

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**ESTUDO MODAL DE ESTRUTURAS COM PROPRIEDADES
DESCONTÍNUAS NA SEÇÃO TRANSVERSAL**

por

Clarice Fröhlich

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
Novembro de 2001

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Clarice Fröhlich

Estudo Modal de Estruturas com Propriedades Descontínuas na Seção Transversal / Clarice Fröhlich.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2001.

166 p.: il.

Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2001. Orientadora: Prof^a. Dra. Teresa Tsukazan

Área: Vibrações, Sinais e Controle

Palavras-chave: Vibrações, Modos, Vigas Bissegmentadas e Trisegmentadas

**ESTUDO MODAL DE ESTRUTURAS COM PROPRIEDADES
DESCONTÍNUAS NA SEÇÃO TRANSVERSAL**

por

Clarice Fröhlich

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Sinais e Controle

Orientadora: Prof^a. Dra. Teresa Tsukazan

Aprovada por:

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo - URI-FW

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli - PPGMAp - UFRGS

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen - PPGMAp - UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Novembro de 2001

AGRADECIMENTOS

À URI – Universidade Regional Integrada, na pessoa do Prof. Augusto Maldaner, Diretor da Extensão de Cerro Largo, pela atenção, apoio e auxílio financeiro.

À Prof^ª. Dra. Teresa Tsukazan, pela valiosa orientação.

Ao Prof. Dr. German Suazo, pela disposição, paciência e colaboração no trabalho computacional.

À minha mãe Amanda, a meus irmãos Egon, Lourdes, Jacinta, Bernadete e Teresinha que sempre estiveram presentes com seu incentivo, apoio e compreensão.

À colega Marlene, pelo conforto nas horas difíceis e vibração em cada etapa da conquista.

A todas as pessoas amigas que torceram para que este sonho se tornasse realidade.

ÍNDICE

1	MODELO DE EULER-BERNOULLI	3
1.1	Modelos de Vigas	3
1.2	Modelo de Euler-Bernoulli	3
1.3	Condições Iniciais e de Contorno	4
2	FORMULAÇÃO MATRICIAL	7
2.1	Base Espectral Clássica	13
3	CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DE VIGAS BISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS	15
3.1	Valores Numéricos dos Parâmetros	16
3.2	Vigas Bissegmentadas sem Apoio na Descontinuidade	18
3.2.1	Caso 1: Viga Fixa-Livre	18
3.2.2	Caso 2: Viga Fixa-Apoiada	26
3.2.3	Caso 3: Viga Biapoiada	34
3.2.4	Caso 4: Viga Fixa-Fixa	42
3.3	Vigas Bissegmentadas com Apoio na Descontinuidade	50
3.3.1	Caso 5: Viga Fixa-Livre	50
3.3.2	Caso 6: Viga Fixa-Apoiada	58
3.3.3	Caso 7: Viga Biapoiada	66

3.3.4	Caso 8: Viga Fixa-Fixa	74
3.3.5	Caso 9: Viga Apoiada-Livre	82
4	VIGAS TRISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS, COM CONDIÇÕES DE CONTORNO IGUAIS	90
4.1	Sem Apoio na Descontinuidade	92
4.1.1	Caso 10: Viga Biapoiada	92
4.1.2	Caso 11: Viga Fixa-Fixa	99
4.2	Com Apoio na Descontinuidade	106
4.2.1	Caso 12: Viga Biapoiada	106
4.2.2	Caso 13: Viga Fixa-Fixa	113
4.2.3	Caso 14: Viga Livre-Livre	120
5	VIGAS TRISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS, COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DIFERENTES	127
5.1	Sem Apoio na Descontinuidade	132
5.1.1	Caso 15: Viga Fixa-Apoiada	132
5.2	Com Apoio na Descontinuidade	139
5.2.1	Caso 16: Viga Fixa-Apoiada	139
5.2.2	Caso 17: Viga Fixa-Livre	146
5.2.3	Caso 18: Viga Apoiada-Livre	153
6	CONCLUSÃO	160

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	163
APÊNDICE A EXEMPLO DE UM PROGRAMA	166

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	<i>Viga em vibração transversal com elemento diferencial</i>	4
Figura 2.1	<i>Esquema de uma viga bissegmentada com descontinuidade na seção transversal</i>	7
Figura 3.1	Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-livre	19
Figura 3.2	Modos da viga bissegmentada fixa-livre	20
Figura 3.3	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre	21
Figura 3.4	Modos da viga bissegmentada fixa-livre	23
Figura 3.5	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre	24
Figura 3.6	Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-apoiada	27
Figura 3.7	Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada	28
Figura 3.8	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada	29
Figura 3.9	Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada	31
Figura 3.10	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada	32
Figura 3.11	Modos normalizados e vibração forçada da viga biapoiada	35
Figura 3.12	Modos da viga bissegmentada biapoiada	36
Figura 3.13	Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada	37
Figura 3.14	Modos da viga bissegmentada biapoiada	39
Figura 3.15	Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada	40
Figura 3.16	Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-fixa	43

Figura 3.17 Modos da viga bissegmentada fixa-fixa	44
Figura 3.18 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa	45
Figura 3.19 Modos da viga bissegmentada fixa-fixa	47
Figura 3.20 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa	48
Figura 3.21 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-livre	51
Figura 3.22 Modos da viga bissegmentada fixa-livre	52
Figura 3.23 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre	53
Figura 3.24 Modos da viga fixa-livre	55
Figura 3.25 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre	56
Figura 3.26 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-apoiada	59
Figura 3.27 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada	60
Figura 3.28 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada	61
Figura 3.29 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada	63
Figura 3.30 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada	64
Figura 3.31 Modos normalizados e vibração forçada da viga biapoiada	67
Figura 3.32 Modos da viga bissegmentada biapoiada	68
Figura 3.33 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada	69
Figura 3.34 Modos da viga bissegmentada biapoiada	71
Figura 3.35 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada	72
Figura 3.36 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-fixa	75

Figura 3.37	Modos da viga bissegmentada fixa-fixa	76
Figura 3.38	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa	77
Figura 3.39	Modos da viga fixa-fixa	79
Figura 3.40	Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa	80
Figura 3.41	Modos normalizados e vibração forçada da viga apoiada-livre . .	83
Figura 3.42	Modos da viga bissegmentada apoiada-livre	84
Figura 3.43	Vibrações forçadas da viga bissegmentada apoiada-livre	85
Figura 3.44	Modos da viga apoiada-livre	87
Figura 3.45	Vibrações forçadas da viga bissegmentada apoiada-livre	88
Figura 4.1	<i>Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno iguais</i>	90
Figura 4.2	<i>Metade da viga trissegmentada para calcular os modos anti-simétricos</i>	90
Figura 4.3	<i>Metade da viga trissegmentada para calcular os modos simétricos</i>	91
Figura 4.4	Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada biapoiada	93
Figura 4.5	Modos da viga trissegmentada biapoiada	94
Figura 4.6	Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada	95
Figura 4.7	Modos da viga trissegmentada biapoiada	97
Figura 4.8	Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada	97
Figura 4.9	Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-fixa	100

Figura 4.10 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa	101
Figura 4.11 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa	102
Figura 4.12 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa	104
Figura 4.13 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa	104
Figura 4.14 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada biapoiada	107
Figura 4.15 Modos da viga trissegmentada biapoiada	108
Figura 4.16 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada	109
Figura 4.17 Modos da viga trissegmentada biapoiada	111
Figura 4.18 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada	111
Figura 4.19 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-fixa	114
Figura 4.20 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa	115
Figura 4.21 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa	116
Figura 4.22 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa	118
Figura 4.23 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa	118
Figura 4.24 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada livre-livre	121
Figura 4.25 Modos da viga trissegmentada livre-livre	122
Figura 4.26 Vibrações forçadas da viga trissegmentada livre-livre	123
Figura 4.27 Modos da viga trissegmentada livre-livre	125

Figura 4.28	Vibrações forçadas da viga trissegmentada livre-livre	125
Figura 5.1	<i>Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno diferentes</i>	127
Figura 5.2	Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-apoiada	133
Figura 5.3	Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada	134
Figura 5.4	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada	135
Figura 5.5	Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada	137
Figura 5.6	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada	137
Figura 5.7	Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-apoiada	140
Figura 5.8	Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada	141
Figura 5.9	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada	142
Figura 5.10	Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada	144
Figura 5.11	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada	144
Figura 5.12	Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-livre	147
Figura 5.13	Modos da viga trissegmentada fixa-livre	148
Figura 5.14	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-livre	149
Figura 5.15	Modos da viga trissegmentada fixa-livre	151
Figura 5.16	Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-livre	151

Figura 5.17 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada apoiada-livre	155
Figura 5.18 Modos da viga trissegmentada apoiada-livre	156
Figura 5.19 Vibrações forçadas da viga trissegmentada apoiada-livre	156
Figura 5.20 Modos da viga trissegmentada apoiada-livre	158
Figura 5.21 Vibrações forçadas da viga trissegmentada apoiada-livre	158

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1	<i>Condições de Contorno consideradas</i>	6
Tabela 2.1	<i>Condições de Continuidade Física na Posição de Descontinuidade da Seção Transversal</i>	9
Tabela 3.1	Frequências naturais e autovalores da viga fixa-livre	19
Tabela 3.2	Frequências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-livre	22
Tabela 3.3	Autovalores da viga bissegmentada fixa-livre	25
Tabela 3.4	Frequências naturais e autovalores da viga fixa-apoiada	27
Tabela 3.5	Frequências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada	30
Tabela 3.6	Autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada	33
Tabela 3.7	Frequências naturais e autovalores da viga biapoiada	35
Tabela 3.8	Frequências naturais e autovalores da viga bissegmentada biapoiada	38
Tabela 3.9	Autovalores da viga bissegmentada biapoiada	41
Tabela 3.10	Frequências naturais e autovalores da viga fixa-fixa	43
Tabela 3.11	Frequências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa	46
Tabela 3.12	Autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa	49
Tabela 3.13	Frequências naturais e autovalores da viga fixa-livre	51
Tabela 3.14	Frequências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-livre	54
Tabela 3.15	Autovalores da viga bissegmentada fixa-livre	57

Tabela 3.16	Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-apoiada	59
Tabela 3.17	Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada	62
Tabela 3.18	Autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada	65
Tabela 3.19	Freqüências naturais e autovalores da viga biapoiada	67
Tabela 3.20	Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada biapoiada	70
Tabela 3.21	Autovalores da viga bissegmentada biapoiada	73
Tabela 3.22	Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-fixa	75
Tabela 3.23	Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa	78
Tabela 3.24	Autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa	81
Tabela 3.25	Freqüências naturais e autovalores da viga apoiada-livre	83
Tabela 3.26	Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada apoiada-livre	86
Tabela 3.27	Autovalores da viga bissegmentada apoiada-livre	89
Tabela 4.1	Freqüências naturais e autovalores da viga trisegmentada bi-apoiada	93
Tabela 4.2	Freqüências naturais e autovalores da viga trisegmentada bi-apoiada	96
Tabela 4.3	Autovalores da viga trisegmentada biapoiada	98
Tabela 4.4	Freqüências naturais e autovalores da viga trisegmentada fixa-fixa	100
Tabela 4.5	Freqüências naturais e autovalores da viga trisegmentada fixa-fixa	103

Tabela 4.6	Autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa	105
Tabela 4.7	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada bi- apoiada	107
Tabela 4.8	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada bi- apoiada	110
Tabela 4.9	Autovalores da viga trissegmentada biapoiada	112
Tabela 4.10	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa	114
Tabela 4.11	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa	117
Tabela 4.12	Autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa	119
Tabela 4.13	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada livre- livre	121
Tabela 4.14	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada livre- livre	124
Tabela 4.15	Autovalores da viga trissegmentada livre-livre	126
Tabela 5.1	<i>Condições de Continuidade Física na Posição de Descontinuidade da Seção Transversal</i>	128
Tabela 5.2	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa- apoiada	133
Tabela 5.3	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa- apoiada	136
Tabela 5.4	Autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada	138
Tabela 5.5	Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa- apoiada	140

Tabela 5.6	Frequências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada	143
Tabela 5.7	Autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada	145
Tabela 5.8	Frequências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-livre	147
Tabela 5.9	Frequências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-livre	150
Tabela 5.10	Autovalores da viga trissegmentada fixa-livre	152
Tabela 5.11	Frequências naturais e autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre	154
Tabela 5.12	Frequências naturais e autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre	157
Tabela 5.13	Autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre	159

LISTA DE SÍMBOLOS

L	comprimento da viga
$\rho A(x)$	massa linear da viga
$EI(x)$	rigidez flexural da viga
$f(t, x)$	carga externa ao longo do eixo x
$v_0(x)$	deslocamento inicial
$v_1(x)$	velocidade inicial
$v(t, x)$	deslocamento da viga no instante t e na posição x
$\frac{\partial v(t, x)}{\partial x}$	giro
$EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}$	momento fletor
$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right)$	força de cisalhamento
t	variável do tempo
ω	freqüência característica
ρ	massa específica
A	área da seção transversal
E	módulo elástico de Young
I	inércia
ω_n	n -ésima freqüência natural
β_n	n -ésimo autovalor
μ	comprimento do primeiro segmento da viga
ν	comprimento do segundo segmento da viga
α	parâmetro de comparação da rigidez flexural
φ	parâmetro de comparação da massa linear
θ	parâmetro de comparação da estrutura da viga
$\phi_k(x)$	k -ésima função de base para o primeiro segmento
$\psi_k(x)$	k -ésima função de base para o segundo segmento

d_{ij}	constante numérica
ε_1	parâmetro operacional da equação modal do primeiro segmento
ε_2	parâmetro operacional da equação modal do segundo segmento
$v_1(t, x)$	deslocamento do primeiro segmento
$v_2(t, x)$	deslocamento do segundo segmento

RESUMO

O objetivo principal desta pesquisa foi desenvolver o estudo modal de estruturas com propriedades descontínuas na seção transversal, através do modelo de Euler-Bernoulli. Tais discontinuidades são de tipo degrau para a massa por unidade de comprimento e para a rigidez flexural. Considerando diversas condições de contorno e a base espectral clássica, obtém-se graficamente os cinco primeiros modos normais clássicos, mediante uma abordagem matricial que discrimina a informação entre as condições de contorno e o tipo de base de funções usada. Também é mostrada a vibração forçada correspondente a cada tipo de viga, deduzida a partir do método de Fourier.

ABSTRACT

TITLE: “MODAL SURVEY OF STRUCTURES WITH DISCONTINUOUS CROSS-SECTIONAL PROPERTIES”

The main objective of this research was to develop a modal survey of structures with discontinuous cross-sectional properties, through the Euler-Bernoulli model. Such discontinuities are step type for the mass per unit length and the bending stiffness. Considering different boundary conditions and a classical spectral basis, the first five classical normal modes result in a graphic view, through a matrix approach discriminating the information between boundary conditions and the kind of basis of functions used. The forced vibration for each kind of beam, derived from the Fourier method, is also shown.

INTRODUÇÃO

Toda matéria, seja ela sólida, líquida ou gasosa, é capaz de vibrar, ou seja, oscilar em torno da posição de equilíbrio. Este fenômeno denominado vibração abrange a inter-relação entre as causas do movimento (forças) e o movimento entre si. Na prática, problemas de vibrações aparecem em todos os projetos de máquinas e de estruturas. Muitos destes são extremamente complexos, sendo necessário fazer um estudo teórico das vibrações baseando-se na representação esquemática do sistema real (modelo físico) e na representação analítica de uma equação ou de um sistema de equações (modelo matemático), [Timoshenko, 1974].

Este trabalho tem como objetivo fazer o desenvolvimento de um estudo relacionado aos modos e frequências de estruturas com propriedades descontínuas na seção transversal.

No capítulo 1 é descrito o modelo de Euler-Bernoulli para uma viga flexível com descontinuidade.

No capítulo 2 é feita a formulação matricial do problema e a determinação dos modos normais e vibrações forçadas, mediante o uso da base espectral clássica para diversas condições de contorno.

No capítulo 3 são apresentados os valores numéricos dos parâmetros trabalhados nos diferentes tipos de vigas. Também são apresentados graficamente os modos normalizados e forçados das vigas bissegmentadas, com diferentes condições de contorno.

No capítulo 4 apresenta-se alguns casos de vigas trisegmentadas simetricamente descontínuas, com condições de contorno iguais. Estes tipos de vigas foram trabalhadas em partes, observando-se a simetria e a anti-simetria em relação ao centro da viga.

No último capítulo fez-se a apresentação e a análise gráfica dos modos normalizados e forçados de vigas trissegmentadas simetricamente descontínuas, com condições de contorno diferentes.

Por fim, apresenta-se as conclusões sobre o tema desenvolvido e respectivas sugestões para trabalhos futuros.

1 MODELO DE EULER-BERNOULLI

1.1 Modelos de Vigas

Uma viga é uma estrutura mecânica que pode ser descrita em determinado momento, por um parâmetro espacial único, podendo ser considerado um objeto unidimensional.

Este trabalho, por intermédio do modelo de Euler-Bernoulli, visou estudar problemas de vibrações em vigas com descontinuidades nas propriedades da seção transversal, modificadas pela ação de uma força que interage com os deslocamentos laterais $v(t, x)$ onde, conforme a literatura, a deformação por cisalhamento e inércia de rotação são desprezados. Supõe-se que o equilíbrio das seções transversais planas não é afetado pela força axial; sua direção não muda, permanecendo plana e perpendicular ao eixo longitudinal da viga após o deslocamento.

1.2 Modelo de Euler-Bernoulli

Consideramos o modelo simplificado de Euler-Bernoulli, que despreza os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento, isto é, uma seção transversal da viga permanece sempre plana, com a mesma forma e perpendicular ao eixo da viga, sendo a curva proporcional ao momento considerando-se as tensões superficiais de cisalhamento superior e inferior nulas, pois o seu carregamento é transversal, isto é, a tensão é constante ao longo da viga para o carregamento de momento das extremidades, [Moschen, 1999]. Veja a figura 1.1

A equação diferencial parcial, correspondente ao deslocamento $v(t, x)$ de uma viga de acordo com o modelo de Euler-Bernoulli, é:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right] = f(t, x), \quad (1.1)$$

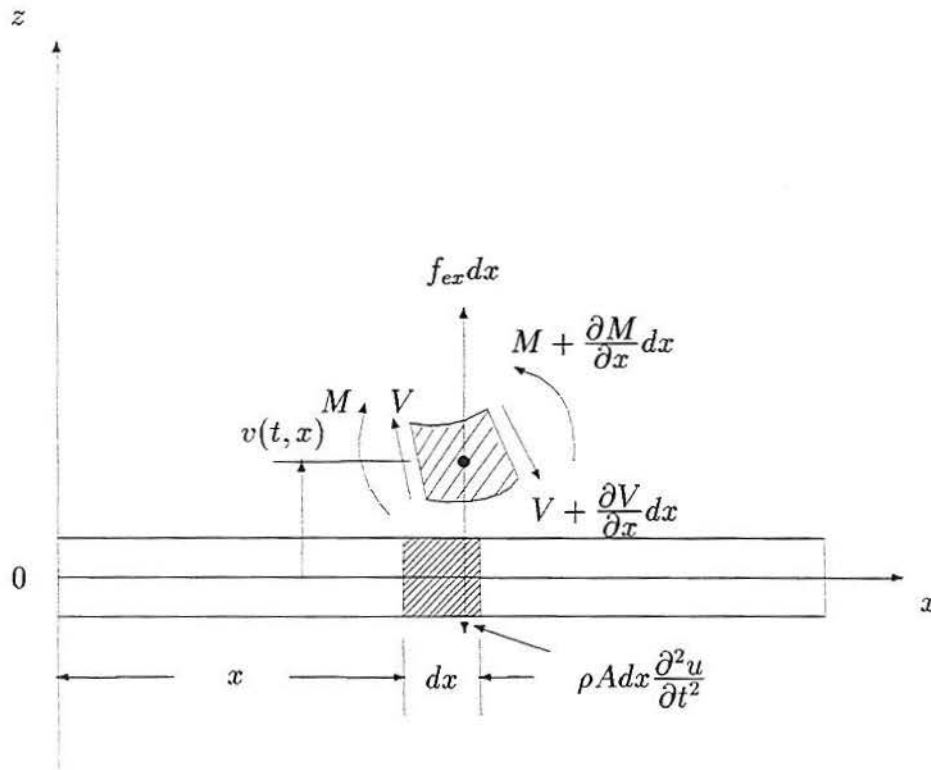


Figura 1.1 *Viga em vibração transversal com elemento diferencial*

onde $\rho A(x)$ é a massa linear distribuída ao longo do eixo x , $EI(x)$ é a rigidez flexural e $f(t, x)$ é a carga ao longo do eixo x .

Quando o modelo de Euler-Bernoulli considera a área da seção transversal e momento de inércia constantes, tem-se a equação

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x). \quad (1.2)$$

1.3 Condições Iniciais e de Contorno

Observa-se que a equação

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} = 0 \quad (1.3)$$

é de segunda ordem em relação ao tempo, sendo necessário conhecer duas condições iniciais que correspondem ao deslocamento e a velocidade inicial da viga, sendo dados por

$$v(0, x) = v_0(x), \text{ deslocamento inicial,}$$

e

$$\frac{\partial v(0, x)}{\partial t} = v_1(x), \text{ velocidade inicial,}$$

onde $v_0(x)$ e $v_1(x)$ são funções conhecidas.

Pelo método espectral se consideram as soluções oscilatórias da forma $v(t, x) = e^{i\omega t} X(x)$ da equação

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} = 0.$$

Substituindo-se $v(t, x) = e^{i\omega t} X(x)$ na equação anterior obtêm-se a equação espacial descrita por

$$X^{(iv)}(x) - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} X(x) = 0 \quad (1.4)$$

que é de quarta ordem e é denominada *equação modal*. Consideram-se quatro condições de contorno, duas em cada extremidade ($x = 0$ e $x = L$) que envolvem o deslocamento $v(t, x)$, o giro $\frac{\partial v(t, x)}{\partial x}$, o momento fletor $EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}$, e a força de cisalhamento $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right)$.

Resolvendo tal equação modal (1.4) são obtidos os modos de vibração para determinados valores de ω , que é denominada a *freqüência característica*.

As condições de contorno das vigas a serem desenvolvidas consta na tabela 1.1

Tipo de Viga	Extremidade Inicial $x = 0$	Extremidade Final $x = L$
Apoiada	$v(t, 0) = 0$ $\frac{\partial^2 v(t, 0)}{\partial x^2} = 0$	$v(t, L) = 0$ $\frac{\partial^2 v(t, L)}{\partial x^2} = 0$
Deslizante	$\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 v(t, 0)}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial v(t, L)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 v(t, L)}{\partial x^3} = 0$
Fixa	$v(t, 0) = 0$ $\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0$	$v(t, L) = 0$ $\frac{\partial v(t, L)}{\partial x} = 0$
Livre	$\frac{\partial^2 v(t, 0)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 v(t, 0)}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^2 v(t, L)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 v(t, L)}{\partial x^3} = 0$

Tabela 1.1 Condições de Contorno consideradas

Quando a extremidade de uma viga for:

- apoiada: seu deslocamento e o momento fletor são nulos, ou seja, $X(0) = 0$ e $X''(0) = 0$.
- deslizante: seu giro e sua força de cisalhamento são nulos, ou seja, $X'(0) = 0$ e $X'''(0) = 0$.
- fixa: seu deslocamento e seu giro são nulos, ou seja, $X(0) = 0$ e $X'(0) = 0$.
- livre: seu momento fletor e sua força de cisalhamento são nulos, ou seja, $X''(0) = 0$ e $X'''(0) = 0$.

2 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Considerando a viga bissegmentada mostrada na figura 2.1

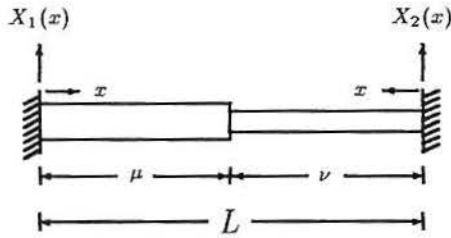


Figura 2.1 *Esquema de uma viga bissegmentada com descontinuidade na seção transversal*

Adota-se uma viga dividida em duas partes, onde a origem do eixo espacial do primeiro segmento está no extremo esquerdo da viga composta. A origem do segundo segmento está no extremo direito. Ver figura 2.1.

O movimento oscilatório dos segmentos é representado por $v_1(t, x)$ e $v_2(t, x)$, respectivamente. Tais funções satisfazem as equações de Euler-Bernoulli

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1(t, x)}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1(t, x)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2(t, x)}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2(t, x)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.2)$$

dando origem às equações modais

$$X_1^{(iv)}(x) - \frac{\omega^2 \rho_1 A_1}{E_1 I_1} X_1(x) = 0 \quad (2.3)$$

e

$$X_2^{(iv)}(x) - \frac{\omega^2 \rho_2 A_2}{E_2 I_2} X_2(x) = 0. \quad (2.4)$$

No primeiro segmento têm-se como solução geral

$$X_1(x) = d_{11}\phi_1(x) + d_{21}\phi_2(x) + d_{31}\phi_3(x) + d_{41}\phi_4(x), \quad (2.5)$$

onde $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)\}$ é uma base de soluções, isto é, seu wronskiano é diferente de zero e as constantes d_{i1} são indeterminadas.

Portanto,

$$X_1(x) = \psi_1(x)\mathbf{d}_1, \quad (2.6)$$

onde

$$\psi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

Já no segundo segmento, a solução geral será:

$$X_2(x) = d_{12}\psi_1(x) + d_{22}\psi_2(x) + d_{32}\psi_3(x) + d_{42}\psi_4(x), \quad (2.8)$$

onde $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\}$ é uma base de soluções, isto é, seu wronskiano é diferente de zero e as constantes d_{i2} são indeterminadas.

Portanto

$$X_2(x) = \psi_2(x)\mathbf{d}_2, \quad (2.9)$$

onde

$$\psi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \\ d_{42} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

De maneira genérica, as condições de contorno da viga composta podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} A_{11}X_1(0) + B_{11}X_1'(0) + C_{11}X_1''(0) + D_{11}X_1'''(0) = 0 \\ A_{12}X_1(0) + B_{12}X_1'(0) + C_{12}X_1''(0) + D_{12}X_1'''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{cases} A_{21}X_2(0) + B_{21}X_2'(0) + C_{21}X_2''(0) + D_{21}X_2'''(0) = 0 \\ A_{22}X_2(0) + B_{22}X_2'(0) + C_{22}X_2''(0) + D_{22}X_2'''(0) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Denotando por $\alpha = \left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}\right)^{1/4}$, então as condições de continuidade das grandezas físicas na posição de descontinuidade da seção transversal são apresentadas na tabela

2.1

Grandeza	Condições
Deslocamento	$X_1(\mu) = X_2(\nu)$
Giro	$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$
Momento Fletor	$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$
Força de Cisalhamento	$X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$

Tabela 2.1 *Condições de Continuidade Física na Posição de Descontinuidade da Seção Transversal*

A seguir, a matriz das condições de contorno e de continuidade é formada.

Em relação à forma matricial da extremidade esquerda da viga, têm-se:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \\ \phi''(0) \\ \phi'''(0) \end{bmatrix} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}.$$

Para a extremidade direita, têm-se:

$$\begin{bmatrix} A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \\ \psi''(0) \\ \psi'''(0) \end{bmatrix} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}.$$

Para as condições de continuidade, têm-se:

$$\begin{aligned} X_1(\mu) - X_2(\nu) &= 0 \\ X_1'(\mu) + X_2'(\nu) &= 0 \\ X_1''(\mu) - \alpha^4 X_2''(\nu) &= 0 \\ X_1'''(\mu) + \alpha^4 X_2'''(\nu) &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

que origina a matriz

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix}$$

Então, a matriz B é formada por

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Em seguida, forma-se a matriz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi_1(0) & 0 \\ \Psi_1(\mu) & 0 \\ 0 & \Psi_2(\nu) \\ 0 & \Psi_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

sendo,

$$\Psi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \phi''(x) \\ \phi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \\ \phi'_1(x) & \phi'_2(x) & \phi'_3(x) & \phi'_4(x) \\ \phi''_1(x) & \phi''_2(x) & \phi''_3(x) & \phi''_4(x) \\ \phi'''_1(x) & \phi'''_2(x) & \phi'''_3(x) & \phi'''_4(x) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

e

$$\Psi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \\ \psi''(x) \\ \psi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \\ \psi'_1(x) & \psi'_2(x) & \psi'_3(x) & \psi'_4(x) \\ \psi''_1(x) & \psi''_2(x) & \psi''_3(x) & \psi''_4(x) \\ \psi'''_1(x) & \psi'''_2(x) & \psi'''_3(x) & \psi'''_4(x) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

De maneira expandida, a matriz Φ fica

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1(\mu) & \phi_2(\mu) & \phi_3(\mu) & \phi_4(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'(\mu) & \phi_2'(\mu) & \phi_3'(\mu) & \phi_4'(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1''(\mu) & \phi_2''(\mu) & \phi_3''(\mu) & \phi_4''(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'''(\mu) & \phi_2'''(\mu) & \phi_3'''(\mu) & \phi_4'''(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(\nu) & \psi_2(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(\nu) & \psi_2'(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4'(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(\nu) & \psi_2''(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4''(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(\nu) & \psi_2'''(\nu) & \psi_3'''(\nu) & \psi_4'''(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(0) & \psi_2(0) & \psi_3(0) & \psi_4(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_3(0) & \psi_4'(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_3(0) & \psi_4''(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_3'''(0) & \psi_4'''(0) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Deste modo, o sistema linear de equações que deve ser analisado é:

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

onde,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}.$$

2.1 Base Espectral Clássica

Denotando por $a_1 = \frac{\omega^2}{E_1 I_1}$, a equação modal para o primeiro segmento da viga é representada por

$$X_1^{(iv)}(x) - a_1^2 \rho_1 A_1 X_1(x) = 0 \quad (2.20)$$

A solução espectral escrita na forma trigonométrica é descrita como

$$X_1(x) = d_{11} \sin(\varepsilon_1 x) + d_{21} \cos(\varepsilon_1 x) + d_{31} \sinh(\varepsilon_1 x) + d_{41} \cosh(\varepsilon_1 x), \quad (2.21)$$

onde $\varepsilon_1 = (a_1^2 \rho_1 A_1)^{1/4}$. Portanto, as quatro funções de base são

$$\phi_1 = \sin(\varepsilon_1 x), \quad \phi_2 = \cos(\varepsilon_1 x), \quad \phi_3 = \sinh(\varepsilon_1 x), \quad \phi_4 = \cosh(\varepsilon_1 x). \quad (2.22)$$

Similarmente, a equação modal para o segundo segmento da viga é

$$X_2^{(iv)}(x) - a_2^2 \rho_2 A_2 X_2(x) = 0 \quad (2.23)$$

cuja solução é descrita por

$$X_2(x) = d_{12} \sin(\varepsilon_2 x) + d_{22} \cos(\varepsilon_2 x) + d_{32} \sinh(\varepsilon_2 x) + d_{42} \cosh(\varepsilon_2 x), \quad (2.24)$$

para simplificar, introduzimos um novo parâmetro (θ), de modo que exista uma relação entre ε_1 e ε_2 da forma,

$$\varepsilon_2 = \theta \varepsilon_1 \quad (2.25)$$

sendo que

$$\theta = \frac{\varphi}{\alpha}, \quad \varphi = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 I_2}{\rho_1 I_1}}, \quad \text{e} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}}, \quad (2.26)$$

onde

θ : parâmetro de comparação da estrutura da viga

φ : parâmetro de comparação da massa linear

α : parâmetro de comparação da rigidez flexural

Portanto, as quatro funções de base são

$$\psi_1 = \text{sen}(\varepsilon_2 x), \quad \psi_2 = \text{cos}(\varepsilon_2 x), \quad \psi_3 = \text{senh}(\varepsilon_2 x), \quad \psi_4 = \text{cosh}(\varepsilon_2 x). \quad (2.27)$$

A matriz Φ da equação (2.18) é definida por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^2 & 0 & \varepsilon_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1^3 & 0 & \varepsilon_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\varepsilon_1 \mu) & \cos(\varepsilon_1 \mu) & \sinh(\varepsilon_1 \mu) & \cosh(\varepsilon_1 \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1 & -\sin(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1 & \cosh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1 & \sinh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^2 & -\cos(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^2 & \sinh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^2 & \cosh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^3 & \sin(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^3 & \cosh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^3 & \sinh(\varepsilon_1 \mu)\varepsilon_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varepsilon_2 \nu) & \cos(\varepsilon_2 \nu) & \sinh(\varepsilon_2 \nu) & \cosh(\varepsilon_2 \nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2 & -\sin(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2 & \cosh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2 & \sinh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^2 & -\cos(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^2 & \sinh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^2 & \cosh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^3 & \sin(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^3 & \cosh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^3 & \sinh(\varepsilon_2 \nu)\varepsilon_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^2 & 0 & \varepsilon_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^3 & 0 & \varepsilon_2^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

A seguir introduzimos o cálculo matricial dos modos das vigas bissegmentadas simetricamente descontínuas.

3 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DE VIGAS BISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS

O objetivo do procedimento analítico-simbólico aqui desenvolvido é a obtenção da frequência e do modo normal. Aqui estão sendo apresentados os modos relativos aos diversos tipos de vigas com descontinuidade nas propriedades da seção transversal, caracterizados pelas suas condições de contorno e continuidade das grandezas físicas envolvidas.

Os modos $X(x)$ serão obtidos para diversas condições de contorno clássicas, uma vez conhecidas as funções $X_1(x)$ e $X_2(x)$ para cada segmento da viga, mediante

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \mu, \\ X_2(1-x), & \text{se } \mu \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

A abordagem considera a base clássica já descrita no capítulo anterior. O cálculo foi realizado de maneira simbólica com o auxílio do “software” MAPLE V 5. A equação característica foi obtida calculando indiretamente o determinante da matriz do sistema linear homogêneo associado a cada tipo de viga.

No caso forçado, é considerada uma força harmônica na seção $x = a$ da viga

$$p(t, x) = P_0 \text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x - a). \quad (3.2)$$

Neste caso,

$$Q_n(t) = P_0 \text{sen}(\hat{\omega}t)X_n(a), \quad (3.3)$$

e a integral de convolução é representada por:

$$\int_0^t Q_n(\tau) \text{sen } \omega_n(t - \tau) d\tau = \frac{P_0 X_n(a)}{\hat{\omega}^2 - \omega_n^2} [\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}t)]. \quad (3.4)$$

Em geral, têm-se

$$u(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{X_n(a) [\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega} t)]}{\|X_n\|^2 (\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \omega_n} \right] X_n(x). \quad (3.5)$$

Nesta análise, foram considerados os seguintes valores para os parâmetros da entrada harmônica:

$$P_0 = 1000 \text{ N},$$

$$\hat{\omega} = 10 \text{ rad},$$

$$a = \frac{L}{4}.$$

Aproximamos a série de Fourier com os seus primeiros cinco termos.

3.1 Valores Numéricos dos Parâmetros

- Em todos os casos considerados na primeira simulação, foram utilizados os seguintes valores encontrados na literatura [Durig, 1999], sendo o parâmetro de comparação da viga $\theta = 1.016265$

$$L = 1 \text{ m},$$

$$E_1 I_1 = 8000, \text{ N m},$$

$$\rho_1 A_1 = 3000, \text{ Kg m},$$

$$E_2 I_2 = 5000, \text{ N m},$$

$$\rho_2 A_2 = 2000, \text{ Kg m},$$

- A seguir, foram escolhidos os valores de $\theta = 0.8647$ para uma viga segmentada com dois tipos de aço, suave-rígido, [Durig, 1999]

$$L = 1 \text{ m,}$$

$$E_1 I_1 = 175763, \text{ N m,}$$

$$\rho_1 A_1 = 78.3344, \text{ Kg m,}$$

$$E_2 I_2 = 333200, \text{ N m,}$$

$$\rho_2 A_2 = 83.04, \text{ Kg m,}$$

- Depois, foram escolhidos os valores de $\theta = 1.4032$ para uma viga segmentada com dois tipos de aço, rígido-suave, [Durig, 1999]

$$L = 1 \text{ m,}$$

$$E_1 I_1 = 175763, \text{ N m,}$$

$$\rho_1 A_1 = 78.3344, \text{ Kg m,}$$

$$E_2 I_2 = 41650, \text{ N m,}$$

$$\rho_2 A_2 = 71968, \text{ Kg m,}$$

- Na seqüência, foi escolhido o valor fictício $\theta = 0.299069$.
- Por último, foi escolhido o valor fictício $\theta = 4.980657$.

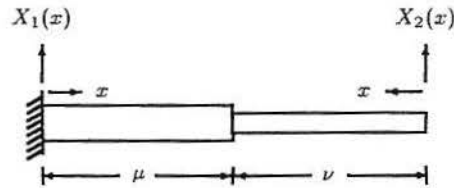
A seguir, apresentamos os resultados gráficos para vigas bissegmentadas com descontinuidade nas propriedades da seção transversal, bem como as tabelas da frequências naturais e autovalores.

Nos gráficos normalizados, em todos os casos é utilizada a seguinte convenção de cores:

Modo	1°	2°	3°	4°	5°
Cor	vermelho	azul	verde	preto	magenta

3.2 Vigas Bissegmentadas sem Apoio na Descontinuidade

3.2.1 Caso 1: Viga Fixa-Livre



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2''(0) = X_2'''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu)$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 3.1 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-livre

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	6.844989813	2.047360028
2	35.92708027	4.690496098
3	99.43898207	7.803441007
4	193.3091576	10.88012879
5	322.2623428	14.04793517

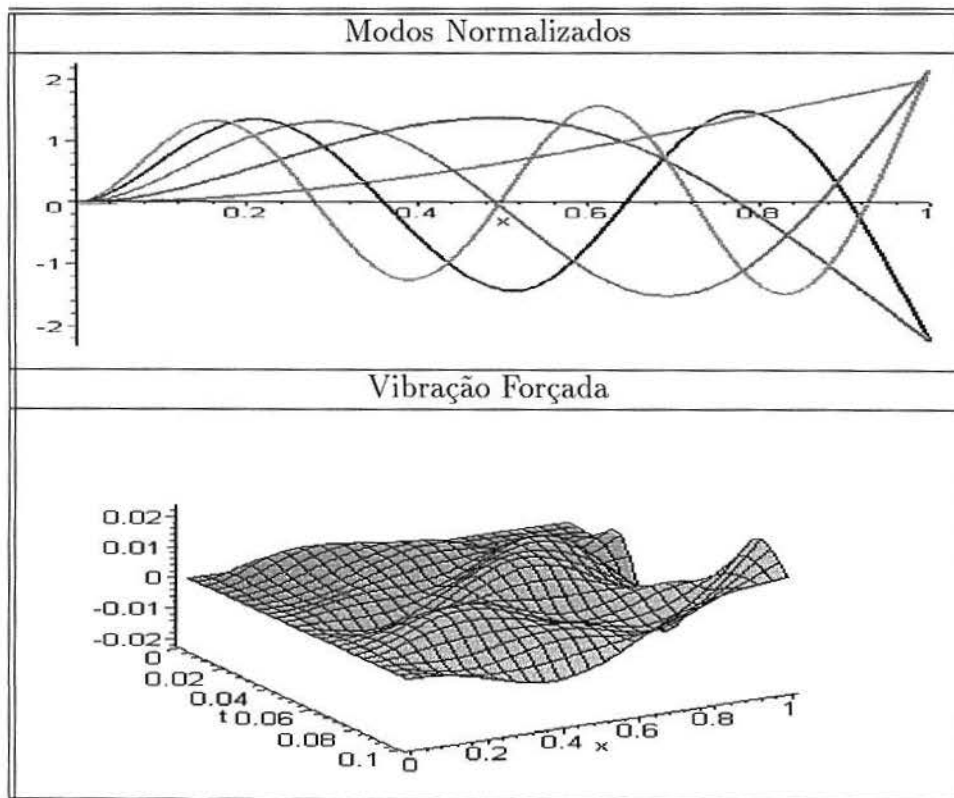


Figura 3.1 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-livre

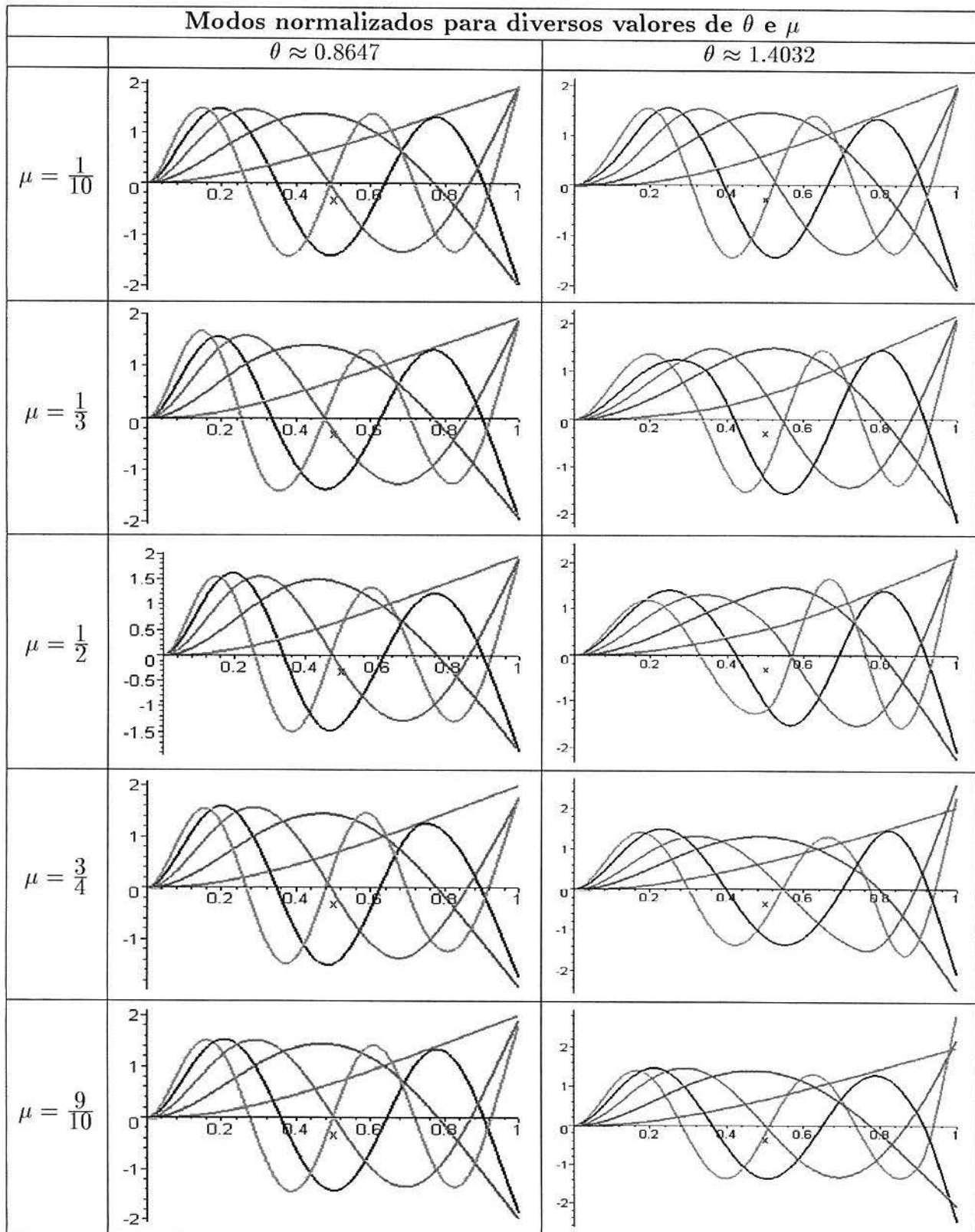


Figura 3.2 Modos da viga bissegmentada fixa-livre

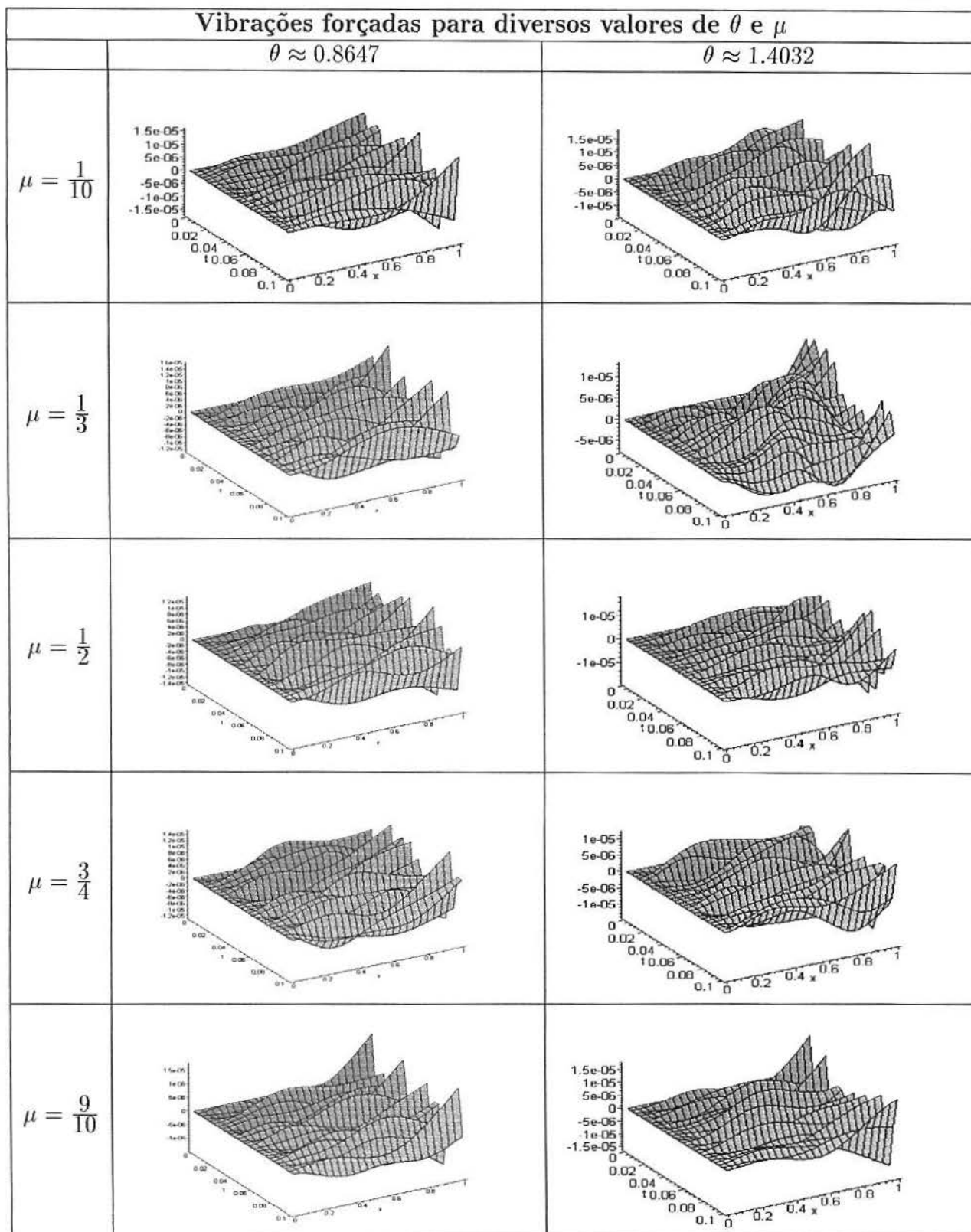


Figura 3.3 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre

Tabela 3.2 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	6735.339766	2.025803284	1	3414.407675	1.442365093
	2	44785.30331	5.223784788	2	21061.80359	3.582327572
	3	128938.9892	8.863589759	3	58053.35751	5.947455296
	4	256197.1158	12.49409013	4	111801.8242	8.253572919
	5	425431.6293	16.10024200	5	181605.9911	10.51918022
$\mu = \frac{1}{2}$	1	5681.283182	1.860547384	1	5559.287308	1.840462937
	2	40027.79363	4.938537347	2	24536.20955	3.866528827
	3	118259.3581	8.488584477	3	73023.92598	6.670372780
	4	225803.7923	11.72959811	4	133880.3287	9.031833053
	5	381000.7484	15.23633212	5	229011.9621	11.81262998
$\mu = \frac{9}{10}$	1	5711.243077	1.865446674	1	5853.536771	1.888542192
	2	35917.37941	4.678103624	2	36490.19750	4.715259768
	3	100879.1505	7.840039030	3	101246.6075	7.854304903
	4	198406.5920	10.99500839	4	194738.9083	10.89290916
	5	329441.0004	14.16792798	5	312330.4748	13.79509505

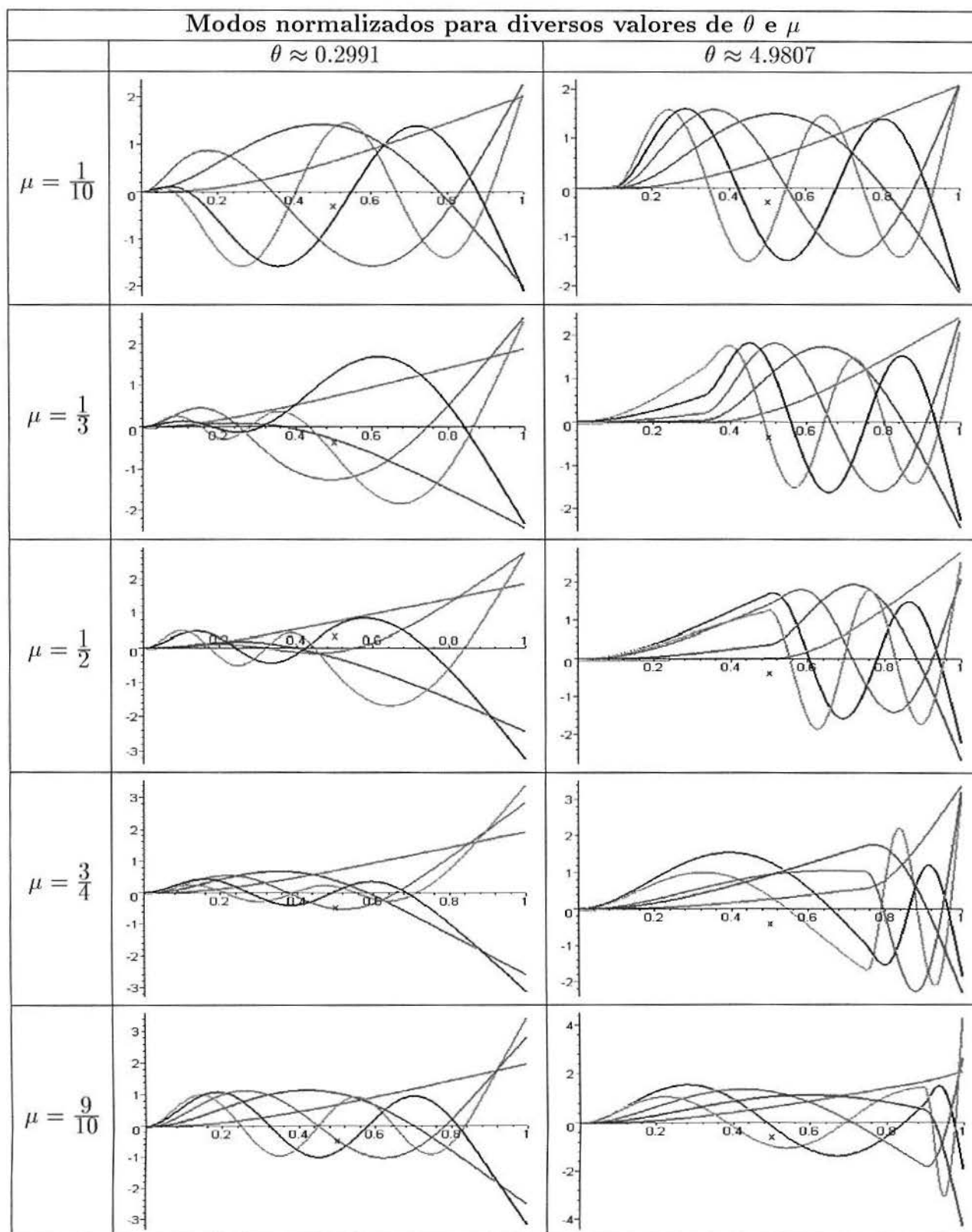


Figura 3.4 Modos da viga bissegmentada fixa-livre

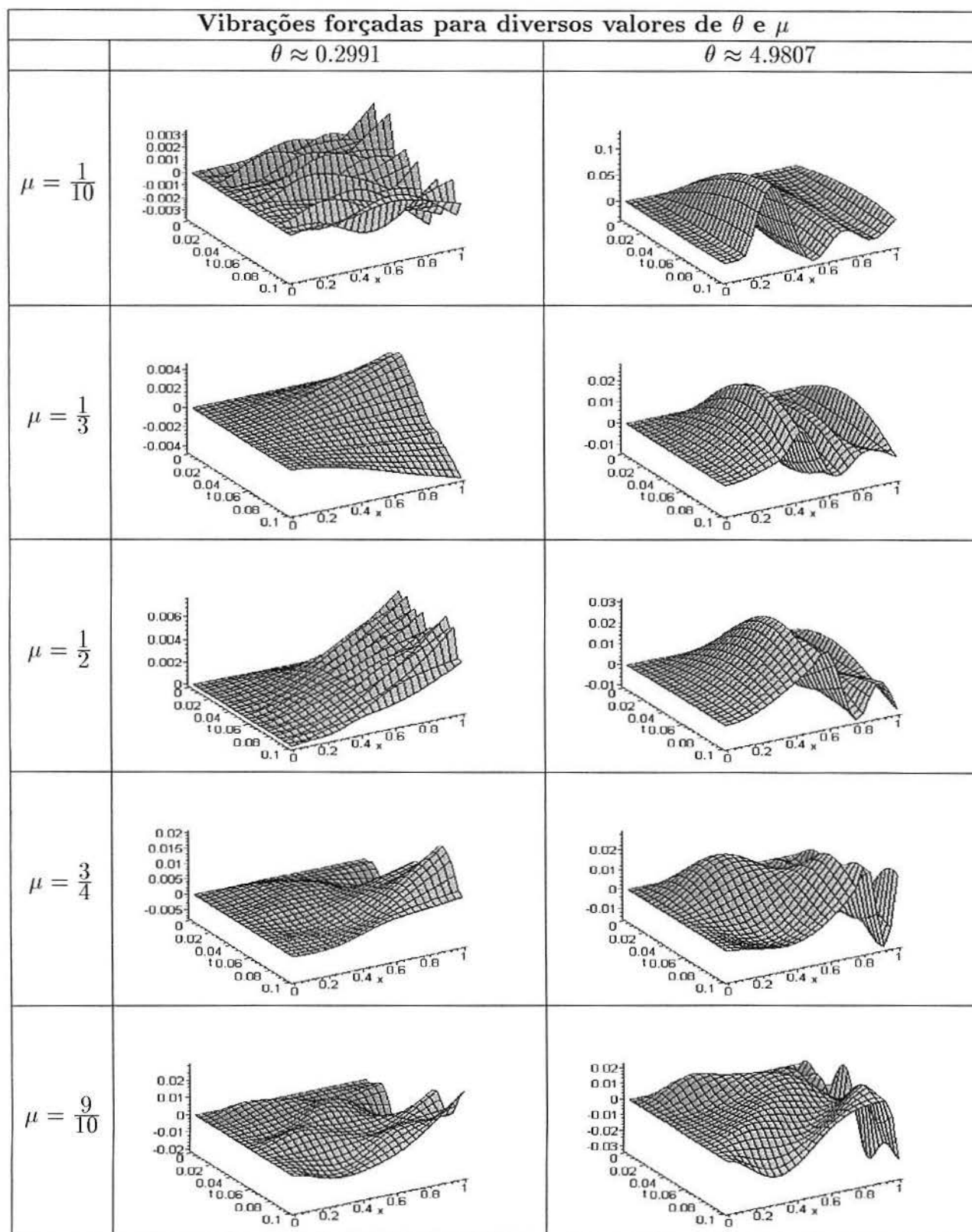


Figura 3.5 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre

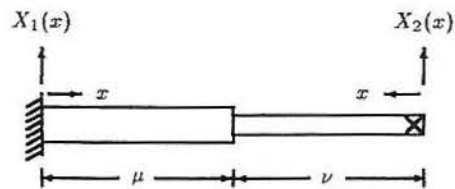
Tabela 3.3 Autovalores da viga bissegmentada fixa-livre

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	6.487951876	1	.4181328693
	2	15.62808977	2	1.046569324
	3	20.65399097	3	1.750939897
	4	28.87271370	4	2.450542657
	5	39.51199501	5	3.149939613
$\mu = \frac{1}{2}$	1	3.694915705	1	.7457073508
	2	8.653423038	2	1.801349699
	3	11.97492529	3	2.770188186
	4	16.43013874	4	3.578918718
	5	22.19579740	5	4.644796979
$\mu = \frac{9}{10}$	1	2.082107438	1	1.732920857
	2	5.210964788	2	3.880358455
	3	8.717252777	3	5.193457124
	4	12.19889744	4	8.123851048
	5	15.67841356	5	10.14615845

Para diferentes valores de θ próximos a 1, seus respectivos modos são semelhantes, bem como seus autovalores e frequências.

