UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

SOLUÇÕES FRACAS PARA AS EQUAÇÕES QUE DESCREVEM O MOVIMENTO DE UM MEIO GRANULAR

por

MARCIA ADRIANA DE OLIVEIRA CEREZER

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Diaz Rodrigues
Co-orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria, março de 2002.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

CEREZER, Marcia Adriana de Oliveira; Soluções fracas para as equações que descrevem o movimento de um meio granular 50 p.: il. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002. Orientador: RODRIGUES, Luis Alberto Diaz

Agradecimentos

A Deus, pela vida, saúde e presença em todos os momentos.

Ao meu co-orientador, Professor Doutor João Paulo Lukaszczyk, pela compreensão, competência, empenho e disponibilidade em todas as fases deste trabalho.

Ao Professor Doutor Luiz Alberto Diaz Rodrigues pela sua tarefa de orientador.

À minha família, meus pais, meu esposo, pelo carinho e incentivo na realização deste trabalho.

Às colegas do PPGMAp pelo companheirismo.

Aos professores do Departamento de Matemática, pelo convívio e troca de experiências.

Ao corpo docente e à coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.

Dedico este trabalho aos meus pais, Abilio e Dosolina.

Resumo

Neste trabalho, consideramos um problema de valor inicial e de fronteira, semelhante ao sistema de equações de Navier-Stokes, que descreve o movimento de um meio granular com densidade constante. Utilizando o método de Galerkin, provamos a existência de soluções fracas em espaços de Sobolev.

Abstract

In this work, we consider an initial-boundary value problem similar to the Navier-Stokes system of equations describing the motion of a granulated medium with constant density. We prove, using Galerkin method, the existence of weak solutions in Sobolev spaces.

Sumário

Notação

Neste trabalho, utilizou-se a seguinte notação normalmente usada em estudos de equações diferenciais parciais:

Ω, um aberto do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

$\overline{\Omega}$, fecho do conjunto Ω

$\partial\Omega$, fronteira do conjunto Ω

$\omega \times u$ é o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$ de vetores ω e u

$L^p(\Omega)$, espaço das funções mensuráveis g tais que

$$|g|_p = \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ , \quad 1 \leq p < \infty$$

$C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ são os espaços funcionais com a definição usual em análise.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $p \geq 1$ e $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ onde $u_i : \Omega \to \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, 3$, temos:

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |u_i(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\nabla u\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$b(u, v, \omega) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \omega_j \, dx$$

Os espaços funcionais básicos que nós devemos usar são

$$H_0^1(\Omega) = \text{fecho de } \ (C_0^\infty(\Omega))^3 \ \text{ na norma} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \text{div } \ u \equiv 0\},$$

tem-se, para $\partial\Omega$ regular, a seguinte caracterização para V e H:

$$H = \{u \in \left(L^2(\Omega)\right)^n : \text{div } \ u \equiv 0 \quad \text{e} \quad u.\vec{n}|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal exterior em $\partial\Omega$ (apontando para fora de Ω).

$$V = \{u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n : \text{div } \ u \equiv 0\}.$$

Em geral tem-se $V \subset H$.

$L^q(0, T, L^p(\Omega))$ = espaço de funções mensuráveis em Q_T para a qual

$$||u||_{L^q(0,T,L^p(\Omega))} = \left(\int_0^T ||u(t)||^q_{L^p(\Omega)}\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p\right)^{\frac{q}{p}} dx \ \ dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad 1 \le p, q < \infty$$
$$||u||_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))} = \inf\{M : ||u(t)||_{L^p(\Omega)} \le M \ \text{ q.s } \ \forall t \in (0,T)\}$$

q.s - quase sempre.

supp f - denota o suporte da função f.

Introdução

A área da mecânica de fluídos pode ser considerada como uma das mais ricas na ciência com relação à produção de problemas científicos. Questões relativas à previsão do tempo na meteorologia, projetos de carros, navios, aviões, foguetes, filtros, enfim, qualquer situação que envolva o movimento de um fluído, produz problemas, muitos dos quais ainda não foram resolvidos ou estão parcialmente resolvidos.

Nesta área, o sistema de equações de Navier-Stokes, cujo nome é devido a George Gabriel Stokes (1819 – 1903) e Claude Louis Marie Navier (1785 – 1836), se destaca por representar analiticamente uma situação típica de movimento de um fluído homogêneo com velocidade u e pressão p da forma

$$u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f.$$

O seguinte sistema de equações diferenciais parciais deduzido em LELUCH [7] descreve o movimento de um meio granular com densidade constante:

$$u_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f + \eta(\omega \times u) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2}$$

$$\omega_t + u \cdot \nabla\omega + F\omega = \varphi \tag{3}$$

Equações (1) − (3) representam, respectivamente, conservação do momento linear, conservação de massa e uma equação que rege a velocidade de rotação das partículas do meio.

Nós acrescentamos ao sistema (1)−(3) as seguintes condições iniciais e de fronteira:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \tag{4}$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0 \tag{5}$$

As funções

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)), \omega(x,t) = (\omega_1(x,t), \omega_2(x,t), \omega_3(x,t))$$

e $p(x,t)$ denotam vetor velocidade, velocidade angular de rotação de partículas e a pressão, respectivamente. As funções

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$$

e

$$\varphi(x,t) = (\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t), \varphi_3(x,t))$$

denotam a força exterior e a densidade de momento da força da massa; η, μ são constantes denotando os coeficientes de Magnus e a viscosidade, respectivamente. A função F (em geral F depende de p) representa uma força de fricção entre as partículas.

Um exemplo de uma situação real que o modelo acima representa é o movimento de dunas de areia impulsionadas pelo vento.

Nosso objetivo é provar que o problema inicial de valor de fronteira $(1)-(5)$ tem ao menos uma solução (conforme LUKASZEWICZ [10]). Mais estritamente nós assumimos $f, \varphi, F, u_0, \omega_0$ como funções conhecidas e provamos que existem funções u, ω, p satisfazendo equações $(1)-(3)$ na região espaço-tempo $Q_T = \Omega \times (0, T)$ (Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$) com dados iniciais e de fronteira $(4)-(5)$. Neste trabalho, apresentamos a noção de uma solução fraca de $(1)-(5)$ e utilizando o método de Galerkin mostramos que tal solução existe (nós assumimos porém que F não depende de p).

Esta dissertação está dividida da seguinte forma :

No primeiro capítulo apresentamos alguns preliminares necessários para o estudo do sistema de equações descrito anteriormente tais como desigualdade de Hölder, Young e outros resultados de análise funcional.

No segundo capítulo mostramos a existência e unicidade de solução para um problema linearizado de forma adequada que provém do sistema $(1)-(3)$.

No terceiro capítulo provamos o resultado principal de existência de solução para o sistema $(1)-(5)$.

Finalmente no último capítulo apresentamos algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Desigualdade de Hölder

Sejam $f, g \in L^1$ e $1 \leq p, q \leq \infty$, então

$$\int_\Omega fg \; dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Demonstração: Veja MEDEIROS [11] na página 75.

1.2 Desigualdade de Young

Dados $\varepsilon > 0$, a, $b \geq 0$, então

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Demonstração:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$ab \leq \tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

Seja:

$$a = \sqrt{2\varepsilon}A \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}B$$
$$\Rightarrow AB \leq \frac{1}{2}\left(2\varepsilon A^2 + \frac{B^2}{2\varepsilon}\right)$$
$$AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}.$$

1.3 Desigualdade de Poincaré

$$\forall \; u \in H_0^1(\Omega)$$

tem-se

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração: Veja página 174 de BREZIS [2].

1.4 Identidade de Green

Sejam ϕ, $u \in C^2(\Omega)$ então:

$$\int_{\Omega} (\phi \triangle u + \nabla\phi\nabla u) \; dx = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \; ds.$$

1.5 Teorema da Divergência

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e F um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$.

Então:

$$\int_{\Omega} \text{div} \;\; F \;\; dx = \int_{\partial\Omega} F.\overrightarrow{N} \;\; ds.$$

Demonstração: Veja página 495 de LIMA [8].

1.6 Proposição

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e definindo

$$b(u,v,\omega)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_j.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\omega_i \; dx \; dt$$

onde

$$u=(u_1,u_2,u_3), \qquad v=(v_1,v_2,v_3), \qquad \omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$$

então:

a) $b(u,v,v)=0 \;\; \forall u \in V, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega)$,

b) $b(u,v,\omega)=-b(u,\omega,v) \;\; \forall u \in V, \;\; \forall v,\omega \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Veja TEMAM [13] na página 163.

1.7 Lema

Seja $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$. Então Bu definida por $\langle Bu, v\rangle = b(u,u,v)$ pertence a $L^2(0,T,V')$ para $n \leq 4$.

Demonstração: Veja lema 4.2 na página 321 de TEMAM [13].

1.8 Convergências em espaços de Banach

Dado um espaço de Banach B e $(X_n) \subset B$ uma seqüência em B, dizemos que:

(i) X_n converge fortemente para X ($X_n \longrightarrow X$, quando $n \to \infty$), se X_n converge para X na norma de B quando $n \to \infty$;

(ii) X_n converge fracamente para X em B quando $\forall f \in B'$ tivermos $f(X_n) \to f(X)$, quando $n \to \infty$, a notação é $X_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} X$;

(iii) X_n converge fraco-$*$ para X em B quando dada $f \in A$ onde $A' = B$ tivermos que $f(X_n) \to f(X)$ quando $n \to \infty$, a notação é $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} X$.

Veja as definições acima com mais detalhes BREZIS [2] na página 35.

1.9 Proposição

Seja A um espaço de Banach e $(x_n) \subset A$ uma seqüência em A. Se $||x_n||_A \leq K$ então $\exists\, (x_{n_k})$ subseqüência de (x_n) tal que $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$.

Demonstração: Veja página 42 de BREZIS [2].

1.10 Proposição

Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset A$ uma seqüência em A. Se $||x_n||_H \leq K$ então $\exists\, (x_{n_k})$ subseqüência de (x_n) tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.

Demonstração: Veja página 44 de BREZIS [2].

1.11 Definição (Espaço de Slobodeckii)

Definimos o espaço de Slobodeckii $B_q^l(\Omega)$ onde $0 < l < 1$ e $1 \leq q < \infty$ da seguinte forma:

$$B_q^l(\Omega) = \left\{ u \in L^q(\Omega) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^q}{|x-y|^{3+lq}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} dx < \infty \right\}.$$

Cuja norma é definida por:

$$\|u\|_{B_q^l} = \|u\|_{L^q} + \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^q}{|x-y|^{3+lq}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} dx.$$

Observação: De acordo com a notação de ADAMS [1] temos que:

$$B_q^l(\Omega) \supset W^{l,q}(\Omega) \quad \text{com } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

1.12 Proposição

Seja A um espaço de Banach e (X_n) e (F_n) seqüências em A tais que $X_n \to X$ em A e $F_n \to F$ fraco-$*$ em A, então $\langle F_n, X_n \rangle \longrightarrow \langle F, X \rangle$ quando $n \to \infty$.

Demonstração: Veja item (iv) da proposição $III.12$ na página 40 de BREZIS [2].

1.13 Proposição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f = (f_1, ..., f_n)$ onde $f \in D'(\Omega)$, $i = 1, ..., n$. Então $f = \nabla p$ para alguma $p \in D'(\Omega)$ se, e somente se, $\langle f, v \rangle = 0$ $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ com div $v = 0$.

Demonstração: Veja página 14 de TEMAM [13].

