matriz é

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta y}{dt} \end{bmatrix} \approx \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)}.\tag{3.27}$$

Do sistema (3.26) temos que a matriz  $\mathbf{J}$  é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r(1-2x^*) - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} & -\frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} \\ \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} & \frac{a_1x^*}{1+a_1x^*} - d_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}.\tag{3.28}$$

A seguir, verificaremos o tipo de estabilidade ou instabilidade de cada um dos três pontos de equilíbrio encontrados.

- Ponto  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  (figura 3.11).

Substituindo  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  em (3.28) obtemos

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d_1 - \alpha_1 \end{bmatrix},\tag{3.29}$$

cujos os autovalores são  $\lambda_1 = r$  e  $\lambda_2 = -d_1 - \alpha_1$  e os autovetores são:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

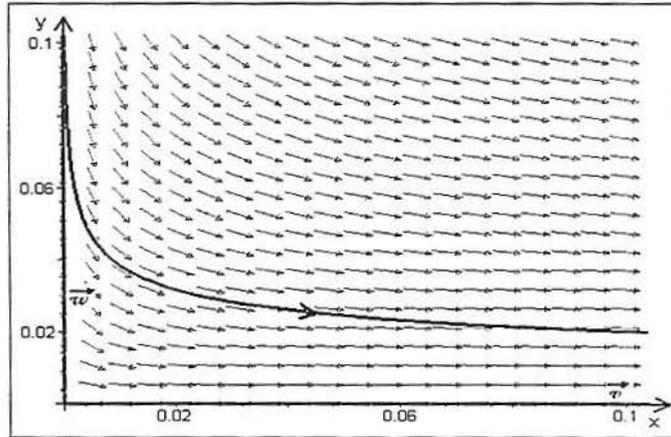


Figura 3.11: *Ponto de sela -Plano de fase do sistema (3.27) próximo ao equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*)$ , com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ .*

As soluções do sistema (3.24) próximas ao equilíbrio  $(0, 0)$  tem a forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1^* + C_1 e^{rt} \\ y(t) &= y_1^* + C_2 e^{-(d_1 + \alpha_1)t}. \end{aligned}$$

Dado que o  $\det \mathbf{J} = -r(d_1 + \alpha_1)$  é negativo e  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , podemos concluir que o ponto é de equilíbrio *instável* tipo *ponto de sela*.

Na figura 3.11, podemos ver que a aproximação ao ponto ocorre somente na direção do vetor  $\mathbf{w}$  e se afasta do ponto, em qualquer outra direção, caracterizando um ponto de sela.

- Ponto  $(x_2^*, y_2^*) = (1, 0)$  (figura 3.12)

No ponto  $(x_2^*, y_2^*)$ , temos a matriz Jacobiana como segue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -r & -\frac{a_1}{1+a_1} \\ 0 & \frac{a_1}{1+a_1} - d_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

cujos autovalores e autovetores são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{1+a_1} - d_1 - \alpha_1 \quad e \quad \lambda_2 = -r$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{(1+a_1)(d_1 + \alpha_1 - r) - a_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Temos que as soluções do sistema (3.24), próximas ao equilíbrio  $(1, 0)$ , são dadas por:

$$x(t) = x_2^* + C_1 \frac{a_1}{(1+a_1)(d_1 + \alpha_1 - r) - a_1} e^{\left(\frac{a_1}{1+a_1} - d_1 - \alpha_1\right)t} + C_2 e^{-rt}$$

$$y(t) = y^* C_1 + e^{\left(\frac{a_1}{1+a_1} - d_1 - \alpha_1\right)t}.$$

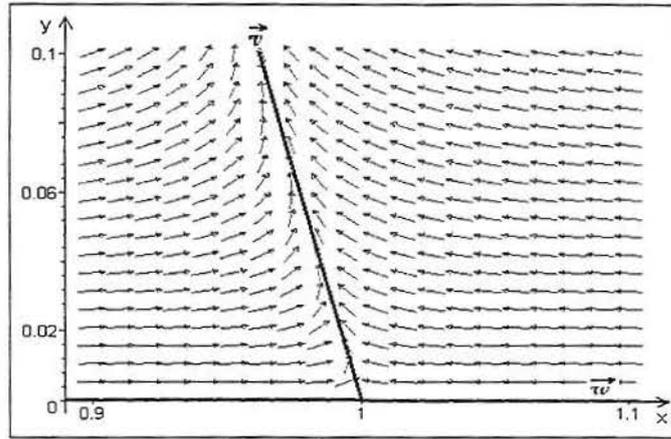


Figura 3.12: *Ponto de sela - Plano de fase do sistema (3.27) próximos ao ponto de equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ .*

Dada a condição (3.25), temos que o determinante

$$\det \mathbf{J} = -r \left( \frac{a_1}{1+a_1} - d_1 - \alpha_1 \right)$$

é negativo e  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  então, podemos concluir que a singularidade é um *ponto de sela*, como mostra a figura 3.12.

$$3. \text{ No Ponto } (x_3^*, y_3^*) = \left( \frac{d_1 + \alpha_1}{a_1(1 - d_1 - \alpha_1)}, \frac{-r((a_1 + 1)(d_1 + \alpha_1) - a_1)}{a_1^2(d_1 - 1 + \alpha_1)^2} \right)$$

temos que a matriz  $\mathbf{J}$  é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{r(\alpha(1+a_1(-1+2d_1+\alpha_1)+2d_1+\alpha_1)+d_1(1+a_1(d_1-1)+d_1))}{a_1(d_1-1+\alpha_1)} & -d_1 - \alpha_1 \\ -\frac{r((a_1 + 1)(d_1 + \alpha_1) - a_1)}{a_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Para investigar a influência de  $\alpha_1$ , no sistema que corresponde aos parâmetros fixados em (3.13), poderíamos prosseguir fazendo a substituição destes valores, deixando  $\alpha_1$  arbitrário. No entanto, resolvemos substituir na matriz  $\mathbf{J}$  além dos parâmetros  $a_1$ ,  $r$  e  $d_1$  com valores fixados em (3.13), substituir também  $\alpha_1$  pelo valor escolhido 0.25 (previamente justificado), de onde obtemos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.25\bar{6} & -0.4 \\ 0.49 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

cujos os autovalores e autovetores correspondentes são, respectivamente;

$$\lambda_1 = -0.13 + 0.42I \quad e \quad \lambda_2 = -0.13 - 0.42I \quad (3.34)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.86 - 0.26I \\ I \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0.86 + 0.26I \\ -I \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Encontramos os seguintes valores para o traço e o determinante da matriz  $\mathbf{J}$  no ponto  $(x_3^*, y_3^*) = (0.42, 0.85)$ :  $tr\mathbf{J} = -0.25\bar{6}$  e  $det\mathbf{J} = 0.196$ . Como o determinante é positivo podemos ter um ponto de equilíbrio tipo espiral ou tipo nodo e o traço negativo nos indica estabilidade do ponto de equilíbrio (Apêndice B). Por serem os autovalores números complexos com parte imaginária não nula, temos uma aproximação oscilatória ao ponto  $(x_3^*, y_3^*)$  tipo espiral e como a parte real é negativa existe estabilidade. Portanto temos uma singularidade tipo *espiral estável* que é ilustrada na figura 3.13.

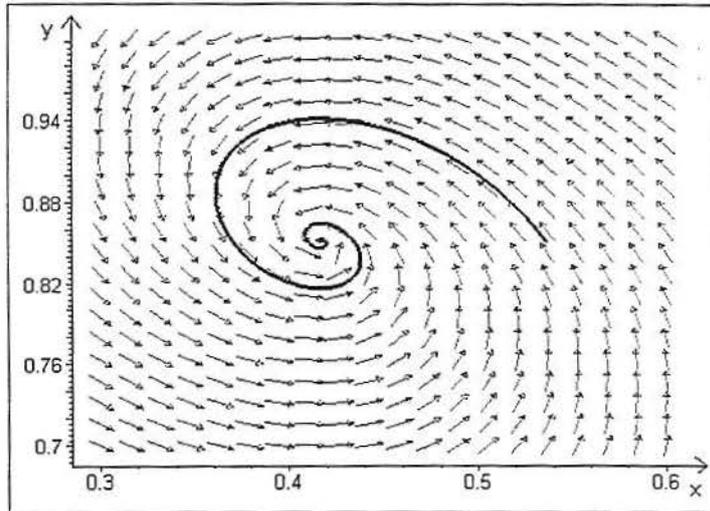


Figura 3.13: *Espiral estável - Plano de fase do sistema (3.27) próximos ao ponto de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$ , com os valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ .*

As soluções do sistema (3.24) próximas ao equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*) = (0.42, 0.85)$  são obtidas como segue:  $x(t)$  resulta da adição de  $x_3^*$  a combinação linear de  $e^{-0.13t} \cos 0.42t$  com  $e^{-0.13t} \sin 0.42t$  e  $y(t)$  da adição de  $y_3^*$  a outra combinação linear das mesmas funções.

A determinação do tempo de recuperação para este equilíbrio pode ser feita a partir da solução do sistema linearizado perto deste ponto de equilíbrio, donde concluímos que

$$T_R(\alpha_1 = 0.25) = O\left(\frac{1}{0.13}\right) \simeq O(7.7). \quad (3.36)$$

Analogamente a (2.23) do capítulo 2, obtivemos para a produção sustentável (adimensional) em relação a população  $y$ , o valor:

$$\alpha_1 y_3^* = \frac{-\alpha_1 r ((a_1 + 1)(d_1 + \alpha_1) - a_1)}{a_1^2 (d_1 - 1 + \alpha_1)^2}, \quad (3.37)$$

de onde traçamos o gráfico da produção sustentável ( $PS$ ) em função do parâmetro  $\alpha_1$  (esforço adimensional) como mostra a figura 3.14. Para  $y_3^* = 0.85$  e  $\alpha_1 = 0.25$  temos a produção sustentável  $PS = 0.2125$  e para  $\alpha_1 = 0.32$  a produção máxima sustentável  $PS_{max} = 0.24$ .

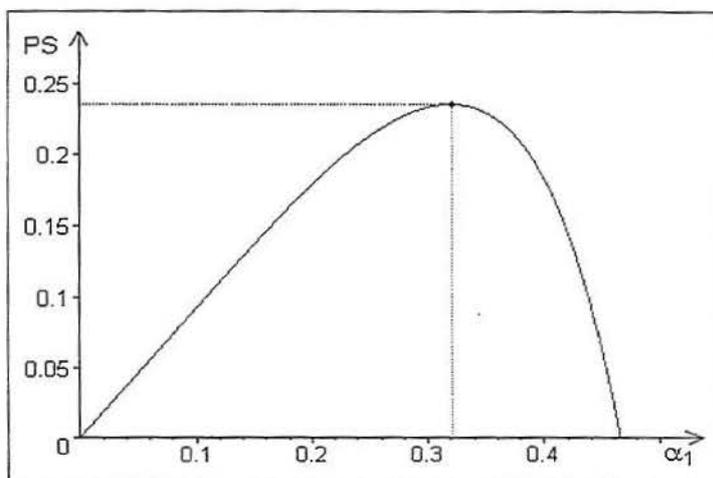


Figura 3.14: Gráfico  $PS \times \alpha_1$  de (3.37) com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ . Para  $\alpha_1 = 0.32$  temos a produção máxima sustentável.

Comparando os níveis de estoque das populações  $x$  e  $y$  sem o termo de pesca (figura 3.7) e com o termo  $\alpha_1 y$  (figura 3.15) com  $\alpha_1 = 0.25$ , podemos ver que a população  $y$  passa de uma oscilação apresentado na figura 3.7 entre 0.5 e 1.45, aproximadamente, a um estado de equilíbrio em torno de 0.85 enquanto que a população  $x$  passa de uma oscilação entre 0.02 e 0.42, aproximadamente, a um estado de equilíbrio em torno de 0.42. Neste sentido, podemos dizer que este termo de pesca estabiliza o sistema.

Na figura 3.16 podemos ver a evolução das duas populações  $x$  e  $y$  simultaneamente, ao longo do tempo.

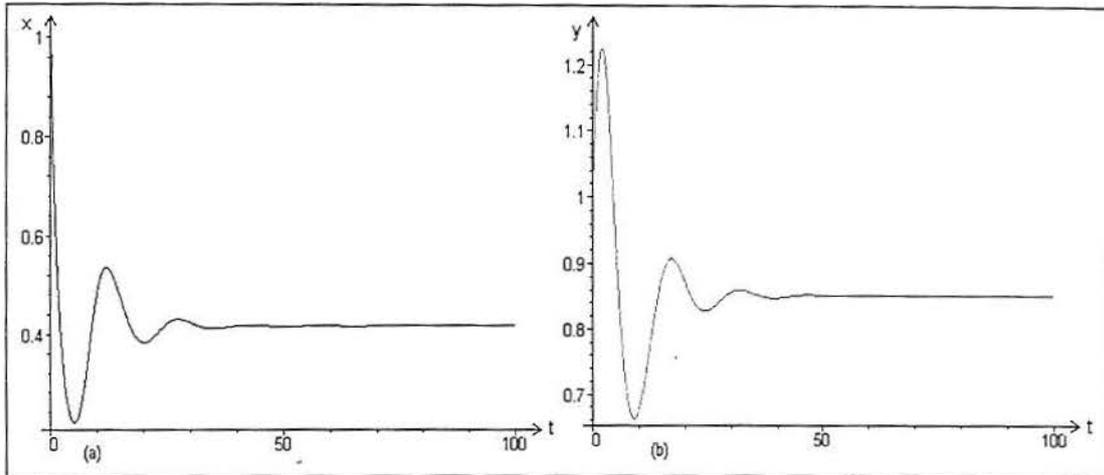


Figura 3.15: Solução do sistema (3.24), com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_1 = 0.25$ : (a) população  $x \times t$ ; (b) população  $y \times t$ .

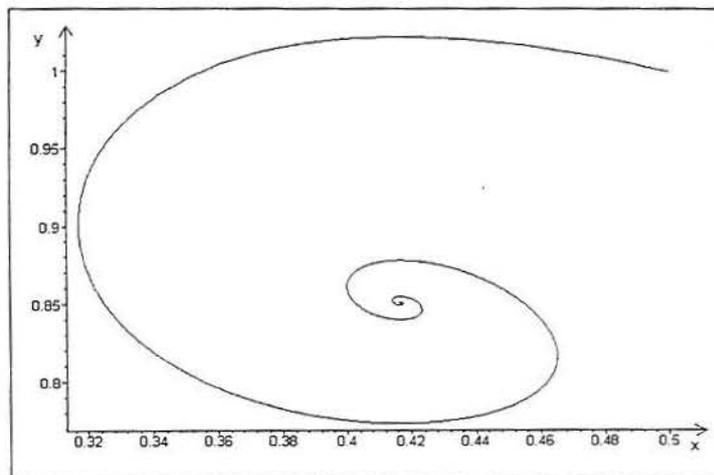


Figura 3.16: Trajetória do sistema (3.24) no plano de fase, que corresponde aos gráficos apresentados na figura 3.15.

### 3.4 Acrescentando um termo de retirada $U_0$ ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II

Nesta seção, a estratégia de pesca se caracteriza pela retirada de uma *quantidade constante* de peixes do estoque, dada por  $U_0$ . Então, adicionando um termo  $-U_0$  à equação diferencial para a taxa de variação  $\frac{dY}{dT}$  do sistema (3.7) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} - D_1 Y - U_0.\end{aligned}\tag{3.38}$$

As dimensões das variáveis e parâmetros são dadas em (3.8). Definindo as novas variáveis tal como em (3.9) e os novos parâmetros:

$$r \equiv \frac{R_0}{A_1}, \quad a_1 \equiv \frac{K_0}{B_1}, \quad d_1 \equiv \frac{D_1}{A_1} \quad e \quad \alpha_2 \equiv \frac{C_1 U_0}{A_1 K_0},\tag{3.39}$$

obtem-se o seguinte sistema adimensionalizado:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{a_1 xy}{(1+a_1x)} = f(x,y). \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1 xy}{(1+a_1x)} - d_1 y - \alpha_2 = g(x,y).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Para os parâmetros  $a_1$ ,  $r$  e  $d_1$  adotaremos os mesmos valores dados em (3.13). Quanto a  $\alpha_2$ , poderíamos prosseguir o estudo da sua influência no sistema, deixando-o arbitrário, optamos por fixar o seu valor em 0.06, que mantém a população  $y$  em um nível fora do perigo de extinção. O método para a escolha de  $\alpha_2 = 0.06$  foi o mesmo relatado, na seção anterior, para a escolha de  $\alpha_1$ .

A figura 3.17 nos mostra o gráfico de  $y \times t$  para cinco valores diferentes de  $\alpha_2$ , onde as curvas (a)  $\alpha_2 = 0.059$ , (b)  $\alpha_2 = 0.06$  e (c)  $\alpha_2 = 0.061$  mostram que para estes valores de  $\alpha_2$  a população  $y$  pode se recuperar e em (d)  $\alpha_2 = 0.0615$  e (e)  $\alpha_2 = 0.0616$  mostram que uma pequena variação no  $\alpha_2$  de 0.0001 leva a população  $y$  do ciclo limite para a extinção.

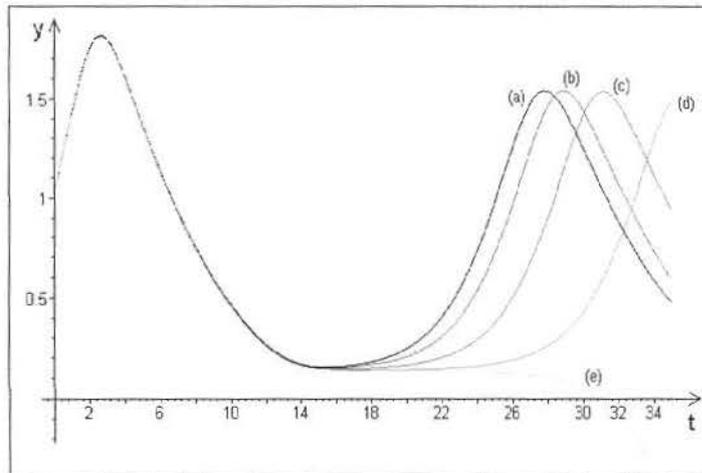


Figura 3.17: Gráfico de  $y \times t$ , do sistema (3.40) com valores de parâmetros dados em (3.13), para os seguintes valores de  $\alpha_2$ : (a)  $\alpha_2 = 0.059$ , (b)  $\alpha_2 = 0.06$ , (c)  $\alpha_2 = 0.061$ , (d)  $\alpha_2 = 0.0615$ , (e)  $\alpha_2 = 0.0616$ .

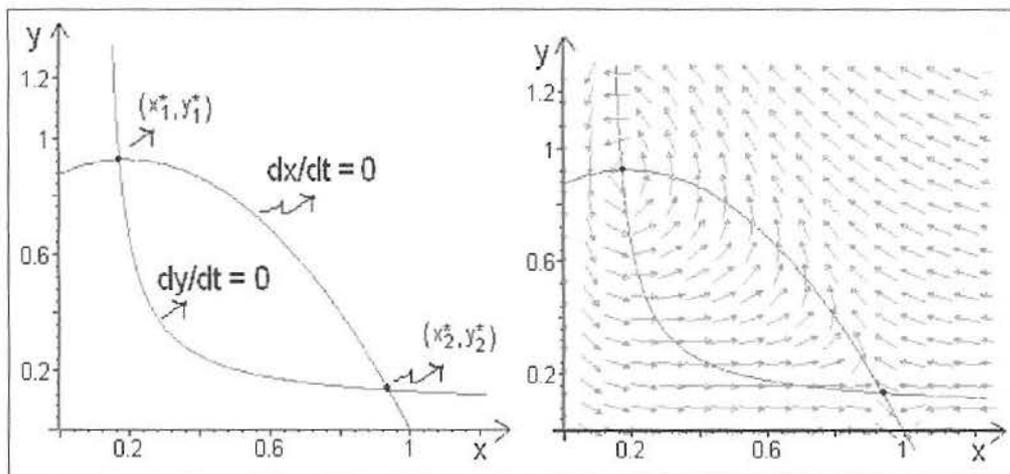


Figura 3.18: Isóclinas de inclinação nula e pontos de equilíbrio do sistema (3.40), com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_2 = 0.06$ .

### 3.4.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico

Os pontos de equilíbrio encontrados são:

$$(x_1^*, y_1^*) \approx (0.94, 0.13) \quad e \quad (x_2^*, y_2^*) \approx (0.17, 0.92)$$

Os dois pontos de equilíbrio estão representados na figura 3.18, pelas intersecções das curvas isóclinas de inclinação nula:  $y = \frac{r(1-x)(1+a_1x)}{a_1}$  que satisfaz

$f(x, y) = 0$  e  $x = \frac{d_1 y + \alpha_2}{a_1 y(1-d_1) - a_1 \alpha_2}$  que satisfaz  $g(x, y) = 0$ , para o caso particular do sistema (3.40) com  $\alpha_2 = 0.06$  e os valores dos parâmetros  $a_1$ ,  $r$  e  $d_1$ , dados em (3.13).

Analisaremos a seguir o tipo de estabilidade ou instabilidade de cada ponto de equilíbrio encontrado; para isto, linearizamos o sistema (3.40) em torno de um equilíbrio  $(x^*, y^*)$ , de onde podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta y}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r(1-2x^*) - \frac{a_1 y^*}{(1+a_1 x^*)^2} & -\frac{a_1 x^*}{1+a_1 x^*} \\ \frac{a_1 y^*}{(1+a_1 x^*)^2} & \frac{a_1 x^*}{1+a_1 x^*} - d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

onde definimos  $\Delta x \equiv x - x^*$  e  $\Delta y \equiv y - y^*$ .

• Ponto  $(x_1^*, y_1^*) \approx (0.94, 0.13)$  (figura 3.19).

