

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Interação de Ondas Aquáticas com  
Obstáculos Quase Circulares Finos e  
Submersos**

por

Rômulo Lima da Gama

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leandro Farina  
Orientador

Porto Alegre, Março de 2015.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Gama, Rômulo Lima da

Interação de Ondas Aquáticas com Obstáculos Quase Circulares Finos e Submersos / Rômulo Lima da Gama.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2015.

70 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Farina, Leandro

Dissertação: Matemática Aplicada  
Ondas Oceânicas, Equações Integrais

# Interação de Ondas Aquáticas com Obstáculos Quase Circulares Finos e Submersos

por

Rômulo Lima da Gama

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Mecânica dos Fluidos; Equações Integrais.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Dagoberto Adriano Rizzotto Justo  
Instituto de Matemática/UFRGS

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil  
UNIFAP

Dissertação apresentada e aprovada em  
20/04/2015.

Prof. Dr. Carlos Hoppen  
Coordenador

## AGRADECIMENTO

A *Deus*, primeiramente por ter me concedido essa oportunidade de conhecer o mundo e suas maravilhas e também agradecer pelas pessoas que conheci nesta trajetória da minha vida.

Agradeço aos meus pais, *Manoel Marques* e *Maria da Conceição*, por sempre apoiarem minhas decisões e acreditarem na minha capacidade. Pela educação que me deram e na construção do meu caráter.

As minhas irmãs *Marinalva*, *Silma* e *Silmara*, pelo apoio e por respeitarem a minha vontade de ir em busca dos meus sonhos longe delas.

A minha noiva *Quele Daiane*. Nesses cinco anos de convivência sempre estive ao meu lado, algumas vezes mesmo longe me deu forças para não desistir e passar pelas diversas dificuldades que encontrei longe da minha família. Também agradeço aos familiares dela, que hoje os considero minha segunda família.

Aos prezados professores, *Guzman Chamilco* e *Walter Cárdenas*, que desde a graduação incentivaram a busca pelo conhecimento.

Ao meu orientador, professor *Leandro Farina*, pelo dedicação e horas de discussões e reuniões sobre a pesquisa.

Ao programa de pós-graduação em matemática aplicada da UFRGS. Aos amigos que aqui encontrei e ao convênio PFRH-PB216 pelo apoio financeiro.

*“... Ela me disse, filho, você irá longe na vida se fizer tudo direito, amará o lugar onde estiver, apenas saiba que não importa aonde vá você sempre poderá voltar para casa...”*

(Jason Mraz / Michael Natter / Mike Daly)

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	viii
RESUMO . . . . .	xi
ABSTRACT . . . . .	xii
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1 Motivação . . . . .	13
1.2 Objetivo . . . . .	15
<b>2 ONDAS EM ÁGUA . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1 Preliminares . . . . .	17
2.2 Equações Governantes . . . . .	18
2.3 Condições de Fronteira . . . . .	20
2.4 Problema Linearizado . . . . .	23
2.5 O Fenômeno de Dispersão . . . . .	25
<b>3 ESPALHAMENTO E RADIAÇÃO DE ONDAS POR OBSTÁCULOS</b>	<b>27</b>
3.1 O Problema de Espalhamento . . . . .	27
3.2 Solução . . . . .	29
3.3 O Problema de Radiação . . . . .	32
3.4 Solução . . . . .	33

3.5	Forças Hidrodinâmicas . . . . .	33
4	<b>OBSTÁCULOS QUASE CIRCULARES FINOS E EQUAÇÕES HIPERSINGULARES . . . . .</b>	<b>37</b>
4.1	Formulação Matemática . . . . .	38
4.2	Equações Integrais Hipersingulares . . . . .	40
4.3	Solução do Problema . . . . .	41
4.4	Mapeamento Conforme . . . . .	44
5	<b>MÉTODO NUMÉRICO E RESULTADOS . . . . .</b>	<b>48</b>
5.1	O Método Espectral . . . . .	48
5.2	Resultados Numéricos . . . . .	52
5.2.1	Região Quase Circular $A$ . . . . .	54
5.2.2	Região Quase Circular $B$ . . . . .	58
5.2.3	Região Quase Circular $C$ . . . . .	64
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>68</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	TLP antes (esquerda) e depois (direita) da passagem do furacão Katrina. . . . .	14
1.2	Simulação numérica tridimensional de quebra-mares - MEDUS 2009 [17]. . . . .	15
2.1	Oceanos do planeta [18]. . . . .	18
3.1	Aeroporto Internacional de Kansai [19]. . . . .	34
3.2	Seis graus de liberdade do movimento de um corpo rígido [3]. . . . .	34
4.1	Plataforma tipo Spar [20]. . . . .	37
4.2	Plataforma Spar discretizada [5]. . . . .	37
4.3	Quilhas finas, componentes da plataforma Spar [5]. . . . .	37
5.1	Cinco regiões usando o mapeamento $f(\zeta) = \zeta + \epsilon 0.5\zeta + \epsilon 0.5\zeta^2$ para diferentes valores de $\epsilon$ . . . . .	54
5.2	Região quase circular $A$ (em vermelho) mapeada no disco unitário (em azul) usando $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ . . . . .	55
5.3	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região circular. . . . .	56
5.4	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $A$ , dada por $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ . . . . .	57
5.5	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região circular. . . . .	57



5.6	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $A$ , dada por $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ . . . . .	58
5.7	Regiões mapeadas no disco unitário (em preto) por $r(\varsigma) = \varsigma + \epsilon(\varsigma^3 + \varsigma^4)$ com $\epsilon = 0.025$ (em vermelho), $\epsilon = 0.05$ (em azul) e $\epsilon = 0.06$ (em verde). . . . .	59
5.8	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $B$ , dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.025(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	60
5.9	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $B$ , dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.025(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	60
5.10	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $B$ , dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.05(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	61
5.11	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $B$ , dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.05(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	62
5.12	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região aproximadamente circular, dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.06(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	63
5.13	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região aproximadamente circular, dada por $r(\zeta) = \zeta + 0.06(\zeta^3 + \zeta^4)$ . . . . .	63

5.14	Região mapeada no disco unitário por $h(\zeta) = \zeta + 0.045(e^{\zeta^3} - 1)$ (em vermelho). . . . .	64
5.15	Massa adicional para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $C$ , dada por $h(\zeta) = \zeta + 0.045(e^{\zeta^3} + 1)$ . . . . .	65
5.16	Amortecimento para o movimento <i>heave</i> como função do número de onda, para a região quase circular $C$ , dada por $h(\zeta) = \zeta + \epsilon(e^{\zeta^3} + 1)$ , com $\epsilon = 0.045$ . . . . .	65

## RESUMO

A força hidrodinâmica em termos dos coeficientes de massa adicional e amortecimento, para obstáculos aproximadamente circulares, finos e submersos sob uma superfície livre aquática, é calculada numericamente usando um método espectral. Primeiramente, é apresentado um modelo matemático para ondas aquáticas de superfície e em seguida, o problema de difração de ondas devido à presença de um obstáculo é descrito. Quando o obstáculo é submerso e fino, o problema pode ser formulado em termos de uma equação integral hipersingular. Usando um mapeamento conforme sobre um disco circular, é mostrado que a solução pode ser obtida através de um método espectral onde a hipersingularidade é avaliada analiticamente em termos de polinômios ortogonais. Os coeficientes da força hidrodinâmica, em função do número de onda, são obtidos para obstáculos quase circulares. A ocorrência de frequências ressoantes é observada para submersões suficientemente pequenas e subpicos de ressonância aparecem para valores moderados da submersão, em comparação com o caso do disco circular.