1.14 Lema

Sejam $v \in C^\infty(Q_T, \mathbb{R}^3)$, div $v = 0$, $f \in L^2(Q_T)$, $\omega \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$ e $u_0 \in H \cap B_{5/4}^{2/5}(\Omega)$, então a pressão p do problema:

$$\begin{cases} u_t - \mu \Delta u + v \cdot \nabla u + \nabla p = f + \eta(\omega \times u) & \text{em } Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} \equiv 0 & \forall t \in (0,T), \end{cases}$$

satisfaz $p \in L^{5/4}(Q_T)$, $\nabla p \in L^{5/4}(Q_T)$, $\int_\Omega p(x,t)\, dx = 0$ q.s. $\forall t \in [0,T]$ e vale:

$$||p||_{L^{5/4}(Q_T)}+||\nabla p||_{L^{5/4}(Q_T)} \leq C\{||f||_{L^{5/4}(Q_T)} + ||u_0||_{B^{2/5}_{5/4}(\Omega)} + ||v||^{2/5}_{L^\infty(0,T,H)}$$
$$\cdot||v||^{6/10}_{L^2(0,T,V)} \cdot ||u||_{L^2(0,T,V)} + ||\omega||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \cdot ||u||_{L^2(0,T,V)}\}. \tag{1.1}$$

Demonstração: Veja LUKASZEWICZ [10] na página 629.

1.15 Lema (Compacidade de Aubin-Lions)

Sejam X_0, X e X_1 três espaços de Banach tais que $X_0 \subset X \subset X_1$ onde X_i é reflexivo com $i = 0, 1$ e $X_0 \subset X$ com imersão compacta.

Sejam

$$p_0,\ p_1 \in \mathbb{R}$$

tais que

$$1 < p_0, p_1 < \infty$$

e defina

$$W = \left\{v : v \in L^{p_0}(0, T, X_0),\ v' \in L^{p_1}(0, T, X_1)\right\}$$

munido da norma

$$||v||_{L^{p_0}(0,T,X_0)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,T,X_1)}.$$

Então

$$W \subset L^{p_0}(0, T, X)$$

compactamente.

Demonstração: Veja LIONS [9] na página 58.

Capítulo 2

Resultados Fundamentais

O seguinte teorema é o resultado principal de existência de solução obtido com respeito ao sistema $(1)-(5)$:

Teorema 1 *Suponha que*

$$u_0 \in H \cap B^{2/5}_{5/4}(\Omega), \ \omega_0 \in L^3(\Omega) \tag{2.1}$$

$$f \in L^2(Q_T), \ \varphi \in L^1\left(0, T, L^3(\Omega)\right) \tag{2.2}$$

$$F \in L^1\left(0, T, L^{3/2}(\Omega)\right), F \geq 0 \tag{2.3}$$

Então existem funções u, ω e p

$$u \in L^\infty(0, T, H) \cap L^2(0, T, V) \tag{2.4}$$

$$\omega \in L^\infty\left(0, T, L^3(\Omega)\right) \tag{2.5}$$

$$p \in L^{5/4}(Q_T), \nabla p \in L^{5/4}(Q_T) \tag{2.6}$$

tal que para quaisquer $a \in C_0^\infty(Q_T : \mathbb{R}^3)$ e $b \in C_0^\infty(Q_T : \mathbb{R})$ valem as seguintes identidades integrais

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega (-ua_t - (u\nabla a)u + \mu\nabla u\cdot\nabla a + \nabla p\cdot a)\ dx\ dt \\
&= \int_0^T\int_\Omega (\eta(\omega\times u)a + fa)\ dx\ dt + \int_\Omega u_0(x)\,a(x,0)\ dx
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\int_0^T \int_\Omega u \cdot \nabla b \; dx \; dt = 0 \tag{2.8}$$

$$\int_0^T \int_\Omega (-\omega a_t - \omega(u\nabla)a + F\omega.a - \varphi.a) \; dx \; dt = \int_\Omega \omega_0(x) \; a(x,0) \; dx. \tag{2.9}$$

DEMONSTRAÇÃO:

A demonstração completa deste teorema está no próximo capítulo. Aqui somente obteremos as formulações fracas (2.7) a (2.9).

Multiplicando (1) por $a(x,t) \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$ e integrando em x e t, temos:

$$\int_0^T \int_\Omega u_t.a \; dx \; dt - \int_0^T \int_\Omega \mu\Delta u \cdot a \; dx \; dt + \int_0^T \int_\Omega (u \cdot \nabla u).a \; dx \; dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot a \; dx \; dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega (f.a + \eta(\omega \times u)a) \; dx \, dt. \tag{2.10}$$

Desenvolvendo cada parcela:

i) Temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \tfrac{d}{dt}(u.a) \; dx \, dt = \int_\Omega \int_0^T \tfrac{d}{dt}(u.a) \; dt \, dx$$
$$= \int_\Omega [u(x,T)a(x,T) - u(x,0)a(x,0)] \; dx = -\int_\Omega u_0(x)a(x,0) \; dx,$$

pois

$$a(x,T) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

Mas, de outra forma

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}(u.a) \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega u_t.a \; dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega u.a_t \; dx \; dt.$$

Assim, comparando as duas equações temos:

$$\int_0^T \int_\Omega u_t.a \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega u.a_t \ dx \ dt = - \int_\Omega u_0(x)a(x,0)\, dx$$

Logo, isolando

$$\int_0^T \int_\Omega u_t.a \ dx \, dt$$

chegamos que:

$$\int_0^T \int_\Omega u_t.a \ dx \, dt = - \int_0^T \int_\Omega u.a_t \ dx \ dt - \int_\Omega u_0(x)a(x,0)\, dx.$$

ii)

$$- \int_0^T \int_\Omega \mu \Delta u \cdot a \ dx \ dt = \int_0^T \mu \ dt(- \int_\Omega \Delta u \cdot a \ dx), \qquad (2.11)$$

Utilizando a identidade de Green, preliminar 1.4, com $\phi = a$

$$\int_\Omega (a\Delta u + \nabla a \nabla u) \ dx = \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \ ds$$

tem-se que

$$\int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \ ds = 0$$

pois $a \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Assim:

$$\int_\Omega (a\Delta u + \nabla a \nabla u) \ dx = 0$$
$$\int_\Omega a\Delta u \ dx = - \int_\Omega \nabla u \nabla a \ dx.$$

Substituindo em (2.11), temos

$$- \int_0^T \int_\Omega \mu \Delta u \cdot a \ dx \ dt = \int_0^T \mu \ dt \int_\Omega \nabla u \nabla a \ dx = \int_0^T \int_\Omega \mu \nabla u \nabla a \ dx \, dt$$

iii)

$$\int_0^T\int_\Omega (u\cdot\nabla u).a\ \ dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega (u.\nabla u_1, u.\nabla u_2, u.\nabla u_3).(a_1,a_2,a_3)\ \ dx\ \ dt$$
$$= \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u.\nabla u_i a_i\ \ dx\,dt$$
$$= \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}(u_1,u_2,u_3)(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_1},\tfrac{\partial u_i}{\partial x_2},\tfrac{\partial u_i}{\partial x_3})a_i\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_j\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}a_i\,dx\,dt.$$

Conforme proposição preliminar 1.6:

$$\int_0^T\int_\Omega (u\cdot\nabla u).a\ \ dx\,dt = \int_0^T b(u,u,a)\,dt = -\int_0^T b(u,a,u)\,dt = -\int_0^T\int_\Omega u_j.\frac{\partial a_i}{\partial x_j}u_i\ \ dx\,dt$$
$$= \int_0^T\int_\Omega -(u\nabla a)u\ \ dx\,dt$$

Logo, substituindo em (2.10) obtemos (2.7).

Agora multiplicando (3) **por** $a(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$ **e integrando em** x **e** t**, temos:**

$$\int_0^T\int_\Omega \omega_t.a\ \ dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega u.\nabla\omega.a\ \ dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega F\omega.a\ \ dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \varphi.a\ \ dx\,dt.$$

Demonstração análoga a (2.7) obteremos (2.9).

Multiplicando (2) **por** $b(x,t)$ **e integrando em** x **e** t.

$$\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}(u)b\ \ dx\ \ dt = 0.$$

Temos que

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad u=(u_1,u_2,u_3).$$

Partindo de:

$$\operatorname{div}(u.b) = \operatorname{div}(bu_1,bu_2,bu_3) = \tfrac{\partial}{\partial x_1}(bu_1)+\tfrac{\partial}{\partial x_2}(bu_2)+\tfrac{\partial}{\partial x_3}(bu_3)$$
$$= \tfrac{\partial b}{\partial x_1}u_1 + b\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial b}{\partial x_2}u_2 + b\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial b}{\partial x_3}u_3 + b\tfrac{\partial u_3}{x_3}$$
$$= \nabla b\cdot u + b\operatorname{div} u$$

mas por hipótese $\operatorname{div} u = 0$, assim

$$\operatorname{div}(u.b) = \nabla b \cdot u$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(u.b)\ dx\ dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla b \cdot u\ dx\ dt$$

Utilizando o teorema da divergência, preliminar 1.5, temos:

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(u.b)\ dx\ dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u.b).\overrightarrow{N}\ ds_x\ dt$$

onde $\overrightarrow{N}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$. Mas

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (u.b).\overrightarrow{N}\ ds_x\ dt = 0$$

pois $b \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Assim

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(u) b\ dx\ dt = 0$$

e obtemos (2.8).

2.1 O problema linearizado

Nessa seção nós estudamos a existência de solução u e p do seguinte problema linearizado obtido a partir de $(1) - (5)$.

Achar u tal que

$$\begin{cases} u_t - \mu\Delta u + v \cdot \nabla u + \nabla p = f + \eta(\omega \times u) & \text{em } Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{em } Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} \equiv 0 & \forall t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.12}$$

onde v, ω, f e u_0 são funções conhecidas.

A seguinte proposição fornece um resultado de existência e unicidade de solução e também uma estimativa para o problema acima.

Proposição 1 *Suponha* $v \in C^{\infty}\left(\overline{Q}_T : \mathbb{R}^3\right)$, div $v = 0$, $f \in L^2(Q_T)$, $\omega \in L^{\infty}(0, T, L^3(\Omega))$ *e* $u_0 \in H$. *Então, existe uma única função* u

$$u \in C\left([0, T], H\right) \cap L^2\left(0, T, V\right), \quad u\left(0\right) = u_0. \tag{2.13}$$

e uma distribuição p *tal que o sistema* (2.12) *é satisfeito no sentido de distribuição em* Q_T. *Além disso, vale a seguinte desigualdade*

$$||u||^2_{L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega))} + ||u||^2_{L^2(0,T,V)} \leq C\left(||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(Q_T)}\right) \tag{2.14}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Esta demonstração se divide em três partes principais:

Na primeira provamos a desigualdade (2.14).

Na segunda a existência de solução e finalmente a unicidade de solução.

Primeiramente, assumindo existência de solução, provaremos a desigualdade (2.14).

2.1.1 Desigualdade (2.14)

Multiplicando a equação (2.12) por u e integrando em Ω :

$$\int_{\Omega} u_t.u\, dx + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla u).u\, dx - \mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot u\, dx + \int_{\Omega} (\nabla p) \cdot u\, dx = \int_{\Omega} f.u\, dx + \eta \int_{\Omega} (\omega \times u).u\, dx \tag{2.15}$$

Desenvolvendo cada integral:

1)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^2\, dx = \int_{\Omega} u.u_t\, dx.$$

2)

$$\int_{\Omega} (v \cdot \nabla u) . u \, dx = b(v, u, u) = 0$$

pela proposição 1.6 dos preliminares.