Quando $\theta = 0.2991$ se observa certa rigidez nos modos. Quando $\theta = 4.9807$ observa-se claramente a descontinuidade.

3.2.2 Caso 2: Viga Fixa-Apoiada



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu)$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 3.4 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-apoiada

Freqüências naturais e autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	25.22576040	3.930338451
2	80.67010389	7.028523885
3	166.7133543	10.10399242
4	287.3463450	13.26510389
5	435.9970414	16.33990729

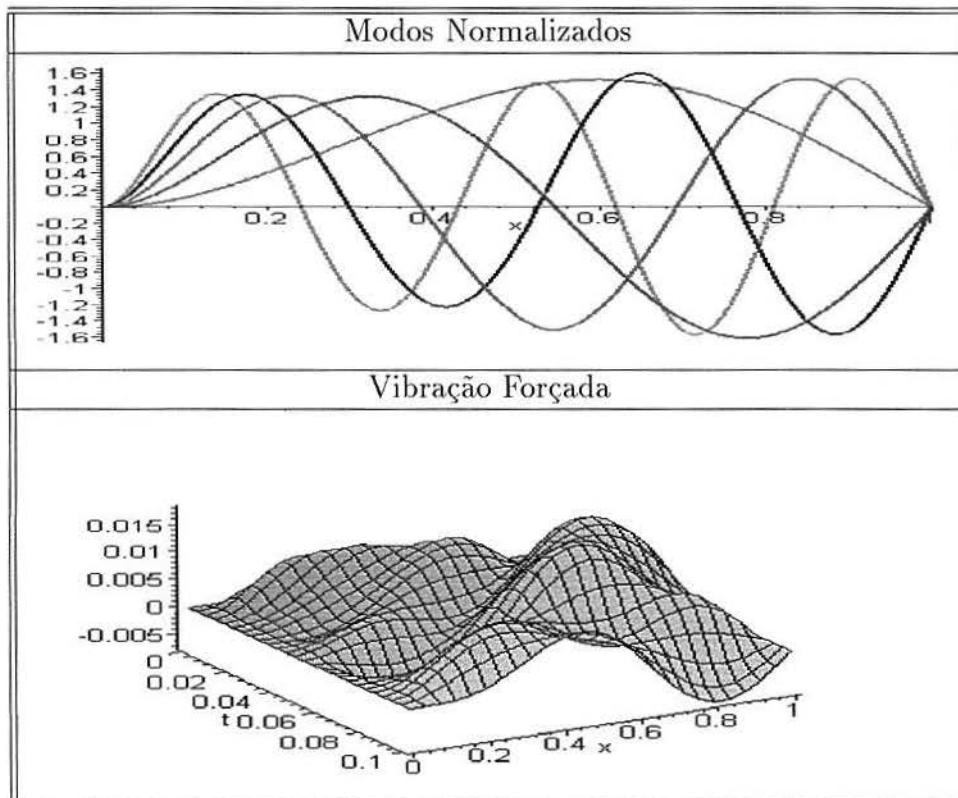


Figura 3.6 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-apoiada

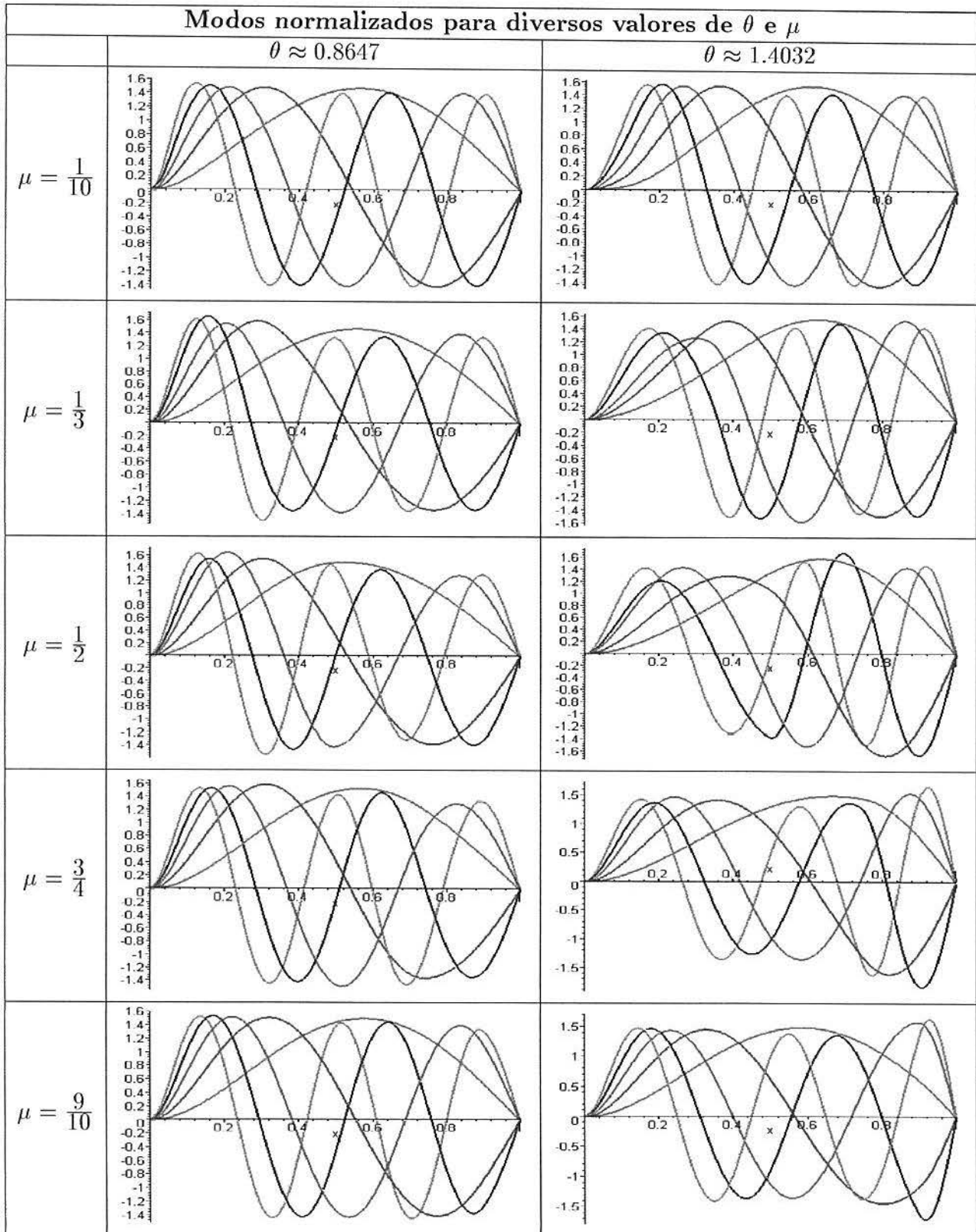


Figura 3.7 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada

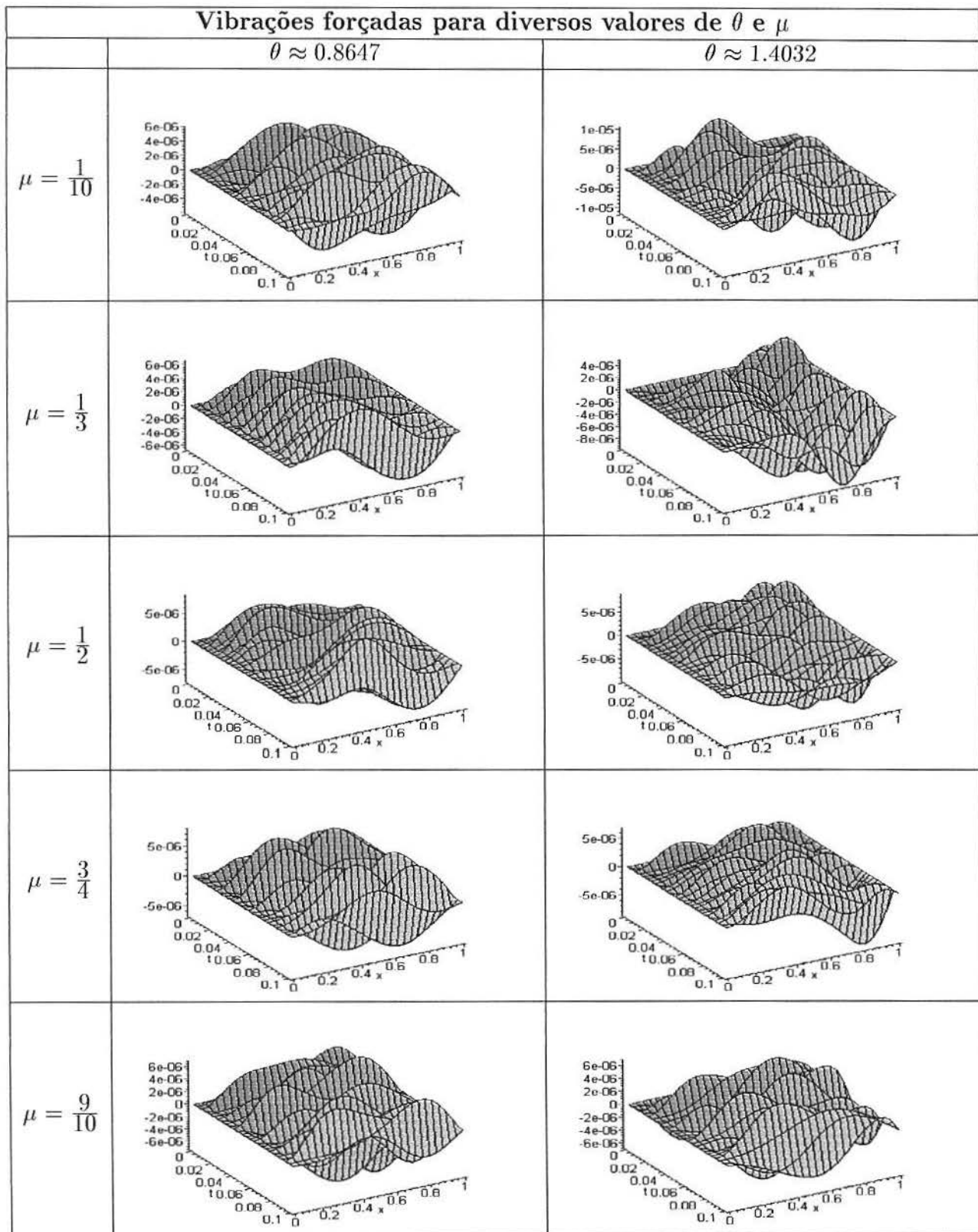


Figura 3.8 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada

Tabela 3.5 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	30981.27195	4.344773475	1	14798.16924	3.002766149
	2	103851.5123	7.954702263	2	47208.44660	5.363241727
	3	220373.2056	11.58769114	3	96828.17312	7.681010971
	4	379293.1192	15.20214948	4	162684.0515	9.956117336
	5	578822.3333	18.77976512	5	244260.3211	12.19955469
$\mu = \frac{1}{2}$	1	28878.84873	4.194763248	1	17336.53936	3.250114950
	2	94330.94705	7.581316257	2	58811.15505	5.986146910
	3	196398.2323	10.93921867	3	117339.6898	8.455513443
	4	337960.5946	14.34995533	4	201091.6307	11.06915616
	5	510949.2912	17.64438059	5	314062.3524	13.83328919
$\mu = \frac{9}{10}$	1	25353.15342	3.930370655	1	24938.01528	3.898059463
	2	82522.75286	7.090949133	2	78264.76876	6.905588090
	3	173141.1363	10.27111633	3	157729.7979	9.803347329
	4	297858.0383	13.47169305	4	264578.0473	12.69680413
	5	457028.5226	16.68741893	5	404302.0154	15.69533066

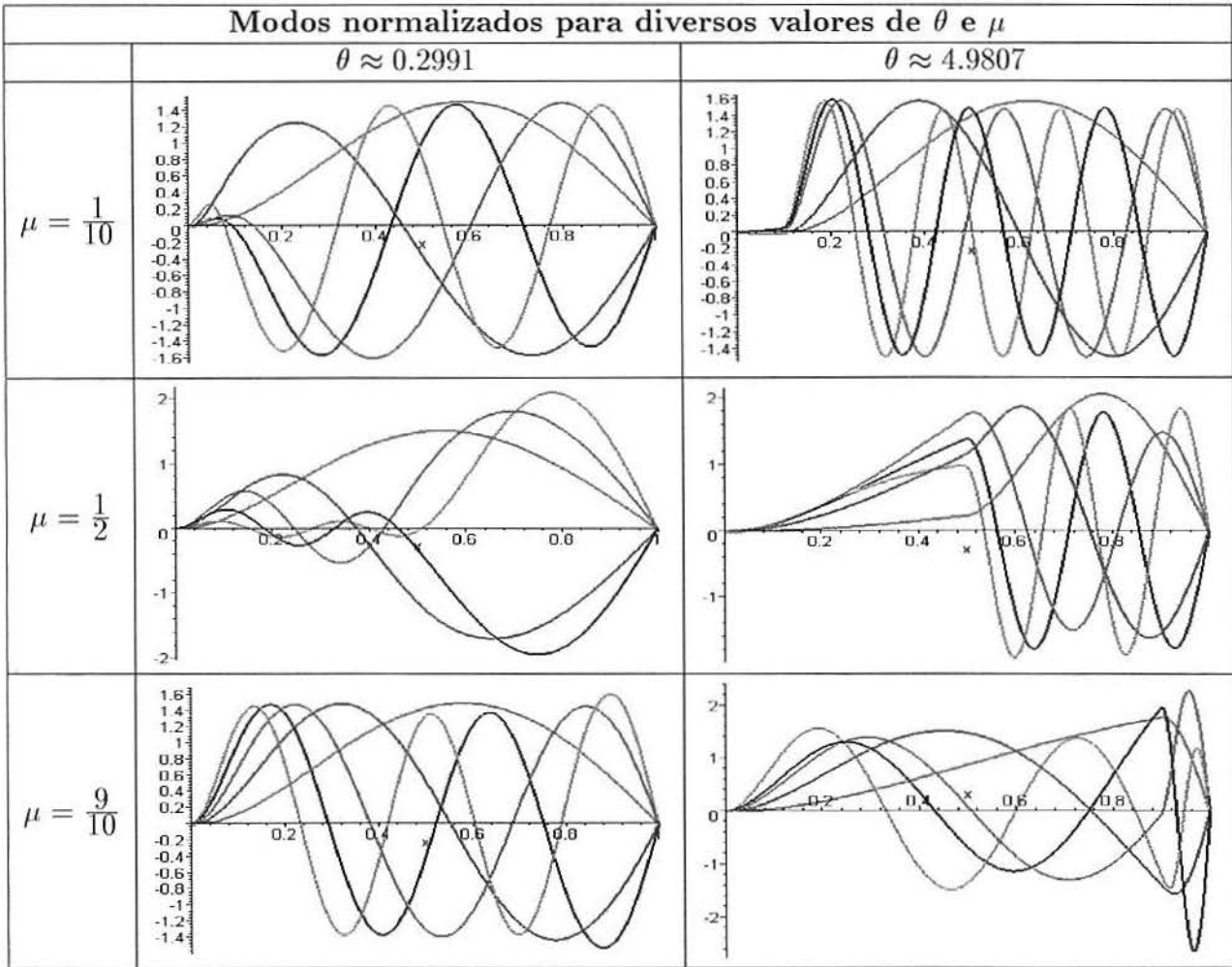


Figura 3.9 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada

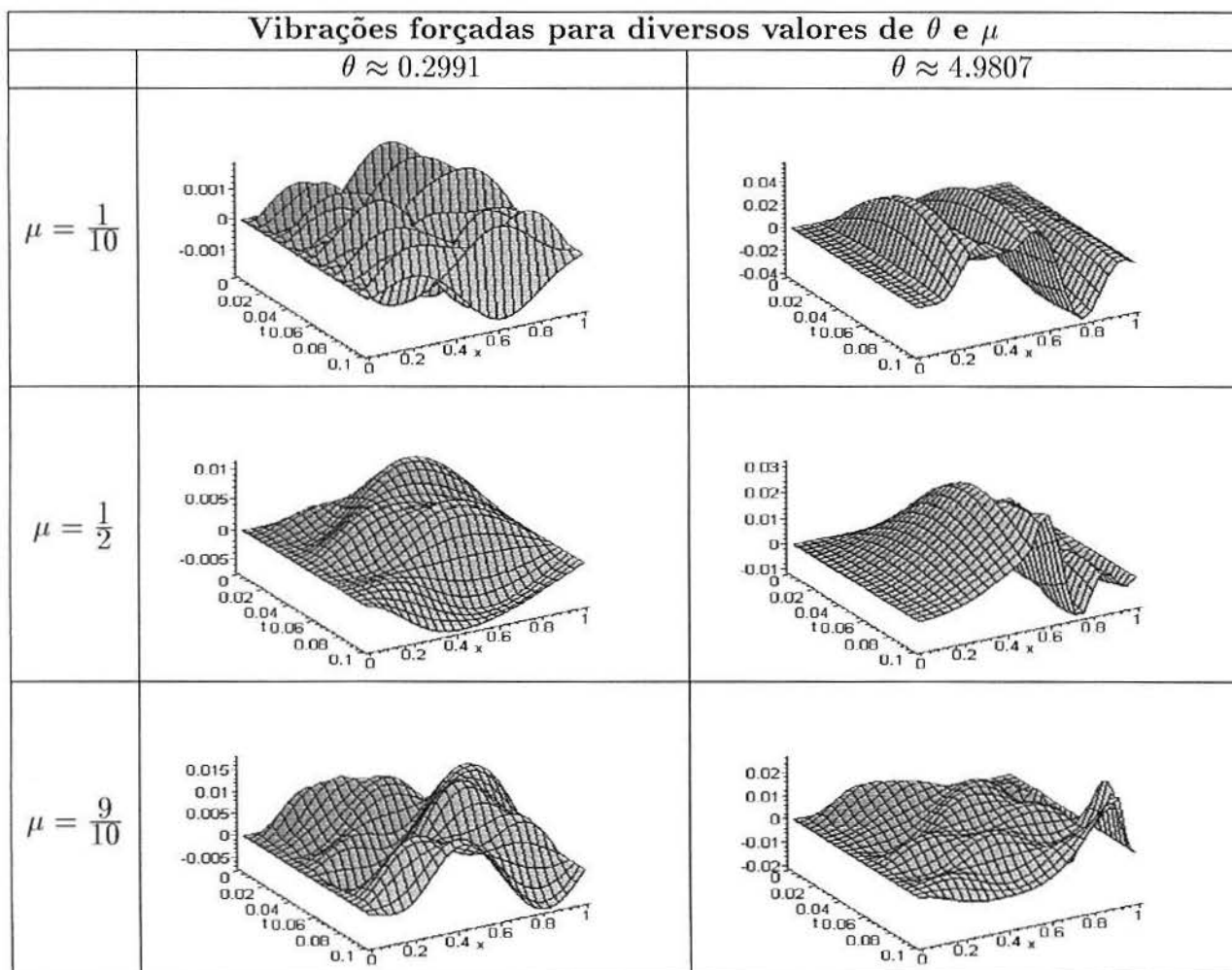


Figura 3.10 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada

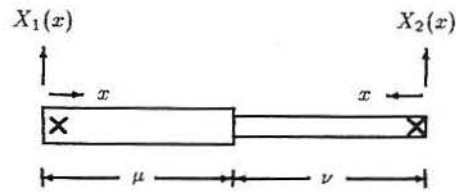
Tabela 3.6 Autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	13.33598831	1	.8754934519
	2	19.73622324	2	1.575766263
	3	26.29388286	3	3.674180329
	4	36.88713278	4	4.372706114
	5	46.23309995	5	5.070624069
$\mu = \frac{1}{2}$	1	4.807910991	1	1.525592559
	2	10.09374633	2	2.562014226
	3	15.97307519	3	3.356294463
	4	21.58767572	4	4.360791673
	5	25.23878997	5	5.523058523
$\mu = \frac{9}{10}$	1	3.931893277	1	2.645472474
	2	7.096562325	2	4.896005025
	3	10.29899103	3	7.736111246
	4	13.54773871	4	9.174988074
	5	16.84268932	5	11.80311723

Para os valores de θ resultantes de diferentes tipos de aços, os modos são semelhantes, bem como seus autovalores e frequências.

Para os materiais fictícios, quanto maior o θ , menor é o seu autovalor.

3.2.3 Caso 3: Viga Biapoiada



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu)$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 3.7 Freqüências naturais e autovalores da viga biapoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	15.59503794	3.090302795
2	63.91840785	6.256346465
3	141.9873292	9.324651554
4	254.7158439	12.48923383
5	395.2113204	15.55688011

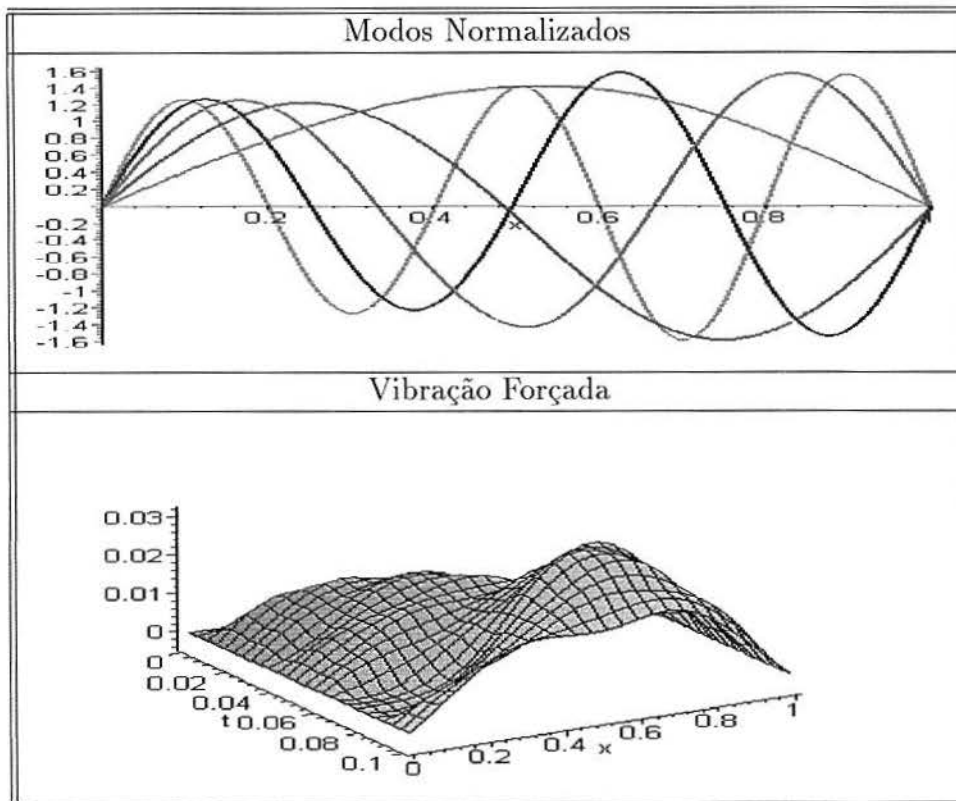


Figura 3.11 Modos normalizados e vibração forçada da viga biapoiada

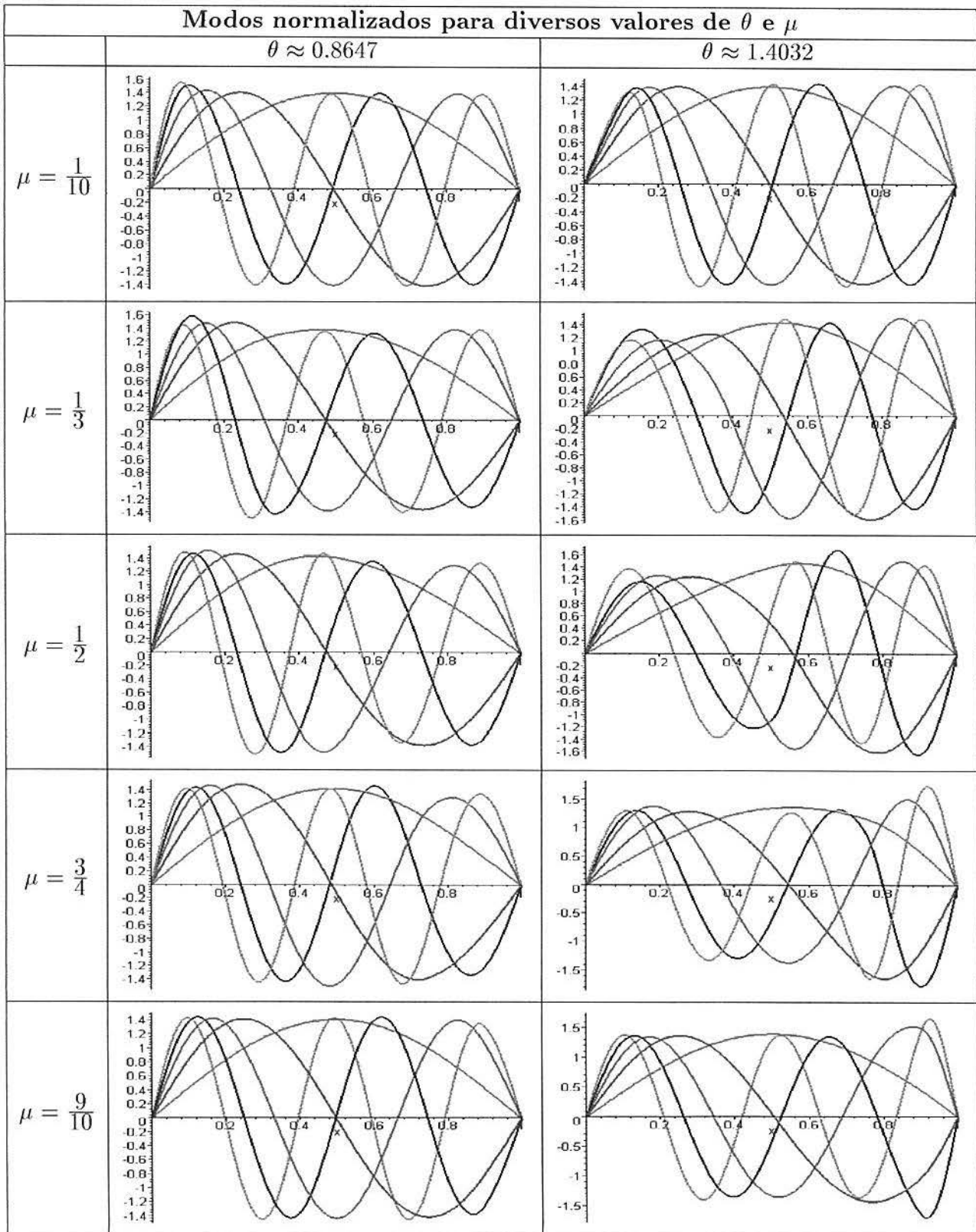


Figura 3.12 Modos da viga bissegmentada biapoiada

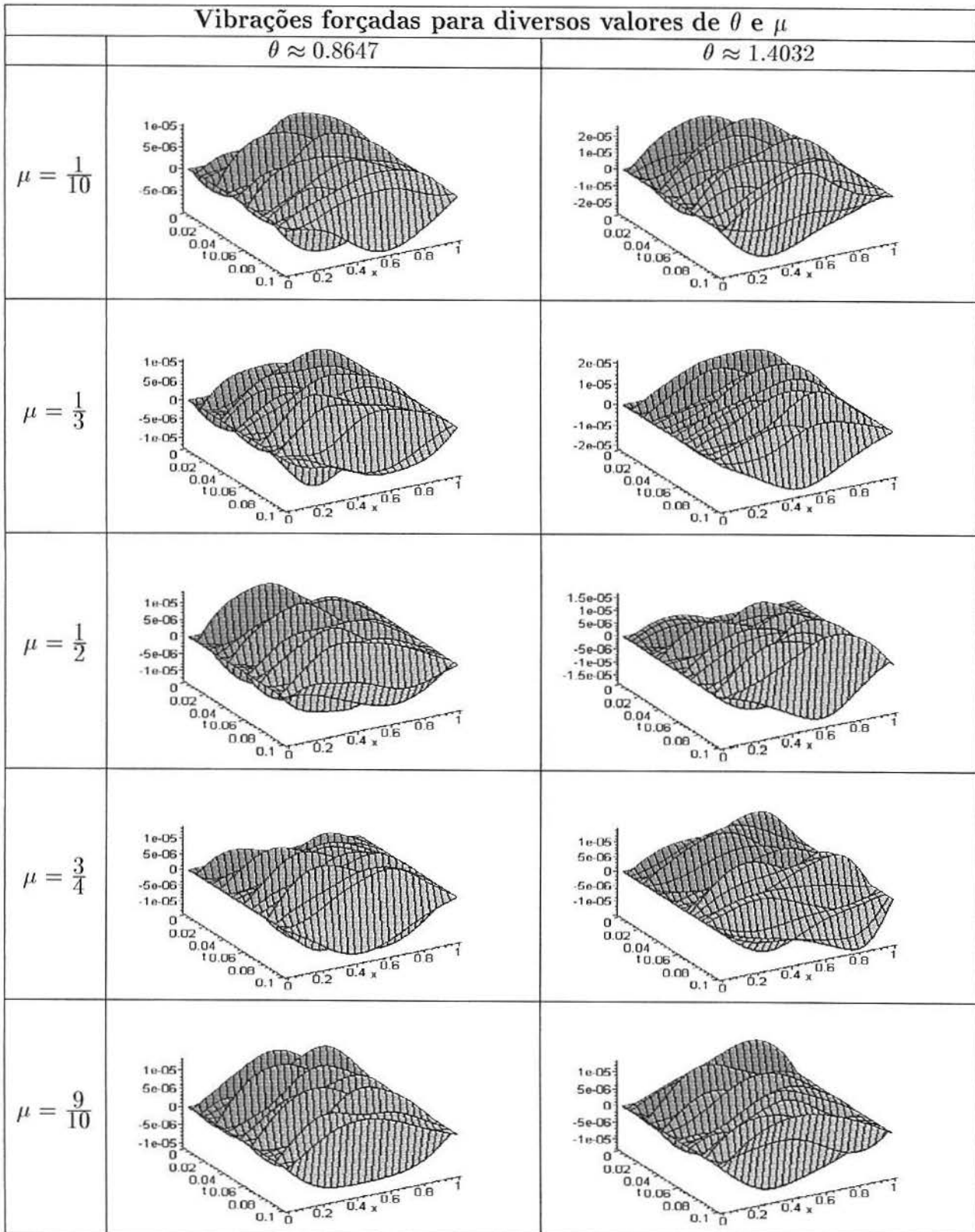


Figura 3.13 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada

Tabela 3.8 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada biapoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	21603.06790	3.628066441	1	8244.530899	2.241302582
	2	85774.28026	7.229296843	2	33181.32825	4.496394417
	3	191028.6120	10.78864062	3	75321.31800	6.774487907
	4	336229.0518	14.31314709	4	135249.4382	9.077897012
	5	521909.2118	17.83261353	5	213424.2734	11.40353296
$\mu = \frac{1}{2}$	1	18253.10918	3.334924008	1	10196.59845	2.492557438
	2	75606.76426	6.787312454	2	47351.09055	5.371338339
	3	165687.9315	10.04761428	3	97610.25761	7.711968481
	4	301264.0232	13.54849802	4	182271.7288	10.53846052
	5	461615.5297	16.77095223	5	279899.2570	13.05925461
$\mu = \frac{9}{10}$	1	16219.78007	3.143692051	1	16036.02045	3.125833326
	2	65121.94542	6.299139110	2	62394.61509	6.165823255
	3	147311.4255	9.474051311	3	135467.3554	9.085207331
	4	263456.4234	12.66986281	4	234994.3099	11.96592261
	5	414000.8985	15.88247419	5	366056.7770	14.93453628

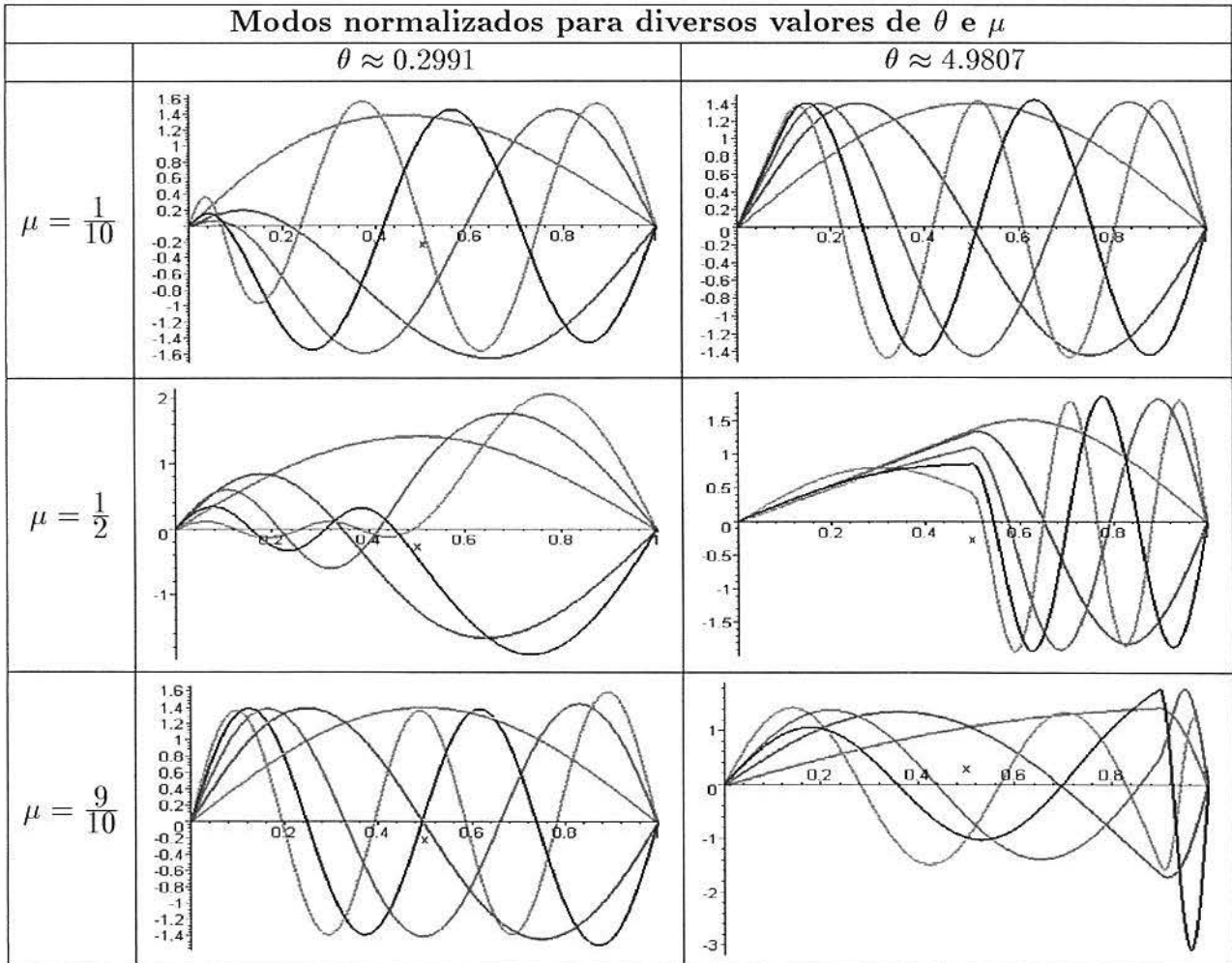


Figura 3.14 Modos da viga bissegmentada biapoiada

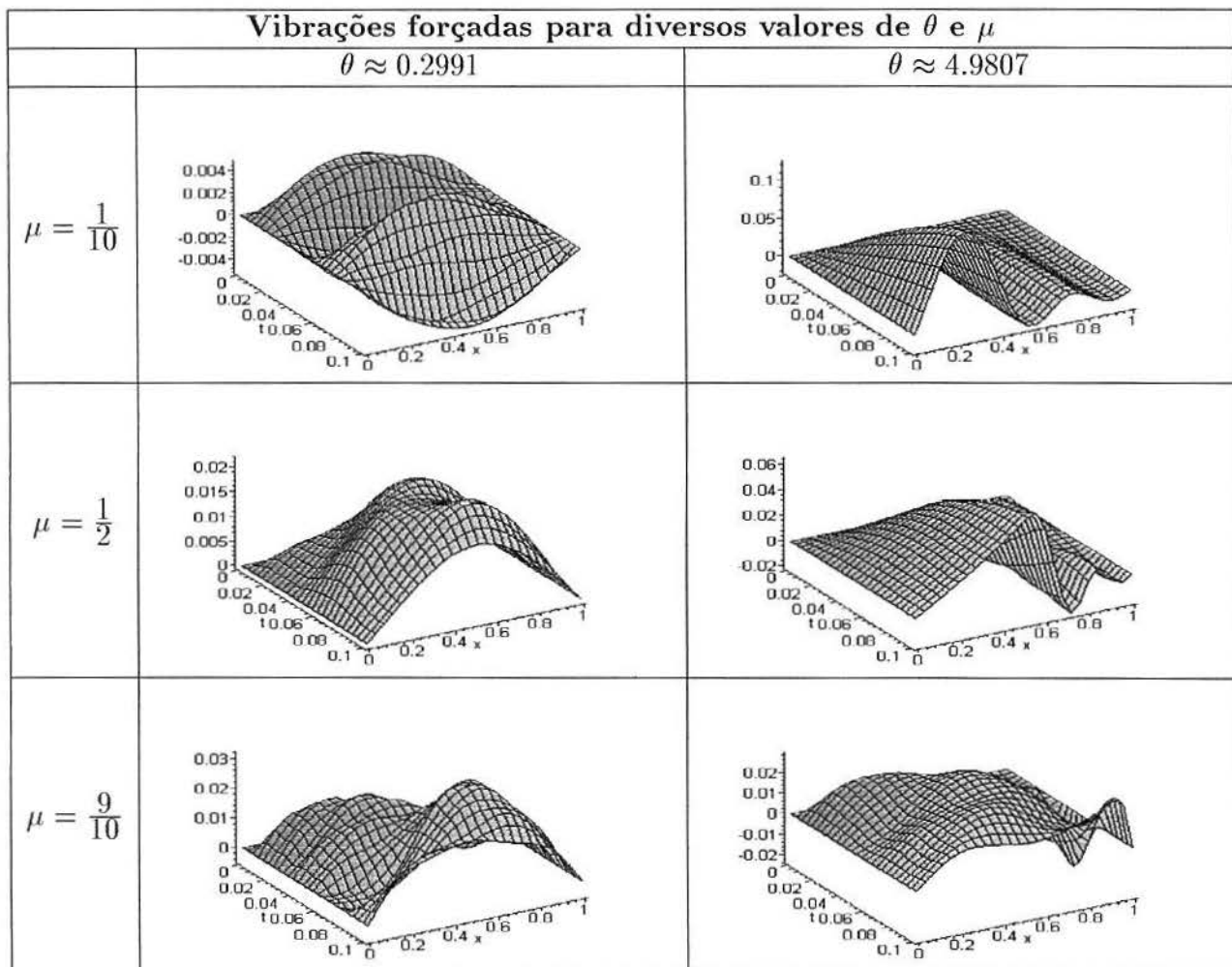


Figura 3.15 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada

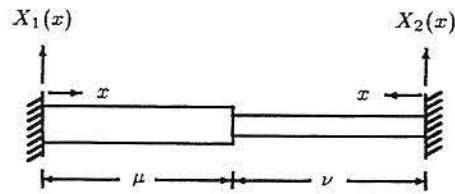
Tabela 3.9 Autovalores da viga bissegmentada biapoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	8.314105800	1	.6322532549
	2	15.21662586	2	1.272273413
	3	25.56616212	3	1.923504439
	4	35.85023601	4	2.585337429
	5	41.87214822	5	3.255584165
$\mu = \frac{1}{2}$	1	3.532075743	1	.7737196663
	2	8.679043523	2	1.858212874
	3	14.50191995	3	3.035380406
	4	20.26736377	4	4.233120497
	5	24.54776185	5	5.415249862
$\mu = \frac{9}{10}$	1	3.143779300	1	2.226079762
	2	6.302595431	2	4.176908759
	3	9.494245796	3	7.124773887
	4	12.73105376	4	8.816688260
	5	16.01492971	5	11.04916082

Nas vigas bissegmentadas biapoiadas os modos são semelhantes quando o parâmetro θ está próximo de 1.

Quando $\theta = 0.299$ se observa a rigidez no material e quando $\theta = 4.9807$ observa-se claramente a descontinuidade.