**Palavras-Chave:** Ondas em água, equações integrais singulares, força hidrodinâmica, método espectral.

## ABSTRACT

The hydrodynamic force, in terms of the added mass and damping coefficients, for thin and submerged nearly circular obstacles below a water free surface is computed by a spectral method. Firstly, a mathematical model for surface water waves is presented. Next, the diffraction problem of waves due to the presence of an obstacle is described. When the body is thin and submerged, the problem can be formulated in terms of a hypersingular integral equation. Using a conformal mapping over a circular disc, it is shown that the solution can be obtained by means of a spectral method where the hypersingularity is analytically evaluated in terms of orthogonal polynomials. The hydrodynamics coefficients, in function of the wavenumber, are computed and shown for nearly circular obstacles. The occurrence of resonant frequencies is observed for sufficiently small submergences and subpeaks of resonances appear for moderate values of the submergence, in comparison with the case of a circular disc.

**Keywords:** Water waves, singular integral equations, hydrodynamic force, spectral methods.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

As ondas oceânicas podem oferecer grandes experiências para seus admiradores, muitas vezes violentas e outras de grande prazer e tranquilidade. Mas além de aspectos visuais, as ondas na superfície do oceano oferecem um campo de pesquisa amplo para cientistas e profissionais em engenharia naval, matemática, física, oceanografia, entre outros. Matematicamente, podemos descrever as ondas como movimentos oscilatórios com parâmetros determinados pelas condições geofísicas do ambiente aquático. Para modelar esses movimentos, devemos considerar equações fundamentais da mecânica de fluidos incompressíveis; entre elas, a amplamente estudada equação de Navier-Stokes.

Uma aplicação do estudo das ondas está relacionada às interações com obstáculos flutuantes ou submersos. Navios, bóias, barcaças, docas flutuantes, quebra-mares, apoios submersíveis de sondas de perfuração de petróleo, entre outras, são estruturas cujas segurança e desempenhos dependem de suas respostas às ondas.

Quando a estrutura está fixa e apoiada no fundo do mar por algum sistema de ancoragem, por exemplo, estacas cravadas no fundo, esta absorverá parte da energia gerada pelas ondas e dispersará as demais ondas difratadas. De acordo com Farina [5], para o caso de estruturas presas com certo grau de liberdade de movimentos, como por cabos/correntes, o mesmo oscila e radia ondas. Estas estruturas rígidas em mar aberto ou *Offshore*, são utilizadas há anos na indústria do petróleo, principalmente na exploração em águas profundas. Em alguns países, essas estruturas também são utilizadas como plataformas de lançamentos de satélites,

como pontes e em alguns como, EUA, Japão e Noruega, como aeroportos e bases militares.

O estudo dessas interações tem como fruto a análise de forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos. Importantes parâmetros como massa adicional e amortecimento definem as condições necessárias para o bom desempenho das estruturas *offshore*. A análise inadequada desses resultados pode gerar grandes transtornos e prejuízos, como por exemplo, no caso da TLP *Mars*, plataforma localizada no Golfo do México que após a passagem do furacão Katrina, em 2005, teve seu funcionamento interrompido (ver figura 1.1).



Figura 1.1: TLP antes (esquerda) e depois (direita) da passagem do furacão Katrina.

Outras estruturas *offshore* são os quebra-mares e diques, utilizadas principalmente na defesa costeira e proteção de ancoradouros. Esses reduzem a intensidade do impacto causado pela ação das ondas e conseqüentemente reduzem os danos naturais, como erosão e sedimentação.

Atualmente, estudos em meios porosos e simulação numérica fornecem resultados e estimativas para a elaboração e construção de quebra-mares. Por meio de experimentos laboratoriais e modelos computacionais de escoamentos turbulen-

tos, as estruturas são modeladas e desenvolvidas para um eficaz comportamento diante das ondas de mares (ver figura 1.2).

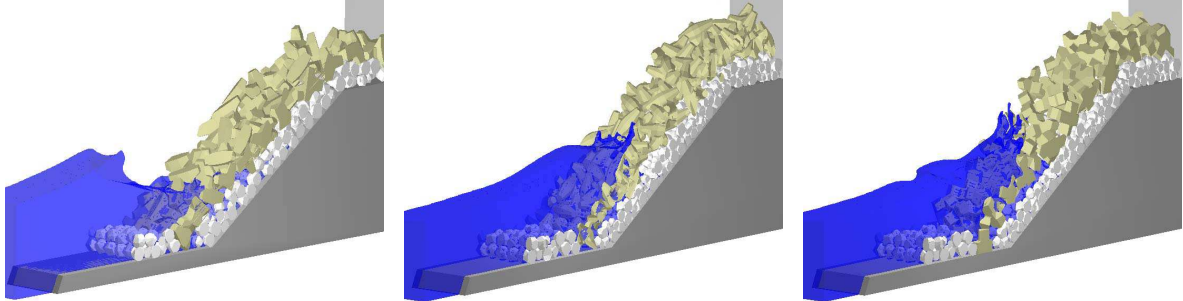


Figura 1.2: Simulação numérica tridimensional de quebra-mares - MEDUS 2009 [17].

## 1.2 Objetivo

O foco do nosso trabalho é o estudo detalhado das ondas e suas implicações em estruturas rígidas com componentes finos, que são partes integrantes de plataformas construídas para atuarem em indústrias, como a do petróleo. Um ponto a ser destacado é o fenômeno de *difração*, associada à radiação e espalhamento das ondas devido à presença de obstáculos flutuantes ou submersos.

O problema para um obstáculo flutuante, também conhecido como *dock problem*, pode ser reduzido à resolução de uma equação integral de contorno de Fredholm de segundo tipo para o potencial de velocidade  $\phi$ , conforme visto em Garrett [9].

Para uma placa fina submersa abaixo da superfície livre, a qual realiza pequenas oscilações, a radiação das ondas pode ser calculada através da solução de uma equação integral hipersingular. De acordo com Martin and Farina [15], caso a mesma seja horizontal e circular, o problema reduz-se a uma generalização da

equação integral de Love que descreve o campo eletrostático de um condensador de placas paralelas.

Neste trabalho vamos assumir como obstáculo um disco plano quase circular fino e submerso em um fluido limitado por uma superfície livre. Para as regiões aproximadamente circulares iremos tomar como base o trabalho proposto por Martin [14], que busca encontrar a distribuição de tensões para o sólido elástico homogêneo contendo uma “rachadura” pressurizada. Este problema pode ser reduzido à uma equação integral hipersingular sobre o sólido. Martin transformou esta equação integral em uma equação similar sobre uma região circular, usando um mapeamento conforme entre as regiões. Apesar de usar esta formulação integral, adicionaremos o termo regular relacionado com os efeitos das ondas sobre o obstáculo, tornando o problema mais geral.

No próximo capítulo deduziremos as equações que modelam o problema de ondas aquáticas, deduzindo as condições de contorno necessárias e enfatizando a utilização da linearidade. No terceiro capítulo, consideraremos o espalhamento e radiação de ondas devido à presença de um obstáculo arbitrário, em relação a amplitude das ondas, a profundidade e também como determinar as forças hidrodinâmicas atuantes. No capítulo 4, será formulado o problema de espalhamento e radiação para obstáculos quase circulares finos e submersos. Por fim, no capítulo 5 descreveremos o método numérico usado e a solução numérica da equação integral hipersingular governante. Esta solução é obtida por um método espectral e valores da força hidrodinâmica, expressa pelos coeficientes da massa adicional e de amortecimento serão apresentados. No capítulo 6, as conclusões gerais do trabalho com algumas perspectivas futuras serão apresentadas.



## 2 ONDAS EM ÁGUA

Neste capítulo apresentaremos definições e conceitos básicos da mecânica dos fluidos para deduzirmos as equações necessárias para a formulação do problema de ondas aquáticas de superfície. Primeiramente, vamos considerar as equações gerais para a dinâmica de fluidos não viscosos.

### 2.1 Preliminares

Entende-se por fluido, uma substância que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão tangencial, não importando quão diminuto seja este esforço. De uma maneira intuitiva, podemos dizer que os fluidos são aquelas substâncias que assumem a forma do recipiente que os contém. Existe, porém, uma característica que diferencia os líquidos dos demais fluidos. São praticamente incompressíveis sob qualquer circunstância, ou seja, em alguns problemas, a dependência da sua densidade com a pressão pode ser desprezada.