3) Pela identidade de Green, preliminar 1.4, temos que:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} u . \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \; ds.$$

Mas

$$\int_{\partial\Omega} u . \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \; ds = 0$$

pois

$$u \equiv 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Logo

$$-\mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \mu ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

4)

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot u dx = 0$$

pois, pelo teorema da divergência, preliminar 1.5, temos:

$$0 = \int_{\partial\Omega} pu . \overrightarrow{n} \; ds_x = \int_{\Omega} \text{div } (pu) \, dx$$

assim

$$0 = \int_{\Omega} \text{div } (pu) \, dx$$

pois

$$u = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega.$$

Daí,

$$0 = \int_\Omega \text{div } (pu)\, dx = \int_\Omega (\nabla p \cdot u + p\text{div } u)\, dx = \int_\Omega \nabla p \cdot u \ dx$$

pois

$$\text{div}\, u = 0.$$

Assim

$$\int_\Omega \nabla p \cdot u \ dx = 0$$

5) $\omega \times u$ é ortogonal a u, portanto:

$$(\omega \times u)\,.u = 0.$$

Substituindo em (2.15) vem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \mu||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f u\, dx.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}||u||^2_{L^2(\Omega)} = 2\left(-\mu||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f u\, dx\right).$$

Mas

$$\int_\Omega f u\, dx \leq ||f||_{L^2}||u||_{L^2} \leq \varepsilon||u||^2_{L^2} + \frac{1}{4\varepsilon}||f||^2_{L^2}$$

pela desigualdade de Young, preliminar 1.2.

Daí

$$\tfrac{d}{dt}||u||^2_{L^2} \leq -2\mu||\nabla u||^2_{L^2} + 2\varepsilon||u||^2_{L^2} + \tfrac{1}{2\varepsilon}||f||^2_{L^2}$$
$$\tfrac{d}{dt}||u||^2_{L^2} \leq -2\mu||\nabla u||^2_{L^2} + 2\varepsilon c^2||\nabla u||^2_{L^2} + \tfrac{1}{2\varepsilon}||f||^2_{L^2}$$

pela desigualdade de Poincaré, preliminar 1.3.

Logo

$$\frac{d}{dt}||u||^2_{L^2} + 2(\mu - \varepsilon c^2)||\nabla u||^2_{L^2} \leq \frac{1}{2\varepsilon}||f||^2_{L^2}.$$

Escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $2\mu - 2\varepsilon c^2 > 0$ para isto devemos ter $\varepsilon < \frac{\mu}{c^2}$, por exemplo $\varepsilon = \dfrac{\mu}{2c^2}$.

Neste caso:

$$\frac{d}{dt}||u||^2_{L^2} + c||\nabla u||^2_{L^2} \leq c'||f||^2_{L^2}$$

onde c e c' são constantes positivas.

Integrando de 0 até $t < T$

$$\int_0^t \tfrac{d}{dt}||u||^2_{L^2}\,dt + c\int_0^t ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt \leq c'\int_0^t ||f||^2_{L^2}\,dt$$
$$||u(t)||^2_{L^2} - ||u(0)||^2_{L^2} + c\int_0^t ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt \leq c'\int_0^t ||f||^2_{L^2}\,dt$$
$$||u(t)||^2_{L^2} + c\int_0^t ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt \leq ||u_0||^2_{L^2} + c'\int_0^t ||f||^2_{L^2}\,dt$$
$$\sup_{0\leq t<T}\left(||u(t)||^2_{L^2} + c\int_0^t ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt\right) \leq ||u_0||^2_{L^2} + c'\int_0^t ||f||^2_{L^2}\,dt$$
$$\sup_{0\leq t<T}||u(t)||^2_{L^2} + c\int_0^T ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt \leq ||u_0||^2_{L^2} + c'\int_0^T ||f||^2_{L^2}\,dt.$$

Mas

$$\sup_{0\leq t<T}||u(t)||^2_{L^2} = ||u||^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \quad \text{e} \quad \int_0^t ||\nabla u||^2_{L^2}\,dt = ||u||^2_{L^2(0,T,V)}$$
$$||u||^2_{L^\infty(0,T,L^2)} + c||u||^2_{L^2(0,T,V)} \leq ||u_0||^2_{L^2} + c'||f||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}.$$

e

$$||u_0||^2_{L^2} + c'||f||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq \max\{1, c'\}(||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(Q_T)})$$

2.1.2 A existência de uma solução (u, p) de (2.12)

Nesta subseção provaremos a existência de solução para a proposição 1.

Seja $a \in V$; multiplicando a equação (2.12) por a e integrando em Ω obtém-se:

$$\int_\Omega u_t.a \ \ dx - \mu \int_\Omega \Delta u \cdot a \ \ dx + \int_\Omega (v \cdot \nabla u).a \ \ dx + \int_\Omega (\nabla p) \cdot a \ \ dx =$$
$$\int_\Omega f.a \ \ dx + \eta \int_\Omega (\omega \times u).a \ \ dx$$

onde

$$\int_\Omega (\nabla p) \cdot a \ \ dx = 0$$
$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u.a \ \ dx + \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla a \ \ dx + \int_\Omega (v \cdot \nabla u).a \ dx = \int_\Omega f.a \ \ dx + \int_\Omega \eta(\omega \times u).a \ \ dx.$$

Seja

$$u_m (x, t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} (t) \, \omega_i (x)$$

onde

$$\{\omega_i\}$$

constituem uma seqüência de elementos linearmente independente em V e denso em V.

Neste caso a formulação fraca em

$$V_m = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m]$$

é:

$$\frac{d}{dt} (u_m, \omega_j) + \mu (\nabla u_m, \nabla \omega_j) + b (v, u_m, \omega_j) = (f, \omega_j) + \eta (\omega \times u_m, \omega_j). \tag{2.16}$$

Sendo que:

$$b (v, u_m, \omega_j) = \int_\Omega v \nabla u_m \omega_j \ \ dx$$

$$u_m(0) = u_{0,m} \text{ onde } u_{0,m} \to u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.17}$$

1) Achar $g_{im}(t)$

2) Estimativas a priori

Substitui-se ω_j na equação (2.16) por u_m, obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||_{L^2}^2 + \mu||\nabla u_m||_{L^2}^2 + b(v, u_m, u_m) = (f, u_m) + \eta(w \times u_m, u_m).$$

Onde

$$b(v, u_m, u_m) = 0$$

pela proposição, preliminar 1.6 e

$$\eta(\omega \times u_m, u_m) = 0,$$

pois

$$(\omega \times u_m).u_m = 0 \Rightarrow (\omega \times u_m, u_m) = \int_\Omega (\omega \times u_m).u_m \; dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||_{L^2}^2 + \mu||\nabla u_m||_{L^2}^2 = (f, u_m) \tag{2.18}$$

Como em 1.47 na página 256 do TEMAM [13].

1) Achar $g_{im}(t)$

$$\begin{aligned}
&(u_m', \omega_j) + \mu(\nabla u_m, \nabla \omega_j) + b(v, u_m, \omega_j) = (f, \omega_j) + \eta(\omega \times u_m, \omega_j) \\
&\sum_{i=1}^{m}(g_{im}'\omega_i, \omega_j) + \mu\sum_{i=1}^{m}(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)g_{im} + \sum_{i,l=1}^{3}\int_\Omega v_i\frac{\partial u_m^l}{\partial x_i}.\omega_j^l \; dx \\
&= (f, \omega_j) + \eta\left(\omega \times \{\sum_{i=1}^{m} g_{im}\omega_i\}, \omega_j\right)
\end{aligned}$$

onde

$$u_m^l = \sum_{s=1}^{m} g_{sm}\omega_s^l$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_j)\, g_{im}' + \mu \sum_{i=1}^{m} (\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)\, g_{im} + \sum_{i,l=1}^{3} \sum_{s=1}^{m} \int_\Omega v_i \frac{\partial w_s^l}{\partial x_i} .\omega_j^l g_{sm} \; dx$$

$$= (f, \omega_j) + \eta \sum_{i=1}^{m} (\omega \times \omega_i, \omega_j)\, g_{im}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_j)\, g_{im}' + \mu \sum_{i=1}^{m} (\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)\, g_{im} + \sum_{i=1}^{m} b\,(v, \omega_i, \omega_j)\, g_{im} = (f, \omega_j) + \eta \sum_{i=1}^{m} (\omega \times \omega_i, \omega_j)\, g_{im},$$

$j = 1, 2, ..., m.$

Temos um sistema linear de m equações nas incógnitas $g_{1,n}; g_{2,n}; ...; g_{m,n}$. Tal sistema possui solução.

Integrando (2.18) obtém-se:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||_{L^2}^2 \; dt + \mu \int_0^t ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \; dt = \int_0^t (f, u_m) \; dt$$

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}||u_m(0)||^2 + \mu \int_0^t ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \; dt = \int_0^t (f, u_m)\, dt \le \int_0^t ||f||_{L^2}||u_m||_{L^2} \; dt$$

de acordo com a desigualdade de Hölder, preliminar 1.1, $p = q$

$$\le \int_0^t (c_\varepsilon ||f||_{L^2}^2 + \varepsilon ||u_m||_{L^2}^2) \; dt$$

de acordo com a desigualdade de Young preliminar 1.2, utilizada na segunda parcela

$$\le c_\varepsilon \int_0^T (||f||_{L^2}^2 \; dt + c\varepsilon \int_0^T ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \; dt$$

de acordo com a desigualdade de Poincaré, preliminar 1.3.

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||_{L^2}^2 + (\mu - c\varepsilon) \int_0^T ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \; dt \le \frac{1}{2}||u_m(0)||_{L^2}^2 + c\varepsilon \int_0^T ||f||_{L^2}^2 \; dt$$

escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu - c\varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \varepsilon < \frac{\mu}{c}$$

por exemplo,

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2c}.$$

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||_{L^2}^2 + c\int_0^T ||\nabla u_m||^2 \ dt \leq \frac{1}{2}||u_m(0)||_{L^2}^2 + c\varepsilon \int_0^T ||f||_{L^2}^2 \ dt$$

$$= \frac{1}{2}||u_m(0)||_{L^2}^2 + c' \int_0^T ||f||_{L^2}^2 \ dt \leq c + c' \int_0^T ||f||_{L^2}^2 \ dt = k$$

Assim:

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||_{L^2}^2 + c\int_0^T ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \ dt \leq k$$

e

$$\begin{cases} u_m \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ u_m \in L^2(0, T, V) \end{cases}$$

$\exists (u_{m_K})_{K \in N}$ subseqüência de $(u_m)_{m \in N}$ (ainda denotada por (u_m) para simplificar a notação) tal que:

$$u_m \longrightarrow u \text{ fraco-}* \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$$
$$u_m \longrightarrow u \text{ fraco em } L^2(0, T, V).$$

Conforme proposições preliminares 1.9 e 1.10:

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{fraco-}* \text{ em } L^\infty\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

então, como:

$$\left(L^1(0, T, L^2(\Omega))\right)' = L^\infty\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

e

$$\forall \phi \in L^1\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

temos:

$$< u_m, \phi > \longrightarrow < u, \phi > \qquad \text{quando } m \longrightarrow \infty$$
$$\int_0^T (u_m(t), \phi(t)) \ dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), \phi(t)) \ dt$$