3.2.4 Caso 4: Viga Fixa-Fixa



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_x(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2'(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu)$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 3.10 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-fixa

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	35.63632118	4.671477368
2	99.70466528	7.813858766
3	193.3939487	10.88251444
4	322.2385171	14.04742250
5	478.3435553	17.11496154

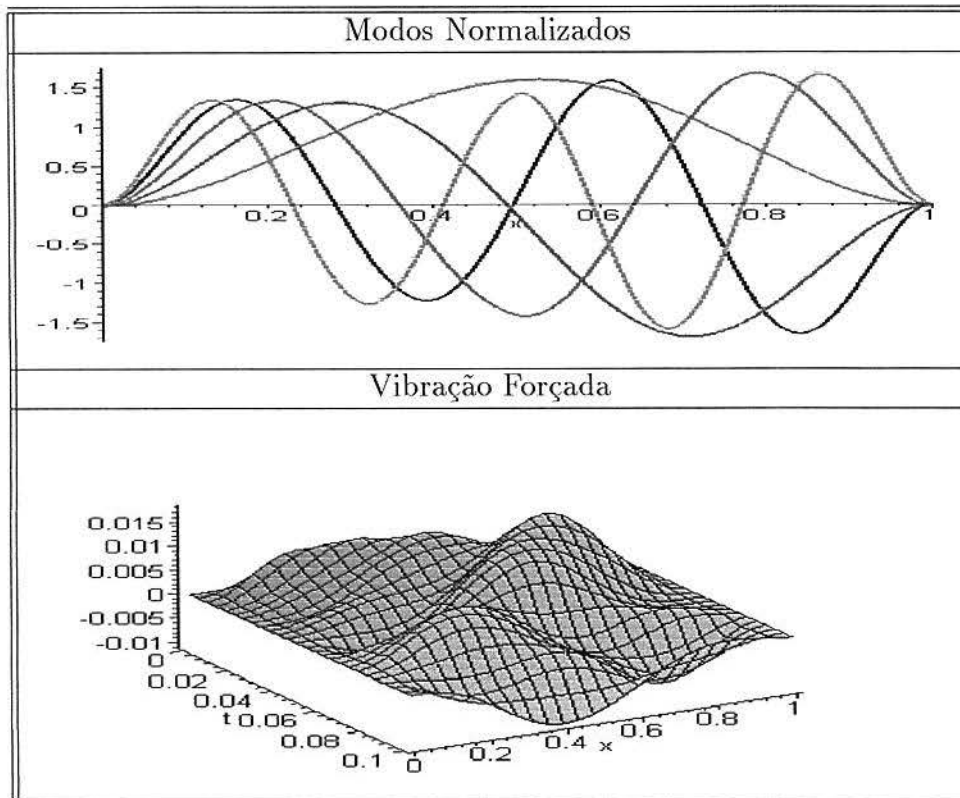


Figura 3.16 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-fixa

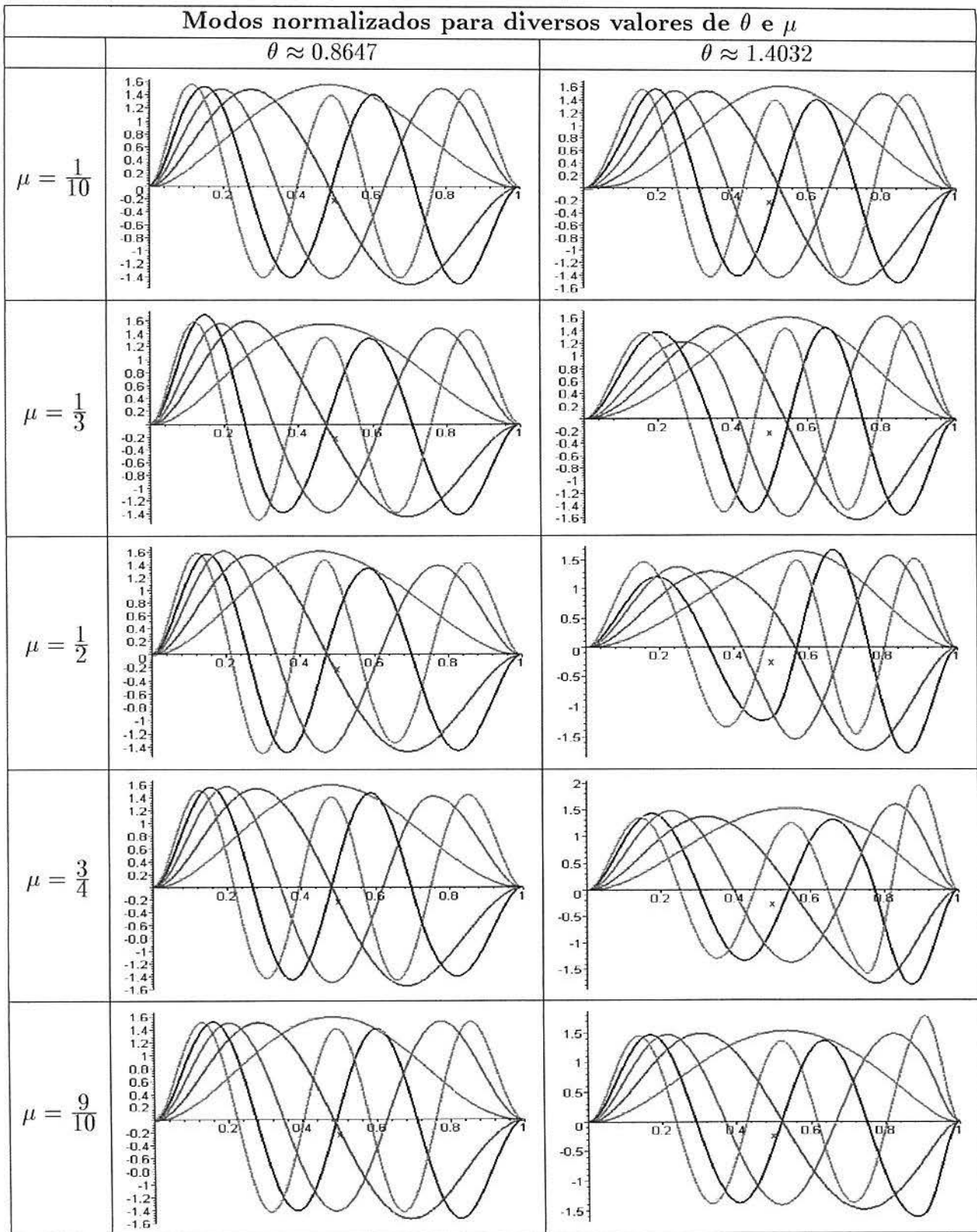


Figura 3.17 Modos da viga bissegmentada fixa-fixa

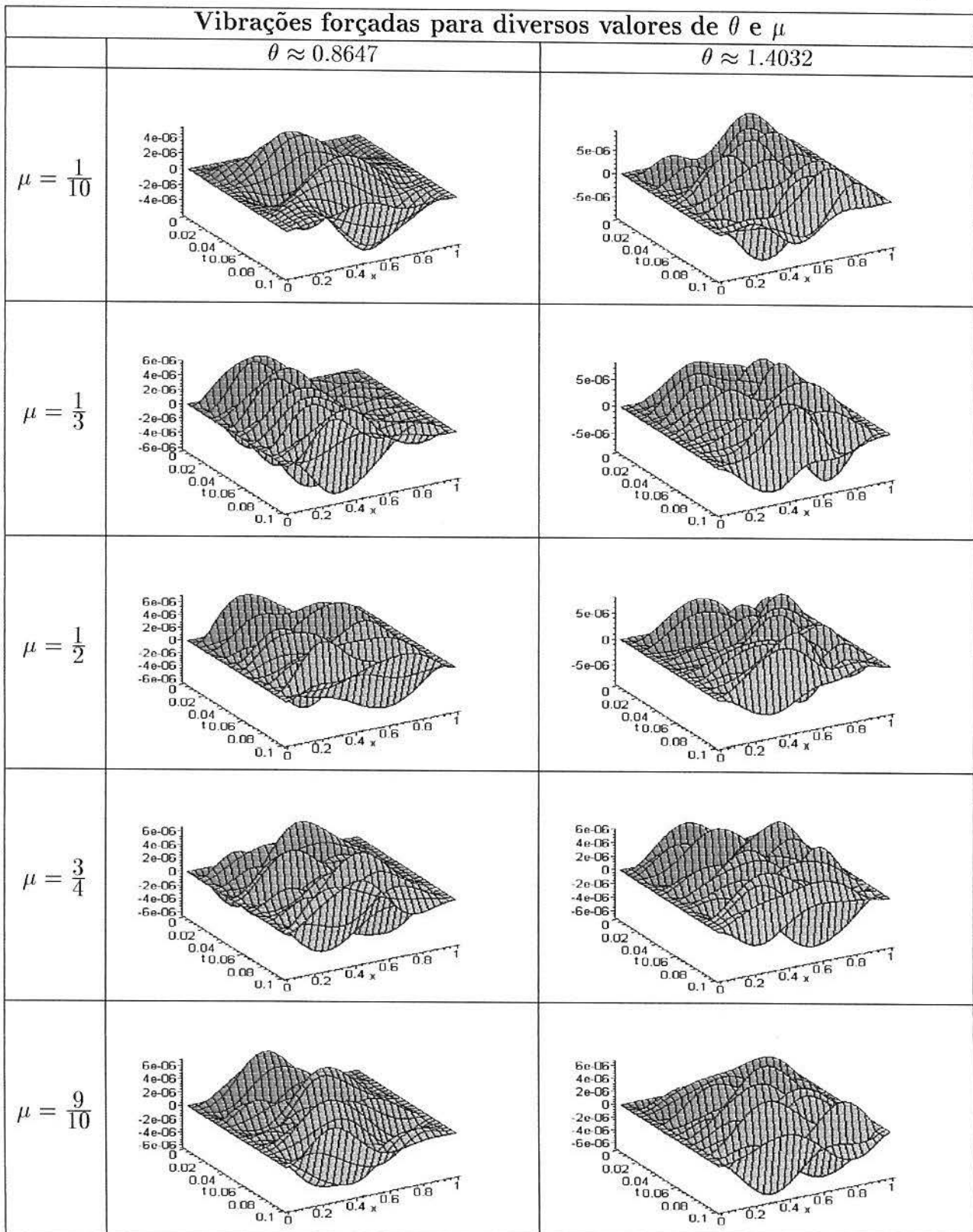


Figura 3.18 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa

Tabela 3.11 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	45393.41554	5.259130497	1	21399.12743	3.610900729
	2	128897.4448	8.862161711	2	58027.36359	5.946123649
	3	256199.8156	12.49415596	3	111803.5759	8.253636983
	4	425431.4384	16.10023839	4	181605.2939	10.51917714
	5	634898.7755	19.66843302	5	267148.3122	12.75832714
$\mu = \frac{1}{2}$	1	41853.60599	5.049913710	1	24625.36073	3.873546885
	2	117971.9162	8.478262001	2	73252.45924	6.680802315
	3	225641.7830	11.72538949	3	133869.3061	9.031461242
	4	381012.6864	15.23657082	4	229000.2832	11.81232877
	5	558931.9149	18.45427426	5	340572.2942	14.40529558
$\mu = \frac{9}{10}$	1	39462.03392	4.903512076	1	31131.99518	4.355329268
	2	107078.5236	8.077346318	2	91872.05130	7.481853895
	3	207168.5272	11.23516373	3	183444.4776	10.57230875
	4	339138.3834	14.37493830	4	301937.7149	13.56363825
	5	503750.4657	17.51964278	5	446328.0307	16.49090910

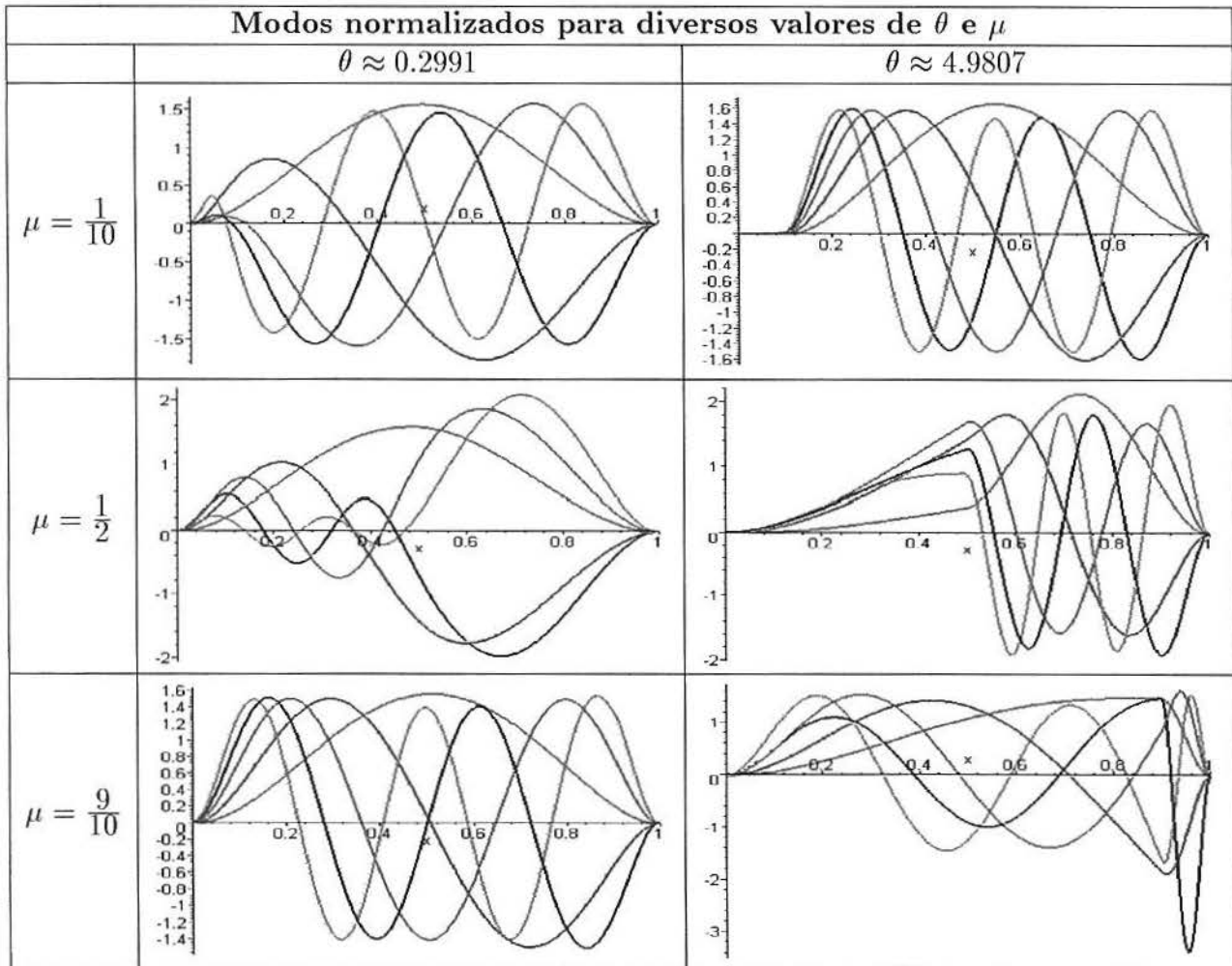


Figura 3.19 Modos da viga bissegmentada fixa-fixa

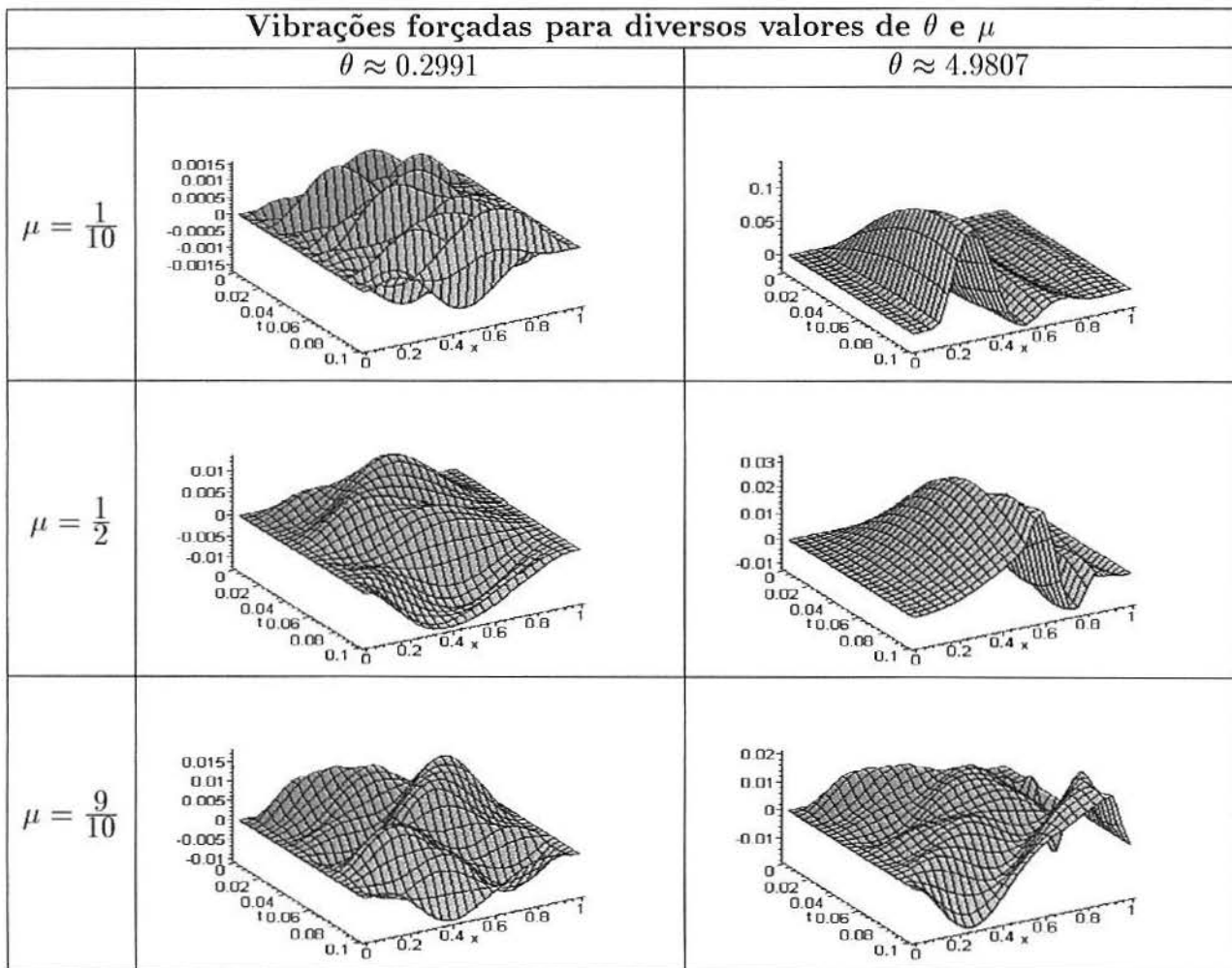


Figura 3.20 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa

Tabela 3.12 Autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa

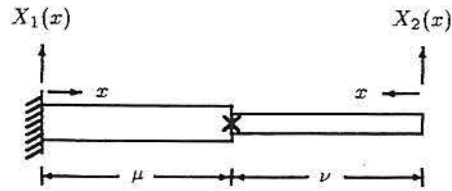
Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1		15.72867774	1	1.054592026
	2		20.67177756	2	1.750592578
	3		28.86797034	3	2.450557731
	4		39.51220458	4	3.149938957
	5		47.69115307	5	3.848863854
$\mu = \frac{1}{2}$	1		5.304113308	1	1.818164553
	2		10.41119846	2	2.769061205
	3		16.24973700	3	3.578943257
	4		22.17353913	4	4.644802311
	5		27.66408569	5	5.819359139
$\mu = \frac{9}{10}$	1		4.596205361	1	3.347243627
	2		7.720810413	2	5.197708157
	3		10.89861833	3	8.147619979
	4		14.10759297	4	10.16688895
	5		17.35123590	5	12.03681781

A viga bissegmentada fixa-fixa apresenta semelhança nos modos, autovalores e frequências quando θ está próximo de 1.

Para os parâmetros θ resultantes dos valores fictícios, observa-se a rigidez e a descontinuidade.

3.3 Vigas Bissegmentadas com Apoio na Descontinuidade

3.3.1 Caso 5: Viga Fixa-Livre



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2''(0) = X_2'''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 3.13 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-livre

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	15.60892936	3.091678846
2	98.94101643	7.783877646
3	142.9189906	9.355193765
4	320.8018178	14.01606901
5	396.8945534	15.58997384

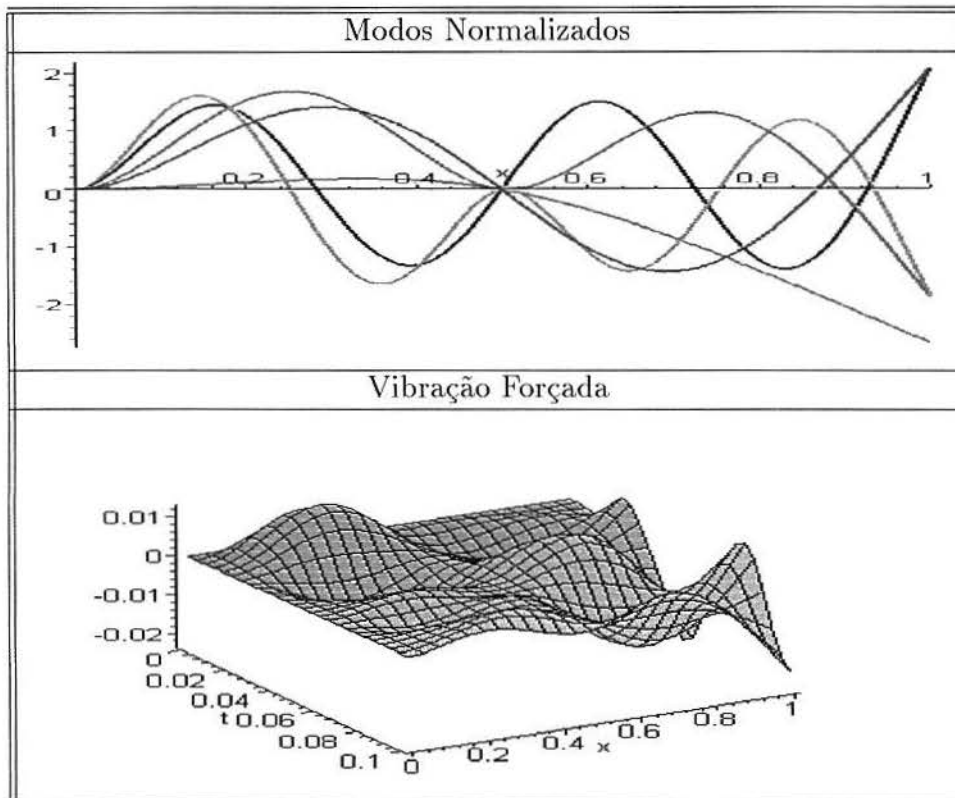


Figura 3.21 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-livre

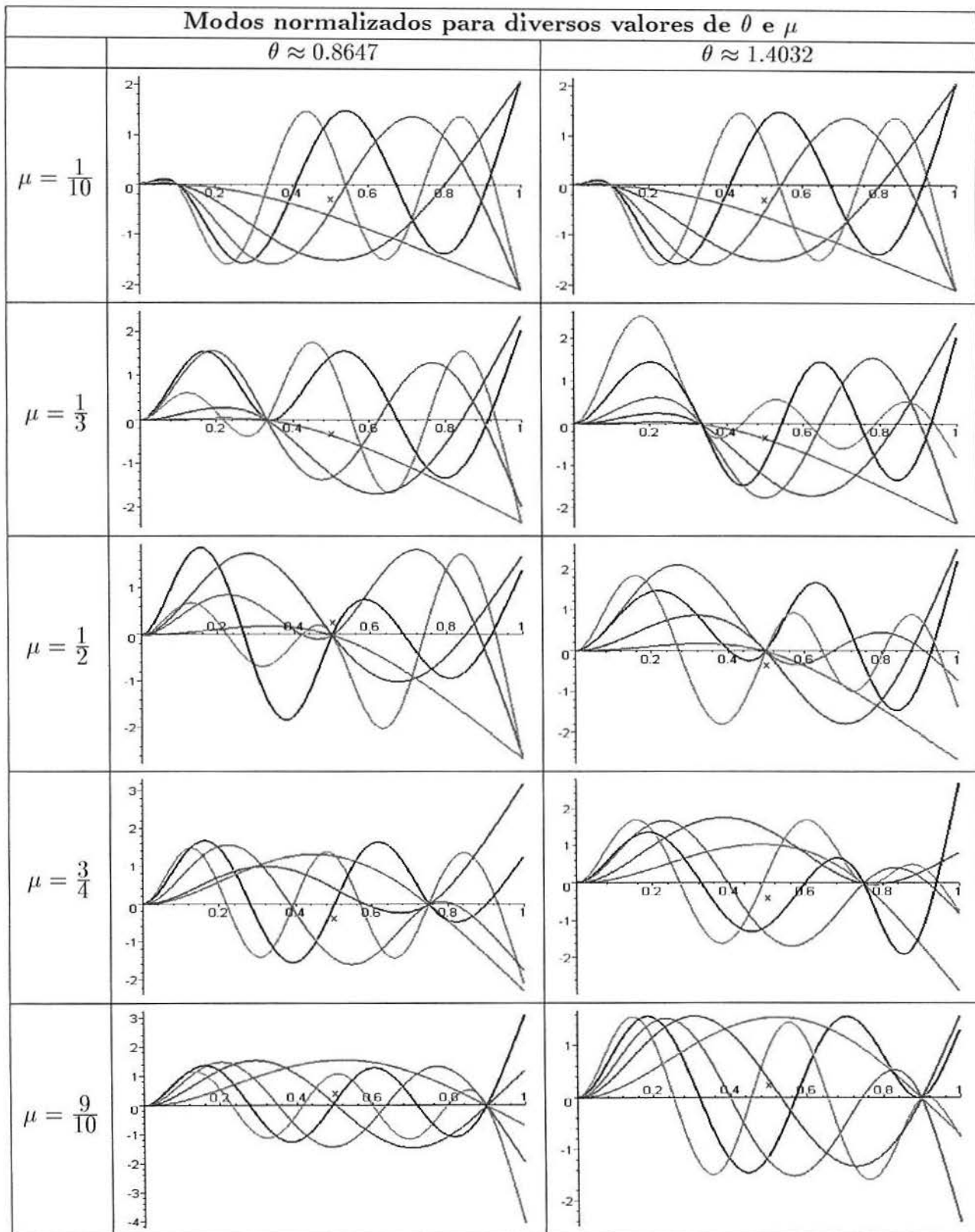


Figura 3.22 Modos da viga bissegmentada fixa-livre

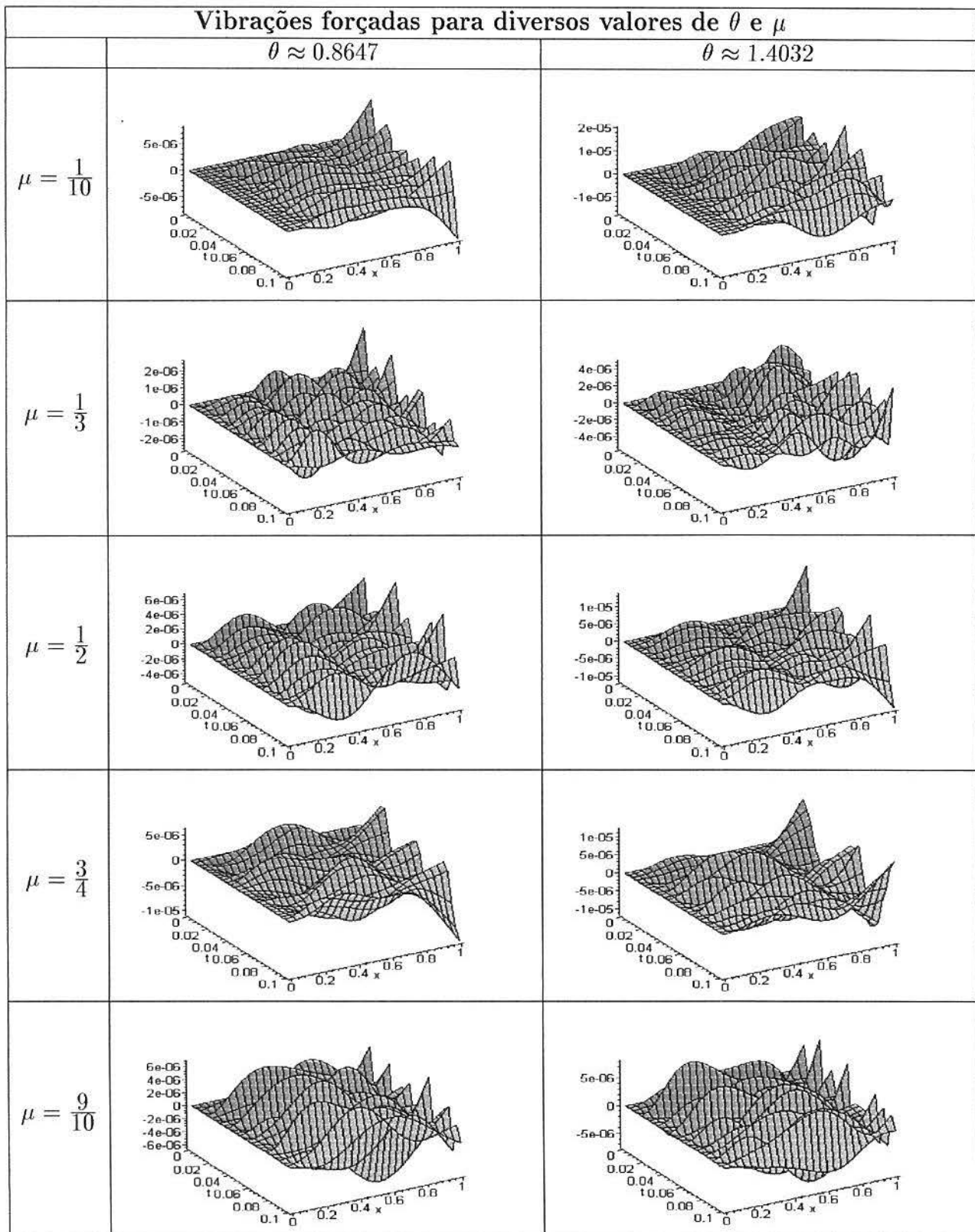


Figura 3.23 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre

Tabela 3.14 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	9036.621666	2.346500043	1	3431.904425	1.446055990
	2	56883.95010	5.887248800	2	21603.45338	3.628098811
	3	159832.2942	9.868469044	3	60704.90562	6.081761857
	4	314160.8506	13.83545826	4	119338.9661	8.527243251
	5	520613.5119	17.81046401	5	197828.9355	10.97899086
$\mu = \frac{1}{2}$	1	21595.67978	3.627445999	1	8249.559791	2.241986038
	2	112075.3364	8.263661935	2	58292.84336	5.959710120
	3	176070.5145	10.35764050	3	124964.8624	8.725924965
	4	354333.0214	14.69343480	4	187602.8894	10.69146646
	5	499799.5566	17.45080436	5	339793.2153	14.38880967
$\mu = \frac{9}{10}$	1	31109.66410	4.353766941	1	30324.67112	4.298486491
	2	99897.66383	7.801806639	2	90415.82838	7.422321282
	3	204638.4224	11.16634665	3	157523.0452	9.796920095
	4	336336.1437	14.31542634	4	250626.8378	12.35751948
	5	473455.9751	16.98467798	5	396297.8155	15.53918924

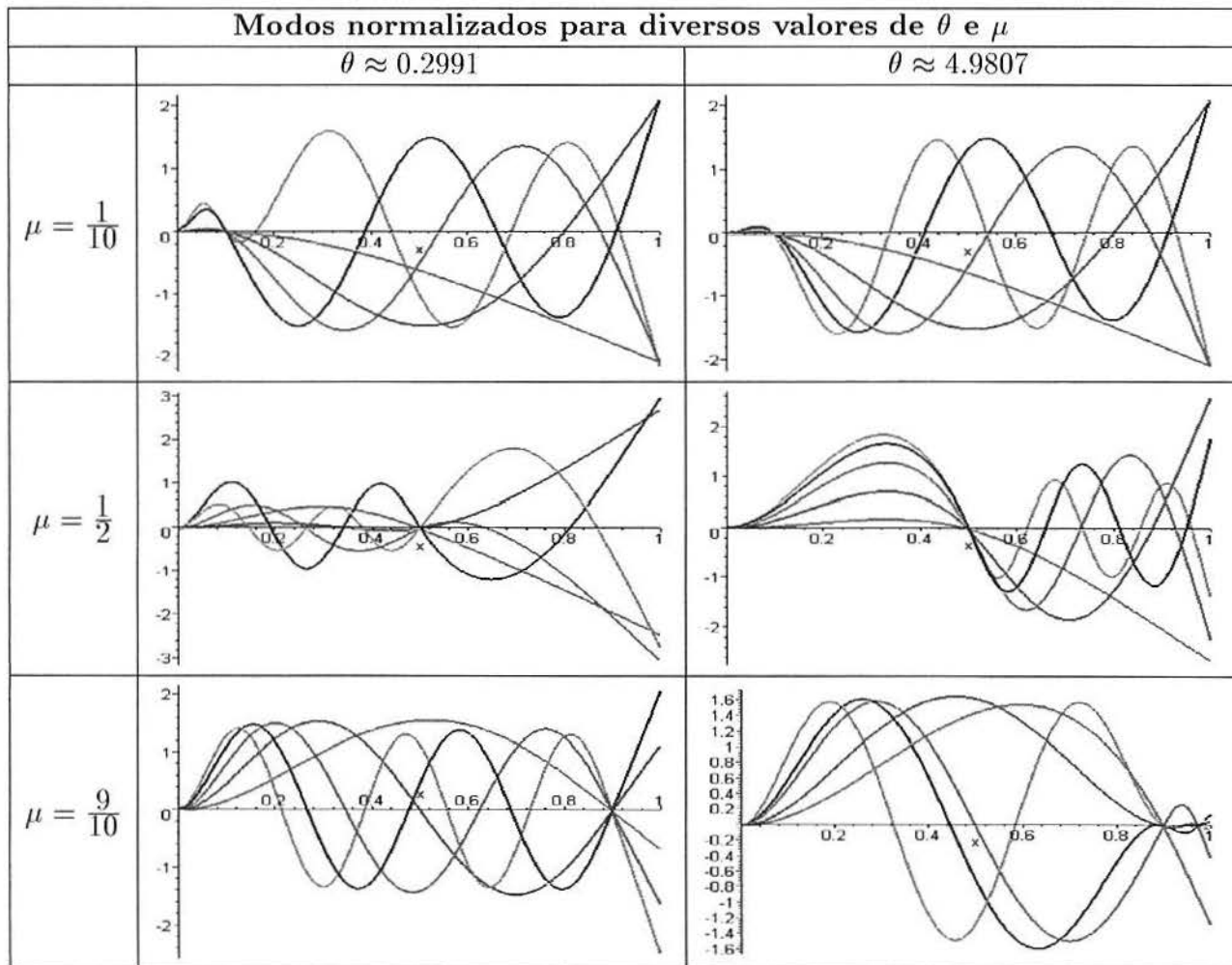


Figura 3.24 Modos da viga fixa-livre

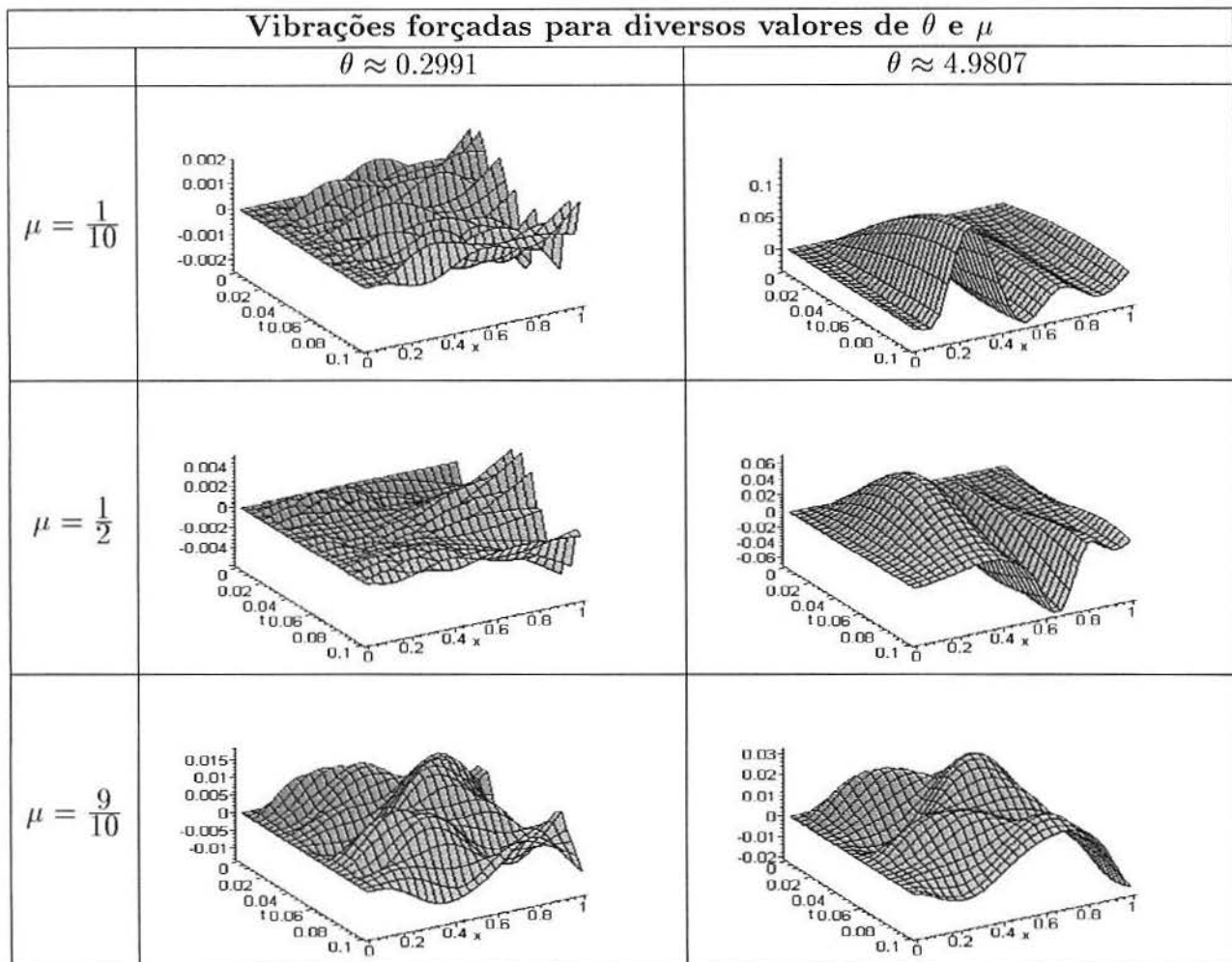


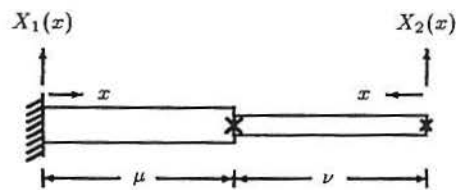
Figura 3.25 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-livre

Tabela 3.15 Autovalores da viga bissegmentada fixa-livre

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	6.784720346	1	.4074021366
	2	17.01545466	2	1.022157132
	3	28.43094379	3	1.713444814
	4	38.56505420	4	2.402454714
	5	42.47990203	5	3.093289011
$\mu = \frac{1}{2}$	1	7.652718397	1	.6319433260
	2	11.46188809	2	1.696517329
	3	14.80986948	3	2.923107490
	4	20.71045817	4	4.161852815
	5	26.66205077	5	5.406734979
$\mu = \frac{9}{10}$	1	4.362761363	1	2.089594948
	2	7.853264380	2	5.154290446
	3	11.34247162	3	7.875959997
	4	14.83043038	4	8.833136481
	5	18.31671204	5	12.06695232

Na viga bissegmentada fixa-livre com apoio na descontinuidade os modos normalizados são semelhantes e os autovalores são crescentes quando a descontinuidade aumenta, para os θ com material real. Os modos para $\theta = 0.2991$ apresentam autovalores com comportamento decrescente quando a descontinuidade aumenta. Em todos os casos observa-se com nitidez as descontinuidades.

3.3.2 Caso 6: Viga Fixa-Apoiada

**Equação governante:**

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 3.16 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-apoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	73.17093757	6.693867735
2	129.4104233	8.902099535
3	272.5178822	12.91829862
4	374.2579922	15.13886648
5	596.8926756	19.11859361

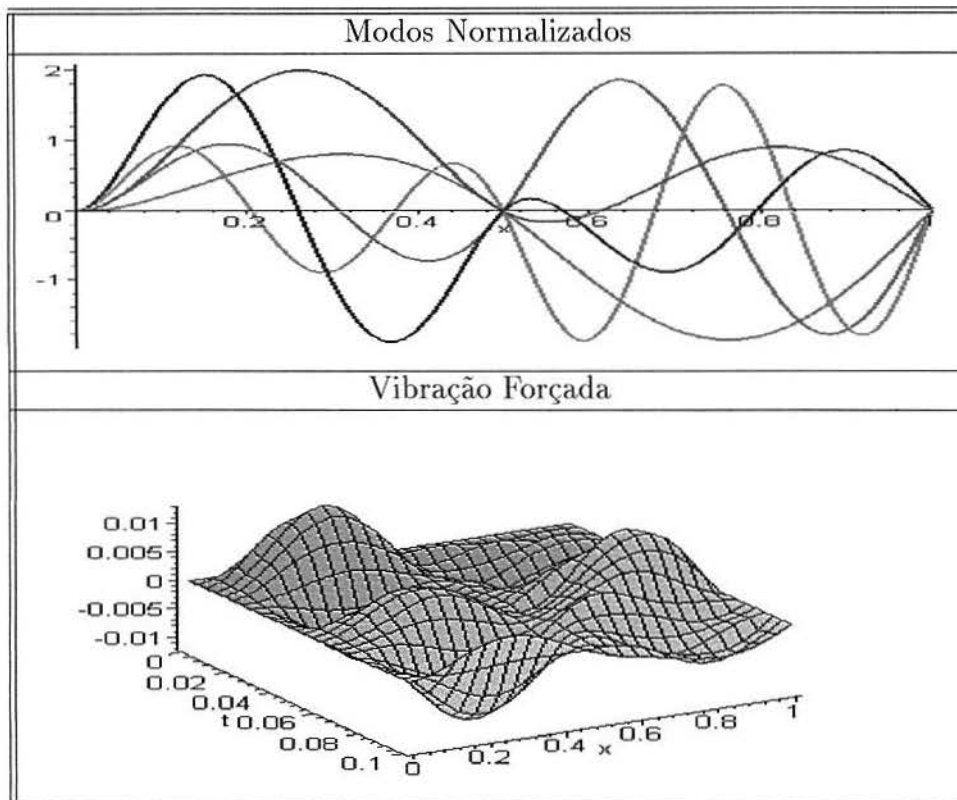


Figura 3.26 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-apoiada

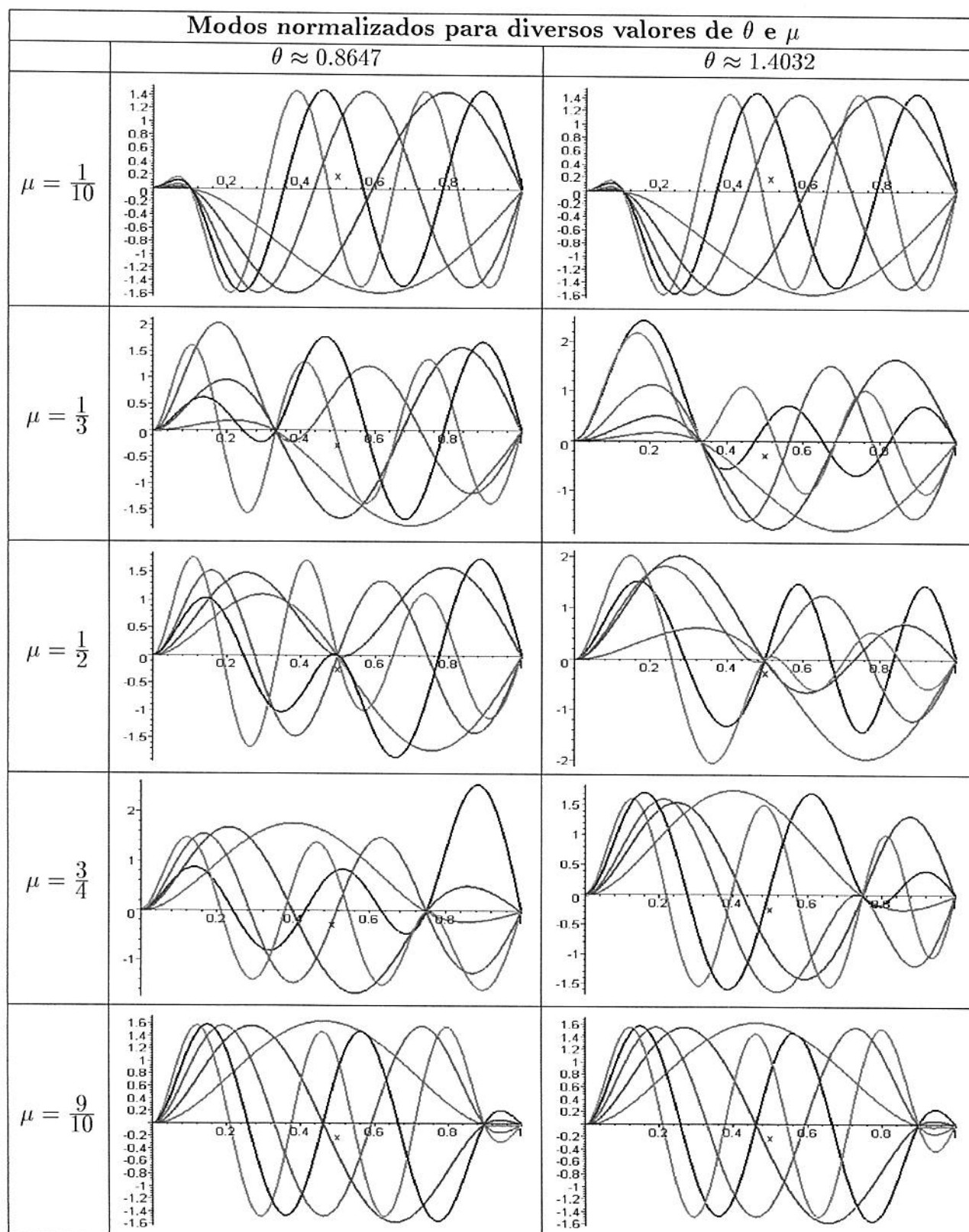


Figura 3.27 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada

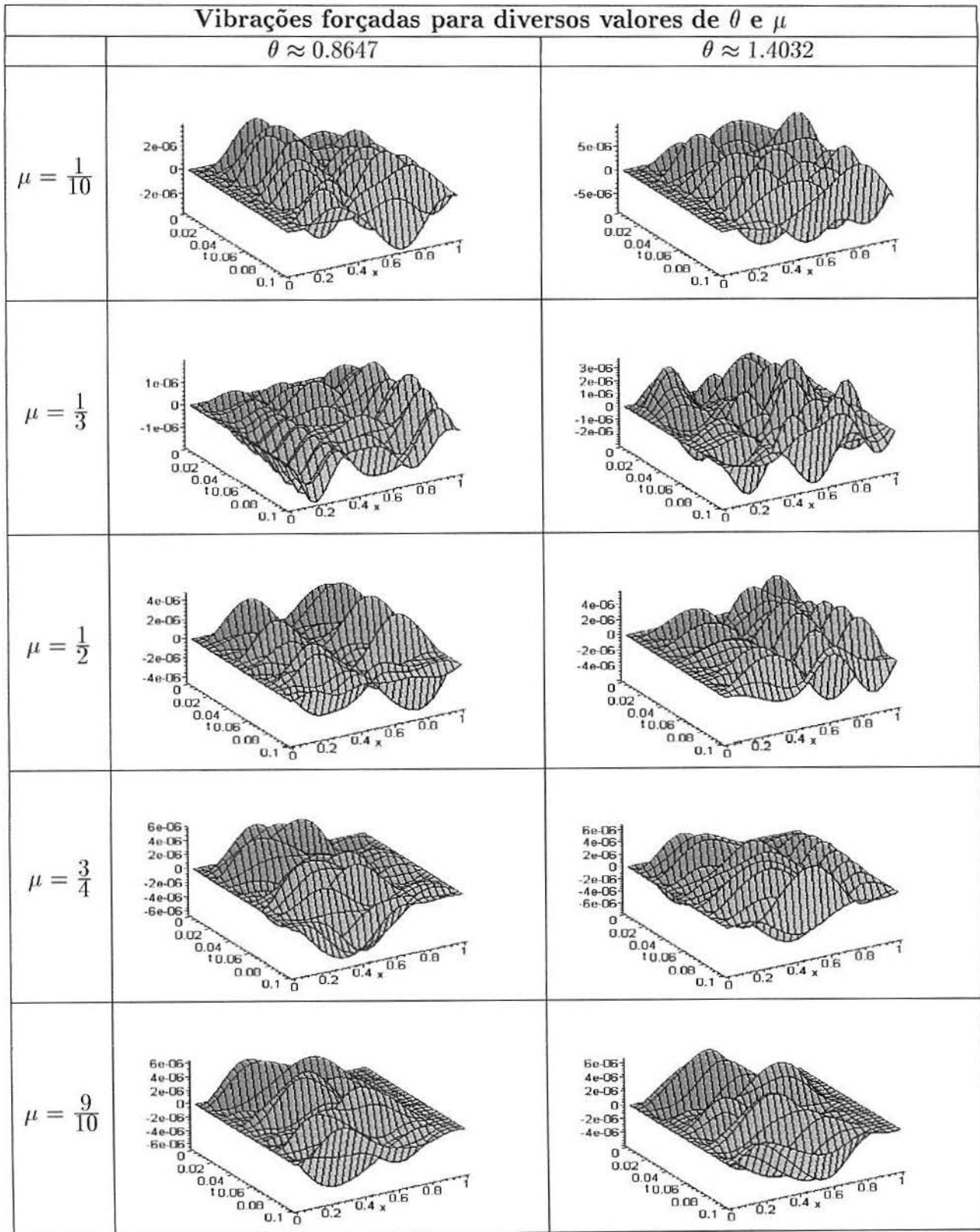


Figura 3.28 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada

Tabela 3.17 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	39761.39584	4.922076139	1	15100.55349	3.033290112
	2	129330.2010	8.877026017	2	49119.00025	5.470692140
	3	270693.8667	12.84271143	3	102821.7976	7.915167550
	4	464113.3199	16.81626462	4	176341.1832	10.36559871
	5	709644.3228	20.79399249	5	269769.3546	12.82076155
$\mu = \frac{1}{2}$	1	93649.70189	7.553891039	1	40179.40692	4.947881358
	2	141559.1865	9.287237366	2	116536.0924	8.426510034
	3	335091.2311	14.28890826	3	158348.2035	9.822546349
	4	424031.0172	16.07371743	4	304358.8887	13.61791162
	5	712365.1867	20.83381772	5	384119.0519	15.29855600
$\mu = \frac{9}{10}$	1	42603.21537	5.094935675	1	42600.06677	5.094747400
	2	118142.5648	8.484391767	2	118087.3917	8.482410411
	3	232733.2906	11.90821786	3	232368.8418	11.89889037
	4	386251.4689	15.34096180	4	384691.7012	15.30995539
	5	578814.6747	18.77964088	5	573130.1887	18.68719678

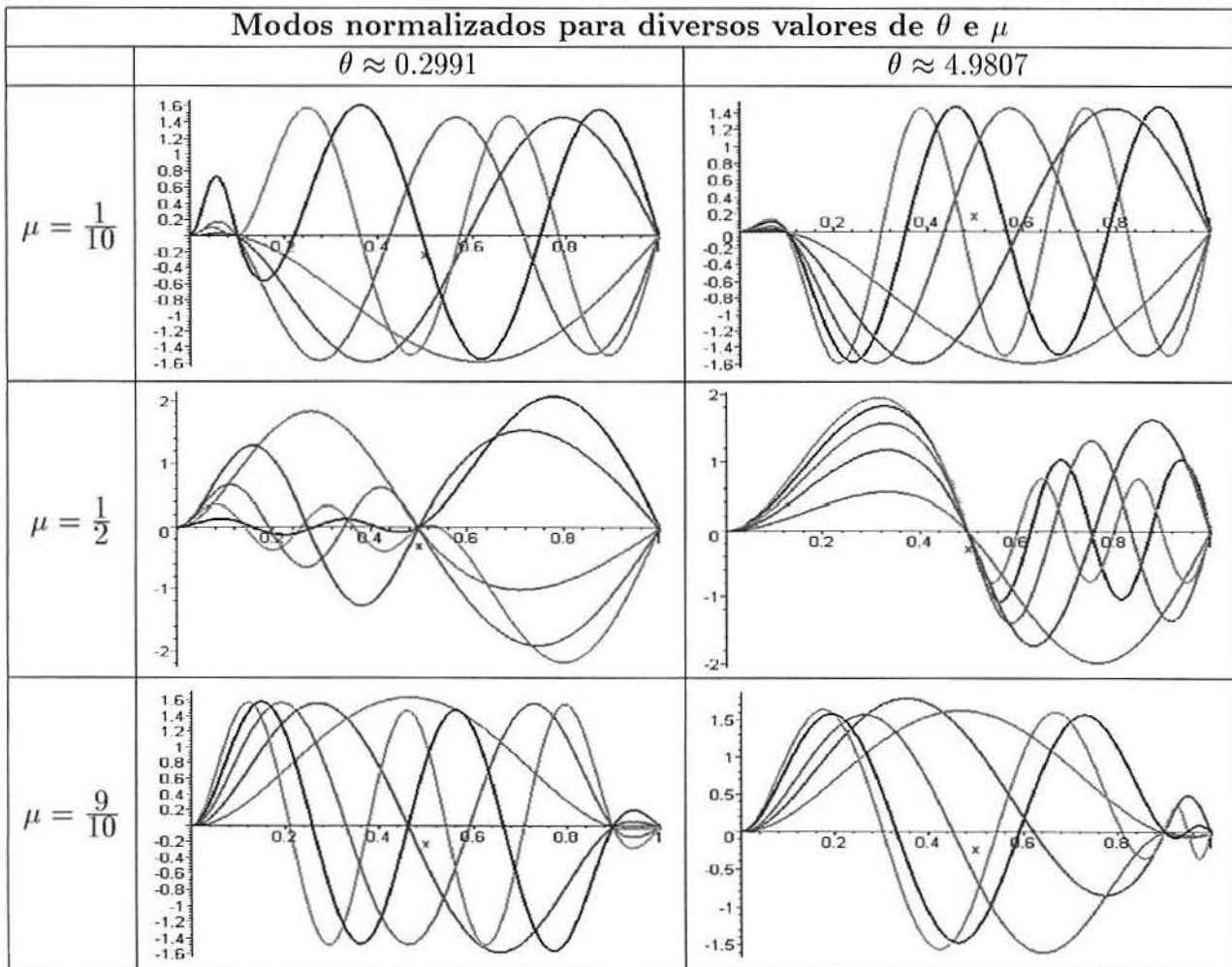


Figura 3.29 Modos da viga bissegmentada fixa-apoiada

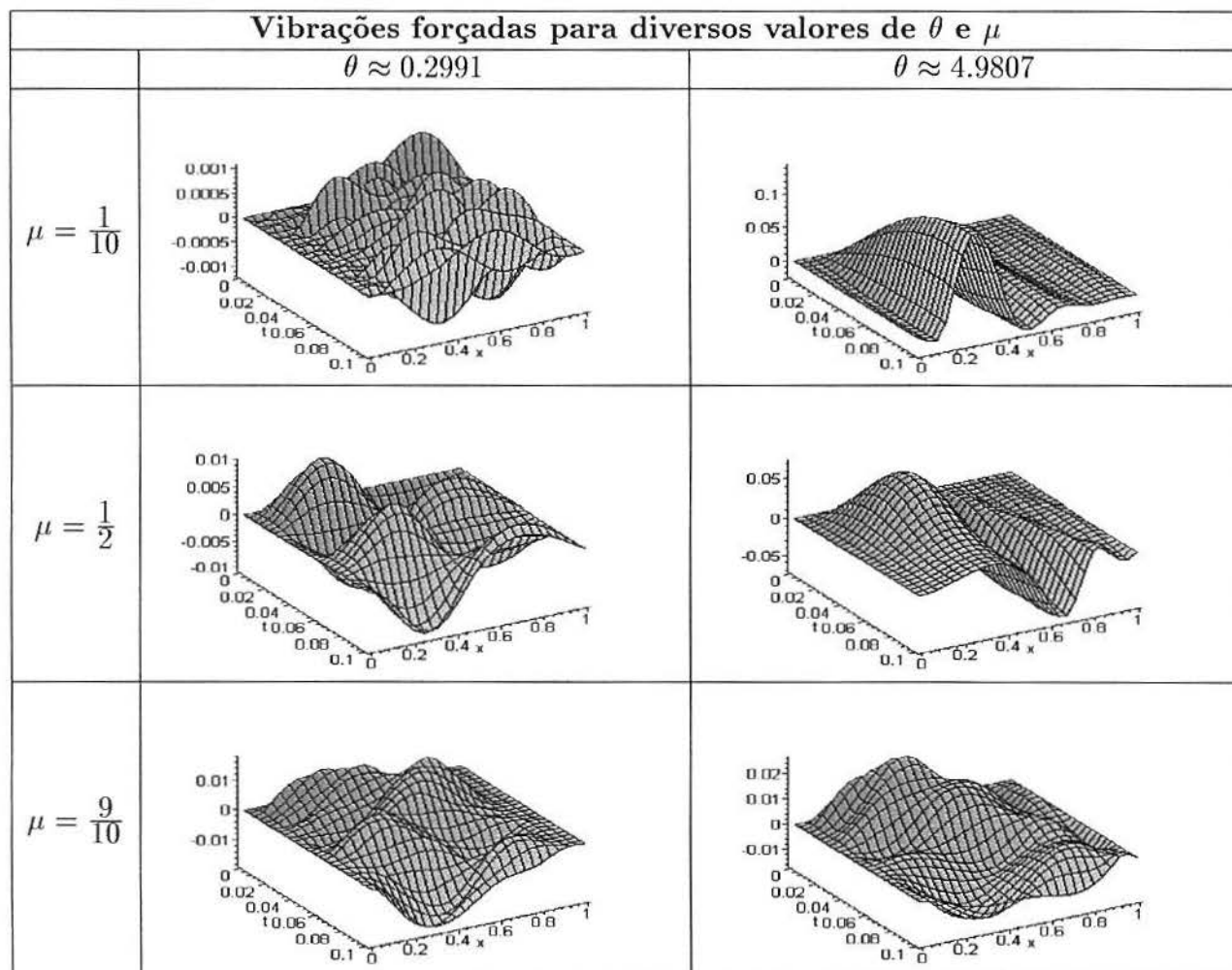


Figura 3.30 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-apoiada

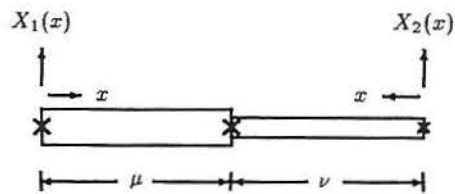
Tabela 3.18 Autovalores da viga bissegmentada fixa-apoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	14.22891589	1	.8545792094	
	2	25.60994654	2	1.541282261	
	3	36.46937785	3	2.229999430	
	4	41.39739462	4	2.920444476	
	5	49.41777798	5	3.612312926	
$\mu = \frac{1}{2}$	1	8.384815432	1	1.401654142	
	2	14.43455027	2	2.615216232	
	3	20.46447539	3	3.851284594	
	4	24.87773496	4	5.095309702	
	5	27.58534938	5	6.340545355	
$\mu = \frac{9}{10}$	1	5.094966884	1	5.042775862	
	2	8.484715735	2	6.555427808	
	3	11.90967741	3	8.664586442	
	4	15.34532910	4	11.91960722	
	5	18.79001726	5	12.97781877	

Na viga bissegmentada fixa-apoiada os modos resultantes do material real são semelhantes.