Neste ponto de equilíbrio, no caso específico onde os valores de parâmetros são os dados em (3.13), encontramos a matriz Jacobiana como segue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1.26 & -0.60 \\ 0.03 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

cujos autovalores e autovetores são dados por:

$$\lambda_1 = -1.25 \quad e \quad \lambda_2 = 0.44$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9.81 \\ 0.20 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ -1.03 \end{bmatrix}.$$

As soluções do sistema (3.40), próximas ao equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*) = (0.94, 0.13)$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1^* + C_1(-9.81)e^{-1.25t} + C_2(0.36)e^{0.44t} \\ y(t) &= y_1^* + C_1(0.20)e^{-1.25t} + C_2(-1.03)e^{0.44t} \end{aligned}$$

Como  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  e o determinante da matriz  $\mathbf{J}$  é  $-0.55$ , portanto negativo, temos um *ponto de sela*. A figura 3.19 mostra graficamente a instabilidade neste equilíbrio.

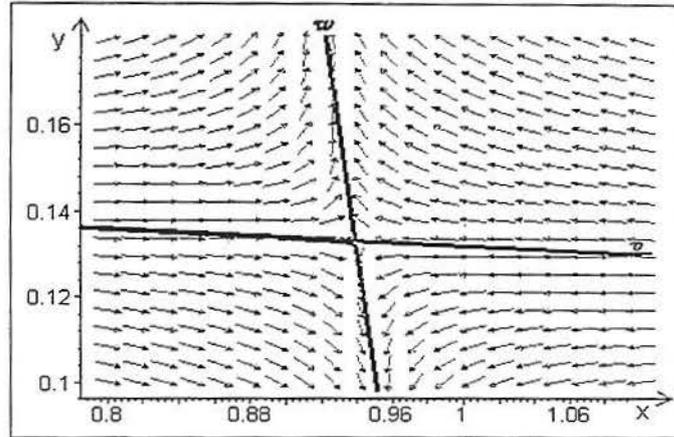


Figura 3.19: Plano de fase do sistema (3.41) próximo ao ponto de equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*) = (0.94, 0.13)$  com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_2 = 0.06$  (ponto de sela).

- Para  $(x_2^*, y_2^*) \approx (0.17, 0.92)$  (figura 3.20) encontramos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.21 \\ 0.91 & 0.06 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

com autovalores e autovetores, respectivamente:

$$\lambda_1 = 0.04 + 0.44I \quad e \quad \lambda_2 = 0.04 - 0.44I \quad (3.44)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.48 - 0.03I \\ I \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0.48 + 0.03I \\ -I \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Do sistema (3.40), próximo ao equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*) = (0.17, 0.92)$  temos que a solução  $x(t)$  é  $x_2^*$  adicionado a uma combinação linear  $e^{0.04t} \cos 0.44t$  com  $e^{0.04t} \sin 0.44t$  e  $y(t)$  é  $y_2^*$  adicionado a outra combinação linear das mesmas funções.

Da matriz Jacobiana dada em (3.43) podemos ver que tanto o traço quanto o determinante são positivos o que indica um equilíbrio instável. Dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que são números complexos com a parte real positiva, temos que o ponto é um espiral, ou seja,  $(x_2^*, y_2^*)$  é um ponto do tipo *espiral instável*.

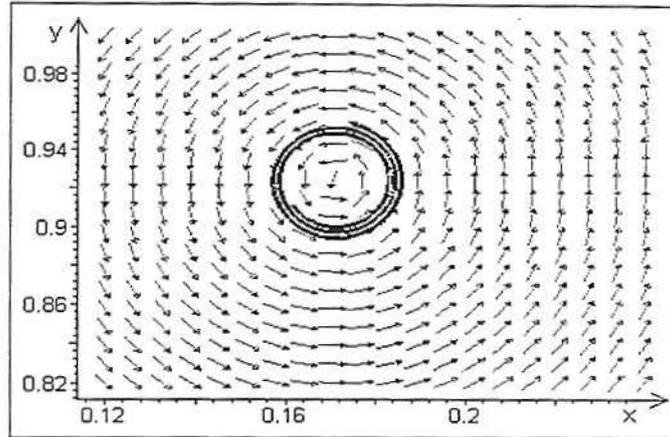


Figura 3.20: Plano de fase do sistema (3.41) próximo ao ponto de equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*) = (0.17, 0.92)$  com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_2 = 0.06$  (espiral instável).

O equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*) = (0.17, 0.92)$  representado na figura 3.20 é do tipo espiral instável, e as setas do campo de direções próximas a ele têm o sentido “para fora” .

Comparando as figuras 3.21 e 3.22 com a figura 3.7 podemos verificar que a adição do termo de retirada  $-U_0$  ao sistema (3.7), para os valores de parâmetros utilizados, não alteram o tipo de comportamento oscilatório (tendendo a um ciclo) das populações  $x$  e  $y$  mas, o ciclo limite apresenta uma amplitude maior do que a de antes da inclusão do termo, pois a população  $x$  oscila agora, em níveis mais elevados devido ao fato de seu predador  $y$  estar sendo pescado. Na figura 3.22 está representado o ciclo limite formado em torno do ponto de equilíbrio  $(x_2^*, y_2^*)$ . As condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$  estão fora do ciclo limite e podemos observar uma aproximação em direção ao ciclo enquanto que as condições iniciais  $x(0) = 0.12$  e  $y(0) = 0.9$  estão dentro do ciclo limite e observamos um afastamento em relação ao ponto, isto porque  $(x_2^*, y_2^*)$  é instável (figura 3.20), o sistema estabiliza no mesmo ciclo limite. O comportamento descrito, está de acordo com o enunciado do teorema de Poincaré-Bendixon, apresentado anteriormente.

Para o cálculo do tempo de recuperação deste ciclo, remetemo-nos à situação análoga obtida na seção 3.2, quando tratamos do sistema sem retirada.

Para este tipo de retirada a produção é constante e igual a  $\alpha_2$ .

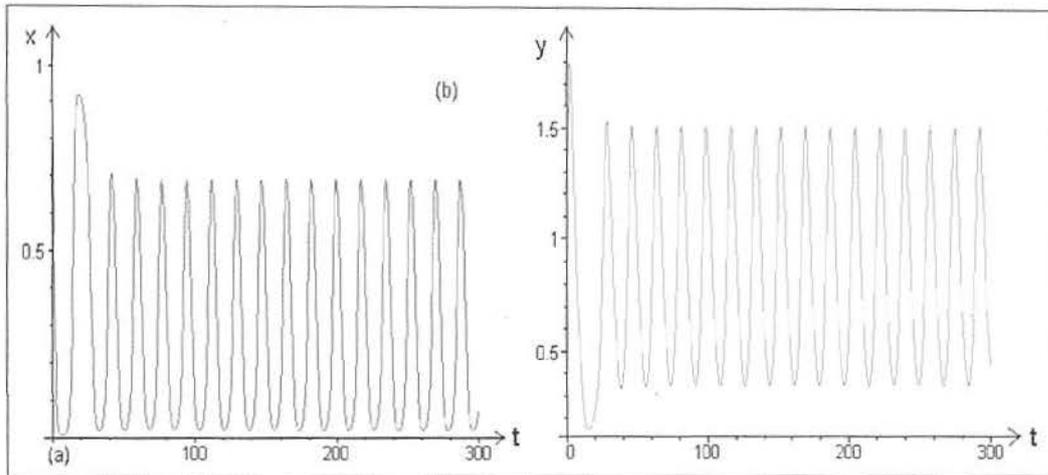


Figura 3.21: Gráficos da solução do sistema (3.40): (a)  $x \times t$  e (b)  $y \times t$ , com valores de parâmetros dados em (3.13) e  $\alpha_2 = 0.06$ .

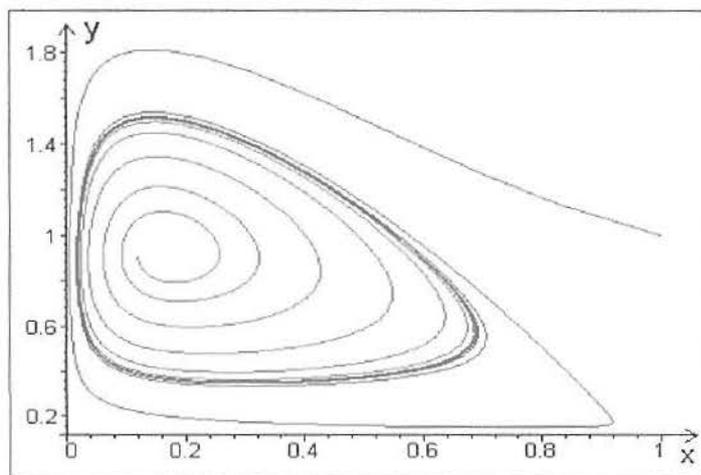


Figura 3.22: (Ciclo limite) Plano de fase do sistema (3.40) com  $(x(0), y(0)) = (1, 1)$  e  $(x(0), y(0)) = (0.12, 0.9)$ . Os valores dos parâmetros são dados em (3.13) e  $\alpha_2 = 0.06$ .

### 3.5 Acrescentando um termo de retirada, limitada pelo parâmetro B, ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II

Vimos no capítulo 2, que o termo de retirada

$$\frac{BY^2}{N^2 + Y^2} \quad (3.46)$$

foi proposto por *Ludwig* quando estudava o desfolhamento do *abeto*.

Acrescentaremos, a seguir, este mesmo termo ao modelo presa-predador com resposta funcional tipo Holling II e investigaremos os efeitos que este tipo de retirada causa nas populações, quando existem duas espécies interagindo.

Como feito nas seções anteriores com  $EY$  e  $U_0$ , acrescentaremos esta *estratégia de pesca* à equação que representa a taxa de variação da população de predadores no sistema (3.7), como segue:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= R_0X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1A_1XY}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1XY}{B_1 + X} - D_1Y - \frac{BY^2}{N^2 + Y^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde as dimensões das variáveis e dos parâmetros são como dadas em (3.8) e com  $[B]=[pop.] \times [t]^{-1}$  e  $[N] = [pop.]$ .

Definindo as novas variáveis iguais as dadas em (3.9) podemos adimensionalizar o sistema (3.47) que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{a_1xy}{1+a_1x} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1xy}{1+a_1x} - d_1y - \frac{\alpha_3y^2}{1+\beta y^2} = g(x,y), \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde definimos os novos parâmetros  $\alpha_3$  e  $\beta$  como:

$$\alpha_3 \equiv \frac{BK_0}{A_1N^2C_1}, \quad \beta \equiv \left(\frac{k_0}{NC_1}\right)^2.$$

Com a adimensionalização, conseguimos reduzir o número de parâmetros de 8 ( $A_1, B_1, B, C_1, D_1, K_0, N, R_0$ ) para 5 ( $a_1, d_1, r, \alpha_3, \beta$ ), onde  $B$  e  $N$  estão presentes somente em  $\alpha_3$  e  $\beta$ . Desta forma, se mantivermos os mesmos valores de parâmetros estabelecidos em (3.13),  $a_1 = 1.6$ ,  $r = 1.4$  e  $d_1 = 0.15$ , os valores escolhidos para os parâmetros  $\alpha_3 = 2.5$  e  $\beta = 10$  fornecerão um ponto de equilíbrio estável após a inclusão do termo de retirada (3.46) ao sistema (3.7). O método utilizado para a escolha dos valores de  $\alpha_3$  e  $\beta$  foi o de tentativas, isto é, primeiro fixamos  $\beta$  e variamos  $\alpha_3$  após fixamos  $\alpha_3$  e variamos  $\beta$  e por último variamos os dois parâmetros ao mesmo tempo até encontrarmos um ponto de equilíbrio onde a população retirada  $y$  não corresse risco de extinção.

### 3.5.1 Pontos de equilíbrio, análise da estabilidade e aspecto dinâmico

Os três pontos de equilíbrio para o sistema (3.48) com os valores de parâmetros estabelecidos acima, a saber:

$$a_1 = 1.6, \quad r = 1.4, \quad d_1 = 0.15, \quad \alpha_3 = 2.5 \quad e \quad \beta = 10, \quad (3.49)$$

foram determinados pelas intersecções das curva isóclinas de inclinação nula (figura 3.23), dadas por:

$$\begin{aligned} \text{de } f(x, y) = 0 \quad & x = 0 \quad e \quad y = \frac{r(1-x)(1+a_1x)}{a_1} \\ \text{de } g(x, y) = 0 \quad & y = 0 \quad e \quad x = \frac{d_1(1+\beta y^2) + \alpha_3 y}{a_1[1+\beta y^2(1-d_1) - d_1 - \alpha_3 y]}, \end{aligned}$$

como segue:

$$(x_1^*, y_1^*) = (0, 0), \quad (x_2^*, y_2^*) = (1, 0) \quad e \quad (x_3^*, y_3^*) \approx (0.44, 0.84).$$

Os valores de  $x_3^*$  e  $y_3^*$  podem ser determinados com maior precisão como segue: isolando  $y$  a partir da equação  $f(x, y) = 0$  e substituindo em  $\frac{g(x, y)}{y} = 0$ , obtém-se:

$$\frac{a_1 x}{1 + a_1 x} - d_1 + \frac{\alpha_3 r (x - 1)(1 + a_1 x)}{a_1 \left[ 1 + \frac{\beta r^2 (x - 1)^2 (1 + a_1 x)^2}{a_1^2} \right]} = 0,$$

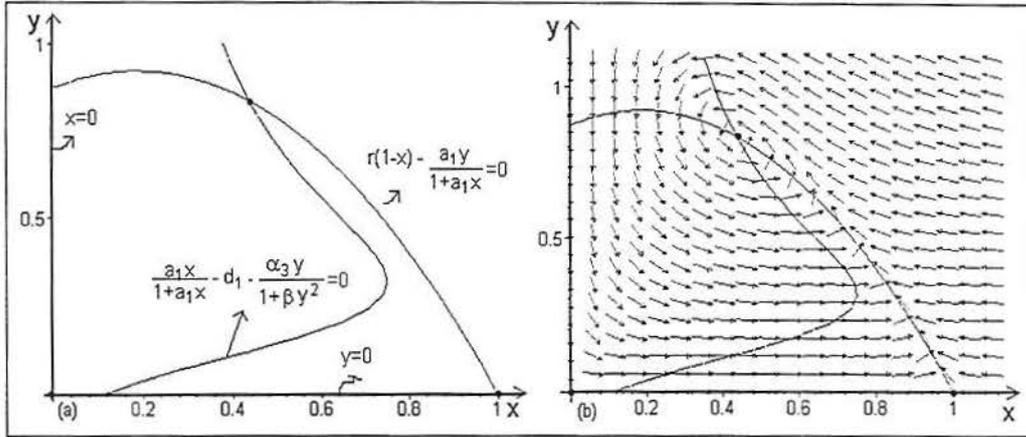


Figura 3.23: Isóclinas de inclinação nula do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.49).

que pode ser reescrito sob a forma  $f_1(x) = f_2(x)$ , onde definimos:

$$f_1(x) \equiv \frac{a_1 x}{1 + a_1 x} \quad e \quad f_2(x) \equiv d_1 - \frac{\alpha_3 r (x - 1)(1 + a_1 x)}{a_1 \left[ 1 + \frac{\beta r^2 (x - 1)^2 (1 + a_1 x)^2}{a_1^2} \right]}. \quad (3.50)$$

Observamos que os parâmetros  $\alpha_3$  e  $\beta$  são envolvidos apenas em  $f_2(x)$ . A intersecção das curvas  $f_1$  e  $f_2$  traçadas na figura 3.23(a), para os valores dos parâmetros dados em (3.49), fornece  $x_3^*$ , que pode ser visto na mesma figura. O valor de  $y_3^*$  pode ser determinado substituindo o valor obtido para  $x_3^*$ , ou em  $f(x_3^*, y_3^*) = 0$  ou em  $g(x_3^*, y_3^*) = 0$ .

Equivalentemente, poderíamos ter começado por determinar  $y_3^*$ . Para isso, isolamos  $x$  em  $g(x, y) = 0$  e substituímos em  $\frac{f(x, y)}{x} = 0$  e obtemos a equação:

$$r \left[ 1 + \frac{d_1(1 + \beta y^2) + \alpha_3 y}{a_1(\beta y^2(d_1 - 1) + d_1 + \alpha_3 y - 1)} \right] - \frac{a_1 y}{1 - \frac{d_1(1 + \beta y^2) + \alpha_3 y}{\beta y^2(d_1 - 1) + d_1 + \alpha_3 y - 1}} = 0,$$

que pode ser reescrita sob a forma  $g_1(y) = g_2(y)$ , onde definimos

$$g_1(y) \equiv r \left[ 1 + \frac{d_1(1 + \beta y^2) + \alpha_3 y}{a_1(\beta y^2(d_1 - 1) + d_1 + \alpha_3 y - 1)} \right] \quad e$$

$$g_2(y) \equiv \frac{a_1 y}{1 - \frac{d_1(1 + \beta y^2) + \alpha_3 y}{\beta y^2(d_1 - 1) + d_1 + \alpha_3 y - 1}}.$$

Como antes, a intersecção das duas curvas resulta em  $y_3^*$ , que está apresentado na figura 3.24 (b) onde os valores de parâmetros usados são os dados em (3.49). O valor de  $x_3^*$  pode agora ser obtido após substituir  $y_3^*$  por este valor ou em  $f(x_3^*, y_3^*) = 0$  ou em  $g(x_3^*, y_3^*) = 0$ .

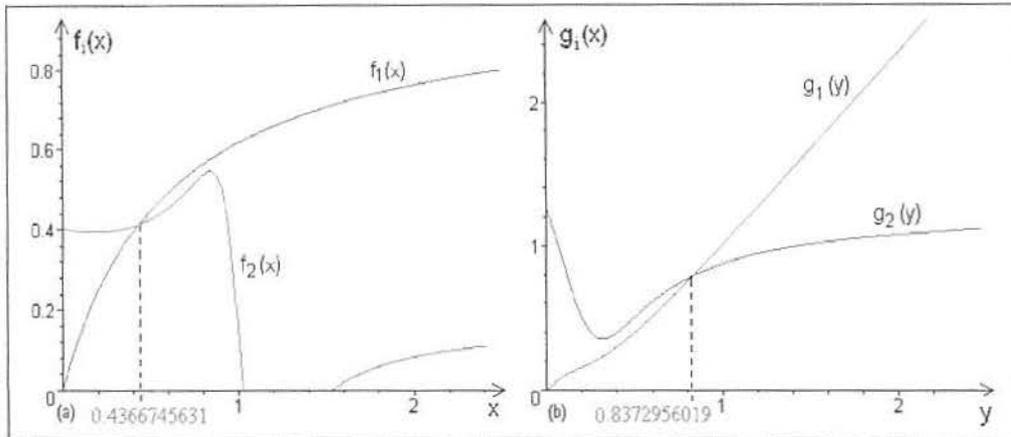


Figura 3.24: Gráficos usados na determinação de: (a)  $x_3^* \approx 0.44$  e (b)  $y_3^* \approx 0.84$ ; os valores de parâmetros são dados em (3.49).

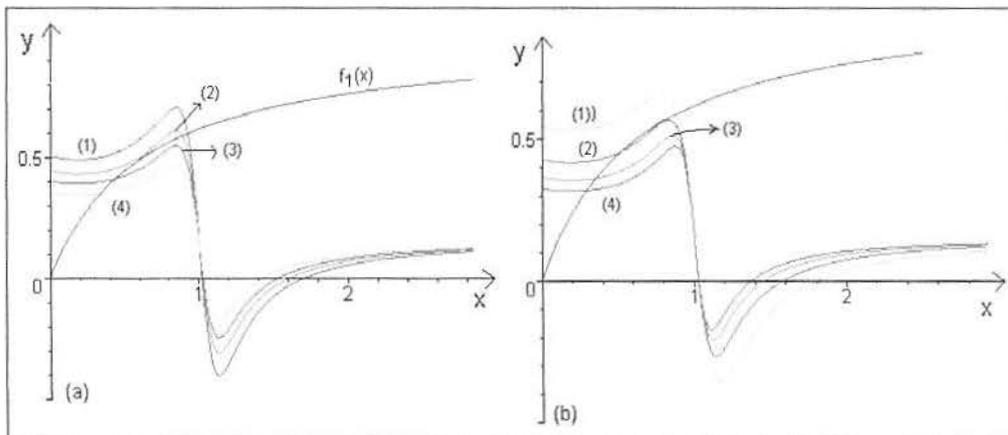


Figura 3.25: Determinação de  $x_3^*$ , a partir da equação  $f_1(x) = f_2(x)$  dadas em (3.50) com  $a_1 = 1.6$ ,  $r = 1.4$ ,  $d_1 = 0.15$  e (a)  $\beta = 10$  e (1)  $\alpha_3 = 3.5$ ; (2)  $\alpha_3 = 2.9$ ; (3)  $\alpha_3 = 2.5$ ; (4)  $\alpha_3 = 2$ ; (b)  $\alpha_3 = 2.5$  e (1)  $\beta = 6$ ; (2)  $\beta = 9$ ; (3)  $\beta = 12$ ; (4)  $\beta = 15$ .

A figura 3.25 mostra outros pontos de equilíbrio que podem ser obtidos da mesma forma (mesmas equações) que o gráfico (a) da figura 3.24, no caso

específico dos valores de parâmetros dados em (3.13) e com uma variação em  $\alpha_3$  ou em  $\beta$ . No gráfico (a) para  $\beta = 10$  variamos  $\alpha_3$  conforme as curvas: (1)  $\alpha_3 = 3.5$ ; (2)  $\alpha_3 = 2.9$ ; (3)  $\alpha_3 = 2.5$ ; (4)  $\alpha_3 = 2$ ; para  $\alpha_3 \approx 2.9$  encontramos dois pontos de equilíbrio. No gráfico (b) para  $\alpha_3 = 2.5$  variamos  $\beta$  conforme as curvas: (1)  $\beta = 6$ ; (2)  $\beta = 9$ ; (3)  $\beta = 12$ ; (4)  $\beta = 15$ ; para  $\beta \approx 9$  temos também dois pontos de equilíbrio.

