UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Aplicação da Teoria das Matrizes

Não-negativas e Matrizes-M

ao Modelo de Leontief

por

Sérgio José Rech

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. **Oclide José Dotto**
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2002

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rech, Sérgio José

Aplicação da Teoria das Matrizes Não-negativas e Matrizes-M ao Modelo de Leontief / Sérgio José Rech – Porto Alegre, PPGMAp da UFRGS, 2002.

4 p: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002. Orientador: Dotto, Oclide José.

Dissertação: Álgebra Linear

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS MATRIZES NÃO-NEGATIVAS E MATRIZES-M AO MODELO DE LEONTIEF

por

Sérgio José Rech

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Algoritmos Numéricos e Algébricos

Orientador: Prof. Dr. Oclide José Dotto

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Luiz Becker

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha

Dissertação apresentada e aprovada em 26 de setembro de 2002

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que viabilizaram e contribuíram para a definição, organização, análise e execução do presente estudo.

Agradeço, de modo todo especial,

- ao prof. Dr. Oclide José Dotto, meu orientador, pelo apoio incondicional e pelo tempo despendido na tarefa de me orientar com vistas à realização dos objetivos propostos para a consecução do meu trabalho final;

- aos professores do Curso de Mestrado que contribuíram significativamente para o embasamento teórico desta pesquisa;

- aos colegas Fábio, Lucile, Simone e Caleffi, pelo incentivo durante a fase de estudos disciplinares;

- aos familiares, pelo interesse e estímulos constantes para que eu pudesse vencer mais uma etapa da minha formação profissional;

- à Universidade de Caxias do Sul, pelo apoio acadêmico que me oportunizou as necessárias condições para que fosse possível iniciar e finalizar as diferentes etapas do meu processo de qualificação institucional.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Símbolos e Notações

Letra em negrito denotará matriz ou vetor

Vetor será sempre vetor-coluna

$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$	todos os elementos de **A** são não-negativos
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e ao menos um elemento de **A** é positivo
$\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$	todos os elementos de **A** são positivos
$\mathbf{I}$	matriz identidade de ordem conveniente
$\mathbf{P}$	matriz de permutação
$\mathbf{A}^t$	transposta de **A**
$\mathbf{A}^{-1}$	inversa de **A**
$\mathbf{A}^+$	pseudoinversa de **A**
$\mathbf{A}^D$	inversa de Drazin de **A**
$G(\mathbf{A})$	grafo orientado de **A**
$\sigma(\mathbf{A})$	espectro de **A**
$\rho(\mathbf{A})$	raio espectral de **A**
col(**A**) ou col**A**	espaço gerado pelas colunas de **A**
ind(**A**) ou ind**A**	índice de **A**
posto(**A**) ou posto**A**	posto (rank) de **A**
det(**A**) ou det**A**	determinante de **A**
adj(**A**) ou adj**A**	adjunta clássica de **A**
$\mathbb{R}^n$	espaço vetorial do vetores com n componentes reais
$Z^{n\times n}$	conjunto das matrizes com elementos não-diagonais negativos ou nulos
Re(x) ou Rex	parte real do número complexo x
$\Vert\bullet\Vert$	norma-2 (euclidiana) matricial ou vetorial

Resumo

Seja um sistema econômico, que envolve n indústrias interdependentes tais que cada indústria produz um único tipo de artigo. Denotemos com t_{ij} a quantidade da entrada (insumo) da $i^{\text{ésima}}$ mercadoria que a economia necessita para produzir uma unidade da mercadoria j de saída (produto). A matriz $\mathbf{T} := [\ t_{ij}\ ]$ de insumo-produto de Leontief é uma matriz não-negativa. Descreveremos as propriedades das matrizes não-negativas, necessárias para uma análise matemática do modelo de Leontief. Se esse modelo descreve uma economia viável, a soma dos elementos em cada coluna de **T** será menor ou igual a 1. Suponhamos mais que o sistema econômico modelado contenha um setor aberto, onde trabalho, lucro, etc. entram como segue.

Seja x_i o produto total que a indústria i requer para atender à demanda do setor aberto e das n indústrias. Então $\mathbf{x} = \mathbf{Tx} + \mathbf{d}$, onde $\mathbf{d} := [\ d_i\ ]$ é o vetor das demandas, isto é, d_i é a demanda do setor aberto sobre a indústria $i^{\text{ésima}}$. Aqui $t_{ij}x_j$ representa o insumo que a $j^{\text{ésima}}$ indústria necessita da $i^{\text{ésima}}$ indústria. Os níveis de produção requeridos pela totalidade das n indústrias, a fim de poder atender a essas demandas, constituem o vetor-solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$, com $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$. Como a soma dos elementos de cada coluna de **T** é menor ou igual a 1, o raio espectral de **T** também é menor ou igual a 1. Quando o raio espectral é menor que 1, **T** é convergente e **A** tem um inversa com todos os elementos não-negativos (matriz não-negativa). Discutiremos as matrizes não-negativas. Além disso, os elementos não-diagonais de $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ são todos negativos ou nulos. Matrizes com esse quadro de sinais, cujas inversas são não-negativas, são ditas matrizes-M não-singulares. Discutiremos também as matrizes-M não-singulares e singulares.

O objetivo principal deste trabalho é a aplicação interessante da teoria das matrizes não-negativas e matrizes-M, na análise do modelo de Leontief descrito muito brevemente acima, resultando um método elegante de análise de insumo-produto.

Palavras-chave: **matrizes não-negativas, matrizes-M, modelo de Leontief.**

Abstract

Let us consider an economic system, that involves n interdependent industries, assuming that each industry produces only one type of commodities. Let t_{ij} denote the amount of input of the ith commodity needed by the economy to produce a unit output of commodity j. The Leontief input-output matrix $\mathbf{T} := [\ t_{ij}\ ]$ is a nonnegative matrix. We will describe the properties of nonnegative matrices, necessary for a mathematical analysis of the Leontief's model. If that model describes an economically feasible situation, the sum of the elements in each column of $\mathbf{T}$ does not exceed 1. Let us further suppose that the modeled economic system contains an open sector, where labor, profit, etc. enter in the following way.

Let x_i be the total output of the industry i required to meet the demand of the open sector and all n industries. Then $\mathbf{x} = \mathbf{Tx} + \mathbf{d}$, where $\mathbf{d} := [\ d_i\ ]$, is the vector of the demands, that is, d_i is the demand of the open sector from the ith industry. Here $t_{ij}x_j$ represents the input requirement of the jth industry from the ith. The output levels required of the totality of the n industries, in order to meet these demands, are the solution vector $\mathbf{x}$ of the linear system $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$, with $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$. As the sum of the elements of each column of $\mathbf{T}$ is at most 1, it follows that the spectral radius of $\mathbf{T}$ is also at most 1. When the spectral radius is less than 1, $\mathbf{T}$ is convergent and $\mathbf{A}$ is inverse-positive, that is, $\mathbf{A}^{-1}$ is a nonnegative matrix. We will discuss the nonnegative matrices. Besides, $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ has all its off-diagonal entries nonpositive. Inverse-positive matrices with this sign pattern are called nonsingular M-matrices. We will also discuss nonsingular and singular M-matrices.

The main goal of this work is the interesting application of the nonnegative matrices and M-matrices theory to the analysis of the Leontief's model, described very shortly above, resulting in an elegant method of input-output analysis.

Key-words: **nonnegative matrix, M-matrix, Leontief's model.**

INTRODUÇÃO

Em 1973, o Prêmio Nobel de Economia coube a Wassily W. Leontief, considerado o pai da análise de insumo-produto, por seu trabalho pioneiro nesse campo. Russo naturalizado americano, Leontief formou-se em Ciências Econômicas em Berlim, em 1920. Data dessa época o início do seu interesse pela teoria de insumo-produto, que se ocupa da interdependência entre os vários setores produtores e consumidores de uma economia. Em 1931 Wassily Leontief transferiu-se para os Estados Unidos, onde organizou o Centro de Pesquisas Econômicas da Universidade de Harvard. Dez anos depois, em 1941, surgiu a primeira edição da obra *The Structure of the American Economy* [22], obra básica para a análise de insumo-produto, na qual Leontief apresenta a aplicação dessa teoria para a economia americana do período entre os dois grandes conflitos mundiais. Leontief desenvolveu o método de *entrada-saída* (outro nome pelo qual é conhecida a análise de insumo-produto), basicamente para ser aplicado a economias nacionais americanas. A criação de Leontief, entretanto, tem sido empregada, com bons resultados, a sistemas menores, como economias regionais, grandes empresas integradas, etc. Por outro lado, também tem sido utilizada no estudo de sistemas que abrangem relações econômicas internacionais.

Atualmente o método de insumo-produto é usado por várias dezenas de países, entre os quais Holanda, Itália, Noruega, Dinamarca, Grã-Bretanha, Japão, Argentina, Israel e Austrália, além dos Estados Unidos. Entre esses países, está-se colocando o Brasil, que já dispõe de matriz de insumo-produto. O método do insumo-produto é um assunto hoje clássico e inteiramente conhecido. Mas nosso objetivo não é estudar esse método, e sim mostrar uma instrumentação matricial própria para sua análise detalhada e segura.

Consideremos uma situação econômica que envolve n indústrias interdependentes, supondo, para simplificar, que cada indústria produza um único artigo. Denotemos com t_{ij} a quantidade da entrada (insumo) da $i^{\text{ésima}}$ mercadoria que a economia necessita para produzir uma unidade da mercadoria j de saída (produto). A *matriz* $\mathbf{T} := [\ t_{ij}\ ]$ *de insumo-produto de Leontief* é uma *matriz não-negativa*. Assim, no Capítulo 1 descrevemos as propriedades das matrizes não-negativas necessárias para uma análise matemática do modelo de Leontief. Se esse modelo descreve uma economia viável, a soma dos elementos em cada coluna de **T** será menor ou igual a 1. Suponhamos mais que o sistema econômico modelado contenha um setor aberto, onde trabalho, lucro, etc. entram como segue.

Seja x_i o produto total que a indústria i requer para atender à demanda do setor aberto e das n indústrias. Então

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

onde $\mathbf{d} := [\ d_i\ ]$ é o vetor das demandas, isto é, d_i é a demanda do setor aberto sobre a indústria $i^{\text{ésima}}$. Aqui $t_{ij}x_j$ representa o insumo que a $j^{\text{ésima}}$ indústria requer da $i^{\text{ésima}}$ indústria. Os níveis de produção requeridos pela totalidade das n indústrias, a fim de poder atender a essas demandas, constituem o vetor-solução do sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \text{ com } \mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}. \tag{1}$$

Como a soma dos elementos de cada coluna de **T** é menor ou igual a 1, o raio espectral de **T** também é menor ou igual a 1. Quando o raio espectral é menor que 1, **T** é convergente e **A** tem um inversa com todos os elementos não-negativos (matriz não-negativa). Discutiremos as matrizes não-negativas no Capítulo 1. Para **A** nessa condição, a solução do sistema linear (1) é o único vetor **x**, calculado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k\right)\mathbf{d}.$$

Além disso, os elementos não-diagonais de $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ são todos negativos ou nulos. Matrizes com esse quadro de sinais, cujas inversas são não-negativas, são ditas matrizes-M não-singulares. No Capítulo 1 também discutiremos as matrizes-M não-singulares e singulares.

O objetivo principal deste trabalho é o conteúdo do Capítulo 2, destinado inteiramente para discutir a aplicação interessante da teoria das matrizes não-negativas e matrizes-M, na análise do modelo de Leontief, descrito muito brevemente acima, criando um método elegante de análise de insumo-produto, que, até onde sabemos, não costuma ser seguido pelos economistas, embora, como constará na conclusão, a teoria das matrizes-M seja plenamente eficiente para essa análise, devido às inúmeras maneiras de verificar se uma matriz é uma matriz-M, singular ou não, que tem ou não a propriedade c. Algumas dessas maneiras são muito simples teoricamente. Na prática defrontamo-nos com o grande tamanho das matrizes que ocorrem, mas os computadores e os métodos computacionais hoje estão muito avançados e permitem facilmente superar as dificuldades que esse tamanho possa acarretar.

Reivindicamos para nós, neste trabalho, apenas sua estruturação, o levantamento bibliográfico, a clarificação de algumas demonstrações e a criação de certas argumentações. Alguns dos resultados, por serem mais conhecidos, não terão sua demonstração incluída no trabalho, mas apenas seu enunciado, e indicações onde encontrar a demonstração.

1 MATRIZES NÃO-NEGATIVAS E MATRIZES-M

1.1 Preliminares

Na primeira parte deste capítulo, vamos ocupar-nos com as matrizes quadradas *não-negativas*, isto é, matrizes reais que não têm elementos negativos. Devemos a Perron e Frobenius (cf. [02]) grande parte do desenvolvimento da teoria sobre essa classe de matrizes. Nosso principal objetivo é aplicar os resultados no campo econômico, o que será feito no Capítulo 2.

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = [\ a_{ij}\ ]$ e $\mathbf{B} = [\ b_{ij}\ ]$, escrevemos:

- $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ se e somente se $a_{ij} \geq b_{ij}$ para todo i e j;
- $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ se e somente se $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$ se e somente se $a_{ij} > b_{ij}$ para todo i e j.

Então $\mathbf{A}$ é uma matriz não-negativa se e somente se $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é matriz nula. Essas matrizes aplicam o conjunto $\mathbb{R}^n_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ sobre si mesmo. Matrizes que satisfazem $\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$ são ditas *matrizes positivas* e formam uma subclasse da classe das matrizes não-negativas. Um tipo importante de matrizes não-negativas é constituído pelas *matrizes estocásticas*, que são matrizes quadradas, para as quais os elementos de cada coluna são números não-negativos menores ou iguais a 1, cuja soma é 1.

Como é usual, indicamos e definimos com

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ e' autovalor de } \mathbf{A}\}$$

o raio espectral da matriz **A**.

1.1.2 Teorema. *Se* **A** *é uma matriz quadrada não-negativa, então*

1) $\rho(\mathbf{A})$ *é uma autovalor;*

2) **A** *tem um autovetor não-negativo correspondente a* $\rho(\mathbf{A})$;

3) $\mathbf{A}^t$, *a transposta de* **A**, *tem um autovetor não-negativo correspondente a* $\rho(\mathbf{A})$.

Uma demonstração do Teorema 1.1.2 encontra-se em [06].

1.1.3 Definição. Reordenamento *de uma matriz quadrada* **A** *é toda matriz* $\mathbf{PAP}^t$, *onde* **P** *é uma matriz de permutação.*

No busca de maneiras para simplificar a resolução de um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, foi observado que, em certos casos, é possível extrair um ou mais subsistemas que podem ser resolvidos independentemente, casos em que designamos o sistema dado de *redutível*. Transferimos o conceito para a matriz **A** com a seguinte definição.

1.1.4 Definição. *Dizemos que uma matriz quadrada* **A** *é* redutível *se e somente se existe para ela um reordenamento*

$$\mathbf{PAP}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

onde os blocos diagonais são matrizes quadradas; por conveniência também incluímos na classe das redutíveis as matrizes de ordem 1 *e as nulas. Uma matriz, que não é redutível, é dita* irredutível.

O teorema seguinte traz cinco caracterizações da irredutibilidade de uma matriz quadrada não-negativa de ordem maior que 1. As demonstrações das diversas partes encontram-se ou em [02], ou em [06], ou em [46], ou em [47].

1.1.5 Teorema. *São equivalentes as seguintes afirmações a respeito de uma matriz quadrada não-negativa* $\mathbf{A}$ *de ordem* $n > 1$:

1) $\mathbf{A}$ *é irredutível;*

2) Nenhum autovetor não-negativo de $\mathbf{A}$ *tem componentes nulas;*

3) $\mathbf{A}$ *tem um único autovetor* $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, *a menos de múltiplos* $\alpha\mathbf{v}$, *e esse autovetor é positivo;*

4) Se $\alpha\mathbf{x} \geq \mathbf{A}\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, *então* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$;

5) $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1} \succ \mathbf{0}$;

6) $\mathbf{A}^t$ *é irredutível.*

O teorema que segue é uma decorrência do Teorema de Perron-Frobenius, que apresentaremos adiante.

1.1.6 Teorema.

1) Se $\mathbf{0} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, *então* $\rho(\mathbf{A}) \leq \rho(\mathbf{B})$.

2) Se $\mathbf{0} \leq \mathbf{A} < \mathbf{B}$ *e* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *é irredutível, então* $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{B})$.

Precisaremos freqüentemente da definição seguinte.

1.1.7 Definição. *Uma matriz quadrada* $\mathbf{A} = [\ a_{ij}\ ]$ *é dita* convergente *se e somente se* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$.

A Definição 1.1.7 equivale a dizer que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ijk} = 0$, para todo i e todo j, sendo $\mathbf{A}^k = [\ a_{ijk}\ ]$. Utilizando a Forma Canônica de Jordan, sem muita dificuldade, podemos demonstrar o seguinte teorema (cf. [40]).

1.1.8. Teorema. *Uma matriz quadrada* $\mathbf{A} = [\ a_{ij}\ ]$ *é convergente* $\Leftrightarrow$ $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

1. 2 Matrizes Irredutíveis

As matrizes irredutíveis já foram apresentadas na Seção 1.1 e nesta secção aprofundaremos seu estudo. Há um recurso excelente para determinar se uma matriz é redutível ou irredutível – seu grafo.

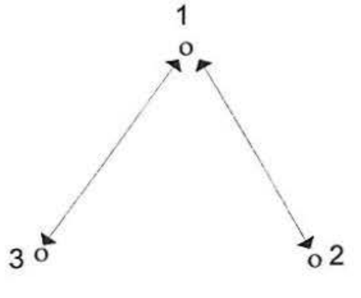
1.2.1 Definição *O* grafo orientado, *G*(**A**), *de uma matriz quadrada* **A** =[a_{ij}] *de ordem n consiste em n pontos* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *do plano, chamados* nodos *do grafo, e de pares ordenados desses nodos, chamados* arestas *do grafo, de modo que um par ordenado* (P_i, P_j) *faz parte do grafo se e somente se* $a_{ij} \neq 0$.

Para visualização, uma aresta (P_i, P_j) do grafo de **A** é representada por uma seta reta ou curva, que parte de P_i e termina em P_j. Duas arestas (P_i, P_j) e (P_j, P_i) podem ser visualizadas com um único segmento ou arco de curva com pequenas setas nas duas extremidades. Um nodo P_k pode ser identificado apenas com *k*.