Quando $\theta = 0.299$ os autovalores decrescem quando a descontinuidade aumenta. Como a viga apresenta apoio, as descontinuidades são visíveis.

3.3.3 Caso 7: Viga Biapoiada

**Equação governante:**

$$m_1(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_1(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 3.19 Freqüências naturais e autovalores da viga biapoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	63.39780505	6.230816022
2	99.15647029	7.792348120
3	253.4888315	12.45911607
4	321.4606311	14.03045365
5	570.1214314	18.68493108

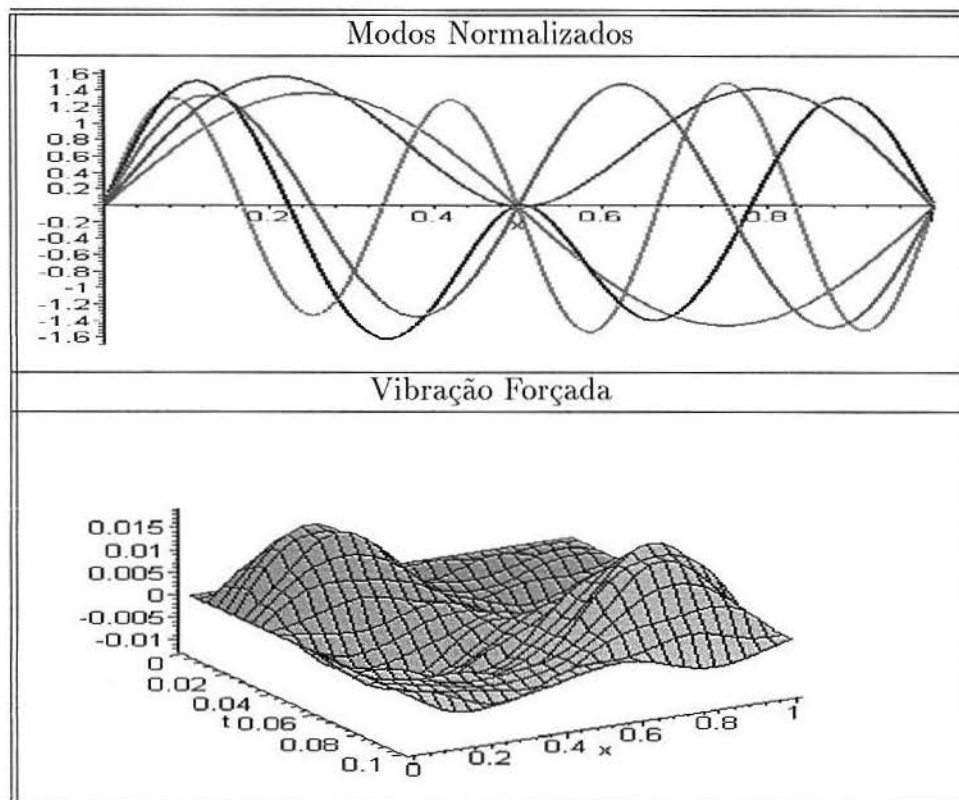


Figura 3.31 Modos normalizados e vibração forçada da viga biapoiada

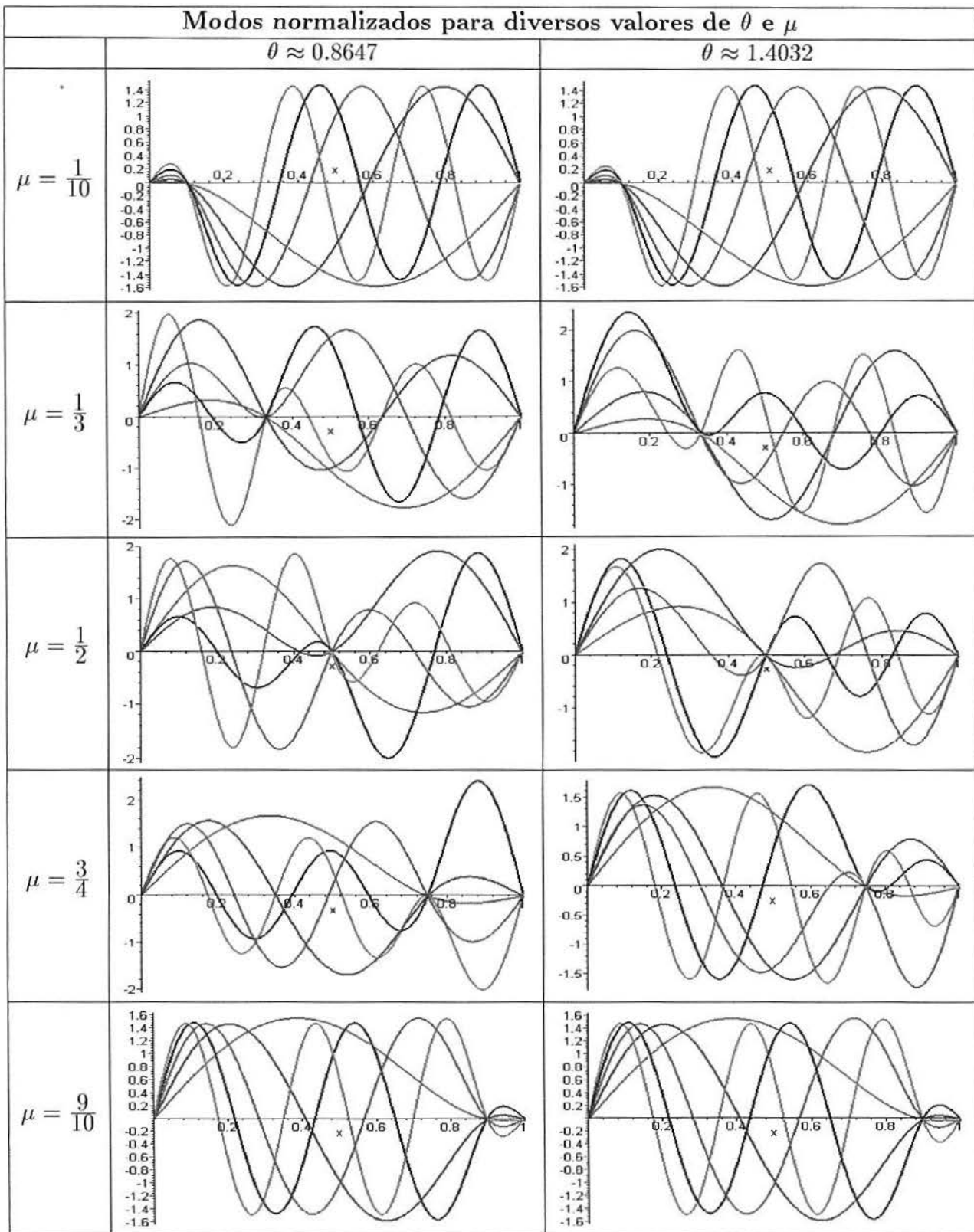


Figura 3.32 Modos da viga bissegmentada biapoiada

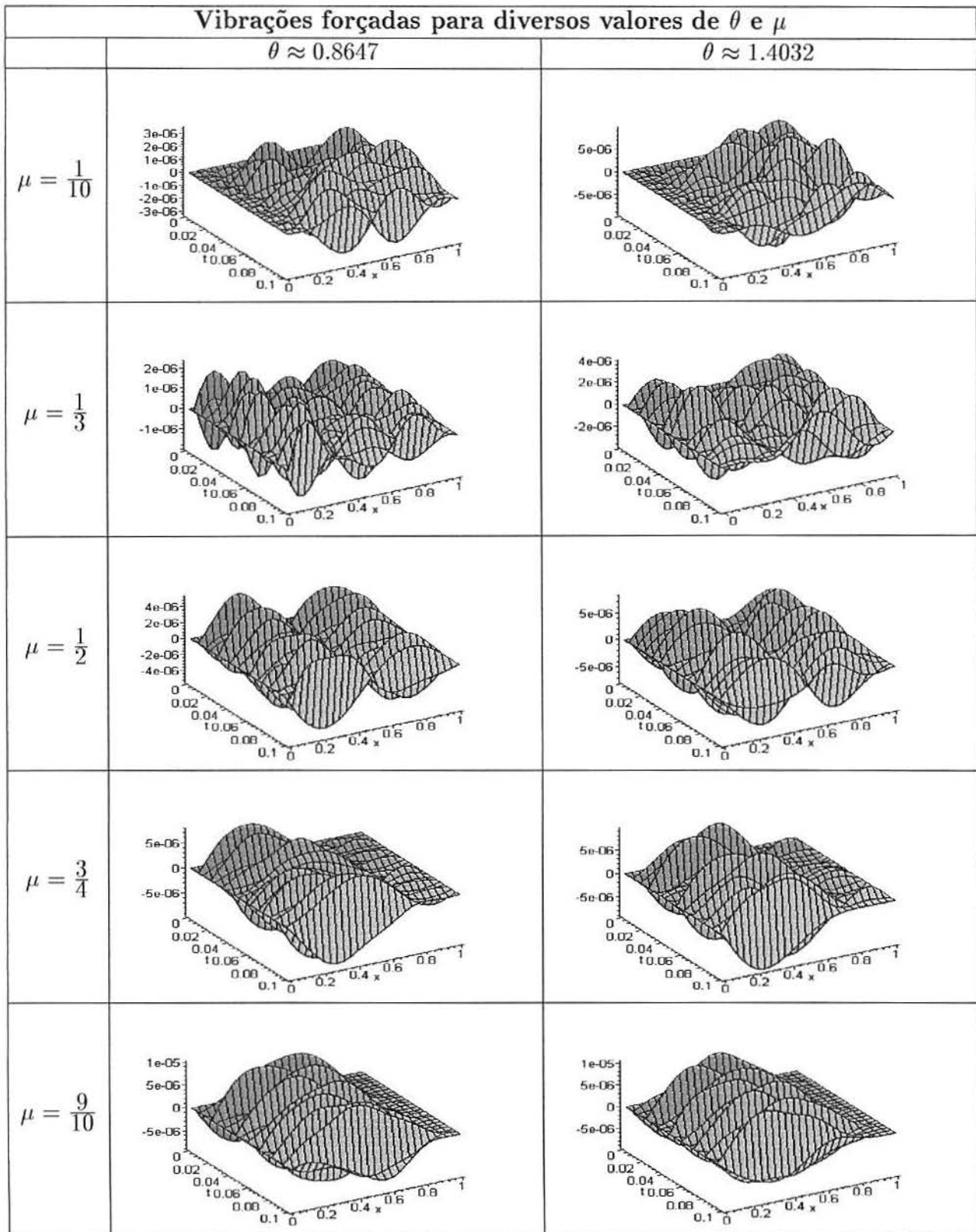


Figura 3.33 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada

Tabela 3.20 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada biapoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	39202.83205	4.887381465	1	14888.59601	3.011926637
	2	127805.7675	8.824553547	2	48544.83869	5.438624160
	3	267935.1245	12.77710141	3	101810.3869	7.876142415
	4	459794.7741	16.73784462	4	174859.4398	10.32195729
	5	703060.7484	20.69731181	5	267794.8084	12.77375532
$\mu = \frac{1}{2}$	1	71648.87027	6.607272065	1	38235.72457	4.826720808
	2	122098.1518	8.625257340	2	85549.98148	7.219838390
	3	281061.7641	13.08634605	3	148296.2107	9.505665848
	4	403368.4760	15.67719981	4	278838.8503	13.03449345
	5	624718.9637	19.51011643	5	338932.8853	14.37058245
$\mu = \frac{9}{10}$	1	29315.81569	4.226379661	1	29314.74023	4.226302138
	2	95582.91186	7.631460222	2	95552.34627	7.630239927
	3	200445.5670	11.05136046	3	200205.4666	11.04473963
	4	344212.0807	14.48206761	4	343101.3561	14.45868292
	5	527014.8286	17.91962570	5	522889.8519	17.84935894

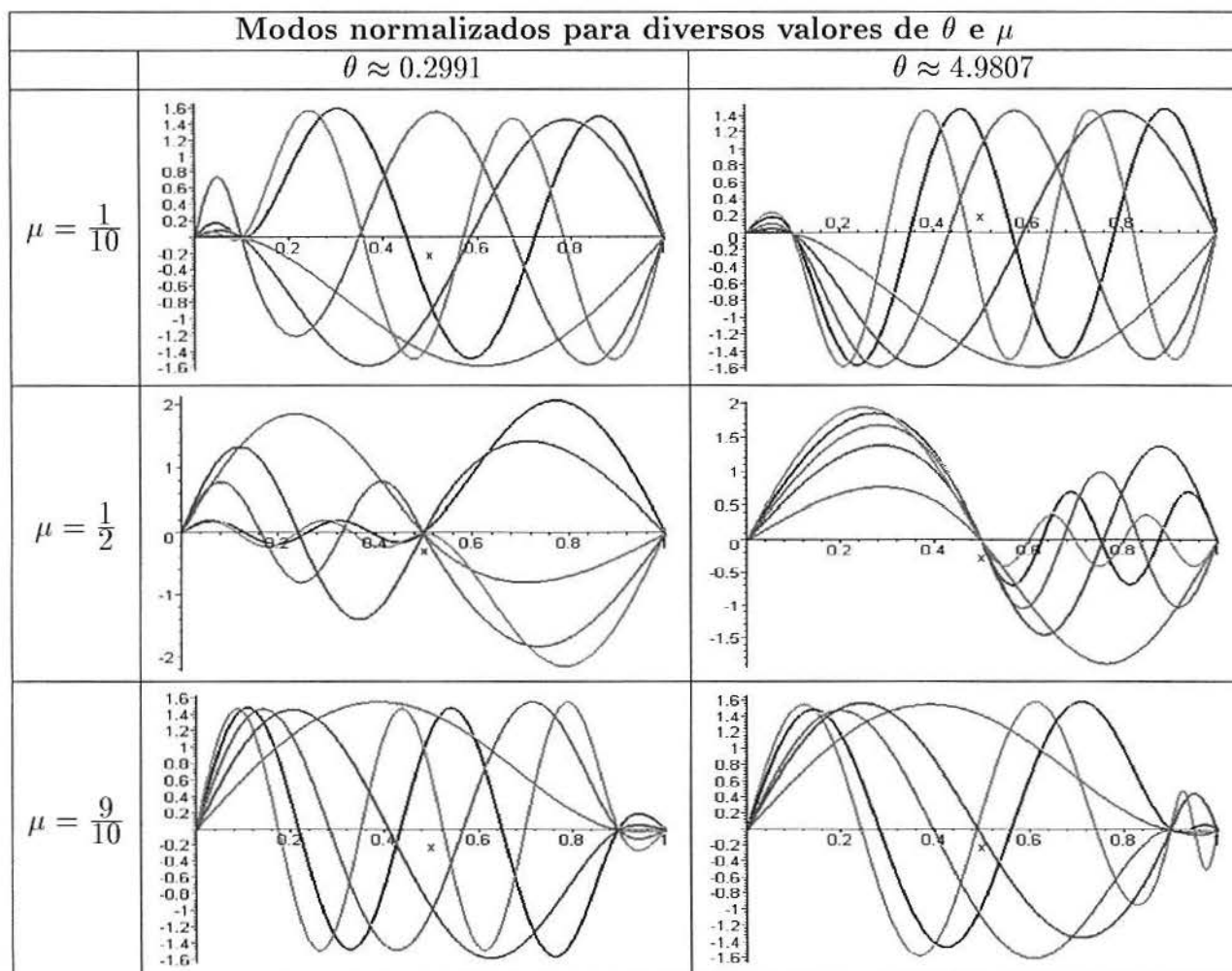


Figura 3.34 Modos da viga bissegmentada biapoiada

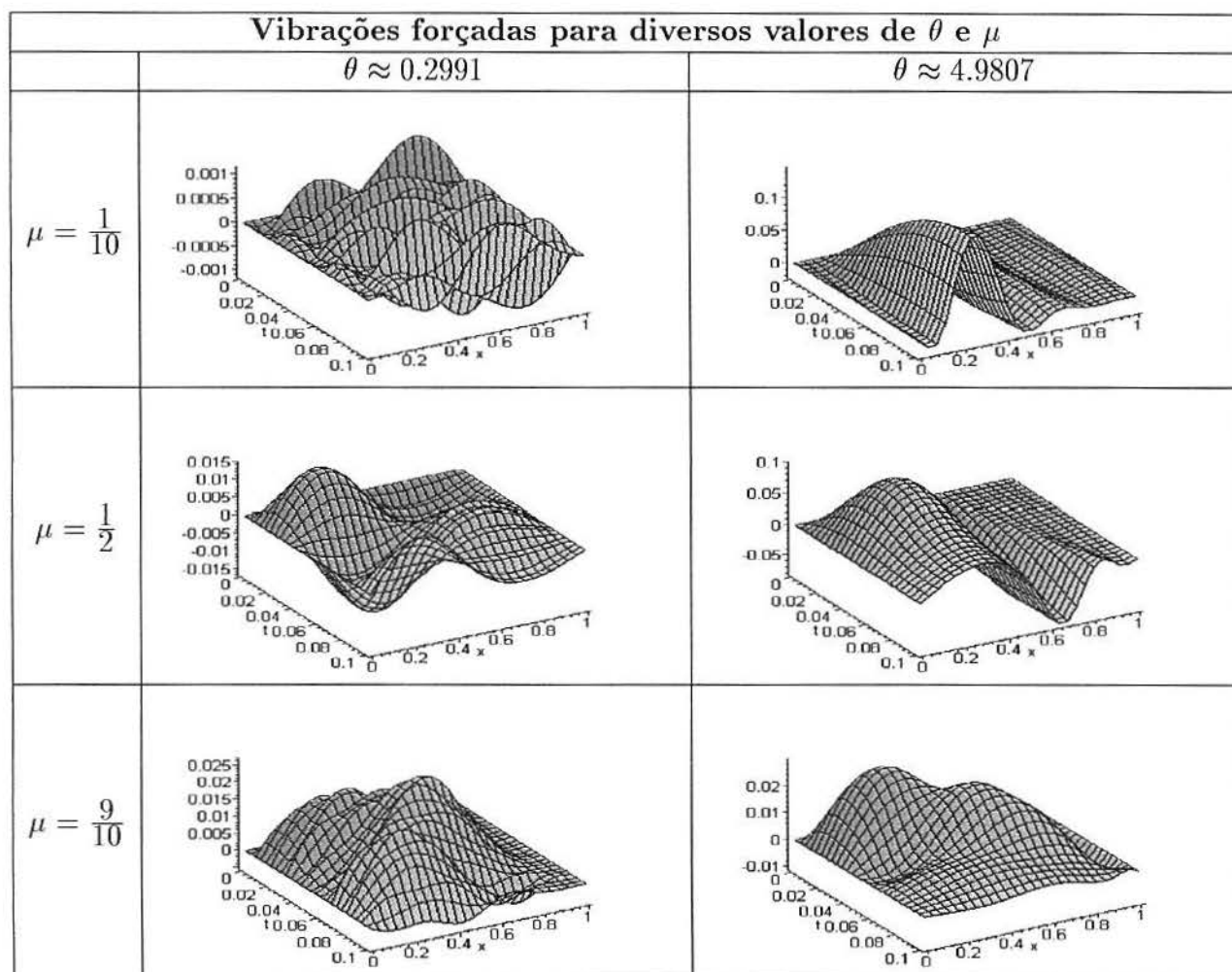


Figura 3.35 Vibrações forçadas da viga bissegmentada biapoiada

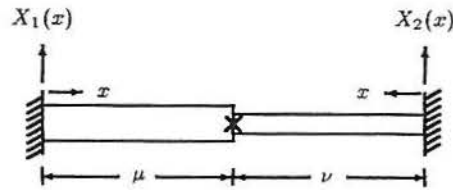
Tabela 3.21 Autovalores da viga bissegmentada biapoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	14.12170355	1	.8485612320
	2	25.29191730	2	1.532260245
	3	32.56548202	3	2.219069459
	4	38.08835358	4	2.908354276
	5	49.04593690	5	3.599567276
$\mu = \frac{1}{2}$	1	6.870222394	1	1.379798538
	2	12.91101960	2	2.596681484
	3	18.98217553	3	3.834494632
	4	24.22710153	4	5.076272973
	5	26.49751066	5	6.306627909
$\mu = \frac{9}{10}$	1	4.226392527	1	4.209234336
	2	7.631660826	2	6.438210091
	3	11.05241236	3	7.856996587
	4	14.48547716	4	11.15164121
	5	17.92811665	5	12.83545531

Para os diferentes valores de θ próximos a 1 os modos são semelhantes.

Em todos os casos observa-se claramente a descontinuidade.

3.3.4 Caso 8: Viga Fixa-Fixa



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_x(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2'(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 3.22 Freqüências naturais e autovalores da viga fixa-fixa

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	99.02951360	7.787357989
2	143.8988524	9.387208889
3	320.7894455	14.01579873
4	396.8267491	15.58864211
5	669.0344800	20.24100477

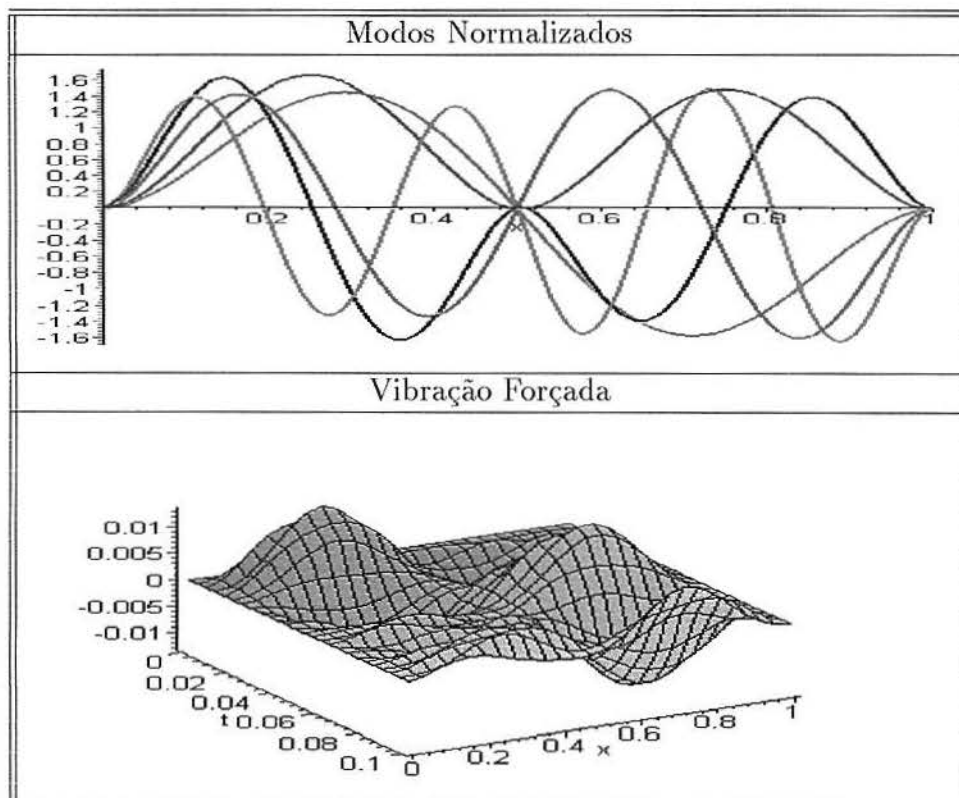


Figura 3.36 Modos normalizados e vibração forçada da viga fixa-fixa

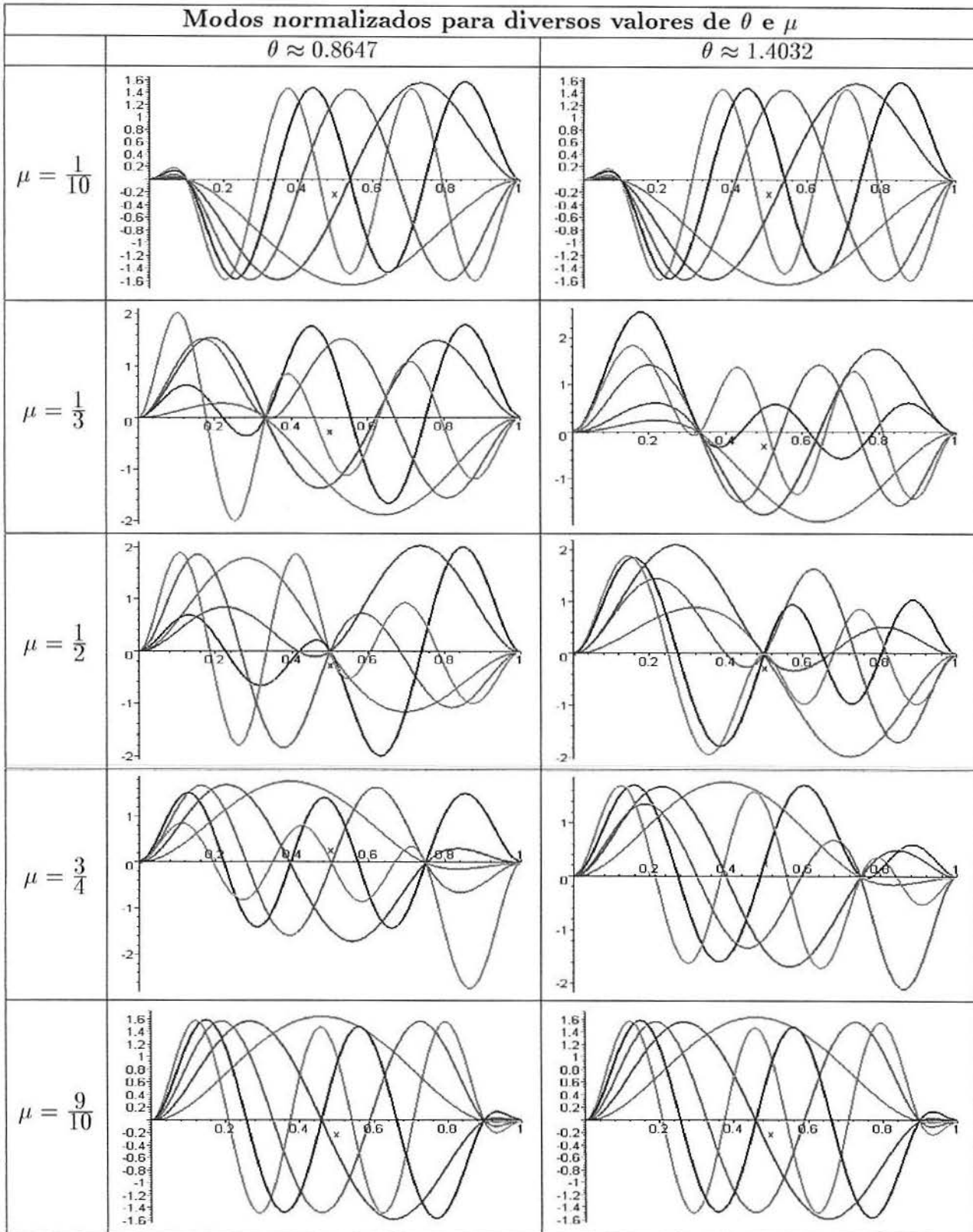


Figura 3.37 Modos da viga bissegmentada fixa-fixa

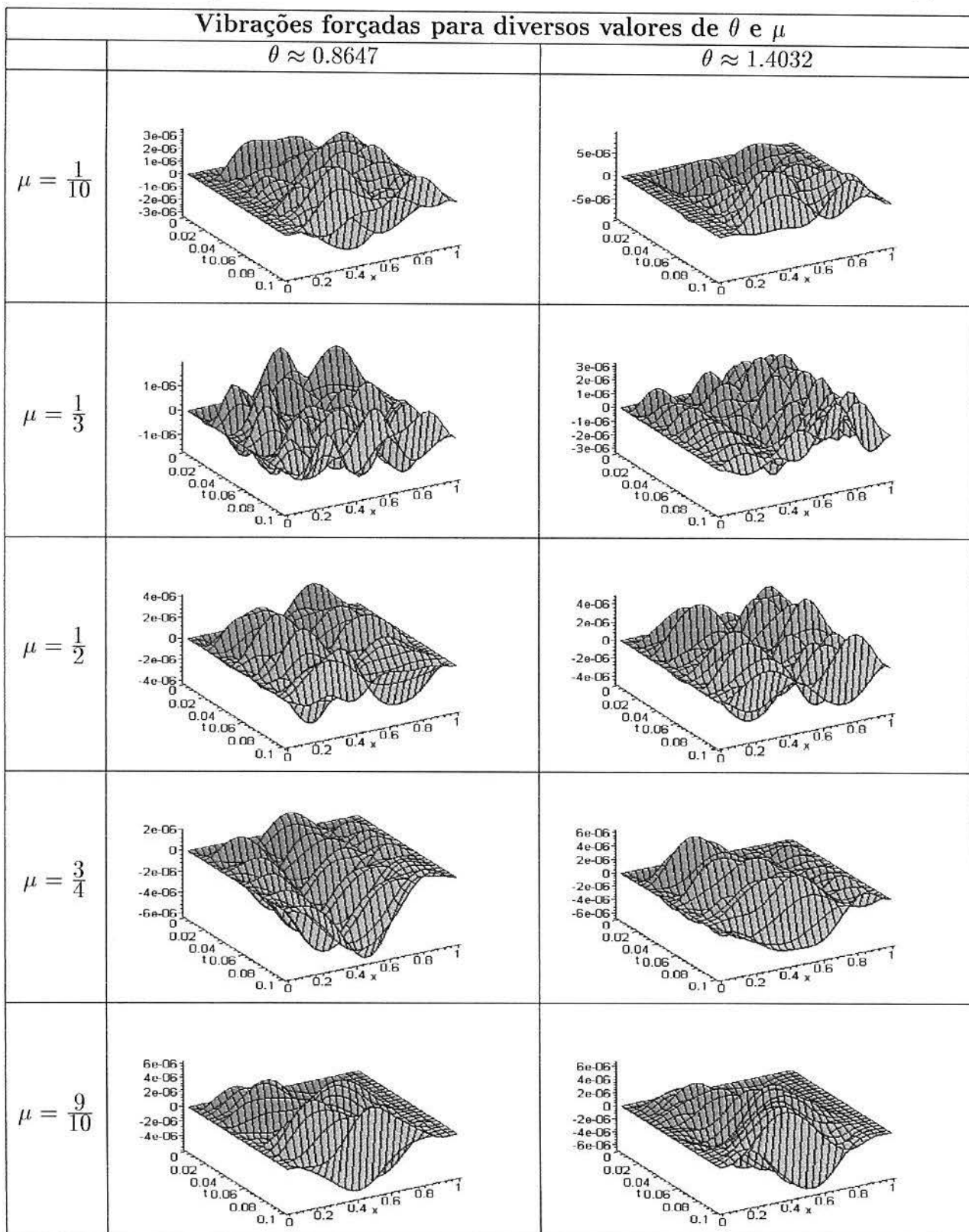


Figura 3.38 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa

Tabela 3.23 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	57748.98629	5.931843698	1	21931.98641	3.655581750
	2	159771.0070	9.866576845	2	60681.62289	6.080595448
	3	314164.4718	13.83553800	3	119340.3432	8.527292450
	4	520613.3170	17.81046068	4	197828.8610	10.97898879
	5	779152.6986	21.78857391	5	296244.9268	13.43516416
$\mu = \frac{1}{2}$	1	111272.4818	8.234010259	1	58861.05766	5.988686063
	2	178096.1117	10.41704968	2	125049.5044	8.728879613
	3	354441.0347	14.69567417	3	187547.4986	10.68988799
	4	499649.6149	17.44818651	4	339792.2320	14.38878885
	5	731566.8787	21.11273681	5	403995.5967	15.68938182
$\mu = \frac{9}{10}$	1	43184.38473	5.129569101	1	43183.38310	5.129509612
	2	119481.5717	8.532336597	2	119463.4484	8.531689469
	3	234972.5873	11.96536954	3	234851.8800	11.96229579
	4	389486.2196	15.40506605	4	388987.4752	15.39519965
	5	583186.0078	18.85042144	5	581576.6848	18.82439426

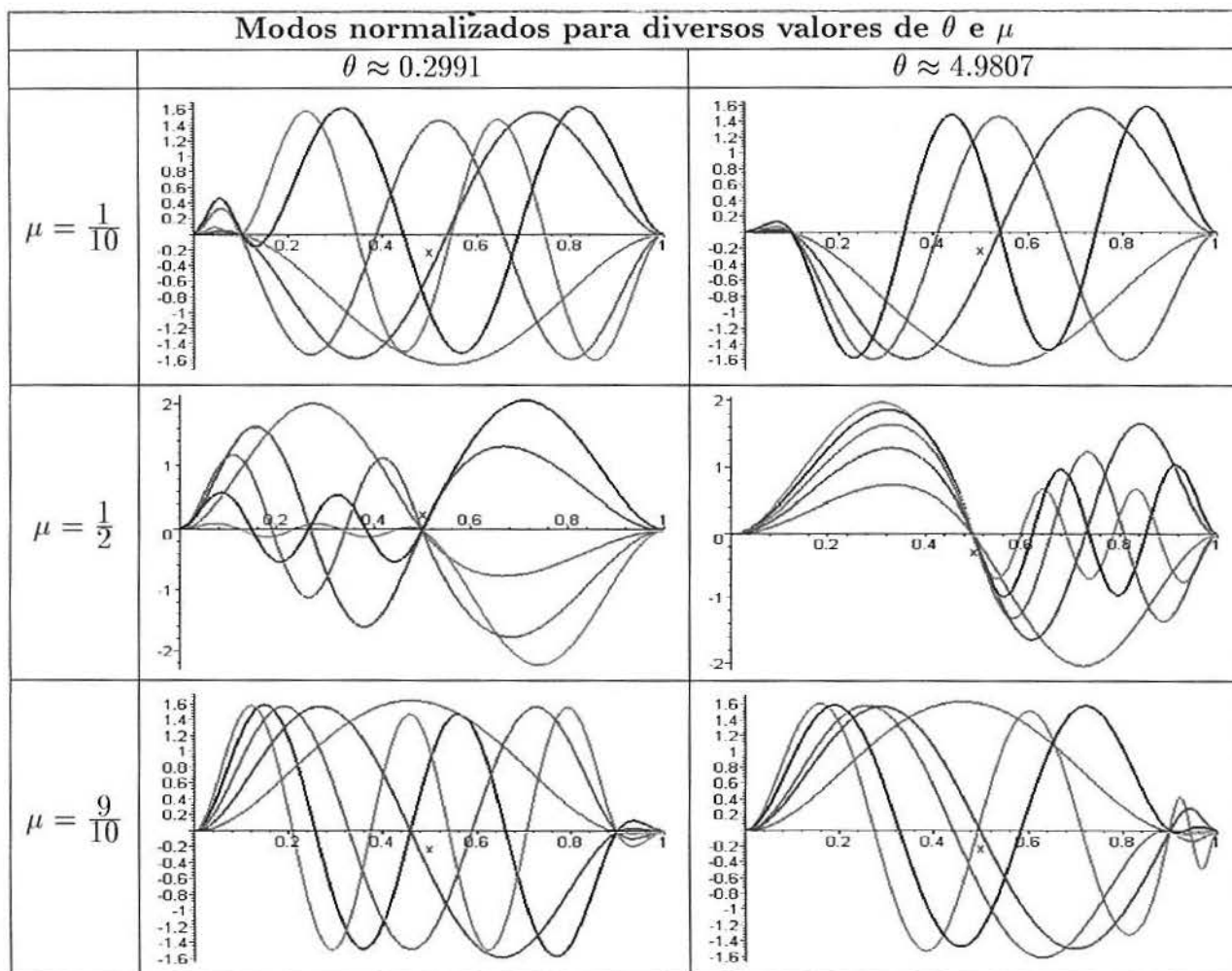


Figura 3.39 Modos da viga fixa-fixa

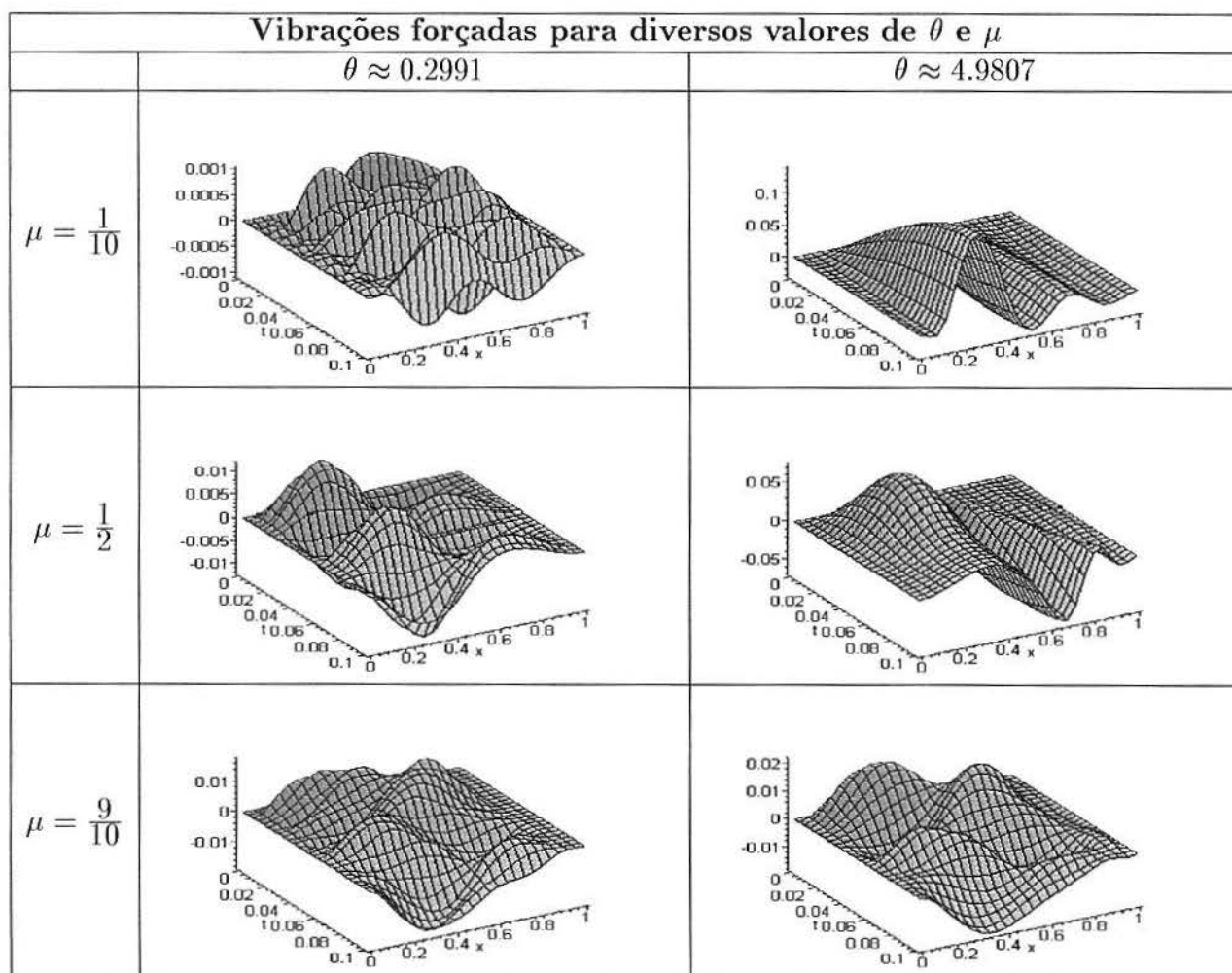


Figura 3.40 Vibrações forçadas da viga bissegmentada fixa-fixa

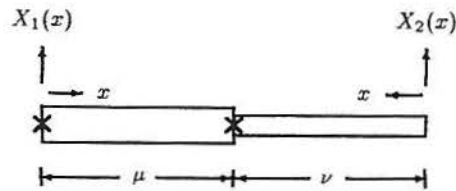
Tabela 3.24 Autovalores da viga bissegmentada fixa-fixa

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	17.14405814	1	1.029900032
	2	28.42565582	2	1.713116183
	3	38.56511969	3	2.402468578
	4	42.48000705	4	3.093288428
	5	52.17353499	5	3.785472325
$\mu = \frac{1}{2}$	1	8.495518762	1	1.706089194
	2	14.54313065	2	2.922787439
	3	20.67001149	3	4.161863658
	4	26.66611916	4	5.406734621
	5	30.51610683	5	6.651246609
$\mu = \frac{9}{10}$	1	5.129578974	1	5.116601253
	2	8.532443350	2	7.875306272
	3	11.96586688	3	8.848532145
	4	15.40659205	4	12.06818904
	5	18.85409867	5	14.31794685

Para os diferentes valores dos parâmetros os modos são semelhantes, exceto quando $\theta = 4.9807$.

Em todos os casos percebe-se com nitidez as descontinuidades.