A fim de determinarmos a estabilidade ou instabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio encontrados, linearizamos o sistema (3.48) em torno de um equilíbrio  $(x^*, y^*)$  e, obtivemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta y}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r(1 - 2x^*) - \frac{a_1 y^*}{(1 + a_1 x^*)^2} & -\frac{a_1 x^*}{1 + a_1 x^*} \\ \frac{a_1 y^*}{(1 + a_1 x^*)^2} & \frac{a_1 x^*}{1 + a_1 x^*} - d_1 - \frac{2\alpha_3 y^*}{(1 + \beta y^{*2})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

onde definimos  $\Delta x \equiv x - x^*$  e  $\Delta y \equiv y - y^*$ .

A seguir, analisaremos a estabilidade ou instabilidade de cada ponto de equilíbrio encontrado.

- Ponto  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  (figura 3.26).

Substituindo o ponto  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  em (3.51) obtemos a matriz Jacobiana dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d_1 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

cujos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  e os autovetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  são dados por:

$$\lambda_1 = r, \quad \lambda_2 = -d_1 \quad e \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que as soluções do sistema (3.48) têm a forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1^* + C_1 e^{rt} \\ y(t) &= y_1^* + C_2 e^{-d_1 t}. \end{aligned}$$

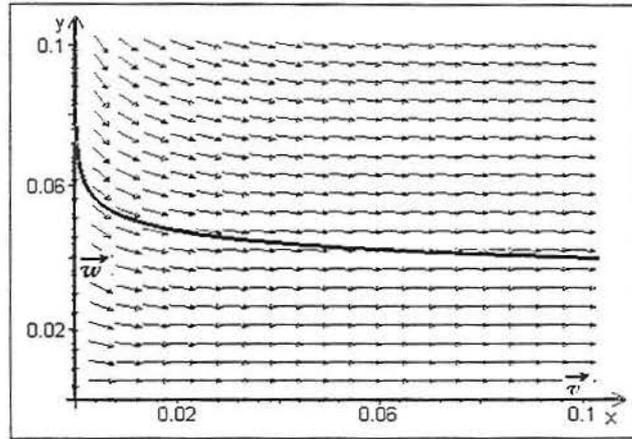


Figura 3.26: Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao equilíbrio  $(0,0)$ , com valores de parâmetros dados em (3.49) (ponto de sela).

Como o  $\det \mathbf{J} = -rd_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , podemos concluir que o ponto é de equilíbrio *instável* tipo *ponto de sela*, que pode ser visto na figura 3.26.

A figura 3.26 mostra o plano de fase com campo de direções do sistema (3.51), próximo ao ponto de equilíbrio  $(0,0)$ .

- Para  $(x_2^*, y_2^*) = (1, 0)$  (figura 3.27), obtemos para a matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -r & -\frac{a_1}{1+a_1} \\ 0 & \frac{a_1}{1+a_1} - d_1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

cujos autovalores são  $\lambda_1 = -\frac{d_1(1+a_1) - a_1}{1+a_1}$ ,  $\lambda_2 = -r$  e os autovetores correspondentes  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  como segue:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_1(d_1 - 1 - r) + d_1 - r}{1+a_1} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E, as soluções do sistema (3.48) são dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_2^* + C_1 e^{\left(\frac{-d_1(1+a_1) - a_1}{1+a_1}\right)t} + C_2 e^{-rt} \\ y(t) &= y_2^* + C_1 \left(\frac{a_1(d_1 - 1 - r) + d_1 - r}{1+a_1}\right) e^{\left(\frac{-d_1(1+a_1) - a_1}{1+a_1}\right)t}. \end{aligned}$$

Temos que  $\lambda_2 < 0$  para qualquer  $r > 0$ . Por outro lado, para os parâmetros  $a_1$  e  $d_1$  adotados, vale  $\frac{a_1}{1+a_1} > d_1$ , donde concluímos que  $\lambda_1 > 0$  e neste caso, o determinante dado pela expressão  $\det J = -r \left( \frac{a}{1+a_1} - d_1 \right)$  será negativo ficando caracterizado que a singularidade é do tipo *ponto de sela*.

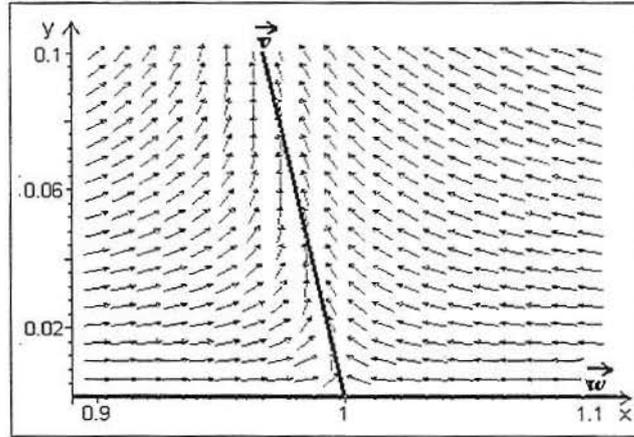


Figura 3.27: Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao equilíbrio  $(1, 0)$  com valores de parâmetros dados em (3.49) (ponto de sela).

Graficamente podemos visualizar este tipo de singularidade na figura 3.27, onde a aproximação ao ponto se dá somente na direção do vetor  $w$ .

- Ponto  $(x_3^*, y_3^*) \approx (0.44, 0.84)$  (figura 3.28).

Substituindo o equilíbrio  $(0.44, 0.84)$  e os valores dos parâmetros dados em (3.49) no sistema (3.51), obtemos a matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.41 \\ 0.46 & 0.20 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

de onde resulta:

$$\det J = 0.14 \quad \text{tr} J = -0.09.$$

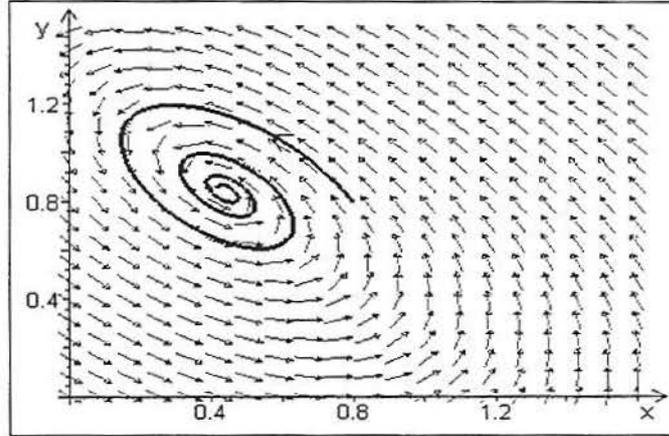


Figura 3.28: Plano de fase do sistema (3.51) próximo ao ponto de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*) = (0.44, 0.84)$ , com valores de parâmetros dados em (3.49) (espiral estável).

Como  $\det \mathbf{J} > 0$  e  $\text{tr} \mathbf{J} < 0$  temos a indicação de estabilidade. Os autovalores e autovetores são dados por:

$$\lambda_1 = -0.05 + 0.36I \quad e \quad \lambda_2 = -0.05 - 0.36I$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.78 - 0.52I \\ I \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0.78 + 0.52I \\ -I \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Os autovalores são complexos determinando uma aproximação oscilatória e como a parte real é negativa, o ponto é uma *espiral estável*, como mostra a figura 3.28 onde o sentido dos elementos do campo de direções ao longo da trajetória apontam a aproximação ao ponto de equilíbrio.

Resolvendo o sistema (3.48) próximo ao equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*) = (0.44, 0.84)$  temos que as soluções são como segue:  $x(t)$  é a soma de  $x_3^*$  a uma combinação linear de  $e^{-0.05t} \cos 0.36t$  com  $e^{-0.05t} \sin 0.36t$  e  $y(t)$  é  $y_3^*$  adicionado a outra combinação linear das mesmas funções.

A figura 3.29 mostra nos gráficos (a) e (b) o comportamento das populações  $x$  e  $y$ , respectivamente, ao longo do tempo, e em (c) o plano de fase correspondente, sob o efeito de retirada com limite  $B$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1$ .

Os valores de parâmetros são dados em (3.49), e observa-se a estabilização no ponto  $(x_3^*, y_3^*)$  cujas coordenadas determinamos anteriormente.

Comparando as figuras 3.7 (sem termo de retirada) e 3.29 (retirada com limite B) observamos que as populações  $x$  e  $y$  passam de um ponto de equilíbrio instável  $(x_3^*, y_3^*) = (0.11, 0.91)$ , com ciclo limite no qual  $y$  oscilava entre 0.5 e 1.5, para um ponto de equilíbrio estável  $(x_3^*, y_3^*) = (0.44, 0.84)$ .

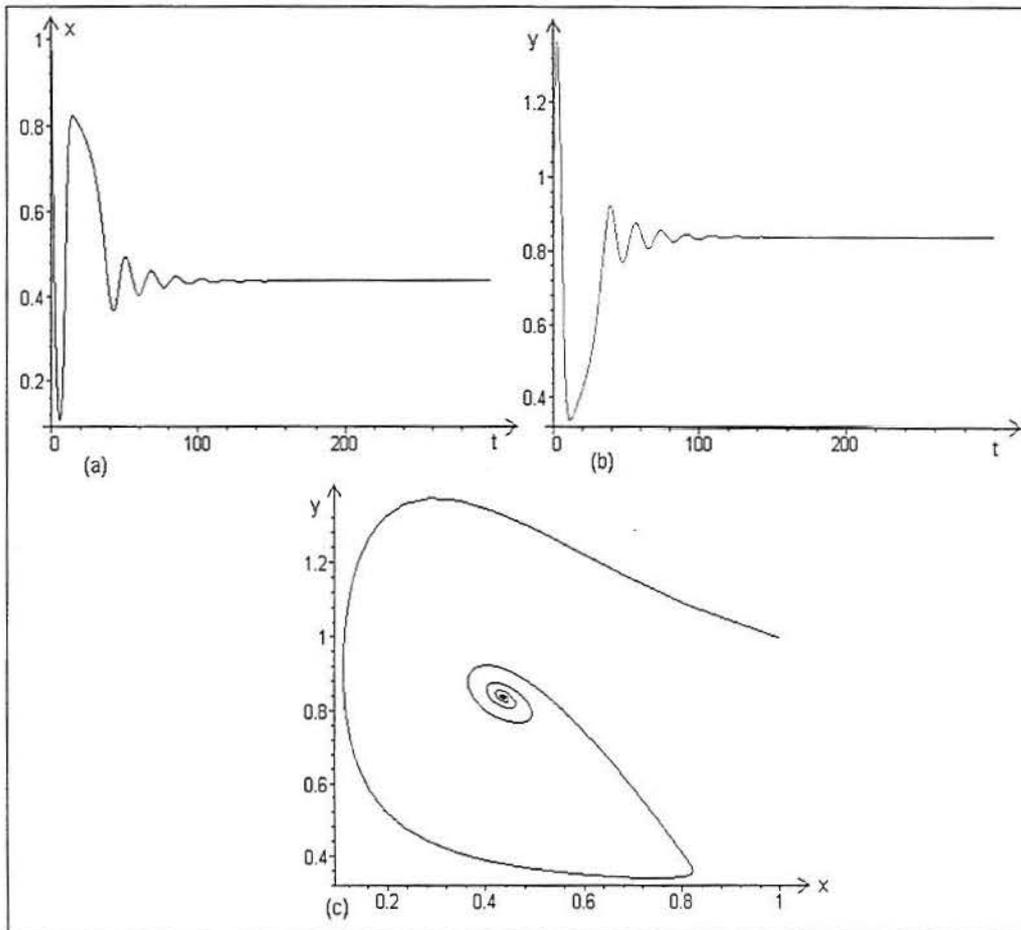


Figura 3.29: Gráficos do sistema (3.48): (a)  $x \times t$ , (b)  $y \times t$  e (c)  $y \times x$ , com valores de parâmetros dados em (3.49).

Como já vimos, o acréscimo do termo de retirada (3.46) ao modelo presa-predador (3.7), fez com que o sistema (3.48) apresentasse um ponto de equilíbrio estável no lugar de ciclo limite, apresentado no sistema sem termo de retirada. Neste sentido, poderíamos dizer que o termo de retirada tem um efeito estabilizante no

sistema. Este resultado deve-se à escolha dos parâmetros  $\alpha_3$  e  $\beta$ . Podemos verificar pela figura 3.30 que fixando  $\beta = 10$  e variando  $\alpha_3$  e tomando como condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1$ , encontra-se em  $\alpha_3 = 2$  (curva (1)) ou  $\alpha_3 < 2$ , solução assintótica periódica, enquanto que de  $\alpha_3 = 2.1$  a  $\alpha_3 = 2.66$  (curvas (2), (3), (4)) temos um ponto de equilíbrio com aproximação tipo espiral (oscilatória) tanto para a população  $x$ , gráfico (a), quanto para a população  $y$ , gráfico (b). Para  $\alpha_3 \geq 2.67$  as populações ficam em equilíbrio não nulo estável, sendo que a população de presas  $x$  é alta (curva (5) do gráfico (a)), enquanto que a população de predadores  $y$  é muito pequena (curva (5) do gráfico (b)) (ver tabela 3.1).

valores de $\alpha_3$	Tipo de Equilíbrio do Ponto $(x^*, y^*)$ com $x^*$ e $y^*$ não nulos
0 a 2	equilíbrio instável (ciclo limite)
2.2 a 2.66	equilíbrio estável
2.67	equilíbrio estável com $x^*$ alto e $y^*$ muito pequeno

Tabela 3.1: Estados assintóticos do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.13), mantendo fixo  $\beta = 10$  e variando  $\alpha_3$ .

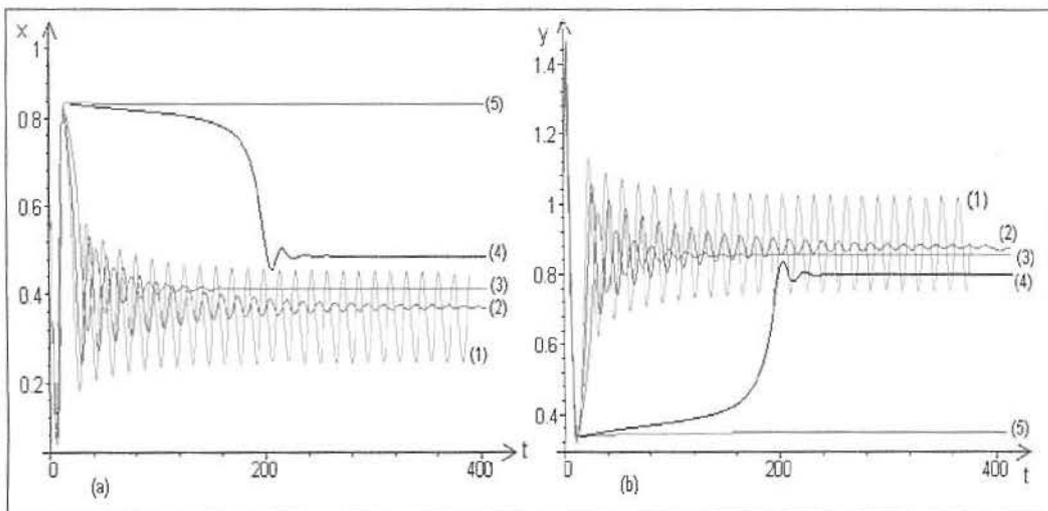


Figura 3.30: Solução do sistema (3.48), gráficos: (a)  $x \times t$  e (b)  $y \times t$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha_3$  variando: (1)  $\alpha_3 = 2$ , (2)  $\alpha_3 = 2.2$ , (3)  $\alpha_3 = 2.4$ , (4)  $\alpha_3 = 2.66$  e (5)  $\alpha_3 = 2.67$ .

valores de $\beta$	Tipo de Equilíbrio do Ponto $(x^*, y^*)$ com $x^*$ e $y^*$ não nulos
0 a 8	equilíbrio estável com com $x^*$ alto e $y^*$ muito pequeno
a cima de 8 até 11	equilíbrio estável
a cima de 12	equilíbrio instável (ciclo limite)

Tabela 3.2: *Estados assintóticos do sistema (3.48) com valores de parâmetros dados em (3.13), mantendo fixo  $\alpha_3 = 2.5$  e variando  $\beta$ .*

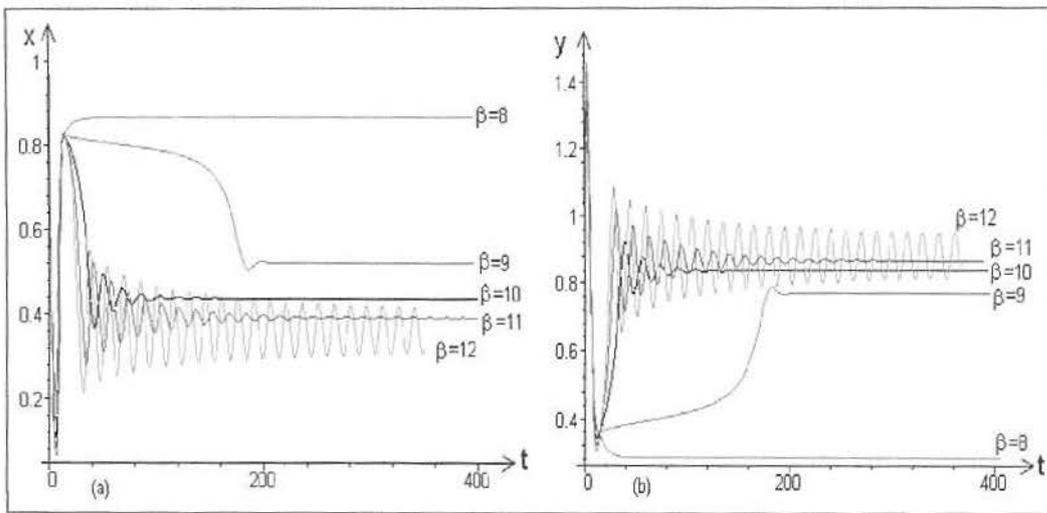


Figura 3.31: *Solução do sistema (3.48): (a)  $x \times t$  e (b)  $y \times t$  para  $\alpha_3 = 2.5$  e  $\beta$  variando de 8 a 12.*

Na figura 3.31, onde (a) é o gráfico de  $x \times t$  e (b)  $y \times t$ , fixamos  $\alpha_3$  em 2.5 e variamos o  $\beta$  de 8 a 12 de 1 em 1, mantendo os mesmos valores de parâmetros de (3.13). Tomando as condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1$ , verificamos que para  $\beta < 9$  o nível de estoque de  $y$  fica muito baixo (gráfico (b)), e poderá ir a extinção caso ocorra alguma variação no meio ambiente. Para  $\beta$  de 9 a 11, encontramos solução assintótica do tipo ponto de equilíbrio estável com aproximação oscilatória e para  $\beta \geq 12$  aparece ciclo limite (tabela 3.2).

O tempo de recuperação da população  $y$ , sob uma retirada com limite  $B$ , quando os parâmetros são tais que o equilíbrio é dado por  $(x_3^*, y_3^*)$ , é obtido

analogamente à equação (3.36) por:

$$T_R(\alpha_3 = 2.5, \beta = 10) = O\left(\frac{1}{0.05}\right) = O(20). \quad (3.56)$$

A produção sustentável (adimensional) para este tipo de pesca, com os parâmetros dados em (3.49), é dada por:

$$PS = \frac{\alpha_3 y_3^{*2}}{1 + \beta y_3^{*2}} \approx 0.22.$$

Da comparação entre os três tipos de retirada abordados neste trabalho, constatamos que uma retirada com limite fixo, do tipo da equação (3.46), é tão “aplicável” ao modelo presa-predador apresentado no sistema (3.7), para os valores de parâmetros escolhidos, quanto o termo de retirada com esforço constante do tipo incluído no sistema (3.22), cujos resultados são bem conhecidos. Quando usamos a palavra “aplicável”, referimo-nos ao fato de que, para o conjunto de parâmetros usados neste trabalho, tal tipo de retirada descreve uma pesca sem risco de extinção da espécie. Já o termo de cota fixa incluído no sistema (3.38), exige maior atenção, visto que, quando esta cota for a quantidade máxima, uma pequena alteração no meio ambiente pode provocar a extinção da espécie. Este último método de retirada é utilizada para a pesca de baleias onde existem dados mais precisos sobre a quantidade de estoque e a fixação das cotas é gerenciada pela *International Whaling Commission* estabelecida em 1946 para controlar a pesca da baleia no Atlântico Norte (CLARK 1976).

## 4 GERENCIAMENTO ÓTIMO DE RECURSOS RENOVÁVEIS

Até pouco tempo atrás, o gerenciamento de recursos renováveis era praticado somente por nações consideradas ricas. Entretanto, nos dias de hoje, tornou-se uma necessidade para qualquer país, pois, através do gerenciamento dos recursos naturais, pode-se ter um controle bioeconômico sobre a exploração destes recursos. A questão da devastação ambiental e o problema da renovação de recursos têm preocupado a humanidade. Escreve CLARK, em seu livro (CLARK 1990), que este é o resultado de *decisões individuais economicamente racionais* tomadas a cada dia, por todos nós.

Como vimos no capítulo 2, a produção máxima sustentável  $MSY$  é baseada em um modelo de crescimento biológico que apresente produção excedente. Para a maioria das populações em que este modelo se aplica, o nível de  $MSY$  situa-se entre 40% e 60% (CLARK 1990) da capacidade de suporte do meio ambiente.