$u_m \longrightarrow u$ fraco em $L^2(0,T,V)$ então, como:

$$\left(L^2(0,T,V)\right)' = L^2\left(0,T,V'\right)$$

temos

$$\forall \phi \in L^2\left(0,T,V'\right)$$

$$< \phi, u_m > \longrightarrow < \phi, u > \qquad \text{quando } m \longrightarrow \infty$$

$$\int_0^T < \phi(t), u_m >_{V',V} \; dt \longrightarrow \int_0^T < \phi(t), u(t) >_{V',V} \; dt.$$

Seja $\psi(t) \in C^1([0,T])$ com $\psi(T) = 0$ multiplicando (2.16) por $\psi(t)$ e integrando no tempo obtemos:

$$\int_0^T \tfrac{d}{dt}(u_m,\omega_j)\,\psi(t)\; dt + \mu\int_0^T (\nabla u_m, \psi(t)\nabla\omega_j)\; dt + \int_0^T b(v,u_m,\psi(t)\,\omega_j)\; dt$$
$$= \int_0^T (f(t),\psi(t)\,\omega_j)\; dt + \int_0^T \eta(\omega\times u_m,\psi(t)\,\omega_j)\; dt \tag{2.19}$$

$$(u_m,\omega_j)\,\psi(t)\,|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (u_m,\omega_j)\,\psi'(t)\; dt + \mu\int_0^T (\nabla u_m,\psi(t)\nabla\omega_j)\; dt + \int_0^T b(v,u_m,\psi(t)\,\omega_j)\; dt$$
$$= \int_0^T (f(t),\psi(t)\,\omega_j)\; dt + \int_0^T \eta(\omega\times u_m,\psi(t)\,\omega_j)\; dt$$
$$-(u_m(0),\omega_j)\,\psi(0) - \int_0^T (u_m,\omega_j)\,\psi'(t)\, dt + \mu\int_0^T (\nabla u_m,\psi(t)\nabla\omega_j)\; dt + \int_0^T b(v,u_m,\psi(t)\,\omega_j)\, dt$$
$$= \int_0^T (f(t),\psi(t)\,\omega_j)\; dt + \int_0^T \eta(\omega\times u_m,\psi(t)\,\omega_j)\; dt$$

Passagem ao limite:

1)

$$+(u_m(0),\omega_j)\,\psi(0) \longrightarrow (u(0),\omega_j)\,\psi(0)$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

pois

$$|\,(u_m(0),\omega_j)\,\psi(0) - (u(0),\omega_j)\,\psi(0)\,| = |\,(u_m(0)-u(0),\omega_j)\,|\;\;|\psi(0)\,|$$
$$\leq ||u_m(0)-u(0)\,||_2||\omega_j||_2|\psi(0)\,| \longrightarrow 0$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

Por causa de (2.17).

2)

$$\int_0^T \left(u_m, \psi'(t)\,\omega_j\right)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(u, \psi'(t)\,\omega_j\right)\, dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

Afirmação:

$$\begin{array}{l} \phi = \psi'(t)\,\omega_j(x) \in L^1(0, T, L^2(\Omega)) \\ \int_0^T \|\psi'(t)\,\omega_j(x)\|_2\, dt = \int_0^T |\psi'(t)|\ \|\omega_j\|_2\, dt \end{array}$$

onde

$$\|\omega_j\|_2$$

é finito pois

$$\begin{array}{l} \omega_j \in L^2 \\ = \|\omega_j\|_2 \int_0^T |\psi'(t)|\, dt < \infty \end{array}$$

onde

$$\int_0^T |\psi'(t)|\, dt$$

é finito pois ψ' é contínua.

Utilizando a convergência fraco-$*$ obtemos:

$$\int_0^T \left(u_m, \psi'(t)\,\omega_j\right)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(u, \psi'(t)\,\omega_j\right)\, dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

3)

$$\int_0^T (\nabla u_m, \psi(t)\nabla\omega_j)\ dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, \psi(t)\nabla\omega_j)\ dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

Seja

$$\begin{aligned} &\phi(t) = \psi(t)\,\omega_j \in L^2(0,T,V) \\ &V \subset L^2(\Omega) \simeq (L^2(\Omega))' \subset (V)' \\ &V \subset L^2 \subset V'. \end{aligned}$$

Neste caso:

$$\langle u_m, \phi(t)\rangle_{V',V} = (\nabla u_m, \nabla\phi) = (\nabla u_m, \psi(t)\nabla\omega_j).$$

Assim, utilizando a convergência fraca temos:

$$\int_0^T (\nabla u_m, \psi(t)\nabla\omega_j)\ dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, \psi(t)\nabla\omega_j)\ dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

4)

$$\int_0^T b(v, u_m, \psi(t)\,\omega_j)\ dt \longrightarrow \int_0^T b(v, u, \psi(t)\,\omega_j)\ dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Pois, como

$$b(v, u_m, \psi(t)\,\omega_j) = -b(v, \psi(t)\,\omega_j, u_m)$$

conforme proposição 1.6 dos preliminares, então:

$$\begin{aligned} &\int_0^T b(v, u_m, \psi(t)\,\omega_j)\ dt = -\int_0^T b(v, \psi(t)\,\omega_j, u_m)\ dt \\ &= -\sum_{i,l=1}^{3}\int_0^T \psi(t)\int_\Omega v_i\frac{\partial\omega_j^l}{\partial x_i}.u_m^l\ dx\ dt = -\sum_{i,l=1}^{3}\int_0^T\left(v_i\frac{\partial\omega_j^l}{\partial x_i}\psi(t), u_m^l\right)\ dt \end{aligned} \tag{2.20}$$

Como

$$v_i \frac{\partial \omega_j^l}{\partial x_i} \psi(t) \in L^1\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

então utilizando a convergência fraco-$*$, chegamos que (2.20):

$$-\sum_{i,l=1}^{3} \int_0^T \left(v_i \frac{\partial \omega_j^l}{\partial x_i} \psi(t), u_m^l \right) dt \longrightarrow -\sum_{i,l=1}^{3} \int_0^T \left(v_i \frac{\partial \omega_j^l}{\partial x_i}, u^l \right) dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

5)

$$\int_0^T \eta\left(\omega \times u_m, \psi(t)\, \omega_j\right) \, dt \longrightarrow \int_0^T \eta\left(\omega \times u, \psi(t)\, \omega_j\right) \, dt$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

$$(\omega \times u, v) = \int_\Omega (\omega \times u) \cdot v \, dx = \int_\Omega \omega \cdot (u \times v) \, dx$$

$$\int_0^T \eta\left(\omega \times u_m, \psi(t)\, \omega_j\right) \, dt = \int_0^T \eta \int_\Omega (\omega \times u_m) \cdot \psi(t)\, \omega_j \, dx \, dt$$

$$= \int_0^T \eta \int_\Omega (u_m \times \omega) \cdot \psi(t)\, \omega_j \, dx \, dt = -\eta \int_0^T \int_\Omega u_m \cdot (\omega \times \psi(t)\, \omega_j) \, dx \, dt$$

$$= -\eta \int_0^T \left(u_m, \omega \times \psi(t)\, \omega_j\right) \, dt.$$

Afirmação:

$$\omega \times \psi(t)\, \omega_j = \psi(t)\, (\omega \times \omega_j) \in L^1\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

De fato:

$$\int_0^T \|\psi(t)\, \omega \times \omega_j\|_2 \, dt = \int_0^T |\psi(t)| \, \|\omega \times \omega_j\|_2 \, dt \tag{2.21}$$

Observação:

$$\omega = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$$
$$\omega_j = (b_1(x), b_2(x), b_3(x)).$$

Usando a norma do máximo:

$$||\omega||_2 = \max\{||a_1||_2, ||a_2||_2, ||a_3||_2\}$$
$$||\omega_j||_2 = \max\{||b_1||_2, ||b_2||_2, ||b_3||_2\}$$
$$||\omega \times \omega_j||_2 = \max\{||a_2b_3 - a_3b_2||_2, ||a_3b_1 - a_1b_3||_2, ||a_1b_2 - a_2b_1||_2\}$$
$$||a_2b_3 - a_3b_2||_2 \leq ||a_2||_2||b_3||_2 + ||a_3||_2||b_2||_2.$$

Mas:

$$||a_2||_2 \leq ||w||_2$$
$$||b_3||_2 \leq ||w_j||_2$$
$$||a_3||_2 \leq ||w||_2$$
$$||b_2||_2 \leq ||w_j||_2.$$

Logo:

$$||\omega \times \omega_j||_2 \leq 6||\omega||_2||\omega_j||_2.$$

Assim (2.21) fica:

$$\int_0^T ||\psi(t)\,\omega \times \omega_j||_2 \;dt \leq 6\left(\int_0^T |\psi(t)| \;dt\right)||\omega||_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}||\omega_j||_2 < \infty.$$

Como $u_m \longrightarrow u$ fraco-$*$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ então:

$$\int_0^T (u_m, \omega \times \psi(t)\,\omega_j) \;dt \longrightarrow \int_0^T (u, \omega \times \psi(t)\,\omega_j) \;dt$$

Assim, podemos fazer $m \longrightarrow \infty$ em (2.19) e obter:

$$-\int_0^T (u_0, \omega_j)\,\psi(0) \;dt - \int_0^T (u, \omega_j)\,\psi'(t) \;dt + \mu\int_0^T (\nabla u, \psi(t)\,\nabla\omega_j) \;dt + \int_0^T b(v, u, \psi(t)\,\omega_j) \;dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \psi(t)\,\omega_j) \;dt + \int_0^T \eta(\omega \times u, \psi(t)\,\omega_j) \;dt$$
$$\int_0^T \tfrac{d}{dt}(u(t), w_j)\,\psi(t) \;dt + \mu\int_0^T (\nabla u, \psi(t)\,\nabla w_j) \;dt + \int_0^T b(v, u, \psi(t)\,w_j) \;dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \psi(t)\,w_j) \;dt + \int_0^T \eta(w \times u, \psi(t)\,w_j) \;dt.$$

Cálculo da pressão p:

$$\frac{d}{dt}(u,\overline{v}) + \mu(\nabla u, \nabla\overline{v}) + b(v,u,\overline{v}) = (f,\overline{v}) + \eta(\omega \times u, \overline{v})$$

definimos

$$U(t) = \int_0^t u(s)\ ds, \qquad F(t) = \int_0^t f(s)\ ds \qquad B(t) = \int_0^t b(v,u,\overline{v})\ dt$$
$$G(t) = \int_0^t (\omega \times u)\ dt, \qquad u \in C(0,T,V), \qquad \overline{v} \in V$$

Integrando em t:

$$\int_0^t \left[\tfrac{d}{dt}(u,\overline{v}) + \mu(\nabla u(t), \nabla\overline{v}) + b(v,u(t),\overline{v})\right]\ dt = \int_0^t \left[(f,\overline{v}) + \eta(\omega \times u, \overline{v})\right]\ dt$$
$$(u(t) - u_0, \overline{v}) + \mu(\nabla U, \nabla\overline{v}) + B(t) = (F(t), \overline{v}) + \eta(G(t), \overline{v})$$

Utilizando um argumento análogo ao da página 307 de TEMAM [13] juntamente com a proposição 1.13 dos preliminares obtemos que $\exists$ $p \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ tal que

$$u(t) - \mu\Delta u + +v \cdot \nabla u + \nabla p = f + \eta(\omega \times u)$$

2.1.3 Unicidade de u

Agora, nós provaremos a unicidade de u para a proposição 1.