Os líquidos para os quais estas tensões tangenciais  $\tau_{xy}$  são diretamente proporcionais às respectivas taxas de deformação, são denominados fluidos Newtonianos, isto é,

$$\tau_{xy} \propto \frac{du}{dy}, \quad (2.1)$$

onde a quantidade  $\frac{du}{dy}$  é o gradiente de velocidade. Por exemplo, a água, gasolina e o ar, em condições normais de temperatura e pressão são fluidos Newtonianos.

Sabemos que 71% da Terra é constituída por grandes massas líquidas denominadas de oceanos, mares, lagos ou rios, e muitos fenômenos da natureza ocorrem nestas grandes porções do planeta. Um dos principais são os fenômenos ondulatórios, mais precisamente as ondas aquáticas.

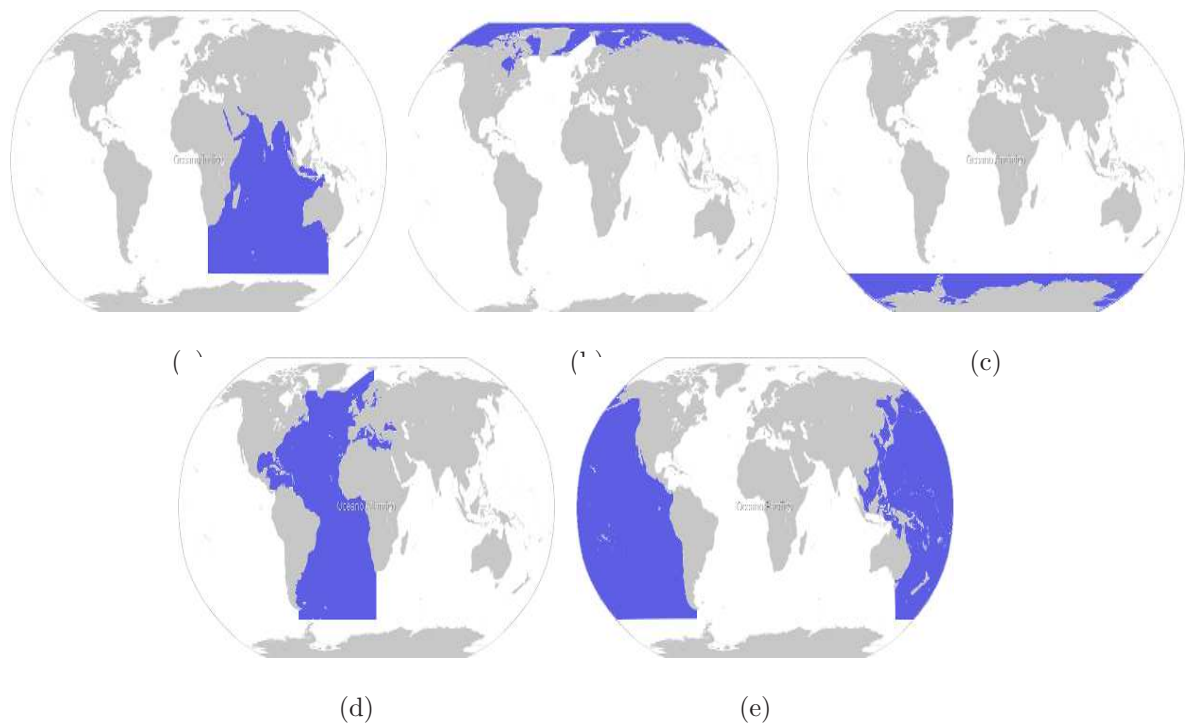


Figura 2.1: Oceanos do planeta [18].

Um dos principais fenômenos observados são as ondas oceânicas de superfície, que são geradas pela diferença de pressão oriunda de ventos que perturbam a superfície da água e a força gravitacional que intensifica a propagação das mesmas e restaura suas formas. Na figura 2.1 são apresentados os oceanos: a) Oceano Índico, b) Oceano Glacial Ártico, c) Oceano Glacial Antártico, d) Oceano Atlântico e e) Oceano Pacífico.

## 2.2 Equações Governantes

Para formularmos o problema não iremos considerar a forçante do vento e a única força restauradora do sistema é a aceleração da gravidade. Ademais, vamos supor que a variação da densidade da água é suficientemente pequena a ponto de desconsiderar a variação da mesma em todas as situações que iremos tratar. Desse

modo, as equações de movimento para fluidos incompressíveis são aplicáveis. Isto é, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

e a equação da conservação do momento,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

que também é conhecida como equação de Navier-Stokes.

Para (2.2) e (2.3) temos que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$  é a velocidade,  $P(x, t)$  a pressão,  $\rho$  a densidade da água,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\nu$  a viscosidade cinemática e  $\mathbf{x}$  um ponto no fluido, em coordenadas cartesianas.

Na água, as forças de pressão são bem maiores que as forças viscosas, logo o termo da equação (2.3) que acompanha a viscosidade  $\nu$  é desconsiderado. Então (2.3) se reduz a

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + gz \right). \quad (2.4)$$

Seja o vetor de vorticidade definido por

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Para escoamentos irrotacionais e isocóricos de um fluido perfeito ( $\nu = 0$ ), ou seja, os elementos de fluidos não sofrem rotação,  $\mathbf{\Omega} = \vec{0}$ . Logo, isto equivale a existência de um potencial de velocidade  $\phi$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (2.6)$$

Então, da equação da continuidade (2.2), segue

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.7)$$

Fazendo uso da identidade vetorial

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.8)$$

e da irrotacionalidade, a equação (2.4), fica

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + gz\right). \quad (2.9)$$

A partir de (2.9) podemos obter a equação de Bernoulli da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right) + \nabla\left(\frac{P}{\rho} + gz\right) &= 0 \\ \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz\right) &= 0 \end{aligned}$$

Se e somente se,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = -\frac{P}{\rho} - gz. \quad (2.10)$$

## 2.3 Condições de Fronteira

A região considerada será de um oceano horizontalmente ilimitado onde a interface ar-água representa uma fronteira, denominada *superfície livre* e o fundo, determinado pela batimetria, será a condição de contorno inferior.

Considere a função que define a elevação da superfície livre

$$z = \eta(x, y, t). \quad (2.11)$$

Escrevemos

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \eta(x, y, t), \quad (2.12)$$

e a velocidade  $\mathbf{q}$  de um ponto  $\mathbf{x}$  que se move com a mesma. Após um intervalo de tempo  $dt$ , a superfície livre é descrita por

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{q}dt, t + dt) = F(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F\right)dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (2.13)$$

Então obtemos que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F\right) = 0. \quad (2.14)$$

Assumindo que o fluido realiza apenas movimentos tangenciais em relação as fronteiras, temos que  $\mathbf{q} \cdot \nabla F = \mathbf{u} \cdot \nabla F$ , que implica

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \right) = 0, \text{ em } z = \eta, \quad (2.15)$$

ou temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = w - \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

pois  $w = \frac{\partial z}{\partial t}$  e  $(u, v, w) = \nabla \phi$ . Por outro lado

$$\nabla F = \nabla z - \nabla \eta = -\nabla \eta,$$

pois  $z = \eta(x, y, t)$  na superfície livre e portanto  $\nabla z = \vec{0}$ . Logo

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \vec{u} \cdot \nabla F = 0, \text{ em } z = \eta,$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta = 0, \text{ em } z = \eta. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é a condição *cinemática da superfície livre*.

De modo análogo, definimos o fundo como

$$z = \mathcal{H}(x, y, t). \quad (2.17)$$

Logo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{H} = 0, \quad (2.18)$$

que define a condição de fronteira do fundo.

Para fundos estacionários  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ , então

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{H} = 0, \quad (2.19)$$

ao passo que para um fundo fixo, a equação é simplesmente

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \text{ em } z = \mathcal{H} \quad (2.20)$$

e para ondas em águas profundas, segue

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{quando } z \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Para comprimentos de ondas de nosso interesse, a pressão será prescrita na superfície livre. Aplicando a equação (2.10) em  $z = \eta$  e observando que a pressão junto à superfície livre é igual a pressão atmosférica,  $P_a$ , segue que

$$-\frac{P_a}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta. \quad (2.22)$$

Esta é a condição *dinâmica da superfície livre*.