O objetivo da  $MSY$  com o qual lidamos nos capítulos 2 e 3 é, do ponto de vista da biologia, muito significativo mas pela concepção econômica, peca por não considerar os custos de produção, ou seja, ignora a relação custo-benefício. Em vista disso, surgiu a tendência de trocar o conceito de  $MSY$  pelo de  $OSY$  (optimum sustainable yield) que é a *produção ótima sustentável*.

O conceito de gerenciamento ótimo de recursos renováveis, tratado aqui, baseia-se no critério custo-benefício padrão de maximizar valores presentes dos rendimentos econômicos líquidos. Este critério padrão é relevante quanto a decisões gerenciais, tanto do ponto de vista público quanto privado, embora a especificação de custo e benefício não seja, necessariamente, a mesma em ambos os casos. Para a iniciativa privada é considerado somente os custos internos (custo de produção) enquanto que os órgãos públicos contabilizam também o custo social.

## 4.1 Conceitos econômicos

A seguir, definiremos alguns termos da área bioeconômica que serão utilizados neste capítulo e representaremos por letras minúsculas as populações. Consideraremos, neste trabalho, os custos ( $c$ ) por unidade de esforço de pesca e o preço unitário ( $p$ ) do produto no mercado, como constantes e um único explorador, que pode ser uma empresa privada ou um agente governamental.

Relacionamos abaixo as unidades de medidas típicas das variáveis e parâmetros que utilizaremos neste capítulo; a medida de esforço  $E$  utilizadas nos capítulos 2 e 3, com unidade  $[E] = [t]^{-1}$ , será neste capítulo substituída através de  $E = eq$ .

tempo .....	$[t]=$ dias
taxa de crescimento intrínseca .....	$[r]=1/\text{dia}$
capacidade de suporte .....	$[K]=$ tonelada
estoque de peixes .....	$[x]=$ tonelada
esforço .....	$[e]=$ barcos
coeficiente de captura .....	$[q]=1/(\text{barco} \times \text{dia})$
taxa de captura .....	$[u]=$ tonelada/dia
custo unitário .....	$[c]=1/(\text{barco} \times \text{dia})$
preço unitário .....	$[p]=1/\text{tonelada}$

Com relação as unidades acima apresentadas, observamos que, onde colocamos “toneladas” (medida de biomassa), poderíamos equivalentemente usar “número de peixes”, quando esta unidade for mais conveniente. Da mesma forma, em vez da unidade de tempo “dia”, poderíamos evidentemente ter “mês” ou “ano”.

*Bem de capital* - Por definição, o valor de um bem de capital é igual ao valor presente do rendimento líquido futuro, que se espera produzir. Esta definição se aplica para todos os bens de capitais tradicionais, estendendo-se aos recursos naturais. Um estoque de recursos, de uma propriedade de uso comum, é valioso para a

sociedade, pelo potencial produtivo. Explorações irregulares de tais recursos, têm reflexos na produtividade futura. A super exploração é basicamente um problema de má alocação de recursos no tempo, no sentido em que o uso excessivo de recursos no presente conduzem a perdas no futuro.

*Lucro Marginal* - Se  $L(k)$  é o lucro total de  $k$  unidades vendidas de um produto, então o lucro marginal, quando  $k = k + 1$ , é dado por  $L'(k + 1)$ , ou seja, lucro marginal é a taxa de variação do lucro total quando a  $(k + 1)$ -ésima unidade é vendida, após  $k$  unidades serem vendidas. A função  $L'$  é chamada função lucro marginal (LEITHOLD 1988).

*Receita Total Sustentável (TR)* - Dada uma produção sustentável  $Y(e)$  (definida no capítulo 2), medida em biomassa, resultante de um certo nível de esforço ( $e$ ), e considerando  $p$  o preço constante por unidade de biomassa pescada, a função

$$TR = pY(e) \quad (4.1)$$

representa a receita total sustentável resultante do esforço  $e$ .

*Total de Custos (TC)* - Considerando o caso mais simples de custo total como sendo proporcional ao esforço ( $e$ ) despendido, temos

$$TC = ce, \quad (4.2)$$

onde  $c$  é um valor constante e pode representar, por exemplo, o custo operacional de um barco pesqueiro, em um dia no mar.

*Rendimento Econômico Sustentável* - É a diferença  $TR - TC$ , entre a receita total sustentável e o custo total.

*Valor Presente (VP) e Valor Futuro (VF).*

Quando um valor em dinheiro é investido no mercado financeiro a juros compostos, e sendo  $\delta$  a taxa de juros instantânea por unidade de tempo, este valor (se  $\delta > 0$ ) cresce exponencialmente de acordo com a equação diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = \delta V,$$

que, com a condição inicial, em  $t = 0$ ,  $V(0) = V_0$ , tem por solução  $V(t) = V_0 \exp[\delta t]$ , de onde resulta a equação que relaciona os valores  $V(T_2)$  e  $V(T_1)$  em dois tempos  $T_2$  e  $T_1$ , como segue:

$$V(T_2) = V(T_1) \exp[\delta(T_2 - T_1)].$$

Observamos que se  $T_2 > T_1$ , então teremos que  $V(T_2)$  é o valor futuro enquanto que  $V(T_1)$  pode ser denominado valor presente; por outro lado, se  $T_2 < T_1$ , então  $V(T_1)$  passa a ser o valor futuro, e  $V(T_2)$  o valor presente.

Algumas vezes,  $\delta$  que representa a taxa de juros instantânea anual é referido como uma taxa de desconto instantânea anual, com capitalização contínua. Descontar o valor dos pagamentos futuros, é simplesmente o processo inverso da composição dos pagamentos presentes (SILBERBERG 1990). Neste caso, o  $\delta$  representa a taxa de desconto anual.

Taxa de desconto e taxa de juros são termos sinônimos, normalmente aplicados quando os pagamentos futuros são descontados ou quando os pagamentos presentes são capitalizados, respectivamente. Queremos observar que, embora as taxas de juros sejam habitualmente imaginadas positivas, é possível que tenham valores negativos ou zero.

O valor presente total (VP) de pagamentos  $P(t)$  em tempo contínuo  $0 \leq t \leq T$  é dado por:

$$VP = \int_0^T P(t) \exp[-\delta t] dt, \quad (4.3)$$

Nesta expressão, o tempo  $T$  pode ser finito ou infinito.

## 4.2 A Função Produção

A função  $Q(x, e)$ , que relaciona os fatores de produção  $e$  e  $x$ , é chamada *função produção*. Em uma população de peixes onde a taxa de pesca  $u(t)$  seja

determinada por duas quantidades: o tamanho do estoque corrente  $x = x(t)$  e a taxa de esforço de pesca  $e = e(t)$ , temos:

$$u = Q(x, e) \quad (4.4)$$

Para propósitos econométricos, é conveniente supor que a função produção seja igual ao produto de potências do tipo:

$$Q(x, e) = ae^\alpha x^\beta, \quad (4.5)$$

onde  $a$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas e sempre que a função produção for linear em  $e$ , então teremos  $\alpha = 1$ . Referindo-nos aos tipos de retirada, apresentados no capítulo 2, o esforço constante  $ex$  corresponderia a  $a = \alpha = \beta = 1$ .

No que segue, neste capítulo, consideraremos

$$u = Q(x, e) = G(x)e, \quad (4.6)$$

onde  $G(x)$  é uma função não decrescente de  $x$ , da qual  $ax^\beta$  é um caso particular. A linearidade em  $e$  conduzirá a um modelo de otimização linear. A hipótese de que  $G(x)$  seja uma função não decrescente de  $x$ , é desejável porque a taxa de retirada correspondente a um dado esforço  $e$  não deve decrescer se aumentar o nível populacional.

### 4.3 Funcional Objetivo

Assumindo o preço ( $p$ ) e o custo ( $c$ ) como sendo fixos, por unidade pescada da população  $x$ , a *receita econômica líquida*  $R(x, e)$  produzida por uma intensidade de esforço  $e\Delta t$  em um tempo  $\Delta t$  deve ser tal que

$$R\Delta t = R(x, e)\Delta t = [pu - ce]\Delta t,$$

visto que  $pu$  indica a receita bruta e  $ce$  o custo correspondente. Considerando que a função produção tenha a forma dada em (4.6) poderemos escrever:

$$R\Delta t = [pG(x) - c]e\Delta t,$$

ou ainda,

$$R\Delta t = \left[ p - \frac{c}{G(x)} \right] G(x)e\Delta t = [p - b(x)]u\Delta t, \quad (4.7)$$

onde definimos

$$b(x) \equiv \frac{c}{G(x)}. \quad (4.8)$$

Visto que cada unidade de pesca  $u\Delta t$  acarreta um custo igual a:

$$ce\Delta t = \frac{c}{G(x)}u\Delta t = b(x)u\Delta t = b(x),$$

concluimos que  $b(x)$  é o custo da pesca por unidade (ou tonelada), quando o nível da população é  $x$ . Visto que  $G(x)$  é uma função não decrescente, o custo da unidade pescada  $\frac{c}{G(x)}u\Delta t$  é uma função não crescente de  $x$ .

Digamos que uma indústria pesqueira deseje maximizar o total de receitas líquidas descontadas, obtidas da exploração de recursos naturais. Se  $\delta > 0$  é uma constante que representa a taxa de desconto, este objetivo pode ser expresso como a maximização do seguinte valor presente, obtido a partir de (4.3) substituindo  $P(t)$  pela receita econômica líquida  $R(x, e)$ :

$$VP = \int_0^T \exp[-\delta t] R(x, e) dt, \quad (4.9)$$

que, com  $R(x, e)$  dado em (4.7), fornece:

$$VP = \int_0^\infty \exp[-\delta t] \{p - b[x(t)]\} u(t) dt, \quad (4.10)$$

como o funcional objetivo. Como já vimos,  $\exp[-\delta t]$  é o fator que representa a descapitalização de valores futuros em um tempo arbitrário  $t \geq 0$ . De acordo com nossa hipótese, a indústria pesqueira tenta utilizar uma taxa de pesca  $u = u(t)$  que resulte no maior valor possível da expressão (4.10). As variáveis  $x(t)$  e  $u(t)$  devem satisfazer as restrições  $x(t) \geq 0$  e  $u(t) \geq 0$ . Na terminologia moderna, a maximização da expressão (4.10) sujeita a estas condições, é um problema da *teoria de controle ótimo*.

#### 4.4 Equilíbrio bioeconômico: o modelo de Gordon

A teoria econômica da pesca em áreas de livre acesso foi desenvolvida por H. S. Gordon em 1954. O modelo de Gordon, freqüentemente denominado modelo de Gordon-Schaefer, é um modelo de equilíbrio baseado na curva parabólica *produção*  $\times$  *esforço* relacionada ao modelo de Schaefer (figura 2.7) que representa a produção sustentável  $Y(e) = qex^* = qKe \left(1 - \frac{qe}{r}\right)$ , em função do esforço  $e$ , aplicado à pesca.

Segundo a teoria de Gordon, na pesca em áreas de livre acesso, o esforço tende a alcançar um equilíbrio (*bionomic equilibrium*, que traduzimos por *equilíbrio bioeconômico*) no nível  $e = e_\infty$ , no qual a receita total  $TR$  é igual ao custo total  $TC$  (CLARK 1990). Em outras palavras, o esforço  $e_\infty$  que corresponde ao equilíbrio bioeconômico (determinado por parâmetros biológicos e econômicos) é, segundo Gordon, aquele que corresponde à dissipação completa do rendimento (lucro) econômico, isto é:

$$TR - TC = 0 \quad \text{quando } e = e_\infty, \quad (4.11)$$

além da condição de equilíbrio biológico  $\frac{dx}{dt} = 0$ , que evidentemente deverá também ser satisfeita.

Substituindo em (4.11)  $TR$  e  $TC$  de acordo com as equações (4.1) e (4.2), obtemos:

$$pY(e_\infty) - ce_\infty = 0. \quad (4.12)$$

Se representarmos por  $x_\infty$  o nível de estoque que corresponde ao equilíbrio bioeconômico, concluímos que, para o modelo de Schaefer, o seguinte sistema deverá ser satisfeito:

$$\begin{aligned} rx_\infty \left(1 - \frac{x_\infty}{K}\right) - qe_\infty x_\infty &= 0 \\ pqe_\infty x_\infty - ce_\infty &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da segunda equação, no sistema (4.13), e considerando que  $e$  não pode ser negativo, obtemos as soluções como segue:

- a)  $e_\infty = 0$ , que substituído na primeira de (4.13) fornece  $x_\infty = 0$  ou  $x_\infty = K$  ou  
 b)  $e_\infty > 0$  e  $x_\infty = \frac{c}{pq}$ , que substituído em (4.13) fornece  $e_\infty = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right)$ , desde que seja satisfeita a desigualdade  $c < pqK$ .

Observamos que, se forem dados os parâmetros biológicos  $r$ ,  $q$  e  $K$ , então  $e_\infty$  depende apenas da razão  $\frac{c}{p}$  (custo/preço). Além disso, para qualquer que seja o valor do esforço  $e_\infty > 0$ , tem-se sempre  $x_\infty > 0$ ; isto é, o modelo de Gordon jamais leva à extinção da espécie.

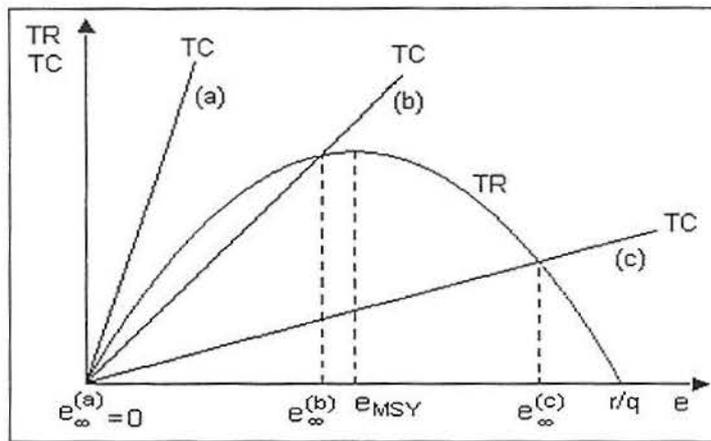


Figura 4.1: Determinação do esforço  $e_\infty$ , que corresponde ao equilíbrio bioeconômico de Gordon, para (a)  $c > pqK$ , (b)  $c < pqK$  e  $e_\infty^{(b)} < e_{MSY}$ , (c)  $c < pqK$  e  $e_\infty^{(c)} > e_{MSY}$ .

Graficamente um equilíbrio bioeconômico de Gordon é representado por um ponto de intersecção entre a curva (parábola):

$$f_1(e) = TR = pY(e) = pqKe \left(1 - \frac{qe}{r}\right) \quad (4.14)$$

e a reta

$$f_2(e) = TC = ce, \quad (4.15)$$

como mostramos na figura 4.1, para diversos valores da razão  $\frac{c}{p}$ ; esta razão diminui na medida em que é aumentado o preço  $p$  do peixe no mercado ou é reduzido (por exemplo através de alguma inovação tecnológica) o custo  $c$  da pesca. Observamos ainda, que a parábola  $TR$  na figura 4.1 é obtida a partir daquela apresentada para

$Y(e)$  na figura 2.7 multiplicando-se as ordenadas pelo preço unitário  $p$  de acordo com a equação (4.14). A reta (a) representa uma situação de custos muito altos com relação ao preço do peixe ( $c > pqK$ ), para a qual, como mostramos acima, não corresponde ao equilíbrio bioeconômico de Gordon; este resultado está de acordo com o que poderia se esperar (a pesca não compensa). Diminuindo o valor da razão  $\frac{c}{p}$ , temos as situações das retas (b) e (c), nesta ordem, que correspondem respectivamente a  $e_\infty < e_{MSY}$  e a  $e_\infty > e_{MSY}$ , sendo  $e_{MSY} = \frac{r}{2q}$  o esforço que corresponde à máxima produção sustentável biológica (figura 2.7). Em outras palavras, na situação (b) não ocorre pesca em excesso sob o enfoque biológico enquanto que na situação (c), onde a razão *custo/preço* é muito baixa, tal excesso é observado, sendo que neste caso se conseguirmos reduzir o esforço, terá o duplo efeito de aumentar receitas e decrescer custos de pesca.

A análise de Gordon sugere que quando o preço do peixe aumenta ou quando alguma inovação tecnológica reduz o custo da pesca, poderá acarretar uma pesca em excesso do ponto de vista biológico e também do ponto de vista econômico, fato este que foi observado historicamente.

## 4.5 Política de redução do esforço

Consideremos, por exemplo, uma área de pesca com livre acesso, que tenha o seu equilíbrio bioeconômico de Gordon (lucro nulo), caracterizado por uma pesca biologicamente excessiva, isto é, quando a retirada com esforço ( $e$ ) constante excede a produção máxima sustentável (capítulo 2.2) (ponto A da figura 4.2).

Suponhamos que seja contratada uma empresa de gerenciamento para operar nesta área. A primeira providência tomada por empresas reguladoras é reduzir o esforço de pesca, através de restrições quanto ao tipo de utensílios usados, quantidade pescada e redução das estações de pescas. Restrições deste tipo, geralmente aumentam os custos. Por exemplo, restrições sobre o uso de certos utensílios

reduz a eficiência do esforço. Períodos de proibição de pesca também diminuem a eficiência pois muitos pescadores ficam ociosos durante tais períodos.

É óbvio, entretanto, que um aumento de custos de pesca pode ser uma forma efetiva de se obter uma diminuição do esforço, e conseqüentemente um aumento na produção sustentável. A reta de custos pode ser ajustada para encontrar a curva de receita ( $f_2 = pY(e)$ ) no ponto de *MSY*, que então se torna o ponto de equilíbrio bioeconômico quando  $f_1 = ce$  (ponto B da figura 4.2). Entretanto, economistas ligados à indústria pesqueira criticam severamente tais métodos de controle alegando a introdução deliberada da ineficiência econômica (despesa em excesso).

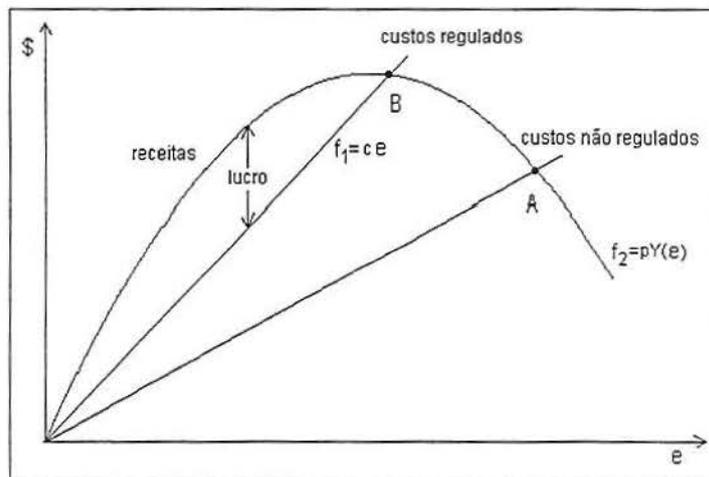


Figura 4.2: Gráfico ( $\$ \times$  Esforço) da regulamentação através do aumento de custos para pesca. As retas representam os custos  $TC$  e a curva, receitas  $TR$ .

Visto que o nível de esforço  $e_\infty$  do equilíbrio bioeconômico de Gordon é ineficiente, foi posteriormente sugerido que o nível ótimo de esforço de pesca poderia ser aquele que maximizasse o rendimento econômico sustentável (lucro)  $TR - TC$  (ver figura 4.2). O problema, no entanto, desta sugestão está no fato de que estaria sendo deixado um ingrediente essencial do problema que é a *dinâmica* de ambos os processos econômico e biológico. É evidente, por exemplo, que partindo de um equilíbrio bioeconômico como o ponto A da figura 4.2, a decisão de reduzir o nível de esforço de pesca com o objetivo final de aumentar sua produção sustentável terá,

antes de atingir este objetivo, um efeito imediato de decréscimo na sua produção  $Y = qex$ , para depois de um certo intervalo de tempo voltar a aumentar e por fim ultrapassar a inicial. Concluimos, portanto, que para ter produções futuras aumentadas, deve-se “pagar o preço” de ter níveis de pesca no presente reduzidos.

O problema fundamental é, portanto, o de determinar o “balanço” ótimo a ser constituído entre produto presente e produto futuro. A ferramenta padrão para resolver questões de ganhos econômicos intertemporais é o *desconto temporal*, cujo conceito introduzimos na seção 4.1; é o que usaremos na seção seguinte. Cabe observar que o conceito de maximizar o rendimento econômico sustentável equivale a assumir, no enfoque que abordaremos a seguir, uma taxa de desconto nula; isto significa que baseia-se em supor que os sacrifícios no presente são irrelevantes, desde que levem ao final a crescimentos permanentes nos ganhos econômicos.

No que segue, neste capítulo, nosso objetivo não será o de determinar um método ótimo de controlar o esforço, mas sim o de maximizar o valor presente expresso na equação (4.10). Para tanto vamos supor que seja possível encontrar um método de controle que não implique em aumento de custos de pesca. Iremos supor, então, que os custos de esforço de pesca possam ser fixados.

## 4.6 Política de Ceifa Ótima

O modelo linear de pesca tratado aqui (a variável de controle  $u(t)$  é linear em  $e$ ) é baseado na hipótese que a taxa de retirada não afeta o preço do produto no mercado. Esta hipótese é razoável para pequenas áreas de pesca que suprem uma pequena fração do total do produto colocado à disposição do mercado consumidor (CLARK 1990).

A análise de modelos não lineares, implica em estudos mais aprofundados da teoria econômica e situações específicas de mercado. Como o objetivo deste capítulo é dar somente uma idéia do aspecto econômico que envolve o processo de

produção ótima sustentável, nos concentraremos em modelos unidimensionais lineares.

Veremos a seguir três técnicas matemáticas que podem ser usadas para determinar a política de retirada  $u(t)$  que maximize o funcional objetivo definido na equação (4.10).