Demonstração da unicidade:

Sejam (u_1, p_1) e (u_2, p_2) dois pares de funções sastisfazendo (2.12) logo $\widetilde{u} = u_1 - u_2$ e $\widetilde{p} = p_1 - p_2$ satisfaz:

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \mu\Delta\widetilde{u} + v \cdot \nabla(\widetilde{u}) + \nabla\widetilde{p} = 0 + \eta(\omega \times \widetilde{u}) \\ \text{div}\ \widetilde{u} = 0 \\ \widetilde{u}(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \\ \widetilde{u}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = (u_1 - u_2)|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Utilizando a desigualdade (2.14) obtemos:

$$||\widetilde{u}||^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + ||\widetilde{u}||^2_{L^2(0,T,V)} \leq c(0+0) = 0$$
$$||\widetilde{u}||^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} = ||\widetilde{u}||^2_{L^2(0,T,V)} = 0$$
$$\widetilde{u} \equiv 0 \text{ q.s. para } (x,t) \in Q_T$$
$$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \text{ q.s.}$$

Substituindo na equação (2.22) obtemos:

$$\nabla \widetilde{p} = 0 \Rightarrow \widetilde{p} \equiv c\,(t)$$

Logo:

$$p_1 - p_2 = c\,(t) \Rightarrow p_1 = p_2 + c\,(t)\,.$$

O resultado seguinte será útil na demonstração do Teorema 1.

Lema 1 *Suponha* $v \in C_0^\infty(\overline{Q}_T : \mathbb{R}^3)$, div $v = 0$, $h \in C^\infty(\overline{Q}_T, \mathbb{R})$, $h \geq 0$, $\varphi \in C^\infty(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^3)$ *e* $a \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ *então o seguinte problema*

$$\begin{cases} \omega_t + v \cdot \nabla \omega + h\omega = \varphi & em\ Q_T \\ \omega\,(x,0) = a\,(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

possui uma única solução $\omega \in C^\infty(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^3)$ *satisfazendo*

$$||\omega||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \leq ||a||_{L^3(\Omega)} + ||\varphi||_{L^1(0,T,L^3(\Omega))}. \tag{2.24}$$

DEMONSTRAÇÃO

Primeiro mostramos a unicidade:

Sejam ω^1 e ω^2 duas soluções de (2.23) então:

$$\begin{cases} \omega^1_t + v \cdot \nabla \omega^1 + h\omega^1 = \varphi \\ \omega^1\,(x,0) = a\,(x) \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \omega^2_t + v \cdot \nabla \omega^2 + h\omega^2 = \varphi \\ \omega^2\,(x,0) = a\,(x) \end{cases} \tag{2.26}$$

Considere $\omega = \omega^1 - \omega^2$, subtraindo (2.26) de (2.25) obtemos:

$$\begin{cases} \omega_t + v \cdot \nabla\omega + h\omega = 0 \\ \omega(x,0) = 0 \end{cases}$$

então ω é solução de (2.23) com $a \equiv \varphi \equiv 0$.

Portanto, ω satisfaz (2.24) com $a \equiv \varphi \equiv 0$.

Assim

$$||\omega||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} = 0 \Longrightarrow \omega \equiv 0 \qquad \text{qs. em } \overline{Q}_T.$$

Mas

$$\omega \in C^\infty(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^3) \text{ então } \omega \equiv 0 \text{ em } \overline{Q}_T.$$

Logo $\omega^1 \equiv \omega^2$.

Agora mostramos a existência.

Utilizando o método das características para obter solução de equações diferenciais parciais de 1^{a}ordem (conforme EVANS [4]) verificamos que a solução ω do problema (2.23) é dada por

$$\omega(x,t) = \exp\left(-\int_0^t h(y(\tau,x,t),\tau)\ d\tau\right)[a(y(0,x,t))$$
$$+\int_0^t \varphi(y(\tau,x,t),\tau)\exp\left(\int_0^\tau h(y(s,x,t),s)\ ds\right)\ d\tau$$

onde y é dado por

$$\begin{cases} y_{l,s}(s,x,t) = v_l(y(s,x,t),s), & (s,x,t) \in [0,T]\times\Omega\times[0,T] \\ y_l(s,x,t)\,|_{s=t} = x_l, & l = 1,2,3 \end{cases}$$

Por exemplo, em dimensão 1 temos:

$$\begin{cases} \omega_t + v\frac{\partial\omega}{\partial x} + h\omega = \varphi \\ \omega(x,0) = a(x) \end{cases}$$

Método das características:

Curva inicial: $(s, 0, a(s))$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}(m) = v(x,t) & x(0) = s \\ \overset{\bullet}{t}(m) = 1 & t(0) = 0 \\ \overset{\bullet}{z}(m) = \varphi - hz & z(0) = a(s) \end{cases}$$

Solução:

$$z(m,s) = \omega(x,t)$$

$$t = m$$

$$x(m) - x(0) = \int_0^m v(x,t) \ \ dm$$

$$x(m) = s + \int_0^m v(x(\xi, s), t) \ \ ds$$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{z}(m) + hz(m) = \varphi \\ \qquad z(0) = a(s) \end{cases}$$

onde a solução z é dada por

$$z(t) = \frac{1}{\omega(t)} \left(a(s) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\omega(s) \ \ ds \right)$$

$$z(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} h(s) \ \ ds \right) [a(s) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} h(\xi) \ \ d\xi \right) \ \ ds].$$

Sendo que a estimativa (2.24) pode ser obtida da seguinte forma

$$||\omega(x,t)||_{L^3} = \left\| \exp\left(-\int_0^t h(y(\tau,x,t),\tau) \ \ d\tau \right) [a(y(0,x,t)) + \int_0^t \varphi(y(\tau,x,t),\tau) \exp\left(\int_0^\tau h(y(s,x,t),s) \ \ ds \right) \ \ d\tau] \right\|_{L^3}$$

Mas

$$\exp\left(-\int_0^t h(y(\tau,x,t),\tau) \ \ d\tau \right) \leq 1.$$

Então,

$$||\omega(x,t)||_{L^3} \leq ||a(y(0,x,t))||_{L^3} + \left\| \int_0^t \varphi(y(\tau,x,t),\tau) \exp\left(\int_0^\tau h(y(s,x,t),s) \, ds \right) \ \ d\tau \right\|_{L^3}$$

Mas

$$\left\|\int\limits_0^t \varphi\left(y\left(\tau,x,t\right),\tau\right)\exp\left(\int\limits_0^t h\left(y\left(s,x,t\right),s\right)\ ds\right)\ d\tau]\right\|_{L^3}$$
$$\leq \int\limits_0^t \left\|\varphi\left(y\left(\tau,x,t\right),\tau\right)\right\|_{L^3} C_{T,h}\ d\tau$$

Pois para $t_0 \leq \xi \leq s \leq t \leq T$, temos que

$$\int\limits_0^s h\left(\xi\right)\ ds \leq \int\limits_0^T h\left(\xi\right)\ ds = C_{T,h}.$$

Assim

$$\int\limits_0^t \left\|\varphi\left(y\left(\tau,x,t\right),\tau\right)\right\|_{L^3} C_{T,h}\ d\tau \leq C_{T,h}\int\limits_0^\infty \left\|\varphi\left(y\left(\tau,x,t\right),\tau\right)\right\|_{L^3}\ d\tau.$$

Logo

$$||\omega||_{L^\infty(0,T,L^3)} \leq ||a||_{L^3} + C_{T,h}\ \ ||\varphi||_{L^2(0,T,L^3)}$$

Capítulo 3

Existência de Solução

Neste capítulo nós provaremos o Teorema 1. Primeiramente, lembramos a noção de suavizador.

Nós definimos o suavizador $\psi_\delta(u)$, $\delta > 0$ de uma função localmente integravél $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ como segue (conforme CAFFARELLI [3]). Seja $\psi(x,t)$ uma função fraca não negativa em $\mathbb{R}^4$ cujo suporte está contido o conjunto $A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : |x|^2 < t,\ 1 < t < 2\}$. Assumimos que a integral de ψ em $\mathbb{R}^4$ é igual a 1.

Ou seja,

$$supp\,\psi \subset A,\ \ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^4) \ \ \text{e} \ \ \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \psi(x,t)\ dx\ dt = 1.$$

Seja $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^4)$, para $\delta > 0$ definimos:

$$\psi_\delta(u)(x,t) = \tfrac{1}{\delta^4} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{y}{\delta}, \tfrac{\tau}{\delta}\right) u(x-y, t-\tau)\ dy\ d\tau$$

$$= \tfrac{1}{\delta^4} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{x-y}{\delta}, \tfrac{t-\tau}{\delta}\right) u(y,\tau)\ dy\ d\tau.$$

$$\psi_\delta(x,t) = \tfrac{1}{\delta^4}\psi\left(\tfrac{x}{\delta}, \tfrac{t}{\delta}\right)$$

O seguinte lema nos fornece alguns resultados referentes ao suavizador que serão utilizados na demonstração do teorema 1 que será feita na próxima secção.

Lema 2 *Seja $\psi(x,t)$ uma função definida em $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ tal que $\psi(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, supp $\psi \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : |x|^2 < t,\ 1 < t < 2\}$, $\psi(x,t) \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^4} \psi(x,t)\ dx\ dt = 1$.*

Então dada $u \in L^q\left(0,T,L^P(\Omega)\right)$ com $1 \leq p,\ q < \infty$, temos:

i)

$$\psi_\delta(u) \in C^\infty(Q_T, \mathbb{R}^3)$$

ii)

$$||\psi_\delta(u)||_{L^q(0,T,L^P(\Omega))} \leq C||u||_{L^q(0,T,L^P(\Omega))}.$$

iii)

$$||\psi_\delta(u)||_{L^\infty(0,T,L^P(\Omega))} \leq C||u||_{L^\infty(0,T,L^P(\Omega))}.$$

iv)

$$\psi_\delta(u) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} u \quad \text{em} \quad L^q\left(0,T,L^P(\Omega)\right).$$

v)

$$\text{Se } \ u \in L^1(0,T,V), \ \text{ então div } \psi_\delta(u) = 0.$$

Demonstração:

i) Como $\psi_\delta(u)(x,t) = \psi_\delta * u = u * \psi_\delta$, então a regularidade de $\psi_\delta(u)$ é a mesma de ψ_δ, isto é, $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Como ψ tem suporte contido na região A acima, então, a integral que define $\psi_\delta(u)$ somente não se anula se

$$1 < \frac{\tau}{\delta} < 2 \Rightarrow \delta < \tau < 2\delta.$$

Portanto, para os valores de u em:

$$-2\delta < -\tau < -\delta$$
$$t - 2\delta < t - \tau < t - \delta.$$

ii)

$$\|\psi_\delta(u)\|^q_{L^q(0,T,L^p(\Omega))} = \int_0^T \|\psi_\delta(u)(x,t)\|^q_p \ dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |\psi_\delta(u)(x,t)|^p \ dx\right)^{\frac{q}{p}} \ dt$$
$$= \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{1}{\delta^4} \left|\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{y}{\delta},\tfrac{\tau}{\delta}\right) u(x-y,t-\tau) \ dy \ d\tau\right|^p \ dx\right)^{\frac{q}{p}} \ dt$$
$$\leq \frac{1}{\delta^4}\int_0^T \left[\int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(\tfrac{y}{\delta},\tfrac{\tau}{\delta}\right)\right| \ |u(x-y,t-\tau) \ dy \ d\tau|^p \ dx\right)^p\right]^{\frac{q}{p}} \ dt$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, preliminar 1.1.