Podemos combinar as condições (2.16) e (2.22) para obtermos uma única condição para a superfície livre. Utilizando a identidade vetorial

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2$$

segue que

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left( \frac{P_a}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_a}{\rho} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{P_a}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla |\nabla \phi|^2 + \frac{\partial}{\partial t} (g\eta) + \mathbf{u} \cdot \nabla (g\eta) = 0 \end{aligned}$$

Para  $P_a$  e  $g$  constantes,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 + g \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

As equações deduzidas até então, equação de Laplace (2.7), as condições cinemática e dinâmica, (2.18) e (2.23), respectivamente, formam um *problema completamente não-linear*. Devido a sua complexidade, a solução deve ser obtida por métodos numéricos ou por meio de aproximações. Entretanto, assumindo movimentos periódicos no tempo e espaço e linearizando as equações, podemos obter soluções analíticas.

## 2.4 Problema Linearizado

A teoria linear requer que a amplitude dos movimentos da onda deve ser pequena em relação ao comprimento e profundidade, ao longo das fronteiras. Assumindo as condições da superfície livre em  $\eta = 0$  e que a velocidade do fluido é proporcional ao movimento das ondas, a equação (2.23) se torna linear, isto é, os termos quadráticos são desprezados. Logo, temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (2.24)$$

De modo análogo, tomando a pressão atmosférica  $P_a = 0$ , obtemos uma relação entre  $\eta$  e  $\phi$  a partir da condição (2.22),

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Supondo que a profundidade é constante, no tempo e espaço, o problema é definido pelas equações (2.24), (2.7) e (2.20), isto é,

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \text{ em } z = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \text{ em } z = \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Este problema ainda é complexo para permitir uma solução analítica explícita. Então iremos supor que as ondas se propagam de maneira periódica, o que equivale a hipótese de movimento harmônico simples. Ou seja, vamos supor que a solução é da forma

$$\phi(x, y, z; t) = \frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \vec{q})}\}. \quad (2.27)$$

De fato, a expressão acima modela uma onda, onde  $\vec{q} = (x, y)$ ,  $a = \frac{H}{2}$  é a amplitude,  $H$  a altura,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  a frequência,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  é o vetor de onda,  $T$  o período e  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  é o comprimento de onda.

Substituindo (2.27) na equação de Laplace, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\Gamma'' - k^2\Gamma = 0, \quad (2.28)$$

que é uma equação diferencial ordinária e a solução geral é da forma

$$\Gamma(z) = A \sinh(kz) + B \cosh(kz). \quad (2.29)$$

onde  $k = |\mathbf{k}|$ . Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , usamos a condição (2.20) e obtemos  $\Gamma' = 0$ , para fundo fixo  $\mathcal{H} = -h$ , logo

$$A = -B \tanh(kh). \quad (2.30)$$

Então a solução fica:

$$\Gamma(z) = B\{\tanh(kh) \sinh(kz) + \cosh(kz)\} \quad (2.31)$$

ou

$$\Gamma(z) = B \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}. \quad (2.32)$$

Diferenciando a equação (2.27) em relação a  $t$ , usando a equação (2.25) e tomando  $B = -1$ , obtemos

$$\eta = a \operatorname{sen}(\omega t - k \cdot \vec{q}), \quad (2.33)$$

que é a expressão para a superfície livre que apresenta comportamento periódico no tempo  $t$  e espaço  $\vec{q}$ .

Para profundidades superiores, podemos tomar  $h \rightarrow \infty$  em (2.32) e obtermos que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \Gamma(z) = e^{kz}$ , logo

$$\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t - k \cdot \vec{q})}\}. \quad (2.34)$$

Apesar do modo que esta expressão foi obtida e sua aparente simplicidade, ela será de fundamental importância na modelagem de ondas oceânicas.



## 2.5 O Fenômeno de Dispersão

Uma importante relação na teoria linear de ondas em água é a relação de dispersão que é obtida substituindo a equação (2.27) em (2.24), isto é,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \omega ag \Gamma(z) \cosh(\omega t - k \cdot \vec{q}),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{ag}{\omega} \Gamma'(z) \cosh(\omega t - k \cdot \vec{q}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \omega ag \Gamma(z) \cosh(\omega t - k \cdot q) &= \frac{ag^2}{\omega} \Gamma'(z) \cosh(\omega t - k \cdot q), \\ \omega^2 &= gk \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh[k(z+h)]}. \end{aligned}$$

Logo, em  $z = 0$ , segue

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (2.35)$$

Por relacionar a frequência, o número de onda e a profundidade, esta expressão fornece muitas informações sobre o comportamento e propagação das ondas.

Para facilitar a análise, definimos a velocidade de fase como  $C = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ . Logo

$$C = \sqrt{\left(\frac{g}{k} \tanh(kh)\right)}. \quad (2.36)$$

Para valores de  $h$  maiores, as ondas se propagam mais rapidamente. De fato, as ondas em mar aberto em direção oblíqua a costa, tenderão a dobrar-se, pois na região mais profunda, a onda será mais rápida, emparelhando com a parte que está mais próxima da costa, logo mais lenta. Tal processo é chamado de *refração*. Por outro lado, o fato de  $C$  depender de  $\omega$  e  $k$  caracteriza ondas dispersivas, ou seja, as variações de comprimento e período das ondas indicam que cada uma viaja com determinada característica. Para altos valores de comprimento de onda, as cristas longas viajam mais rápido do que as cristas de ondas curtas.

Outro aspecto revelado por (2.36) é o comportamento especial de águas rasas, onde a profundidade é suposta pequena. Se  $h \ll \lambda$ , temos

$$C \approx \sqrt{gh}, \quad (2.37)$$

o que nos revela que a velocidade de propagação das ondas em águas rasas independe do seu comprimento, de modo que uma superposição dessas ondas não apresenta o fenômeno de dispersão. Para águas profundas, isto é,  $h \gg \lambda$ , a velocidade de fase é  $C \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$ , regime no qual as ondas de baixa frequência tendem a se deslocar mais rapidamente.

### 3 ESPALHAMENTO E RADIAÇÃO DE ONDAS POR OBSTÁCULOS

Neste capítulo, iremos avaliar o comportamento das ondas devido à presença de corpos flutuantes e submersos, como o espalhamento e a radiação. Vamos obter o potencial de velocidade para o problema de espalhamento e radiação para um obstáculo relativamente arbitrário, através de uma formulação integral.

#### 3.1 O Problema de Espalhamento

Considere o problema de ondas, porém agora na presença de um obstáculo com uma superfície molhada denotada por  $S$ . Independentemente se o objeto está flutuando ou submerso, a superfície molhada será a parte que está abaixo da água, isto é, a parte dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $z < 0$ .

Seja o potencial de velocidade  $\phi(x, y, z, t)$  que satisfaz a equação de Laplace e as condições (2.24) e (2.20). Assumiremos que as ondas realizam movimentos harmônicos simples no tempo com frequência  $\omega$ . Ou seja,  $\phi$  é da forma

$$\phi(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\{\Phi(x, y, z) \exp(i\omega t)\}, \quad (3.1)$$

onde  $\Phi$  é chamado também de potencial ou de função onda.

Seja

$$\Phi = \Phi_{inc} + \Phi_S, \quad (3.2)$$

onde  $\operatorname{Re}\{\Phi_{inc}\}$  é o potencial das ondas incidentes que satisfaz a equação de Laplace e as condições (2.20) e (2.24).

O potencial  $\Phi_S$  se refere as ondas causadas pela presença do obstáculo tal que  $\Phi_S = \Phi_{esp} + \Phi_{rad}$ , onde  $\Phi_{esp}$  é devido ao movimento de espalhamento das

ondas pelo obstáculo e  $\Phi_{rad}$  a radiação das ondas causadas pelo movimento do obstáculo.