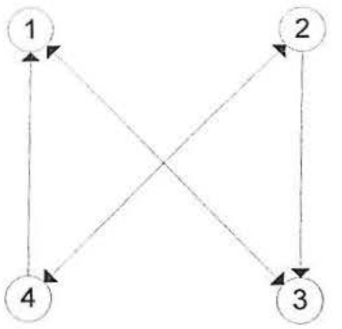
1.2.2 Exemplos. Os grafos *G*(**A**), *G*(**B**) e *G*(**C**) das matrizes

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

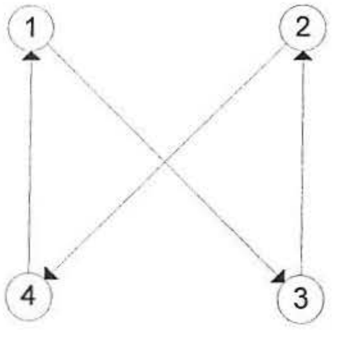
são (Um círculo maior significa uma seta que inicia e termina no mesmo nodo):



G(A)



G(B)



G(C)

Vemos que um grafo não depende dos valores dos elementos não-nulos da matriz, mas apenas de suas posições na matriz. Também, o grafo de qualquer reordenamento de uma matriz difere do grafo dessa apenas pela ordem dos nodos.

1.2.3 Definição. *Dizemos que um grafo orientado é* fortemente conexo *se e somente, para cada par de nodos* (P_i, P_j), *existe uma seqüência de arestas, dita* caminho orientado, *que inicia em* P_i *e termina em* P_j. *Uma* componente fortemente conexa *de um grafo orientado é um subgrafo que é fortemente conexo e é maximal em relação a essa propriedade.*

1.2.4 Teorema. *Uma matriz* $\mathbf{A}$ *é redutível* $\Leftrightarrow$ *o grafo de* $\mathbf{A}$, $G(\mathbf{A})$, *não é fortemente conexo.*

Prova. $\Rightarrow$ Seja $\mathbf{P}$ uma matriz de permutação tal que valha (1.1). Claramente não há caminho orientado que inicie em nodos correspondentes a $\mathbf{A}_{22}$ e termine em nodos correspondentes a $\mathbf{A}_{11}$. Logo $G(\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P})$ não é fortemente conexo e, portanto, $G(\mathbf{A})$ também não o é.

$\Leftarrow$ Seja $S(\mathbf{A})$ um subgrafo de $\mathbf{A}$, constituído apenas de uma componente fortemente conexa de $G(\mathbf{A})$. Reenumeremos as linhas (e colunas) de $\mathbf{A}$ de maneira que todos os nodos em $S(\mathbf{A})$ sejam os primeiros. Se $\mathbf{P}$ é a matriz de permutação que opera essa reenumeração, então $\mathbf{PAP}^t$ será da forma (1.1). ▲

Aplicando o Teorema 1.2.4, vemos que, nos Exemplos 1.2.2, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ são irredutíveis e $\mathbf{B}$ é redutível.

Agora estudaremos os raios espectrais das matrizes irredutíveis. Seja uma matriz irredutível $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ de ordem n. Definamos, para todo vetor $\mathbf{x} = [\,x_i\,] > \mathbf{0}$,

$$r_{\mathbf{x}} := \min_{x_i > 0} \frac{(\mathbf{Ax})_i}{x_i}. \tag{1.2}$$

Obviamente $r_{\mathbf{x}} \geq 0$ é o maior número $\rho \geq 0$ tal que

$$\mathbf{Ax} \geq \rho\mathbf{x}. \tag{1.3}$$

1.2.5 Teorema. *A função* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r}_{\mathbf{x}}$ *assume o máximo num vetor* $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$.

Prova. Como $r_{\mathbf{x}}$ e $r_{\alpha\mathbf{x}}$ têm o mesmo valor para todo escalar $\alpha > 0$, basta que consideremos apenas o conjunto $S := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e } \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Olhemos para o conjunto correspondente de S,

$$T := \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in S\}.$$

Pelo Teorema 1.1.5 (5), os vetores em T são todos não-negativos. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $\mathbf{Ax} \geq r_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ por $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1}$, obtemos

$$\mathbf{Ay} \geq r_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \tag{1.4}$$

e concluímos de (1.3) que $r_{\mathbf{y}} \geq r_{\mathbf{x}}$. Então

$$r := \sup_{0 \neq \mathbf{x} \geq 0} r_{\mathbf{x}} = \sup_{\mathbf{y} \in T} r_{\mathbf{y}}. \qquad (1.5)$$

Como S é compacto, T também o é, pois toda transformação linear em $\mathbb{R}^n$ é contínua. Em conseqüência, sendo a função $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{r}_{\mathbf{y}}$ contínua em T, assume o máximo em algum vetor positivo $\mathbf{z}$. ▲

A desigualdade (1.4) vale para os vetores positivos $\mathbf{z}$ onde o valor máximo r de $r_{\mathbf{x}}$ é assumido:

$$\mathbf{Az} \geq r\mathbf{z}. \qquad (1.6)$$

Chamaremos a todos os vetores não-negativos para os quais (1.6) é satisfeita de *vetores extremais* da matriz **A**.

1.2.6 Teorema. Seja $r := r_{\mathbf{z}} = \max_{\mathbf{x} > 0} r_{\mathbf{x}}$, onde $r_{\mathbf{x}}$ está definido em (1.2). Então:

1) $r > 0$;

2) $\mathbf{Az} = r\mathbf{z}$;

3) $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$.

Prova. 1) Seja o vetor $\mathbf{u}$:=[1 1 . . . 1]^t. Então $r_{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ é positivo, pois uma matriz irredutível não-negativa não pode ter uma linha nula. Logo $r \geq r_{\mathbf{u}} > 0$.

2) Suponhamos $\mathbf{Az} > r\mathbf{z}$ e seja $\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1}\mathbf{z}$. Então $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$, $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1}(\mathbf{Az} - r\mathbf{z}) \succ \mathbf{0}$, e $\mathbf{Ax} - r\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$. Mas a última desigualdade contradiz a definição de r. Logo $\mathbf{Az} = r\mathbf{z}$.

3) Como $\mathbf{Az} = r\mathbf{z}$, então $\mathbf{0} \succ \mathbf{x} := (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1}\mathbf{z} = (1 + r)^{n-1}\mathbf{z}$, e daí segue que $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$. ▲

O item 3 do Teorema 1.2.6 mostra que todos os vetores extremais de uma matriz não-negativa irredutível são autovetores dessa matriz.

O mais importante e famoso resultado em torno do raio espectral de uma matriz irredutível é o Teorema de Perron-Frobenius. Sua demonstração pode ser encontrada em [02], em[46] e em [47]. Perron [34] demonstrou o teorema apenas para matrizes positivas e Frobenius [11] generalizou o teorema para matrizes irredutíveis.

1.2.7 Teorema (Perron-Frobenius). *Seja* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *uma matriz quadrada irredutível. Então:*

1) $\rho(\mathbf{A})$ *é um autovalor de* $\mathbf{A}$;

2) a $\rho(\mathbf{A})$ *corresponde um autovetor* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$;

3) $\rho(\mathbf{A})$ *cresce quando algum elemento de* $\mathbf{A}$ *cresce;*

4) o autovalor $\rho(\mathbf{A})$ *de* $\mathbf{A}$ *é simples.*

1.3 Pseudo-inversa e Não-negatividade

1.3.1 Definição. *Dizemos que uma matriz quadrada real é* monótona *se e somente se* $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ *implica* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

1.3.2 Teorema. *Uma matriz* $\mathbf{A}$ *quadrada de ordem n é monótona* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ *é não-singular com* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$.

Prova. $\Rightarrow$ Suponhamos que $\mathbf{A}$ seja monótona e que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Então $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, por ser $\mathbf{A}$ é monótona. Mas $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{A}(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; novamente, por $\mathbf{A}$ ser monótona, $-\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ou $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Logo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{A}$ é não-singular. Tomemos o $\mathrm{i}^{\text{ésimo}}$ vetor $\mathbf{e}_i$ da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Notemos que $\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{e}_i \geq \mathbf{0}$, o que mostra que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i \geq \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mas $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i$ é a $\mathrm{i}^{\text{ésima}}$ coluna de $\mathbf{A}^{-1}$; portanto $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$.

$\Leftarrow$ Basta multiplica ambos os membros de $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ por $\mathbf{A}^{-1}$. ▲

Então matrizes monótonas são simplesmente matrizes não-singulares com inversa não-negativa. Um exemplo importante dessas matrizes é constituído pelas matrizes que podem ser escritas na forma $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, onde $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s > \rho(\mathbf{B})$. Tais matrizes são ditas *matrizes-M não-singulares* e serão estudadas mais a fundo numa seção especial. Alguns resultados já são estabelecidos aqui.

1.3.3 Teorema. *Seja uma matriz*

$$\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B},\ \textit{com}\ \mathbf{B} \geq \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1) **A** *é monótona.*

2) $s > \rho(\mathbf{B})$.

3) **A** *é positiva estável, isto é, todo autovalor de* **A** *tem a parte real positiva.*

Prova. $1 \Rightarrow 2$ Seja $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ um autovetor de **B** correspondente a $\rho(\mathbf{B})$. Então $\mathbf{Ax} = (s\mathbf{I} - \rho(\mathbf{B}))\mathbf{x}$ e, como, pelo Teorema 1.3.2, **A** é não-singular, $s \neq \rho(\mathbf{B})$ e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = (s - \rho(\mathbf{B}))^{-1}\mathbf{x}$. Por (1), $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ e, portanto, $s > \rho(\mathbf{B})$.

$2 \Rightarrow 1$ **A** é claramente não-singular. Como $(1/s)\mathbf{B}$ é convergente, pela Lema 1.4.3 abaixo,

$$\mathbf{A}^{-1} = s^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(s^{-1}\mathbf{B}\right)^{i}.$$

Logo **A** é monótona.

$2 \Rightarrow 3$ Seja λ um autovalor de **A**. Então $\lambda = s - \mu$, sendo μ um autovalor de **B**. Portanto (3) segue de $s > \rho(\mathbf{B}) \geq |\mu|$.

$3 \Rightarrow 2$ Seja **x** um autovetor de **B** correspondente a $\rho(\mathbf{B})$. Então $\lambda := s - \rho(\mathbf{B})$ é um autovalor de **A** e $\mathrm{Re}\lambda > 0$ implica $s > \rho(\mathbf{B})$. ▲

1.3.4 Definição. *Dizemos que uma matriz* **A** *é uma matriz-M se e somente puder ser expressa na forma* (1.7) *com* $s \geq \rho(\mathbf{B})$.

Nessa definição, quando $s > \rho(\mathbf{B})$, **A** é não-singular, e quando $s = \rho(\mathbf{B})$, **A** é singular. Segue um corolário do último teorema.

1.3.5 Corolário. *Seja* $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$ *com* $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ *uma matriz-M não-singular. Então:* $\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ *é irredutível.*

Prova. $\Leftarrow$ Seja um vetor $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ e seja $\mathbf{y} := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$. Claramente $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, porque **A** é monótona. Também $s\mathbf{y} \geq \mathbf{By}$. Logo, pela hipótese, $\mathbf{y} \succ \mathbf{0}$.

$\Rightarrow$ Por contraposição, suponhamos que **B** seja redutível, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ um autovetor de **B**, e β um autovalor associado a **x**. Então $\mathbf{0} \neq \mathbf{A}\mathbf{x} = (s-\beta)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Mas $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \succ \mathbf{0}$. ▲

Para estender o conceito de monotonicidade para matrizes singulares, precisamos tratar das pseudo-inversas, também ditas inversas generalizadas, ou inversas de Moore-Penrose de uma matriz. Se **A** é não-singular e **X** é sua inversa, então

i-1) $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$
i-2) $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$
i-3) $\mathbf{AX} = (\mathbf{AX})^t$
i-4) $\mathbf{XA} = (\mathbf{XA})^t$
i-5) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$
i-6) $\mathbf{A}^k = \mathbf{XA}^{k+1}$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

1.3.6 Definição. *Seja p um subconjunto de* $\{1, 2, 3, 4\}$ com $1 \in p$. *Uma* inversa-p de uma matriz **A** *é uma matriz* **X** *que satisfaz a condição i-j, para cada j em p.*

O fato $1 \in p$ garante que $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ é uma inversa-p de **A** se e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Uma *semi-inversa* de **A** é uma inversa-$\{1,2\}$. Uma forma de definir a pseudo-inversa de **A** é o uso da decomposição dos valores singulares de **A**, ou como segue.

1.3.7 Definição. *A* pseudo-inversa, inversa generalizada, *ou* inversa de Moore-Penrose, *de uma matriz* **A** *é a inversa-{1, 2, 3, 4} dessa matriz, que denotamos com* $\mathbf{A}^+$.

1.3.8 Definição. *O* índice *de uma matriz quadrada* **A**, *denotado com* ind(**A**), *é o menor número inteiro não-negativo* k *tal que* posto($\mathbf{A}^{k+1}$) = posto($\mathbf{A}^k$).

1.3.9 Definição. *Seja* **A** *uma matriz quadrada de índice k.* A inversa de Drazin *de* **A** *é a matriz* **X** *que verifica as condições i-2, i-4 e i-6. Denotamos a inversa de Drazin de* **A** *com* $\mathbf{A}^D$.

A inversa generalizada e a inversa de Drazin de uma matriz quadrada sempre existem e são únicas.

1.4 Matrizes-M

Um tipo de matrizes que ocorre com freqüência, particularmente na economia, é como esta

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

onde os a_{ij} são não-negativos. Como $\mathbf{A}$ pode ser expressa na forma

$$\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}, \text{ com } s > 0 \text{ e } \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \tag{1.9}$$

a teoria das matrizes não-negativas desempenha papel dominante no estudo dessas matrizes que estamos introduzindo. Indicamos o conjunto das matrizes do tipo (1.8) com $Z^{n\times n}$. Nosso objetivo aqui é um estudo, para a aplicação no Capítulo 2, de uma subclasse das matrizes em $Z^{n\times n}$, já introduzida, a subclasse das matrizes-M. Repetimos aqui a Definição 1.3.4.

1.4.1 Definição. *A uma matriz A chamamos de matriz-M se e somente se é da forma* (1.9), *com* $s \geq \rho(\mathbf{B})$.

1.4.2 Matrizes-M Não-singulares. Da Definição 1.4.1, vemos que uma matriz-M é não-singular quando $s > \rho(\mathbf{B})$. Antes de prosseguir com as matrizes-M não-singulares, apresentamos a versão para matrizes do Lema de von Neumann (lema seguinte) para séries convergentes.

1.4.3 Lema. *Uma matriz quadrada não-negativa* $\mathbf{T}$, *de ordem* n, *é convergente* $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{I}-\mathbf{T})$ *é inversível e, nesse caso,*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k \geq \mathbf{0}. \tag{1.10}$$

Prova. Se $\mathbf{T}$ é convergente, (1.10) segue da identidade

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})(\mathbf{I}+\mathbf{T}+\cdots+\mathbf{T}^k)=\mathbf{I}-\mathbf{T}^{k+1},$$

fazendo k tender ao infinito.

Reciprocamente, pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe $\mathbf{x}>\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Tx}=\rho(\mathbf{T})\mathbf{x}$. Então $\rho(\mathbf{T})\neq \mathbf{1}$, pois $(\mathbf{I}-\mathbf{T})$ é inversível (isso e $\rho(\mathbf{T})=1$ implica $\mathbf{x}=\mathbf{0}$) e, portanto,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=[1-\rho(\mathbf{T})]\mathbf{x}$$

acarreta

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{1-\rho(\mathbf{T})}\mathbf{x}.$$

Como $\mathbf{x}>\mathbf{0}$ e $(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}>\mathbf{0}$, resulta que $\rho(\mathbf{T})<1$. ▲

1.4.4 Definições e Terminologia. Para o entendimento, particularmente, dos Teoremas 1.4.5 e 1.4.7, precisamos relembrar o significado de alguns termos, comumente usados em conexão com a teoria de matrizes.

Seja $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]$ uma matriz quadrada de ordem n. Suprimindo quaisquer r linhas, $r=1, 2, \ldots, n-1$, e r colunas da matriz $\mathbf{A}$, sobra uma submatriz $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$. O determinante de $\mathbf{B}$ é dito um *menor de* $\mathbf{A}$ *de ordem* $n-r$. Se os elementos diagonais de $\mathbf{B}$ são também elementos diagonais de $\mathbf{A}$, então $\mathbf{B}$ é dita uma *submatriz principal de* $\mathbf{A}$ e seu determinante, um *menor principal de* $\mathbf{A}$. Se a diagonal de uma submatriz principal de $\mathbf{A}$ é o vetor $[a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{kk}]$, então esta é dita uma *submatriz principal destacada de* $\mathbf{A}$ *de ordem* k, $k=1, 2, \ldots, n$, e seu determinante, um *menor principal destacado de ordem* k *de* $\mathbf{A}$.

Chamaremos de *matriz assinatura* a toda matriz diagonal com elementos diagonais iguais a ± 1.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]$ de ordem n, para a qual vale

$$|a_{ii}|\geq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ i=1, 2, 3, \ldots, n, \tag{1.11}$$

é dita *matriz diagonal dominante*; se as desigualdades em (1.11) são todas estritas, então **A** é dita matriz *diagonal estritamente dominante*. Se **A** é diagonal dominante e vale a desigualdade estrita em (1.11) para $i = 2, 3, \ldots, n$, então **A** é dita matriz *diagonal semi-estritamente dominante inferior*.

Uma decomposição **A** = **M** – **N** de uma matriz quadrada **A** tal que

$$\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{N} \geq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \text{ é convergente}$$

é dita uma *decomposição regular convergente* de **A**; a matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ é chamada *matriz de iteração da decomposição*. E uma decomposição **A** = **M** – **N** de **A** tal que

$$\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \text{ é convergente}$$

é dita uma *decomposição regular fraca convergente* de **A**. $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ é a *matriz de iteração da decomposição*.

Uma matriz **A** é *estável não-negativa* quando a parte real de seus autovalores é não-negativa.

Dada uma matriz real **A**, indicamos com col(**A**) o subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas de **A**. Normalmente tal subespaço é chamado *espaço-coluna* de **A**.

Para finalidades práticas, interessam as diversas caracterizações de uma matriz-M em $Z^{n\times n}$. Contudo, muitos dos enunciados relativos a essas caracterizações são equivalentes sem a hipótese de a matriz estar em $Z^{n\times n}$. Procuramos agrupar tais enunciados. Além disso, outras implicações, que incluímos no teorema seguinte, valem também sem essa hipótese. Todas as matrizes e vetores considerados nesse teorema são reais.