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(\tfrac{y}{\delta},\tfrac{\tau}{\delta}\right)\right| \ |u(x-y,t-\tau) \ dy \ d\tau|^p$$
$$\leq \left(\int_{supp}\int_{\psi} \left|\psi\left(\tfrac{y}{\delta},\tfrac{\tau}{\delta}\right)\right|^{p'} \ dy \ d\tau\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{supp}\int_{\psi} |u(x-y,t-\tau)|^p \ dy \ d\tau\right)^{\frac{p}{p}}.$$

Mas,

$$\left(\int_{supp}\int_{\psi} \left|\psi\left(\frac{y}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)\right|^{p'} \ dy \ d\tau\right)^{\frac{p}{p'}} = C_{\psi,\,\delta,\,p,\,p'} \equiv C,$$

onde

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Logo,

$$\|\psi_\delta(u)\|^q_{L^q(0,T,L^p(\Omega))} = \frac{1}{\delta^4}\int_0^T \left[\int_\Omega C \int_{supp}\int_{\psi} |u(x-y,t-\tau)|^p \ dy \ d\tau \ dx\right]^{\frac{q}{p}} \ dt$$
$$= \frac{C}{\delta^4}\int_0^T \left[\int_{supp}\int_{\psi}\int_\Omega |u(x-y,t-\tau)|^p \ dx \ dy \ d\tau\right]^{\frac{q}{p}} \ dt.$$

Fazendo, $x - y = x'$ obtemos

$$= \frac{C}{\delta^4}\int_0^T \left[\int_{supp}\int_{\psi}\int_{\Omega-y} \left|u\left(x',t-\tau\right)\right|^p \ dx' \ dy \ d\tau\right]^{\frac{q}{p}} \ dt.$$

Agora, fazendo $t - \tau = t'$

$$= \frac{C}{\delta^4} \int_{-\tau}^{t-\tau} \left[\int_{supp\ \psi} \int \int_{\Omega - y} |u(x', t')|^p \ dx' \ dy \ d\tau \right]^{\frac{q}{p}} \ dt'$$

$$= \frac{C}{\delta^4} |supp\ \psi| \int_{-\tau}^{t-\tau} \left[\int_{\Omega - y} |u(x', t')|^p \ dx' \right]^{\frac{q}{p}} \ dt'.$$

Como $u \equiv 0$ fora de Ω então:

$$||\psi_\delta(u)||^q_{L^q(0,T,L^p(\Omega))} \leq \frac{C}{\delta^4} |supp\,\psi| \int_0^T \left[\int_\Omega |u(x', t')|^p \ dx' \right]^{\frac{q}{p}} \ dt'$$

$$= C_{\delta,\ \psi} ||u||^q_{L^q(0,T,L^p(\Omega))}.$$

iii)

$$||\psi_\delta(u)||_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))} = \inf\{M > 0 : ||\psi_\delta(u)||_{L^p(\Omega)} \leq M \quad \text{q.s.} \quad t \in (0,T)\} \tag{3.1}$$

Mas:

$$||\psi_\delta(u)||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\psi_\delta(u)(x,t)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2}$$

agora, refazendo as contas da demonstração do item (ii) sem a integração no tempo e $q = 1$, (3.2) fica:

$$||\psi_\delta(u)||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\psi_\delta(u)(x,t)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_{\delta,\ \psi} ||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))}$$

q.s. em $t \in (0, T)$.

De acordo com a definição (3.1) tem-se:

$$||\psi_\delta(u)||_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))} \leq C||u||_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))}.$$

iv) A demonstração é bastante similar a existente no lema 2.18, item c de ADAMS [1].

v)

$$\operatorname{div}_x \psi_\delta(u) = \frac{1}{\delta^4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right) \operatorname{div}_x u(x-y, t-\tau)\; dy\; d\tau = 0,$$

pois $u \in V$, então $\operatorname{div}_x u(x-y, t-\tau) = 0$.

3.1 Demonstração do teorema 1

Agora, nós definimos as soluções aproximadas $\left(u^N, p^N, \omega^N\right)$, $N = 1, 2, \ldots$ de $(1)-(5)$. Assumimos que ω^0 é qualquer função em $L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$ e definimos as funções u^N, p^N, ω^N, $N = 1, 2, \ldots$ indutivelmente como soluções dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} u_t^N - \mu \Delta u^N + \left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right).\nabla\right) u^N + \nabla p^N = f + \eta\left(\omega^{N-1} \times u^N\right) \\ \operatorname{div}\ u^N = 0 \\ u^N(x, 0) = u_0(x),\ u^N|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0,\ \int_\Omega p^N = 0 \text{ em } [0, T] \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \omega_t^N + (v^N.\nabla)\omega^N + \psi_{\delta(N)}(F)\omega^N = \psi_{\delta(N)}(\varphi) \\ \omega^N(x, 0) = \omega_0^N(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

Solução de (3.3) :

Observe que de acordo com o lema 2 tem-se $\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) \in C^\infty\left(Q_T, \mathbb{R}^3\right)$, $\operatorname{div}\ \psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) = 0$ e $\omega^{N-1} \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$ devido ao lema 1 aplicado na equação (3.4). Aqui $\delta(N) = \dfrac{T}{N}$.

Assim, as hipóteses da proposição 1 são satisfeitas e portanto existe uma única u^N satisfazendo (2.13) e (2.14).

A partir de u^N obtemos v^N satisfazendo $v^N \in C_0^\infty\left(Q_T, \mathbb{R}^3\right)$, div $v^N \equiv 0$ e $\|v^N - u^N\| < \delta(N)$ devido à densidade do conjunto

$$B = \left\{f \in C_0^\infty\left(Q_T, \mathbb{R}^3\right) : \operatorname{div}\ f \equiv 0\right\} \quad \text{em} \quad L^2(0, T, V)$$

Finalmente, a equação (3.4) possui uma única solução devido ao lema 1. Observe que $\psi_{\delta(N)}(F) \in C^{\infty}(\overline{Q_T}, \mathbb{R})$ e $\psi_{\delta(N)}(F) \geq 0$ pois $F \geq 0$, $\psi_{\delta(N)}(\varphi) \in C^{\infty}(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^3)$, $\omega_0^N \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$; portanto, as hipóteses deste lema são satisfeitas.

Além disso, a desigualdade (2.24) é satisfeita com $\omega = \omega^N$, $v = v^N$, $h = \psi_{\delta(N)}(F)$, $a = \omega_0^N$, $\varphi = \psi_{\delta(N)}(\varphi)$.

Em geral, resolvemos, de acordo com a proposição 1, o sistema (3.3) com dado inicial $u^N(x,0) = u_0(x)$ no intervalo $\left(0, \frac{T}{N}\right)$ obtendo $u_1^N(x,t)$.

Em seguida, achamos a solução $u_2^N(x,t)$ de (3.3) no intervalo $\left(\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}\right)$ com dado inicial $u_2^N\left(x, \frac{T}{N}\right) = u_1^N\left(x, \frac{T}{N}\right)$.

E assim sucessivamente até obtermos $u_N^N(x,t)$ solução de (3.3) no intervalo $\left((N-1)\frac{T}{N}, T\right)$ com dado inicial $u_N^N\left(x, (N-1)\frac{T}{N}\right) = u_{N-1}^N\left(x, (N-1)\frac{T}{N}\right)$.

Além disto, (2.14) é satisfeita em cada subintervalo $(k.\delta(N), (k+1).\delta(N))$ com $u = u^N$, $v = \psi_{\delta(N)}(u^N)$, $\omega = \omega^{N-1}$ e $u_0(x) = u_{k\delta(N)}^N(x, k\delta(N))$.

$$||\omega^N||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \leq ||\omega_0^N||_{L^3(\Omega)} + ||\psi_{\delta(N)}(\varphi)||_{L^1(0,T,L^3(\Omega))} \qquad (3.5)$$

Mas

$$\begin{aligned} &||\omega_0^N - \omega_0||_{L^3} < \varepsilon \text{ para } N > N_\varepsilon \\ &\Rightarrow ||\omega_0^N||_{L^3} - ||\omega_0||_{L^3} \leq ||\omega_0^N - \omega_0||_{L^3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Para $\varepsilon = 1$

$$||\omega_0^N|| \leq 1 + ||\omega_0||_{L^3}$$

Além disto, de acordo com o item (ii) do lema 2 obtemos:

$$||\psi_{\delta(N)}(\varphi)||_{L^1(0,T,L^3(\Omega))} \leq C||\varphi||_{L^1(0,T,L^3(\Omega))} < \infty$$

Assim (3.5):

$$||\omega^N||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \leq 1 + ||\omega_0||_{L^3(\Omega)} + C||\varphi||_{L^1(0,T,L^3(\Omega))} = C$$

Portanto:

$$||\omega^N||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \leq C$$

Logo,

$$\{\omega^N\} \text{ é uma seqüência limitada em } L^\infty(0,T,L^3(\Omega)). \tag{3.6}$$

Assim, de acordo com a proposição preliminar 1.9, existe uma subseqüência de (ω^N), ainda denotada por (ω^N), para fins de simplificar a notação, que converge fraco- $*$ para ω em $L^\infty(0,T,L^3(\Omega))$.

$$\omega^N \rightarrow \omega \text{ fraco-} * \text{ em } L^\infty(0,T,L^3(\Omega)). \tag{3.7}$$

Em virtude da proposição 1 com $u = u^N$ em (2.14) obtemos:

$$||u^N||^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + ||u^N||^2_{L^2(0,T,V)} \leq C\left(||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(Q_T)}\right) = C$$

Assim, em virtude da desigualdade acima

$$\{u^N\} \text{ é uma seqüência limitada em } L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V), \tag{3.8}$$

Utilizando o resultado obtido em (3.8) e o lema 1.7 obtemos $Bu^N \in L^2(0,T,V')$. Portanto, u_t^N estão num conjunto limitado de $L^2(0,T,V')$.

Agora, utilizando o lema de compacidade de Aubin-Lions preliminar 1.15, com $X_0 = V$, $X = L^2(\Omega)$ e $X_1 = V'$ obtemos que

$$\{u^N\} \text{ fica em um subconjunto compacto de } L^2(Q_T). \tag{3.9}$$

Portanto, de acordo com as proposições preliminares 1.9 e 1.10, respectivamente, tem-se:

$$\begin{cases} u^N \rightarrow u \begin{cases} i) \text{ forte em } L^2(Q_T) \\ ii) \text{ fracamente em } L^2(0,T,V) \\ iii) \text{ fraco - } * \text{ em } L^\infty(0,T,H), \end{cases} \end{cases} \tag{3.10}$$

para subseqüências que ainda denotaremos por u^N.

Utilizando a desigualdade (1.1) do lema 1.14 em (3.3) obtemos:

$$||p^N||_{L^{5/4}(Q_T)}+||\nabla p^N||_{L^{5/4}(Q_T)} \leq C\Big(||f||_{L^{5/4}(Q_T)} + ||u_0||_{B^{2/5}_{5/4}(\Omega)}$$
$$+||\psi_{\delta(N)}(u^N)||^{2/5}_{L^\infty(0,T,H)} \cdot ||\psi_{\delta(N)}(u^N)||^{6/10}_{L^2(0,T,V)}||u^N||_{L^2(0,T,V)}$$
$$+ \left\|\omega^{N-1}\right\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \left\|u^N\right\|_{L^2(0,T,V)}\Big)$$

De (3.8) obtemos $||u^N||_{L^2(0,T,V)} \leq C$.