Consideremos primeiro, que o corpo está mantido fixo e, portanto,  $\Phi_{rad} = 0$ . Com esta hipótese a condição de contorno apropriada para  $S$  fixa é

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (3.3)$$

isto é,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{esp}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{inc}}{\partial n} = 0, \text{ em } S, \quad (3.4)$$

denotada como condição de contorno no obstáculo.

Em relação  $\Phi_S$ , para cada valor de  $t$ , temos de (2.24) que

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial z} - \lambda \Phi_S = 0, \text{ em } z = 0, \quad (3.5)$$

para  $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$ .

Como  $S$  é limitado e  $\Phi_s$  existe por causa da presença do obstáculo, é razoável que no infinito, este potencial se comporte como ondas radiando para fora do corpo. Assim, fisicamente, notamos que as especificações de nosso problema podem estar incompletas. Não chega a ser surpreendente portanto, percebemos que se adicionarmos uma constante qualquer ao potencial  $\Phi$  teremos outras soluções satisfazendo todas as condições acima, tornando o problema mal-posto. Contudo, gostaríamos de tratar um problema com uma única solução.

Felizmente, adotando uma condição adicional, conquistamos os objetivos de satisfazer os requerimentos físicos e matemáticos acima expostos. Esta condição, introduzida por Stoker Stoker [18], se traduz matematicamente através da condição de radiação, escrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \iint_{C_\rho} \left| \frac{\partial \Phi_S}{\partial \rho} - ik\Phi_S \right|^2 dS = 0, \quad (3.6)$$

onde  $k$  é o número de onda e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  é um cilindro denotado por  $C_\rho$ .

A condição acima é uma forma fraca da conhecida condição de radiação de Sommerfeld, dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{1/2} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial \rho} - ik\Phi_S \right) = 0 \quad (3.7)$$

Observe que se

$$\left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial \rho} - ik\Phi_S \right) = \mathcal{O}(\rho^{-3/2}), \quad (3.8)$$

a condição (3.7) será satisfeita quando  $\rho \rightarrow \infty$ .

## 3.2 Solução

As ultimas seções nos fornecem as seguintes equações para formularmos o problema de difração de ondas,

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 0, \text{ no fluido,} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \text{ em } z = \mathcal{H}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0, \text{ em } S, \\ \frac{\partial \Phi_S}{\partial z} - \lambda \phi_S &= 0, \text{ em } z = 0 \text{ e} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{1/2} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial \rho} - ik\Phi_S \right) &= 0. \end{aligned}$$

Seja  $D$  o domínio do problema, denote por  $\partial D$  o contorno do mesmo, logo

$$\partial D = S + C_r + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathfrak{F}$  denota a interface ar-água, ou seja, a superfície livre e  $\mathfrak{B}$  o fundo em  $z = \mathcal{H}$ .

Para resolvermos o problema, iremos utilizar uma formulação integral sobre o contorno  $\partial D$ . Assim, para uma função  $\Phi$  duas vezes diferenciável em  $D$ ,

utilizaremos a seguinte identidade de Green

$$\int_D (\Phi \Delta G - G \Delta \Phi) dq = \int_{\partial D} \left( \Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (3.10)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário. Em alguns casos a integral acima deixará de ser tratada no sentido de Riemann.

A melhor escolha para  $G$  é a função de Green para a superfície livre que terá fundamental importância para a solução do problema de difração de ondas.

Seja  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ . Para águas profundas,  $G$  é uma função regular em  $-\mathcal{H} < z < 0$ ,  $-\mathcal{H} < \zeta < 0$  e  $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$ . Tal que

$$G - \frac{1}{R} \quad (3.11)$$

é regular para  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , onde  $R = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ .

Para o caso de águas profundas, a função de Green dada por Farina [5] é da forma

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = [r^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} + \int_0^\infty \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda} e^{\mu(z+\zeta)} J_0(kr) d\mu, \quad (3.12)$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero.

Já vimos que a função de Green de superfície livre se comporta como  $1/R$  em  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , que é a solução fundamental da equação de Laplace. Como  $G - 1/R$  é regular, temos então que

$$\Delta G = \delta_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.13)$$

onde  $\delta$  é o delta de Dirac. Substituindo (3.13) na segunda identidade de Green, (3.10), segue que

$$\Phi_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left( \Phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3.14)$$

Sabemos que  $\Phi_S$  satisfaz as condições da superfície livre e do fundo,  $G$  também satisfaz as mesmas condições, como visto por John [11], e as integrais sobre as fronteiras  $\mathfrak{F}$  e  $\mathfrak{B}$  se anulam. Falta agora analisar a integral sobre o cilindro  $C_r$ .

Diferenciando  $G$  em relação a  $r$ , temos que  $\frac{\partial G}{\partial r} \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow \infty$ , pois  $G$  satisfaz a condição de radiação. Então  $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}$  e como  $\Phi_S$  também satisfaz a condição de radiação, temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_S(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{C_r} \left( \Phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0. \quad (3.15)$$

Como  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_S = \Phi_S$ , na água, segue que

$$\Phi_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \Phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3.16)$$

A expressão acima é uma fórmula integral fornecendo a solução  $\Phi_S$  para todos os pontos  $\mathbf{x}$  da água. A integral nesta fórmula é apenas sobre os pontos da superfície molhada de  $S$  do obstáculo. Como  $G$  e sua derivada são conhecidas e  $\frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_{inc}}{\partial n}$  é dado, a única incógnita no integrando é

$$\Phi_S(\boldsymbol{\xi}), \text{ para } \boldsymbol{\xi} \in S. \quad (3.17)$$

Portanto, se encontrarmos  $\Phi$  na superfície molhada do obstáculo, usando a fórmula 3.16 teremos

$$\Phi_S(\mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in D, \quad (3.18)$$

que é a solução procurada.

Fazendo  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p} \in S$  em 3.16, teríamos  $\Phi_S$  definida em  $S$ , em ambos os lados desta fórmula, transformando-a assim em uma equação. De fato, este limite pode ser tomando com a cautela de observar que o então chamado potencial de camada dupla

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \Phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.19)$$

é descontínuo em  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ . Precisamente, temos o *salto*:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} \Phi_S(\mathbf{p}). \quad (3.20)$$

Esta propriedade é uma consequência do seguinte resultado clássico da teoria potencial:

$$\int_S \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi R} \right) d\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{p} \in S. \quad (3.21)$$

Agora, a luz do resultado 3.20, de 3.16, obtemos

$$\frac{1}{2}\Phi_S(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \Phi_S(\mathbf{p}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{p}; \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{p}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi_S}{\partial n}(\mathbf{p}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3.22)$$

A expressão 3.22 é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo para  $\Phi_S$  em  $S$ . A parte do integrando  $\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{p}; \boldsymbol{\xi})$  é dita núcleo da equação integral.

A solução do problema de difração, onde o obstáculo é mantido fixo, é dada por 3.16, onde  $\Phi_S(\boldsymbol{\xi})$  é obtido resolvendo 3.22, que pode ser feito por métodos numéricos.

### 3.3 O Problema de Radiação

Suponhamos agora que o obstáculo se movimenta com seis graus de liberdade. Ao longo dos eixos  $x, y$  e  $z$  temos os deslocamentos de translação e rotação em torno dos mesmos.

O movimento de um ponto  $\mathbf{s}$ , com origem  $\mathbf{r}_0 = (x, y, z)$  no obstáculo, pode ser escrito como

$$\mathbf{s} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0, \quad (3.23)$$

onde  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  são os movimentos de translação,  $\boldsymbol{\omega} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$  com  $\xi_4, \xi_5, \xi_6$  os movimentos de rotação.

Assumindo que estes movimentos são harmônicos simples no tempo, temos que os seguintes potenciais de radiação,

$$\Phi_{rad} = \sum_{i=1}^6 \xi_i \Phi_i(x, y, z) \quad (3.24)$$



são devidas às velocidades

$$U_j(t) = \text{Re}(i\omega\xi_j)e^{i\omega t}, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.25)$$

Assim, podemos definir as seguintes condições de contorno em  $S$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial n} = i\omega n_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial n} = i\omega(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n})_{j-3}, \quad j = 4, 5, 6. \quad (3.27)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário interno em  $S$ .