3.3.5 Caso 9: Viga Apoiada-Livre



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_2''(0) = X_2'''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 3.25 Freqüências naturais e autovalores da viga apoiada-livre

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/2$		
n	ω_n	β_n
1	14.35177146	2.964562235
2	75.62879971	6.805364964
3	125.2857561	8.759083492
4	277.9471752	13.04634771
5	367.0322836	14.99201299

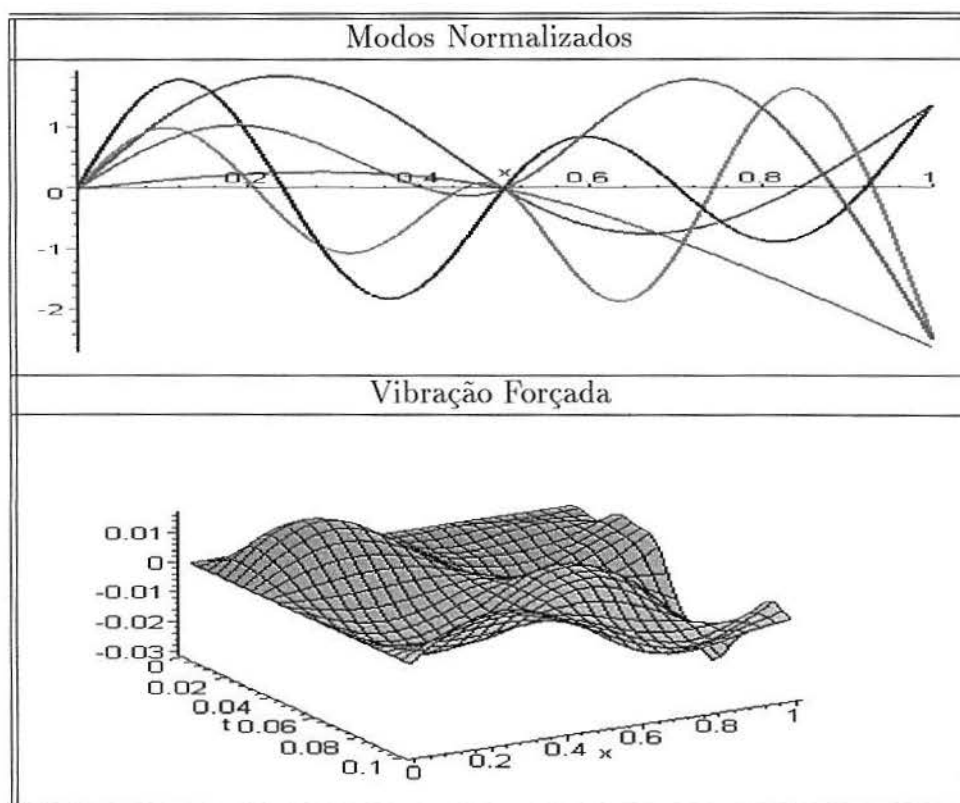


Figura 3.41 Modos normalizados e vibração forçada da viga apoiada-livre

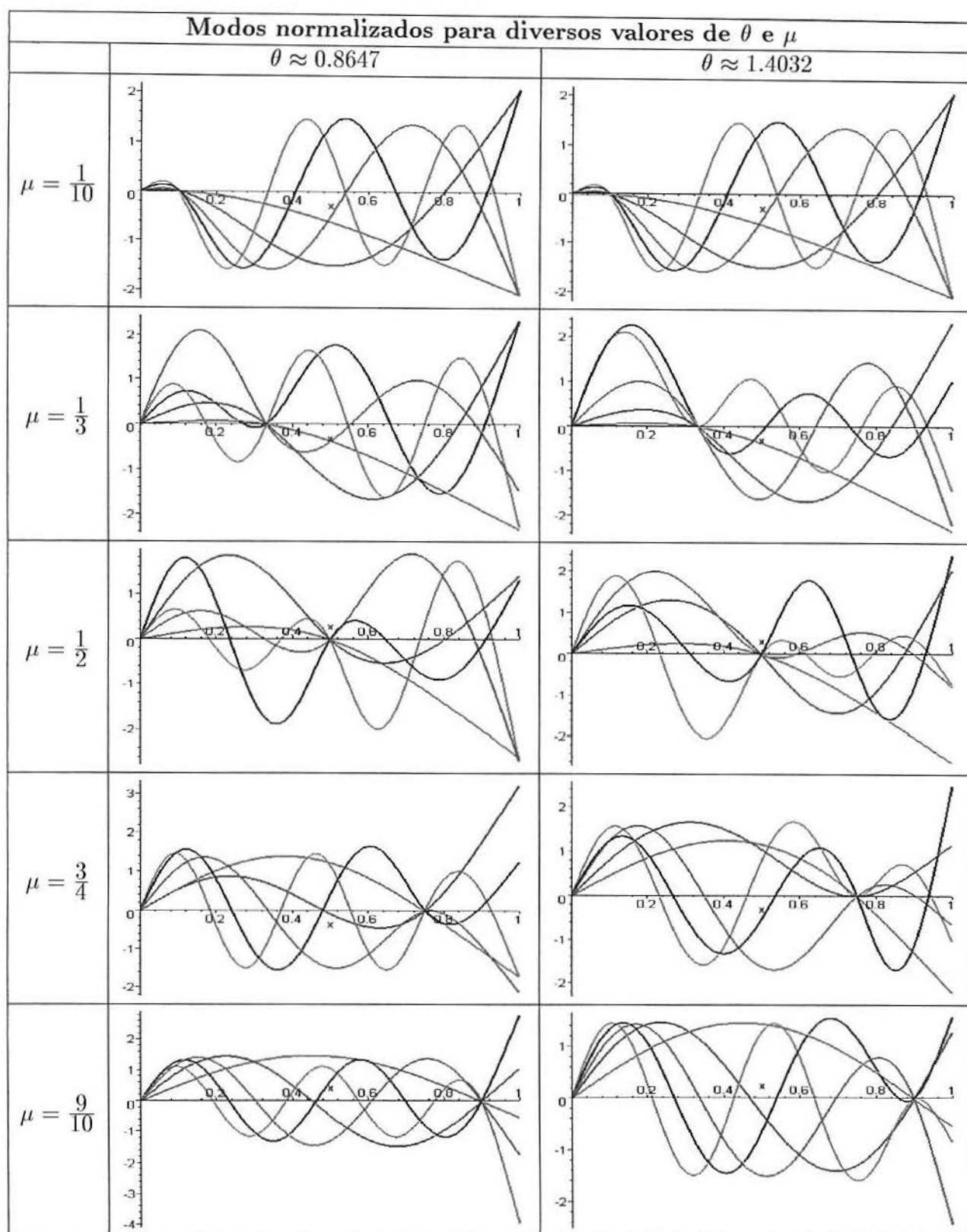


Figura 3.42 Modos da viga bissegmentada apoiada-livre

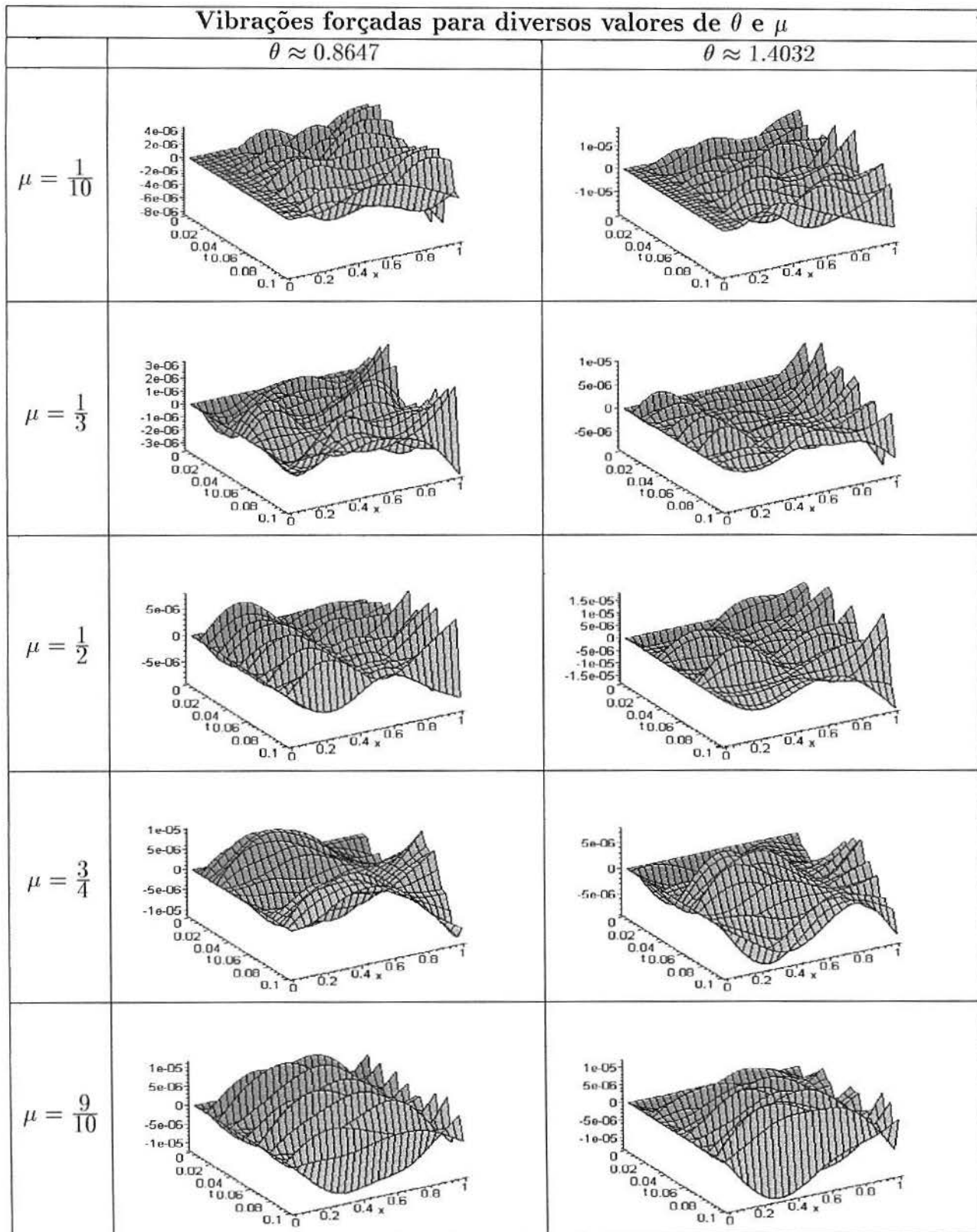


Figura 3.43 Vibrações forçadas da viga bissegmentada apoiada-livre

Tabela 3.26 Freqüências naturais e autovalores da viga bissegmentada apoiada-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	8888.754593	2.327222861	1	3375.750383	1.434176755
	2	56123.56314	5.847767996	2	21315.15090	3.603808641
	3	158021.6542	9.812412982	3	60025.85430	6.047650589
	4	311050.6227	13.76680161	4	118212.2225	8.486892629
	5	515820.2258	17.72828399	5	196226.2509	10.93442801
$\mu = \frac{1}{2}$	1	19747.86695	3.468786839	1	7616.979706	2.154313563
	2	79472.92704	6.958684088	2	54647.98971	5.770382628
	3	165926.4294	10.05484315	3	90955.13256	7.444424367
	4	291717.6896	13.33211033	4	181013.9341	10.50203642
	5	484628.4549	17.18390929	5	293260.0206	13.36730775
$\mu = \frac{9}{10}$	1	25353.15342	3.486250470	1	19647.59096	3.459968703
	2	82522.75286	6.945139664	2	73626.53860	6.697839066
	3	173141.1363	10.33754097	3	140546.6055	9.253961683
	4	297858.0383	13.56288247	4	222250.5540	11.63694395
	5	457028.5226	16.36393614	5	355472.8980	14.71704995

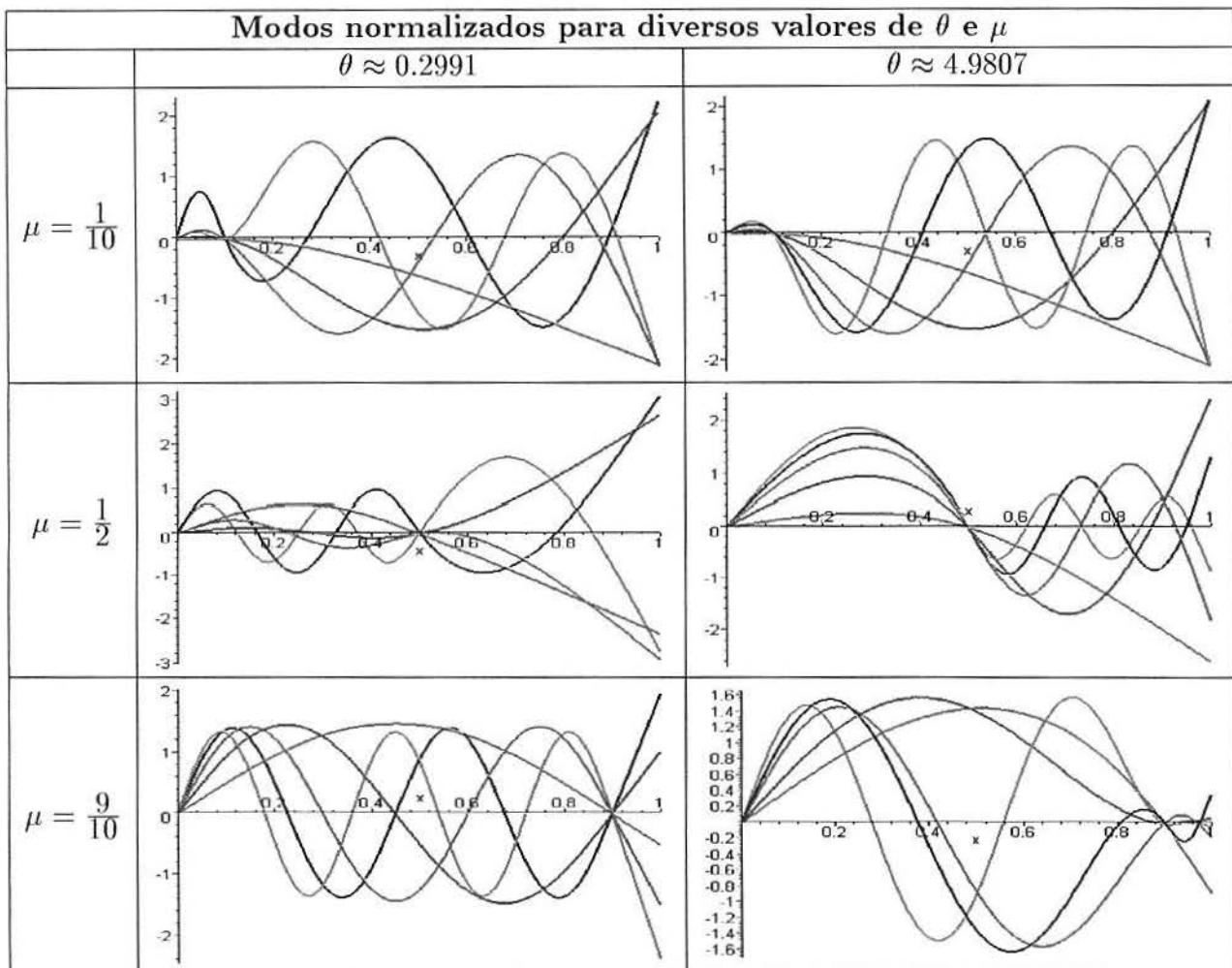


Figura 3.44 Modos da viga apoiada-livre

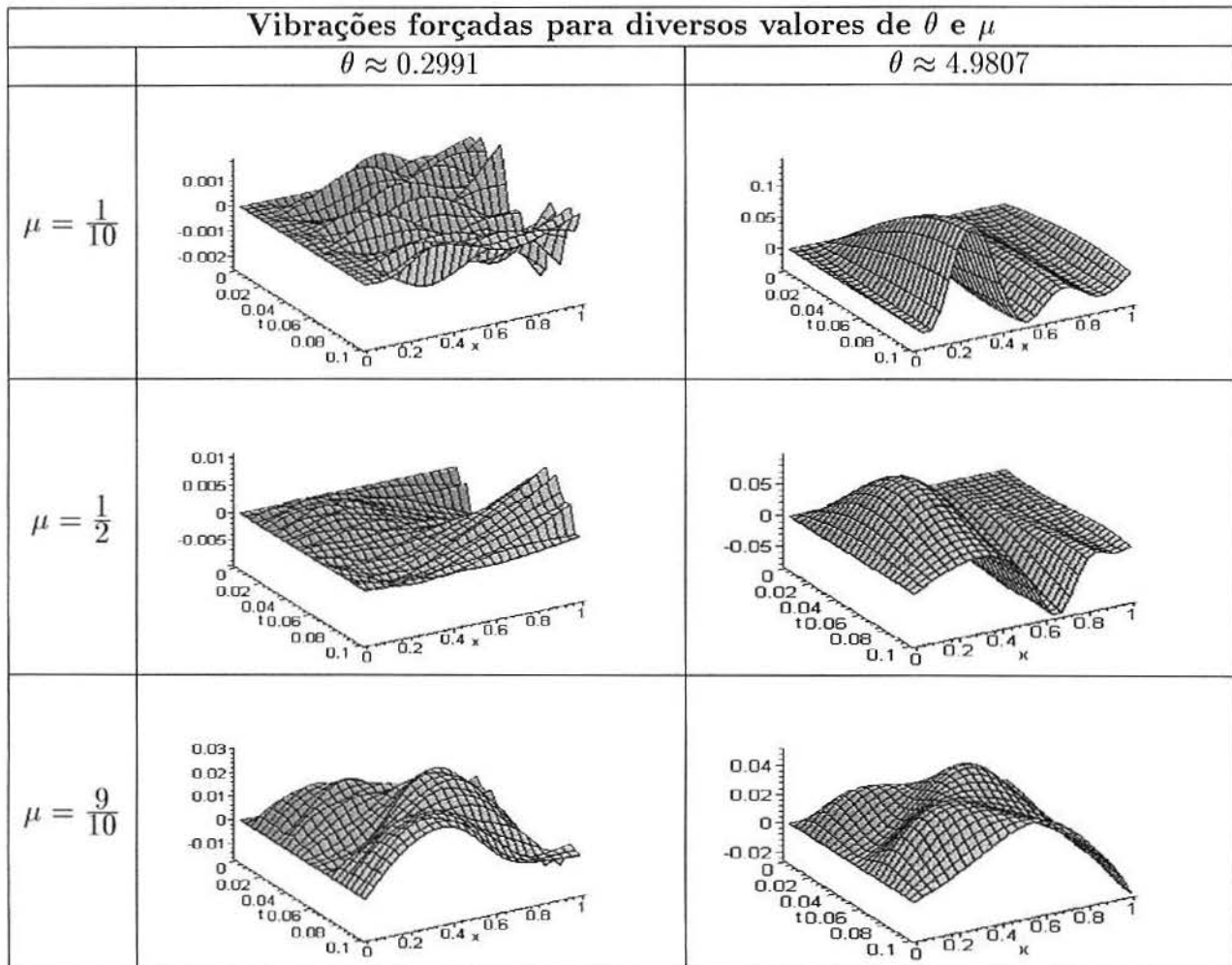


Figura 3.45 Vibrações forçadas da viga bissegmentada apoiada-livre

Tabela 3.27 Autovalores da viga bissegmentada apoiada-livre

Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	6.728785185	1	.4040553849	
	2	16.88468265	2	1.015315682	
	3	27.90308515	3	1.703854816	
	4	33.24350030	4	2.391175890	
	5	40.71469613	5	3.080995217	
$\mu = \frac{1}{2}$	1	6.195386799	1	.6076981216	
	2	10.94595975	2	1.675947420	
	3	13.53494646	3	2.905235006	
	4	19.20018916	4	4.144992676	
	5	25.21521659	5	5.385942581	
$\mu = \frac{9}{10}$	1	3.490595492	1	1.941339904	
	2	6.980812723	2	4.313727215	
	3	10.47027114	3	7.474021794	
	4	13.95858045	4	8.337079419	
	5	17.44532422	5	11.23376834	

Os parâmetros θ resultantes dos valores reais apresentam modos semelhantes.

Quando $\theta = 0.2991$, o deslocamento no primeiro segmento aumenta em magnitude e quando $\theta = 4.9807$, o deslocamento no primeiro segmento diminui em magnitude.

Em todos os casos a descontinuidade é visível.

4 VIGAS TRISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS, COM CONDIÇÕES DE CONTORNO IGUAIS

Esta família de vigas é considerada separadamente pelas suas características especiais. Por exemplo, considere a viga mostrada na figura 4.1

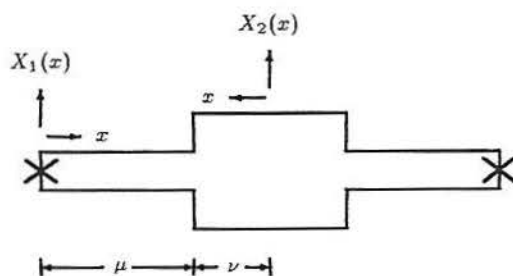


Figura 4.1 *Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno iguais*

Observa-se que as condições de contorno apresentam simetria com relação ao centro da viga. Neste caso, as vigas deste tipo tem os seus modos alternadamente simétricos e anti-simétricos (o primeiro modo é simétrico, o segundo modo é anti-simétrico, o terceiro modo é simétrico, etc.)

Pode-se determinar facilmente os modos anti-simétricos considerando a metade da viga, em cujo extremo direito anulam-se o deslocamento e o momento fletor, dando origem à condição apoiada, como é mostrado na figura 4.2

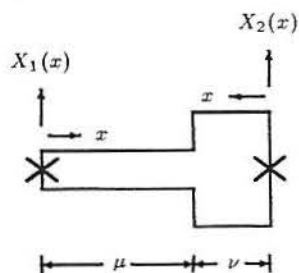


Figura 4.2 *Metade da viga trissegmentada para calcular os modos anti-simétricos*

As condições de contorno da viga da figura 4.2 são as seguintes:

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0,$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0.$$

Por outro lado, os modos simétricos podem ser calculados considerando a metade da viga, em cujo extremo direito anulam-se a força de cisalhamento e o giro, dando lugar à condição deslizante, como é mostrado na figura 4.3

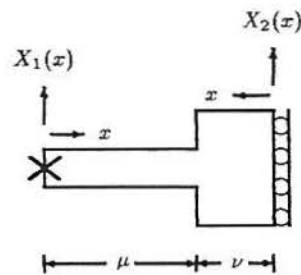


Figura 4.3 Metade da viga trissegmentada para calcular os modos simétricos

As condições de contorno da viga da figura 4.3 são as seguintes

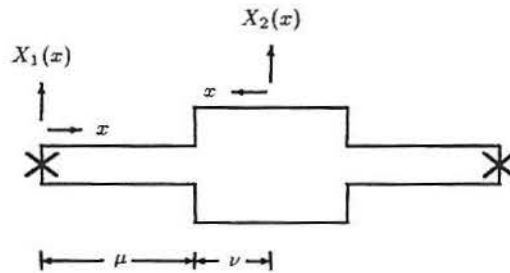
$$X_1(0) = X_1''(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0.$$

Para o cálculo dos modos anti-simétricos, são utilizados os programas do capítulo 3 e no caso dos modos simétricos, são feitos programas novos considerando o contorno deslizante.

4.1 Sem Apoio na Descontinuidade

4.1.1 Caso 10: Viga Biapoiada



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v_x(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Modos Anti-simétricos

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0,$$

Modos Anti-simétricos

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0,$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu),$$

$$X_1''(\mu) = -\alpha^4 X_2''(\nu),$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = \alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 4.1 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada biapoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496 \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	15.50182375	3.081053321
2	63.32326047	6.227151776
3	145.0141803	9.423517749
4	253.6488380	12.46304765
5	397.9555455	15.61079776

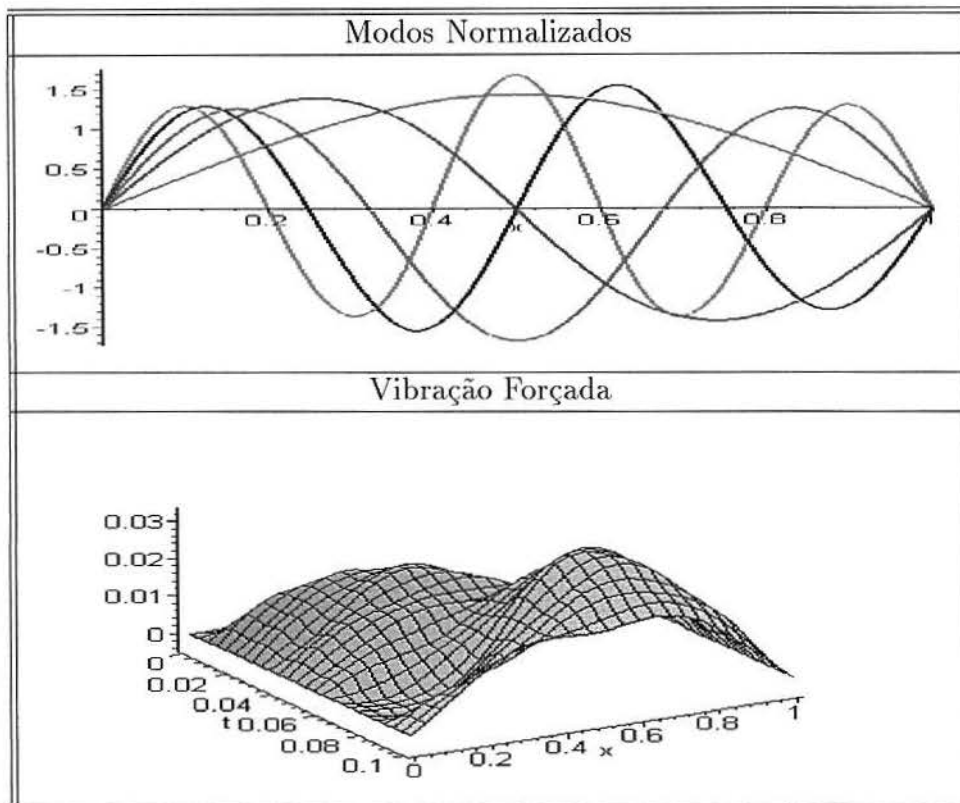


Figura 4.4 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada biapoiada

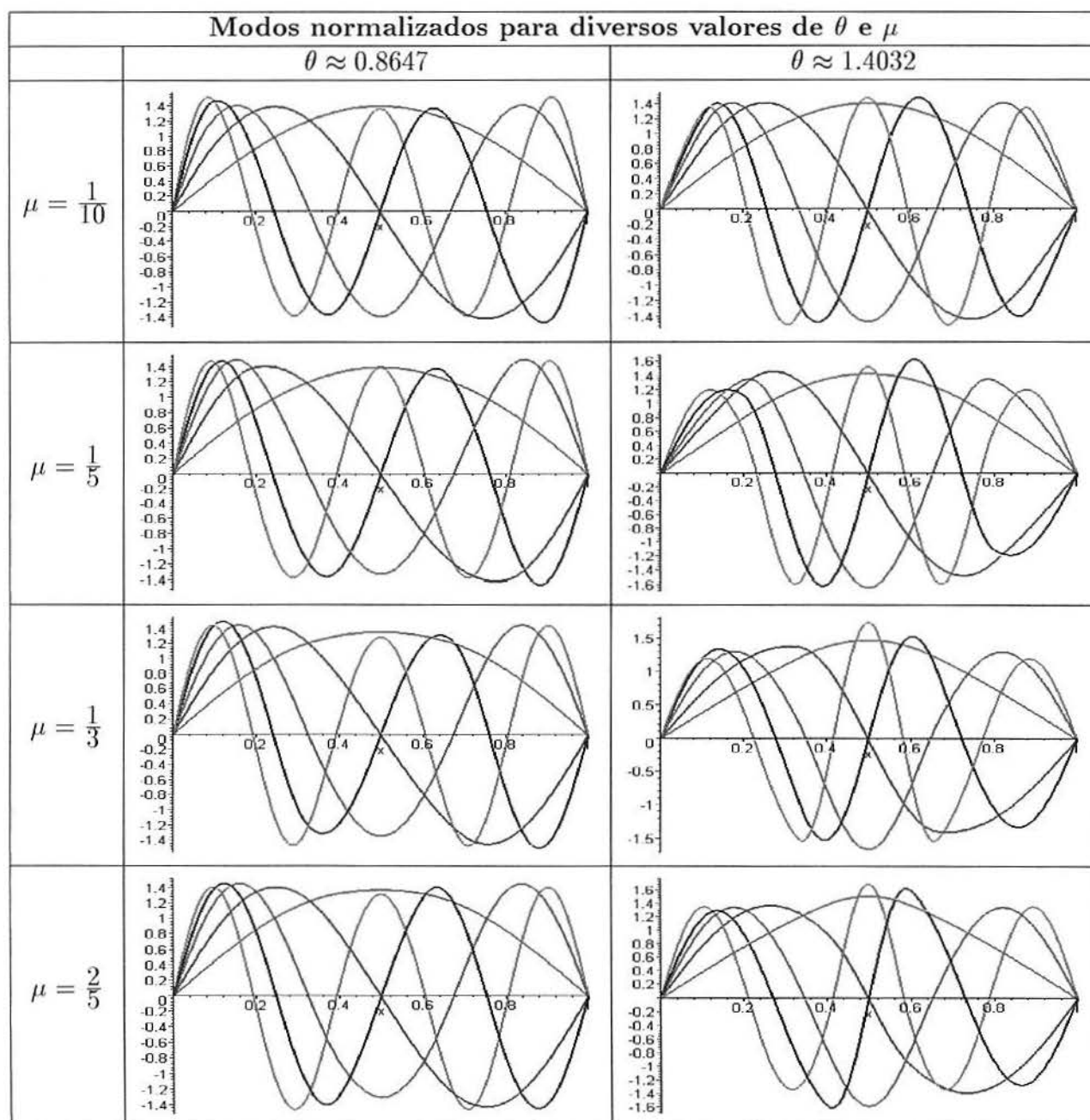


Figura 4.5 Modos da viga trissegmentada biapoiada

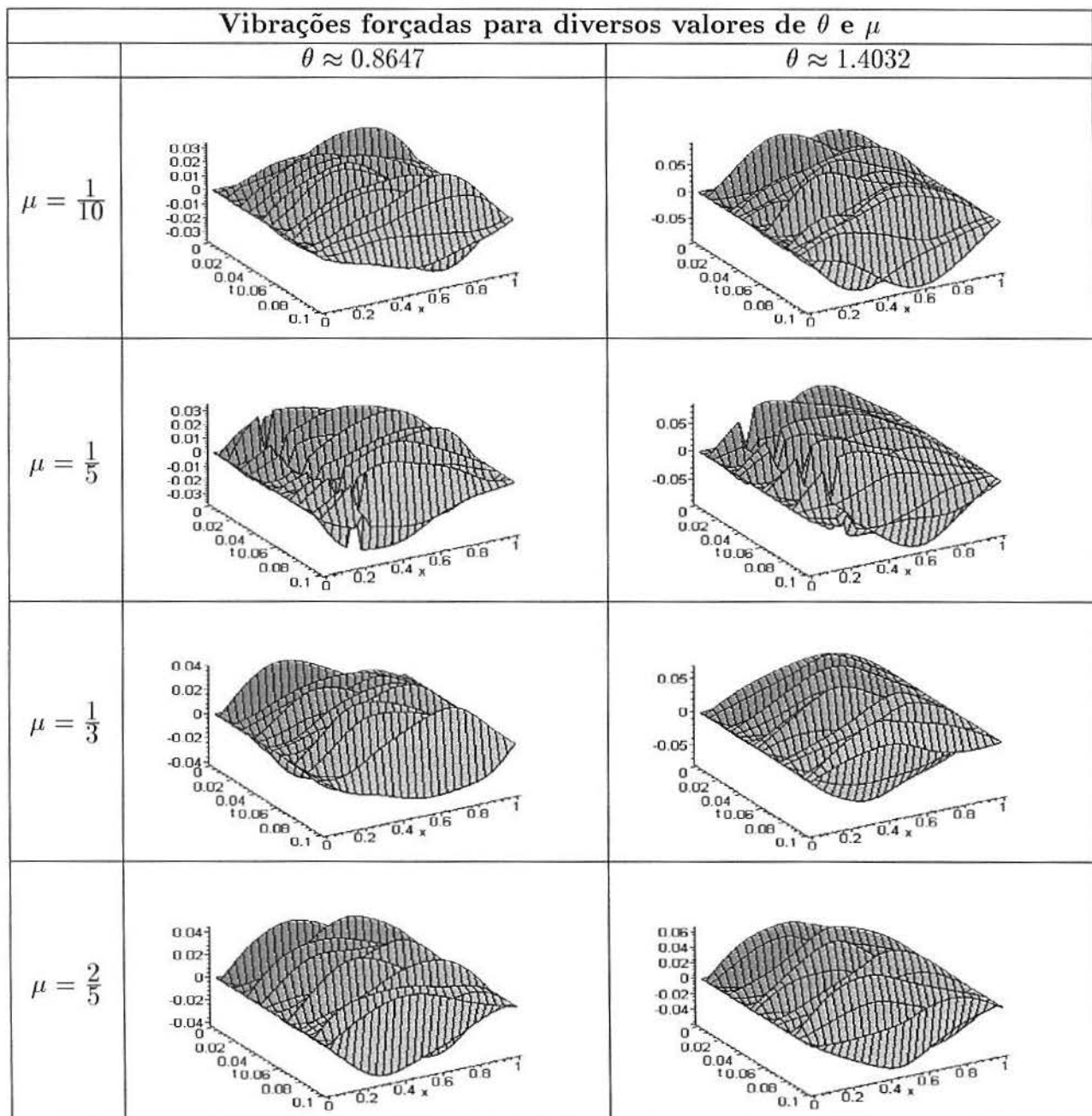


Figura 4.6 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada

Tabela 4.2 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada biapoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	621.8364082	3.623216949	1	238.4764335	2.243773426
	2	2451.265117	7.193684865	2	965.8420912	4.515536220
	3	5406.947910	10.68396260	3	2213.046891	6.835205470
	4	9428.103543	14.10809703	4	4017.213954	9.209133049
	5	14538.25813	17.51912672	5	6408.814492	11.63175153
$\mu = \frac{1}{3}$	1	544.2557429	3.389672784	1	278.8322424	2.426206500
	2	1951.472348	6.418557957	2	1467.248957	5.565551053
	3	4686.445178	9.946677491	3	3491.643205	8.585610765
	4	8282.650409	13.22333291	4	5618.009592	10.89049210
	5	12583.46466	16.29882824	5	8851.751177	13.67007398
$\mu = \frac{2}{5}$	1	511.4243984	3.285844354	1	317.0506313	2.587143852
	2	1889.202982	6.315323142	2	1739.430355	6.059820899
	3	4582.093496	9.835314222	3	3541.138877	8.646249147
	4	7733.744040	12.77765516	4	6210.779225	11.45062816
	5	12475.03008	16.22845094	5	10435.88897	14.84297620

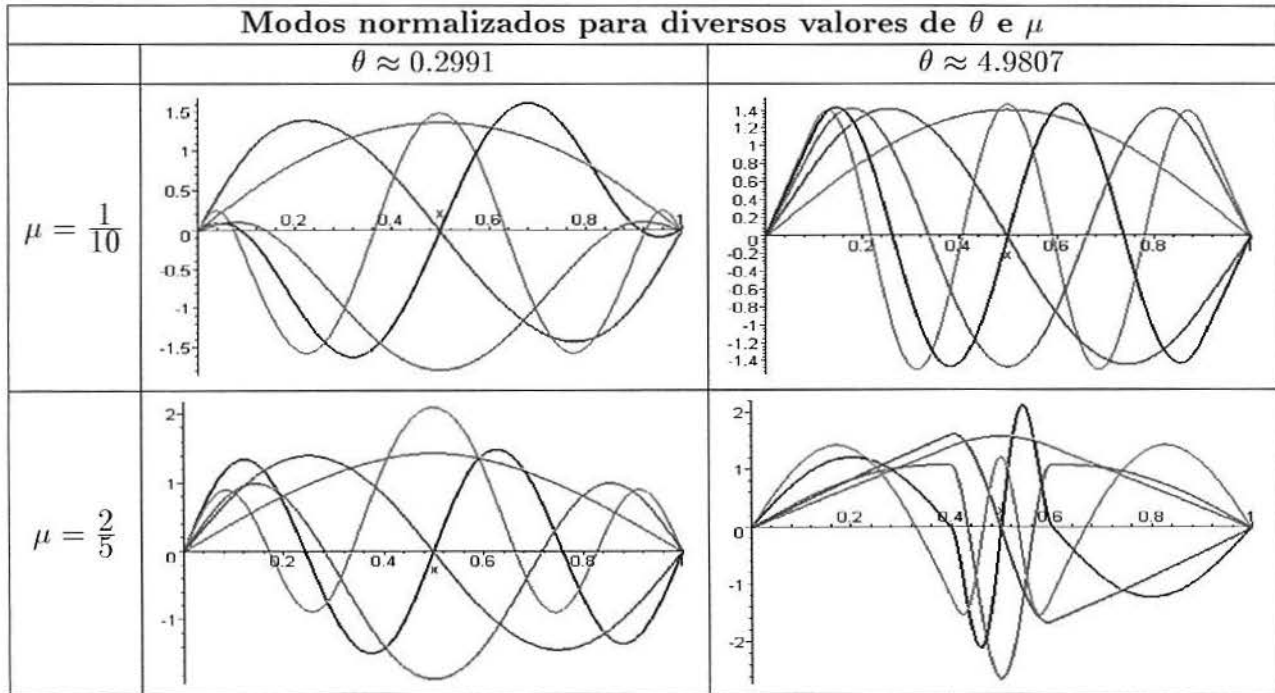


Figura 4.7 Modos da viga trissegmentada biapoiada

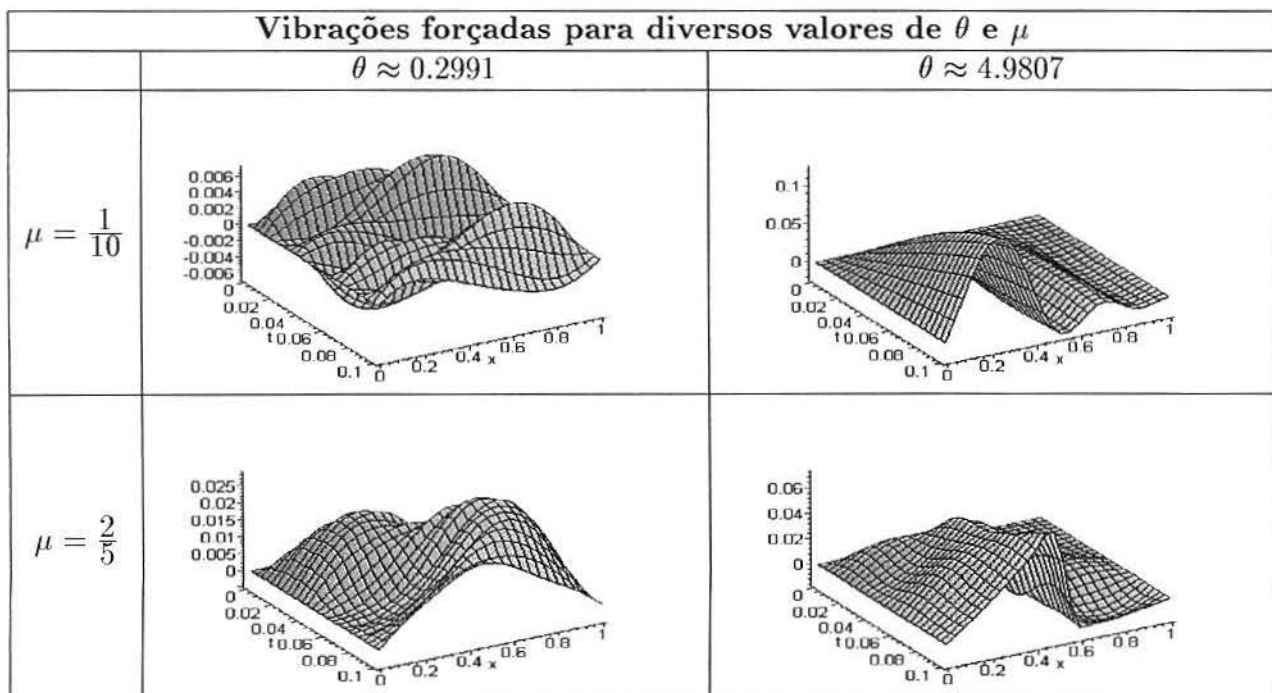


Figura 4.8 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada

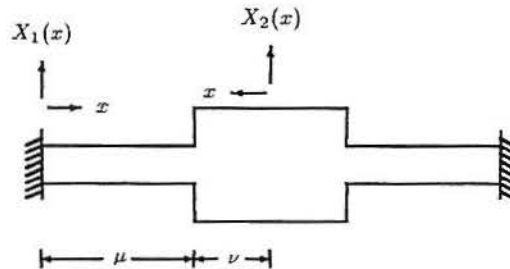
Tabela 4.3 Autovalores da viga trissegmentada biapoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1		7.572949598	1	.6337690011
	2		11.32723010	2	1.283546177
	3		19.50137075	3	1.957457162
	4		30.27808567	4	2.655206876
	5		38.48774321	5	3.372440386
$\mu = \frac{2}{5}$	1		3.385062253	1	.8606654389
	2		6.322359339	2	2.801260214
	3		10.68354523	3	5.380909429
	4		12.90887451	4	7.672541358
	5		18.24976042	5	8.825068816

Na viga trissegmentada biapoiada e sem apoio nas descontinuidades observa-se uma semelhança entre os modos resultantes dos parâmetros θ próximos a 1.

Para $\theta = 0.2991$ os autovalores decrescem quando aumenta a descontinuidade μ .

4.1.2 Caso 11: Viga Fixa-Fixa

**Equação governante:**

$$m_i(x)v_{tt}(t,x) + r_f(x)v_{xxxx}(t,x) = f(t,x)$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$v(t,0) = v_x(t,0) = 0,$$

$$v_x(t,L) = v_{xxx}(t,L) = 0$$

Modos Anti-simétricos

$$v(t,0) = v_x(t,0) = 0,$$

$$v(t,L) = v_{xx}(t,L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0,$$

Modos Anti-simétricos

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0,$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = X_2(\nu),$$

$$X_1''(\mu) = -\alpha^4 X_2''(\nu),$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = \alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 4.4 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	38.56813694	4.859841969
2	99.57215636	7.808664669
3	196.7028987	10.97521905
4	321.8849700	14.03971093
5	480.2291769	17.14873496

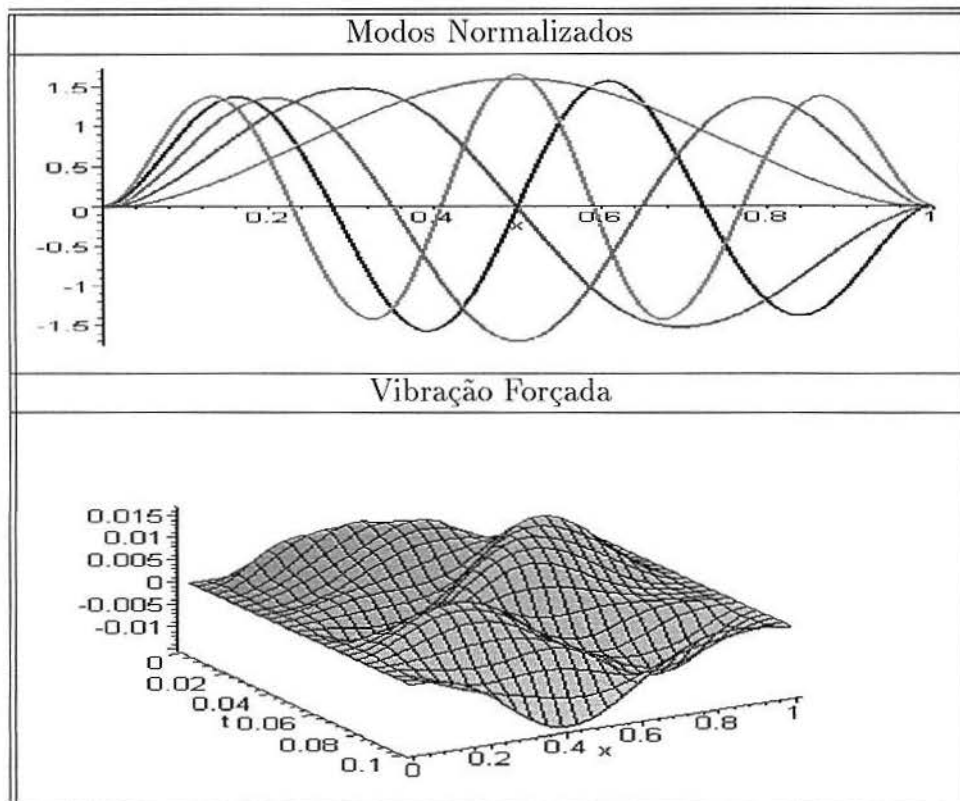


Figura 4.9 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-fixa

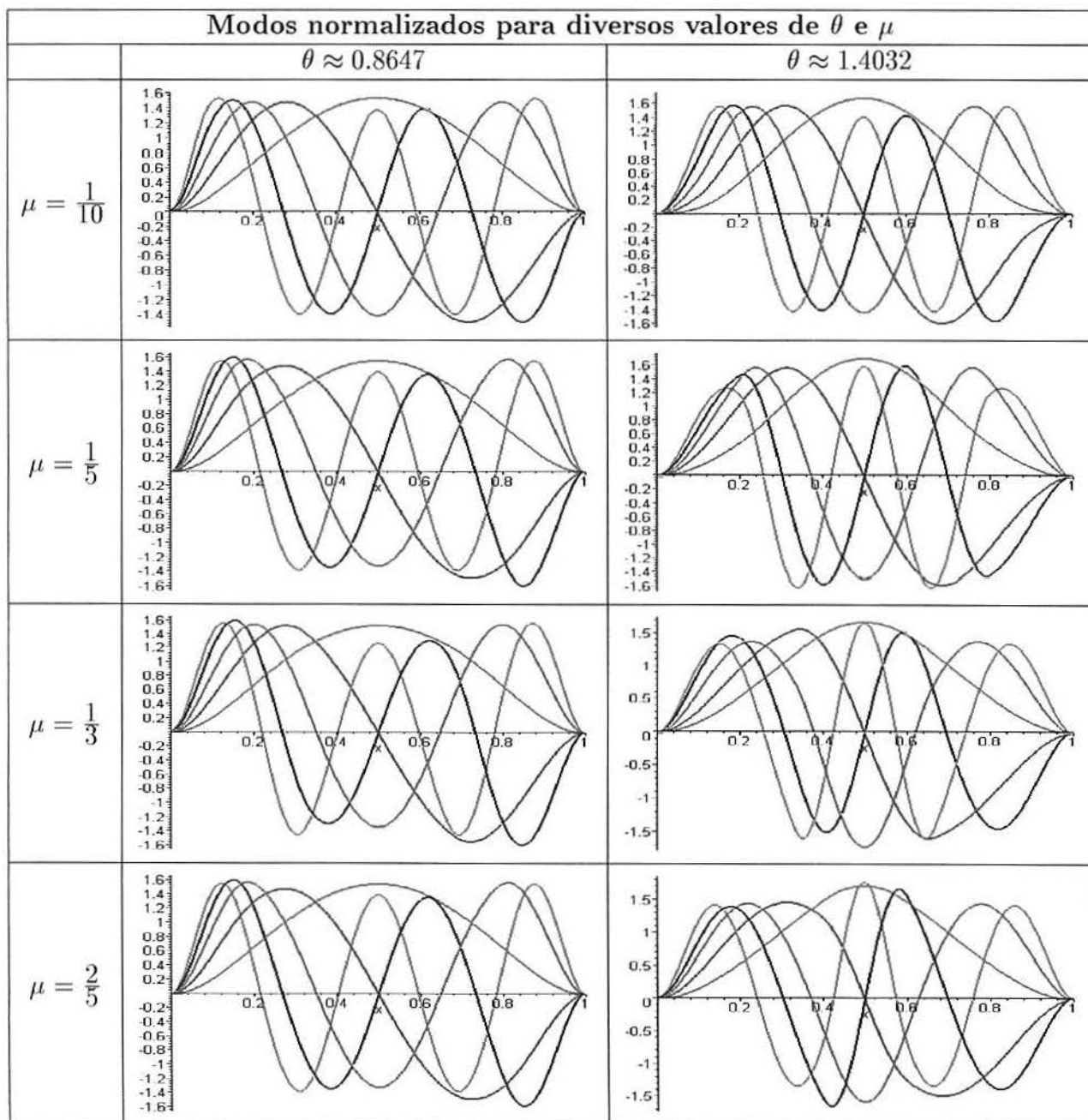


Figura 4.10 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa

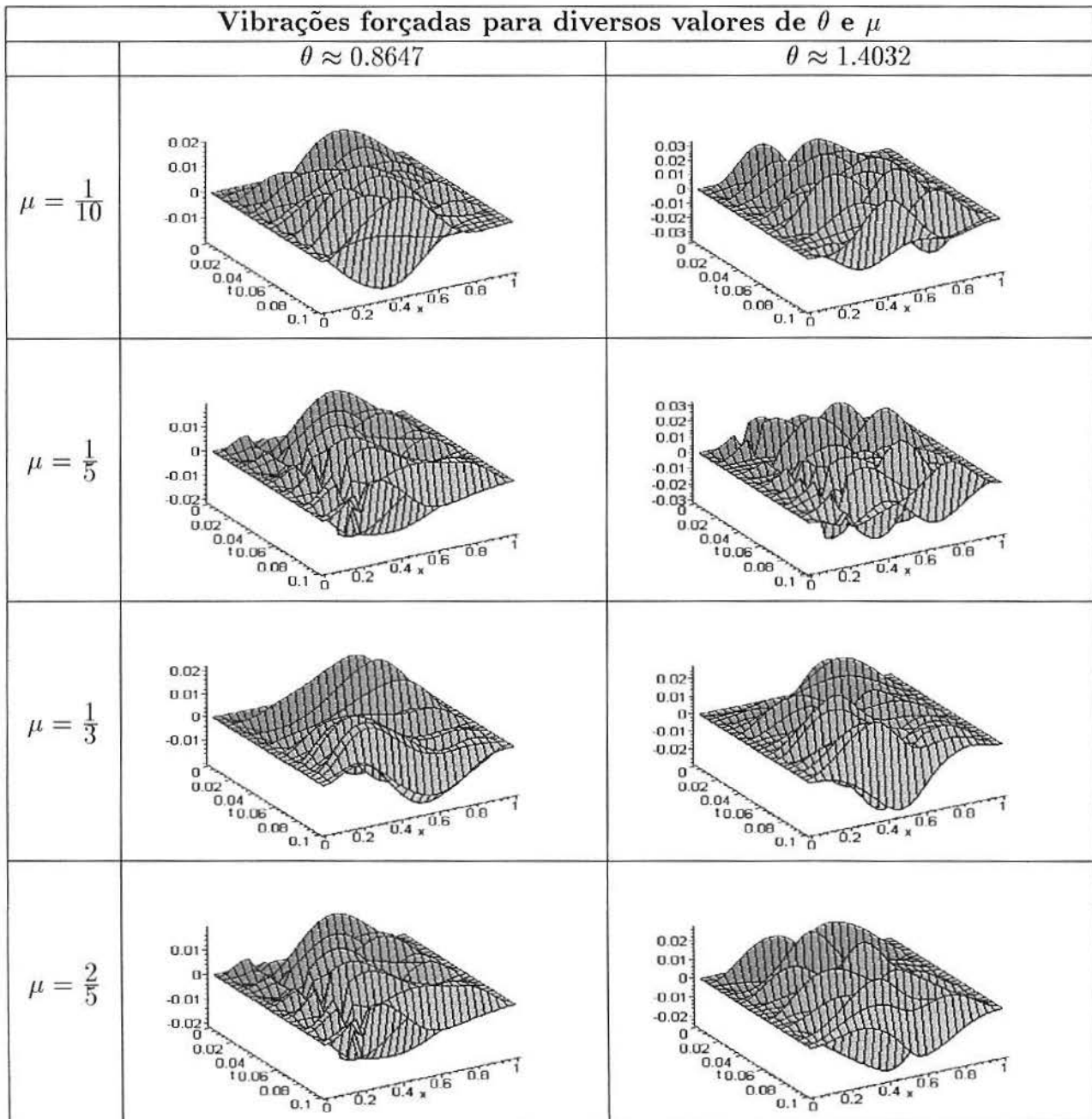


Figura 4.11 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa

Tabela 4.5 Freqüências naturais e autovalores da viga trisegmentada fixa-fixa

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	1209.619236	5.053364306	1	713.3218427	3.880601324
	2	3538.209227	8.642671806	2	1894.212652	6.323690887
	3	7136.164439	12.27407268	3	3574.858148	8.687317075
	4	11912.17921	15.85812641	4	5696.578010	10.96638000
	5	17770.98918	19.36921712	5	8254.245267	13.20063889
$\mu = \frac{1}{3}$	1	1168.428187	4.966578210	1	864.2691278	4.271503496
	2	3086.101799	8.071632680	2	2234.869854	6.868823941
	3	6298.935713	11.53160756	3	4726.691510	9.989296307
	4	10556.98745	14.92884706	4	7322.364750	12.43317211
	5	15262.43949	17.95015668	5	10562.55781	14.93278512
$\mu = \frac{2}{5}$	1	1195.775697	5.024364374	1	875.0964855	4.298176407
	2	3467.607956	8.556009568	2	2649.204988	7.478492255
	3	6681.005108	11.87619085	3	4928.458448	10.20027348
	4	10982.55935	15.22677904	4	7765.555069	12.80390721
	5	16734.00655	18.79560171	5	12597.36175	16.30782591

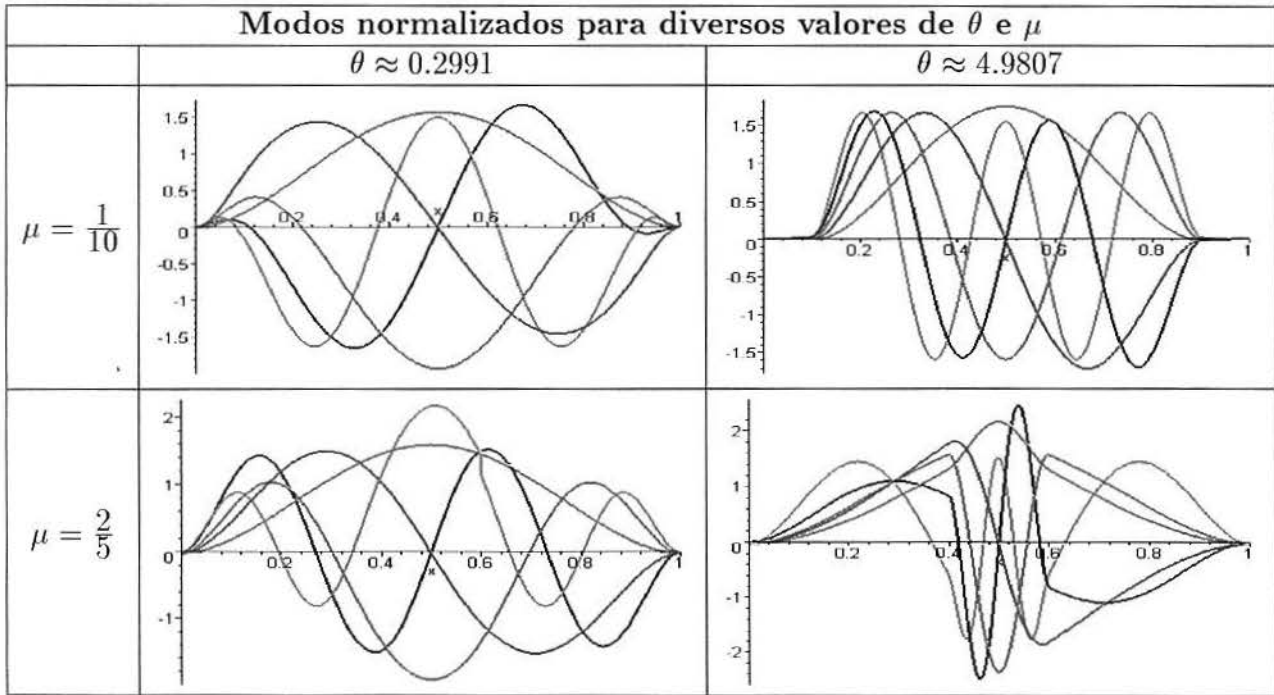


Figura 4.12 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa

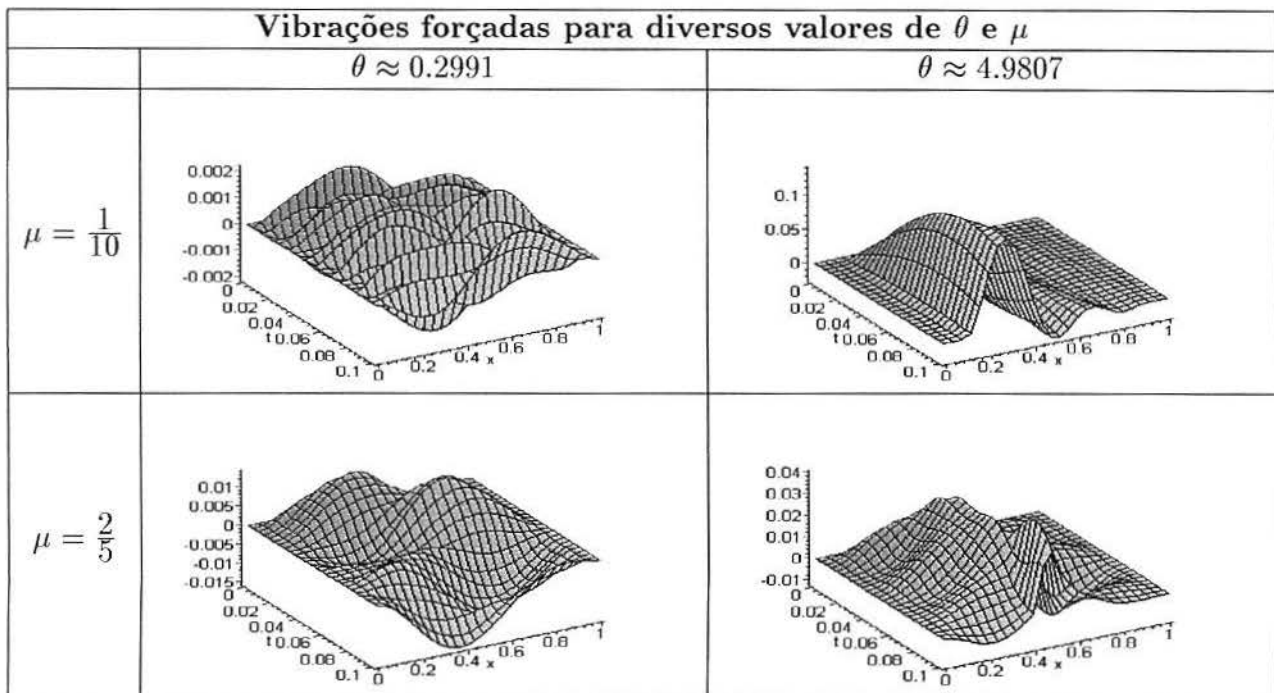


Figura 4.13 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa

Tabela 4.6 Autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa

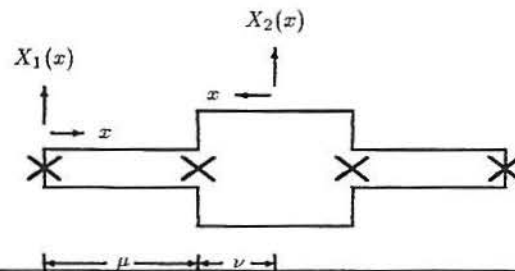
Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	1	15.66813813	1	1.185475244
	2	2	19.48525778	2	1.967255366
	3	3	22.47124479	3	2.752881517
	4	4	31.54233845	4	3.537094837
	5	5	42.03511417	5	4.319890157
$\mu = \frac{2}{5}$	1	1	5.400809715	1	3.289382484
	2	2	7.947443009	2	4.183761219
	3	3	12.53964277	3	5.858728142
	4	4	14.61652203	4	8.312501693
	5	5	20.16100718	5	10.17677563

Na viga trissegmentada fixa-fixa e sem apoio nas descontinuidades, observa-se uma semelhança entre os modos dos parâmetros θ resultantes do material real.