1.4.5 Teorema. *Seja* A *um matriz quadrada real de crdem n. No conjunto dos enunciados* (a_1)–(q_{50}) *abaixo, os enunciados encabeçados pela letra (independente dos índices) de mesmo nome são equivalentes. Além disso, representando por uma letra maiúscula, digamos* A, *qualquer um dos enunciados encabeçados pela letra minúscula de mesmo nome (afetada de índice), no caso* a_k, *vale a seguinte árvore de implicações:*

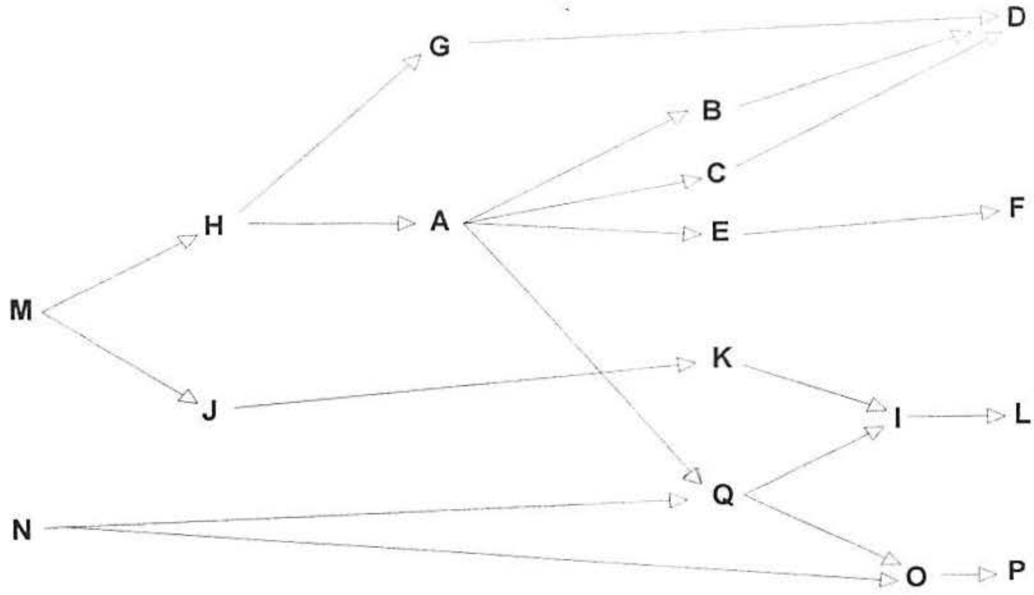


Fig.1.1 – Árvore de Implicações relativa ao Teorema 1.4.5

Positividade dos Menores Principais

a_1) *Todos os menores principais de* **A** *são positivos.*

a_2) *Os autovalores reais das submatrizes principais de* **A** *são positivos.*

a_3) *Para cada* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *existe uma matriz diagonal positiva* **D** *tal que* $\mathbf{x}^t\mathbf{ADx} > \mathbf{0}$.

a_4) *Para cada* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *existe uma matriz diagonal não-negativa* **D** *tal que* $\mathbf{x}^t\mathbf{ADx} > \mathbf{0}$.

a_5) Se $\mathbf{x} = [x_i] \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{y} := \mathbf{Ax} = [\,y_i\,]$, *então* $x_iy_i > 0$, *para algum i.*

a_6) *Para toda matriz assinatura* **S**, *existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{SASx} \succ \mathbf{0}$.

---

b_7) *A soma de todos os menores principais de ordem k de* A *é positiva para* $k = 1, 2, \ldots, n$.

---

c_8) *A matriz* **A** *é não-singular e todos os menores principais de* **A** *são não-negativos.*

c_9) *A matriz* **A** *é não-singular e todos os autovalores reais das submatrizes principais de* **A** *são não-negativos.*

c_{10}) *A matriz* **A** *é não-singular e, para toda matriz diagonal positiva* **D**, **A+D** *é não-singular.*

c_{11}) *Para toda matriz diagonal não-negativa* **D**, **A+D** *é não-singular.*

c_{12}) *A matriz* **A** *é não-singular e, para todo* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *existe uma matriz diagonal não-negativa* **D** *tal que* $\mathbf{x}^t\mathbf{D}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

c_{13}) *A matriz* **A** *é não-singular e, se* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{y} := \mathbf{A}\mathbf{x}$, *então, para algum índice i,* $x_i \neq 0$ e $x_i y_i \geq 0$.

c_{14}) *A matriz* **A** *é não-singular e, para toda matriz assinatura* **S**, *existe um vetor* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{SASx} \geq \mathbf{0}$.

---

d_{15}) *Para todo* $\alpha \geq 0$, $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ *é não-singular.*

d_{16}) *Todo autovalor real de* **A** *é positivo.*

---

e_{17}) *Todos os menores principais destacados de* **A** *são positivos.*

e_{18}) *Existem matrizes triangulares inferior e superior* **L** *e* **U**, *respectivamente, com diagonais positivas, tais que* **A = LU**.

---

f_{19}) *Existe um reordenamento de* **A**, *que satisfaz* (e_{17}) *e* (e_{18}).

Estabilidade não-negativa

g_{20}) *A matriz* **A** *é estável positiva, isto é, a parte real dos autovalores de* **A** *é posiativa.*

g_{21}) *Existe uma matriz simétrica positiva definida* **W** *tal que* $\mathbf{AW} + \mathbf{WA}^t$ *é positiva definida.*

g_{22}) *A matriz* $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ *é não-singular e* $\mathbf{G} := (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ é convergente.

g_{23}) *A matriz* $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ *é não-singular e, para a matriz* **G** em (g_{22}), *existe uma matriz positiva definida* **W** *tal que* $\mathbf{W} - \mathbf{G}^t\mathbf{W}\mathbf{G}$ *é positiva definida.*

---

h_{24}) *Existe uma matriz diagonal positiva* **D** *tal que* **AD + DA** *é positiva definida.*

h_{25}) *Existe uma matriz diagonal positiva* **E** *tal que, para a matriz* $\mathbf{B} := \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}$, *a matriz* $(\mathbf{B}+\mathbf{B}^t)/2$ *é positiva definida.*

h_{26}) *Para toda matriz positiva semidefinida* $\mathbf{Q}$, *a matriz* $\mathbf{QA}$ *tem um elemento diagonal positivo.*

---

i_{27}) *A matriz é* $\mathbf{A}$ *semipositiva, isto é, existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ com $\mathbf{Ax} \succ \mathbf{0}$.

i_{28}) *Existe* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *com* $\mathbf{Ax} \succ \mathbf{0}$.

i_{29}) *Existe uma matriz diagonal positiva* $\mathbf{D}$ *tal que* $\mathbf{AD}$ *tem a soma de cada linha positiva.*

---

j_{30}) *Existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *com* $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ *e* $\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j > 0$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

---

k_{31}) *Existe um reordenamento de* $\mathbf{A}$ *que satisfaz* j_{30}.

---

l_{32}) *Existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *com* $\mathbf{y} := \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ *tal que, se* y_{i_0}, *então existe uma seqüência de índices* i_1, $i_2, \ldots, i_r$, *com* $a_{i_{j-1} i_j} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, *e com* $y_{i_r} \neq 0$.

l_{33}) *Existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *com* $\mathbf{y} := \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ *tal que a matriz* $\hat{\mathbf{A}} = \left[\hat{a}_{ij}\right]$, *definida por*

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } a_{ij} \neq 0 \text{ ou } y_i \neq 0 \\ 0, \text{ em outro caso,} \end{cases}$$

é irredutível.

---

m_{34}) *Existe* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *tal que, para toda matriz de assinatura* $\mathbf{S}$, $\mathbf{SASx} \succ \mathbf{0}$.

m_{35}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem diagonal positiva e existe uma matriz diagonal positiva* $\mathbf{D}$ *tal que* $\mathbf{AD}$ *é estritamente diagonal dominante.*

m_{36}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem diagonal positiva e existe uma matriz diagonal positiva* $\mathbf{E}$ *tal que* $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{AE}$ *é estritamente diagonal dominante.*

m_{37}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem diagonal positiva e existe uma matriz diagonal positiva* $\mathbf{D}$ *tal que* $\mathbf{AD}$ *é diagonal semiestritamente dominante inferior.*

Positividade da Inversa e Decomposições

n_{38}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem inversa não-ngativa.*

n_{39}) *A matriz* $\boldsymbol{A}$ *monótona.*

n_{40}) *Existem matriz não-singulares* $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$, *com inversas não-negativa, tais que*

$\mathbf{B}_1 \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{B}_2$.

n_{41}) *Existe uma matriz* **B** *com inversa não-negativa tal que* $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ *e* $\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ *é convergente.*

n_{42}) *Existe uma matriz* **B** *com inversa não-negativa tal que* $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ *e* **A** *satisfaz* i_{27}, i_{28}, *ou* i_{29}.

n_{43}) *Existe uma matriz* **B**, *com inversa não-negativa, e uma matriz-M não-singular* **C** *tais que* $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ *e* **A**=**BC**.

n_{44}) *Existe uma matriz* **B**, *com inversa não-negativa, e uma matriz-M não-singular* **C** *tais que* **A**=**BC**.

n_{45}) *A matriz* **A** *tem uma decomposição regular convergente.*

n_{46}) *A matriz* **A** *tem uma decomposição regular fraca convergente.*

---

o_{47}) *Toda decomposição regular fraca de* **A** *é convergente.*

---

p_{48}) *Toda decomposição regular de* **A** *é convergente.*

Desigualdades Lineares

q_{49}) *Para todo* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, *o conjunto* $S_y := \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} | \mathbf{A}^t\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ *é limitado e* **A** *é não-singular.*

q_{50}) $S_0 = \{ \mathbf{0} \}$, *isto é, a desigualdade* $\mathbf{A}^t\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, *sujeita à condição* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, *tem apenas a solução trivial e* **A** *é não-singular.*

1.4.6 Levantamento Bibliográfico Relativo ao Teorema 1.4.5. Parte considerável dos fatos englobados no Teorema 1.4.5 está implícita no trabalho de Perron [34], de Frobenius [11, 12, 13] e de Ostrowski [31, 32, 33], embora não na presente forma.

O enunciado a_1, que é conhecido como a condição de Hawkins-Simon [17] na literatura da economia, foi usado por Ostrowski [33] como a definição de matriz-M não-singular em $Z^{n\times n}$. O enunciado a_2 também está em Ostrowski [33]. Os enunciados a_3 – a_5 foram alistados em Fiedler e Ptak [10]. O enunciado a_5 está também em Gale e Nikaido [14], e a equivalência de a_6 com a_1 foi demonstrada em Moylan [27].

O enunciado b_7 pode ser encontrado em Johnson [19], e c_8 – c_{14}, d_{15}, d_{16}, e_{17}, e_{18} e f_{19} ou são imediatos, ou podem ser encontrados em Fiedler e Ptak [10]. A condição de estabilidade g_{20} encontra-se no trabalho de Ostrowski [31], enquanto que sua equivalente g_{21} constitui o teorema de Lyapunov [23]. A equivalência de g_{22} e g_{23} é o Teorema de Stein [43]. O enunciado h_{24} está no trabalho de Tartar [45] e de Araki [01]. A equivalência de h_{25} e h_{26} encontra-se em Baker et al. [03].

Os enunciados $i_{27} - i_{29}$ estão em Schneider [41] e Fan [09]. O enunciado j_{30} consta em Beauwens [04], o k_{31} é devido a Neumann [28] e o l_{32}, numa forma levemente mais fraca, a Bramble e Hubbard [07]. O enunciado l_{33} e sua equivalência com l_{32} devem-se a Berman e Plemmons [06]. Em continuação, lemos o enunciado m_{34} em Moylan [27], ao passo que m_{35} e m_{36} estão essencialmente em Fiedler e Ptak [10]. A equivalência de m_{35} e m_{36} encontra-se em Neumann [28].

O enunciado n_{38} consta em Ostrowski [31] e a equivalência de n_{38} com n_{39} foi demonstrada por Collatz [08]. Os enunciados $n_{40} - n_{42}$ encontram-se em Kuttler [20], e n_{43} e n_{44}, são óbvios.

O enunciado n_{45} faz parte do trabalho de Vargas [46] sobre decomposição regular, e o enunciado n_{46} é devido a Ortega e Rheinboldt [30]. Os enunciados o_{47} e p_{48} encontram-se essencialmente em Price [36]. Finalmente, os enunciados q_{49} e q_{50} constam em Robert [37, 38]. ▲

O que é belo e útil é que os 50 enunciados no Teorema 1.4.5 são equivalentes à afirmação "**A** é uma matriz-M não-singular", quando $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, como mostraremos, com apoio no Teorema 1.4.5

1.4.7 Teorema. *Para* $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, *os* 50 *enunciados no Teorema* 1.4.5 *são equivalentes à afirmação*:
α) **A** *é uma matriz-M não-singular.*

Prova. Dada a árvore das implicações do Teorema 1.4.5, basta que provemos que, se vale a afirmação α, então vale um dos enunciados do conjunto M e um do conjunto N, e que um dos enunciados de cada conjunto D, F, L e P implica a condição α, sempre com a hipótese de que $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$.

$\alpha \Rightarrow n_{38}$ Admitamos a condição α. Em vista da Definição 1.4.1, a matriz **A** tem uma representação $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s \geq \rho(\mathbf{B})$. Como **A** é não-singular, a última desigualdade é estrita. Pondo $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$, segue que $\rho(\mathbf{T}) < 1$, donde, pelo Lema 1.4.3,

$$\mathbf{A}^{-1} = (1/s)(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \geq \mathbf{0}.$$

Obtivemos assim a condição n_{38}.

$\alpha \Rightarrow m_{35}$ Novamente consideremos verdadeira a condição α. Os elementos diagonais de $\mathbf{A}$ são todos positivos, porque o produto interno usual da $i^{\text{ésima}}$ linha de $\mathbf{A}$ com a $i^{\text{ésima}}$ coluna de $\mathbf{A}^{-1}$ é 1, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Seja $\mathbf{e} := [1\ 1\ \ldots\ 1]^t$ e $\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}$. Pondo agora $\mathbf{D} := \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal positiva e

$$\mathbf{ADx} = \mathbf{Ax} = \mathbf{e} \succ \mathbf{0},$$

o que mostra que a soma de cada linha de $\mathbf{AD}$ é positiva. Mas, como $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$, isso implica que $\mathbf{AD}$ é estritamente diagonal dominante, e, conseqüentemente, vale m_{35}.

$d_{16} \Rightarrow \alpha$ Seja $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$ com $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s > 0$. Queremos demonstrar que, necessariamente, $s > \rho(\mathbf{B})$. Suponhamos que $s \geq \rho(\mathbf{B})$. Então, se $\mathbf{Bx} = \rho(\mathbf{B})\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, temos

$$\mathbf{Ax} = [s - \rho(\mathbf{B})]\mathbf{x},$$

e, portanto, $s - \rho(\mathbf{B})$ seria um autovalor negativo ou nulo de $\mathbf{A}$, em contradição com d_{16}.

$f_{19} \Rightarrow \alpha$ Suponhamos a existência de um reordenamento $\mathbf{PAP}^t = \mathbf{LU}$, onde $\mathbf{L} = [\ l_{ij}\ ]$ é triangular inferior com diagonal positiva e $\mathbf{U} = [\ u_{ij}\ ]$ é triangular superior com diagonal positiva. Primeiro mostremos que os elementos não-diagonais de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ são negativos ou nulos, por indução sobre $i + j$. Seja

$$\mathbf{B} := \mathbf{PAP}^t = [\ b_{ij}\ ].$$

Se $i + j = 3$, as desigualdades $l_{21} \leq 0$ e $u_{12} \leq 0$ decorrem de $b_{12} = l_{11}u_{12}$ e $b_{21} = l_{21}u_{11}$. Suponhamos que $i + j = 3$, $i \neq j$ e que as desigualdades $l_{rs} \leq 0$ e $u_{rs} \leq 0$, $r \neq s$, sejam válidas para $r + s < i + j$. Então, se $i < j$ na igualdade

$$a_{ij} = l_{ii}u_{ij} + \sum_{k<j} l_{ik}u_{kj},$$

temos

$$a_{ij} \leq 0, \quad \sum_{k<j} l_{ik}u_{kj} \geq 0, \text{ pois } l_{ik} \leq 0 \text{ e } u_{kj} \leq 0,$$

de acordo com $i + k < i + j$ e $k + j < i + j$. Logo $u_{ij} \leq 0$.

Analogamente provamos a desigualdade $l_{ij} \leq 0$.

É fácil ver, então, que **L** e **U** são inversíveis e que suas inversas são não-negativas. Conseqüentemente

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{P}^t\mathbf{LUP}\right)^{-1} = \mathbf{P}^t\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P} \geq \mathbf{0}.$$

Tomando agora $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $s > 0$ e $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, segue que $(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \geq \mathbf{0}$, onde $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$. Então, pelo Lema 1.4.3, $\rho(\mathbf{T}) < 1$ e, daí, $s > \rho(\mathbf{B})$. E chegamos a que **A** é uma matriz-M não-singular.

$\mathrm{I}_{33} \Rightarrow \alpha$ Escrevemos $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$ com $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s > 0$. Seja $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$. Como $\mathbf{y} := \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$, para algum $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$, temos $\mathbf{Tx} < \mathbf{0}$. Consideremos a matriz $\hat{\mathbf{T}} := [\hat{t}_{ij}]$, definida por

$$\hat{t}_{ij} = \begin{cases} t_{ij}, & \text{se } t_{ij} \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{se } t_{ij} = 0 \text{ e } y_i \neq 0 \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Como $\hat{\mathbf{A}}$, definida em I_{33}, é irredutível, $\hat{\mathbf{T}}$ também é irredutível. Além disso, para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\hat{\mathbf{T}}\mathbf{x} < \mathbf{x}$, de modo que $\rho\left(\hat{\mathbf{T}}\right) < 1$, pelo Teorema de Perron-Frobenius. Por ser $\mathbf{T} \leq \hat{\mathbf{T}}$, temos $\rho(\mathbf{T}) \leq \rho\left(\hat{\mathbf{T}}\right) < 1$, pelo Teorema 1.1.6. Assim **A** é uma matriz-M não-singular.