De (3.6) obtemos $||\omega^{N-1}||_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \leq C$.

Da parte (ii) do lema 2 obtemos:

$$||\psi_{\delta(N)}(u^N)||_{L^2(0,T,V)} \leq C||u^N||_{L^2(0,T,V)} \leq C$$

Da parte (iii) do lema 2 obtemos:

$$||\psi_{\delta(N)}(u^N)||_{L^\infty(0,T,H)} \leq C||u^N||_{L^\infty(0,T,H)} \leq C$$

Assim:

$$||p^N||_{L^{5/4}(Q_T)} + ||\nabla p^N||_{L^{5/4}(Q_T)} \leq C_{f,u_0} \equiv C$$

$$\{p^N\} \text{ e } \{\nabla p^N\} \text{ são seqüências limitadas em } L^{5/4}(Q_T), \tag{3.11}$$

Utilizando a proposição, preliminar 1.10 obtemos que:

$$p^N \longrightarrow p \text{ fracamente em } L^{5/4}(Q_T), \tag{3.12}$$

$$\nabla p^N \longrightarrow \nabla p \text{ fracamente em } L^{5/4}(Q_T), \tag{3.13}$$

$$\psi_{\delta(N)}(u^N) \rightarrow u \text{ fortemente em } L^2(Q_T). \tag{3.14}$$

De (iv) do lema 2 temos:

$$\psi_{\delta(N)}(u^N) \to u \text{ quando } \delta \to 0 \text{ em } L^q(0,T,L^p(\Omega))$$

Assim para $q = p = 2$ e $\delta = \delta(N)$ temos que

$$\psi_{\delta(N)}(u^N) \to u \text{ quando } N \to \infty \text{ em } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q_T) \tag{3.15}$$

$$||\psi_{\delta(N)}(u^N) - u||_{L^2(Q_T)} = ||(\psi_{\delta(N)}(u^N) - \psi_{\delta(N)}(u)) + (\psi_{\delta(N)}(u) - u)||_{L^2(Q_T)}$$
$$\leq ||(\psi_{\delta(N)}(u^N) - \psi_{\delta(N)}(u))||_{L^2(Q_T)} + ||(\psi_{\delta(N)}(u) - u)||_{L^2(Q_T)}$$

A segunda parcela tende para zero devido a (3.15). Quanto à primeira parcela, utilizamos a propriedade (ii) do lema 2 e assim obtemos:

$$||(\psi_{\delta(N)}(u^N) - \psi_{\delta(N)}(u))||_{L^2(Q_T)} = ||(\psi_{\delta(N)}(u^N - u)||_{L^2(Q_T)} \leq C||(u^N - u||_{L^2(Q_T)} \to 0$$

quando $N \to \infty$ por (3.10).

$$\psi_{\delta(N)}(F) \to F \text{ fortemente em } L^1\left(0,T,L^{3/2}(\Omega)\right) \tag{3.16}$$

Utilizando a propriedade (iv) do lema 2 com $q = 1$ e $p = \frac{3}{2}$ obtemos:

$$\psi_{\delta(N)}(F) \to F \text{ quando } N \to \infty \text{ fortemente em } L^1\left(0,T,L^{3/2}(\Omega)\right)$$

De (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) e (3.15) nós concluimos a existência de subseqüências $\{u^N\}$, $\{p^N\}$, $\{\omega^N\}$ (nós vamos denotar novamente por $\{u^N\}$, $\{p^N\}$, $\{\omega^N\}$) convergindo para limites u, p e ω quando $N \to \infty$.

Para completar a prova do teorema 1 nós devemos mostrar que o limite das funções u, p e ω é uma solução fraca de $(1)-(5)$. Para conseguir isso nós escrevemos identidades integrais (análogas para (2.7) – (2.9)) para as funções u^N, p^N, ω^N sendo uma solução dos problemas (3.3) e (3.4). Então, usando (3.7), (3.10), (3.12), (3.13), (3.14) e (3.16) nós mostramos que quando N tende para o infinito nessas identidades resulta (2.7) – (2.9). Isto é feito na página seguinte.

3.1.1 Passagem ao Limite

Multiplicando (3.3) por $a \in C_0^\infty\left(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^3\right)$ e integrando em $t \in [0,T]$ e $x \in \Omega$:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[-u^N a_t + \left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) \cdot \nabla u^N\right) a + \mu \nabla u^N \cdot \nabla a + \nabla p^N \cdot a\right] \; dx \; dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \left(\eta\left(\omega^{N-1} \times u^N\right) a + fa\right) \; dx \; dt + \int_\Omega u_0(x) \;\; a(x,0) \;\; dx \tag{3.17}$$

Multiplicando (3.4) por $a \in C_0^\infty\left(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^3\right)$ e integrando em $t \in [0,T]$ e $x \in \Omega$ obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[-\omega^N a_t + \left(v^N . \nabla \omega^N\right) . a + \psi_{\delta(N)}(F)\, \omega^N a\right] \; dx \; dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \psi_{\delta(N)}(\varphi) \; a \; dx \; dt + \int_\Omega \omega^N(x,0) \; a(x,0) \; dx$$

Isto é:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[-\omega^N a_t - \left(v^N \cdot \nabla a\right) \omega^N + \psi_{\delta(N)}(F) \cdot \omega^N a\right] \; dx \; dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \psi_{\delta(N)}(\varphi) . a \; dx \; dt + \int_\Omega \omega^N(x,0) \; a(x,0) \; dx. \tag{3.18}$$

Multiplicando a equação div $u^N = 0$ por $b \in C_0^\infty\left(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^3\right)$ obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega \text{div} \;\; u^N . b \;\; dx \;\; dt = 0$$

Isto é:

$$\int_0^T \int_\Omega u^N . \nabla b \;\; dx \;\; dt = 0 \tag{3.19}$$

Vamos fazer $N \to \infty$ nas diversas parcelas de (3.17), (3.18) e (3.19):

(i)

$$\int_0^T \int_\Omega u^N a_t \;\; dx \;\; dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u a_t \;\; dx \;\; dt$$

quando $N \to \infty$.

De fato :

$$\left|\int_0^T\int_\Omega u^N a_t \ dx \ dt - \int_0^T\int_\Omega u a_t \ dx \ dt\right| \leq \int_0^T\int_\Omega \left|u^N - u\right| \ |a_t| \ dx \ dt$$
$$\leq \left(\int_0^T\int_\Omega \left|u^N - u\right|^2 \ dx \ dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T\int_\Omega |a_t|^2 \ dx \ dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

pela desigualdade de Hölder, preliminar 1.1.

$$= C_a \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0$$

quando $N \to \infty$, por 3.10 (i)

(ii)

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) \cdot \nabla u^N\right) a \ dx \ dt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega (u \cdot \nabla u)\, a \ dx \ dt$$

quando $N \to \infty$.

Utilizando proposição preliminar 1.6 e lema 2, item (iv), provar a convergência acima é o mesmo que provar

$$\int_0^T b\left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right), a, u^N\right) \ dt \longrightarrow \int_0^T b(u, a, u) \ dt$$

quando $N \to \infty$.

Mas:

$$\left|\int_0^T b\left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right), a, u^N\right) \ dt - \int_0^T b(u, a, u) \ dt\right|$$
$$= \left|\int_0^T \left[b\left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right), a, u^N\right) - b\left(u, a, u^N\right) + b\left(u, a, u^N\right) - b(u, a, u)\right] \ dt\right|$$
$$= \left|\int_0^T \left[b\left(\psi_{\delta(N)}(u^N) - u, a, u^N\right) \ + b\left(u, a, u^N - u\right)\right] \ dt\right|$$
$$\leq \int_0^T \left|b\left(\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) - u, a, u^N\right)\right| \ dt \ + \int_0^T \left|b\left(u, a, u^N - u\right)\right| \ dt$$
$$\leq \|a\|_{L^\infty(Q_T)} \left\|\psi_{\delta(N)}\left(u^N\right) - u\right\|_{L^2(Q_T)} \left\|u^N\right\|_{L^2(Q_T)} + \|a\|_{L^\infty(Q_T)} \|u\|_{L^2(Q_T)} \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)}$$

Devido a (3.10) (i) $u^N \to u$ forte em $L^2(Q_T)$ e assim $\left\|u^N\right\|_{L^2(Q_T)} \leq k$. Assim, a segunda parcela acima tende a zero e como vale (3.14) então a primeira parcela acima também tem limite zero.

(iii)

$$\int_0^T \int_\Omega \mu \nabla u^N \cdot \nabla a \ dx \ dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla a \ dx \ dt$$

quando $N \to \infty$.

De (3.10) (ii) obtemos que $u^N \to u$ fraco em $L^2\left(0, T, H_0^1(\Omega)\right)$.

Logo

$$\forall f \in \left(L^2\left(0, T, H_0^1(\Omega)\right)\right)' \cong L^2\left(0, T, H^{-1}(\Omega)\right)$$

tem-se:

$$\int_0^T \left(\nabla f(t), \nabla u^N(t)\right)_{L^2(\Omega)} \ dt \longrightarrow \int_0^T \left(\nabla f(t), \nabla u(t)\right)_{L^2(\Omega)} \ dt$$

quando $N \to \infty$.

Mas

$$f(t) = a(t) \in C_0^\infty(Q_T) \subset L^2\left(0, T, H^{-1}\right)$$

pois:

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong \left(L^2\right)' \subset H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

(iv)

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla p^N \cdot a \ \ dx \ dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot a \ dx \ dt$$

quando $N \to \infty$.

Como $a \in C_0^\infty(Q_T)$ então $a \in L^5(Q_T) \equiv \left(L^{5/4}(Q_T)\right)'$.

Logo,

$$\left\langle a, \nabla p^N \right\rangle_{L^{5/4}, L^5} \longrightarrow \left\langle a, \nabla p \right\rangle_{L^{5/4}, L^5}$$

pois:

$$\left\langle a, \nabla p^N \right\rangle_{L^{5/4},L^5} = \int_0^T \int_\Omega \nabla p^N \cdot a \ dx \ dt$$

(v)

$$\int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega^{N-1} \times u^N\right) a \ dx \ dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega \times u\right) a \ dx \ dt$$

quando $N \to \infty$.

De fato:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega^{N-1} \times u^N\right) a \ dx \ dt - \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega \times u\right) a \ dx \ dt \right| \\
&= \left| \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega^{N-1} \times u^N\right) a \ dx \ dt - \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega^{N-1} \times u\right) a \ dx \ dt \right. \\
&\left. + \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega^{N-1} \times u\right) a \ dx \ dt - \int_0^T \int_\Omega \eta \left(\omega \times u\right) a \ dx \ dt \right| \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left| \eta \left(\omega^{N-1} \times u^N\right) a - \eta \left(\omega^{N-1} \times u\right) a \right| \ dx \ dt + \int_0^T \int_\Omega \left| \eta \left(\omega^{N-1} \times u\right) a - \eta \left(\omega \times u\right) a \right| \ dx \\
&\leq \eta \left\|a\right\|_{L^\infty(\overline{Q_T})} \int_0^T \int_\Omega \left| \omega^{N-1} \times \left(u^N - u\right) \right| \ dx \ dt + \eta \left\|a\right\|_{L^\infty(\overline{Q_T})} \int_0^T \int_\Omega \left| \left(\omega^{N-1} - \omega\right) \times u \right| \ dx \ dt \\
&\leq C \int_0^T \int_\Omega \left|\omega^{N-1}\right| \ \left|u^N - u\right| \ dx \ dt + C \int_0^T \int_\Omega \left|\omega^{N-1} - \omega\right| \ \left|u\right| \ dx \ dt
\end{aligned}$$

Para a primeira integral acima utilizamos a desigualdade de Hölder, preliminar 1.1:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left|\omega^{N-1}\right| \ \left|u^N - u\right| \ dx \ dt \leq \left\|\omega^{N-1}\right\|_{L^2(Q_T)} \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \\
&\leq C \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $N \to \infty$, por (3.10).