Quando $\theta < 1$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem entre as descontinuidades.

4.2 Com Apoio na Descontinuidade

4.2.1 Caso 12: Viga Biapoiada



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v_x(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Modos Anti-simétricos

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0,$$

Modos Anti-simétricos

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0,$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0, \quad X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu), \quad X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 4.7 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada biapoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	35.86045895	4.686145174
2	46.44723871	5.333198731
3	66.51122786	6.381977954
4	143.4040526	9.371055916
5	165.0251748	10.05270452

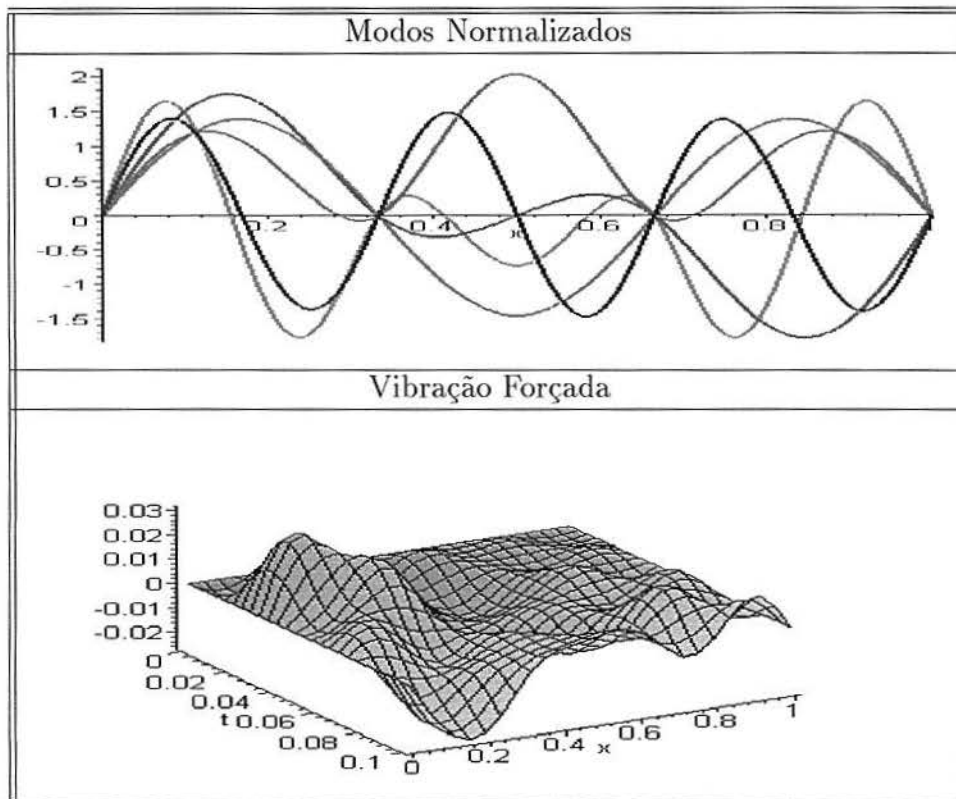


Figura 4.14 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada biapoiada

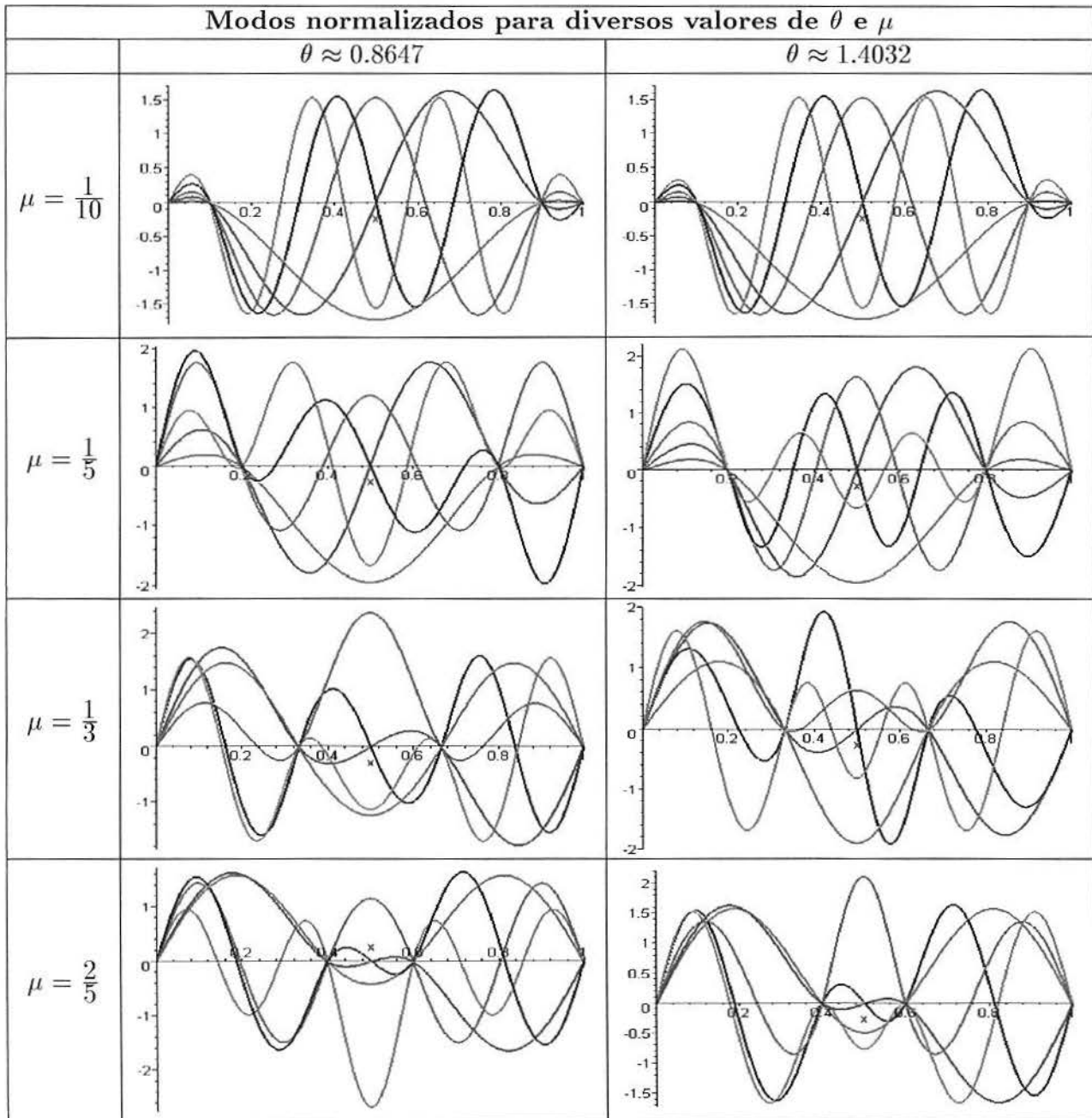


Figura 4.15 Modos da viga trisegmentada biapoiada

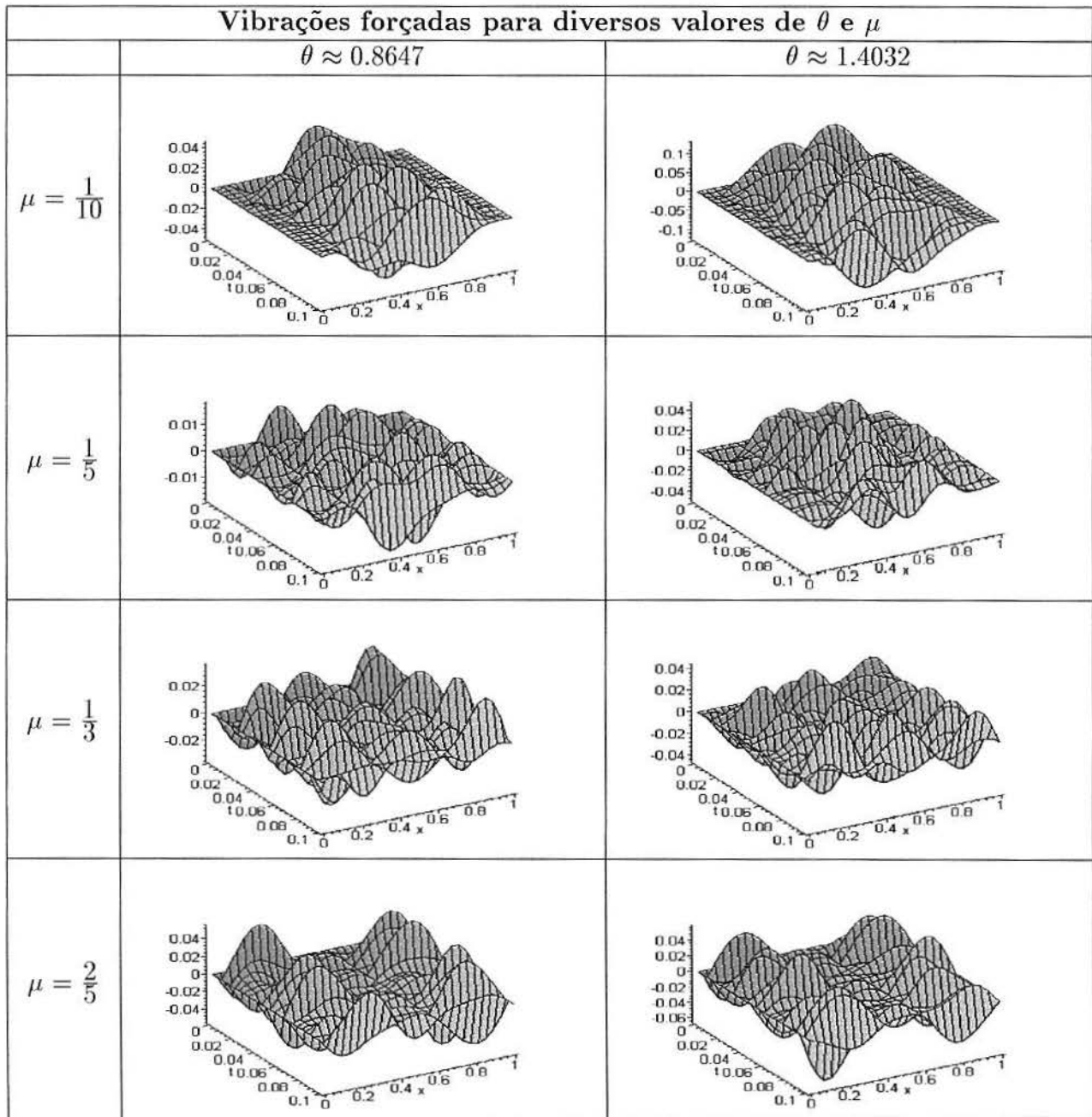


Figura 4.16 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada

Tabela 4.8 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada biapoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	483.4651101	3.194764392	1	183.6274313	1.968906287
	2	1350.627075	5.339787715	2	513.2612691	3.291739909
	3	2674.018411	7.513433774	3	1017.643852	4.635047324
	4	4448.385251	9.690751615	4	1698.052422	5.987310939
	5	6655.781299	11.85375066	5	2556.069073	7.345858509
$\mu = \frac{1}{3}$	1	1127.364591	4.878524172	1	694.5159096	3.829105794
	2	1352.598506	5.343683382	2	1311.598021	5.262070260
	3	2419.452673	7.146852710	3	1527.666653	5.678982960
	4	4457.351392	9.700513012	4	2633.171157	7.455826802
	5	4882.353766	10.15245068	5	4446.769922	9.688991968
$\mu = \frac{2}{5}$	1	897.4495100	4.352725489	1	868.0711713	4.280888663
	2	1010.495938	4.618740391	2	1009.096631	4.615541331
	3	3036.399196	8.006370806	3	2088.841209	6.640625358
	4	3340.357116	8.397552274	4	3297.979874	8.344114726
	5	5698.140490	10.96788385	5	3637.579882	8.763196211

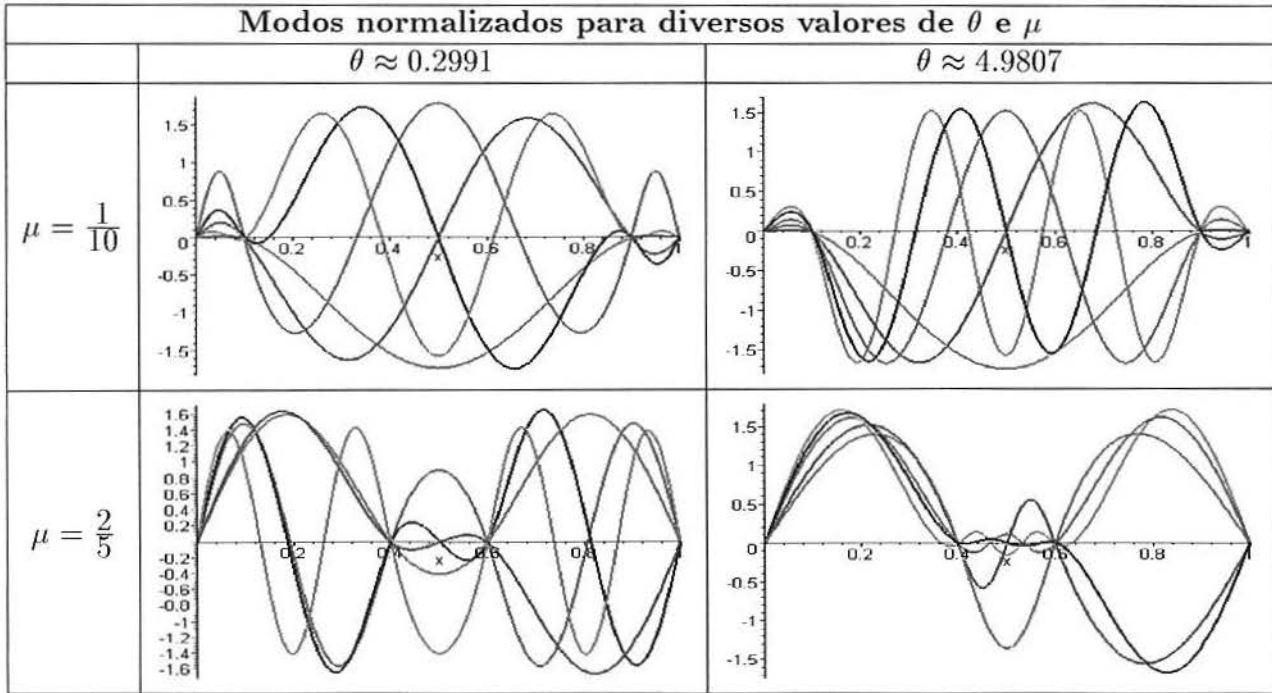


Figura 4.17 Modos da viga trissegmentada biapoiada

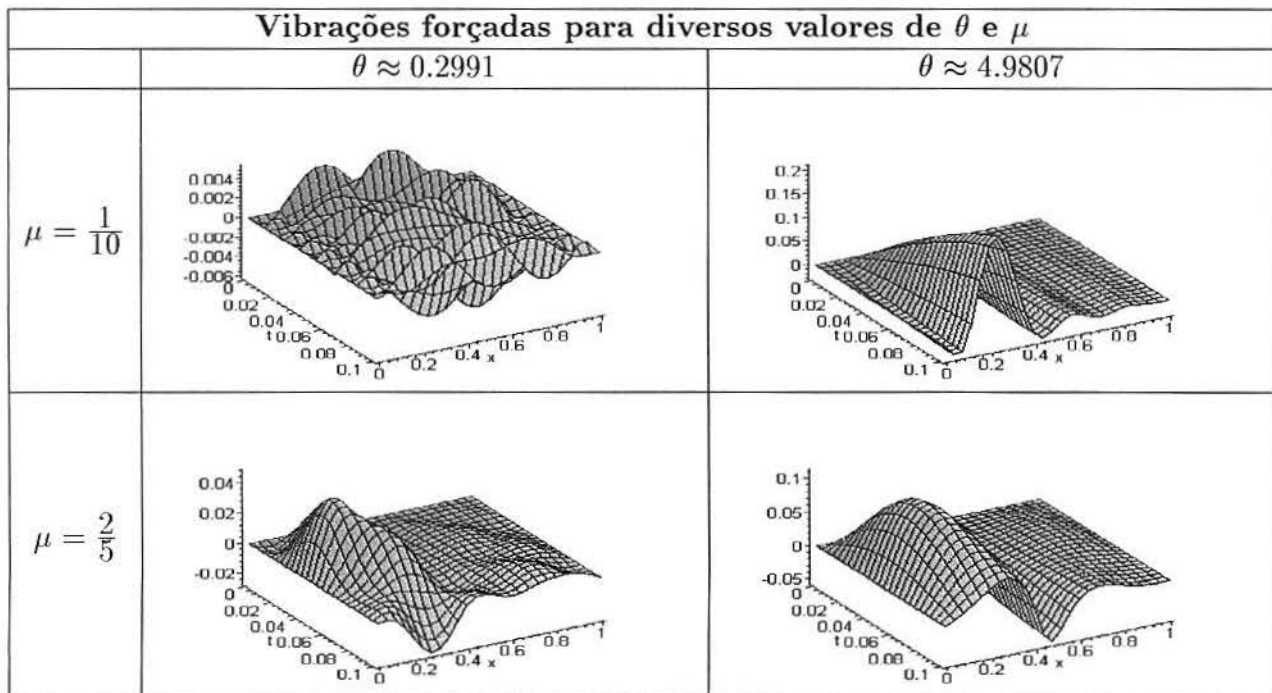


Figura 4.18 Vibrações forçadas da viga trissegmentada biapoiada

Tabela 4.9 Autovalores da viga trissegmentada biapoiada

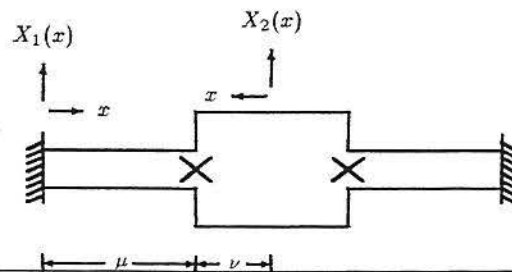
Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	1	9.196888492	1	.5547111083
	2	2	14.62963730	2	.9274412978
	3	3	16.36160467	3	1.306066382
	4	4	17.60060074	4	1.687478960
	5	5	22.53759986	5	2.071113453
$\mu = \frac{2}{5}$	1	1	4.363213689	1	1.750939747
	2	2	4.619261243	2	3.225554398
	3	3	8.140827956	3	4.495692259
	4	4	8.404674393	4	4.788621173
	5	5	11.98835674	5	5.119486840

Na viga trissegmentada biapoiada e com apoio nas descontinuidades, observa-se uma semelhança entre os modos para os diferentes valores do parâmetro θ resultantes do material real.

Quando $\theta = 0.2991$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem.

Em todos os casos observa-se com clareza as descontinuidades.

4.2.2 Caso 13: Viga Fixa-Fixa



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v_x(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Modos Anti-simétricos

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0,$$

Modos Anti-simétricos

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0,$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 4.10 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	45.48613181	5.277731835
2	67.78137229	6.442627107
3	81.35848360	7.058448325
4	161.9677387	9.959145478
5	202.4339537	11.13395587

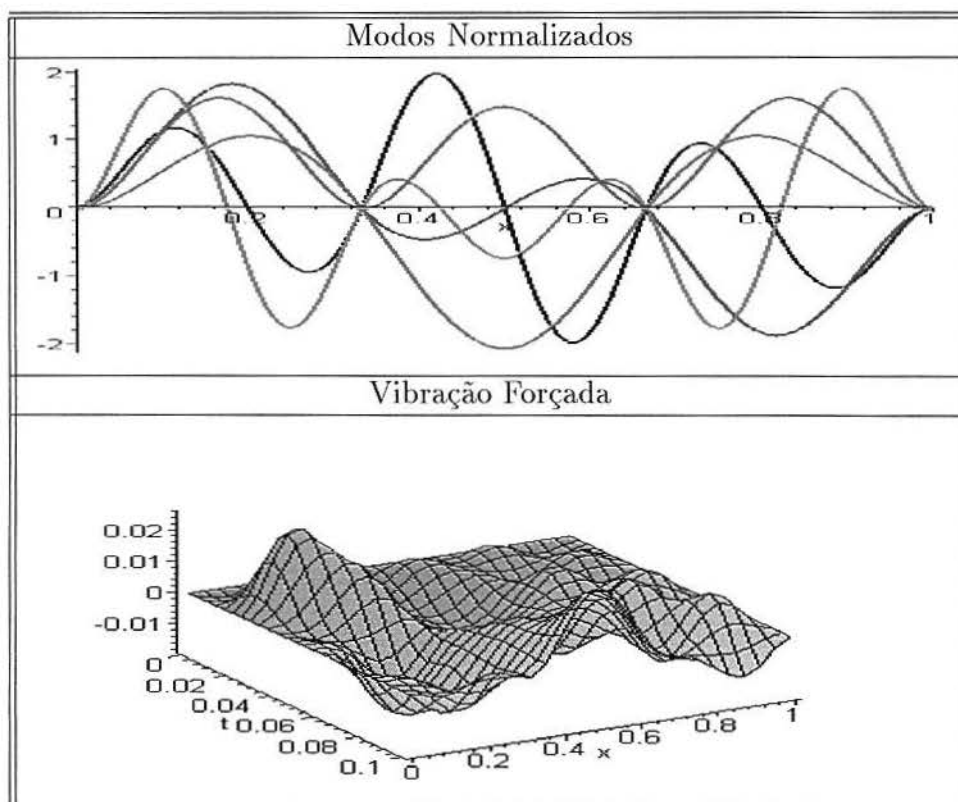


Figura 4.19 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-fixa

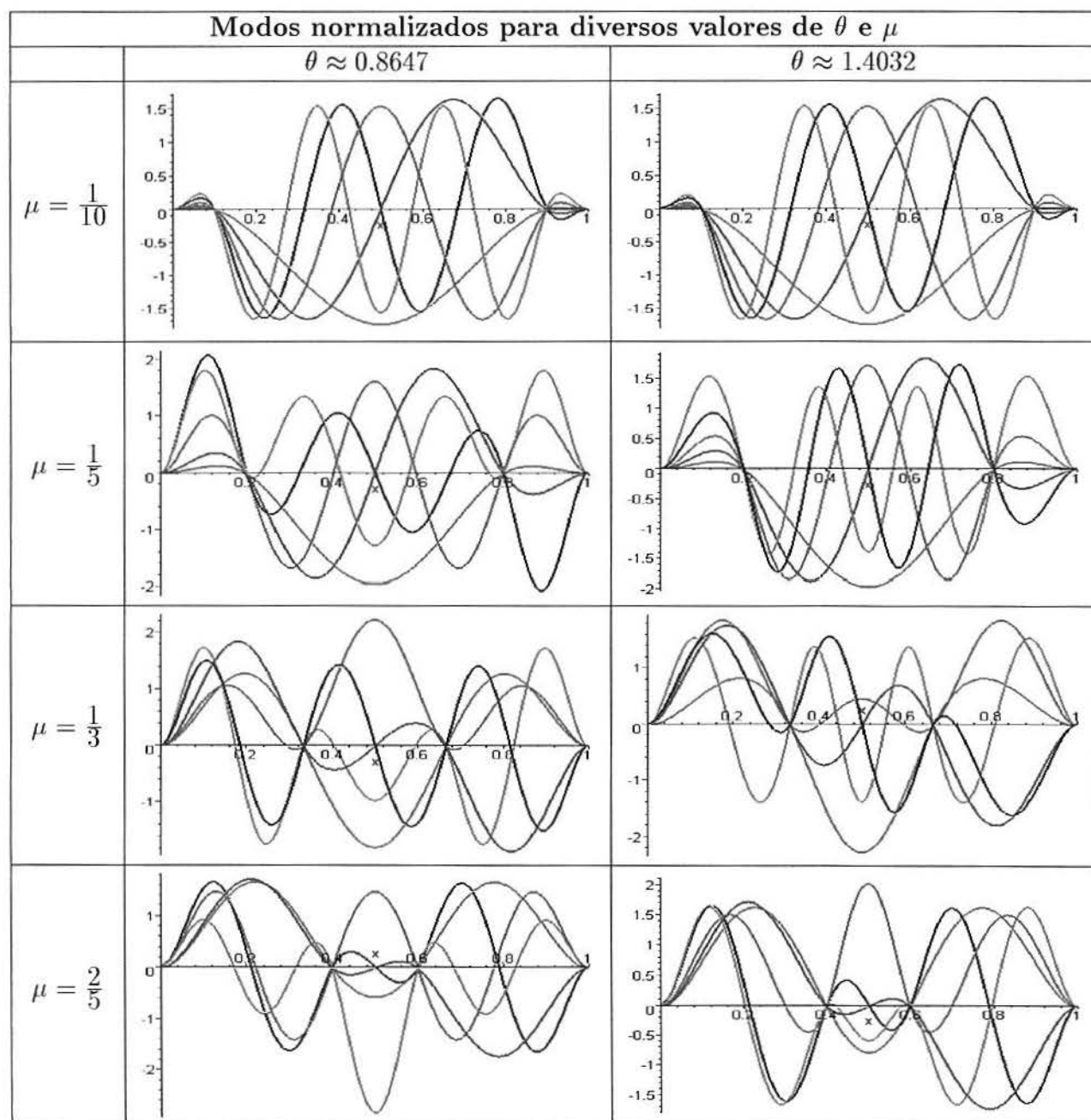


Figura 4.20 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa

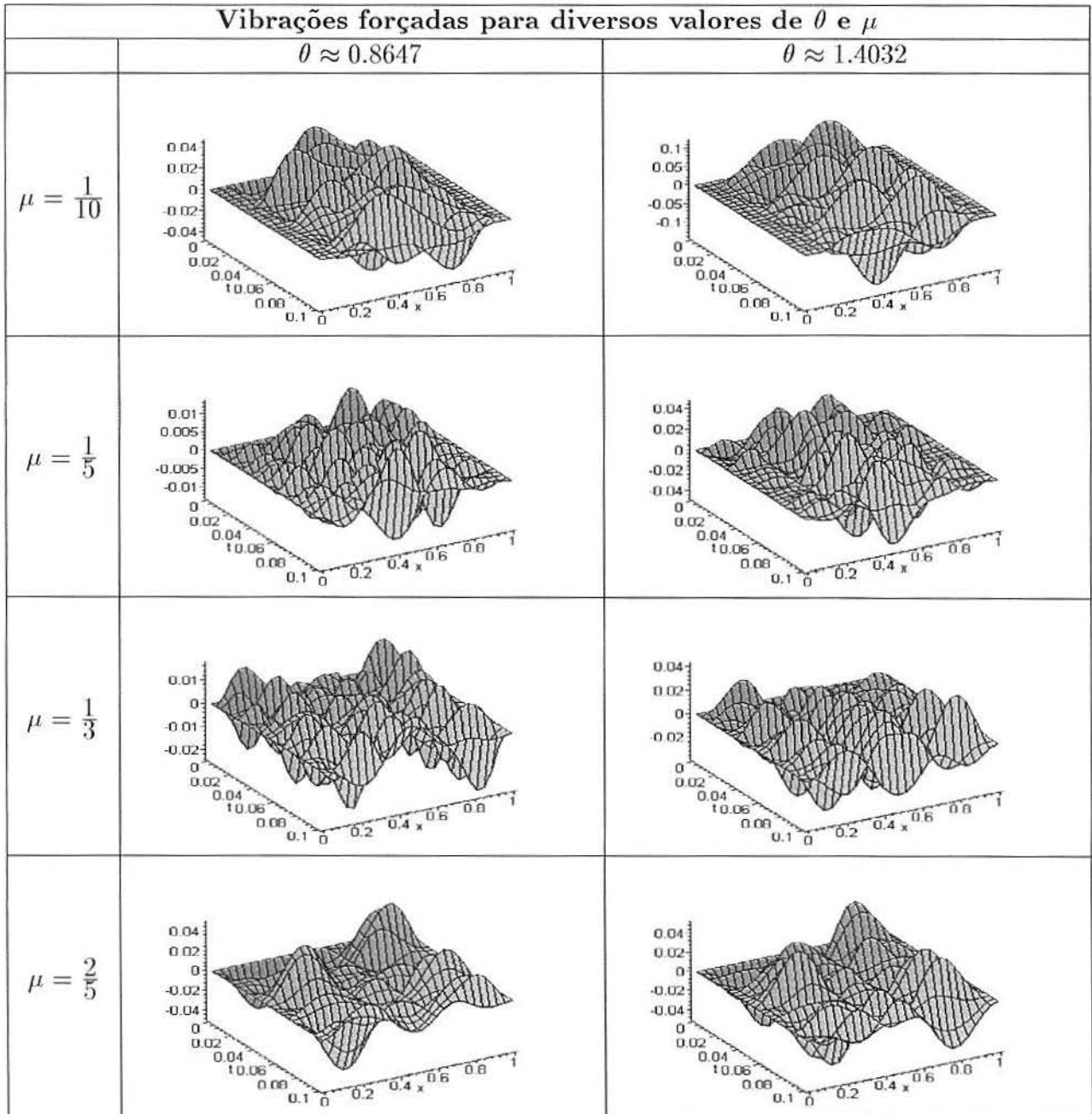


Figura 4.21 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa

Tabela 4.11 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	497.6790315	3.241387387	1	189.0133645	1.997572371
	2	1383.653626	5.404679670	2	525.5922452	3.331046847
	3	2731.370234	7.593579644	3	1038.054031	4.681297543
	4	4539.646065	9.789652213	4	1727.063322	6.038240361
	5	6806.539742	11.98724712	5	2594.305583	7.400598295
$\mu = \frac{1}{3}$	1	1565.555471	5.748976008	1	26520.68513	4.019845223
	2	1982.267291	6.469003314	2	73884.96452	6.217672817
	3	2725.024048	7.584752884	3	174232.0462	6.709574765
	4	5399.774967	10.67687349	4	227412.1584	7.752083583
	5	5969.732603	11.22622405	5	408788.9345	10.30340997
$\mu = \frac{2}{5}$	1	1324.189353	5.287267848	1	42716.37567	5.101697630
	2	1474.098832	5.578527357	2	79781.17926	5.570859703
	3	3728.896617	8.872508776	3	151979.4200	6.972166377
	4	4138.169170	9.346744834	4	290239.8754	9.250764395
	5	6199.712250	11.44042169	5	458937.2369	9.622987192

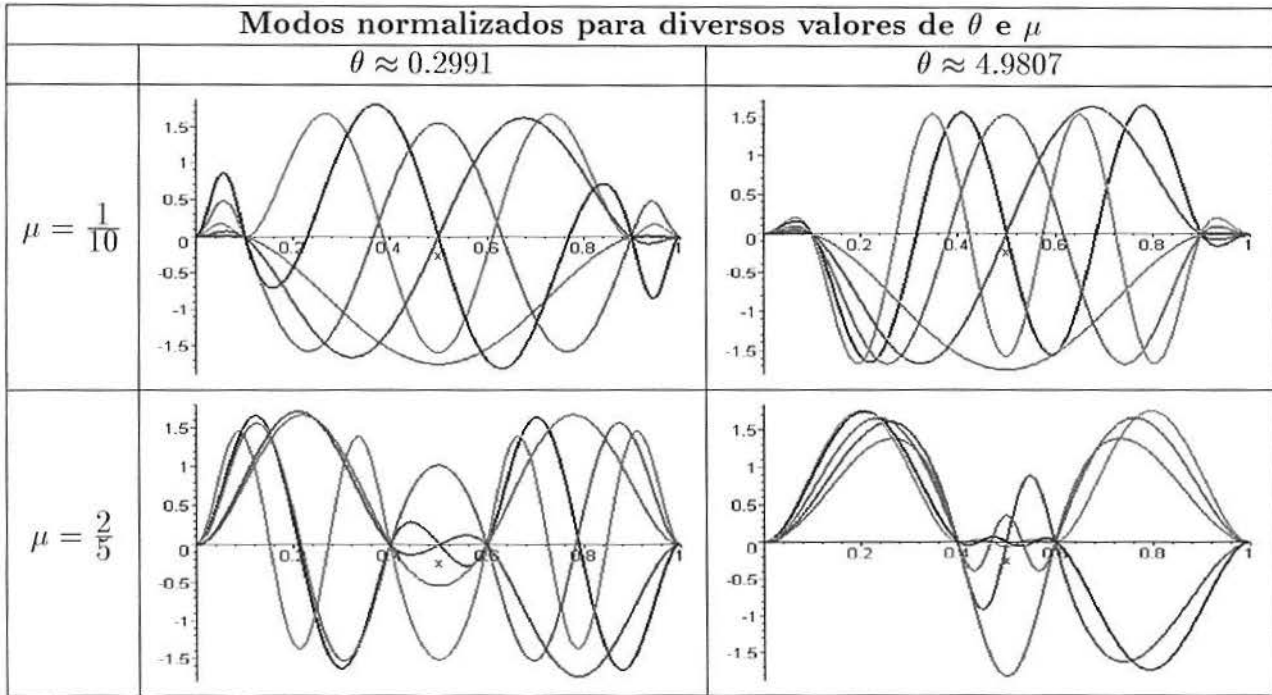


Figura 4.22 Modos da viga trissegmentada fixa-fixa

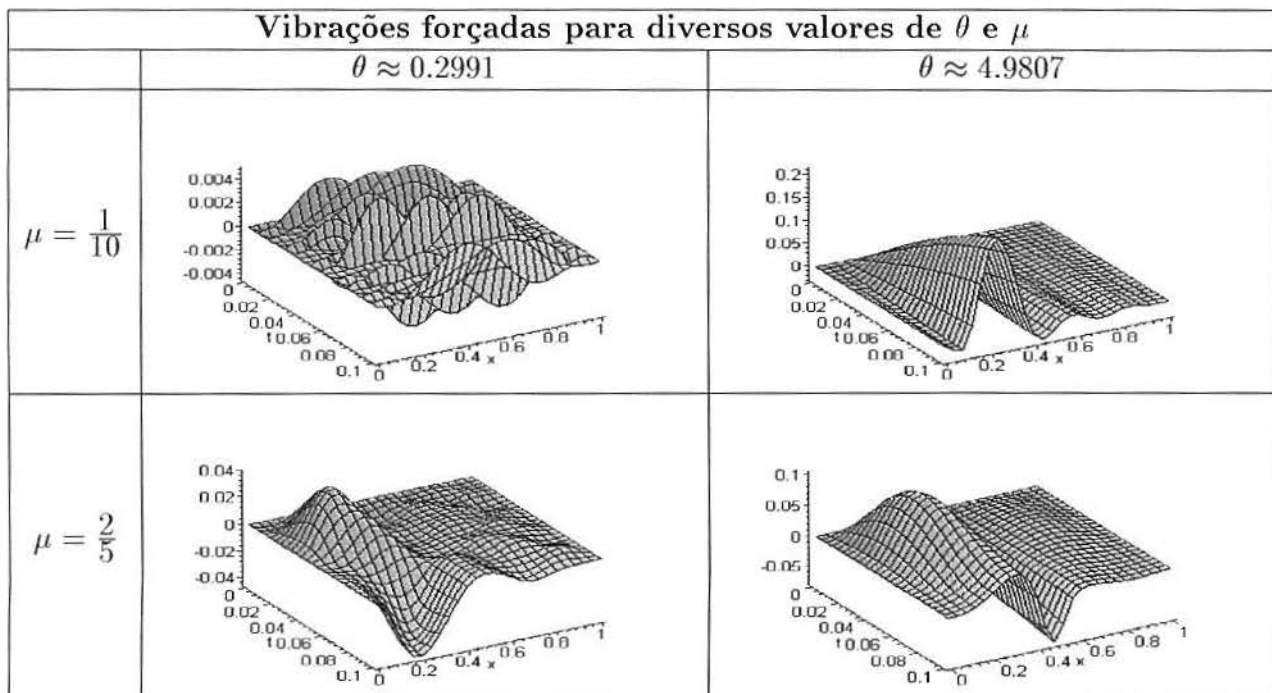


Figura 4.23 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-fixa

Tabela 4.12 Autovalores da viga trissegmentada fixa-fixa

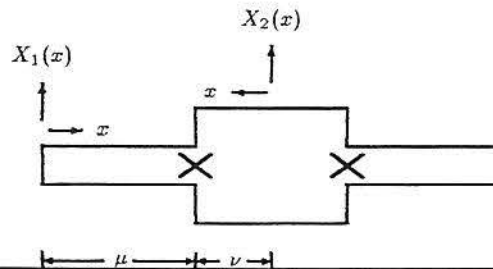
Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	9.359475180	1	.5627841974	
	2	15.43872997	2	.9384835047	
	3	19.65012809	3	1.318955050	
	4	20.64318399	4	1.701410867	
	5	23.12952641	5	2.085563993	
$\mu = \frac{2}{5}$	1	5.310880187	1	1.793805622	
	2	5.579748149	2	3.272381426	
	3	9.098221635	3	4.751558134	
	4	9.358010878	4	5.674361361	
	5	12.95509824	5	5.851486758	

Na viga trissegmentada fixa-fixa e com apoio nas descontinuidades, os modos resultantes dos parâmetros θ próximos a 1 são semelhantes, bem como seus respectivos autovalores e frequências.

Quando $\theta = 0.2991$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem.

Em todos os casos observa-se com clareza as descontinuidades.