### 3.4 Solução

O problema de radiação é definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, \quad \text{no fluido,} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \quad \text{em } z = \mathcal{H}, \\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} &= i\omega n_j \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} = i\omega(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n})_{j-3} \quad \text{em } S, \\ \frac{\partial\Phi_S}{\partial z} - \lambda\phi_S &= 0, \quad \text{em } z = 0 \quad \text{e} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{1/2} \left( \frac{\partial\Phi_S}{\partial \rho} - ik\Phi_S \right) &= 0. \end{aligned}$$

As soluções desse sistema descrevem as ondas que se propagam devido aos movimentos realizados pelo obstáculo e podem ser obtidas pela equação 3.22 com o termo  $\frac{\partial\Phi_S}{\partial n}$  substituído por  $\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}$ . Integrais dos potenciais  $\Phi_j$  fornecem forças e momentos, que veremos a seguir.

### 3.5 Forças Hidrodinâmicas

Os efeitos sofridos por corpos flutuantes e submersos causados pelas ondas oceânicas são de grande interesse para a indústria naval e petrolífera, pois

muitas vezes o obstáculo pode representar um navio, uma plataforma de petróleo ou até mesmo estruturas militares, como aeroportos flutuantes (figura 3.1).



Figura 3.1: Aeroporto Internacional de Kansai [19].

O movimento de um corpo rígido é caracterizado por seis componentes correspondentes aos seis graus de liberdade ou modos de movimentos oscilatórios (ver figura 3.2).

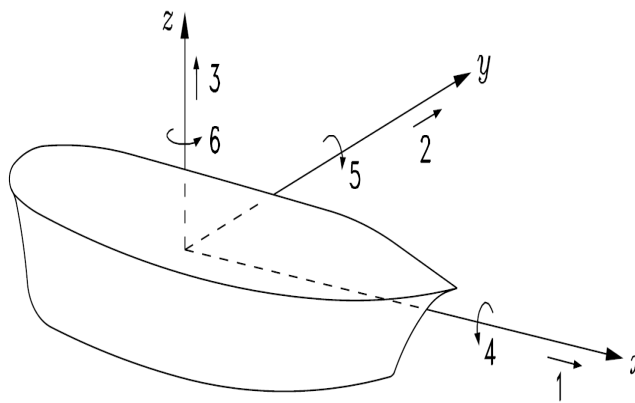


Figura 3.2: Seis graus de liberdade do movimento de um corpo rígido [3].

Na figura acima, os modos 1, 2 e 3 são responsáveis pelos movimentos de translação ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . E são chamados de *surge*, *sway* e *heave*, respectivamente. Já os modos 4, 5 e 6 são os movimentos de rotação em torno dos

mesmos eixos; denominados *roll*, *pith* e *yaw*, na mesma ordem. Para obstáculos com simetria axial os movimentos 1 e 2 (4 e 5) são ambíguos.

A principal força exercida pela água no obstáculo é a pressão. Logo, desprezando os termos não-lineares da equação de Bernoulli (2.10), podemos obter a seguinte formulação para a pressão

$$P = -\rho \left( gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (3.28)$$

$$= -\rho gz - \rho \text{Re}(\phi_{inc} + \phi_{esp} + \phi_{rad}) i\omega e^{i\omega t}. \quad (3.29)$$

Os vetores força e momento atuando no obstáculo devido à pressão, podem ser escrito como

$$\mathbf{F} = \iint_S P \mathbf{n} d\sigma, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{M} = \iint_S P(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n}) d\sigma. \quad (3.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} &= -\rho g \iint_S \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_0 \times \mathbf{n} \end{bmatrix} z d\sigma \\ &\quad - \rho \text{Re}(i\omega e^{i\omega t}) \iint_S \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_0 \times \mathbf{n} \end{bmatrix} (\Phi_{inc} + \Phi_{esp}) d\sigma \\ &\quad - \rho \text{Re} \left( \sum_{j=1}^6 i\omega \xi_j e^{i\omega t} \right) \iint_S \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_0 \times \mathbf{n} \end{bmatrix} \Phi_j d\sigma. \end{aligned} \quad (3.32)$$

As integrais acima representam as forças e momentos lineares atuando no obstáculo. A primeira é a componente hidrostática, a segunda é força e momento de excitação devido as ondas incidentes e a terceira fornece a carga hidrodinâmica sobre o obstáculo e pode ser interpretada como massa adicional e amortecimento.

Como foi mostrado por Newman [17], as seis componentes de força e momento hidrodinâmico de  $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$  podem ser escritas na seguinte forma

$$\mathbf{F}_i = \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^6 \xi_j e^{i\omega t} f_{ij} \right\}, \text{ para } i = 1, \dots, 6, \quad (3.33)$$

onde

$$f_{ij} = \rho \iint_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \Phi_j \, d\sigma \quad (3.34)$$

é uma função complexa representando a força na direção  $i$  devido ao modo de movimento com amplitude 1 na direção  $j$ . Escrevendo esta função como

$$f_{ij} = \omega^2 \mathcal{A}_{ij} - i\omega \mathcal{B}_{ij}, \quad (3.35)$$

definimos  $\mathcal{A}_{ij}$  como a matriz da massa adicional e  $\mathcal{B}_{ij}$  como a matriz de amortecimento de radiação. Estes coeficientes são funções da frequência  $\omega$ , da forma e das seis velocidades  $U_j$  do obstáculo, assim como da profundidade da água e do contorno do domínio.

Expressando (3.32) na seguinte forma

$$\mathbf{F}_{ij} = - \sum_{j=1}^n \left( \mathcal{A}_{ij} \frac{dU_j}{dt} + \mathcal{B}_{ij} U_j \right), \quad (3.36)$$

podemos interpretar mais claramente os termos  $\mathcal{A}_{ij}$  e  $\mathcal{B}_{ij}$ . O primeiro, representa a força proporcional à aceleração, enquanto  $\mathcal{B}_{ij}$  representa a parte proporcional à velocidade do obstáculo, que assim podemos denominar de amortecimento.

## 4 OBSTÁCULOS QUASE CIRCULARES FINOS E EQUAÇÕES HIPERSINGULARES

Neste capítulo iremos investigar o problema de radiação de ondas para um obstáculo que possua uma espessura tão pequena que será aproximado por um corpo sem volume; assumiremos também que o obstáculo está submerso. Como aplicação, podemos observar nas figuras (4.1) a (4.3) uma estrutura da plataforma do tipo Spar usada pela indústria petrolífera para extração em mar aberto, a qual possui quilhas finas submersas.

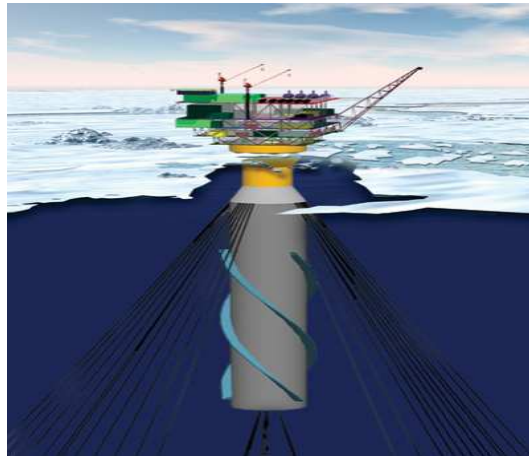


Figura 4.1: Plataforma tipo Spar [20].

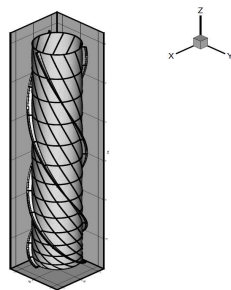


Figura 4.2: Plataforma Spar discretizada [5].