#### 4.6.1 Método de Cálculo Variacional

Esta técnica utiliza a equação de Euler (ver apêndice C equação C.7) para a solução de problemas de maximização.

Acrescentando uma taxa de retirada  $u(t)$  à equação logística de *Verhulst* (capítulo 2, equação (2.13)) obtemos

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - u(t), \quad \text{onde} \quad F(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right). \quad (4.16)$$

Substituindo  $u(t)$  por  $F(x) - \dot{x}$  em (4.10), obtemos:

$$VP = \int_0^{\infty} \exp[-\delta t] [p - b(x)] [F(x) - \dot{x}] dt. \quad (4.17)$$

Esta integral tem a forma

$$\int \phi(t, x, \dot{x}) dt,$$

e podemos aplicar a condição clássica de Euler ((C.7) apêndice C) para um máximo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}}. \quad (4.18)$$

Em nosso caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \exp[-\delta t] [p - b(x)] [F(x) - \dot{x}] \} \\ &= \exp[-\delta t] \{ -b'(x) [F(x) - \dot{x}] + [p - b(x)] F'(x) \} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \{ -\exp[-\delta t] [p - b(x)] \} \\ &= \exp[-\delta t] \{ \delta [p - b(x)] + b'(x) \dot{x} \}, \end{aligned}$$

que substituída em (4.18) fornece:

$$\delta = F'(x) - \frac{b'(x)F(x)}{p - b(x)}. \quad (4.19)$$

Em geral, a equação de Euler tem como resultado uma equação diferencial para uma função  $x(t)$  desconhecida; porém, neste caso, leva a uma equação numérica (4.19), implícita para a população  $x$ , que é chamada de caso *singular*, em cálculo variacional. Assumindo-se aqui, que  $x = x_{\acute{o}timo}$  é a única solução para a equação (4.19) e dada uma população inicial  $x(0)$ , temos que a política de retirada ótima utiliza uma taxa de retirada  $u_{\acute{o}timo}(t)$  para levar o nível da população  $x = x(t)$  em direção ao equilíbrio ótimo  $x_{\acute{o}timo}$ , tão rápido quanto possível. Se  $u_{max}$  denota a taxa de retirada máxima, temos como resultados:

$$u_{\acute{o}timo}(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{quando } x > x_{\acute{o}timo} \\ F(x_{\acute{o}timo}) & \text{quando } x = x_{\acute{o}timo} \\ 0 & \text{quando } x < x_{\acute{o}timo} \end{cases} \quad (4.20)$$

Cabe salientar que este resultado não pode ser obtido diretamente do cálculo variacional.

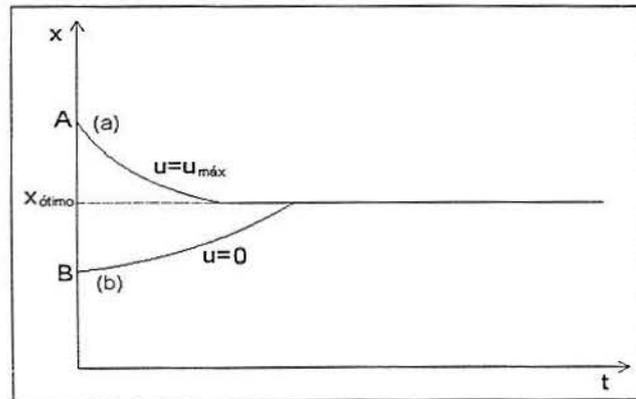


Figura 4.3: Trajetória ótima  $x = x(t)$ .

A figura 4.3 mostra o nível ótimo da população  $x = x(t)$ . Se a condição inicial  $x(0)$  estiver no ponto A, então a taxa de retirada máxima  $u_{max}$  reduz a população de  $x$  para  $x_{\acute{o}timo}$ ; em outras palavras, a curva (a) é a solução da equação (4.16) com  $u = u_{max}$ ; se  $x(0)$  estiver no ponto B, a pesca é suspensa ( $u = 0$ ) até a população

$x$  (que crescerá) atingir  $x_{\acute{o}timo}$ ; a curva  $(b)$  representa a solução da equação (4.16) com  $u = 0$ .

A política de retirada ótima resulta em uma produção equilibrada ao longo do tempo, diferente da forma “pulse fishing” através da qual, o estoque é altamente retirado e depois é dado um intervalo de tempo suficiente para que o estoque se recomponha.

### Uma interpretação de $\delta$ em termos do rendimento econômico sustentável

Para verificarmos como a taxa de desconto, no tempo, afeta a produção ótima  $Y_{\acute{o}timo} = F(x_{\acute{o}timo})$ , iniciaremos por reescrever a equação (4.19) da forma:

$$\frac{d}{dx}\{[p - b(x)]F(x)\} = \delta[p - b(x)]. \quad (4.21)$$

Nota-se que pela implicação  $u(t) \equiv F(x)$ , para a produção sustentada, a expressão

$$\rho(x) = [p - b(x)]F(x)$$

representa o *rendimento econômico sustentável* para o nível populacional  $x$ . Assim, de (4.21) temos:

$$\frac{d\rho}{dx} = \delta[p - b(x)]. \quad (4.22)$$

Esta equação tem uma interpretação marginal. Considerando o nível populacional no equilíbrio  $x^*$  (como nos caps. 2 e 3, usaremos  $x^*$  para representar  $x$  no equilíbrio) como uma variável de decisão, então um decréscimo marginal em  $x$  ( $\Delta x = 1$ ) produz uma receita líquida imediata igual a  $[p - b(x)]\Delta x = p - b(x)$ . Isto também causa um decréscimo no rendimento sustentável igual a  $\Delta\rho \approx \rho'(x)\Delta x = \rho'(x)$ . O valor presente desta perda de rendimentos é dado por:

$$\int_0^{\infty} \exp[-\delta t]\rho'(x)dt = \frac{1}{\delta} \frac{d\rho}{dx}.$$

Da equação (4.22) temos que quando o nível da população  $x$  é ótimo, o lucro marginal imediato deve ser igual ao valor presente da perda marginal futura.

### 4.6.2 Controle Linear

Este método não requer a aplicação do cálculo variacional, e isto se deve à linearidade do problema de otimização, em relação a variável de controle  $u(t)$ .

Agora, consideremos um problema geral de controle linear unidimensional cujo funcional objetivo é da forma:

$$\max_{u \in U} \int_{t_0}^{t_1} [f_0(t, x(t)) + g_0(t, x(t))u(t)] dt, \quad (4.23)$$

onde de (4.10) temos  $f_0 = p \cdot \exp[-\delta t]$  e  $g_0 = b(x) \exp[-\delta t]$  e  $x(t)$  satisfaz a equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x(t)) + g_1(t, x(t))u(t). \quad (4.24)$$

As funções  $f_0$  e  $g_0$  do *funcional objetivo* e  $f_1$  e  $g_1$  da *equação de estado*, são assumidas serem continuamente diferenciáveis.

A classe  $U$  de controles admissíveis  $u = u(t)$  consiste de funções contínuas por partes  $u(t)$ , no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , que satisfazem a restrição:

$$u_m \leq u(t) \leq u_M, \quad (4.25)$$

onde  $u_m$  e  $u_M$  são constantes ou, mais geralmente, funções de  $x$  e  $t$ . O tempo inicial  $t_0$  e final  $t_1$  são fixos e finitos. No nosso caso, que é de retirada ótima em uma área de pesca, podemos ter  $t_1 = \infty$  pois o estoque de recursos (peixes) é limitado. Este limite da população está entre 0 e a capacidade de suporte do meio ambiente  $K$ . Podemos verificar que a política de retirada ótima, para problemas com um tempo final infinito, é dada pela aproximação mais rápida de  $x(0)$  em direção à solução ótima  $x_{\text{ótimo}}$ , em um tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , e se mantém em qualquer tempo seguinte ( $t = \infty$ ). A variável estado  $x(t)$  assume valores iniciais e finais:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (4.26)$$

Sendo  $g_1(t, x) \neq 0$ , podemos eliminar  $u(t)$  do nosso problema isolando-o em (4.24) e substituindo-o em (4.23), onde obtemos:

$$\max_{x \in X} \int_{t_0}^{t_1} [G(x, t) + M(x, t)\dot{x}] dt, \quad (4.27)$$

com

$$G(x, t) = f_0(x, t) - \frac{g_0(x, t)f_1(x, t)}{g_1(x, t)} \quad e \quad M(x, t) = \frac{g_0(x, t)}{g_1(x, t)}\dot{x},$$

onde  $X$  é a classe de funções suaves por partes  $x(t)$  que satisfaz as condições iniciais (4.26) e a restrição (4.25) que assume a forma

$$L_1(x, t) \leq \dot{x}(t) \leq L_2(x, t). \quad (4.28)$$

Exceto por esta restrição, este é um problema simples de cálculo variacional do tipo  $\max \int f(t, x, \dot{x})dt$ , mas como  $f_{\dot{x}\dot{x}} \equiv 0$  a teoria clássica não pode ser aplicada (CLARK 1990). De fato, podemos verificar que na ausência da restrição dada por (4.28), o problema variacional (4.27) não pode ser resolvido, na forma que se apresenta. Agora, dada a restrição (4.28), se aplicarmos o método clássico que utiliza a equação de Euler (4.18), no problema variacional (4.27), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}\dot{x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}(M) = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x}\dot{x}, \end{aligned}$$

donde, igualando as duas equações, obtemos:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t}. \quad (4.29)$$

Esta equação estabelece uma relação implícita entre  $x$  e  $t$ . Qualquer função suave por partes  $x_{\acute{o}timo}(t)$  que satisfaça a equação (4.29) é chamada de *solução singular* do problema.

Suponhamos que a equação (4.29) determine um único caminho singular  $x = x_{\acute{o}timo}(t)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Observa-se que  $x_{\acute{o}timo}(t)$  não deve ser a solução ótima desejada a não ser que tenhamos a coincidência de  $x_{\acute{o}timo}(t_0) = x_0$  e  $x_{\acute{o}timo}(t_1) = x_1$ . De qualquer forma,  $x_{\acute{o}timo}(t)$  é o caminho mais próximo que se pode ter, isto é, a solução ótima  $x(t)$  está tão próxima de  $x_{\acute{o}timo}(t)$  quanto possível, sujeita às condições de contorno (4.26) e à restrição (4.28).

Se,  $x(t_0) = x_0 \neq x_{\acute{o}timo}(t_0)$  e  $x(t_1) = x_1 \neq x_{\acute{o}timo}(t_1)$  forem as condições de contorno, e representando por  $t_a$  o instante de tempo em que  $x(t)$

encontra  $x_{\acute{o}timo}(t)$ , isto é, tal que  $x(t_a) = x_{\acute{o}timo}(t_a)$ , temos os intervalos de tempo  $t_0 \leq t \leq t_a$  e  $t_b \leq t \leq t_1$  (ver figura 4.4) onde  $x$  é diferente do caminho singular  $x_{\acute{o}timo}(t)$  (intervalo  $[t_a, t_b]$ ) e portanto a igualdade de (4.29) não se verifica.

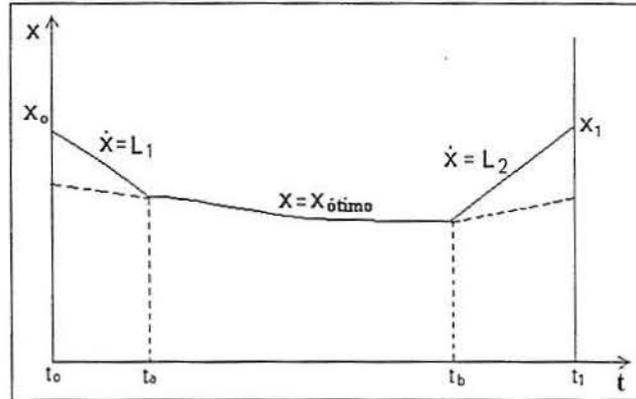


Figura 4.4: Trajetória ótima (curva sólida) para um problema de controle linear.

O teorema a seguir (CLARK 1990), prova que para estes intervalos de tempo a equação (4.29) torna-se  $\frac{\partial G}{\partial x} > \frac{\partial M}{\partial t} > 0$  e:

1- Se  $x_0 > x_{\acute{o}timo}(t_0)$ , então o caminho ótimo  $x(t)$  usa a taxa de decréscimo mais rápida possível; isto é

$$\dot{x} = L_1(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

até o caminho singular  $x_{\acute{o}timo}(t)$  ser encontrado. Da mesma forma, se  $x_0 < x_{\acute{o}timo}(t_0)$ , então  $x(t)$  usa a taxa mais rápida de crescimento

$$\dot{x} = L_2(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

até que  $x_{\acute{o}timo}(t)$  seja alcançado.

2- Se  $x_1 \neq x_{\acute{o}timo}(t_1)$ , então  $x(t)$  é a solução da equação apropriada de restrição para  $t_b \leq t \leq t_1$ .

3- Finalmente,  $x(t) = x_{\acute{o}timo}(t)$  para  $t_a \leq t \leq t_b$  que é o caminho singular dado por (4.29).

### Teorema

Suponha que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} > \frac{\partial M}{\partial t} & \text{ sempre que } x > x'_{\text{ótimo}}(t), \\ \frac{\partial G}{\partial x} < \frac{\partial M}{\partial t} & \text{ sempre que } x < x'_{\text{ótimo}}(t), \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde  $x'_{\text{ótimo}}(t)$  é a única solução da equação (4.29). Além disso, assumimos que  $x'_{\text{ótimo}}(t)$  é uma trajetória possível, no sentido em que se  $u'_{\text{ótimo}}(t)$  é definido pela equação (4.24) usando  $x(t) = x'_{\text{ótimo}}(t)$ , então  $u'_{\text{ótimo}}(t) \in U$  para todo  $t$ . Então a solução ótima para o problema apresentado em (4.27) e (4.28) é a *trajetória mais próxima possível*  $x(t)$  (ver figura 4.4).

Se a desigualdade dada pela equação (4.30) for  $\frac{\partial G}{\partial x} < \frac{\partial M}{\partial t}$ , a solução dada pelo teorema é uma minimização.

*Prova.* A prova é baseada na aplicação do teorema de Green no plano, a qual decorre da possibilidade de escrever o funcional objetivo dada por (4.27) como uma integral de linha:

$$\int_{t_0}^{t_1} [G(x, t) + M(x, t)\dot{x}]dt = \int_C [Gdt + Mdx],$$

onde  $C$  é a curva  $x = x(t)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Supondo que a situação seja, como mostrado na figura 4.5, tal que a curva sólida  $x(t)$  denotada por  $PSRTV$  é a dita trajetória ótima ( $x(t) = x'_{\text{ótimo}}(t)$ ). Considere uma outra curva arbitrária possível  $x_1(t)$  indo de  $(t_0, x_0)$  para  $(t_1, x_1)$ , representada pela linha tracejada  $PQRUV$ . Visto que a curva  $x(t)$  satisfaz a igualdade da restrição  $\dot{x} = A(x, t)$  para  $t < t_a$  (ver figura 4.4), é claro que

$$x_1(t) \leq x(t) \text{ para } t_0 \leq t \leq t_a.$$

Suponhamos, que

$$x_1(t) < x(t) \text{ para } t_0 < t < t_R,$$

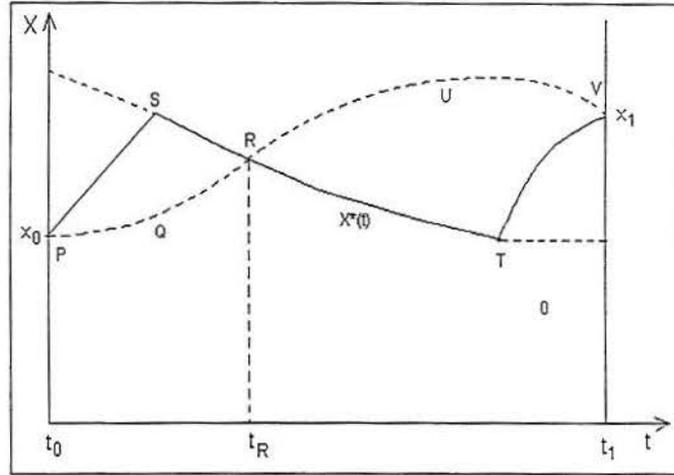


Figura 4.5: Prova do teorema da aproximação mais rápida.

e  $x_1(t_R) = x(t_R)$ . Temos então, pelo teorema de Green, que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_R} [G(x, t) + M(x, t)\dot{x}]dt - \int_{t_0}^{t_R} [G(x_1, t) + M(x_1, t)\dot{x}_1]dt \\ &= \int_{PSR} Gdt + Mdx - \int_{PQR} Gdt + Mdx \\ &= \iint \left[ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial t} \right] dxdt \end{aligned}$$

onde a integral dupla se estende sobre a região contornada pela curva PQRSP. Visto que, a região fica abaixo do caminho singular  $x_{\text{ótimo}}(t) = x(t)$ , a primeira hipótese dada pela equação (4.30) implica que

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial t} > 0 \quad (4.31)$$

na região em questão. Portanto, a integral dupla acima é positiva.

Para o mesmo cálculo aplicado ao intervalo  $t_R \leq t \leq t_1$ , onde  $x_1(t) > x^*(t)$ , temos a segunda desigualdade de (4.30) e a orientação da curva de contorno correspondente  $RTVUR$  é no sentido contrário. Portanto, obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1} [G(x, t) + M(x, t)\dot{x}]dt > \int_{t_0}^{t_1} [G(x_1, t) + M(x_1, t)\dot{x}_1]dt.$$

Este argumento se estende sobre todas as configurações geométricas geradas pela curva  $x(t)$ , estando assim o teorema provado.

### 4.6.3 Teoria do Controle Ótimo

A *teoria do controle ótimo*, é uma técnica mais completa que resolve problemas de otimização. Esta técnica é uma extensão do cálculo variacional clássico que resolve problemas lineares, não-lineares e multidimensionais, e que possuam restrições envolvendo desigualdades.

#### 4.6.3.1 Problema de Controle Unidimensional

Consideremos o funcional objetivo dado por:

$$\max_{u \in U} \int_0^T g[x, t, u(t)] dt, \quad (4.32)$$

e a equação diferencial contínua de três variáveis reais  $x$ ,  $t$  e  $u$

$$\frac{dx}{dt} = f[x, t, u(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.33)$$

com a condição inicial

$$x(0) = x_0. \quad (4.34)$$

A variável  $x = x(t)$  é chamada de *variável de estado* pois normalmente descreve o estado de algum sistema, em um tempo  $t$ . A equação (4.33), chamada de *equação de estado*, descreve a evolução do sistema, após a aplicação de um controle  $u = u(t)$  e o tempo final  $T$  é suposto finito.

A classe  $U$  de controles admissíveis definida em (4.25), é a classe de todas as funções reais contínuas por partes  $u(t)$  definidas no intervalo  $0 \leq t \leq T$  que satisfazem

$$u(t) \in U_t, \quad (4.35)$$

onde  $U_t$  é chamado conjunto de controle. Dado um controle particular  $u(t)$ , com  $0 \leq t \leq T$ , a solução  $x(t)$  da equação (4.33) é dita ser a resposta para este problema. Assim, define-se um *controle possível* como sendo qualquer controle admissível tal

que a resposta satisfaça as condições inicial e final. O princípio do máximo, que apresentaremos a seguir, estabelece condições necessárias que devem ser satisfeitas para um controle ótimo.

O **Princípio do máximo** é convenientemente formulado nos termos de:

$$\mathcal{H} = [x(t), t, u(t); \lambda(t)] = g[x(t), t, u(t)] + \lambda(t)f[x(t), t, u(t)], \quad (4.36)$$

chamado de *Hamiltoniano*, onde  $\lambda(t)$  é uma função desconhecida chamada de *variável adjunta*. Se  $u(t)$  é um controle ótimo e  $x(t)$  é a resposta correspondente, então o princípio do máximo expressa a existência de uma variável adjunta  $\lambda(t)$  tal que as seguintes equações são satisfeitas, para todo  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} - \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4.37)$$

$$\mathcal{H} = [x(t), t, u(t); \lambda(t)] \equiv \max_{u \in U_t} \mathcal{H}[x(t), t, u; \lambda(t)]. \quad (4.38)$$

Estas equações se referem ao controle ótimo  $u(t)$ , associado à resposta  $x(t)$  e à correspondente variável adjunta  $\lambda(t)$ . Elas são as condições necessárias que devem ser satisfeitas pelo controle ótimo e pela resposta. Das equações (4.37) e (4.38) temos três funções desconhecidas a determinar:  $x(t)$ ,  $u(t)$  e  $\lambda(t)$ . Para estas três funções, temos três equações: a equação de estado (4.33), a equação adjunta (4.37) e o Hamiltoniano (4.38).

A equação (4.38) referida como o princípio do máximo expressa que, em um dado tempo  $t$  o valor  $u(t)$  do controle ótimo deve maximizar o valor da expressão *Hamiltoniana*, sobre todos os valores admissíveis de  $u$  satisfazendo a restrição de controle (4.35).

Multiplicando-se por  $(-1)$  a equação adjunta (4.37) temos

$$-\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (4.39)$$

A interpretação econômica dada por Chiang (CHIANG 1992) é a de que o lado esquerdo da equação (4.39) denota a taxa de decréscimo do preço projetado, sobre

o tempo, ou a taxa de depreciação do preço projetado. O primeiro termo do lado direito, representa a contribuição marginal do estoque (população) para o lucro corrente, e o segundo termo representa a contribuição marginal da população, no aumento da quantidade do estoque (para os economistas  $x$  representa capital e para nós, população).

Observa-se que se o controle ótimo  $u(t)$  pertencer ao interior do intervalo de controle  $U_t$  então a equação (4.38) implica que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0. \quad (4.40)$$

Estas equações (quase sempre) implicam na equação de Euler (apêndice C (C.7)).