4.2.3 Caso 14: Viga Livre-Livre



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x)$$

onde

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ \rho_2 A_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$v_{xx}(t, 0) = v_{xxx}(t, 0) = 0,$$

$$v_x(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Modos Anti-simétricos

$$v_{xx}(t, 0) = v_{xxx}(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Condições de contorno:

Modos Simétricos

$$X_1''(0) = X_1'''(0) = 0,$$

$$X_2'(0) = X_2'''(0) = 0,$$

Modos Anti-simétricos

$$X_1''(0) = X_1'''(0) = 0$$

$$X_2(0) = X_2''(0) = 0,$$

Condições de continuidade:

$$X_1(\mu) = 0$$

$$X_2(\nu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$$

Tabela 4.13 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada livre-livre

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	7.317807604	2.116890093
2	9.975825106	2.471623013
3	46.14378520	5.315748501
4	66.99308972	6.405054374
5	80.51147312	7.021609993

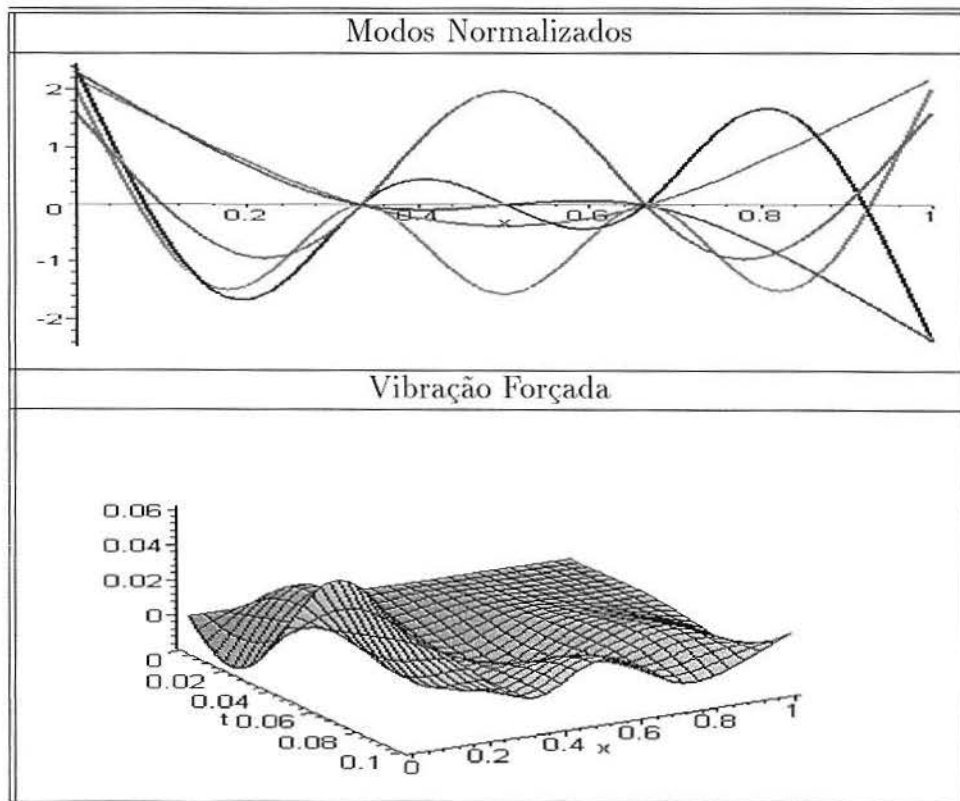


Figura 4.24 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada livre-livre

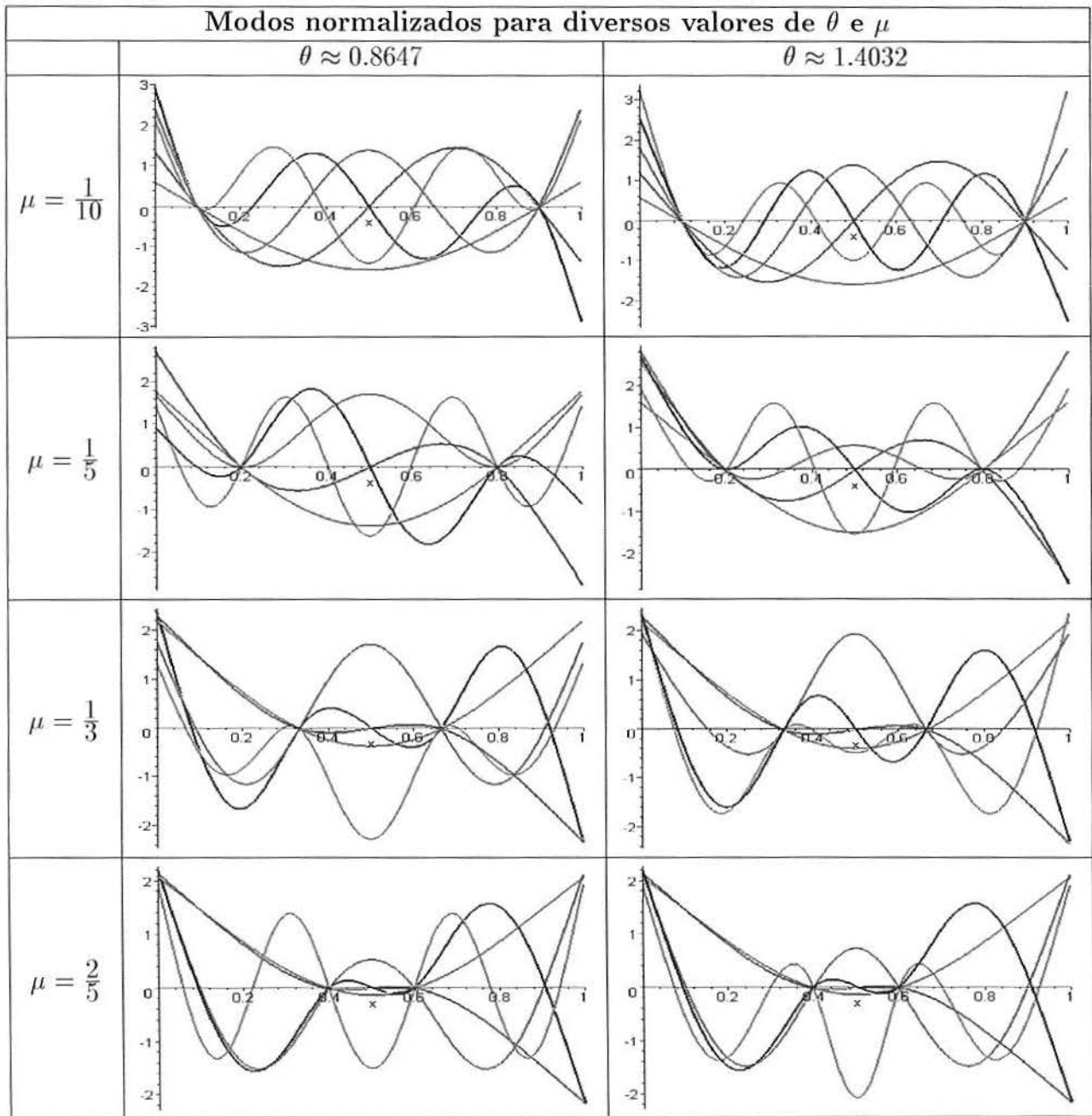


Figura 4.25 Modos da viga trissegmentada livre-livre

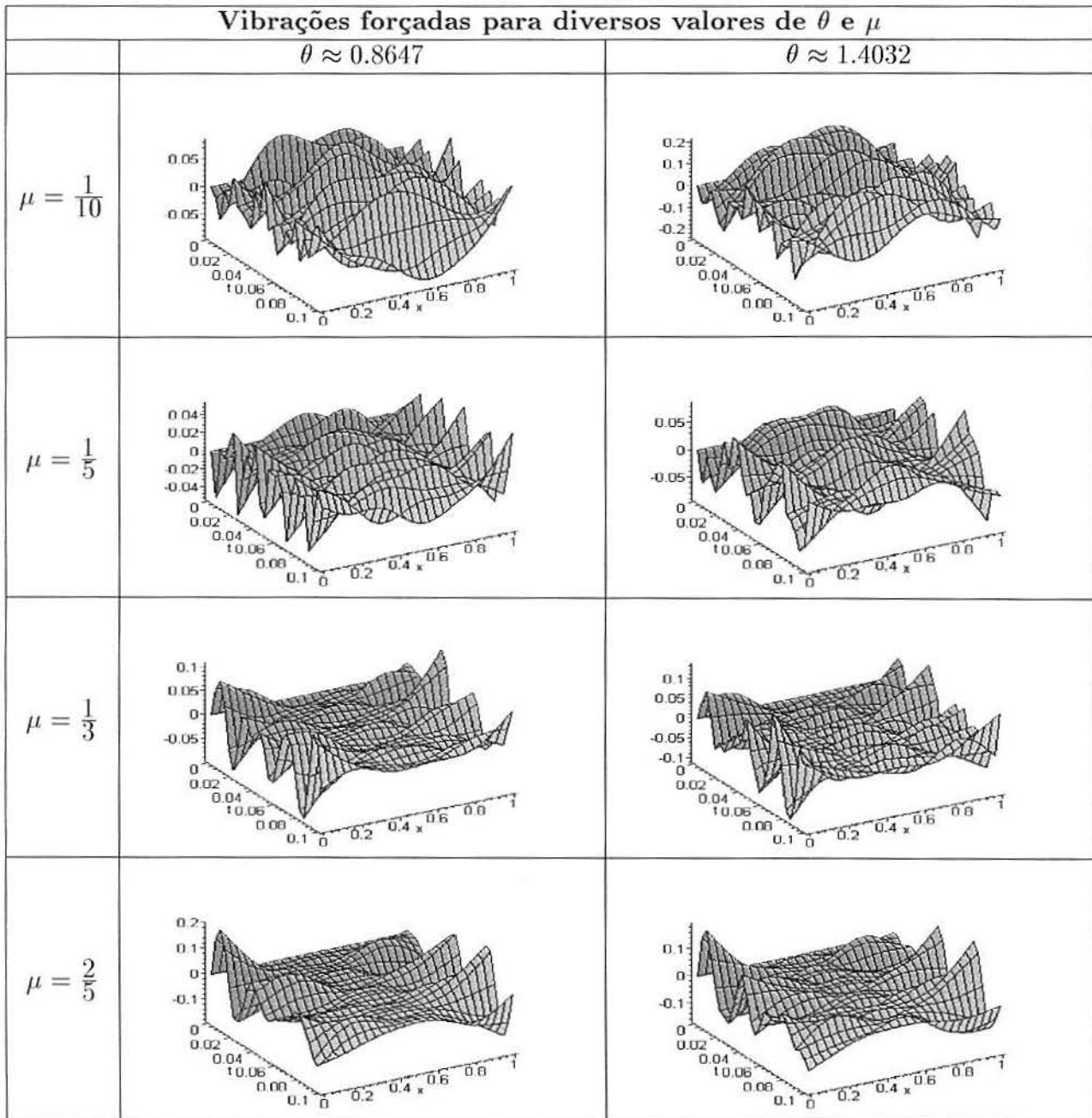


Figura 4.26 Vibrações forçadas da viga trissegmentada livre-livre

Tabela 4.14 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada livre-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	238.7149745	2.244895336	1	189.0133645	1.396967177
	2	886.3022915	4.325608423	2	525.5922452	2.779858604
	3	1694.174955	5.980471083	3	1038.054031	4.131377850
	4	2398.815940	7.116307881	4	1727.063322	5.417753572
	5	3289.010272	8.332760147	5	2594.305583	6.556935558
$\mu = \frac{1}{3}$	1	213.5181228	2.123115581	1	205.3535359	2.082127685
	2	289.4566594	2.471997567	2	288.8790381	2.469529855
	3	1571.446420	5.759782118	3	804.9627161	4.122343232
	4	1958.201757	6.429615232	4	1819.256030	6.197309385
	5	2709.375899	7.562944228	5	2104.494036	6.665459836
$\mu = \frac{2}{5}$	1	183.2241110	1.966742840	1	182.7285880	1.964081547
	2	225.1454481	2.180157412	2	225.1237441	2.180052326
	3	1310.140636	5.259145967	3	1226.144519	5.087765625
	4	1453.291109	5.539015423	4	1449.490213	5.531767391
	5	3729.020941	8.872656682	5	2296.281542	6.962558122

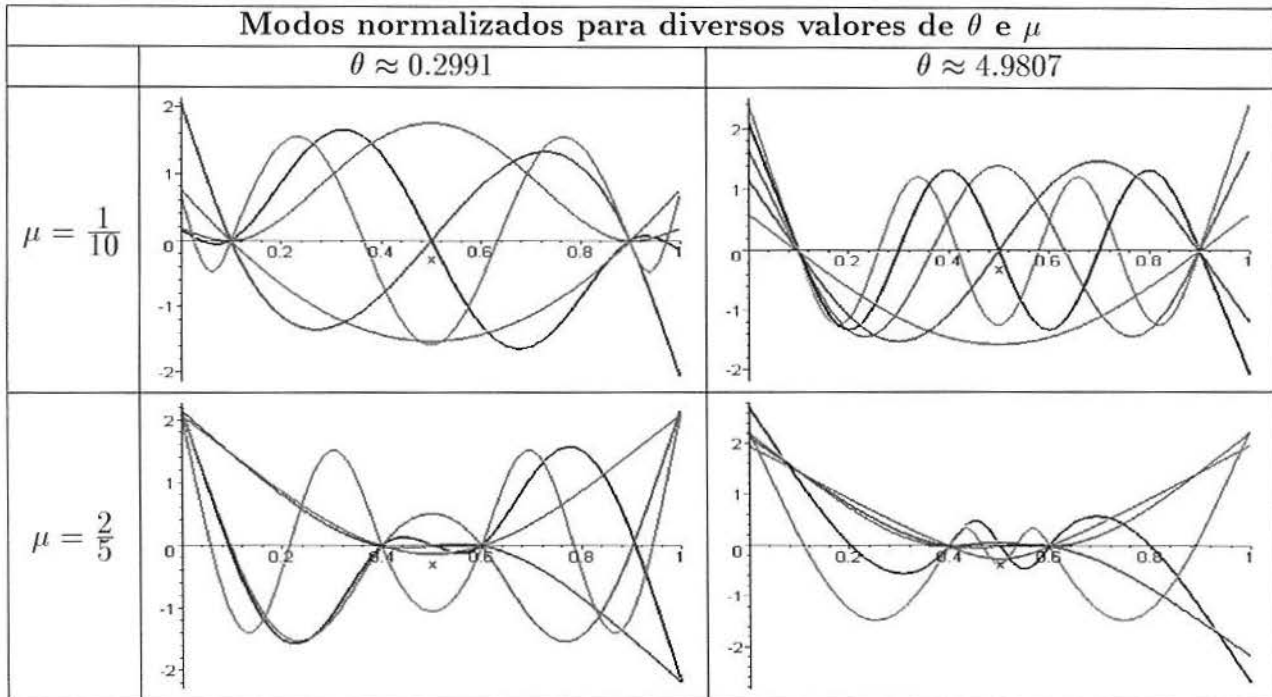


Figura 4.27 Modos da viga trissegmentada livre-livre

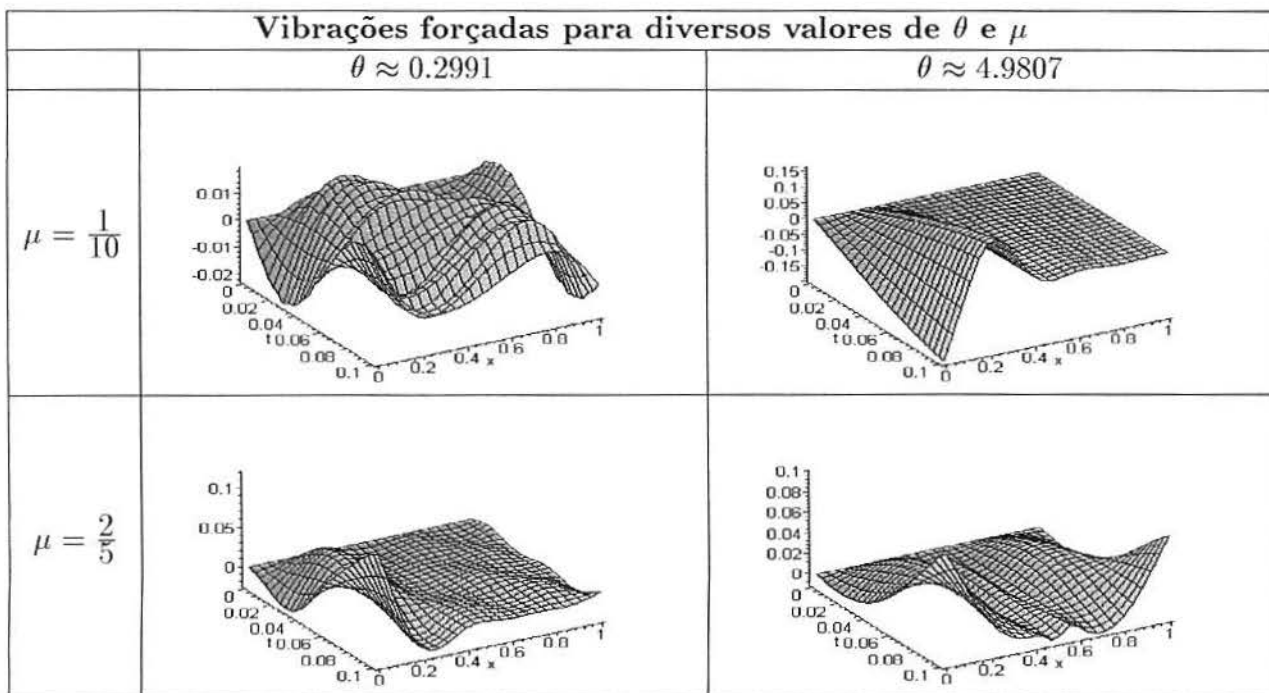


Figura 4.28 Vibrações forçadas da viga trissegmentada livre-livre

Tabela 4.15 Autovalores da viga trissegmentada livre-livre

Autovalores para diversos valores de θ e μ					
		$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
		n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	4.390218144	1	.3942200392	
	2	5.847406483	2	.7884153787	
	3	9.789439828	3	1.182561281	
	4	15.54871092	4	1.576632830	
	5	19.64877298	5	1.970604611	
$\mu = \frac{2}{5}$	1	1.967182748	1	1.502492950	
	2	2.180174851	2	2.156995654	
	3	5.281085441	3	2.350080677	
	4	5.540171009	4	3.307781827	
	5	9.099217414	5	4.753717195	

Na viga trissegmentada livre-livre e com apoio nas descontinuidades, observa-se semelhança entre os modos para os diferentes valores resultantes do parâmetro θ .

Quando $\theta = 0.2991$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem.

Em todos os casos observa-se com clareza as descontinuidades.

5 VIGAS TRISSEGMENTADAS SIMETRICAMENTE DESCONTÍNUAS, COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DIFERENTES

Neste caso, é necessário introduzir três funções de deslocamento, como é mostrado na figura 5.1.

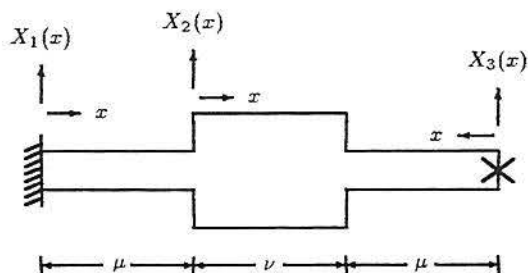


Figura 5.1 *Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno diferentes*

As funções $X_1(x)$ e $X_3(x)$ utilizam as funções de base $\phi_i(x)$ definidas em (2.22), e a função $X_2(x)$ utiliza as funções de base $\psi_i(x)$ definidas em (2.27).

Uma vez determinadas as funções $X_1(x)$, $X_2(x)$ e $X_3(x)$, a solução $X(x)$ da equação modal é dada por

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \mu, \\ X_2(x - \mu), & \text{se } \mu \leq x \leq 1 - \mu \\ X_3(1 - x), & \text{se } 1 - \mu \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

De maneira genérica, as condições de contorno da viga trissegmentada podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} A_{11}X_1(0) + B_{11}X_1'(0) + C_{11}X_1''(0) + D_{11}X_1'''(0) = 0 \\ A_{12}X_1(0) + B_{12}X_1'(0) + C_{12}X_1''(0) + D_{12}X_1'''(0) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

e

$$\begin{cases} A_{21}X_3(0) + B_{21}X_3'(0) + C_{21}X_3''(0) + D_{21}X_3'''(0) = 0 \\ A_{22}X_3(0) + B_{22}X_3'(0) + C_{22}X_3''(0) + D_{22}X_3'''(0) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Lembrando que $\alpha = \left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}\right)^{1/4}$, as condições de continuidade das grandezas físicas na posição de descontinuidade da seção transversal são

Grandeza	Condições 1ª descontinuidade	Condições 2ª descontinuidade
Deslocamento	$X_1(\mu) = X_2(0)$	$X_3(\mu) = X_2(\nu)$
Giro	$X_1'(\mu) = X_2'(0)$	$X_3'(\mu) = -X_2'(\nu)$
Momento Fletor	$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(0)$	$X_3''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$
Força de Cisalhamento	$X_1'''(\mu) = \alpha^4 X_2'''(0)$	$X_3'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$

Tabela 5.1 Condições de Continuidade Física na Posição de Descontinuidade da Seção Transversal

Para as condições de continuidade no primeira descontinuidade, temos

$$\begin{aligned} X_1(\mu) - X_2(0) &= 0 \\ X_1'(\mu) - X_2'(0) &= 0 \\ X_1''(\mu) - \alpha^4 X_2''(0) &= 0 \\ X_1'''(\mu) - \alpha^4 X_2'''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

que origina a matriz

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 \end{bmatrix}$$

Para as condições de continuidade no segunda descontinuidade, temos

$$\begin{aligned} X_3(\mu) - X_2(\nu) &= 0 \\ X'_3(\mu) + X'_2(\nu) &= 0 \\ X''_3(\mu) - \alpha^4 X''_2(\nu) &= 0 \\ X'''_3(\mu) + \alpha^4 X'''_2(\nu) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

que origina a matriz

$$\mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix}$$

Então, formamos a matriz \mathcal{B}

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Agora, formamos a matriz Φ como segue

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi_1(0) & 0 & 0 \\ \Psi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2(0) & 0 \\ 0 & \Psi_2(\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1(\mu) \\ 0 & 0 & \Psi_1(0) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

sendo

$$\Psi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \phi''(x) \\ \phi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \\ \phi'_1(x) & \phi'_2(x) & \phi_3(x) & \phi'_4(x) \\ \phi''_1(x) & \phi''_2(x) & \phi_3(x) & \phi''_4(x) \\ \phi'''_1(x) & \phi'''_2(x) & \phi'''_3(x) & \phi'''_4(x) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e

$$\Psi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \\ \psi''(x) \\ \psi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \\ \psi'_1(x) & \psi'_2(x) & \psi_3(x) & \psi'_4(x) \\ \psi''_1(x) & \psi''_2(x) & \psi_3(x) & \psi''_4(x) \\ \psi'''_1(x) & \psi'''_2(x) & \psi'''_3(x) & \psi'''_4(x) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Então o sistema linear de equações que tem que ser resolvido é

$$\mathbf{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}$$

é o vetor formado a partir das equações

$$X_1(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_1,$$

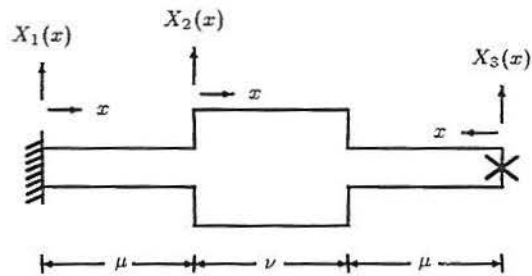
$$X_2(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_2$$

e

$$X_3(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_3.$$

5.1 Sem Apoio na Descontinuidade

5.1.1 Caso 15: Viga Fixa-Apoiada



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x), \text{ onde}$$

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ \rho_2 A_2, & \text{se } \mu < x < 1 - \mu \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_3(0) = X_3''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

1º Apoio

2º Apoio

$$X_1(\mu) = X_2(0)$$

$$X_3(\mu) = X_2(\nu)$$

$$X_1'(\mu) = X_2'(0)$$

$$X_3'(\mu) = -X_2'(\nu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(0)$$

$$X_3''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$$

$$X_1'''(\mu) = \alpha^4 X_2'''(0)$$

$$X_3'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$$

Tabela 5.2 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	25.77150447	3.972626204
2	80.96960650	7.041559142
3	169.5003265	10.18809736
4	287.0063377	13.25725349
5	438.4250083	16.38534071

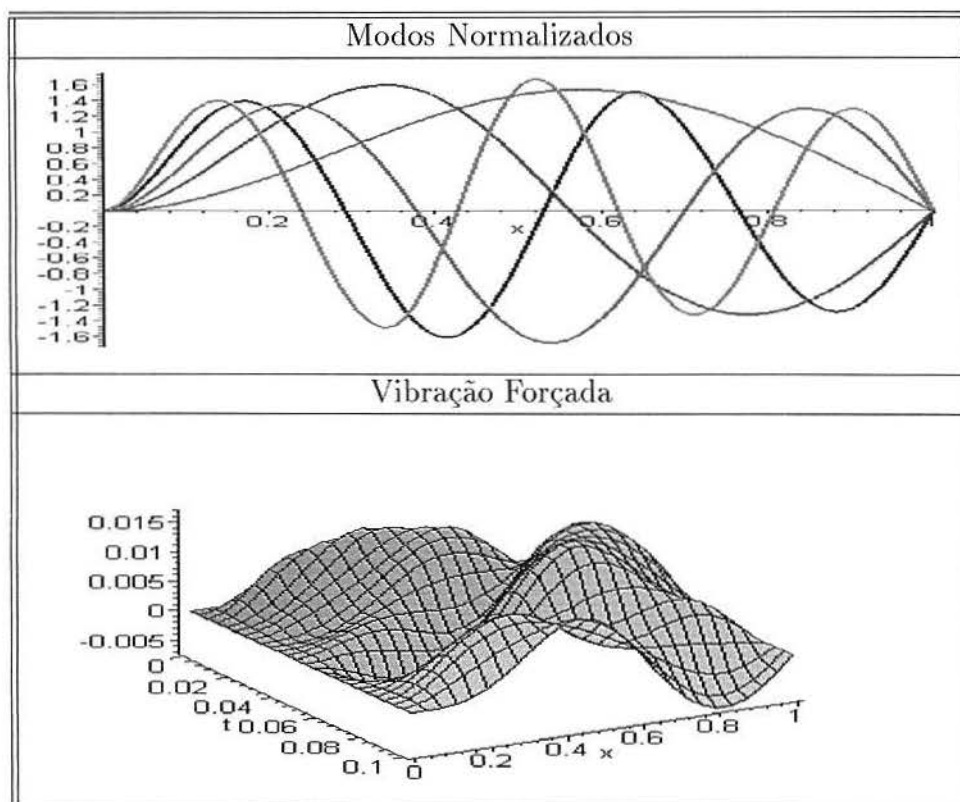


Figura 5.2 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-apoiada

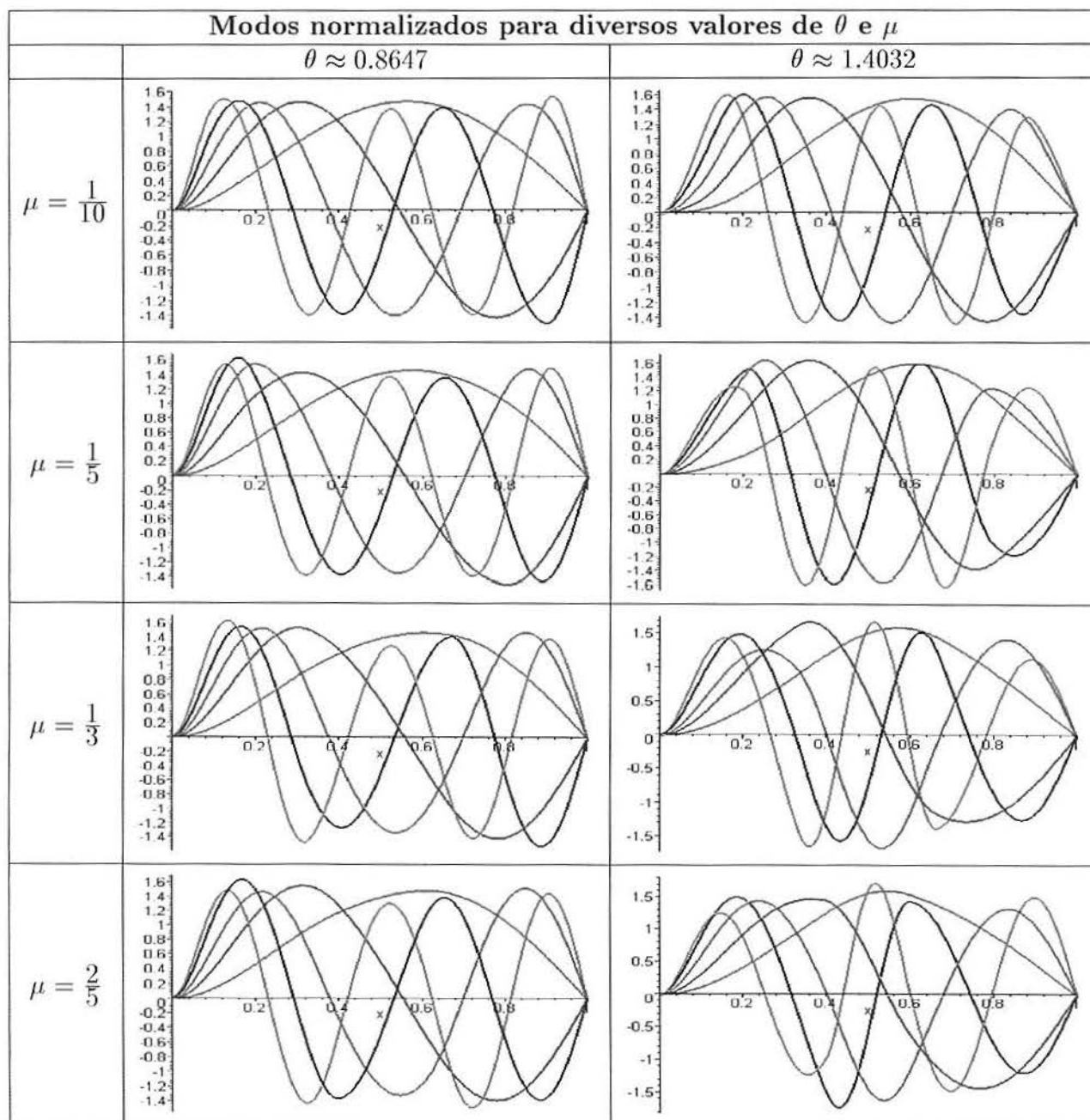


Figura 5.3 Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada

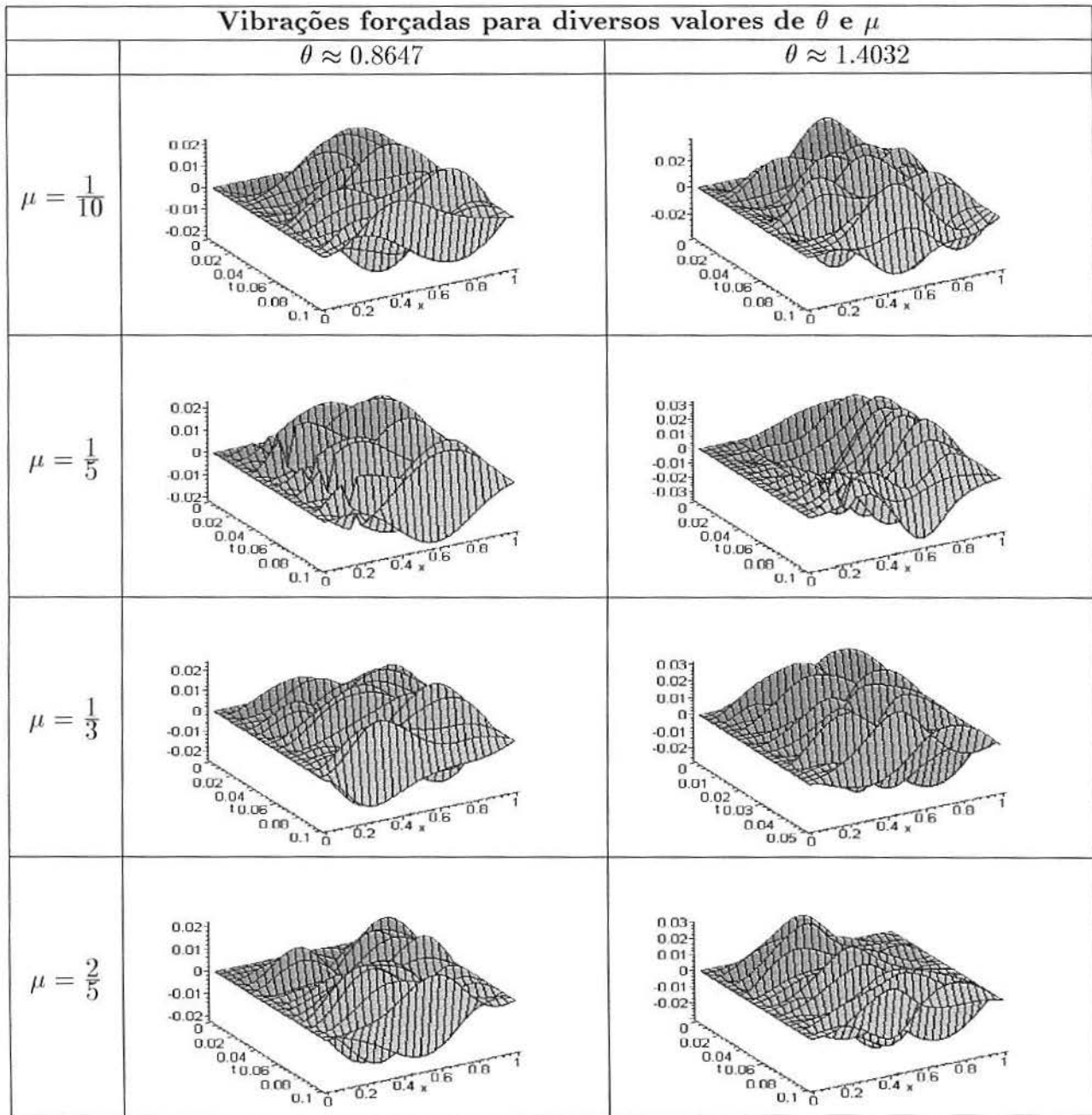


Figura 5.4 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada

Tabela 5.3 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	891.0097273	4.337080557	1	428.7416027	3.008528152
	2	2961.791760	7.907396687	2	1379.197040	5.395968731
	3	6219.938300	11.45906821	3	2856.715145	7.765863180
	4	10606.75731	14.96399596	4	4847.510846	10.11615933
	5	16101.96253	18.43722994	5	7345.802364	12.45305442
$\mu = \frac{1}{3}$	1	808.3619930	4.131038183	1	557.0107000	3.429162258
	2	2505.677031	7.273087495	2	1853.111468	6.254707979
	3	5452.075063	10.72845489	3	4024.395082	9.217360446
	4	9350.123737	14.04963188	4	6480.056839	11.69622391
	5	13957.50228	17.16564473	5	9751.556539	14.34806177
$\mu = \frac{2}{5}$	1	775.0339563	4.044982355	1	590.3188917	3.530202410
	2	2417.719850	7.144292948	2	2144.772795	6.728943974
	3	5325.090875	10.60278068	3	4211.576758	9.429282044
	4	8808.381680	13.63654433	4	7024.357569	12.17754019
	5	13687.65775	16.99890062	5	11360.34536	15.48645566

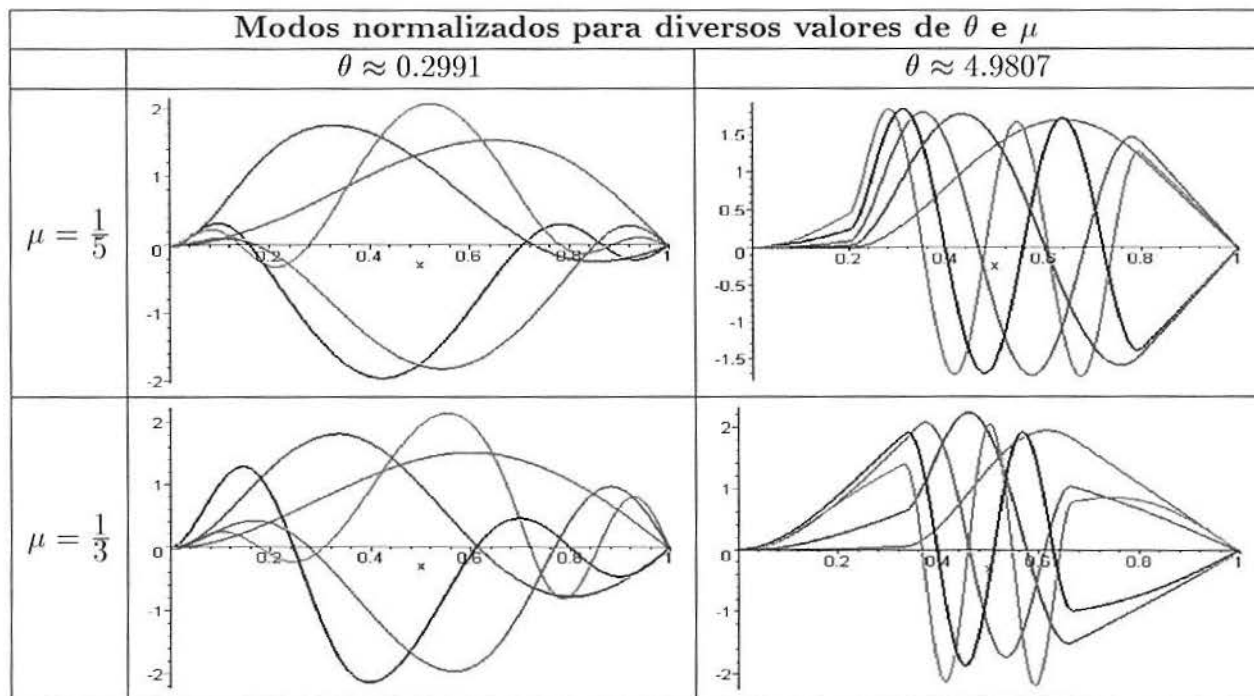


Figura 5.5 Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada

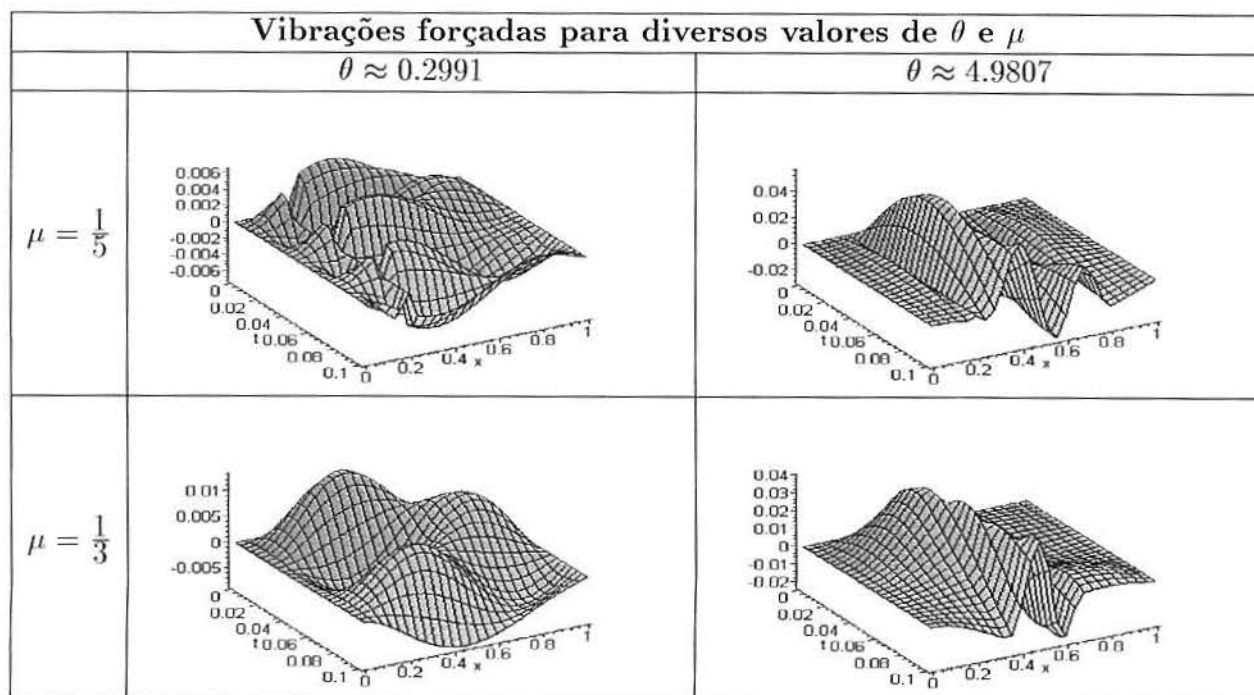


Figura 5.6 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada

Tabela 5.4 Autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{5}$	1	6.424544496	1	1.028479795
	2	10.57011476	2	1.948892185
	3	19.31338103	3	2.914569147
	4	22.93343701	4	3.895493147
	5	26.92902807	5	4.872180976
$\mu = \frac{1}{3}$	1	4.789550183	1	1.503627265
	2	7.694942081	2	3.059873518
	3	13.03301112	3	4.343791575
	4	15.60605238	4	5.551804881
	5	21.91256998	5	7.109794508

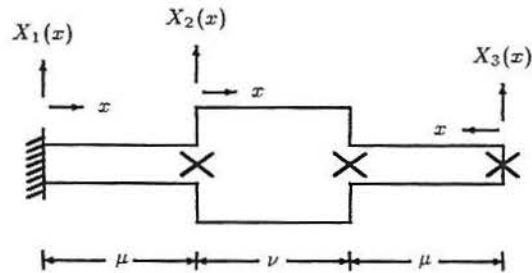
Para a viga trissegmentada fixa-apoiada e sem apoio nas descontinuidades, nos diferentes valores do parâmetro θ observa-se semelhança entre os modos.

Quando $\theta = 0.2991$ e $\theta = 0.8647$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem.

Quando $\theta = 4.9807$ observa-se claramente as descontinuidades.

5.2 Com Apoio na Descontinuidade

5.2.1 Caso 16: Viga Fixa-Apoiada



Equação governante:

$$m_l(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x), \text{ onde}$$

$$m_l(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ \rho_2 A_2, & \text{se } \mu < x < 1 - \mu \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v(t, L) = v_{xx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - \alpha^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_3(0) = X_3''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

1° Apoio	2° Apoio
$X_1(\mu) = 0$	$X_2(\nu) = 0$
$X_2(0) = 0$	$X_3(\mu) = 0$
$X_1'(\mu) = X_2'(0)$	$X_2'(\nu) = -X_3'(\mu)$
$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(0)$	$X_2''(\nu) = \alpha^4 X_3''(\mu)$

Tabela 5.5 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	160.5520026	9.915524235
2	224.8588385	11.73445161
3	298.3641562	13.51702575
4	608.6423947	19.30584952
5	728.7037092	21.12434769

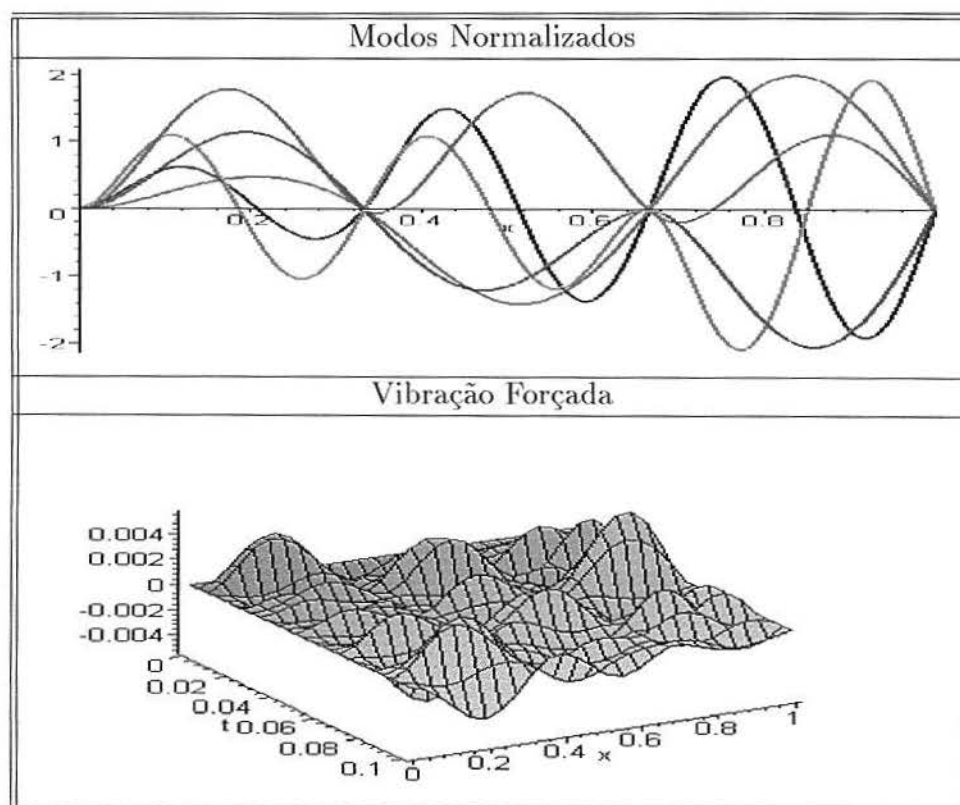


Figura 5.7 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-apoiada

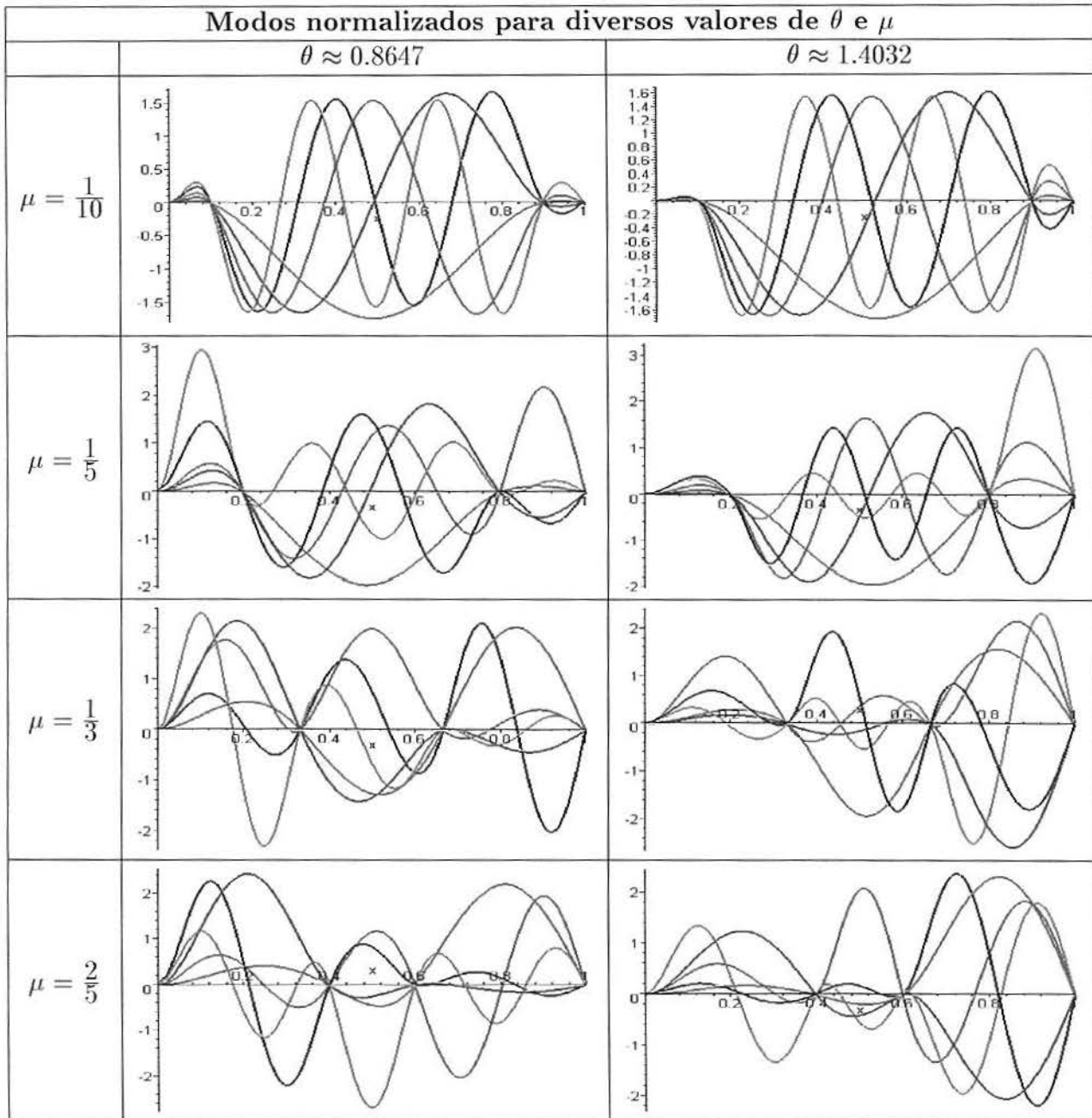


Figura 5.8 Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada

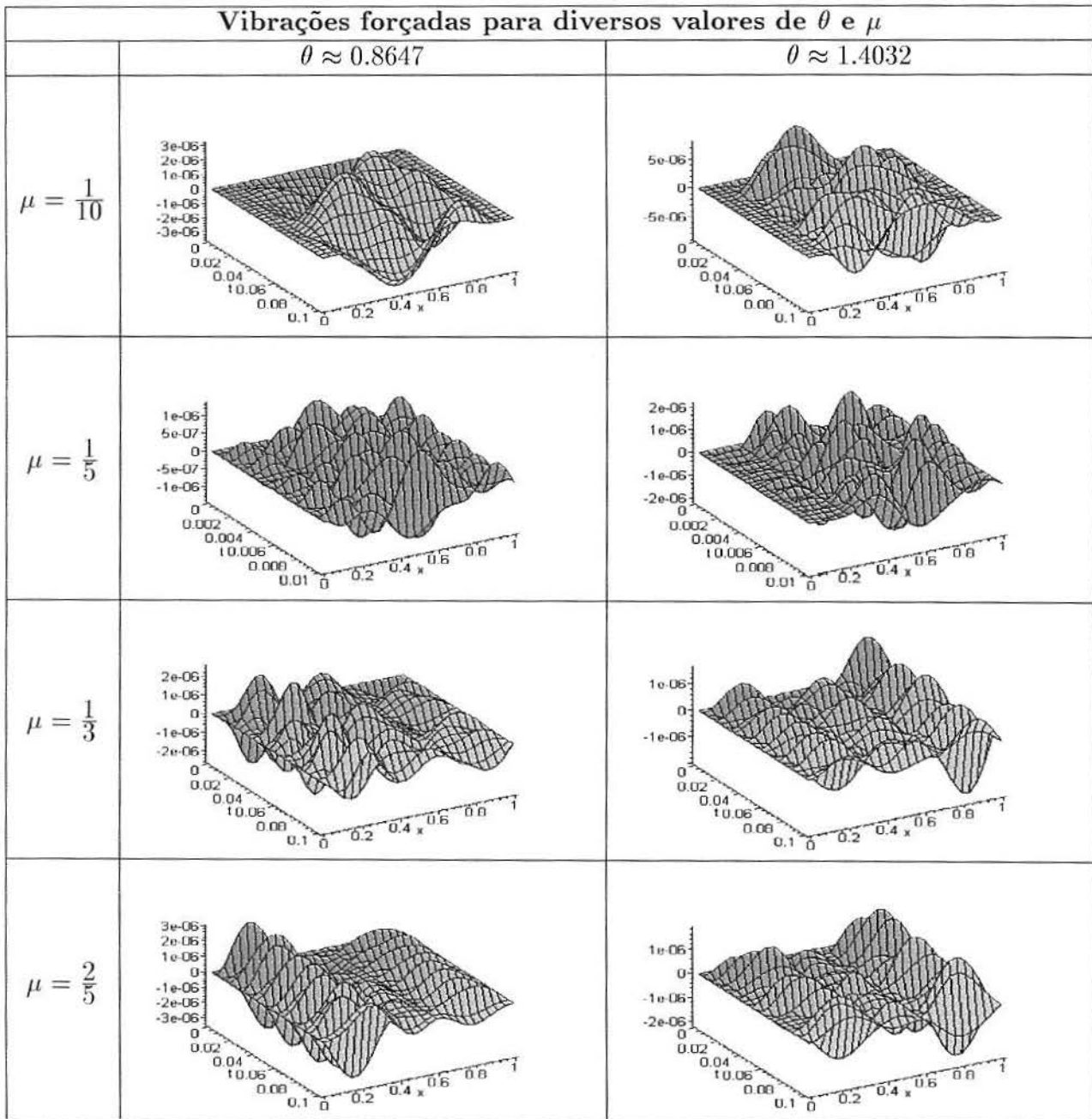


Figura 5.9 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada

Tabela 5.6 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	67456.90177	6.411072848	1	23962.17752	3.821031844
	2	188610.9573	10.72015281	2	69218.18797	6.494229459
	3	373664.0533	15.08892072	3	139527.9250	9.220364379
	4	622228.6784	19.47119151	4	234981.7256	11.96560221
	5	932735.4887	23.83947939	5	355676.0477	14.72125468
$\mu = \frac{1}{3}$	1	158510.0717	9.827565514	1	107072.3460	8.077113314
	2	256442.4223	12.50007019	2	215287.7957	11.45320995
	3	362213.6529	14.85593274	3	247079.2506	12.26974831
	4	620211.8146	19.43960938	4	378153.2385	15.17928896
	5	815445.3227	22.29025000	5	681950.0144	20.38420545
$\mu = \frac{2}{5}$	1	121995.0990	8.621616644	1	146052.0121	9.433466003
	2	206303.1027	11.21167232	2	168772.7570	10.14071761
	3	423829.3773	16.06989520	3	311402.9948	13.77459723
	4	566818.5836	18.58401540	4	501222.0096	17.47561962
	5	819884.0738	22.35083444	5	546070.1126	18.24070922

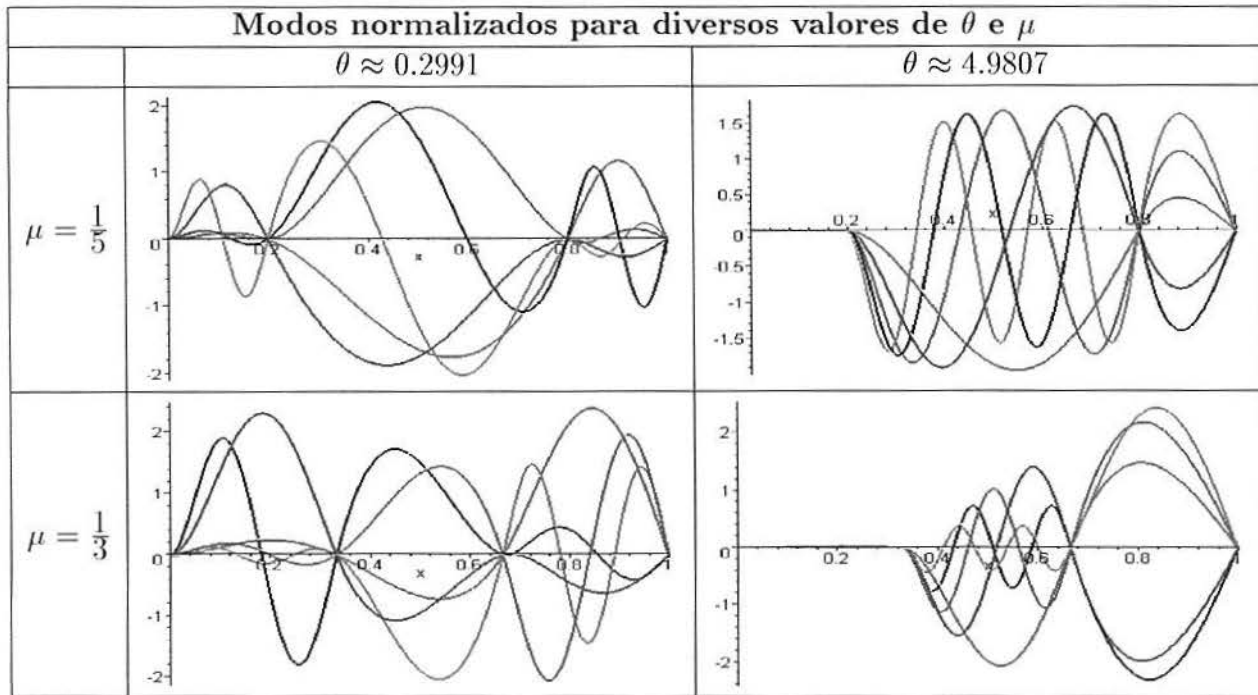


Figura 5.10 Modos da viga trissegmentada fixa-apoiada

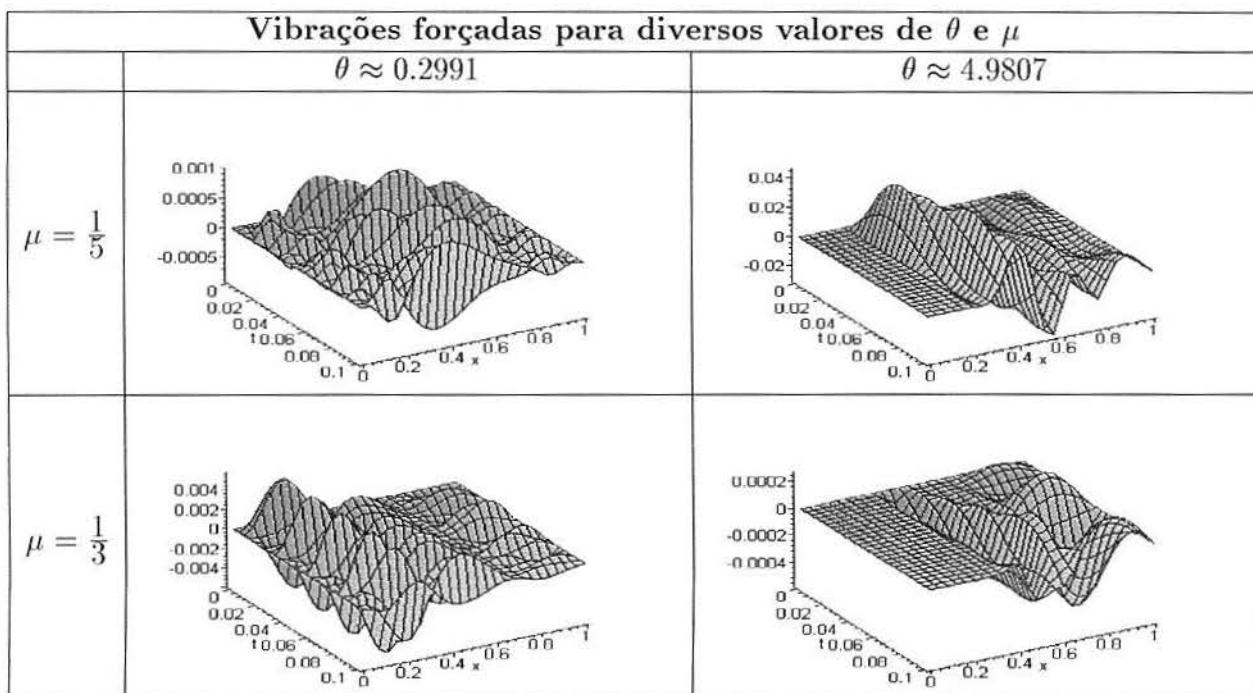


Figura 5.11 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-apoiada

Tabela 5.7 Autovalores da viga trissegmentada fixa-apoiada

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{5}$	1	16.58174006	1	1.314906428
	2	19.86504309	2	2.365394238
	3	24.87671671	3	3.416164293
	4	32.55407349	4	4.467031197
	5	35.70766568	5	5.517938841
$\mu = \frac{1}{3}$	1	10.65381236	1	2.363982651
	2	12.45896931	2	4.254553537
	3	19.71383490	3	6.144976731
	4	21.61459819	4	8.034854196
	5	28.84092254	5	9.922013000

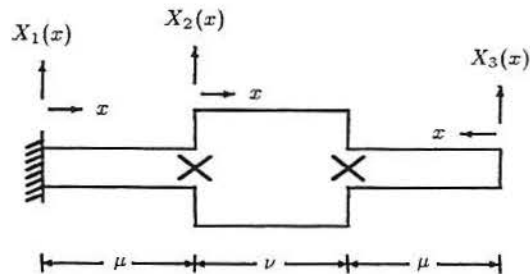
Para a viga trissegmentada fixa-apoiada e com apoio nas descontinuidades, os modos são semelhantes para os diferentes valores do parâmetro θ próximos a 1.