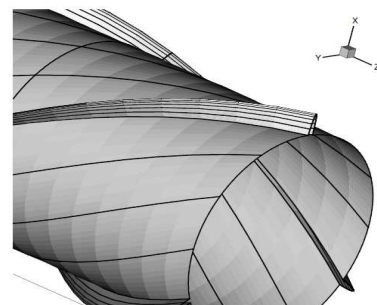


Figura 4.3: Quilhas finas, componentes da plataforma Spar [5].

Plataformas flutuantes para lançamento de satélites são uma outra aplicação *offshore* que requerem o conhecimento detalhado do comportamento de estruturas flutuantes e submersas no mar.

Estas condições geométricas requerem modificações na formulação integral desenvolvida até então. Contudo esta situação favorece o uso de uma estratégia matemática bastante elegante, por intermédio de integrais hipersingulares.

## 4.1 Formulação Matemática

Consideremos as seguintes condições:

- Um corpo rígido e fino com superfície  $S$ ;
- $S$  totalmente submerso;
- águas profundas;
- $S$  é uma superfície suave, com fronteira  $\partial S$ .

A formulação do problema de difração para este caso requer que na condição de fundo (2.21) tenhamos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \longrightarrow 0, \text{ quando } z \longrightarrow \infty, \quad (4.1)$$

e no contorno do obstáculo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V, \quad (4.2)$$

onde  $V$ , prescrita, define se teremos o problema de radiação ou difração.

Denotando por  $S^+$  e  $S^-$  os lados do obstáculo e usando a função de Green, dada por (3.13), o potencial de velocidade é expressado como

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^+ \cup S^-} \left( \Phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) dS_{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.3)$$

Ainda podemos denotar  $\mathbf{p}^\pm$  e  $\boldsymbol{\xi}^\pm$  como os pontos correspondentes em  $S^\pm$  e também

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}^\pm) := \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}^\pm} \Phi(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Usando o fato que a derivada direcional  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  é contínua em  $S$ , segue

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+} + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi}^-)}{\partial n^-} = 0, \quad (4.5)$$

onde o  $\frac{\partial}{\partial n^\pm}$  é a derivada normal em  $S^\pm$ .

De (4.5), podemos obter

$$\int_S G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS_\xi = \int_S G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \left( \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+} + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi}^-)}{\partial n^-} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^+ \cup S^-} \Phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^+ \cup S^-} \Phi(\boldsymbol{\xi}^+) \frac{\partial G}{\partial n^+}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}^+) + \Phi(\boldsymbol{\xi}^-) \frac{\partial G}{\partial n^-}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}^-) dS_\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lembrando que  $G$  é contínua em  $S$ , temos

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^+ \cup S^-} (\Phi(\boldsymbol{\xi}^+) - \Phi(\boldsymbol{\xi}^-)) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^+ \cup S^-} [\Phi] \frac{\partial G}{\partial n} dS_\xi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aplicando a condição (4.2),

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}^+}} \Phi(\mathbf{p}^+) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}^+}} \int_S [\Phi] \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi = V(\mathbf{p}^+). \quad (4.9)$$

De modo análogo, obtemos uma expressão para  $\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}^-}} \Phi(\mathbf{p}^-)$ . Então

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}}} \Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}}} \int_S [\Phi] \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi = V(\mathbf{p}), \quad (4.10)$$

para  $\mathbf{p} \in S$ .

Intercambiando a diferenciação com a integração, obtemos a seguinte equação integro-diferencial

$$V(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Phi] \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \text{ em } \mathbf{p} \in S, \quad (4.11)$$

que deve ser resolvida sujeita à condição  $[\Phi] = 0$ , em  $\partial S$ , já que  $[\Phi]$  é contínua na água.

O motivo de usarmos o símbolo "  $\times$  " é o fato que a integral em (4.11) é uma integral hipersingular, e a mesma deverá ser interpretada como uma integral de parte-finita de Hadamard, como veremos na próxima seção.

## 4.2 Equações Integrais Hipersingulares

Integrais hipersingulares foram introduzidas em 1923 e seu principal objetivo era analisar as integrais singulares que não eram integráveis no sentido de Riemann. O seu uso está relacionado com os métodos de integração de fronteira, como estudado por Hadamard [10].

Para dar sentido e validar sua tese, Hadarmad considerou o seguinte caso:

$$I = \int_a^b \frac{F(x)}{\sqrt{b-x}} dx. \quad (4.12)$$

Com efeito, a derivada em relação a  $b$  da integral acima não tinha sentido. Para solucionar esse problema, Hadarmad trocou o limite de integração superior  $b$  por  $x$  e considerou a seguinte forma

$$\int_a^x \frac{F(s)}{(b-s)^{3/2}} ds - 2 \frac{F(x)}{\sqrt{b-x}}, \quad (4.13)$$

que é uma soma algébrica que define a parte finita de  $\frac{\partial I}{\partial b}$  quando  $x \rightarrow b$ .



Como vimos nas seções anteriores, o potencial de velocidade para fluidos incompressíveis é determinado como a solução de uma equação integral singular, que Hadamard define da seguinte forma:

Seja  $f$  uma função tal que  $f'$  é Holder contínua. Então a integral de parte finita é

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt + \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{2f(x)}{\epsilon} \right]. \quad (4.14)$$

Podemos observar a seguinte relação com o valor principal de Cauchy.

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \frac{f(t)}{x-t} dt = - \int_a^b \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt. \quad (4.15)$$

Consideramos agora uma região plana e limitada  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Logo, definiremos a integral da equação (4.11) como

$$\int_{\Omega} w(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} w(\xi, \eta) \left[ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \zeta)^2}} \right) \right] d\Omega, \quad (4.16)$$

ou como

$$\int_{\Omega} w(\xi, \eta) \frac{d\omega}{R^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} w(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R^3} - \frac{2\pi w(x, y)}{\epsilon} \right], \quad (4.17)$$

onde  $d\Omega = dx dy$  e  $\Omega_{\epsilon}$  é um disco de raio  $\epsilon$ .

### 4.3 Solução do Problema

Denotamos o núcleo de (4.11) por

$$H = \frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q}. \quad (4.18)$$

Esta é uma função explícita mas complicada. Decompomos  $G$  em suas partes singular e regular como  $G = G_s + G_r$ , onde

$$G_s = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \zeta)^2}} \text{ e } G_r = G - G_s. \quad (4.19)$$

Será de utilidade decompor  $H$  em  $H = H_s + H_r$ .

Seja  $\mathbf{n}(p) = (n_1, n_2, n_3)$  o vetor normal unitário em  $p \in S^+$ . Como  $S^+$  é plana,  $\mathbf{n}(q) = \mathbf{n}(p)$ . Então obtemos

$$\frac{\partial^2 G_s}{\partial n_p \partial n_q} = \frac{1}{|\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}|^5} \{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi})\}^2, \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{p}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  são os vetores posição de  $p$  e  $\xi$ , respectivamente. Mas como  $\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}$  é um vetor no plano do obstáculo, segue que  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}) = 0$  e

$$H_s = |\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}|^{-3}. \quad (4.21)$$

O resultado (4.21) vale para obstáculos planos com qualquer orientação. Pode-se calcular  $H_r$  para tais obstáculos, mas o cálculo é bem mais simples quando o obstáculo é horizontal, como agora será assumido. Seja  $R = |\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}|$ ,  $G_r$  é definido como

$$G_r = \int_0^\infty e^{k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+\lambda}{k-\lambda} dk + 2\pi i \lambda e^{\lambda(z+\zeta)} J_0(\lambda R), \quad (4.22)$$

onde a integral deve ser interpretada como valor principal de Cauchy e  $J_0$  é função de Bessel de ordem zero.

Definimos coordenadas adimensionais  $X$  e  $Z$  por

$$X = \lambda R \quad \text{e} \quad Z = -\lambda(z + \zeta). \quad (4.23)$$

Note que como  $z$  e  $\zeta$  são negativos, ambos  $X$  e  $Z$  são não-negativos. Então, uma simples mudança de variáveis de integração fornece

$$G_r = \lambda F(X, Z) + 2\pi i \lambda e^{-Z} J_0(X), \quad (4.24)$$

onde

$$F(X, Z) = \int_0^\infty e^{-\nu Z} J_0(\nu X) \frac{\nu+1}{\nu-1} d\nu. \quad (4.25)$$

Note que a integral semi-infinita em (4.22), que é relacionada com a principal tarefa de avaliar  $G_r$ , é agora expressa como uma função  $F$  das duas variáveis  $X$  e  $Z$ .