$\mathrm{p}_{48} \Rightarrow \alpha$ Tendo **A** uma decomposição regular na forma $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$ com $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s > 0$, segue da hipótese que $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$ é convergente e, portanto, $s > \rho(\mathbf{B})$, e **A** é uma matriz-M não-singular. ▲

É importante também estabelecermos condições necessárias e suficientes para uma matriz real arbitrária ser uma matriz-M não-singular. Fazemos isso com o seguinte teorema.

1.4.8 Teorema. *Seja* **A** *uma matriz real quadrada de ordem* $n > 1$. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1) **A** *é uma matriz-M não-singular.*

2) Para toda matriz diagonal não-negativa **D**, *a matriz* **A** + **D** *tem inversa não-negativa.*

3) $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ *tem inversa não-negativa para todo escalar* $\alpha \geq 0$.

4) Toda submatriz principal de **A** *tem inversa não-negativa.*

5) Toda submatriz principal de **A** *de ordem 1, 2 e n tem inversa não-negativa.*

Prova. Primeiro mostremos que a afirmação (1) implica as demais. Suponhamos (1) verdadeira e **D** como em (2). Evidentemente **A** + **D** é uma matriz-M. Como todo menor principal de **A** é positivo, também todo menor principal de **A** + **D** é positivo. Então, pela implicação $a_1 \Rightarrow c_{10}$ no Teorema 1.4.5, **A** + **D** é uma matriz-M não-singular. Logo, pela implicação $\alpha \Rightarrow n_{38}$ no Teorema 1.4.7, **A+D** tem inversa não-negativa (Notemos que, para provar essa última implicação, não usamos a hipótese $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$), isto é, vale (2). Está provado também que (1) implica (3), porque (3) é um caso particular de (2).

Pelo Teorema 1.4.5, temos que toda submatriz principal de uma matriz-M não-singular é também uma matriz-M não-singular. Logo (4) e (5) seguem.

Agora vamos provar que cada uma das afirmações (2), (3), (4) e (5) implica (1). Suponhamos, então, a validade de (3). Tomando $\alpha = 0$, temos que $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$. Então, para concluir (1) a partir de n_{38} do Teorema 1.4.7, basta que provemos que $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$. Por contradição, suponhamos que os elementos não-diagonais de **A** sejam positivos. Então para $\alpha > 0$, suficientemente pequeno, o elemento (i, j), $i \neq j$, da matriz

$$(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{A} + (\alpha\mathbf{A})^2 - (\alpha\mathbf{A})^3 + \cdots$$

é negativo porque o segundo termo da série domina esse elemento. Isso contradiz a hipótese, pois esta implica que

$$\mathbf{0} \leq \left(\mathbf{A} + (1/\alpha)\mathbf{I}\right)^{-1} = \alpha\left(\pi\mathbf{I} + \alpha\mathbf{A}\right)^{-1}.$$

Como (2) implica (3), temos também que (2) implica (1).

Suponhamos agora a validade de (5). Decorre daí que os elementos diagonais de **A** são positivos e que essa matriz tem inversa não-negativa. Como acima, falta mostrar que $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$. Seja

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma submatriz principal de **A**. Como

$$\mathbf{B}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$

e os elementos diagonais **B** são positivos, resulta b, $c \leq 0$. Como a e b são elementos diagonais quaisquer de **A**, acabamos de provar que os elementos não-diagonais de **A** não são positivos, logo $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$.

Por fim, como (4) implica (5), também segue que (4) implica (1). ▲

Na aplicação do Capítulo 2 vamos precisar também do resultado que segue.

1.4.9 Teorema. *Seja* **A** *uma matriz-M não-singular de ordem n, cujas somas das linhas são todas não-negativas. Então os elementos de* $\mathbf{A}^{-1} =: \mathbf{M} = [m_{ij}]$ *satisfazem*

$$m_{ii} \geq m_{ki}, \ para\ i,k = 1,2,\ldots,n. \tag{1.12}$$

Prova. Consideremos a inversa de **A** na forma

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A},$$

onde adj**A** indica a adjunta clássica de **A**. Vemos que basta mostrar que os co-fatores A_{ij} do elemento a_{ij} de **A** satisfazem

$$A_{ii} \geq A_{ik}, \text{ para } i,k=1,2,\cdots,n. \tag{1.13}$$

Para esse propósito, escrevemos $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $s > 0$ e $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$. Então $s > \rho(\mathbf{B})$ e, pela hipótese,

$$s \geq \max_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij}. \tag{1.14}$$

Separamos nossa argumentação em duas partes: na primeira supomos desigualdade estrita em (1.14) e na segunda, igualdade. Consideremos, então, o caso de desigualdade estrita em (1.14). Substituamos todos os elementos nulos de $\mathbf{B}$ por um número $\delta > 0$, suficientemente pequeno de modo que tenhamos, para a matriz positiva resultante $\hat{\mathbf{B}} = \left[\hat{b}_{ij}\right]$,

$$s > \max_i \sum_{j=1}^{n} \hat{b}_{ij}.$$

Se provarmos que $\hat{A}_{ii} \geq \hat{A}_{ik}$ para todo i e todo k, fazendo δ tender a zero, obteremos (1.13). Podemos, então, supor $\mathbf{B} \succ \mathbf{0}$.

Consideremos $s \neq k$ com k arbitrário fixo. Substituamos todos os elementos da i$^{\text{ésima}}$ linha de $\mathbf{B}$ por zeros, exceto os elementos nas posições (i, i) e (i, k) que substituímos por $s/2$. Indiquemos com $\mathbf{N}$ a nova matriz. Esta é claramente irredutíve,l e a soma de cada uma de suas linhas não excede o valor $s/2$, e todas essas somas, excetuada a i$^{\text{ésima}}$, são menores que s. Resulta pelo Teorema de Perron-Frobenius, que $s > \rho(\mathbf{N})$. Em conseqüência,

$$-\frac{s}{2}A_{ik} + \frac{s}{2}A_{ii} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{N}) > \mathbf{0},$$

porque $s\mathbf{I} - \mathbf{N}$ é uma matriz-M não-singular, lembrando que os co-fatores de $s\mathbf{I} - \mathbf{N}$ e $s\mathbf{I} - \mathbf{B}$ são os mesmos. Portanto $A_{ii} > A_{ik}$.

Se ocorre a igualdade em (1.14), tomamos $\varepsilon > 0$ e usamos $s + \varepsilon$ em lugar de s para a expressão de $\mathbf{A}$. Aplicamos depois o caso da desigualdade estrita em (1.14), e (1.12) segue fazendo

ε tender a zero. ▲

Terminamos a presente secção com o teorema seguinte, que precisaremos no Capítulo 2.

1.4.10 Teorema. *Seja uma matriz* $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$ *irredutível. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1) $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M não-singular.*

2) $\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}$.

3) $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ *para algum* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$.

Prova. Suponhamos que (1) valha. Pelo Corolário 1.3.5, segue logo (2). A afirmação (3) também segue logo de $\alpha \Rightarrow i_{27}$ no Teorema 1.4.7.

Reciprocamente, se vale (2), resulta (1) pela condição n_{38} do Teorema 1.4.7. Falta mostrar que (3) implica (1). Se vale (3), como $\mathbf{A}$ é irredutível, resulta que a matriz $\hat{\mathbf{A}}$, definida em I_{33} do Teorema 1.4.7, é também irredutível, e, portanto, segue (1). ▲

1.5 Matrizes-M Gerais

Nesta seção estudaremos algumas propriedades da classe completa das matrizes-M. As matrizes-M singulares são talvez quase tão importantes quanto as não-singulares, nas aplicações. Por outro lado, "a teoria relativa às matrizes-M singulares não está ainda plenamente desenvolvida" [06], talvez porque os conceitos são consideravelmente mais difíceis de estudar.

Começamos com um teorema que mostra que, de certa maneira, a classe completa das matrizes-M pode ser pensada como o fecho da classe das matrizes-M não-singulares.

1.5.1 Teorema. Uma matriz $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$ é uma matriz-M $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ é uma matriz-M não-singular para todo $\varepsilon > 0$.

Prova. $\Rightarrow$ Seja $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $s > 0$ e $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{I}=s\mathbf{I}-\mathbf{B}+\varepsilon\mathbf{I}=(s+\varepsilon)\mathbf{I}-\mathbf{B}=s'\mathbf{I}-\mathbf{B}, \tag{1.15}$$

onde $s':=s+\varepsilon>\rho(\mathbf{B})$, pois $s\geq\rho(\mathbf{B})$. Portanto $\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{I}$ é uma matriz-M não-singular.

$\Leftarrow$ Se $\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{I}$ é uma matriz-M não-singular para todo $\varepsilon>0$, decorre que $\mathbf{A}$ é uma matriz-M (não necessariamente não-singular) fazendo ε tender a zero em (1.15). ▲

O objetivo principal desta seção é ver que as propriedades enunciadas nos Teoremas 1.4.5 e 1.4.7 têm certa forma correspondente, para a classe total das matrizes-M. O resultado constitui o par de Teoremas 1.5.3 e 1.5.5 abaixo. O seguinte lema, cuja demonstração se encontra em [06], servir-nos-á de apoio.

1.5.2 Lema. *Seja* $\mathbf{T}$ *uma matriz real de ordem* n *não-negativa. Então* $\rho(\mathbf{T})\leq 1 \Leftrightarrow (\mathbf{I}-\mathbf{T})^{\mathrm{D}}$ *é não-negativa em* $\mathrm{col}[(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{k}]$, *onde* $k=\mathrm{ind}(\mathbf{I}-\mathbf{T})$. *Nesse caso, para todo* $\alpha\in(0;\ 1)$,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{\mathrm{D}}=\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{T}_{\alpha}^{j}\mathbf{E},$$

onde $\mathbf{E}:=(\mathbf{I}-\mathbf{T})(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{\mathrm{D}}$ *e* $\mathbf{T}_{\alpha}:=(1-\alpha)\mathbf{I}+\alpha\mathbf{T}$.

1.5.3 Teorema. *Seja* $\mathbf{A}$ *um matriz quadrada real de ordem* n. *No conjunto dos enunciados* (a_1)–(i_{21}) *abaixo, os enunciados encabeçados pela letra de mesmo nome (independente dos índices) são equivalentes; além disso, representando por uma letra maiúscula, digamos* A, *qualquer um dos enunciados encabeçados pela letra minúscula de mesmo nome (afetada de índice), no caso* a_k, *vale a árvore de implicações da Fig.1.2:*

Não-negatividade dos Menores Principais

a_1) *Os menores principais de* $\mathbf{A}$ *são não-negativos.*

a_2) *Os autovalores reais das submatrizes principais de* $\mathbf{A}$ *são não-negativos.*

a_3) *Para toda matriz diagonal positiva* $\mathbf{D}$, *a matriz* $\mathbf{A}+\mathbf{D}$ *é não-singular.*

a_4) *Para cada* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *existe uma matriz diagonal não-negativa* $\mathbf{D}$ *tal que* $\mathbf{x}^t\mathbf{ADx} \geq 0$ *e* $\mathbf{x}^t\mathbf{Dx} \neq \mathbf{0}$.

a_5) Se $\mathbf{x} = [x_i] \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{y} := \mathbf{Ax} = [\,y_i\,]$, *então* $x_iy_i \geq 0$, *para algum i com* $x_i \neq 0$.

a_6) *Para toda matriz assinatura* $\mathbf{S}$, *existe* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{SASx} \geq \mathbf{0}$.

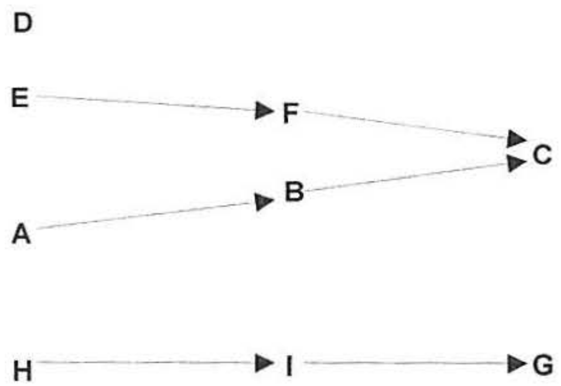


Fig.1.2 – Árvore de Implicações do Teorema 1.5.3

---

b_7) *A soma de todos os menores principais de ordem k de* $\mathbf{A}$ *é não-negativa, para* $k = 1, 2, \ldots, n$.

---

c_8) *Os autovalores reais de* $\mathbf{A}$ *são não-negativos.*

c_9) *Para todo* $\alpha > 0$, $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ *é não-singular.*

---

d_{10}) *Existe um reordenamento* $\mathbf{PAP}^t$ *de* $\mathbf{A}$ *e matrizes* $\mathbf{L}$ *e* $\mathbf{U}$, *a primeira triangular inferior com diagonal não-negativa, e a segunda, triangular superior com diagonal não-negativa, tais que* $\mathbf{PAP}^t = \mathbf{LU}$.

Estabilidade Não-negativa

e_{11}) *A parte real de todo autovalor não-nulo de* $\mathbf{A}$ *é positiva.*

f_{12}) *A parte real de todo autovalor de* $\mathbf{A}$ *é não-negativa, isto é,* $\mathbf{A}$ *é estável não-negativa.*

f_{13}) $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ *é não-singular e, pondo* $\mathbf{G} := (\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, *temos* $\rho(\mathbf{G}) \leq 1$.

Não-negatividade da Inversa Generalizada e Decomposições

g_{14}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem uma inversa generalizada à esquerda não-negativa.*

g_{15}) *A matriz* $\mathbf{A}$ *tem uma inversa generalizada à esquerda* $\mathbf{Y}$, *não-negativa em*

$$V_{\mathbf{A}} := \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathrm{col}\left(\mathbf{A}^m\right),$$

isto é, $\mathbf{Yx} \geq \mathbf{0}$, *para todo vetor* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *em* $V_{\mathbf{A}}$.

g_{16}) *Toda inversa generalizada à esquerda de* $\mathbf{A}$ *é não-negativa em* $V_{\mathbf{A}}$.

g_{17}) $\mathbf{A}$ *é monótona em* $V_{\mathbf{A}}$.

---

h_{18}) $\mathbf{A}$ *tem uma decomposição regular, cuja matriz de iteração tem raio espectral menor ou igual a* 1.

h_{19}) *Existe uma matriz* $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$, *que tem inversa não-negativa, e uma matriz-M,* $\mathbf{C} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$, *com* $\mathbf{T} \geq \mathbf{0}$ *e* $V_{\mathbf{C}} = V_{\mathbf{A}}$, *tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

---

i_{20}) $\mathbf{A}$ *tem uma decomposição regular fraca, cuja matriz de iteração tem raio espectral menor ou igual a* 1.

i_{21}) *Existe uma matriz* $\mathbf{B}$, *que tem inversa não-negativa, e uma matriz-M,* $\mathbf{C}$, *tal que* $V_{\mathbf{C}} = V_{\mathbf{A}}$ *e* $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

1.5.4 Levantamento Bibliográfico Relativo ao Teorema 1.5.3. Algumas das propriedades do Teorema 1.5.3 são extensões diretas das correspondentes no Teorema 1.4.5 para o caso não-singular. As condições b_7 e d_{10} são creditadas a Berman e Plemmons [06]. Os enunciados $g_{14} - g_{17}$, h_{18}, h_{19}, i_{20} e i_{21} estão em Neumann e Plemmons [29], ou em Rothbum [39]. Além disso, Meyer e Stadelmaier [24] estudaram a positividade das inversas de matrizes-M em termos de perturbações complementares $\mathbf{A} - t\mathrm{E}$, com $\mathbf{E} := \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^{D}$.

1.5.5 Teorema. *Para* $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$, *os* 21 *enunciados no Teorema* 1.5.3 *são equivalentes à afirmação:*
α) **A** *é uma matriz-M.*

Prova. Seja $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$. Admitimos válido o Teorema 1.5.3. Olhando para a árvore de implicações desse teorema, basta que demonstremos o que segue.

$\alpha \Rightarrow a_1$ Essa implicação decorre imediatamente da mesma implicação no Teorema 1.4.7, em conjugação com o Teorema 1.5.1, pois, se todos os menores principais de $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ são positivos para todo $\varepsilon > 0$, então todos os menores principais de **A** são não-negativos.

$\alpha \Rightarrow d_{10}$ Essa implicação é um caso particular do Teorema 1.5.19 abaixo.

$\alpha \Rightarrow e_{11}$ Se λ é um autovalor de $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$, então $s - \lambda$ é uma autovalor de **B**. Portanto, ou $\lambda = 0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, pois $s \geq \rho(\mathbf{B})$.

$\alpha \Rightarrow h_{18}$ Seja $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$. Então $s \geq \rho(\mathbf{B})$ e, daí, $\rho(\mathbf{T}) \leq 1$, sendo $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$. Temos, então, uma decomposição regular de **A**, que satisfaz h_{18}, com $\mathbf{M} = s\mathbf{I}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{B}$.

Agora tratemos das recíprocas.

$c_8 \Rightarrow \alpha$ Seja $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$. Como $s - \rho(\mathbf{B})$ é um autovalor real de **A**, $s \geq \rho(\mathbf{B})$ e **A** é uma matriz-M.

$d_{10} \Rightarrow \alpha$ Como $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{t} \in Z^{n\times n}$, obtemos, com uma demonstração semelhante ao caso não-singular de $f_{19} \Rightarrow \alpha$ no Teorema 1.4.7, que todos os elementos não-diagonais de ambas as matrizes **L** e **U** são não-positivos. Mas, então, **L** e **U** são matrizes-M e, portanto, **LU** é uma matriz-M, pois é uma matriz em $Z^{n\times n}$. Isso significa que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{t}\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{P}$ é uma matriz-M.

$g_{16} \Rightarrow \alpha$ Seja novamente $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$. Então, pondo $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$, temos que a matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{D}$ é não-negativa e $\mathrm{col}(\mathbf{A}^{k}) = \mathrm{col}((\mathbf{I} - \mathbf{T})^{k})$, sendo $k = \mathrm{ind}(\mathbf{A})$. Então, pelo Lema 1.5.2, $\rho(\mathbf{T}) \leq 1$, e, conseqüentemente, $s \geq \rho(\mathbf{B})$. ▲

É também possível dar condições necessárias e suficientes para uma matriz quadrada real geral ser uma matriz-M, semelhantemente ao caso de uma matriz-M não-singular. A demonstração dessas caracterizações é paralela à correspondente parte do Teorema 1.4.8, e não a daremos.