Quando $\theta = 0.2991$ e a descontinuidade μ aumenta, os autovalores decrescem.

Quando $\theta = 4.9807$, o deslocamento no primeiro segmento é reduzido em magnitude.

Em todos os casos observa-se com clareza as descontinuidades.

5.2.2 Caso 17: Viga Fixa-Livre

**Equação governante:**

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x), \text{ onde}$$

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ \rho_2 A_2, & \text{se } \mu < x < 1 - \mu \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_x(t, 0) = 0,$$

$$v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0$$

$$X_3''(0) = X_3'''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

1º Apoio 2º Apoio

$$X_1(\mu) = 0 \qquad X_2(\nu) = 0$$

$$X_2(0) = 0 \qquad X_3(\mu) = 0$$

$$X_1'(\mu) = X_2'(0) \qquad X_2'(\nu) = -X_3'(\mu)$$

$$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(0) \qquad X_2''(\nu) = \alpha^4 X_3''(\mu)$$

Tabela 5.8 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-livre.

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	39.39139209	4.911435912
2	184.0438564	10.61618503
3	268.4371028	12.82121221
4	323.1809634	14.06794632
5	649.7468720	19.94710692

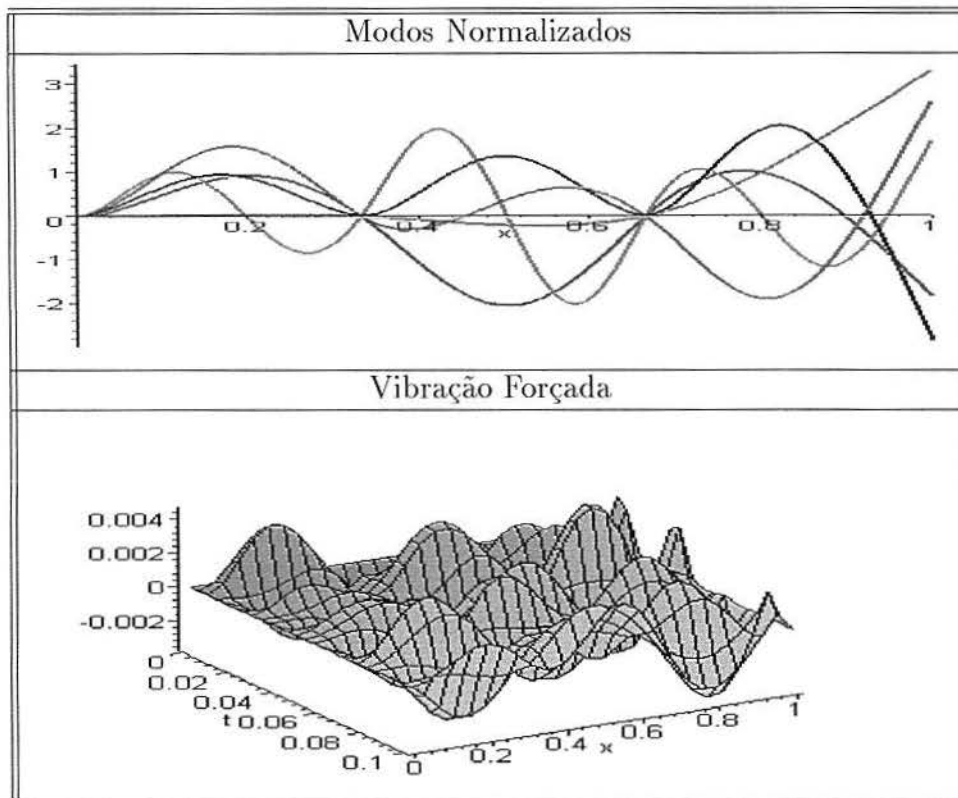


Figura 5.12 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada fixa-livre

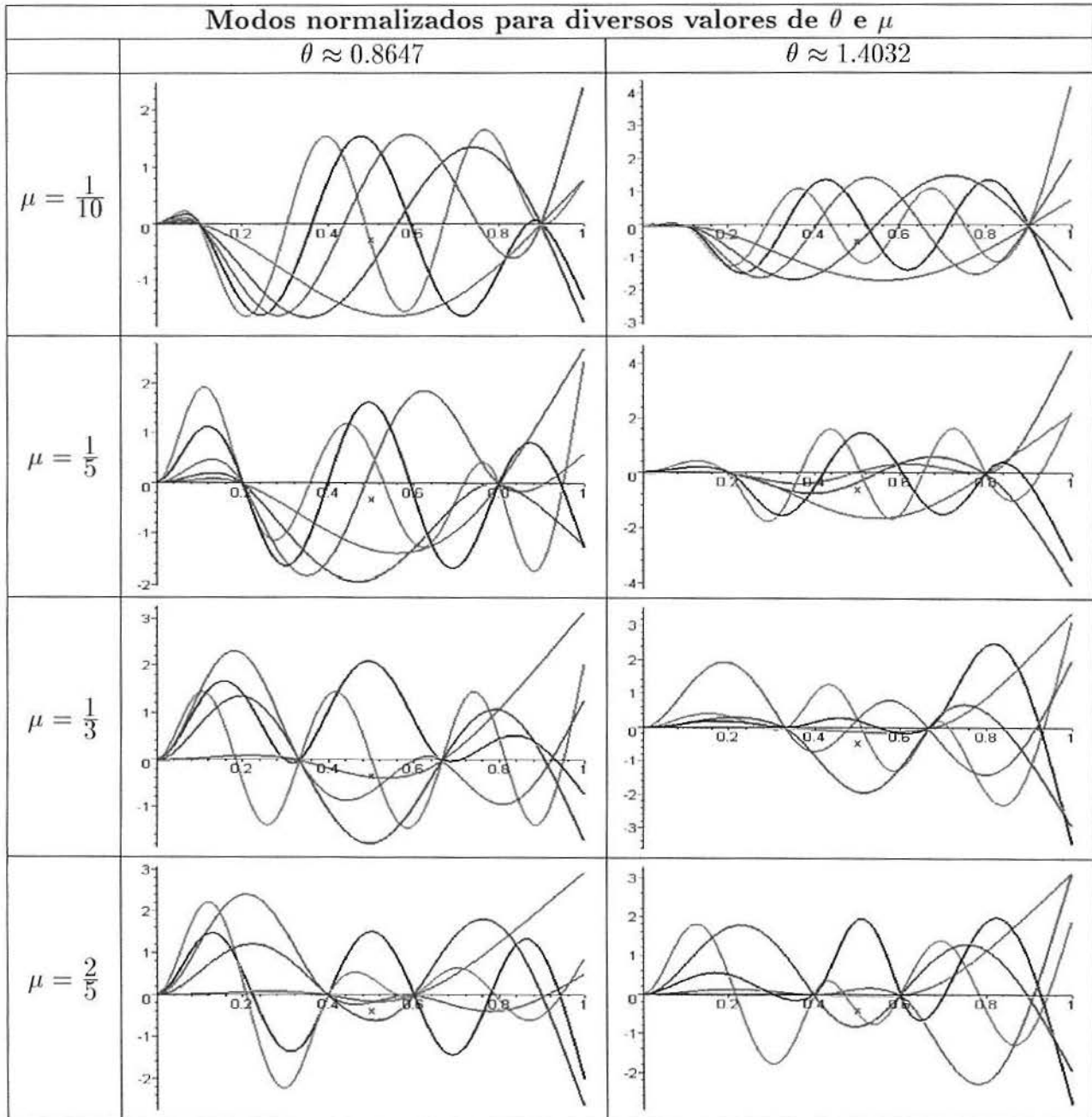


Figura 5.13 Modos da viga trissegmentada fixa-livre

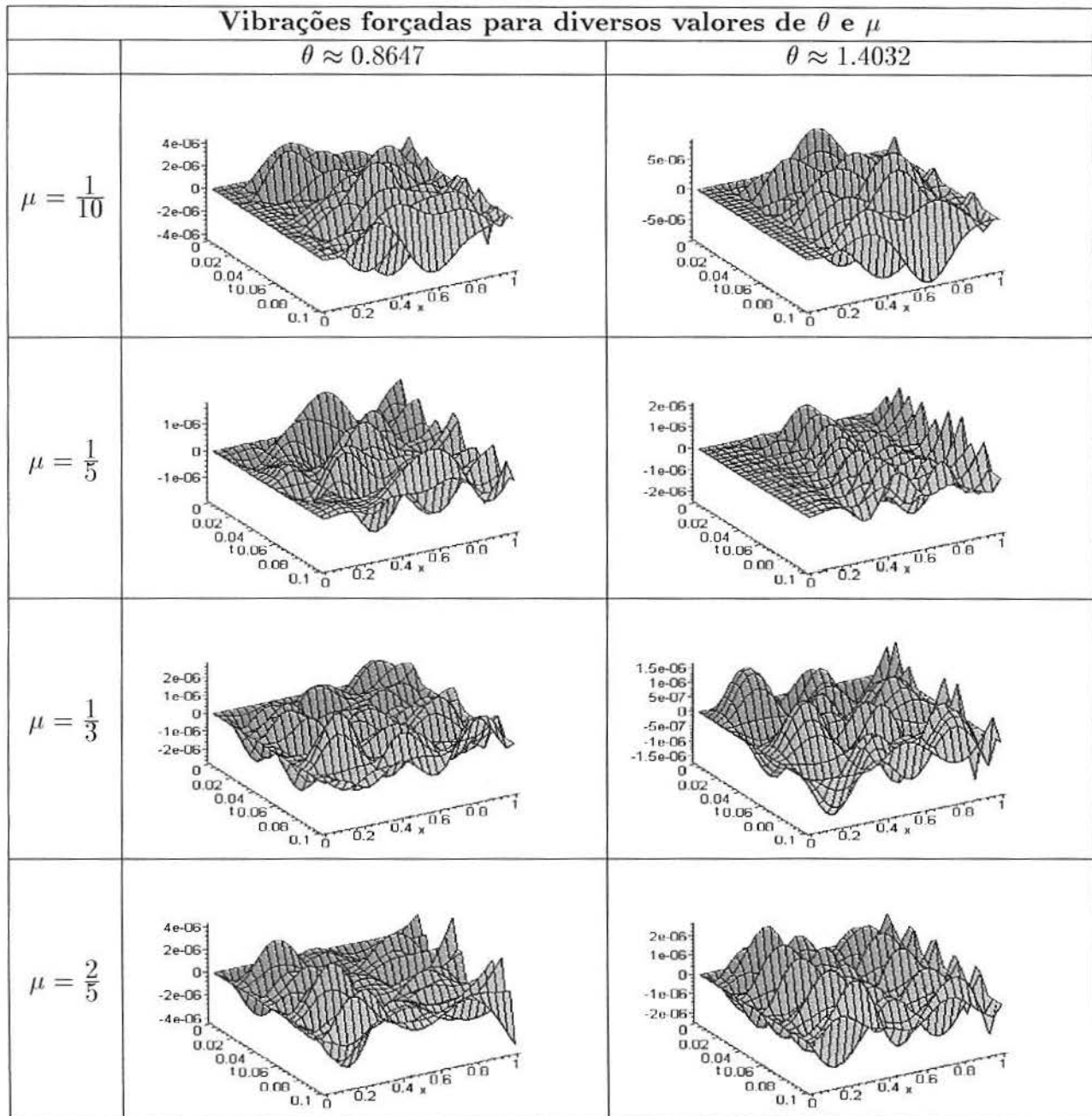


Figura 5.14 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-livre

Tabela 5.9 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada fixa-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	46615.01952	5.329426188	1	19781.77558	3.471763650
	2	139934.5793	9.233790984	2	64040.12724	6.246598743
	3	248582.1593	12.30700833	3	133335.8851	9.013449723
	4	403139.8183	15.67275571	4	227116.7115	11.76364912
	5	640609.1299	19.75668513	5	343336.0922	14.46362810
$\mu = \frac{1}{3}$	1	28423.45490	4.161557976	1	45831.13552	5.284426055
	2	218673.0651	11.54290610	2	110945.8496	8.221916211
	3	274748.2393	12.93853114	3	242028.4707	12.14369203
	4	373801.9270	15.09170420	4	305661.3075	13.64701754
	5	746870.3838	21.33242049	5	387686.8191	15.36943966
$\mu = \frac{2}{5}$	1	24296.97121	3.8476325131	1	33918.02658	4.546035309
	2	177330.5805	10.39463716	2	164622.9314	10.01527046
	3	208662.0695	11.27558989	3	211838.6544	11.36109316
	4	516125.7371	17.73353329	4	319508.5558	13.95271626
	5	578828.3669	18.77986300	5	539648.7596	18.13314390

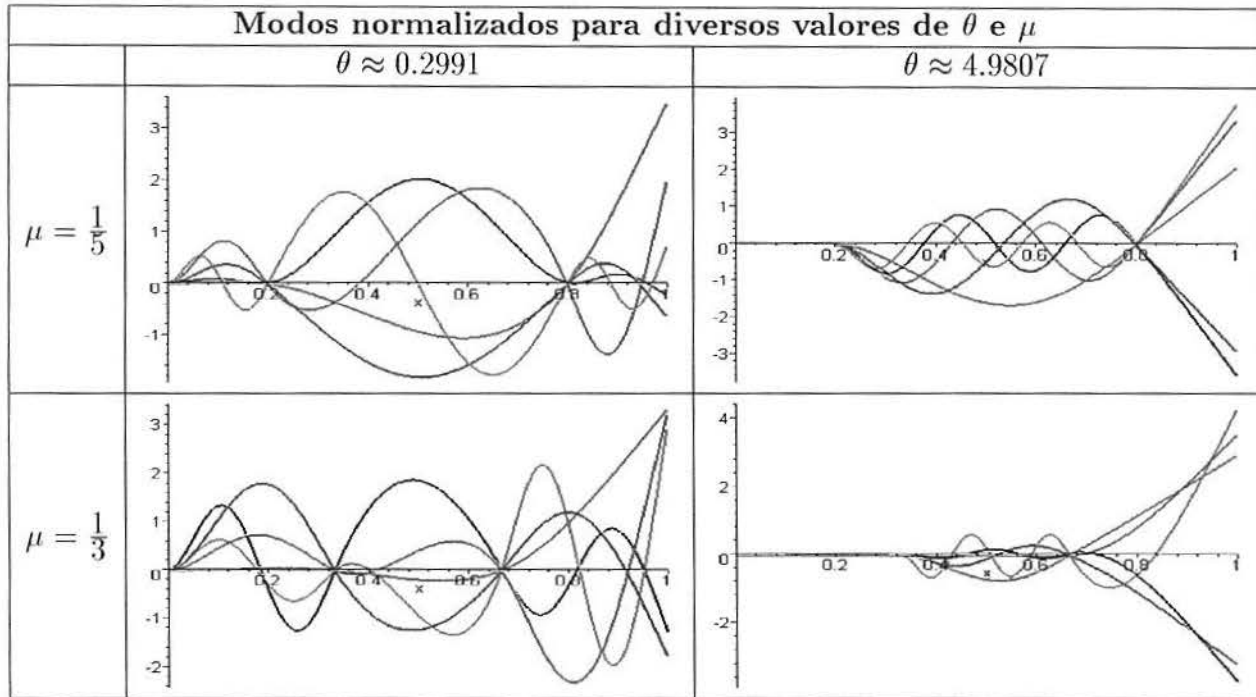


Figura 5.15 Modos da viga trissegmentada fixa-livre

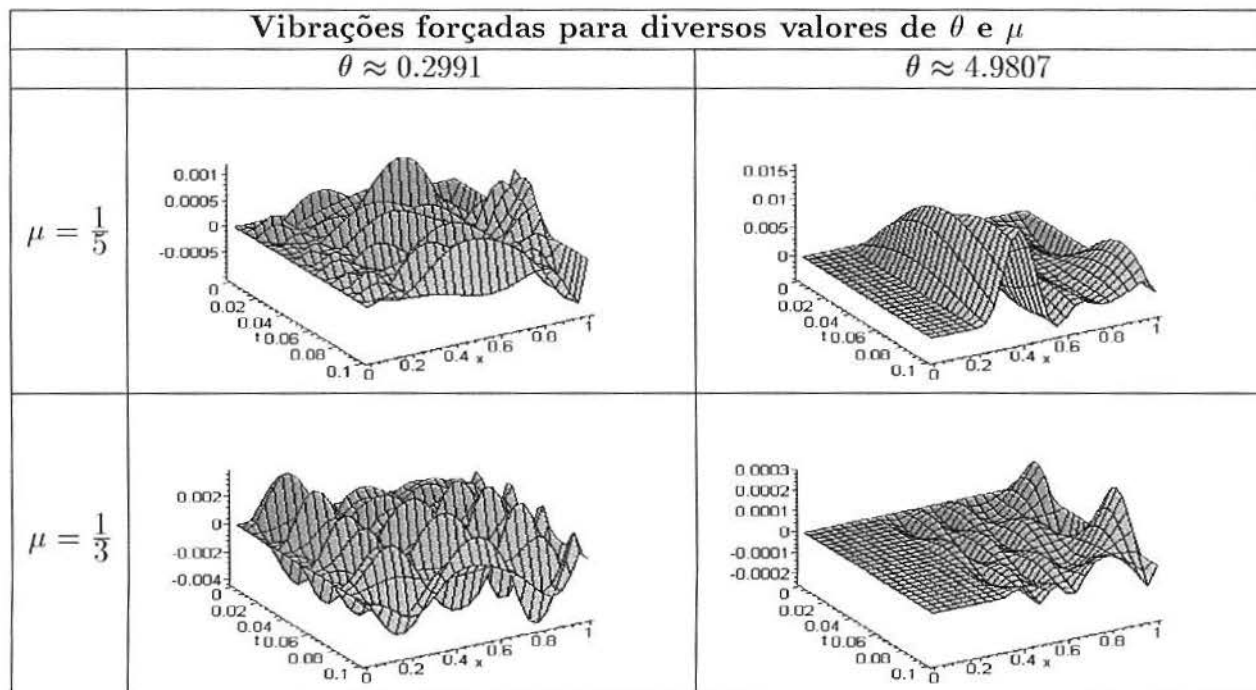


Figura 5.16 Vibrações forçadas da viga trissegmentada fixa-livre

Tabela 5.10 Autovalores da viga trissegmentada fixa-livre

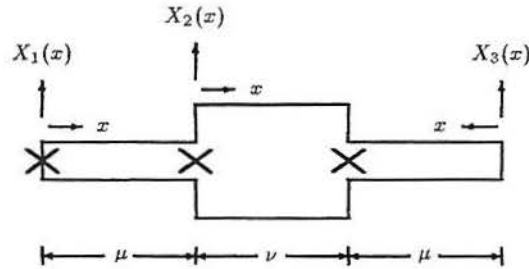
Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{5}$	1	7.114812262	1	1.313594424
	2	19.33828062	2	2.364701542
	3	20.55975477	3	3.415674537
	4	25.41544135	4	4.466639267
	5	35.30642211	5	5.517589832
$\mu = \frac{1}{3}$	1	4.925610927	1	2.363160303
	2	12.28843314	2	4.253876144
	3	13.02806633	3	5.623501715
	4	21.46821023	4	6.145989623
	5	22.14352864	5	8.035068819

Na viga trissegmentada fixa-livre e com apoio nas descontinuidades, os diferentes valores do parâmetro θ próximos a 1, são semelhantes.

Quando $\theta = 4.9807$ se observa rigidez nos modos do primeiro segmento.

Em todos os casos observa-se com clareza as descontinuidades.

5.2.3 Caso 18: Viga Apoiada-Livre



Equação governante:

$$m_i(x)v_{tt}(t, x) + r_f(x)v_{xxxx}(t, x) = f(t, x), \text{ onde}$$

$$m_i(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ \rho_2 A_2, & \text{se } \mu < x < 1 - \mu \end{cases}$$

$$r_f(x) = \begin{cases} E_1 I_1, & \text{se } 0 \leq x < \mu \text{ e } 1 - \mu < x \leq 1 \\ E_2 I_2, & \text{se } 1 - \mu < x < 1 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$v(t, 0) = v_{xx}(t, 0) = 0,$$

$$v_{xx}(t, L) = v_{xxx}(t, L) = 0$$

Equação modal:

$$X_i^{iv}(x) - a^2 \rho_i A_i X_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Condições de contorno:

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0$$

$$X_3''(0) = X_3'''(0) = 0$$

Condições de continuidade:

1º Apoio	2º Apoio
$X_1(\mu) = 0$	$X_2(\nu) = 0$
$X_2(0) = 0$	$X_3(\mu) = 0$
$X_1'(\mu) = X_2'(0)$	$X_2'(\nu) = -X_3'(\mu)$
$X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(0)$	$X_2''(\nu) = \alpha^4 X_3''(\mu)$

Tabela 5.11 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre

Freqüências Naturais e Autovalores		
$\theta = 1.016265496, \quad \mu = 1/3$		
n	ω_n	β_n
1	39.19367543	4.899094455
2	150.8244484	9.610449252
3	223.4592690	11.69787574
4	312.3399350	13.82998072
5	588.2475198	18.97963557

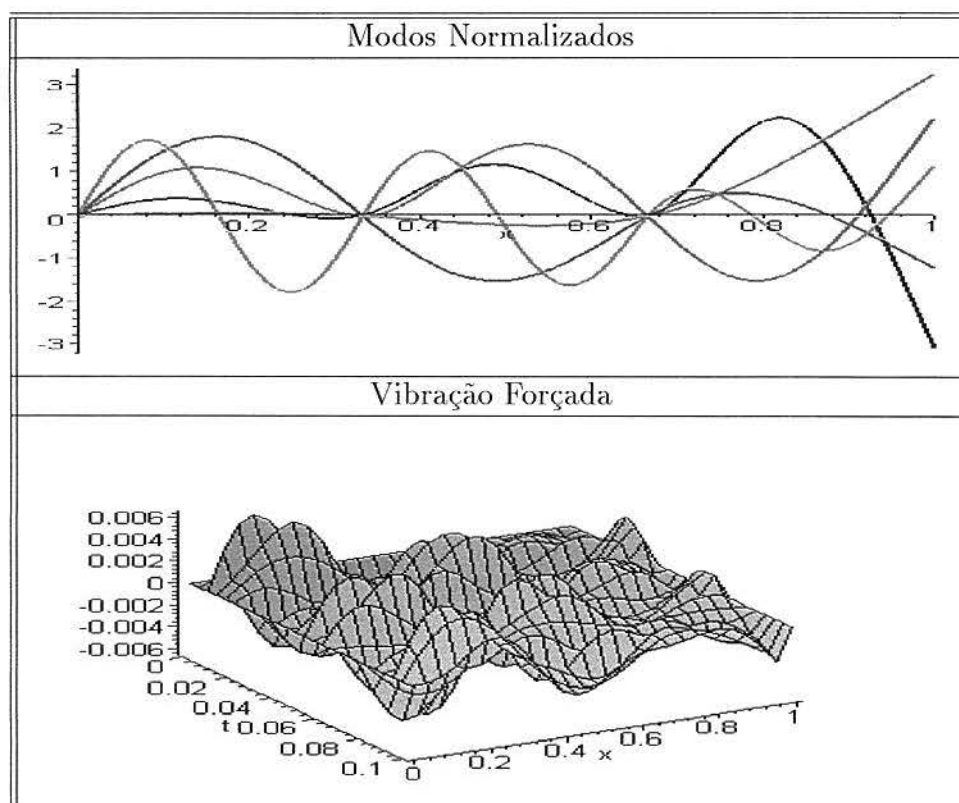


Figura 5.17 Modos normalizados e vibração forçada da viga trissegmentada apoiada-livre

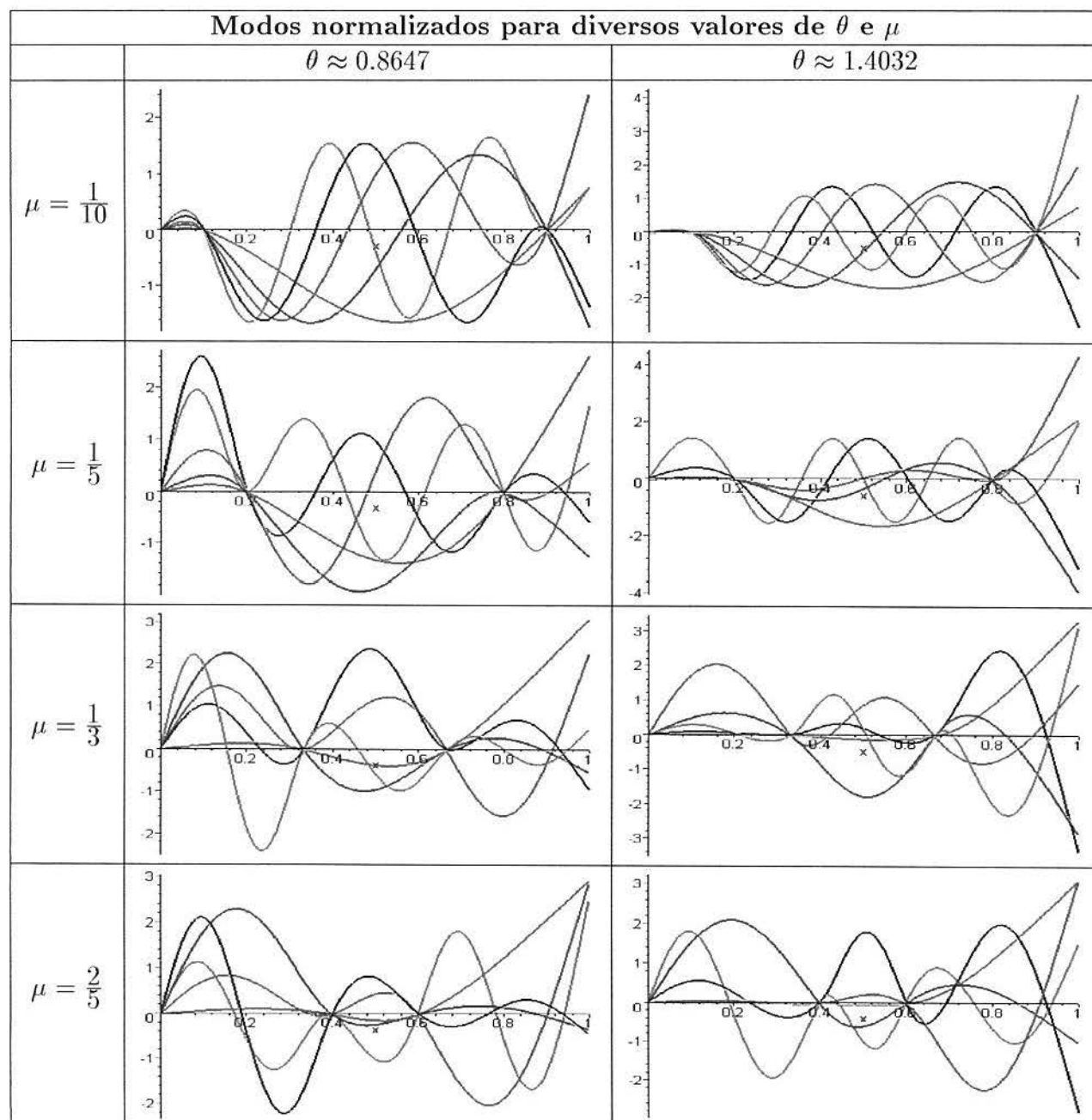


Figura 5.18 Modos da viga trissegmentada apoiada-livre

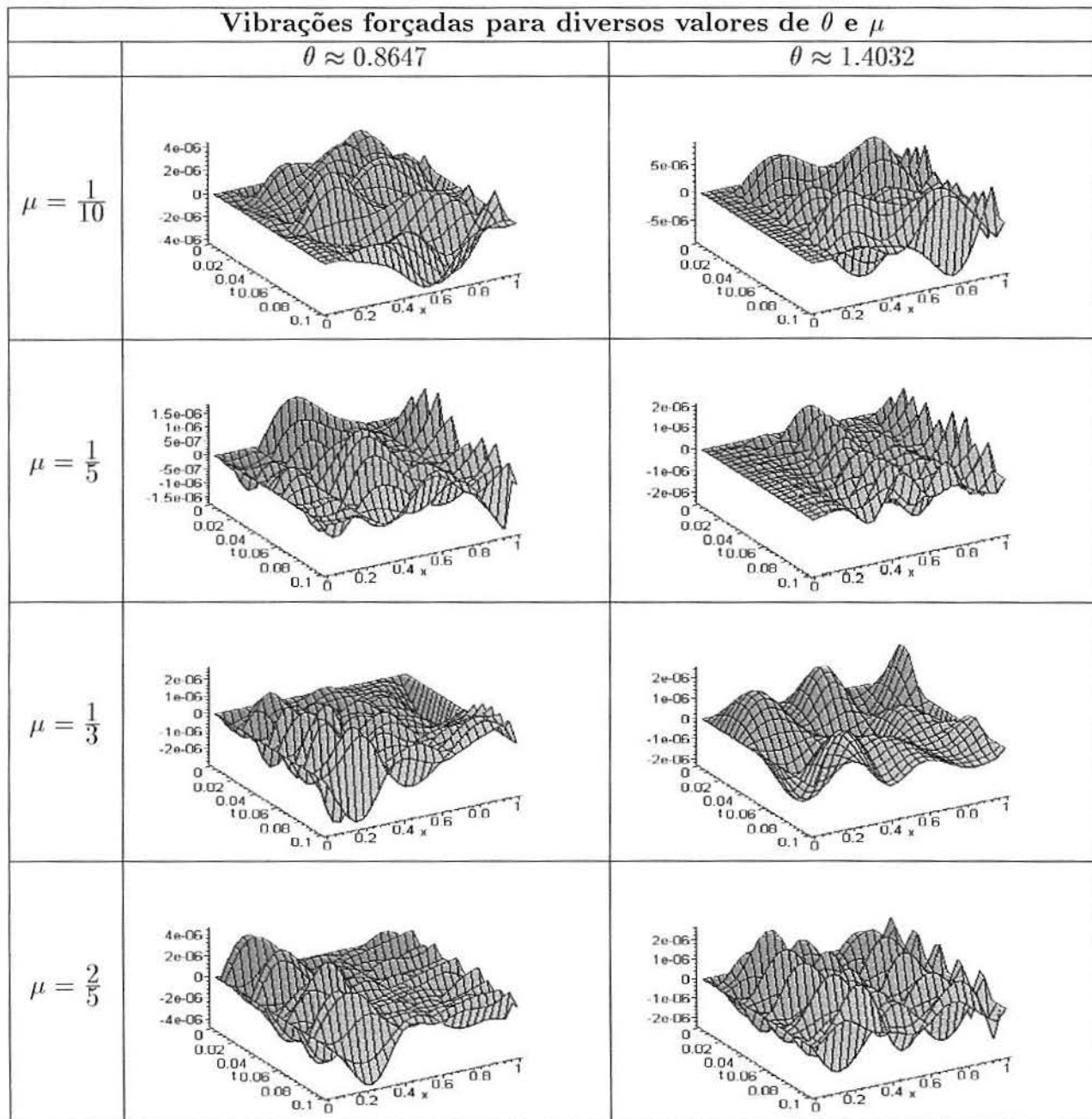


Figura 5.19 Vibrações forçadas da viga trissegmentada apoiada-livre

Tabela 5.12 Freqüências naturais e autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre

Freqüências naturais e autovalores para diversos valores de θ e μ						
	$\theta \approx 0.8647$			$\theta \approx 1.4032$		
	n	ω_n	β_n	n	ω_n	β_n
$\mu = \frac{1}{10}$	1	45598.42774	5.270993134	1	19691.46932	3.463830070
	2	138038.0414	9.171004587	2	63762.74874	6.233056043
	3	246307.4565	12.25057000	3	132785.3893	8.994823836
	4	399110.6650	15.59423889	4	226215.7732	11.74029361
	5	634399.5142	19.66069823	5	342032.2496	14.43613866
$\mu = \frac{1}{3}$	1	28223.15742	4.146868993	1	45714.61305	5.277704137
	2	179869.3881	10.46878173	2	105133.0546	8.003632847
	3	238681.7815	12.05944030	3	169725.4313	10.16929807
	4	349923.3945	14.60171965	4	302426.8179	13.57461954
	5	666240.7448	20.14805422	5	379415.4447	15.20460070
$\mu = \frac{2}{5}$	1	24199.30361	3.839891478	1	33874.22921	4.543099278
	2	140037.7951	9.237195781	2	111244.2144	8.232964316
	3	181431.6488	10.51414689	3	209603.2280	11.30099024
	4	455132.2552	16.65276387	4	307047.5714	13.67792915
	5	534620.3682	18.04846480	5	441630.7486	16.40390208

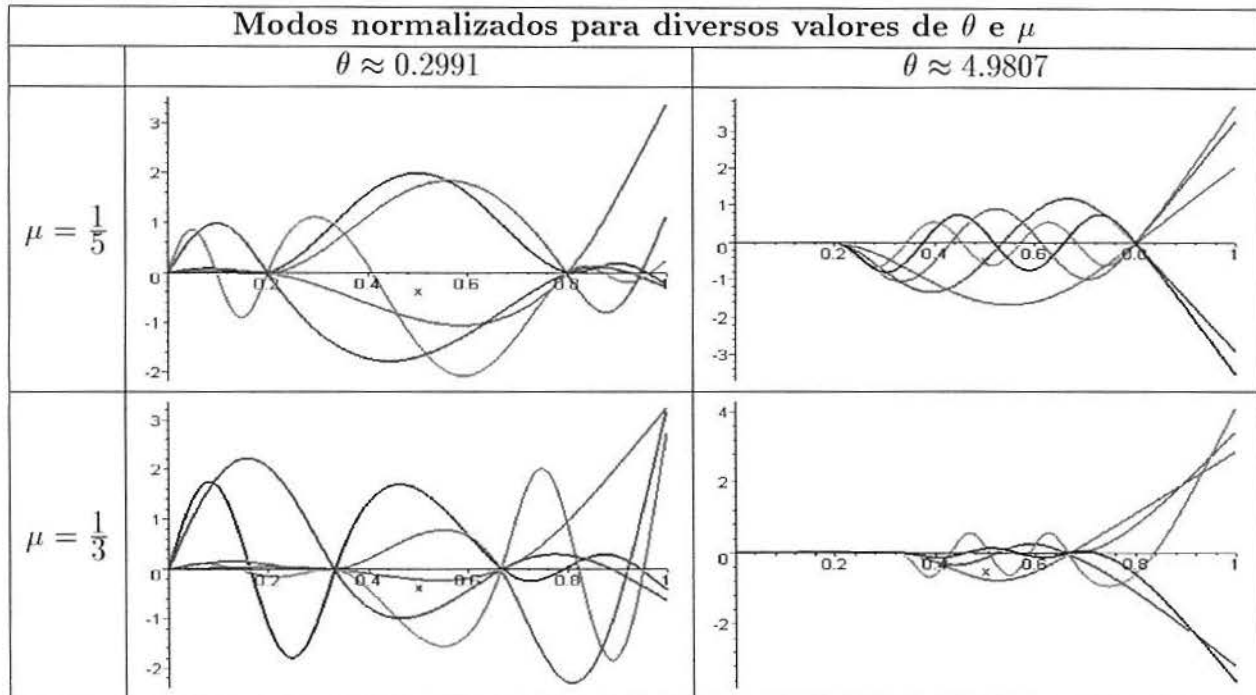


Figura 5.20 Modos da viga trissegmentada apoiada-livre

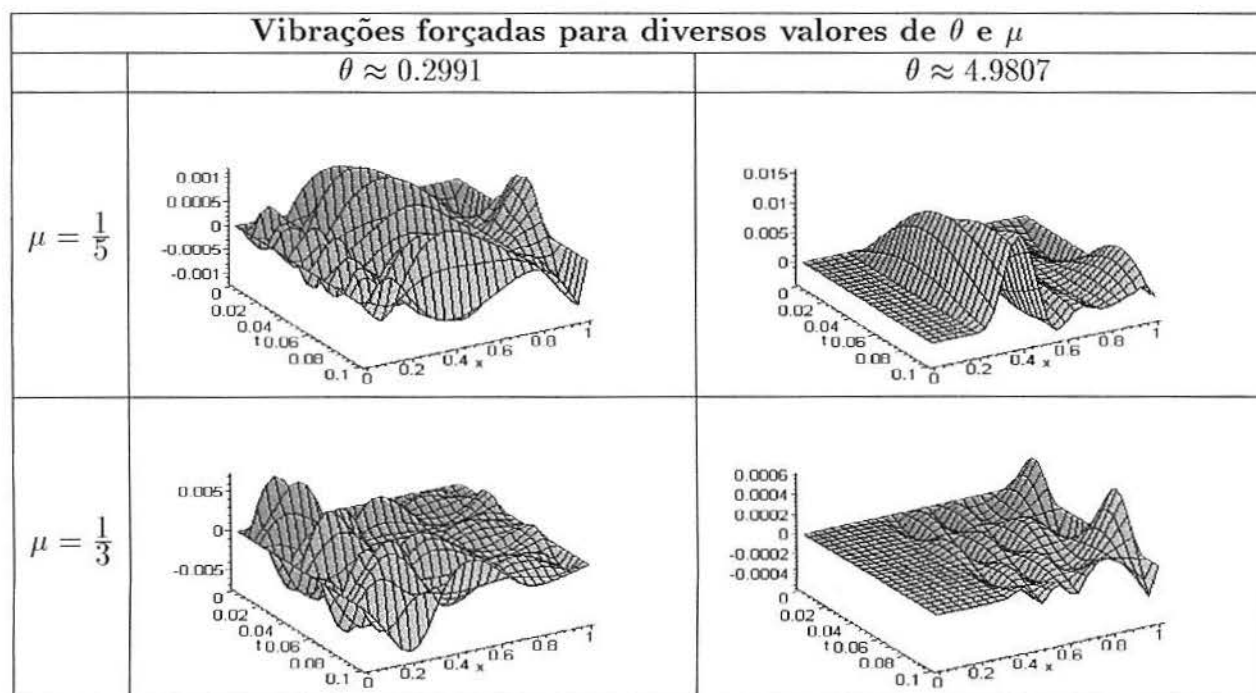


Figura 5.21 Vibrações forçadas da viga trissegmentada apoiada-livre

Tabela 5.13 Autovalores da viga trissegmentada apoiada-livre

Autovalores para diversos valores de θ e μ				
	$\theta \approx 0.2991$		$\theta \approx 4.9807$	
	n	β_n	n	β_n
$\mu = \frac{1}{5}$	1	7.099286653	1	2.226079762
	2	16.08565060	2	4.176908759
	3	20.09450678	3	7.124773887
	4	25.13857456	4	8.816688260
	5	31.92850406	5	11.04916082
$\mu = \frac{1}{3}$	1	4.914424584	1	2.362521273
	2	10.11257780	2	4.252653260
	3	12.91865775	3	5.623496426
	4	19.25842223	4	6.143703024
	5	22.04382952	5	8.028242353

Na viga trissegmentada apoiada-livre e com apoio nas descontinuidades, para os diferentes valores do parâmetro θ próximos a 1, os modos são semelhantes.

Quando $\theta = 4.9807$ se observa rigidez nos modos do primeiro segmento.

Em todos os casos, se observa com clareza a descontinuidade.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho visou a implementação computacional, com o auxílio do software simbólico MapleV5, do cálculo simbólico dos modos normalizados de vigas bissegmentadas e trisegmentadas com propriedades descontínuas na seção transversal, bem como do cálculo numérico dos autovalores e das frequências características para diversas condições de contorno e diversos materiais físicos.

Por meio da aplicação do modelo de Euler-Bernoulli, foi possível determinar os modos de vibração dessas estruturas. Também foi determinada a vibração forçada aplicando uma força pontual harmônica.

Os modos normalizados foram obtidos através do uso da base espectral clássica. Para a sua determinação utilizou-se a fatoração LU, sendo possível a obtenção da equação característica e os autovalores correspondentes (raízes de tal equação). Para a obtenção da vibração forçada, utilizou-se o método de Fourier generalizado.

Após efetuada a análise dos autovalores calculados para os diversos tipos de vigas bissegmentadas e trisegmentadas, podem-se concluir os seguintes fatos:

- mantendo fixos os parâmetros físicos, exceto E_2 e ρ_2 , quanto menor o valor do parâmetro de comparação θ , maior o valor do autovalor e, portanto, maior a frequência característica.
- similarmente, com as mesmas restrições mencionadas acima, para valores maiores de θ , menores são os autovalores.
- quando o parâmetro θ é muito grande e a posição da descontinuidade μ aumenta, os autovalores exibem um comportamento crescente, em todos os casos estudados.

- quando o parâmetro θ é muito pequeno e a posição da descontinuidade μ aumenta, os autovalores exibem um comportamento decrescente com relação à descontinuidade μ , em todos os casos estudados, exceto no caso 5 (ver tabela).
- quando o parâmetro θ é um pouco menor que 1 e a posição da descontinuidade μ aumenta, os autovalores exibem os mais variados comportamentos: decrescente, nos casos 2, 3, 4, 10, 14, 15, 17 e 18; crescente, nos casos 5 e 9, com relação à descontinuidade μ .
- quando o parâmetro θ é um pouco maior que 1 e a posição da descontinuidade μ aumenta, os autovalores exibem os seguintes comportamentos: crescente nos casos 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15 e 16.

Mediante a observação dos gráficos dos diversos casos de vigas estudados, podem ser feitas as seguintes afirmações

- quando o parâmetro θ é muito grande, o deslocamento no primeiro segmento é reduzido em magnitude.
- quando o parâmetro θ é muito pequeno, o deslocamento no primeiro segmento aumenta em magnitude.
- quando o parâmetro θ está bem próximo de 1, os gráficos dos modos das vigas bissegmentadas e as trissegmentadas sem apoio na descontinuidade se assemelham mais com aqueles apresentados por Moschen, 1999.
- quando o parâmetro θ está bem próximo de 1, os gráficos dos modos das vigas trissegmentadas com apoio na descontinuidade se assemelham com aqueles apresentados por Pasin, 2001.

Para dar continuidade ao estudo das vigas com propriedades descontínuas na seção transversal, podem ser incluídas outras condições de contorno (condições

não clássicas), outras bases de funções para a geração dos modos, e a inclusão de forças laterais e axiais na viga. Também poderão ser abordados outros modelos de vigas tais como o de Timoshenko e de Vlasov.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balthazar, J. M., 1999, “Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences”, Ed. J. Balthazar, T. Gonçalves, J. Claeysen, Vol 2, Vibrations with Measurements and Control, pp. 122-135.

Claeysen, J., 1990. “On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(1), pp. 73-84.

Claeysen, J., Tsukazan, T, 1990. “Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations”, **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. XLVIII, nº 1.

Claeysen, J., Canahualpa, G., Jung, C., 1999. “A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations”, **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30.

Claeysen, J., Moschen, I., 2000. “Computing Euler-Bernoulli Modes with the Dynamical Impulse Response”. **III Panamerican Workshop on Applied and Computational Mathematics**.

Clough, R., Penzien, J., 1993. “**Dynamics of Structures**”, McGraw-Hill, New York.

Cudney, H. H., Inman, D. J., 1989. “ Determining Damping Mechanisms in a Composite Beam”, **International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis**, vol 4., no. 4, pp 138-143.

Cowper, G. R., 1966. “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 33, pp. 335-340.

Dimarogonas, A. D., 1976. “**Vibration Engineering**”, West Publishing, USA.

Durig, J.R., 1999. **“Vibrational Spectra and Structure: Equilibrium Structural Parameters”**, J. R. Durig Editor.

Gorman, D. J., 1975. **“Free Vibration Analysis of Beams and Shafts”**, John Wiley & Sons, New York.

Inman, D., 1989. **“Vibration, with Control, Measurement, and Stability”**, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Inman, D., 1994. **“Engineering Vibration”**, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Jennings, A. C., 1980. **“Matrix Computations for Engineers and Scientists”**, John Wiley & Sons, New York.

Meirovitch, L., 1975. **“Elements of Vibration Analysis”**, Mc Graw - Hill, Inc., New York.

Moschen, I., 1999. **“Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas”**, **Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp.**

Nashif, A. D., Jones, D. I., 1985. **“Vibration Damping”**, John Wiley and Sons, New York.

Newland, D. E., 1989. **“Mechanical Vibration Analysis and Computation”**, Longman Scientific & Technical, London.

Pasin, E., 2001. **“Cálculo dos Modos de Vibração no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli para Vigas Homogêneas Bissegmentadas”**, **Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp.**

Pasin, E., Tsukazan, T, Suazo, G., 2001. **“Vibrações e Modos em Vigas Segmentadas”**, Anais da Primeira Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle - EESC/USP - São Carlos.

Pilkey, W. D., 1994. **“Formulas for Strain, Stress and Structural Matrices”**, John Wiley & Sons, New York.

Soder, R. A., 2000. “Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial”, **Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAP.**

Timoshenko, S. P., Weaver, W. Jr., 1974, **“Vibration Problems in Engineering”**, John Wiley, New York.

APÊNDICE A EXEMPLO DE UM PROGRAMA

O presente trabalho constou na elaboração e execução de 450 programas. Destes programas, 274 resultados são apresentados. Seus cálculos foram efetuados de maneira simbólica, com o auxílio do software MAPLEV5.

A seguir, apresenta-se um exemplo de um programa desenvolvido para vigas descontínuas bissegmentadas.

Primeiro Caso: Viga FIXA - LIVRE (bissegmentada sem apoio na descontinuidade).

```

> restart:
> with(linalg):
> # Condições de contorno do lado esquerdo (fixo) A11:=1;B11:=0;C11:=0;D11:=0;
A12:=0;B12:=1;C12:=0;D12:=0;
> A1:=matrix(2,4,[A11,B11,C11,D11,A12,B12,C12,D12]);
> # Condições de contorno do lado direito (livre) A21:=0;B21:=0;C21:=1;D21:=0;
A22:=0;B22:=0;C22:=0;D22:=1;
> A2:=matrix(2,4,[A21,B21,C21,D21,A22,B22,C22,D22]);
> I4:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]);
> B2:=matrix(4,4,[-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,-alpha^4,0,0,0,0,alpha^4]);
> B3:=matrix(2,4,0);
> B4:=matrix(4,4,0); # matriz associada a base
> B:=blockmatrix(3,4,[A1,B3,B3,B3,B4,I4,B2,B4,B3,B3,B3,A2]);
> phi11:=x->sin(epsilon1*x);
> phi12:=x->cos(epsilon1*x);
> phi13:=x->sinh(epsilon1*x);
> phi14:=x->cosh(epsilon1*x);
> phi21:=unapply(diff(phi11(x),x),x);
> phi22:=unapply(diff(phi12(x),x),x);
> phi23:=unapply(diff(phi13(x),x),x);
> phi24:=unapply(diff(phi14(x),x),x);
> phi31:=unapply(diff(phi11(x),x$2),x);
> phi32:=unapply(diff(phi12(x),x$2),x);
> phi33:=unapply(diff(phi13(x),x$2),x);
> phi34:=unapply(diff(phi14(x),x$2),x);
> phi41:=unapply(diff(phi11(x),x$3),x);
> phi42:=unapply(diff(phi12(x),x$3),x);
> phi43:=unapply(diff(phi13(x),x$3),x);
> phi44:=unapply(diff(phi14(x),x$3),x);
> Phi1:=matrix(4,4,[phi11(0),phi12(0),phi13(0),phi14(0),
phi21(0),phi22(0),phi23(0),phi24(0),
phi31(0),phi32(0),phi33(0),phi34(0),
phi41(0),phi42(0),phi43(0),phi44(0)]);
> Phi2:=matrix(4,4,[phi11(mu),phi12(mu),phi13(mu),phi14(mu),
phi21(mu),phi22(mu),phi23(mu),phi24(mu),
phi31(mu),phi32(mu),phi33(mu),phi34(mu),
phi41(mu),phi42(mu),phi43(mu),phi44(mu)]);

```