Como uma aplicação do princípio do máximo, consideremos o seguinte problema variacional linear, que consiste em maximizar o funcional  $J$  dado pela integral abaixo:

$$J = \int_0^T [G(x, t) + M(x, t)\dot{x}]dt, \quad (4.41)$$

$$L_1(x, t) \leq \dot{x}(t) \leq L_2(x, t). \quad (4.42)$$

Se a equação de estado (4.33) for dada por

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (4.43)$$

temos para o Hamiltoniano (4.36), deste problema

$$\mathcal{H} = [G + Mu] + \lambda u = G + (M + \lambda)u. \quad (4.44)$$

De acordo com a equação (4.38), o controle  $u(t)$  deve maximizar esta expressão. A função troca (switching)  $\sigma(t)$  é definida como

$$\sigma(t) = M(x, t) + \lambda(t). \quad (4.45)$$

Então,  $u(t)$  deve satisfazer

$$u(t) = \begin{cases} L_2(x, t), & \text{sempre que } \sigma > 0 \\ L_1(x, t), & \text{sempre que } \sigma < 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

O controle que utiliza estes valores extremos é chamado de controle *bang-bang*. Quando a função troca se anula  $\sigma(t) = M(x, t) + \lambda(t) = 0$  (estamos sobre o caminho singular), o Hamiltoniano torna-se independente de  $u$ , tal que o princípio do máximo não especifica o valor do controle. O controle singular pode então ser determinado como segue:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{d\lambda}{dt}$$

usando (4.37) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} u + \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} u + \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x} u \\ &= \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Assim, o caso singular  $\sigma(t) = 0$  corresponde à solução singular  $x = x_{\acute{o}timo}$  e o controle singular correspondente é simplesmente  $\dot{x} = x_{\acute{o}timo}$ .

Portanto, o princípio do máximo implica que um controle ótimo  $u = \frac{dx}{dt}$  para este problema linear deve ser uma combinação dos controles bang-bang e singular. Por exemplo, na figura 4.4 o controle bang-bang deve ser aplicado nos intervalos  $[t_0, t_a]$  e  $[t_b, t_1]$  e o controle singular  $u(t) = x_{\acute{o}timo}$ , no intervalo  $[t_a, t_b]$ .

**Condições de transversalidade** - Em certos problemas, o valor final  $x(T)$  não é especificado para a variável de estado, sendo referido como um *problema de valor final livre* (equação (C.9) apêndice C). Neste caso, o princípio do máximo adiciona então a condição de transversalidade

$$\lambda(T) = 0. \quad (4.47)$$

Por exemplo, suponhamos que o nível final do estoque  $x(T)$  não seja especificado no modelo (capítulo 2):

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J = \int_0^T \exp[-\delta t] \{p - c(x)\} u(t) dt. \quad (4.48)$$

O Hamiltoniano para este problema é dado por

$$\mathcal{H} = \exp[-\delta t] \{p - c(x)\} u + \lambda(t) \{F(x) - u\}, \quad (4.49)$$

e a função troca é

$$\sigma(t) = \exp[-\delta t] \{p - c(x)\} - \lambda(t). \quad (4.50)$$

Então, ao longo do caminho singular  $\sigma(t) = 0$  temos

$$\lambda(t) = \exp[-\delta t] \{p - c(x)\}. \quad (4.51)$$

Como  $p > c(x'_{\text{ótimo}})$ , a condição de transversalidade (4.47) implica que devemos abandonar o caminho singular  $x = x'_{\text{ótimo}}$  antes de  $t = T$ . E quando fora do caminho singular, devemos usar o controle bang-bang  $u = 0$  ou  $u_{\text{max}}$ . É claro que  $u = 0$  não é ótimo (produção nula), mas  $u = u_{\text{max}}$  para  $t$  próximo de  $T$  produz uma contribuição relevante para o valor presente.

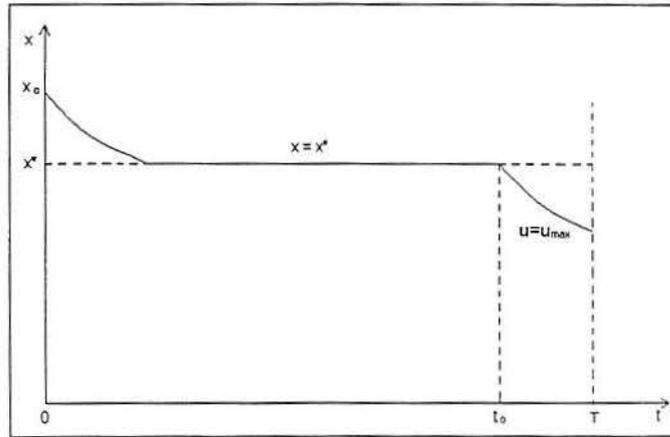


Figura 4.6: Caminho ótimo para  $x(t)$  (curva sólida).

Assim, a condição de transversalidade segue uma lógica: a política de retirada ótima segue um caminho singular para  $t \leq t_0$  e então usa a taxa de retirada ótima  $u = u_{\text{max}}$  para  $t_0 < t < T$  (figura 4.6). O verdadeiro valor de  $x(T)$  alcançado, deve satisfazer  $x_{\infty} \leq x(T) < x'_{\text{ótimo}}$ . Nos casos de desconto positivo ( $\delta > 0$ ), em modelos de recursos renováveis,  $T = \infty$  é ignorado.

#### 4.6.3.2 Problema de Controle Multidimensional

Aqui, trataremos de problemas de controle linear, na maximização de lucros, em modelos com duas ou mais espécies. As variáveis de estado e de controle tornam-se quantidades vetoriais multidimensionais, as condições finais são generalizadas e um pagamento final é incluído no funcional objetivo. Consideremos então, o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.52)$$

O vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  é chamado de *vetor de estado* e as componentes  $x_i$  são chamadas de *variáveis de estado*. Da mesma forma,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  é o *vetor de controle* e suas componentes são as *variáveis de controle*. Admitimos, aqui, que cada  $u_i$  seja uma função contínua por partes, no tempo  $t$ , que o valor inicial da variável estado seja  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ , que o conjunto de controle  $\mathbf{u}(t) \in U_t$  e  $U_t$  seja um conjunto fechado e, finalmente, que as condições finais sejam conhecidas para as  $k$  primeiras componentes:

$$x_i(T) = x_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \text{onde } 0 \leq k \leq n. \quad (4.53)$$

A equação de estado pode ser escrita de uma forma mais simplificada, ou seja,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.54)$$

e o funcional objetivo tem a forma

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T f^0(x, t, \mathbf{u}) dt + G[\mathbf{x}(T), T]. \quad (4.55)$$

O termo  $G[\mathbf{x}(T), T]$ , com  $T$  fixo, representa o *pagamento final*. O problema é encontrar um controle ótimo que seja possível, isto é, um controle no qual a resposta  $x(t)$  satisfaça as condições finais dadas em (4.53) e que maximize  $J(\mathbf{u})$ . Embora consideremos que o controle  $\mathbf{u}(t) \in U_t$ , não podemos assegurar que o controle ótimo exista. Muitos controles admissíveis são encontrados mas falham, sob certas condições, na

obtenção de uma solução ótima. Nestes casos, é necessário uma reformulação, que consiste na alteração da classe de soluções matematicamente aceitáveis e em casos mais complicados, muitas vezes é preciso uma reformulação do problema. Como exemplo, podemos citar o problema da seção 3.4.2:

$$\text{maximize } \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, t, \dot{\mathbf{x}}) dt, \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}^i,$$

com  $f(\mathbf{x}, t, \dot{\mathbf{x}})$  linear em  $\dot{\mathbf{x}}$ . Este problema não possui solução em uma classe usual de curvas suaves por partes  $x(t)$ . Um modo de resolver isto é restringindo à classe de soluções admissíveis, isto é, por meio de desigualdade em  $\dot{\mathbf{x}}$ .

**Princípio do máximo-** Se o problema de controle dado por (4.53)-(4.55) possui uma solução ótima  $u(t)$  com resposta  $x(t)$ , o princípio do máximo estabelece algumas condições necessárias que deverão ser satisfeitas. O primeiro passo é a introdução do *Hamiltoniano*

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t; \lambda) = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (4.56)$$

onde  $\lambda_0$  é constante e  $\lambda_i(t)$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , são incógnitas chamadas de *variáveis adjuntas*. Estas variáveis adjuntas devem satisfazer a equação adjunta

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\sum_{j=0}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.57)$$

e devemos ter  $(\lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)^2 \neq 0$ , isto é, todos os multiplicadores não podem ser nulos ao mesmo tempo e

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_0 = 1. \quad (4.58)$$

E mais, devemos ter  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$  para

$$\mathcal{H}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t; \lambda(t)] = \max_{\mathbf{u} \in U_t} \mathcal{H}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t; \lambda(t)]. \quad (4.59)$$

Finalmente, para cada variável de estado que não tenha o valor final especificado por (4.53), temos uma correspondente condição de transversalidade ((C.9) apêndice C):

$$\lambda_i(T) = \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad i = k+1, \dots, n. \quad (4.60)$$

Se o tempo final  $T$  não for pré-estabelecido, então temos uma condição adicional

$$\mathcal{H} + \frac{\partial G}{\partial T} = 0 \quad \text{para } t = T. \quad (4.61)$$

Em resumo, se  $u(t)$  for um controle ótimo para um dado problema e  $x(t)$  a resposta correspondente, então deve existir um vetor  $\lambda(t)$  tal que todas as condições nas equações (4.57) a (4.61) sejam satisfeitas. O caso em que  $\lambda_0 = 0$  em (4.58) é considerado *anormal* e não pode aparecer quando  $n = 1$ , pois neste caso recai-se em um problema unidimensional.

#### 4.6.4 Aplicação ao modelo de Schaefer

A seguir, aplicaremos a teoria do controle ótimo ao modelo de crescimento logístico de *Verhulst* com um termo de pesca  $u(t) = qex$  conhecido como *modelo de Schaefer*. Então, dada a equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qex, \quad (4.62)$$

e o funcional objetivo

$$VP = \max \int_0^{\infty} \exp[-\delta t] \left(p - \frac{c}{x}\right) qex dt, \quad (4.63)$$

sujeito a

$$0 \leq e \leq e_{max} \quad (4.64)$$

encontramos o Hamiltoniano como segue:

$$\mathcal{H} = \exp[-\delta t](pqx - c)e + \lambda[F(x) - qex]. \quad (4.65)$$

O caminho singular aparece quando o coeficiente de  $e$  no Hamiltoniano é zero, ou seja:

$$\sigma(t) = \exp[-\delta t](pqx - c) - \lambda x = 0, \quad (4.66)$$

de onde obtemos a condição de transversalidade dada pela expressão, para a variável adjunta  $\lambda$ , que é

$$\lambda = \exp[-\delta t] \left(p - \frac{c}{qx}\right). \quad (4.67)$$

Da equação adjunta

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (4.68)$$

temos

$$\frac{d\lambda}{dt} = \exp[-\delta t] \left[ -\delta \left( p - \frac{c}{qx} \right) + \frac{c}{qx^2} \frac{dx}{dt} \right] \quad (4.69)$$

e

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\exp[-\delta t] p q e + \lambda [q e - F'(x)]. \quad (4.70)$$

Substituindo  $\lambda$  dado em (4.67) em (4.70) e igualando novamente (4.69) e (4.70)

temos:

$$\exp[-\delta t] \left[ -\delta \left( p - \frac{c}{qx} \right) + \frac{c}{qx^2} \frac{dx}{dt} \right] = -\exp[-\delta t] \left[ p q e - \left( p - \frac{c}{qx} \right) \right] [q e - F'(x)].$$

Simplificando a expressão acima, reconhecendo  $\frac{dx}{dt} = F(x) - q e x$  e isolando  $\delta$  temos

$$\delta = F'(x) + \frac{b(x)F(x)}{qx(pq - b(x))}, \quad (4.71)$$

que concorda com a equação (4.19) para o estoque ótimo no equilíbrio  $x^*$ , notando que temos  $b(x) = \frac{c}{x}$ .

O princípio do máximo afirma que  $e(t)$  deve ser tal que a expressão Hamiltoniana (4.65) é maximizada. Como na equação (4.46), isto significa que  $e(t)$  deve ser um controle singular ou  $e(t)=0$  ou  $e_{max}$ . Para se obter a aproximação mais rápida, devemos ter

$$e(t) = \begin{cases} e_{max}, & \text{quando } x(t) > x_{\acute{o}timo} \\ F(x) & \text{quando } x(t) = x_{\acute{o}timo} \\ 0 & \text{quando } x(t) < x_{\acute{o}timo} \end{cases} \quad (4.72)$$

onde o controle singular aparece quando  $x(t)=x_{\acute{o}timo}$ .

Calcularemos a seguir o  $x_{\acute{o}timo}$ , substituindo  $F(x)$  pela equação logística em (4.21) e considerando  $b(x) = \frac{c}{x}$ ; obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( p - \frac{c}{qx} \right) rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right] = \delta \left( p - \frac{c}{qx} \right). \quad (4.73)$$

Após diferenciarmos esta equação torna-se uma equação quadrática em  $x$ , onde a solução positiva é dada por:

$$x_{\acute{o}timo} = \frac{K}{4} \left[ \left( 1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{r} \right) + \sqrt{\left( 1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{r} \right)^2 + \frac{8c\delta}{pqrK}} \right]. \quad (4.74)$$

Para simplificar esta expressão, introduziremos as seguintes quantidades adimensionais:

$$z_{\acute{o}timo} = \frac{x_{\acute{o}timo}}{K}, \quad z_{\infty} = \frac{x_{\infty}}{K} = \frac{c}{pqK}, \quad \gamma = \frac{\delta}{r}. \quad (4.75)$$

Então,  $z_{\acute{o}timo}$  representa a biomassa como uma proporção da capacidade de suporte do meio ambiente,  $z_{\infty}$  é o nível de biomassa de dissipação de rendimentos correspondente, determinado pela razão  $\frac{c}{p}$  (ver seção 4.4 Modelo de Gordon) e  $\gamma$  é a razão da taxa de desconto pela taxa de crescimento intrínseca da população, à qual podemos nos referir adequadamente como a *razão do crescimento bioeconômico*.

Substituindo as quantidades adimensionais (4.75) em (4.74), temos a expressão que calcula  $z_{\acute{o}timo}$  dada por:

$$z_{\acute{o}timo} = \frac{1}{4} [1 + z_{\infty} - \gamma + \sqrt{(1 + z_{\infty} - \gamma)^2 + 8z_{\infty}\gamma}]. \quad (4.76)$$

A taxa de desconto  $\delta = 0$  ( $\gamma = 0$ ) produz um nível de população  $z_{\acute{o}timo} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z_{\infty}$  que é sempre maior que o nível de  $MSY$ ,  $z_{MSY} = 0.5$ . Isto está de acordo com o que foi discutido no final da seção 4.5, visto que uma taxa de desconto nula equivale à política de gerenciamento “mais conservativa” de maximização do rendimento econômico sustentável, pois significa que as receitas futuras não são descontadas com relação às receitas atuais (do presente); neste caso, o sacrifício necessário dos lucros atuais não afeta a decisão de otimização porque, não

importando quão pequeno nem quão a longo prazo, irá durar para sempre e, não sendo descontado, justifica qualquer perda (sacrifício) no presente.

Taxas de desconto positivas conduzem a níveis de população ótima  $z'_{ótimo}$  progressivamente decrescentes que se aproximam de  $z_{\infty}$  quando  $\gamma = \frac{\delta}{r} \rightarrow +\infty$ . De fato, o caso  $\delta \rightarrow +\infty$  constitui a extremidade oposta a  $\delta = 0$  do espectro e corresponde à política “menos conservativa” de dissipação do rendimento econômico, como no modelo de Gordon; adotar uma taxa de desconto infinita, significa explorar a pesca exatamente no mesmo nível de estoque que seria alcançado sob condições de livre acesso (atribui-se valor nulo às receitas futuras). A solução para taxas de desconto positivas e finitas situa-se sempre entre os dois extremos  $\delta = 0$  e  $\delta \rightarrow +\infty$ . A variação de  $z'_{ótimo}$  em função de  $z_{\infty}$ , para vários valores da taxa de crescimento bioeconômico  $\gamma = \frac{\delta}{r}$ , é apresentada na figura 4.7; neste gráfico, podemos verificar as observações que fizemos acima.

A figura 4.8 mostra os valores de  $z'_{ótimo}$  como uma função de  $\gamma$  para diversos valores de  $z_{\infty}$ . Um caso extremo aparece quando  $z_{\infty} = 0$ , que ocorre quando os custos da pesca forem nulos; neste caso, a equação (4.76) reduz-se a  $z'_{ótimo} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma$ . Além disso,  $z'_{ótimo}$  neste caso é sempre menor que  $z_{MSY}$  e, sempre que a razão de crescimento bioeconômico  $\gamma > 1$ , o nível populacional de equilíbrio ótimo torna-se  $z'_{ótimo} = 0$ . Isto significa que, nesta situação, a política de pesca ótima leva à extinção mais rápida possível da população de recursos. Isto pode ser explicado intuitivamente, visto que quando  $\gamma > 1$ , tem-se que a taxa de desconto  $\delta$  é maior que a taxa de crescimento intrínseca  $r$  da população; então se assumirmos que a receita obtida com a pesca possa ser aplicada em outro tipo de investimento produzindo uma taxa de juros contínua maior ou igual a  $\delta$ , isto certamente paga o investimento na pesca, além de realizar o investimento alternativo.

Para ilustrar a teoria, Clark (1990), faz uma comparação entre as aplicações do modelo de Schaefer a duas populações específicas: o hipoglosso (*halibut*) que é uma espécie de peixe encontrado no norte do oceano Pacífico e a baleia com barbatana (*fin*) encontrada na Antártica. Foram escolhidas estas duas espécies

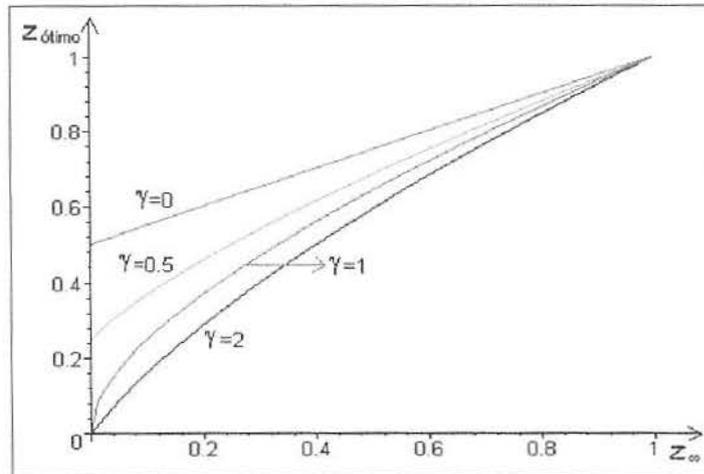


Figura 4.7: Níveis ótimos de populações (adimensionais)  $z_{\text{ótimo}}$  como função de  $z_{\infty}$  para vários valores de  $\gamma$ .

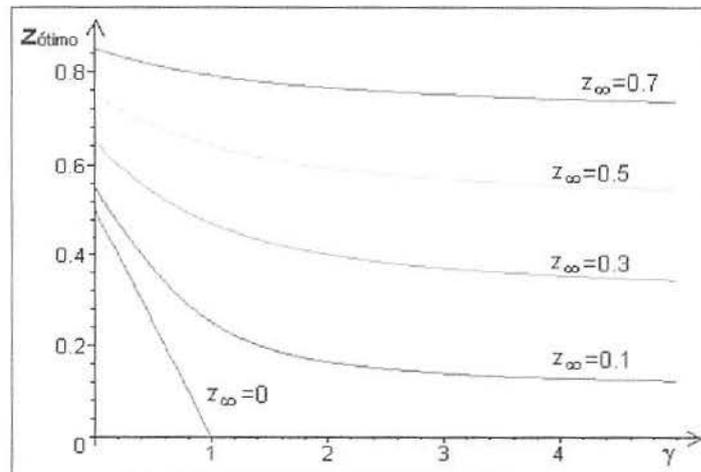


Figura 4.8: Níveis ótimos de populações (adimensionais)  $z_{\text{ótimo}}$  como função da taxa de crescimento bioeconômico  $\gamma$  para vários valores de  $z_{\infty}$ .

porque elas possuem taxas de crescimento bastante distintas: 0.71 por ano para o hipoglosso e 0.08 por ano para a baleia.

Além disso, são sugeridos os seguintes parâmetros dentro do modelo de Schaefer para o hipoglosso (halibut):

$$K = 80.5 \times 10^6 \text{ kg} \quad e \quad x_{\infty} = 17.5 \times 10^6 \text{ kg},$$

donde obtemos  $x_{MSY} = \frac{K}{2} = 40.25 \times 10^6 kg$ . Para a baleia com barbatana (fin), o modelo logístico não é muito adequado porque sua curva de crescimento não é simétrica; no entanto, para ilustrar, continuaremos usando o crescimento logístico com:

$$K = 400.000 \text{ baleias} \quad e \quad x_{\infty} = 40.000 \text{ baleias},$$

donde obtemos imediatamente  $x_{MSY} = \frac{K}{2} = 200.000$  baleias.