1.5.6 Teorema. *Para uma matriz quadrada real* **A** *qualquer, são equivalentes as afirmações:*

1) $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M;*

2) *para toda matriz diagonal positiva* $\mathbf{D}$, $\mathbf{A} + \mathbf{D}$ *tem inversa não-negativa;*

3) *para todo* $\alpha > 0$, $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ *tem inversa não-negativa.*

1.5.7 Definição. *Dizemos que uma matriz quadrada* $\mathbf{T}$ *é* semiconvergente *se somente se existe o limite* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{T}^k$.

Como para o caso de matriz convergente, utilizando a Forma Canônica de Jordan, sem muita dificuldade, provamos o teorema seguinte.

1.5.8 Teorema. *Uma matriz quadrada real* $\mathbf{T}$ *é semiconvergente* $\Leftrightarrow$ *as três condições seguintes se cumprem:*

1) $\rho(\mathbf{T}) \leq 1$;

2) *se* $\rho(\mathbf{T}) = 1$, *então* $\text{posto}(\mathbf{I} - \mathbf{T})^2 = \text{posto}(\mathbf{I} - \mathbf{T})$;

3) *se* $\rho(\mathbf{T}) = 1$, *então todo autovalor de* $\mathbf{T}$ *com módulo* 1 *é igual a* 1.

Lembremos que, se $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$, e $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular, então $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$ é convergente. Queremos estender essa propriedade importante a certas matriz-M singulares.

1.5.9 Definição. *Dizemos que uma matriz-M* tem a propriedade c *se e somente se aceita a decomposição* $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$, *onde a matriz* $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$ *é semiconvergente.*

Observamos que todas as matrizes-M não-singulares têm a propriedade c, mas que nem todas as matrizes-M têm essa propriedade.

1.5.10 Exemplo. Seja a matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se expressamos $\mathbf{A}$ na forma $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$, então $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$ e $\mathbf{T}^k$ serão

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} 1 & k/s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E vemos que **T** não é semiconvergente. ▲

Observamos também que, pelo Teorema de Perron-Frobenius, se **A** é uma matriz-M e escrevemos $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B},\ \mathbf{B} \geq \mathbf{0},\ s > 0$, com $s > \max_i(a_{ii})$, então a condição (3) do Teorema 1.5.8 é automaticamente verificada por $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$.

1.5.11 Exemplo. Tomemos a matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $s = 1$,

$$\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

não é semiconvergente, pois $\mathbf{T}^k = \mathbf{T}$, se k é ímpar, e, se k é par, $\mathbf{T}^k = \mathbf{PT}$, onde **P** permuta as linhas de **B**. Mas para qualquer $s > 1$,

$$\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

e $\lim_{k \to \infty} \mathbf{T}^k = \mathbf{I}$. Logo **T** é semiconvergente, e, portanto, **A** tem a propriedade c. ▲

Retornemos para a caracterização das matrizes-M com a propriedade c. Comecemos com o teorema que segue.

1.5.12 Teorema. *Uma matriz-M* **A** *tem a propriedade c* $\Leftrightarrow$ ind(**A**) *é* 0 *ou* 1.

Prova. Decomponhamos $\mathbf{A}$ na forma $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B},\ \mathbf{B} \geq \mathbf{0},\ s > \max_i (a_{ii})$. Ponhamos $\mathbf{T} := (1/s)\mathbf{B}$ e tomemos uma matriz $\mathbf{S}$ não-singular tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

seja a forma de Jordan para $\mathbf{T}$, onde $\rho(\mathbf{K}) < 1$. Então

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{K} \end{bmatrix},$$

e vemos que $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ é não-singular. Logo, pelo Teorema 1.5.8, $\mathbf{T}$ é semiconvergente se e somente se $\mathbf{I} - \mathbf{J} = \mathbf{0}$. Mas isso é verdade se e somente se posto$(\mathbf{I} - \mathbf{T})^2$ = posto$(\mathbf{I} - \mathbf{T})$, portanto, se e somente se posto$(\mathbf{A}^2)$ = posto$(\mathbf{A})$, pois $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$. ▲

Diversas condições apresentadas no Teorema 1.5.5 podem ser usadas para caracterizar matrizes $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, que são matrizes-M com a propriedade c. Isso, é claro, com o acompanhamento da condição $\mathrm{ind}(\mathbf{A}) \leq 1$. Os dois teoremas a seguir trazem algumas das caracterizações.

1.5.13 Teorema. *Seja* **A** *um matriz quadrada real de ordem n. No conjunto dos enunciados* (a_1)–(f_{13}) *abaixo, os enunciados encabeçados pela letra de mesmo nome (independente dos índices) são equivalentes; além disso, representando por uma letra maiúscula, digamos* A, *qualquer um dos enunciados encabeçados pela letra minúscula de mesmo nome (afetada de índice), no caso* a_k, *vale a árvore de implicações na Fig.1.3*:

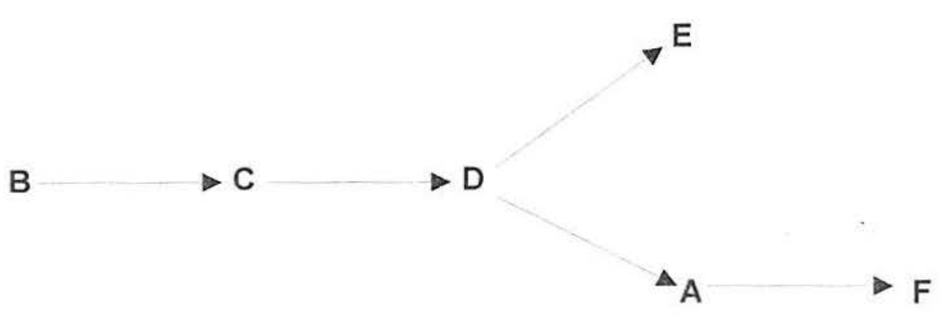


Fig.1.3 – Árvore das Implicações do Teorema 1.5.13

Encontramos a maior parte dos resultados a respeito das matrizes semiconvergentes e das matrizes-M com a propriedade c em Meyer e Plemmons [25], Neumann e Plemmons [29] e Plemmons [35]. Para o caso de matrizes em $Z^{n\times n}$ temos o seguinte teorema.

1.5.14 Teorema. *Para* $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$, *os* 13 *enunciados no Teorema* 1.5.13 *são equivalentes à afirmação*: β) $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M com a propriedade c.*

Prova. Seja $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$. Usaremos o Teorema 1.5.13 como apoio.

$\beta \Rightarrow b_7$ Como $\mathbf{A}$ tem uma decomposição regular $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $s > 0$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, com $(1/s)\mathbf{B}$ semiconvergente, a firmação b_7 vale com $\mathbf{M} := s\mathbf{I}$ e $\mathbf{N} := \mathbf{B}$. Em vista da árvore das implicações da Fig.1.3, β acarreta todas as afirmações b, c, d, e, a, f.

$e_{12} \Rightarrow \beta$ Como $\operatorname{ind}(\mathbf{A}) \leq 1$, basta mostrar que $\mathbf{A}$ é uma matriz-M. Seja a representação de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \quad s > 0.$$

Por contradição, suponhamos $s < \rho(\mathbf{B})$. Pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe um vetor $\mathbf{y} > 0$ tal que $\mathbf{Ay} = \rho(\mathbf{B})\mathbf{y}$. Logo $\mathbf{Ay} = (s - \rho(\mathbf{B}))\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$. Então $\mathbf{A}(-\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$, pois $(s - \rho(\mathbf{B})) < 0$ e $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Conseqüentemente

$$-\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{Av} = \mathbf{0},$$

de modo que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s(\mathbf{u} + \mathbf{y})$. Isso mostra que s é um autovalor de $\mathbf{B}$, em contradição com a hipótese de ser $s < \rho(\mathbf{B})$. Logo $s \geq \rho(\mathbf{B})$ e $\mathbf{B}$ é uma matriz-M.

$f_{13} \Rightarrow \beta$ Como "$\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $s > 0$" é uma decomposição regular de $\mathbf{A}$, resulta que $\mathbf{A}$ é uma matriz-M com a propriedade c. ▲

O teorema a seguir, que traz uma condição necessária e suficiente para uma matriz $\mathbf{A} \in Z^{n\times n}$ ser matriz-M com a propriedade c, encontra-se demonstrada em Berman et al [05].

1.5.15 Teorema. *Para* $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, *são equivalentes as seguintes afirmações:*

1) $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M com a propriedade c.*

2) Existe uma matriz simétrica positiva definida $\mathbf{W}$ *tal que* $\mathbf{AW} + \mathbf{WA}^t$ *é positiva semidefinida.*

Temos também o teorema seguinte, que dá uma condição suficiente para uma matriz $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$ ser matriz-M com a propriedade c.

1.5.16 Teorema. *Se* $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$ *e existe um vetor* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, *então* $\mathbf{A}$ *é matriz-M com a propriedade c.*

Matrizes-M singulares irredutíveis surgem com bastante freqüência, como matrizes dos coeficientes de sistemas lineares, provenientes, por exemplo, do método de diferenças finitas de equações diferenciais elípticas, com condições de fronteira de Neumann, ou equação de Poisson na esfera, e mesmo em alguns problemas econômicos. Por isso, as propriedades englobadas no teorema seguinte para tais matrizes revestem-se de importância.

1.5.17 Teorema. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz-M singular irredutível de ordem n. Então*

1) $\mathbf{A}$ *tem posto* $n - 1$;

2) Existe um vetor $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *para o qual* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$;

3) $\mathbf{A}$ *tem a propriedade c;*

4) Toda submatriz principal de $\mathbf{A}$ *distinta de* $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M não-singular;*

5) $\mathbf{A}$ *é quase monótona, isto é,* $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Prova. Seja $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, $s > 0$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$. Então $\mathbf{B}$ é também irredutível e, por isso, $\rho(\mathbf{B})$ é um autovalor simples de $\mathbf{B}$, de acordo com o Teorema de Perron-Frobenius. Logo $s - \rho(\mathbf{B}) = 0$ é um autovalor simples de $\mathbf{A}$ e, conseqüentemente, $\mathbf{A}$ tem posto $n - 1$. Está demonstrado (1).

Ainda pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe um vetor positivo $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Bx} = \rho(\mathbf{B})\mathbf{x}$. Logo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Vale (2), portanto.

A validade de (3) decorre de (2) e do Teorema 1.5.16.

Para estabelecer (4), basta analisar o caso $n > 1$. Por (2) e o dual para $\mathbf{A}^t$, existem vetores

$\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ com $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, e $\mathbf{y} \succ \mathbf{0}$ com $\mathbf{A}^t\mathbf{y} = \mathbf{0}$. A matriz adjunta clássica, **B**, de **A**, cujos elementos são os co-fatores A_{ij} dos elementos a_{ij} de **A**, sabidamente têm a forma $\delta\mathbf{x}\mathbf{y}^t$. Aqui é $\delta \neq 0$, pois **A** tem posto $n - 1 \geq 1$, por (1). Mas, se $\delta \leq 0$, existe um $\varepsilon > 0$, para o qual a adjunta clássica $\mathbf{B}_\varepsilon$ de $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ seria $\mathbf{B}_\varepsilon \prec \mathbf{0}$, em contradição com o Teorema 1.5.1, já que $\varepsilon > 0$. Logo $\delta > 0$, e, portanto, $\mathbf{B} \succ \mathbf{0}$. Resulta daí que todos os menores principais de ordem $n - 1$ de **A** são positivos. Então, da implicação $a_1 \Rightarrow c_8$ no Teorema 1.4.5 concluímos que todos os menores principais de ordem menor ou igual a $n - 1$ são positivos. Segue que toda submatriz principal própria de **A** é uma matriz-M não-singular, com o que fica demonstrada (4).

Por fim, suponhamos que $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, para algum vetor **x**. Pelo dual de (2) para $\mathbf{A}^t$, podemos encontrar um vetor $\mathbf{y} \succ \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{y}^t\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Mas, se $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{y}^t\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$, o que é uma contradição. Vale, pois, (5). ▲

O seguinte resultado importante corresponde à condição e_{18} do Teorema 1.4.7.

1.5.18 Teorema. *Seja* **A** *uma matriz-M singular e irredutível de ordem n. Então* **A** *tem uma fatoração* LU, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, *onde* **L** *é uma matriz-M não-singular (triangular inferior) e* **U** *é uma matriz-M (triangular superior).*

Prova. Pelo Teorema 1.5.17, toda submatriz principal própria de **A** é uma matriz-M não-singular. Logo, se particionamos **A** na forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^t & a_{mm} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}_1$ é uma matriz-M não-singular de ordem $n - 1$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ são vetores de $\mathbb{R}^{n-1}$ e $a_{mm} = \mathbf{b}^t\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{a}$. Pela condição e_{18} do Teorema 1.4.5, $\mathbf{A}_1$ tem fatoração LU: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$. Ademais, conforme demonstração desse teorema citado, $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{U}_1$ são matrizes-M não-singulares. Ponhamos

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^t\mathbf{U}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} := \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos $\mathbf{b}^t\mathbf{U}_1^{-1}$, pois $\mathbf{U}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$, como também $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$, pois $\mathbf{L}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$. Logo $\mathbf{L}$ é uma matriz-M não-singular, $\mathbf{U}$ é uma matriz-M e $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. ▲

Nem toda matriz-M redutível tem uma fatoração LU como descrita no Teorema 1.5.18. Eis um exemplo:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No entanto, o teorema seguinte encerra uma generalização da condição f_{19} do Teorema 1.4.5.

1.5.19 Teorema. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz-M. Então existe um reordenamento de* $\mathbf{A}$, *que tem uma fatoração LU,*

$$\mathbf{PAP}^t = \mathbf{LU},$$

onde $\mathbf{L}$ *é uma matriz-M não-singular e* $\mathbf{U}$ *é uma matriz-M.*

Prova. Basta considerar matrizes singulares redutíveis não-nulas. Seja $\mathbf{A}$ nessas condições e seja um seu reordenamento,

$$\mathbf{PAP}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{A}_1$ é irredutível. Tratemos primeiro do caso em que também $\mathbf{A}_2$ é irredutível. Pelo Teorema 1.5.18, $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ tem fatorações LU, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$, onde $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ são matrizes-M não-singulares e $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$ são matrizes-M. Então as matrizes

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} := \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$

satisfazem as condições do teorema, porque $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{B} \leq \mathbf{0}$.

Quando $\mathbf{A}_2$ é redutível, completamos a demonstração usando a indução sobre o número de blocos irredutíveis na forma normal reduzida de $\mathbf{A}$ (cf. (2.29)). ▲

Observamos que poderíamos, dualmente, ter escolhido $\mathbf{U}$ como não-singular, ao invés de $\mathbf{L}$.

Existe ainda considerável acervo de resultados sobre matrizes-M e há pesquisa em torno do assunto, especialmente em torno das matrizes-M singulares, mas a parte substancial que apresentamos será suficiente para a aplicação que temos em vista no Capítulo 2.

2 MATRIZES NÃO-NEGATIVAS NA ANÁLISE DE INSUMO-PRODUTO

2.1 Preliminares

Wassily Leontief publicou um artigo em 1936, *Quantitative input-ouput relations in the economic system of the United States*, no periódico *The Review of Economics and Statistics* [22] e, segundo Miernyk [26], com essa publicação ele desencadeou uma revolução silenciosa na análise econômica, que, lenta, mas continuadamente, foi ganhando momentum. Naquela época os países do mundo não-comunista estavam no pico da grande depressão. Contudo, Leontief não estava preocupado diretamente em resolver o desequilíbrio do sistema econômico da época, e sim em compreender a estrutura dos sistemas econômicos. Em particular queria compreender como as peças de uma economia se encaixam entre si e se influenciam. Seu modelo se aplica a qualquer tipo de sistema econômico, durante qualquer fase de seu desenvolvimento e pode ser usado para analisar muitos problemas econômicos e como um guia para implementação de diversos tipos de políticas econômicas.

Hoje o modelo de Leontief é uma ferramenta matemática bem compreendida, e reconhecida como extremamente importante.

Nosso objetivo não é explicar com profundidade e com detalhes tal modelo, mas mostrar que a teoria recente das matrizes não-negativas e, mais especificamente, das matrizes-M encontra uma elegante aplicação na manipulação da modelação linear da economia, criada por Leontief. Mostraremos como diversos resultados sobre matrizes-M, apresentados no Capítulo 1, simplificam a construção e permitem aprofundar a análise dos modelos de insumo-produto de Leontief.

2.2 O Modelo

O modelo de *insumo-produto* de Leontief é uma resposta à pergunta:

> *Numa situação econômica particular, que nível de saída de um produto deve ter cada uma de* n *indústrias, nível que seja necessário e suficiente para atender à demanda total da economia para esse produto?*

Com a idéia dessa pergunta em mente, apresentaremos uma descrição do modelo, ou modelos, de Leontief, suficiente para nosso objetivo. Alguns conceitos serão precisados posteriormente.

Leontief separou as atividades de produção numa economia em n setores ou indústrias, embora não necessariamente em empresas individuais, e analisou a troca de mercadorias entre esses setores. Suas hipóteses básicas são:

- cada um dos n setores produz um único tipo de artigo; na nossa exposição, o j$^{\text{ésimo}}$ setor e o artigo que este setor produz serão referidos com a letra (índice) j, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- em cada setor, *produto* significa transformação de determinada quantidade de diversos tipos de mercadorias (*insumo*[1]) em certo número de artigos (todos iguais); esse quadro de insumo-produto (em inglês: *input-output*) é estável.

Expliquemos um pouco mais o sistema de Leontief. Para produzir uma unidade dos artigos j, o j$^{\text{ésimo}}$ setor precisa t_{ij} unidades da i$^{\text{ésima}}$ mercadoria como insumo (entrada), $i = 1, 2, \ldots, n$; e λ unidades dos artigos j, para serem produzidos, requerem λt_{ij} unidades da i$^{\text{ésima}}$ mercadoria, $i = 1, 2, \ldots, n$. Os valores t_{ij} são chamados de *coeficientes de insumo* e normalmente são supostos constantes.

Seja x_i o produto do setor i por unidade de tempo. Parte desse produto bruto é usado como insumo para os n setores, resultando

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_i \tag{2.1}$$

[1] *Insumo* é uma palavra artificial, inventada por analogia com *consumo*, e que corresponde ao termo inglês *input*.

unidades do i$^{\text{ésimo}}$ artigo consumidas na produção, e ficando, em conseqüência,

$$d_i := x_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_i \qquad (2.2)$$

unidades do i$^{\text{ésimo}}$ artigo como produto líquido. Esse produto líquido d_i é usualmente designado de *demanda final* do artigo. De outra maneira, d_i pode ser considerado como contribuição do *setor aberto* da economia, em que o custo da mão-de-obra, compras do consumidor que resultam em lucro, etc., são tomados em conta como um dos setores da indústria.