Para a segunda integral observe que

$$u \in L^1\left(0, T, L^{3/2}\left(\Omega\right)\right)$$

e que

$$\left(L^1\left(0, T, L^{3/2}\left(\Omega\right)\right)\right)' = L^\infty\left(0, T, L^3\left(\Omega\right)\right).$$

Assim:

$$\left\langle u, \omega^{N-1} - \omega \right\rangle_{L^1\left(0,T,L^{3/2}(\Omega)\right),L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega u \cdot \left(\omega^{N-1} - \omega\right) \; dx \; dt \longrightarrow 0$$

quando $N \longrightarrow \infty$

$$\Longrightarrow \int_0^T \int_\Omega |u| \;\; \left|\omega^{N-1} - \omega\right| \; dx \; dt \longrightarrow 0$$

quando $N \longrightarrow \infty$.

Assim, fazendo $N \to \infty$ em (3.17) obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left[-u a_t + (u \cdot \nabla u)\, a + \mu \nabla u \cdot \nabla a + \nabla p \cdot a\right] \; dx \; dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left(\eta\,(\omega \times u)\, a + f a\right) \; dx \; dt + \int_\Omega u_0(x)\, a(x,0) \; dx \end{aligned}$$

Isto é:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[u_t a + (u \cdot \nabla u)\, a + \mu \nabla u \cdot \nabla a + \nabla p \cdot a\right] \; dx \; dt = \int_0^T \int_\Omega \left(\eta\,(\omega \times u)\, a + f a\right) \; dx \; dt$$

Agora, vamos fazer $N \to \infty$ na equação (3.18). Vejamos o limite em cada parcela:

i)

$$\int_0^T \int_\Omega -\omega^N a_t \; dx \; dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega -\omega a_t \; dx \; dt$$

quando $N \to \infty$.

De fato:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\omega^N - \omega\right) a_t \; dx \; dt \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

pois

$$a(t) \in C_0^\infty\left(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^3\right) \subset L^1\left(0, T, L^{3/2}(\Omega)\right)$$

e

$$\left(L^1\left(0,T,L^{3/2}(\Omega)\right)\right)' = L^\infty\left(0,T,L^3(\Omega)\right)$$

ii)

$$\int_0^T \int_\Omega \left(v^N \cdot \nabla a\right)\omega^N \; dx \; dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \left(u \cdot \nabla a\right)\omega \; dx \; dt$$

Primeiro observe que $v^N \longrightarrow u$ em $L^2(Q_T)$ forte pois:

$$\left\|v^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} = \left\|v^N - u^N + u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \leq \left\|v^N - u^N\right\|_{L^2(Q_T)} + \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} < \frac{T}{N} +$$

desde que $N > N_\varepsilon'$.

Assim:

$$v^N \cdot \nabla a \longrightarrow u \cdot \nabla a \qquad \text{em } L^2(Q_T)$$

Como

$$\omega^N \longrightarrow \omega \text{ fraco-} * \text{em } L^\infty\left(0,T,L^3(\Omega)\right)$$

então

$$\omega^N \longrightarrow \omega \text{ fraco-} * \text{em } L^2(Q_T)$$

pois

$$L^\infty\left(0,T,L^3(\Omega)\right) \subset L^2(Q_T)$$

e

$$\left(L^2(Q_T)\right)' \cong L^2(Q_T)$$

Utilizando a proposição 1.12 dos preliminares obtemos a convergência desejada.

iii)

$$\int_0^T \int_\Omega \left[\psi_{\delta(N)}(F)\,\omega^N a\right]\ dx\ dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega F\omega a\ dx\ dt$$

quando $N \to \infty$.

Como $\omega^N \longrightarrow \omega$ fraco-$*$ em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ e de acordo com o item (iv) do lema 2 tem-se que $\psi_{\delta(N)}(F).a \longrightarrow F.a$ em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$; então, de acordo com a proposição 1.12 dos preliminares obtemos a convergência desejada.

iv)

$$\int_0^T \int_\Omega \psi_{\delta(N)}(\varphi)\,a\ dx\ dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \varphi a\ dx\ dt$$

quando $N \to \infty$.

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \left(\psi_{\delta(N)}(\varphi) - \varphi\right) a\ dx\ dt\right| \leq \int_0^T \int_\Omega \left|\psi_{\delta(N)}(\varphi) - \varphi\right|\ |a|\ dx\ dt$$
$$\leq \int_0^T \left(\int_\Omega \left|\psi_{\delta(N)}(\varphi) - \varphi\right|^3\ dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_\Omega |a|^{3/2}\ dx\right)^{\frac{2}{3}}\ dt$$
$$\leq C\int_0^T \left\|\psi_{\delta(N)}(\varphi) - \varphi\right\|_3\ dt \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

devido ao item (iv) do lema 2, observando que $\varphi \in L^1(0,T,L^3(\Omega))$.

v)

$$\int_\Omega \omega^N(x,0)\ a(x,0)\ dx \longrightarrow \int_\Omega \omega(x,0)\ a(x,0)\ dx$$

quando $N \to \infty$.

De acordo com as hipóteses, $\omega^N(x,0) = \omega_0^N(x)$ é uma seqüência de funções suaves convergindo para ω_0.

Logo:

$$\left|\int_\Omega \omega_0^N(x)\ a(x,0)\ dx - \int_\Omega \omega_0(x)\ a(x,0)\ dx\right| \leq \int_\Omega \left|\omega_0^N(x) - \omega_0(x)\right|\ \left|a(x,0)\right|\ dx$$
$$\leq \left\|\omega_0^N(x) - \omega_0(x)\right\|_3\ \|a\|_{3/2} \longrightarrow 0$$

quando $N \longrightarrow \infty$.

Assim, fazendo $N \to \infty$ em (3.18) obtemos:

$$\int_0^T\int_\Omega [-\omega a_t - (u.\nabla a).\omega + F\omega a]\ dx\ dt = \int_0^T\int_\Omega \varphi\cdot a\ \ dx\ \ dt + \int_\Omega \omega_0(x)\ a(x,0)\ \ dx$$
$$\int_0^T\int_\Omega [\omega_t a + (u\cdot\nabla\omega)\cdot a + F\omega a]\ \ dx\ \ dt = \int_0^T\int_\Omega \varphi\cdot a\ \ dx\ \ dt$$

Finalmente:

$$\int_0^T\int_\Omega u^N\cdot\nabla b\ dx\ dt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega u\cdot\nabla b\ dx\ dt$$

quando $N \to \infty$, pois:

$$\left|\int_0^T\int_\Omega u^N\cdot\nabla b\ dx\ dt - \int_0^T\int_\Omega u\cdot\nabla b\ dx\ dt\right|$$
$$\leq \int_0^T\int_\Omega \left|u^N - u\right|\ \ |\nabla b|\ \ dx\ \ dt \leq \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla b\|_{L^2(Q_T)}$$
$$\leq C\left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

Observação: No caso em que supomos $F = F(p)$ e u e ω não dependendo de t (problema estacionário) resultados de existência e unicidade de solução podem ser vistos em VEIGA [14].

Capítulo 4

Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros

Neste trabalho, apresentamos um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o movimento incompressível de um meio granular, suposto com densidade e viscosidade constantes, movimentando-se numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Primeiramente observamos que o sistema é bastante semelhante ao de Navier-Stokes, sendo a principal diferença a introdução da função incógnita $\omega(x,t) \in \mathbb{R}^3$ que representa uma velocidade angular de rotação das partículas (quando $\omega = (0,0,0)$ obtemos o sistema de Navier-Stokes). O principal resultado demonstrado é um teorema de existência de solução fraca em espaços de Sobolev.

O método utilizado na demonstração foi o espectral de Galerkin onde primeiramente fazemos uma formulação fraca do referido sistema. Aqui não enfrentamos grandes dificuldades, pois a forma de obtenção de tal formulação fraca resultou bastante semelhante a feita para o sistema de Navier-Stokes (conforme TEMAM [13]) sendo a grande diferença a formulação fraca para a equação da velocidade angular.

O passo seguinte foi a obtenção de existência de solução fraca para um problema linearizado o qual, apesar de trabalhoso, também não apresentou dificuldades intransponíveis.

Finalmente, após a obtenção de algumas estimativas para as soluções aproximadas e, conseqüentemente, algumas convergências, utilizando formulações fracas para u, ω e p (veja (3.3) e (3.4)) podemos fazer $N \longrightarrow \infty$ e garantir assim a existência de solução fraca para o nosso problema, sendo esta talvez a parte que demandou maior técnica.

A principal novidade do método utilizado é o uso de funções suavizadoras e algumas de suas convergências (veja lema 2) o qual foi necessário devido à existência do sistema de equações para a velocidade angular e também porque este sistema não está desacoplado do sistema de equações para o momento.

Entre algumas sugestões para trabalhos futuros destacamos:

- Obtenção de uma possível unicidade quando a dimensão é 2.
- Existência de solução quando $\mu = \mu(p)$.
- Busca de soluções mais regulares, talvez em espaços funcionais mais exigentes (Hölder).

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R., **Sobolev Spaces,** Academic Press, New York, 1975.

[2] BREZIS, H., **Análisis Funcional-Teoría y Aplicaciones.** Aliança Editorial S. A., Madrid, 1983.

[3] CAFFARELLI, L., Kohn R., Nirenberg, L., **Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations**, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982) 771 – 831.

[4] EVANS, L. C., **Berkeley Mathematics Lectures Notes-Partial Differential Equations**, 1993.

[5] HALE, J. K., **Ordinary Diferential Equations**, Wiley-Interscience a Division of John Wiley & Sons, New York, 1969.

[6] LADYZENSKAJA, O. A. -N. N. Ural'ceva, **Équations aux dérives partielles de type elliptique,** Dunod, Paris (1968).

[7] LELUCH, V. D., NENASHEV, E. N., **Toward the theory of motion of a granulated medium in steady gas phase, Application of Analytical and Numerical Methods in Mechanics of Fluid and Granulated Media**, Gorkij, (1972), 4 – 20, (in Russian).

[8] LIMA, E. L., **Um Curso de Análise,** Volume 2, SBM, Rio de Janeiro, 1981.

[9] LIONS, J. L., **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires,** Dunod, Paris, 1969.

[10] LUKASZEWICZ, G. , **An Existence Theorem for a Model System of Equations of a Granulated Medium,** Bulletin of the polish academy of sciences mathematics, Vol. 32, N. 9-10, pag. 625-633, 1984.

[11] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M. M., **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.** UFRJ, Notas de Aulas, Rio de Janeiro, 1989.

[12] SOLONNIKOV, V. A., **A priori estimates for second-order parabolic equations**, Trudy Mat. Inst. Steklov, 70 (1964), 133−212, (in Russian).

[13] TEMAM, R., **Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis,** North-Holland Publishing Company, New York-Oxford, 1979.

[14] VEIGA, H. B., **On the Stationary Motion of Granulated Media**, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 77, 243−253, (1987).