Para cada uma destas populações, após substituir os valores acima em:

$$x_{\acute{o}timo} = \frac{K}{4} \left[ 1 + \frac{x_{\infty}}{K} - \frac{\delta}{r} + \sqrt{\left( 1 + \frac{x_{\infty}}{K} - \frac{\delta}{r} \right)^2 + \frac{8x_{\infty}\delta}{Kr}} \right]$$

obtida de (4.75) e (4.76), traçamos os gráficos de  $x_{\acute{o}timo} \times \delta$  correspondentes, apresentados na figura 4.9. Em ambos os gráficos, podemos verificar que  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} x_{\acute{o}timo}$  confere com o valor de  $x_{\infty}$  utilizado. Além disso,

a) para  $\delta = 0$ , tem-se, tanto para o hipoglosso quanto para a baleia,

$$x_{\acute{o}timo}|_{\delta=0} > x_{MSY} = \frac{K}{2};$$

b) à medida que  $\delta$  cresce,  $x_{\acute{o}timo}$  decresce até se aproximar de  $x_{\infty}$ , quando  $\delta \rightarrow +\infty$ ; isto vale para ambas as espécies.

c) quando  $\delta$  é pequeno, a redução do nível do estoque  $x_{\acute{o}timo}$ , à medida que  $\delta$  cresce faz-se sentir muito mais na população de baleias do que na de hipoglosso; observa-se que para  $\delta$  da ordem de 20%,  $x_{\acute{o}timo}$  da população de baleias já tem uma grande redução com relação àquele quando  $\delta = 0$ .

d) devido à taxa de crescimento intrínseco ( $r = 0.71$ ), da população de hipoglossos ser muito alta, tem-se que para  $\delta < 27\%$ ,  $x_{\acute{o}timo} > x_{MSY}$ , o que significa que o valor ótimo de  $x$  corresponde a uma pesca em excesso, do ponto de vista biológico.

O valor do desconto temporal  $\delta$  depende do quanto o empresário está disposto a reduzir o nível de pesca no presente, para garantir maiores produções no futuro.

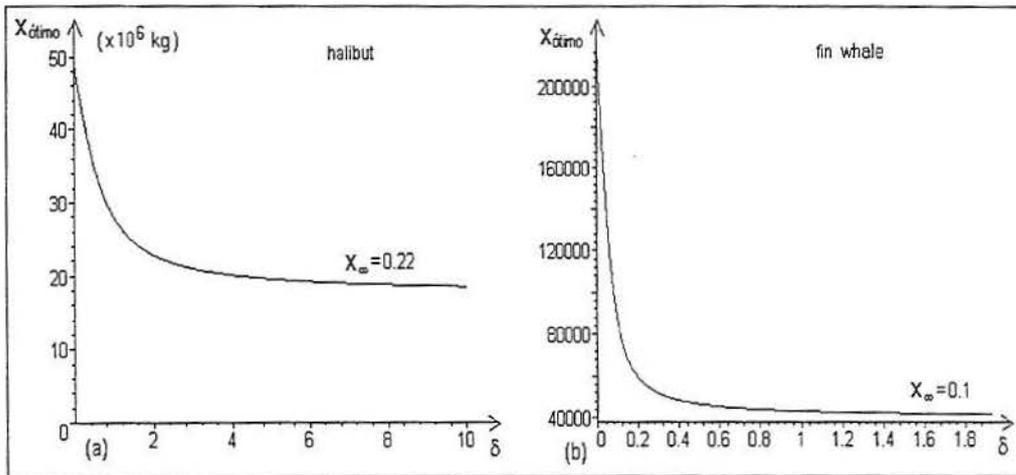


Figura 4.9: Gráfico da população ótima  $x_{ótimo}$ , em função da taxa de desconto anual (a) hipoglosso (halibut) (b) baleia de barbatana (fin whale).

Para cada uma dessas populações, apresentamos na figura 4.10 os gráficos da correspondente *produção anual sustentável ótima*  $Q_{ótimo}$ , também em função de  $\delta$ , obtida a partir de:

$$Q_{ótimo} = r x_{ótimo} \left( 1 - \frac{x_{ótimo}}{K} \right),$$

onde  $x_{ótimo}$  foi calculado anteriormente. Para cada população também podemos calcular a produção anual máxima sustentável a partir de:

$$MSY = r x_{MSY} \left( 1 - \frac{x_{MSY}}{K} \right) = \frac{rK}{4},$$

pois  $x_{MSY} = \frac{K}{2}$ ; desta forma, obtivemos para o hipoglosso:

$$MSY = 14.29 \times 10^6 \text{ kg}$$

e para a baleia com barbatanas:

$$MSY = 8.000 \text{ baleias.}$$

Com relação aos gráficos apresentados na figura 4.10, observamos que:

a) tanto para a população de hipoglossos quanto para a de baleias,  $Q_{ótimo}$  começa

por crescer até atingir o valor de  $MSY$ , quando  $x$  passa por  $x_{MSY}$  e depois, decresce até chegar ao valor  $Q_{\infty}$ .

b) para o hipoglosso que tem um alto valor de  $r$ ,  $Q_{\acute{o}timo}$  é praticamente insensível a  $\delta$ ; talvez se o modelo de Schaefer não fosse tão simplificado, não ocorresse tal “insensibilidade”.

c) para a população de baleias, ao contrário da situação relatada em b), um  $\delta$  de 20% já reduz  $Q_{\acute{o}timo}$  à metade de  $MSY$ ; este efeito do desconto pode ser parcialmente responsável pela resistência dos pescadores de baleias em concordar com medidas mais severas de conservação.

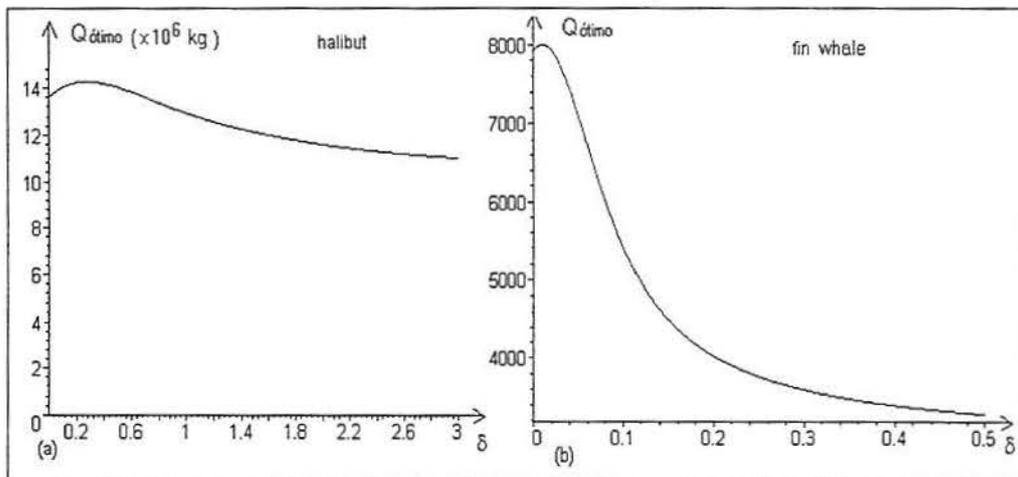


Figura 4.10: Gráfico da produção anual sustentável  $Q_{\acute{o}timo}$  em função da taxa de desconto anual  $\delta$  (a) hipoglosso (halibut) (b) baleia de barbatana (fin whale).

Antes de encerrar este capítulo, é importante enfatizar que o modelo de Schaefer, no qual esta teoria é baseada, não leva em conta vários fatores tais como estrutura etária, por exemplo, constituindo uma supersimplificação das características biológicas e econômicas destes recursos.

## 5 CONCLUSÃO

Recursos ecológicos são economicamente importantes e modelos matemáticos podem ser muito úteis em aprimorar nossa compreensão a respeito, principalmente pela expectativa da conseqüente implementação de um bom gerenciamento destes recursos. Em particular, tem sido atribuído grande relevância aos modelos que lidam com a economia de recursos, devido as suas implicações no gerenciamento dos mesmos. Face a esta motivação, nosso objetivo neste trabalho foi o de estudar os princípios básicos que norteiam o problema do desenvolvimento sustentável, mais especificamente a economia do gerenciamento ótimo da ceifa (harvesting) de recursos biológicos renováveis.

Começamos por revisar dois modelos muito simples da dinâmica de populações: o modelo de crescimento logístico (equação (2.13)), para uma população de uma única espécie, e o modelo presa-predador (equação (3.7)), para um sistema de duas espécies interagentes, cujo termo de interação tem uma resposta funcional do tipo Holling II. Depois de calcular os estados de equilíbrio, efetuamos a análise de estabilidade linear para cada um, e, através da integração numérica, obtivemos o comportamento dinâmico global do sistema.

A seguir, como queríamos estudar políticas de pesca, modificamos estes modelos biológicos, de modo a incluir pesca contínua. Em especial, consideramos o modelo de Schaefer (equação (2.19)), para o qual a taxa de pesca é proporcional tanto ao esforço de pesca quanto ao estoque de peixes. Esforço de pesca é uma medida da intensidade da pesca: o número de barcos ativamente usados para pescar em um certo tempo. Com tais modelos modificados, que agora contemplam exploração de recursos biológicos, nos perguntamos: qual é a taxa “ótima” de pesca? Qual é a pesca sustentável máxima? Introduzimos, então, o conceito de Máxima Produção Sustentável (*MSY*) (seção 2.2), que é de fundamental importância. Este é o objetivo desejável de várias agências de gerenciamento de recursos, visto que implica na preservação perpétua do estoque de recursos renováveis e na maximização da

produção total a longo prazo. Qualquer taxa de pesca mais alta levará em algum momento à extinção da população.

Um dos problemas com a *MSY* é que, sob este enfoque biológico, são ignorados todos os aspectos econômicos da exploração de recursos, que para serem incorporados exigem que se leve em conta os custos desta exploração. Após reconhecer que o conceito de *MSY* não é adequado, mostramos que houve historicamente uma tendência de substituí-lo por algum conceito de Produção Ótima Sustentável (*OSY*) (seção 4.6). Introduzimos, então, alguns princípios fundamentais relacionados à economia de recursos renováveis (seções 4.1, 4.2 e 4.3), antes de estudar o modelo de Gordon (seção 4.4). Este, é um modelo bioeconômico estático (de equilíbrio) segundo o qual o nível ótimo de esforço, almejado pelo proprietário privado, é aquele no qual é maximizado o rendimento econômico líquido sustentável; construiu-se, assim, o conceito de Máxima Produção Econômica (*MEY*). Outra predição do modelo de Gordon era de que em uma pesca de “propriedade comum”, o esforço alcançaria um nível de equilíbrio no qual a receita líquida sustentável seria nula. Parecia tornar-se consenso, então, que em vez da *MSY*, passaria a ser desejada a *MEY*, o que implicaria em gerenciar o esforço de modo a reduzi-lo de alguma forma. Mais tarde, esta predição também mostrou-se inadequada, visto que não levava em conta o “valor (custo) do tempo”. Mostramos que, de fato, os lucros não aumentam imediatamente, pois leva um certo tempo para que o novo equilíbrio se estabilize - a recuperação dos recursos leva tempo.

Retomou-se, então, os estudos de economia para construir um modelo dinâmico que corrigisse o erro anterior de omitir o valor do tempo. Apresentamos a ferramenta padrão, que na economia reflete o valor do tempo, denominada “desconto” (subseção 4.6.1). A teoria econômica padrão preconiza que o proprietário privado de um estoque de recursos estaria motivado a escolher uma estratégia de produção que maximizasse o seu valor presente. Dessa forma, tomando por base o critério padrão custo-benefício de maximização de valores presentes de receitas econômicas líquidas (equação (4.10)), mostramos que o problema de determinar

a função esforço (função do tempo) que maximiza o valor presente descontado é um problema de “controle ótimo” (seção 4.6), ou classicamente falando, de cálculo variacional. Depois de apresentar uma breve discussão sobre problema variacional linear e teoria de controle, mostramos que o equilíbrio é a solução singular de teoria de controle e que a pesca ótima consiste na Política de Aproximação Mais Rápida (*MRAP*) ao nível de estoque (biomassa) de equilíbrio ótimo (subseção 4.6.2). É importante lembrar que a linearidade do problema e a ausência de custos fixos foram duas suposições que simplificaram muito o modelo. A política de pesca ótima é uma combinação de controles singular e bang-bang. Obtivemos também uma condição necessária para este nível de equilíbrio ótimo, denominado por Clark como o Teorema Fundamental da Economia de Recursos Renováveis. A este equilíbrio ótimo, para o qual se levou em consideração tanto os custos de exploração quanto o “valor do tempo”, corresponde uma Produção Econômica Ótima (*OEY*). Mostramos que se os custos de exploração e o “valor do tempo” (taxa de desconto) forem nulos, recaímos na situação em que a *MSY* é ótima; por outro lado, se a taxa de desconto for nula, mas os custos forem positivos, então recaímos na situação em que a *MEY* é ótima.

De acordo com os enfoques estudados, as conclusões podem ser relacionadas como segue:

- a) Existe um nível populacional de equilíbrio ótimo  $x = x_{\text{ótimo}}$  que é determinado pela equação (4.19).
- b) O nível populacional ótimo  $x_{\text{ótimo}}$  é uma função da taxa de desconto  $\delta$  e de outros parâmetros econômicos e biológicos do problema.
- c) O valor de  $x_{\text{ótimo}}$  está entre o nível de rendimentos maximizados  $x_0$  (que corresponde a  $\delta = 0$ ) e o nível de rendimentos dissipados  $x_\infty$  (que corresponde a  $\delta = \infty$ ). Este valor reflete o inevitável comprometimento entre a produção desejada no presente e as receitas futuras.

d) Quando o nível inicial da população  $x(0)$  for diferente de  $x_{\text{Ótimo}}$ , a política de retirada ótima é da “aproximação mais rápida”, levando a população  $x$  para o nível  $x_{\text{Ótimo}}$  tão rapidamente quanto possível.

Por fim, incluímos também exemplos baseados no modelo de Schaefer (seção 4.6.4), a partir dos quais verificamos que o nível de estoque de equilíbrio ótimo que satisfaz o Teorema Fundamental da Economia de Recursos Renováveis pode ser bastante sensível à taxa de desconto.

Enfatizamos que nosso estudo constitui apenas os primeiros passos em teoria dinâmica de gerenciamento de recursos renováveis. Trata-se de uma relevante área interdisciplinar de pesquisa, envolvendo biologia, matemática e economia, e que envolve interesses diversos.

Há inúmeros aspectos que não foram levados em consideração no trabalho extremamente simplificado que apresentamos. Citamos a seguir algumas das questões que não foram abordadas.

a) A simplicidade da regra *MRAP* para a pesca decorreu da linearidade do modelo de harvesting com relação ao esforço; a receita líquida é uma função linear do esforço: a receita é uma função linear da taxa de pesca e o custo é uma função linear do esforço. Serão estas linearidades razoáveis? Isto depende muito da escala relativa da indústria pesqueira que está sendo modelada. No caso de uma indústria de pesca pequena, a taxa de pesca provavelmente terá pouco efeito no preço de mercado do peixe; mas para grandes indústrias pesqueiras, as taxas de pesca têm sérios efeitos nos níveis de preço. Uma empresa particular que explora tal recurso poderia bem estar motivada a limitar a pesca simplesmente para manter um nível de preço satisfatório. Então, teríamos um modelo de controle não linear.

b) A situação estudada supõe uma situação não usual de controle centralizado, isto é, para um proprietário particular do estoque de recursos. É importante, então, estender esses modelos para casos envolvendo o controle de múltiplos usuários dos recursos.

c) Não foram considerados modelos com estrutura etária - uma população de peixes

poderia ser modelada em coortes, onde em cada coorte estão todos os peixes de uma mesma idade.

d) Não foram considerados efeitos de retardo e periódicos (sazonais).

e) Não foram considerados efeitos espaciais nem de difusão.

f) Tampouco foram considerados a incerteza e o desequilíbrio - na medida em que entramos em mais detalhes e realismo em modelos bioeconômicos, a possibilidade e o desejo de se ter soluções de equilíbrio torna-se questionável. Estoques de recursos estão sujeitos a vários efeitos estocásticos. O crescimento, a mortalidade e as taxas reprodutivas de populações de peixes variam de uma forma aleatória. Variações aleatórias em estoques de recursos acarretam importantes conseqüências bioeconômicas: levam a “desconto de risco” e resultam em incerteza tanto no que se refere ao modelo quanto aos parâmetros. Além disso, existem situações nas quais pensar em equilíbrio no gerenciamento de recursos pode ser inapropriado. Flutuações em recursos naturais, particularmente em estoques de peixes, são sujeitos a mudanças naturais de larga escala em abundância.

## APÊNDICE A RESPOSTA FUNCIONAL

Este apêndice trata dos três tipos de resposta funcional do predador à densidade de presas, citado no capítulo 3.

Dado um sistema presa( $X$ )-predador( $Y$ ) do tipo

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - YXR(X) \\ \frac{dY}{dt} &= -dY + cYXR(X),\end{aligned}\tag{A.1}$$

temos, na primeira equação diferencial, que  $R(X)$  é a resposta funcional e  $K$  é a capacidade de suporte para a presa quando  $Y = 0$ . O termo  $-YXR(X)$  é chamado de termo de predação da população de presas. Esta resposta funcional também pode ser incluída na equação diferencial que descreve a taxa de variação da população de predadores, como apresentado em (A.1); neste caso, inclui-se uma constante multiplicativa  $c > 0$ , denominada fator de conversão, para indicar o quanto a predação contribui para o aumento da população de predadores. A resposta funcional dos predadores à densidade de presas, mede a taxa na qual as presas estão sendo capturadas pelo predador, como uma função da densidade de presas.

*Holling* classifica em três tipos as respostas funcionais de um predador à densidade de presas (SMITH 1974):

1. tipo *I*:  $R(X) = b > 0$ , o predador captura as presas( $X$ ) numa taxa constante, sendo  $b$  a frequência de captura de presa pelo predador, como no modelo de *Lotka-Volterra* (figura A.1);
2. tipo *II*:  $R(X) = \frac{A}{B + X}$  ou  $R(X) = \frac{A(1 - e^{-aX})}{X}$ , onde  $A, B$  e  $a$  são constantes positivas; esta é a resposta funcional típica de predador invertebrado (figuras A.2 e A.3);
3. tipo *III*:  $R(X) = \frac{AX}{B^2 + X^2}$ , onde  $A$  é uma constante positiva, típico de predador vertebrado (figura A.4).

Tanto a resposta funcional do tipo *II* quanto a do tipo *III* apresentam situações em que, quando a população de presas se torna muito grande, a resposta do predador a este aumento seja a de capturar cada vez menos presas. O que distingue esses dois tipos, na classificação de *Holling*, é seu comportamento para um pequeno número de presas: o predador vertebrado (tipo *III*) “não nota” a presença de presas, quando a população destas é muito pequena.

O parâmetro  $B$  na expressão  $\frac{AX}{B+X}$  (figura A.2), com  $A > 0$  e  $B > 0$ , representa o nível populacional de presas, para o qual este termo é a metade de seu valor máximo, visto que se trata de uma função monotonicamente crescente e

$$\left. \frac{AX}{B+X} \right|_{X=B} = \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow \infty} \left( \frac{AX}{B+X} \right). \quad (\text{A.2})$$

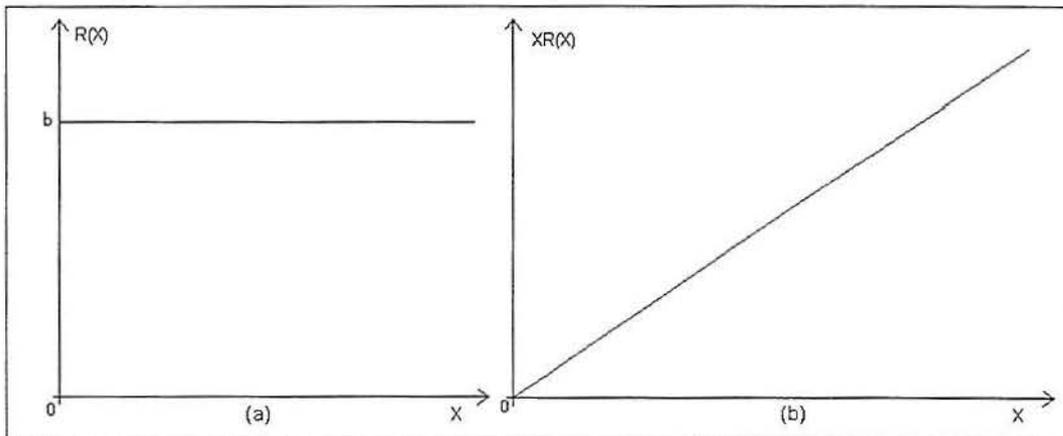


Figura A.1: Gráficos de: (a) resposta funcional tipo I -  $R(X) = b$ ; (b) resposta  $XR(X) = bX$  do predador  $Y$  à densidade de presas  $X$ , para a resposta funcional tipo I.

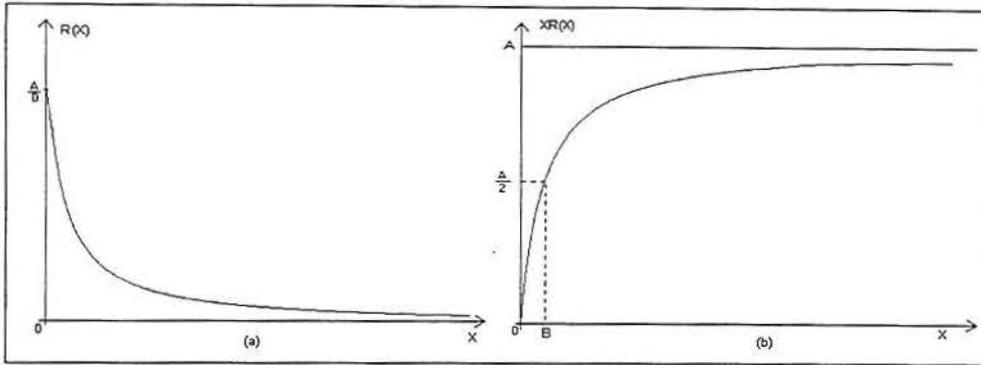


Figura A.2: Gráficos de: (a) resposta funcional tipo II -  $R(X) = \frac{A}{X+B}$ ; (b) resposta do predador  $XR(X) = \frac{AX}{X+B}$  à densidade de presas  $X$ , para a resposta funcional tipo II.