Pondo

$$\mathbf{T} := [t_{ij}], \ \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

e usando **I** para indicar a matriz identidade, obtemos o sistema de equações lineares

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{x} = \mathbf{d}. \qquad (2.3)$$

A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T} \qquad (2.4)$$

está claramente em $Z^{n \times n}$. Veremos posteriormente que a situação econômica é *viável* se e somente se **A** é uma matriz-M não-singular. Nesse caso, de (2.3) e (2.4) obtemos o *vetor do produto bruto* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$, que é necessariamente não-negativo. Conseqüentemente o sistema (2.3), por razões econômicas óbvias, é caracterizado pela não-negatividade:

$$\mathbf{T} \geq \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Sob o ponto de vista econômico, dizer *que* (2.3) *é solúvel em*

$$\mathbb{R}^n_+ := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^t,\ x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n\}$$

significa ser viável o modelo de Leontief.

Designamos o modelo descrito acima de *modelo aberto de Leontief*, porque o setor aberto fica fora do sistema. Quando incorporamos o setor aberto ao sistema e o concebemos como outra indústria, passamos a chamar o modelo resultante de *modelo fechado de Leontief*. Neste último caso, a demanda final não aparece, e, em seu lugar, teremos o insumo e o produto da nova indústria. Aqui todas as mercadorias serão intermediárias, porque tudo o que é produzido o é para prover de insumos as indústrias ou setores do modelo. Sob o ponto de vista matemático, o desaparecimento da demanda final significa que o modelo é um sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}$ está em $Z^{n \times n}$. O problema agora é determinar quando $\mathbf{A}$ é uma matriz-M (singular) e, admitido que $\mathbf{A}$ seja singular, quando o sistema tem soluções não-negativas. Discutiremos adiante este ponto.

Embora os modelos de insumo-produto fossem inicialmente concebidos por Leontief para modelar a estrutura da economia nacional (americana), já foram e estão sendo usados também em muitas outras áreas. Para exemplificar, foram usados em problemas de planejamento de empresas [40, 44], servem de base para resolver problemas de cálculo de custos [18], desempenham papel central no estudo da poluição ambiental [15], etc.

2.3 Descrição do Modelo Mediante um Exemplo

Temos em mente quatro objetivos na apresentação desta seção:

- familiarizar-nos com a maneira pela qual os economistas constroem e analisam uma tabela de insumo-produto;
- ilustrar a maneira pela qual um modelo de insumo-produto pode ser usado numa previsão econômica;
- familiarizar-nos com certas notações e convenções terminológicas;
- munir-nos de material matemático relacionado com a não-negatividade, para referências

posteriores.

Neste trabalho, o quarto objetivo é o principal. Inicialmente discutiremos um exemplo simples de uma *tabela de insumo-produto*, Tabela 2.1, que mostra o fluxo de bens e serviços entre diferentes ramos de um sistema econômico, durante um período de tempo.

Tabela 2.1 –Tabela de insumo-produto em reais

Para → / Insumo ↓	(1) Agricultura	(2) Manufaturas	(3) Serviços	Demanda externa	Produto bruto
(1) Agricultura	45	60	90	105	300
(2) Manufaturas	90	30	135	345	600
(3) Serviços	60	180	----	210	450

Para se integrar na produção, cada setor ou indústria deve obter alguns insumos, como matéria prima, bens semi-industrializados e equipamentos fornecidos por outras indústrias. Além disso, há impostos a pagar e contratos de operários. Freqüentemente *produtos intermediários*, usados como insumos para produzir outros bens e serviços, são comprados de outras indústrias. O produto de cada setor ou indústria do sistema é vendido quer para consumidores externos quer para outros setores ou indústrias, que o usarão como insumo.

Nossa economia hipotética simplificada consiste em três setores: (1) agricultura, (2) manufaturas e (3) serviços. Cada setor fornece somente um tipo de produto: bens agrícolas, bens manufaturados, ou serviços. Os três setores são interdependentes no sentido de que cada um adquire insumos dos demais, assim como vende seu produto aos demais. Não consideramos impostos ou equipamentos. Todos os bens e serviços produzidos que não retornam ao processo de produção são usados pelo setor externo, constituído por consumidores, etc.

Na Tabela 2.1, os dados em cada linha mostram a distribuição do insumo para vários setores e consumidores, ao passo que os dados em cada coluna indicam as fontes dos insumos necessários para a produção. Assim, na primeira linha (agricultura) vemos que, sobre o produto bruto correspondente a R$300,00 de bens agrícolas, R$45,00 são destinados a outra produção agrícola, R$60,00 a manufaturas, R$90,00 a serviços, e R$105,00 vão para a demanda externa. Semelhantemente, por exemplo, na segunda coluna vemos que, para um produto de R$600,00, a manufatura precisa um insumo de R$60,00 de bens de agricultura, R$30,00 de seu próprio produto, e R$180,00 de serviços.

Conforme convencionado acima, indicando por x_i o produto bruto do setor i ($i = 1$ refere agricultura, $i = 2$ refere manufatura, e $i = 3$ refere serviços), por x_{ij} as vendas do setor i para o setor j, e por d_i a demanda final relativa ao setor i, resulta

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + d_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.5}$$

Isso expressa que o produto bruto de cada setor consiste no produto intermediário vendido aos diversos setores de produção, mais o produto final externo, que toma em conta os consumidores. Escrevemos também, como de costume,

$$\mathbf{x} := [x_1,\ x_2,\ x_3]^t \text{ e } \mathbf{d} := [d_1,\ d_2,\ d_3]^t.$$

É de alta conveniência para a análise que uma tabela de insumo-produto seja *normalizada*, isto é, o insumo para a produção seja dado sobre uma unidade do produto em cada setor. Uma tabela assim normalizada é chamada de *tabela tecnológica* de insumo-produto, e seus elementos, de *coeficientes técnicos de insumo* para a economia, como mencionamos em Preliminares do presente capítulo. Dessa forma, os coeficientes técnicos de insumo, que indicamos com t_{ij}, em nossa tabela são calculados assim:

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3, \tag{2.6}$$

Resulta para tabela tecnológica de insumo-produto:

Tabela 2.2 –Tabela tecnológica de insumo-produto

Para → / Insumo ↓	(1) Agricultura	(2) Manufaturas	(3) Serviços
(1) Agricultura	0,15	0,10	0,20
(2) Manufaturas	0.30	0,05	0,30
(3) Serviços	0,20	0,30	0,00

Podemos agora reescrever (2.6) na forma

$$x_{ij} = t_{ij} x_j, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.7}$$

Usando (2.7) em (2.5), produzimos o sistema

$$x_i = t_{i1} x_1 + t_{i2} x_2 + t_{i3} x_3 + d_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.8}$$

Então a matriz $\mathbf{T} = [\ t_{ij}\ ]$, no nosso caso, é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,10 & 0,20 \\ 0,30 & 0,05 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,00 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

vindo, para matriz $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,85 & -0,10 & -0,20 \\ -0,30 & 0,95 & -0,30 \\ -0,20 & -0,30 & 1,00 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Repetindo idéias, na Tabela 2.1 vemos, por exemplo, que o produto de R\$450,00 em serviços requer o insumo de R\$90,00 de bens de agricultura e R\$135,00 de bens manufaturados. Aqui os R\$210,00 relativos a serviços destinam-se a satisfazer a demanda externa. Isso sugere a pergunta: qual deve ser o produto bruto em serviços, se os coeficientes técnicos de insumo são mantidos fixos e a demanda externa varia? Essa *previsão econômica* baseia-se sobre a hipótese de que, quando o nível de saída do produto é alterado, a quantidade de todos os insumos exigidos muda proporcionalmente. Chamamos a isso de *hipótese da proporção fixa do fator insumos*. Logo, estamos supondo que a Tabela 2.2 se mantenha fixa, embora a demanda externa e, em conseqüência, as colunas do produto bruto da Tabela 2.1 possam mudar. Então, para prever o nível de saída do produto x_i, que cada um dos três setores deve ter, a fim de satisfazer as exigências para os insumos e a demanda externa d_i, precisamos apenas resolver o sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}. \tag{2.11}$$

Para que o sistema econômico seja *viável*, (2.11) deve ter uma solução não-negativa para todo vetor da demanda externa $\mathbf{d}$. O fato interessante, provado abaixo, é que tal viabilidade equivale a que $\mathbf{A}$ seja uma matriz-M não-singular. Pela condição n_{38} no Teorema 1.4.7, isso ocorre se e somente se $\mathbf{A}$ é inversível com $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$. No nosso caso, com o uso do MATLAB, temos

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167 \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

onde o ponto corresponde à vírgula e o arredondamento é feito na quarta casa decimal. Portanto, como $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$, o vetor insumo $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ é não-negativo para todo vetor da demanda externa $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$. Concluímos que nosso sistema econômico é viável. Por exemplo, seja R\$300,00 a demanda externa da agricultura, R\$600,00 a demanda de manufaturados, e R\$900,00 a demanda de serviços. Então

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 300 \\ 600 \\ 900 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 863.85 \\ 1373.24 \\ 1484.74 \end{bmatrix}.$$

As componentes de $\mathbf{x}$, R\$862,85 (agricultura), R\$1373,24 (manufaturados) e R\$1484,74 (serviços) são as necessidades de insumo de cada um dos três setores.

Agora suponhamos que a demanda da mercadoria (1), agricultura, seja R\$900,00, vindo, então

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 900 \\ 600 \\ 900 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1671.36 \\ 1711.27 \\ 1747.65 \end{bmatrix}.$$

Vemos que o produto de todos os setores aumentou, mas o do primeiro setor, agricultura, teve o maior crescimento. Veremos que tal fato é geral e acontece sempre que a matriz-insumo $\mathbf{T}$ é irredutível e a soma de cada um de suas linhas (das componentes de cada linha) satisfaz (cf. (2.9))

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} < 1.$$

Mostraremos que, sob essas condições para $\mathbf{T}$, se apenas a demanda relativa à mercadoria j aumenta, então o produto dessa mercadoria tem o maior aumento, embora todos os produtos possam aumentar.

2.4 O Modelo Aberto

O que temos apresentado até agora no presente capítulo teve o espírito introdutório, com o objetivo da familiarização com as idéias e terminologia do assunto. Daqui em diante concentraremos os esforços na aplicação matemática das matrizes-M (não-negativas), após a descrição genérica dos modelos de Leontief.

Discutiremos nesta seção o modelo aberto de Leontief. Como antes, supomos que a economia esteja dividida em n indústrias (setores), produzindo cada uma delas uma mercadoria de um único tipo, para ser consumida por ela mesma, por outras indústrias, e pelo setor externo. Nesse ponto, nossa notação continua a mesma: x_i indica o produto bruto do setor i; x_{ij} indica as vendas do setor i para o setor j; d_i indica a demanda final sobre o setor i; e t_{ij} indica o coeficiente técnico de insumo, isto é, o número de unidades da mercadoria i, necessário para produzir uma unidade da mercadoria j. Então o equilíbrio global do insumo-produto de toda a economia é expressa em termos de n equações lineares

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i, \; i = 1, \; 2, \cdots, \; n. \tag{2.13}$$

Supomos que, quando o nível da produção muda, as quantidades de todos os insumos exigidos mudem proporcionalmente. Isso remonta a supor que os coeficientes t_{ij} sejam constantes e satisfaçam

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; i = 1, \; 2, \cdots, \; n, \tag{2.14}$$

e, portanto, o sistema das equações lineares (2.13) se torna

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j + d_i, \; i = 1, \; 2, \cdots, \; n. \tag{2.15}$$

Como anteriormente, pondo $\mathbf{T} := [\, t_{ij} \,]$ e $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$, o equilíbrio total do insumo-produto de toda a economia expressa-se matricialmente,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}, \tag{2.16}$$

onde $\mathbf{x} := [\, x_i \,]$ é o vetor-produção e $\mathbf{d} := [\, d_i \,]$ é o vetor-demanda-final.

Designamos ao modelo descrito de *modelo de Leontief aberto*, e à matriz $\mathbf{T}$, de *matriz-insumo* do modelo. Nesse caso, a matriz $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, isto é, $a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ e $a_{ii} \geq 0$. Dentro da economia, as matrizes em $Z^{n \times n}$ são ditas *matrizes de Leontief*. As características do modelo de Leontief aberto estão completamente determinadas pelas propriedades de $\mathbf{A}$.

O sistema econômico que descrevemos tem também um sistema associado de estimativa de preços, que atribui o preço ou valor à relação insumo-produto. Convencionamos que p_j seja o preço da j$^{\text{ésima}}$ mercadoria consumida pelo setor j e que v_j seja o valor agregado por unidade do j$^{\text{ésimo}}$ produto. Então

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} p_i, \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

é o custo unitário da j$^{\text{ésima}}$ mercadoria consumida, de maneira que

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} t_{ij} p_i, j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

é a renda líquida por unidade da produção da j$^{\text{ésima}}$ mercadoria, que é o *valor agregado* v_j por unidade do produto. Conseqüentemente, pondo $\mathbf{p} := [\ p_j\ ]$ e $\mathbf{v} := [\ v_j\ ]$, a relação que apenas estabelecemos é descrita pelo sistema linear (nossos vetores são sempre vetores-coluna)

$$\mathbf{p}^t - \mathbf{p}^t\mathbf{T} = \mathbf{v}^t, \tag{2.17}$$

ou

$$\mathbf{p}^t\mathbf{A} = \mathbf{v}^t. \tag{2.18}$$

O vetor **p** tem o nome de *vetor-preço* e **v**, de *vetor-valor-agregado* do modelo aberto de Leontief associado.

Os dois sistemas (2.16) e (2.18) estão relacionados pela igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = \sum_{j=1}^{n} p_j d_j,$$

que interpretamos dizendo que a "entrada nacional" e o "produto nacional" são iguais.

Lembramos que *viabilidade* do modelo significa que o sistema original (2.16) tem um vetor-solução (vetor-produção **x**) não-negativo; por outro lado, a *rentabilidade* do modelo significa que o vetor-solução do sistema (2.18) (vetor **p** dos preços) é não-negativo. Formalizemos essas definições.

2.4.1 Definições. a) *Dizemos que um modelo de Leontief, com matriz-insumo* **T**, *é* viável *se e somente se o sistema* (2.16) *tem um vetor-solução* **x** (*vetor-produção*) *não-negativo, para todos os vetores* **d** *das demandas abertas.*

b) *Dizemos que um modelo de Leontief, com matriz-insumo* **T**, *é* rentável *se e somente se o sistema* (2.18) *tem um vetor-solução* **p** (*vetor-preço*) *não-negativo, para cada vetor-valor-agregado* **v**.

A dualidade desses conceitos é tornada clara pelo teorema seguinte, baseado na teoria das matrizes-M. Lembremos que uma matriz **A** é uma matriz-M não-singular se e somente se pode ser escrita na forma $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e $s > \rho(\mathbf{B})$.

2.4.2 Teorema. *Seja um modelo de Leontief aberto com matriz-insumo* **T**, *e* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o modelo é viável;*
2. *o modelo é rentável;*
3. **A** *é uma matriz-M não-singular.*

Prova. $1 \Leftrightarrow 3$. Supondo válida a afirmação 1 e escolhendo um vetor-demanda $\mathbf{d} > 0$, existe um vetor $\mathbf{x} > 0$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{d} \succ \mathbf{0}$. Mas esta última afirmação é precisamente a condição i_{28} do Teorema 1.4.7, que caracteriza as matrizes-M não-singulares. Tendo em mente que $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, segue a 3. Reciprocamente, se a 3 vale, pela condição n_{38} do mesmo teorema, temos $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Então o sistema linear (2.16) tem a solução não-negativa $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ para todo $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$. Segue então a 1.

$2 \Leftrightarrow 3$. Trivialmente verificamos que **A** é uma matriz-M não-singular se e somente se $\mathbf{A}^t$ o é. Logo estabelecemos a equivalência de 2 e 3 como o fizemos para a equivalência de 1 e 3. ▲

Em vista do Teorema 1.4.7, temos imediatamente o corolário seguinte.

2.4.3 Corolário. *Seja um modelo de Leontief aberto com matriz-insumo* **T** *e* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. o modelo é viável;

2. o modelo é rentável;

3. a matriz **A** *verifica uma das condições* $a_1 - q_{50}$ *do Teorema 1.4.7, e, portanto, todas.*

Se a matriz-insumo **T** de um modelo de Leontief aberto é irredutível, pelo Teorema 1.4.10 esse modelo é viável (rentável) se e somente se

$$\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}, \qquad (2.19)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{Ax} > \mathbf{0}, \text{ para algum } \mathbf{x} \succ \mathbf{0}. \qquad (2.20)$$

Nesse caso, (2.19) é equivalente à afirmação de que esse modelo tem todos os insumos positivos para qualquer vetor-demanda não-nulo, ou ainda, equivalentemente, esse modelo tem todos os preços positivos para qualquer vetor-valor-agregado não-nulo. Em torno desse ponto, notamos que a matriz-insumo **T** em (2.9) é irredutível. Portanto a economia discutida na Secção 2.3 é viável se e somente se $\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}$, o que, de fato, ocorre com (2.12).

Pelo Lema 1.4.3, se **T** é matriz de insumo de um modelo de Leontief aberto viável (rentável), uma vez que $\rho(\mathbf{T}) < 1$, os vetor-produto e o vetor-preço podem ser calculados ou aproximados, respectivamente, mediante as séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k \mathbf{d} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}^t \mathbf{T}^k.$$

No resto da presente seção estudaremos os efeitos que mudanças nas demandas abertas de um modelo viável podem causar no produto final, e os efeitos que mudanças nas exigências do valor agregado num modelo viável podem ter sobre os preços.

Consideremos um modelo de insumo-produto de Leontief aberto, com matriz-insumo **T**. Mesmo que o modelo seja viável, isto é, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T}$ é uma matriz-M não-singular, não é sempre verdade que a somas das linhas de **T** sejam menores ou iguais a 1. Em conexão com isso, temos o teorema que segue.