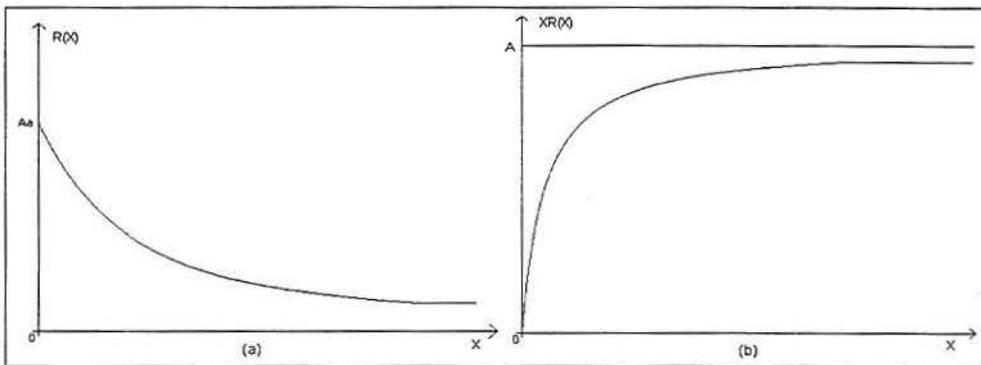


Figura A.3: Gráficos de: (a) resposta funcional tipo II -  $R(X) = A \frac{[1-e^{-aX}]}{X}$ ; (b) resposta do predador  $XR(X) = A[1 - e^{-aX}]$  à densidade de presas  $X$ , para a resposta funcional tipo II.

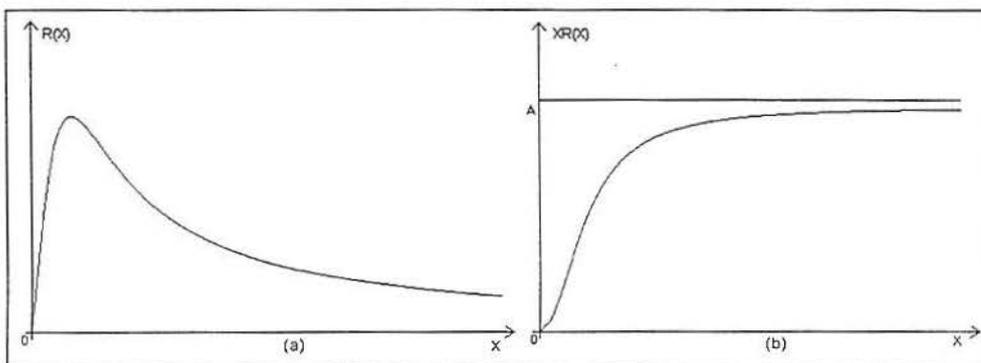


Figura A.4: Gráficos de: (a) resposta funcional tipo III -  $R(X) = \frac{AX}{X^2+B^2}$ ; (b) resposta do predador  $XR(X) = \frac{AX^2}{X^2+B^2}$  à densidade de presas  $X$ , para a resposta funcional tipo III.

## APÊNDICE B      ANÁLISE NO PLANO DE FASE - SISTEMA BIDIMENSIONAL

Os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser classificadas como sistemas autônomos e sistemas não autônomos. Quando autônomos, esses sistemas têm a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

onde as funções  $f_i$  não dependem do tempo. Na forma vetorial o sistema acima é dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Os sistemas autônomos podem ser classificados como *lineares* ou *não lineares* dependendo da forma de cada uma das  $f_i$ . Um sistema autônomo de equações é *linear* se cada uma das funções  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  for uma função linear das variáveis dependentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; caso contrário, é dito ser *não linear*. Aqui discutiremos brevemente um sistema com duas equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem da forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (\text{B.3})$$

onde  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  são funções de  $x$  e  $y$ . As *curvas de fase* ou *trajetórias de fase* são soluções de:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (\text{B.4})$$

Através de qualquer ponto  $(x_0, y_0)$  existe uma única curva exceto em pontos de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  onde

$$F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0.$$

Sendo  $F$  e  $G$  analíticas próximas a  $(x^*, y^*)$ , podemos fazer uma expansão em série de Taylor das equações (B.3), em torno do ponto  $(x^*, y^*)$  e mantendo somente os termos lineares em  $(x - x^*)$  e  $(y - y^*)$  obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta y}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

onde definimos  $\Delta x \equiv x - x^*$  e  $\Delta y \equiv y - y^*$ , e a matriz  $\mathbf{A}$  é da forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \quad (\text{B.6})$$

Quando  $x = x^*$  e  $y = y^*$ , temos  $\Delta x = 0$  e  $\Delta y = 0$ , respectivamente.

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores de  $\mathbf{A}$  como definidos na equação abaixo:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \implies \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que pode ser escrita como:

$$\lambda^2 - (\text{tr}\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A} = 0,$$

donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}\mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A}}}{2}. \quad (\text{B.7})$$

Se os autovalores forem distintos, as soluções de (B.5) são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{B.8})$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias e  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são os autovetores de  $\mathbf{A}$  correspondentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Caso os autovalores sejam iguais, as soluções são proporcionais a  $(c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$ .

As soluções (B.8) são válidas apenas para pontos que no plano de fase estão situados em uma pequena vizinhança em torno de um equilíbrio  $(x^*, y^*)$ ; nesta região, as curvas de fase podem ser aproximadas pelas soluções da equação diferencial que se obtém a partir da equação (B.5), após eliminar a variável  $t$ .

### Classificação das singularidades no plano de fase

De acordo com (MURRAY 1993) temos:

#### 1. $\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais e distintos

(a)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais e com o mesmo sinal.

Suponhamos que  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Então, de (B.8), por exemplo, para  $c_2 = 0$  e  $c_1 \neq 0$  temos:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad (\text{B.9})$$

assim, a solução no plano de fase simplesmente move-se ao longo de  $\mathbf{v}_1$  em direção à origem quando  $t \rightarrow \infty$ . De (B.8) vemos que toda solução tende a  $(x^*, y^*)$  quando  $t \rightarrow \infty$  uma vez que, com  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ,  $e^{\lambda_2 t} = O(e^{\lambda_1 t})$  quando  $t \rightarrow \infty$  e assim:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \sim c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (\text{B.10})$$

Para pontos em uma pequena vizinhança do equilíbrio  $(x^*, y^*)$ , todas as soluções se aproximam deste ponto, ao longo de  $\mathbf{v}_1$ . Esta é chamada singularidade do tipo *nodo*. Para  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  este ponto é um *nodo estável* (*tipo I*). Se  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  este ponto é um *nodo instável* e  $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

(b)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais e com sinais diferentes.

Suponhamos, por exemplo,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ; então  $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$  ao longo

de  $\mathbf{v}_1$  quando  $t \rightarrow \infty$  enquanto que  $\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$  ao longo de  $\mathbf{v}_2$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Existem assim, sentidos diferentes em  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Dependendo do valor das constantes as soluções se afastam ou se aproximam em sentidos diferentes. Esta é uma singularidade do tipo *ponto de sela*. Esta singularidade é sempre instável, exceto estritamente ao longo de  $\mathbf{v}_1$ , e qualquer pequena perturbação em torno de  $(x^*, y^*)$  a solução se afasta exponencialmente.

**2.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complexos:  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ .**

As soluções de (B.8) envolvem  $e^{\alpha t} e^{\pm i\beta t}$  as quais implicam uma aproximação oscilatória à origem, com amplitude que depende da parte real  $\alpha$ .

(a)  $\alpha \neq 0$ . Neste caso, temos uma *espiral*, que é estável se  $\alpha < 0$  e instável se  $\alpha > 0$ .

(b)  $\alpha = 0$ . Aqui, as curvas no espaço de fase são elipses. Esta singularidade é chamada de *centro* e é neutralmente estável, pois uma pequena perturbação em uma destas curvas nos dá uma outra solução. No caso de singularidades do tipo centro, determinadas por uma solução do sistema não linear (B.3), devemos observar os termos de ordem mais elevada na expansão em série de Taylor das funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  em torno do ponto em questão, para determinar sua estabilidade.

**3.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Autovalores iguais.**

(a) Em geral, para soluções envolvendo termos como  $te^{\lambda t}$  existe um único autovetor  $\mathbf{v}$  ao longo do qual as soluções tendem a  $(0, 0)$ . Esta é uma singularidade do tipo *nodo* (tipo II).

(b) Se as soluções não contém o termo  $te^{\lambda t}$  temos uma singularidade do tipo *estrela* que pode ser estável ou instável, dependendo do sinal de  $\lambda$ .

A tabela (B.1) mostra, resumidamente, o tipo de ponto crítico e a estabilidade para cada par de autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade	$\text{tr}(\mathbf{A})$ e $\text{det}(\mathbf{A})$
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo	Instável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo	Assintoticamente Estável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de Sela	Instável	$\text{det}(\mathbf{A}) < 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo	Instável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo	Assintoticamente estável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	Ponto espiral	$\alpha > 0$ Instável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$
		$\alpha < 0$ Assintoticamente Estável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$
$\lambda_1 = i\beta$ $\lambda_2 = -i\beta$	Centro	Neutralmente Estável	$\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$

Tabela B.1: *Propriedades da estabilidade linear de pontos de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  envolvidos no cálculo da matriz  $\mathbf{A}$  em (B.6).*

Na figura B.1, apresentamos a visualização desta classificação, valendo-nos de um sistemas de eixos ortogonais em um plano, sendo um deles para  $\text{tr}\mathbf{A}$  e o outro para  $\text{det}\mathbf{A}$ .

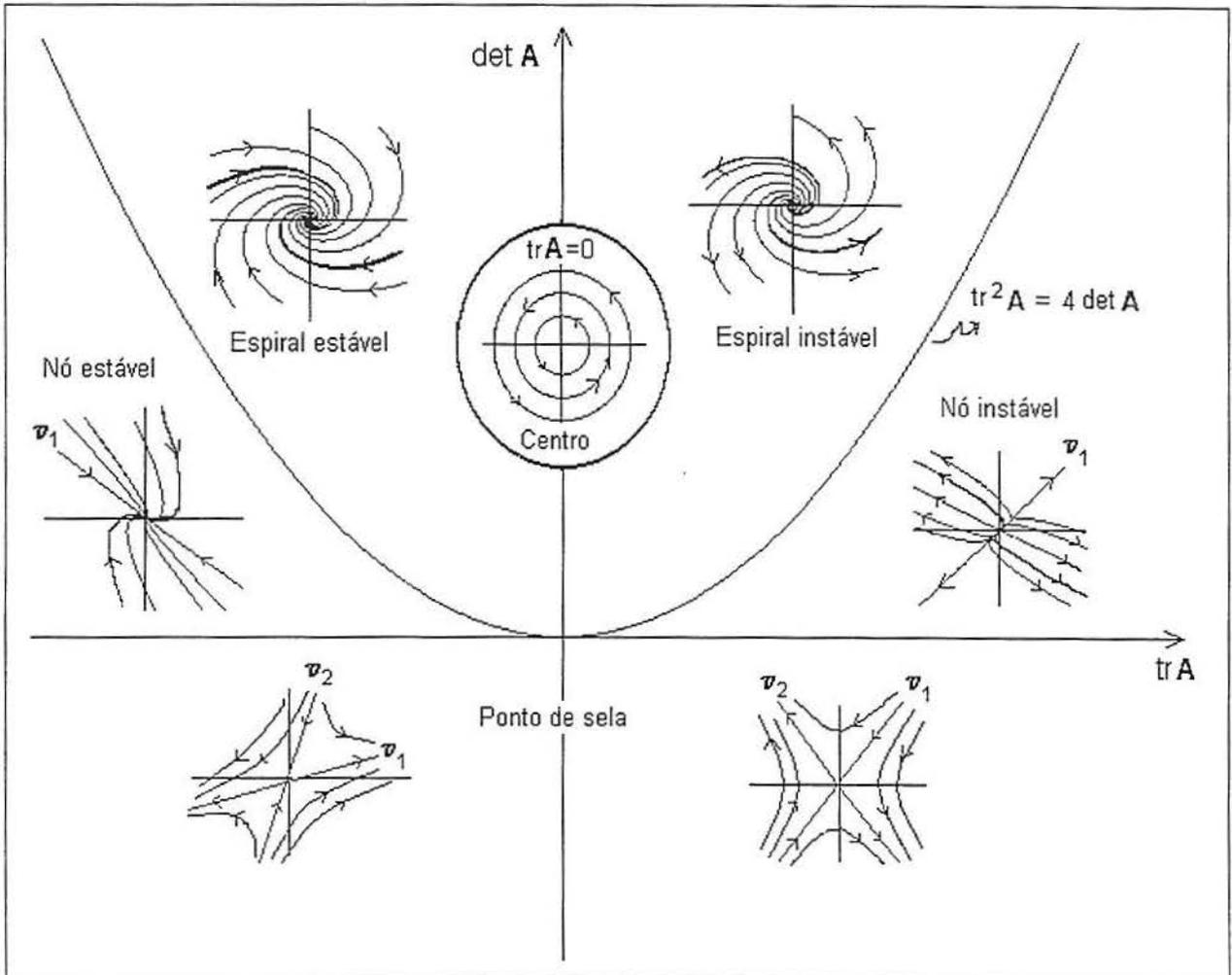


Figura B.1: *Resumo mostrando como o  $\text{tr} A$  e  $\text{det} A$  determinam o tipo de singularidade no plano de fase.*

## APÊNDICE C EQUAÇÃO DE EULER

Uma técnica usual (BUTKOV 1968) para determinar o caminho ótimo  $x(t)$  entre dois pontos  $a$  e  $b$  com  $a \leq t \leq b$ , que minimize ou maximize o funcional

$$J = \int_a^b F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (\text{C.1})$$

onde o valor de  $J$  depende do caminho entre  $t = a$  e  $t = b$ , é o uso da equação de Euler.

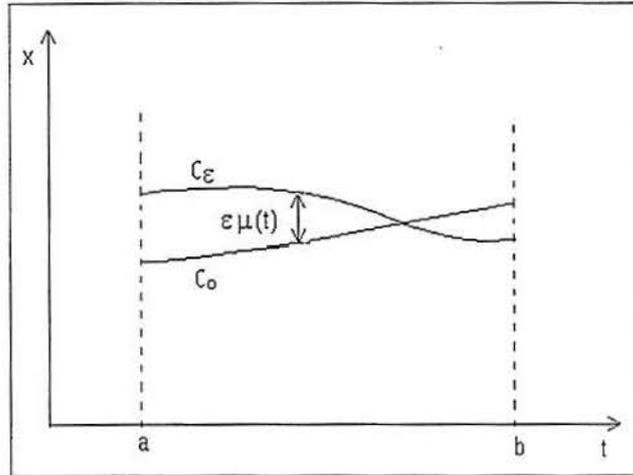


Figura C.1:  $C_0$  representa a curva ótima para  $a \leq t \leq b$  e  $C_\epsilon$  uma curva vizinha

Na figura C.1, temos a curva ótima  $C_0$  que é dada por  $x = x_0(t)$  para  $a \leq t \leq b$  e a curva vizinha  $C_\epsilon$  dada por  $x = x_\epsilon(t) = x_0(t) + \epsilon\mu(t)$ , onde  $\mu(t)$  é uma função diferenciável arbitrária de  $t$ , e  $\epsilon$  uma constante. Consideremos a classe de curvas vizinhas à curva ótima, para as quais corresponde

$$J(\epsilon) = \int_a^b F(x_0 + \epsilon\mu, \dot{x}_0 + \epsilon\dot{\mu}, t) dt. \quad (\text{C.2})$$

Para que tenhamos de  $J$  um mínimo ou máximo, para  $x(t) = x_0(t)$ , devemos ter  $\frac{dJ}{d\epsilon} = 0$  para  $\epsilon = 0$ . De (C.2) temos

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{d\epsilon} \right] dt, \quad (\text{C.3})$$

que, para  $\epsilon = 0$ , fornece:

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \mu + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\mu} \right] dt \quad (\text{C.4})$$

que deve ser nulo para  $x(t) = x_0(t)$ , que define a curva ótima, para  $t \in [a, b]$ . Integrando por partes o segundo termo do integrando de (C.4), obtemos:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\mu} dt = \left[ \mu \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_a^b - \int_a^b \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt,$$

que, substituído em (C.4) resulta que, para  $x(t) = x_0(t)$ :

$$\left[ \mu \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_a^b + \int_a^b \mu \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0. \quad (\text{C.5})$$

Obtemos então, as seguintes condições suficientes para o caminho ótimo  $x_0(t)$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left[ \mu \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_a^b = 0 \\ (2) \quad & \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] \mu dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Se  $x(a)$  e  $x(b)$  forem fixos, então  $\mu(a) = \mu(b) = 0$  e automaticamente a condição (1) de (C.6) estará satisfeita.

Quanto à condição (2) em (C.6), utilizaremos o *Teorema Fundamental do Cálculo Variacional* que enunciaremos a seguir:

**Teorema** - Se  $f(x)$  é contínua no intervalo  $(x_0, x_1)$  e a integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx$$

é igual a zero para todas as funções diferenciáveis  $g(x)$  em  $(x_0, x_1)$  e para  $x = x_0$  e  $x = x_1$ , então

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{para } x_0 \leq x \leq x_1.$$

Aplicando o teorema acima, podemos concluir da condição (2) de (C.6) que

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Esta é a equação de Euler; é a condição que deve ser satisfeita pelo caminho ótimo se  $x$  for conhecido nas extremidades do caminho. Se, por outro lado,  $x$  não for pré-estabelecido em ambas extremidades do caminho, então além da equação de Euler (C.7), tem-se a condição (1) de (C.6):

$$\left[ \mu \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_a^b = 0,$$

ou seja:

$$\mu(b) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=b} = \mu(a) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=a} \quad (\text{C.8})$$

Se  $x$  não for dado em nenhuma das extremidades,  $\mu$  é completamente arbitrário, então impõe-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=a} = 0 \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=b} = 0.$$

Se  $x$  for dado em  $t = a$ , então  $\mu(a) = 0$  e

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=b} = 0.$$

Temos então a condição de transversalidade dada por

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (\text{C.9})$$

no ponto em que  $x$  não é pré-estabelecido.

## BIBLIOGRAFIA

- ALIGOOD, K.T., SAUER, T.D. & YORKE, J. (1996), *Chaos: an introduction to dynamical systems*, New York: Springer-Verlag.
- ALVAREZ, L. (1999), 'Optimal harvesting under stochastic fluctuation and critical depensation', *Mathematical Biosciences*, **152**, 63–85.
- ARINO, O., HBID, M.L. & LAPARRA, R. (1998), 'A mathematical model of growth of population fish in the larval stage: Density-dependence effects', *Mathematical Biosciences*, **150**, 01–20.
- BHATTACHARYA, D. & BEGUM, S. (1996), 'Bionomic equilibrium of two-species system', *Mathematical Biosciences*, **135**, 111–127.
- BOYCE, W. & DIPRIMA, R. (1999), *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC.
- BRAUMANN, C. (1999), 'Variable effort fishing models in random environments', *Mathematical Biosciences*, **156**, 1–19.
- BUSONI, G. & MATUCCI, S. (1997), 'A problem of optimal harvesting policy in two-stage age-dependent', *Mathematical Biosciences*, **143**, 01–33.
- BUTKOV, E. (1968), *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company.
- CHIANG, A. C. (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc.
- CLARK, C. (1976), 'A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale population', *Mathematical Biology*, **3**, 381–391.
- CLARK, C. (1990), *The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley and Sons.
- DAI, G. & TANG, M. (1998), 'Coexistence region and global dynamics of a harvested predator-prey system', *SIAM Applied Mathematics*, **1**, 193–210.

- HANSON, F. & RYAN, D. (1998), 'Optimal harvesting with both population and price dynamics', *Mathematical Biosciences*, **148**, 129–146.
- HASTINGS, A. (1996), *Population Biology*, Springer.
- HAYWARD, G. (1992), *Applied Ecology*, Thomas Nelson and Sons Ltd.
- KOOI, B.W., BOES, M.P. & KOOIJMAN, S. (1999), 'Consequences of population models for the dynamics of food chains', *Mathematical Biosciences*, **153**, 99–124.
- LEITHOLD, L. (1988), *Matemática Aplicada à Economia e Administração*, Harbra.
- LEVIN, S. A. (1989), *Ecology in Theory and Application at Applied Mathematical Ecology*, Springer-Verlag.
- LUDWIG, D., ARONSON, D.G. & WEINBERGER, H. (1979), 'Spatial patterning of the spruce budworm', *Mathematical Biology*, **8**, 217–258.
- LUDWIG, D., JONES, D.D. & HOLLING, C. (1978), 'Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest', *Animal Ecology*, **47**, 315–332.
- MAY, R. M. (1976), *Theoretical Ecology Principles and applications*, W.B.Saunders Company.
- MURRAY, J. D. (1993), *Mathematical Biology*, Springer-Verlag.
- SEGEL, L. A. (1972), 'Simplification and scaling', *SIAM Review*, **14**, 547–569.
- SILBERBERG, E. (1990), *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc.
- SMITH, J. M. (1974), *Models in Ecology*, Cambridge University Press.
- SONG, X. & CHEN, L. (2001), 'Optimal harvesting and stability for a two species competitive system with stage structure', *Mathematical Biosciences*, **170**, 173–186.

- WANIEWSKI, J. & JEDRUCH, W. (1999), 'Individual based modeling and parameter estimation for a Lotka-Volterra system', *Mathematical Biosciences*, **157**, 23–36.
- WILLIAMS, B. K. (1996), 'Adaptive optimization and the harvest of biological populations', *Mathematical Biosciences*, **136**, 01–20.
- ZHANG, X., CHEM, L. & NEUMANN, A. (2000), 'The stage structured predator-prey model and optimal harvesting policy', *Mathematical Biosciences*, **168**, 201–210.