2.4.4 Teorema. *Seja* $\mathbf{T}$ *a matriz-insumo de um modelo aberto de Leontief viável, que satisfaz*

$$\mathbf{Tu} \leq \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} := [1, 1, \cdots, 1]^t.$$

Então, se apenas a demanda da mercadoria i *cresce, nenhum produto decresce, e o produto do setor* i *cresce e apresenta o maior crescimento, embora outros produtos possam ter o mesmo crescimento.*

Prova. Primeiro notemos que a condição $\mathbf{Tu} \leq \mathbf{u}$ significa precisamente que a soma de cada linha de $\mathbf{T}$ é menor ou igual a 1.

Como sempre, pomos $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ e indicamos com $\mathbf{x}$ e $\mathbf{d}$, respectivamente, o vetor-produto e o vetor-demanda. Pelo Teorema 2.4.2, $\mathbf{A}$ é uma matriz-M não-singular. Claramente,

$$\mathbf{Au} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{Tu} \geq \mathbf{0},$$

e, por isso, o Teorema 1.4.9 se aplica.

Admitamos que a $\mathrm{i}^{\text{ésima}}$ componente do vetor-demanda $\mathbf{d}$ sofra um acréscimo Δd_i. O novo vetor-demanda será

$$\overline{\mathbf{d}} := \mathbf{d} + \Delta d_i \mathbf{e}_i,$$

onde $\mathbf{e}_i$ é o $\mathrm{i}^{\text{ésimo}}$ vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. De (2.16) resulta $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ e o novo vetor-produto será

$$\overline{\mathbf{x}} := \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{d} + \Delta d_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{x} + \Delta d_i (\mathbf{A}^{-1})_i,$$

onde $(\mathbf{A}^{-1})_i$ denota a $\mathrm{i}^{\text{ésima}}$ coluna de $\mathbf{A}^{-1}$. Como $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$, pela condição n_{38} do Teorema 1.4.7, resulta de

$$\overline{x}_k = x_k + \Delta d_i \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{ki}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

que $\overline{x}_i > x_i$ e também que nenhum dos produtos decresce. Além disso, pelo Teorema 1.4.9,

$$\Delta d_i \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{ki} \leq \Delta d_i \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{ii} \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

o que mostra que o maior crescimento pertence a x_i, embora outros produtos possam ter um crescimento igual ao de x_i. ▲

2.4.5 Corolário. *Se a matriz-insumo* **T** *de um modelo aberto de Leontief é irredutível e* $\mathbf{Tu} \prec \mathbf{u}$, *então, se apenas a demanda da mercadoria* i *cresce, todos os produtos crescem, e o produto do setor* i *apresenta o maior crescimento, embora outros produtos possam ter o mesmo crescimento.*

Prova. O corolário segue imediatamente, porque $\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}$ e vale

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{ii} > \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{ki}, \quad \text{com } i,k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } i \neq k. \; ▲$$

Em vista da dualidade dos sistemas lineares (2.16) e (2.18), esperamos uma relação semelhante entre os valores agregados e os preços, com a diferença de ter no último caso somas de colunas em lugar de linhas. Mas, se um modelo de Leontief aberto é rentável, nenhum setor da economia opera com prejuízo e, além disso, ao menos um setor opera com lucro. Em termos da matriz-insumo **T**, isso significa que

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.21}$$

com desigualdade estrita para ao menos um valor de j. Somos levados ao seguinte teorema.

2.4.6 Teorema. *Se apenas o valor agregado à mercadoria* i *de um modelo de Leontief aberto viável é aumentado, então nenhum preço decresce e o preço da mercadoria* i *cresce mais que todos os* *demais preços, embora outros preços possam crescer do mesmo valor que o dessa mercadoria.*

Prova. Pelo Teorema 2.4.2, o modelo é rentável. Logo, por (2.21), a soma de coluna da matriz-insumo **T** do modelo é menor ou igual a 1. Então, pondo $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ e denotando com **p** e **v** o vetor-preço e o vetor-valor-agregado, respectivamente, o sistema linear (2.18) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{A}^t\mathbf{p} = \mathbf{v}.$$

A demonstração é completada semelhantemente à do Teorema 2.4.4, com a troca de **A** por $\mathbf{A}^t$. ▲

Se **T** é irredutível, há um resultado, dual do Corolário 2.4.5, cuja demonstração omitiremos, pois é análoga à deste último.

2.4.7 Corolário. *Se a matriz-insumo* **T** *de um modelo aberto de Leontief é irredutível e* $\mathbf{T}^t\mathbf{u} \prec \mathbf{u}$, *então, se apenas o valor agregado à mercadoria* i *cresce, todos os preços crescem, e o preço do setor* i *apresenta o maior crescimento.*

2.5 O Modelo Fechado

Quando o setor externo do modelo de insumo-produto aberto é incorporado ao sistema como outra indústria, o sistema se tornará um modelo fechado. Nesse modelo, a demanda final e o insumo primário não aparecem; em seus lugares figurarão o insumo e o produto da nova indústria. Aqui todas as mercadorias serão intermediárias por natureza, uma vez que tudo o que é produzido o é somente para a necessidade de insumo dos setores ou indústrias, internamente ao próprio modelo.

Dito de outra maneira, no sistema de insumo-produto de Leontief fechado, o consumidor ou setor aberto é considerado como um setor de produção. Na formulação do modelo fechado, que estamos discutindo, os insumos do setor aberto são os diversos bens de consumo ou serviços, e seu produto é o trabalho. Em tal sistema, a demanda final, e artigos, como emprego e razão de salário, são todos tratados como incógnitas e seus valores de equilíbrio são determinados simultaneamente com as demais variáveis.

Pelo fato de, num sistema fechado, não haver variável determinada externamente, fazemos uma pergunta diferente:

Dada a tecnologia de produção, quais são os níveis de produção e preços de equilíbrio, de maneira que não haja demanda não-satisfeita?

Procuremos responder matematicamente a essa pergunta, usando a mesma simbologia e terminologia do modelo aberto, tomando em conta que, agora a demanda final é considerada insumo do setor do consumidor. Também as componentes d_i do vetor-demanda **d** estão relacionadas ao nível E de emprego de forma que os consumidores compram uma quantidade d_i, que varia com o nível E de emprego. É-nos conveniente definir *coeficiente técnico fixo* c_i por

$$c_i := \frac{d_i}{E}, \text{ donde } d_i = c_i E.$$

Também suponhamos que o modelo aberto original contenha $n-1$ setores. Então as relações de insumo-produto no correspondente modelo fechado são descritas pelo sistema de n–1 equações lineares

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} x_j + c_i E, \quad i=1, 2, \cdots, n\text{-}1. \tag{2.22}$$

A provisão total do trabalho, isto é, o nível de emprego E, é a soma dos trabalhos L_i em cada setor:

$$E = \sum_{i=1}^{n} L_i,$$

onde $i = n$ corresponde ao setor-consumidor. Se definirmos os *coeficientes de insumo-trabalho fixos* por

$$l_i := \frac{L_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \quad \text{e} \quad l_n := \frac{L_n}{E},$$

a provisão total do trabalho pode ser expressa em termos da equação linear

$$E = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j + l_n E. \tag{2.23}$$

Então (2.22) e (2.23) formam o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}x_1 + \cdots + t_{1,n-1}x_{n-1} + c_1 E \\ x_2 = t_{21}x_1 + \cdots + t_{2,n-1}x_{n-1} + c_2 E \\ \vdots \\ x_{n-1} = t_{n-1,1}x_1 + \cdots + t_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1}E \\ E = l_1 x_1 + l_2 x_2 \cdots + l_{n-1}x_{n-1} + l_n E. \end{cases}$$

Com o fim de escrever esse sistema matricialmente, pomos

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} & c_1 \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,n-1} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & \cdots & t_{n-1,n-1} & c_{n-1} \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & l_n \end{bmatrix}.$$

Para simplificar a notação, definimos

$t_{in} := c_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$,

$t_{nj} := l_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$,

$\mathbf{x}^t := [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n]^t$, com $x_n := E$.

Com essas convenções, o ultimo sistema linear acima toma a forma matricial

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

e $\mathbf{T}$ é chamada de *matriz-insumo* do modelo. Com $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$, outra forma do sistema (2.24) é

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2.25}$$

Esse sistema (homogêneo) de insumo-produto de Leontief fechado toma em conta os fatores de demanda, assim como os fatores de suprimento. Num certo sentido, *o nível de emprego E representa a demanda final para o sistema.* Essa demanda final não é dada, mas é determinada com as outras variáveis de suprimento, que formam o insumo total x_i de cada uma das $n-1$ indústrias originais. Portanto, determinando simultaneamente a demanda final E e a necessidade dos produtos x_i, o modelo fechado toma em conta o impacto da demanda sobre o suprimento e a do suprimento sobre a demanda. Isso significa que os níveis da produção no equilíbrio, calculados num modelo fechado, incorporam, não somente os produtos necessários para atender a uma dada demanda final, mas também os produtos necessários para atender à mudança na demanda final, induzida por mudanças na produção.

Se $\mathbf{x} = [\, x_i \,]$ é o vetor dos produtos nesse sistema, como

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

é uma quantidade do $i^{\text{ésimo}}$ insumo, necessário para fornecer esse pacote de produtos, $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$ é o vetor dos insumos. Mas, como os produtos x_i são a única fonte de insumos, o sistema não pode operar, a não ser que seja $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. Ademais, o processo de produção é suposto irreversível, e, daí, $\mathbf{x}$ é necessariamente não-negativo e, de fato, positivo no nosso caso. Isso conduz à definição seguinte.

2.5.1 Definição. *Um modelo de Leontief fechado com matriz-insumo* $\mathbf{T}$ *é dito* viável *se e somente se existe algum* $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ *tal que*

$$\mathbf{Tx} \leq \mathbf{x}. \tag{2.26}$$

Esse $\mathbf{x}$, *quando existe, é dito uma* solução de saída (produto) viável para o modelo.

Se o modelo é viável, procuramos alguma solução para o modelo, que queremos considerar como saída de equilíbrio.

2.5.2 Definição. *Um vetor* $\mathbf{x}$ *é chamado* vetor-produto de equilíbrio *para um modelo de Leontief fechado com matriz-insumo* $\mathbf{T}$ *se e somente se*

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{x} \quad e \ \mathbf{x} \succ \mathbf{0}. \tag{2.27}$$

A última definição implica que um modelo de insumo-produto fechado tem um vetor-produto de equilíbrio se e somente se o sistema linear homogêneo (2.25) tem uma solução positiva, isto é, mais precisamente, o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \text{ na condição } \mathbf{x} \succ \mathbf{0}, \tag{2.28}$$

é consistente. Nesse caso o modelo é viável. Por outro lado, veremos que um modelo viável não possui necessariamente um vetor-produto de equilíbrio.

Nosso interesse está em mostrar que a teoria das matrizes-M singulares é muito apropriada para analisar a viabilidade de um modelo de Leontief fechado, assim como já mostramos que a teoria das matrizes-M não singulares é apropriada para analisar a viabilidade de um modelo de Leontief aberto.

Relembremos (cf. Definição 1.5.9) que $\mathbf{A}$ é uma matriz-M com a propriedade c se e somente se $\mathbf{A}$ tem uma representação $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{B}$, com $s > 0, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ e a seqüência de matrizes

$$\left(((1/s)\mathbf{B})^n\right) \text{ converge para alguma matriz.}$$

Expressamos a última linha também dizendo que *a matriz* $(1/s)\mathbf{B}$ *é semiconvergente* (cf. Definição 1.5.7).

2.5.3 Teorema. *Um modelo de Leontief fechado com matriz-insumo* $\mathbf{T}$ *é viável somente se* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ *é uma matriz-M com a propriedade* c.

Prova. O modelo é viável somente se (2.26) vale, ou, equivalentemente, somente se $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, para algum $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$. Como $\mathbf{A} \in Z^{n \times n}$, $\mathbf{A}$ é uma matriz-M com a propriedade c, pelo Teorema 1.5.16. ▲

Aplicando o Teorema 1.5.14 e o Teorema 1.5.15, obtemos o seguinte resultado.

2.5.4 Corolário. *Um modelo de Leontief fechado com matriz-insumo* $\mathbf{T}$ *é viável somente se* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ *satisfaz uma, logo todas condições* $a_1 - f_{13}$, *do Teorema 1.5.14, e existe uma matriz simétrica positiva definida* $\mathbf{W}$ *tal que* $\mathbf{AW} + \mathbf{WA}^t$ *é positiva semidefinida.*

Observamos que a recíproca do Teorema 2.5.3 não vale: por exemplo, a matriz

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz-insumo de um modelo de Leontief fechado tal que $\mathbf{A} := \mathbf{T} - \mathbf{I}$ é uma matriz-M com a propriedade *c*, mas não existe $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$, com $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, como é fácil verificar.

2.5.5 Teorema. *Consideremos um modelo de Leontief fechado que tenha uma matriz-insumo* $\mathbf{T}$ *irredutível e ponhamos* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o modelo é viável;*
2. *o modelo tem um vetor-produto de equilíbrio* $\mathbf{x}$, *único a menos de fatores escalares;*
3. $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M com a propriedade c.*

Prova. Que 1 acarreta 3 foi provado no Teorema 2.5.3. Mostremos que 3 implica 2. Admitindo 3, segue que existe $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ com $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, pelo Teorema 1.5.17(2). Como $\mathbf{T}$ é irredutível e $\mathbf{Tx} = \mathbf{x}$, então $\mathbf{x}$ é único, a menos de fatores escalares positivos, pelo Teorema de Perron-Frobenius. Logo vale 2. Está claro que 2 implica 1 em presença das Definições 2.5.1 e 2.5.2. ▲

Para continuar a estudar modelos de Leontief fechados viáveis e investigar a existência de um vetor-produto de equilíbrio, é conveniente reordenar a matriz $\mathbf{T}$ numa forma triangular de blocos, o que é sempre possível se ela é redutível.

Decorre da definição de matriz redutível que, se $\mathbf{T}$ é uma matriz quadrada redutível, existe um reordenamento $\mathbf{PTP}^t$ de $\mathbf{T}$ tal que

$$\mathbf{PTP}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{T}_{k-1,1} & \mathbf{T}_{k-1,2} & \cdots & \mathbf{T}_{k-1,k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{k1} & \mathbf{T}_{k2} & \cdots & \mathbf{T}_{k,k-1} & \mathbf{T}_{kk} \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

onde as submatrizes $\mathbf{T}_{ii}$ são quadradas e irredutíveis e algumas delas podem ser nulas ou de ordem

1, que, por conveniência, também consideraremos irredutíveis; quando $\mathbf{T}$ for irredutível, escreveremos $\mathbf{T} = [\ \mathbf{T}_{11}\ ]$. O reordenamento (2.29) de $\mathbf{T}$ é dito a *forma normal* de $\mathbf{T}$. A seguir estudaremos modelos de Leontief em termos da forma (2.29) da matriz-insumo.

2.5.6 Teorema. *Seja* $\mathbf{T}$ *a matriz-insumo de um modelo de Leontief fechado, e* $\mathbf{PTP}^t$, *sua forma normal. Seja também* $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{PTP}^t$ *particionada de conformidade com* $\mathbf{PTP}^t$. *Então o modelo é viável se e somente se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz-M, e, para* $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\mathbf{A}_{ii}\ \textit{singular} \Rightarrow \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{0},\ \textit{para}\ j \neq i. \tag{2.30}$$

Prova. Suponhamos que o modelo em questão seja viável. Então $\mathbf{A}$ é uma matriz-M pelo Teorema 2.5.3, e existe um vetor (particionado) $\mathbf{x} = [\mathbf{y}_1^t, \cdots, \mathbf{y}_k^t]^t \succ \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{PTP}^t \leq \mathbf{0}$, com $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, de maneira que, pondo $\mathbf{A}_{ij} := \mathbf{I} - \mathbf{T}_{ij}$, temos

$$\sum_{j<i} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{0},\ \text{ para } i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.31}$$

O fato $\mathbf{A}_{ij} \leq \mathbf{0}$, para todo $j < i$, implica $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{0}$, para $i = 1, 2, \cdots, k$. Mas, então, se $\mathbf{A}_{ii}$ é singular, resulta do Teorema 1.5.17(5) que $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$ para todo $j < i$, pois $\mathbf{A}_{ij}$ é irredutível. Além disso decorre que $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{y}_j = \mathbf{0}$ para todo $j < i$, pois $\mathbf{A}_{ij} \leq \mathbf{0}$. Portanto $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}$ sempre que $j \neq i$, e concluímos que $\mathbf{T}_{ij} = -\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}$ sempre que $j \neq i$. Segue que a implicação (2.30) vale.

Provemos agora a recíproca. Suponhamos que $\mathbf{A}$ seja uma matriz-M e que a (2.30) valha. Se $\mathbf{A}_{ii}$ é singular, então, por construção, $\mathbf{A}_{ii}$ é uma matriz-M singular e irredutível tal que existe $\mathbf{y}_i \succ \mathbf{0}$, para o qual $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$, pelo Teorema 1.5.17 (2). Semelhantemente, se $\mathbf{A}_{ii}$ é não-singular, então $\mathbf{A}_{ii}$ é uma matriz-M não-singular, de forma que existe $\mathbf{y}_i \succ \mathbf{0}$, para o qual $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i \succ \mathbf{0}$, pelo Teorema 1.4.7, parte i_{27}. Usando a hipótese (2.30), os vetores $\mathbf{y}_i$ podem ser escolhidos (multiplicados por convenientes escalares) de maneira que tenhamos $\mathbf{x} := [\mathbf{y}_1^t, \mathbf{y}_2^t, \cdots, \mathbf{y}_k^t]^t \succ \mathbf{0}$ e valha a (2.31). Portanto $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, logo $\mathbf{PTP}^t \leq \mathbf{x}$ e, conseqüentemente, $\mathbf{T}(\mathbf{P}^t\mathbf{x}) \leq \mathbf{P}^t\mathbf{x}$ com $\mathbf{P}^t\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$, resultando ser o modelo viável. ▲

Já comentamos que um modelo de Leontief fechado não tem necessariamente um vetor-produto de equilíbrio. Por exemplo, se **T** é a matriz-insumo e $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{T}$ é uma matriz-M não-singular, o modelo é viável, pois existe $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ com $\mathbf{Ax} \succ \mathbf{0}$, pelo Teorema 1.4.7, i_{27}, mas naturalmente, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ não tem solução positiva.

O resultado final, importante, caracteriza os modelos de Leontief, que têm um vetor-produto de equilíbrio, em termos da forma normal (2.29) da matriz-insumo **T**.

2.5.7 Teorema. *Sejam* **T** e **A** *como no Teorema* 2.5.6. *Então o modelo fechado tem um vetor-produto de equilíbrio se e somente se* **A** *é uma matriz-M, e, para* $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\mathbf{A}_{ii} \text{ } e' \text{ } singular \Leftrightarrow \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{0}, \text{ } para \text{ } j \neq i. \tag{2.32}$$

Prova. Admitamos que o modelo tenha um vetor-produto de equilíbrio. Logo, o modelo é viável, e, pelo Teorema 2.5.6, **A** é uma matiz-M e satisfaz (2.30). Seja i um índice tal que $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{0}$ para todo $j \neq i$. Então, pela hipótese, existe um vetor $\mathbf{x} := [\mathbf{y}_1^t, \mathbf{y}_2^t, \cdots, \mathbf{y}_k^t]^t \succ \mathbf{0}$ particionado tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Portanto $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$, o que implica que $\mathbf{A}_{ii}$ é singular, ficando estabelecida a equivalência (2.32).

Tratemos da recíproca. Suponhamos que **A** é uma matriz-M e que valha a (2.32). Primeiramente tomemos um índice i tal que $\mathbf{A}_{ii}$ seja singular. Assim podemos escolher $\mathbf{y}_i \succ \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$, porque $\mathbf{A}_{ii}$ é uma matriz-M irredutível singular. Também, por (2.32), $\mathbf{A}_{ij} = 0$ sempre que $j \neq i$. S. p. g. ordenamos (2.29) de modo que todos os blocos singulares na diagonal, $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \ldots, \mathbf{A}_{ss}$, sejam escritos primeiro. Seja $\mathbf{y}_i \succ \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}_{ii}\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$, para $i = 1, 2, \ldots, s$. Notemos que a conclusão vale se $s = k$. Se $s < k$, definamos

$$\mathbf{y}_r := \mathbf{A}_{rr}^{-1} \sum_{j=1}^{r-1} \mathbf{A}_{rj}\mathbf{y}_j, \quad \text{para } r = s+1, \ldots, k.$$

Como $\mathbf{A}_{rr}$ é uma matriz-M não-singular irredutível, $\mathbf{A}_{rr}^{-1} \succ \mathbf{0}$. Além disso, $\mathbf{A}_{rj} \neq \mathbf{0}$, para algum j com $j \in \{1, 2, \cdots, r-1\}$, por (2.32). Portanto, por indução, todos os vetores $\mathbf{y}_j$ são positivos e, além disso,

$$\sum_{j=1}^{r} \mathbf{A}_{rj}\mathbf{y}_j = \mathbf{0}, \quad \text{para } r = s+1, \ldots, k.$$

Conseqüentemente, pondo $\mathbf{x} := \left[\mathbf{y}_1^t, \mathbf{y}_2^t, \cdots, \mathbf{y}_k^t\right]^t$, vemos que $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ e $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Segue que $\mathbf{TP}^t\mathbf{x} = \mathbf{P}^t\mathbf{x}$, o que mostra que $\mathbf{P}^t\mathbf{x}$ é um vetor-produto de equilíbrio para o modelo. ▲

2.5.8 Exemplo (modelo aberto). Leontief, em 1958, usou seu modelo (aberto) para analisar a economia dos EE. UU. Dividiu a economia em 81 setores. Por simplicidade agrupamos os setores em seis famílias (identificadas pelo próprio Leontief, conforme [42]), transformando cada família num setor só:

Produtos não-metálicos acabados (NA): mobília, alimentos em conservas, . . .
Produtos metálicos acabados (MA): aparelhos domésticos, veículos a motor, . . .
Metais primários (MP): minérios, materiais metálicos laminados, . . .
Produtos não-metálicos primários (NP): agricultura, papel para impressão, . . .
Energia (E): petróleo, carvão, . . .
Serviços (S): Diversões, propriedades de terra, . . .

A tabela tecnológica de insumo-produto, Tabela 2.3, fornece a demanda interna do sistema, em 1958, conforme os números de Leontief, em milhões de dólares. Por exemplo, o número 0.173 na posição (6, 5) significa que, para produzir energia no valor de 1 milhão de dólares, é necessário prover serviços no valor de 0.173 milhões = 173.000,00 de dólares. Semelhantemente, o número 0.037, na posição (4, 2), significa que, para produzir metal acabado no valor de 1 milhão de dólares, precisa gastar 0.037 milhões = 37.000.00 dólares em produtos não-metálicos primários.

Leontief estimou também a demanda externa na economia americana de 1958 em milhões de dólares:

NA: 99 640
MA: 75 548
MP: 14 444
NP: 33 501
E: 23 527
S: 263 985

Tabela 2.3 –Tabela tecnológica de insumo-produto

Para → / Insumo ↓	NA	MA	MP	NP	E	S
NA	0.170	0.004	0.000	0.029	0.000	0.008
MA	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MP	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NP	0.384	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

Neste problema usamos o MATLAB para os cálculos. A matriz-insumo é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.1700 & 0.0040 & 0 & 0.0290 & 0 & 0.0080 \\ 0.0030 & 0.2950 & 0.0180 & 0.0020 & 0.0040 & 0.0160 \\ 0.0250 & 0.1730 & 0.4600 & 0.0070 & 0.0110 & 0.0070 \\ 0.3480 & 0.0370 & 0.0210 & 0.4030 & 0.0110 & 0.0480 \\ 0.0070 & 0.0010 & 0.0390 & 0.0250 & 0.3580 & 0.0250 \\ 0.1200 & 0.0740 & 0.1040 & 0.1230 & 0.1730 & 0.2340 \end{bmatrix},$$

e a correspondente matriz de Leontief é

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.8300 & -0.0040 & 0 & -0.0290 & 0 & -0.0080 \\ -0.0030 & 0.7050 & -0.0180 & -0.0020 & -0.0040 & -0.0160 \\ -0.0250 & -0.1730 & 0.5400 & -0.0070 & -0.0110 & -0.0070 \\ -0.3480 & -0.0370 & -0.0210 & 0.5970 & -0.0110 & -0.0480 \\ -0.0070 & -0.0010 & -0.0390 & -0.0250 & 0.6420 & -0.0250 \\ -0.1200 & -0.0740 & -0.1040 & -0.1230 & -0.1730 & 0.7660 \end{bmatrix}.$$

Para inversa de **A**, temos

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2345 & 0.0139 & 0.0067 & 0.0639 & 0.0060 & 0.0174 \\ 0.0174 & 1.4364 & 0.0560 & 0.0137 & 0.0188 & 0.0322 \\ 0.0781 & 0.4665 & 1.8780 & 0.0357 & 0.0442 & 0.0314 \\ 0.7519 & 0.1333 & 0.1005 & 1.7412 & 0.0655 & 0.1228 \\ 0.0608 & 0.0451 & 0.1301 & 0.0829 & 1.5776 & 0.0595 \\ 0.3401 & 0.2359 & 0.3070 & 0.3145 & 0.3756 & 1.3487 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$ (na verdade é $\mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}$), pelo Teorema 1.4.7, n_{38}, **A** é uma matriz-M (não-singular) e, daí, pelo Teorema 2.4.2, prevemos que o sistema econômico em análise é viável (rentável). O vetor da demanda externa é

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 99640 \\ 75548 \\ 14444 \\ 33501 \\ 23527 \\ 263985 \end{bmatrix},$$

e o vetor-produto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 131\,033{,}21 \\ 120\,458{,}90 \\ 80\,680{,}56 \\ 178\,732{,}04 \\ 66\,929{,}26 \\ 431\,562{,}04 \end{bmatrix}.$$

O vetor-produto nos mostra que precisava (aproximadamente):

- 131 033 unidades (131 033 milhões de dólares) de produtos não-metálicos acabados,
- 120 459 unidades de produtos metálicos acabados,
- 80 681 unidades de produtos metálicos primários,
- 178 732 unidades de produtos não-metálicos primários,
- 66 929 unidades de energia, e
- 431 562 unidades de serviço,

para fazer a economia dos EE. UU. funcionar e atender à demanda externa, em 1958. ▲

2.5.9 Exemplo (modelo fechado). Analisemos um caso muito simples de modelo de Leontief fechado, descrito pelo sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.0E \\ x_2 = 0.0x_1 + 0.3x_2 + 0.3E \\ E = 0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.7E, \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 representam os produtos de dois setores internos e E, o nível de emprego. Escrevemos a matriz-insumo do modelo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.2000 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0.3000 & 0.3000 \\ 0.8000 & 0.5000 & 0.7000 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

e a matriz de Leontief:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.8000 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0.7000 & -0.3000 \\ -0.8000 & -0.5000 & 0.3000 \end{bmatrix}.$$

Mostremos inicialmente que o modelo é viável. Executaremos os cálculos com o MATLAB. Os autovalores calculados de **A** são

$$0.00000000000000,$$
$$0.90000000000000 + 0.22360679774998i,$$
$$0.90000000000000 - 0.22360679774998i.$$

Logo, pelo Teorema 1.5.4(e_{11}), **A** é uma matriz-M (singular), e, como $\mathbf{A} \leq \mathbf{1}$, ela tem a propriedade c, pelo Teorema 1.5.12. O grafo de **T** é fortemente conexo (Definição 1.2.3), Fig.2.1. Então **T** é irredutível, pelo Teorema 1.2.4. Concluímos, pelo Teorema 2.5.5, que o modelo é viável e (equivalentemente) tem um vetor-produto de equilíbrio **x**, único a menos de fatores escalares. Resolvendo o sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, com $\mathbf{x} = [x_1, x_2, E]^t$, encontramos

$$\mathbf{x} = s\left[\frac{3}{28}, \frac{3}{7}, 1\right]^t, \; s > 0.$$

Tomando $s = 28/43$, obtemos o vetor-produto de equilíbrio tal que $x_1 + x_2 + E = 1$. ▲

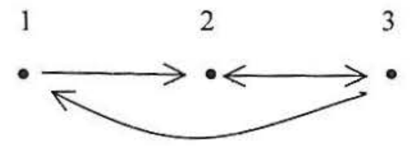


Fig.2.1 – Grafo da matriz **T** em (2.33)

Conclusão

A teoria das matrizes-M é plenamente eficiente para a análise dos modelos de insumo-produto de Leontief, devido às inúmeras maneiras de verificar se uma matriz é uma matriz-M, singular ou não, que tem ou não a propriedade c. Algumas dessas maneiras são muito simples teoricamente.

Muitas vezes os sistemas lineares, resultantes da modelação matemática de Leontief, são muito grandes: em 1949, Leontief modelou a economia americana, distribuindo-a em 500 setores [20]. O mais potente computador da época ainda não podia lidar com um sistema desse tamanho e Leontief teve que reduzi-lo a 42 setores. Hoje, com computadores e métodos potentes disponíveis, manejamos matrizes que representam sistemas lineares com milhões de equações. Então – e esse é o ponto aqui – hoje não há dificuldade em verificar, na prática, se uma matriz é uma matriz-M singular ou não-singular.

Comentário Final

Antes de terminar este trabalho, comentamos que a análise de insumo-produto, embora seja talvez a aplicação mais significativa, não é a única na área da economia, em que as matrizes não-negativas e as matrizes-M desempenham um papel importante. Outra aplicação importante, por exemplo, reside no estudo do modelo de Neumann. Esse modelo foi desenvolvido por Neumann para introduzir o conceito de crescimento de equilíbrio. Ele provou que uma solução do modelo de equilíbrio geral existe. A principal diferença entre o modelo de Neumann e o modelo fechado de Leontief é que, neste último, os métodos de produção são dados *a priori*, ao passo que, no de Neumann, há um maior número de métodos de produção possíveis, acarretando que um dos problemas é escolher a melhor técnica. Essas possibilidades de produção podem ser descritas por duas matrizes não negativas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e um dos problemas matemáticos é achar o maior escalar $\alpha > 0$ tal que $\alpha\mathbf{Ax} \leq \mathbf{Bx}$ com $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$. Como esperado, a teoria de Perron-Frobenius sobre matrizes não-negativas desempenha um papel importante no estudo desses problemas [16].

Não podemos deixar de citar o papel importante e natural que a teoria das matrizes não-negativas têm também na análise das cadeias de Markov [06].

Referências Bibliográficas

[01] Araki, M. – *Applications of M-matrices to the stability problems of composite dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. **52**, 309-321, 1975.

[02] Axelsson, O. – *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[03] Baker, G. P., Berman, A. & Plemmons, R. J. – *Positive diagonal solutions to the Lyapunov equations*, Linear and Multilinear Algebra **5**, 249-256, 1978.

[04] Beauwens, R. – *Semi-strict diagonal dominance*, SIAM J. Numer. NL. **13**, 104-112, 1976.

[05] Berman, A., Varga, R. S. & Ward, R. C., – *ALPS: Matrices with nonpositive off-diagonal entries*, Linear Algebra and Appl. **21** 233-244, 1978.

[06] Berman, A. & Plemmons, R. J. – *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[07] Bramble, J. H. & Hubbard, B. E. – *On a finite difference analogue of an elliptic boundary value problem which is neither diagonally dominant nor of nonnegative type*, J. Math. Phys. **43**, 117-132, 1964.

[08] Collatz, L. – *Function of monotonic type*, Arch. Math. **3**. 366-376,1952.

[09] Fan, K. – *Topological proofs for certain theorems on matrices with nonnegative elements*, Monatsh. Math **62**, 219-237, 1958.

[10] Fiedler, M. & Ptak.V. – *On Matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czech. Math. J. **12**, 382-400,1962.

[11] Frobenius, G. – *On Nonnegetive Matrices*, S.-Preuss, Akad. Wiss, Berlin, 456-477, 1912.

[12] Frobenius, G. – *On Positive Matrices*, S.-Preuss, Akad. Wiss, Berlin, 471-476, 1908.

[13] Frobenius, G. – *On Posivive Matrices* II, S.-Preuss, Akad. Wiss, Berlin, 514-518, 1909.

[14] Gale, D. & Nikaido, H. – *The Jacobian matrix and global univalence mappings*, Math. Ann. **19**, 81-93, 1965.

[15] Gutmanis – *Environmental implication of economic growth in the United States, 1970 to 2000; An input-output analysis*, Proc. IEEE Conf. Decision and Central, New Orleans, 1971.

[16] Hansen, B. – *A survey of General Equilibrium System*, McGraw-Hill, NY, 1970.

[17] Hawkins, D. & Simon, H. A. – *Note: Some conditions of macroeconomic stability*, Econometria **17**, 245-248, 1949.

[18] Hibbs, H. – *An introduction to NARM, Memorandum, Center for Naval Analysis*, Arlington, Virginia, 1972.

[19] Johnson, C. R. – *A sufficient condition for matrix stability*, J. Res. Nat. Bur. Std. **73B**, 103-104, 1974.

[20] Kuttler, J.R. – *A forth order finite-difference approximation for the fixed membrance eigenproblem*, Math. Comp. **25**. 237-256, 1971.

[21] Lay, C. D. – *Álgebra Linear e suas Aplicações*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1999.

[22] Leontief, W. W. – *Quantitative input and output relations in the economic system of the United States*, Rev. Econ. Statist. **18**, 100-125, 1936.

[23] Lyapunov, A. – *Problème génerale de la Stabilitée du mouvement*, Comm. Math. Soc. Kharkov, reproduzido em Ann. Math. Stud. 7, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1947, 1892.

[24] Meyer, C. D. Jr. & Stadelmaier, M. W., – *Singular M-matrices and inverse-positivity*, Linear Algebra and Appl. **22**, 139-156, 1978.

[25] Meyer, C. D. Jr. & Plemmons, R. J. – *Convergent powers of a matrix with applications to iterative methods of singular linear systems*, SIAM J. Numer. Anal., **14**, 699-705, 1977.

[26] Miernyk, W. H. – *The Elements of Input-Output Analysis*, Random House, NY, 1965.

[27] Moylan, P. J. – *Matrices with positive principal minors*, Linear Algebra and Appl. **17**, 53-58, 1977.

[28] Neumann, M. – *A note on generalizations of strict diagonal dominance for real matrices*, Linear Algebra and Appl. **26**, 3-14, 1979.

[29] Neumann, M. & Plemmons, R. J., – *M-matrix characterizations II: general M-matrices*, Linear and Multilinear Algebra **9**, 211-225, 1979.

[30] Ortega, J. M.& Rheinboldt. W. – *Monotone iterations for nonlinear equations with applications to Gauss-Seidel methods*, SIAM J. Numer. Anal. **4**, 171-190, 1967.

[31] Ostrowski, A. M. – *On determinant diagonally dominant*, Comment. Math Helv. **10**, 69-96, 1937.

[32] Ostrowski, A. M. – *On determinant diagonally dominant and the absolute convergence of iterative processes*, Comment. Math Helv. **30**, 175-210, 1956.

[33] Ostrowski, A. M. – *On positive Matrices*, Math. Ann., **150**, 276-284, 1963.

[34] Perron, O. – *On the Theory of Matrices*, Math. Ann. 64, 248-263,1907.

[35] Plemmons, R. J., – *M-matrix leading to semiconvergent splittings*, Linear Algebra and Appl. **15**, 243-252, 1976.

[36] Price, H. S. – *Monotone and oscillation matrices applied to finite difference approximation*, Math. Comp. **22**, 484-516, 1968.

[37] Robert, F. – *Matrice Non-negative et Normes Vectorielles*, Lecture Notes, Scientific and Medical Univ. at Grenoble, 1973.

[38] Robert, F. – *Recherche d'une M-matrice, parmi les minorantes d'un operateur lineaire*, Numer. Math **9**, 189-199, 1966.

[39] Rotblum, U. G., – *An index classification of M-matrices*, Linear Algebra and Appl. **23**, 1-12, 1979.

[40] Sandberg, I. W. – *A global non-linear extension of the Le Chatelier-Samuelson principle for linear Leontief Models*, J. of Economic Th 7, 40-52, 1974.

[41] Schneider, H. – *An inequality for latent roots applied to determinants with dominant principal diagonal*, J. London Math. Soc. **28**, 108-122, 1953.

[42] Scientific America –Abril de 1965.

[43] Stein, R. – *Some general theorems on iterants*, J. Res. Nat. Bur. Std **48**, 82-83, 1952.

[44] Stone, D. – *An Economic Approach to Planning the Conglomerate of the 70's*, Auerbach Publ., NY, 1970.

[45] Tartar, L. – *Une Nouvelle characterization des M-matrices*, Rev. Française Informat., Recherche Operationnelle **5**, 127-128, 1971.

[46] Varga, S. R., – *Matrix Iterative Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1962 e 2000.

[47] Young, D. M. – *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, Inc., NY, 1971.