Usando a transformada de Laplace mostra-se que

$$F(X, Z) = (X^2 + Z^2)^{-1/2} - \pi e^{-Z}(\mathbf{H}_0(X) + Y_0(X)) \quad (4.26)$$

$$- 2 \int_0^Z e^{t-Z} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt, \quad (4.27)$$

onde  $\mathbf{H}_0$  é a função de Struve e  $Y_0$  é a função de Bessel do segundo tipo de ordem 0.

Como o obstáculo é horizontal, temos  $\mathbf{n}(p) = \mathbf{n}(q) = (0, 0, 1)$ , logo

$$H_r = \frac{\partial^2 G_r}{\partial z^2} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_r. \quad (4.28)$$

Como  $J_0(kR)$  satisfaz a equação de Helmholtz bidimensional, obtemos

$$H_r = \iint \frac{k + \lambda}{k - \lambda} e^{k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR) dk. \quad (4.29)$$

Agora, como  $k^2 = \lambda^2 + (k - \lambda)(k + \lambda)$ , vemos que

$$H_r = \lambda^2 G_r + \int_0^\infty (k^2 + 2\lambda k + \lambda^2) e^{k(z+\zeta)} J_0(kR) dk. \quad (4.30)$$

Este resultado também pode ser obtido diferenciando (4.22) duas vezes com respeito a  $z$ . A integral que sobrou pode ser calculada por

$$\int_0^\infty e^{-kY} J_0(kR) dk = (R^2 + Y^2)^{-1/2}, \quad Y > 0, \quad (4.31)$$

derivando em relação a  $Y$ . O resultado é

$$H_r = \lambda^2 G_r + \lambda^3 \left( \frac{3Z^2}{(X^2 + Z^2)^{5/2}} + \frac{2Z - 1}{(X^2 + Z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(X^2 + Z^2)^{1/2}} \right). \quad (4.32)$$

Em resumo, a equação integral hipersingular (4.11) pode ser escrita como

$$V(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Phi(q)] \left\{ \frac{1}{R^3} + H_r(p, q) \right\} dS_q, \quad p \in S, \quad (4.33)$$

onde  $S$  é plana horizontal de qualquer forma e  $H_r$  é dada por (4.32). A equação (4.33) fornece a solução para o problema de espalhamento e radiação para um disco

fino submerso, que deve ser revolvida sujeita à condição  $[\Phi] = 0$ , em  $\partial S$ . Entretanto, quando  $S$  é qualquer região não circular a equação acima sofre algumas modificações. Para considerar os novos obstáculos é conveniente mapear a região no disco. Porém, devemos escolher um mapeamento que preserve algumas características da superfície, e a escolha mais adequada é um mapeamento conforme, como veremos na seção seguinte.

#### 4.4 Mapeamento Conforme

Suponha que uma arco  $\gamma$  com equação  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , está contido em uma região  $\Omega$ , e que existe uma função  $f(z)$  definida e contínua na região  $\Omega$ . Então a equação  $u = u(t) = f(z(t))$  define um arco  $\gamma'$  no plano- $u$  que pode ser chamado de *imagem* de  $\gamma$ .

Considere o caso de uma função  $f(z)$  que é analítica em  $\Omega$ . Se  $z'(t)$  existe, temos que  $u'(t)$  também existe e é determinada por

$$u'(t) = f'(z(t))z'(t). \quad (4.34)$$

Investigando a equação (4.34) em um ponto  $z_0 = z(t_0)$  com  $z'(t_0) \neq 0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ , podemos obter algumas informações. A primeira conclusão é que  $u'(t_0) \neq 0$ . Assim  $\gamma'$  tem uma tangente em  $u_0 = f(z_0)$  e sua direção é determinada por

$$\arg u'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0). \quad (4.35)$$

Essa relação informa que o ângulo entre as tangentes de  $\gamma$  em  $z_0$  e  $\gamma'$  em  $u_0$  é igual a  $\arg f'(z_0)$ , isto é, independe da curva  $\gamma$ .

Como podemos ver em Ahlfors [2],  $u = f(z)$  é um mapeamento conforme em  $z_0$  se para todo par de curvas orientadas em  $\Omega$  que se cruzam em  $z_0$ , o ângulo entre as curvas em  $z_0$  for igual ao ângulo entre as correspondentes curvas imagens em  $f(z_0)$ .

Mas além de preservar ângulos, um mapeamento conforme tem outra propriedade:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|, \quad (4.36)$$

isto significa que pequenos segmentos com uma extremidade em  $z_0$  são contraídos ou expandidos na razão  $|f'(z_0)|$ , independente das direções desses segmentos.

Agora considere o mapeamento de  $\Omega'$  em um disco. Isso pode ser realizado de várias maneiras. Por exemplo se  $\Omega'$  é tal que

$$\Omega' = \{(r, \theta) : 0 \leq r < \rho(\theta), -\pi \leq \theta < \pi\}. \quad (4.37)$$

$\partial\Omega'$  é dado por  $r = \rho(\theta)$ . Realizando a mudança de variável de  $r$  e  $\theta$  para  $s$  e  $\varphi$ , dada por

$$r = s\rho(\varphi), \quad \theta = \varphi, \quad (4.38)$$

temos  $\Omega'$  mapeado no disco unitário,

$$D \equiv \{(s, \varphi) : 0 \leq s < 1, -\pi \leq \varphi < \pi\}. \quad (4.39)$$

Em geral, a mudança de variável realizada traria uma modificação na equação integral (4.33). Mais precisamente, a nova equação pode ter um núcleo com uma singularidade diferente. O núcleo singular  $R^{-3}$  passa a ser da forma  $\sigma(\Psi)S^{-3}$ , onde  $S$  e  $\Psi$  são coordenadas polares do ponto singular e  $\sigma(\Psi) = [\rho_0^2 \sin^2 \Psi + (\rho_0 \cos \Psi + \rho'_0 \sin \Psi)^2]^{-3/2}$ , como mostrado por Martin [14].

Sejam  $z = x + iy$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$  variáveis complexas. Mapeamos a região  $\Omega'$  do plano- $z$  no disco unitário,  $|\zeta| < 1$ , no plano- $\zeta$ , usando o mapeamento conforme

$$\zeta = F(z), \quad (4.40)$$

onde  $F$  é uma função analítica em  $\Omega'$ . Para o nosso propósito,  $F$  deve satisfazer a condição  $|F'(z_0)| \neq 0$  para todo  $z \in \Omega'$ . E tal condição também é suficiente para garantir que (4.40) possa ser inversível.

Logo, para um escalar  $a$  em  $\Omega'$ , temos

$$z = af(\zeta), \text{ para } |\zeta| < 1, \quad (4.41)$$

que mapeia  $D$  em  $\Omega'$ . A função  $f$  é analítica para qualquer domínio simplesmente conexo  $\Omega'$ .

Primeiramente, vamos investigar o efeito do mapeamento (4.41) no núcleo singular da equação (4.31). Temos

$$R = |z - z_0| = a|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \simeq a|f'(\zeta_0)|S, \quad (4.42)$$

para  $S$  pequeno, onde  $S = |\zeta - \zeta_0|$ . Logo, podemos escrever

$$a^3 R^{-3} = |f'(\zeta)|^{-3/2} |f'(\zeta_0)|^{-3/2} \{S^{-3} + K(\zeta, \zeta_0)\}, \quad (4.43)$$

onde  $K$  é definido como

$$K(\zeta, \zeta_0) = \frac{|f'(\zeta)|^{3/2} |f'(\zeta_0)|^{3/2}}{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|^3} - \frac{1}{S^3}. \quad (4.44)$$

Agora, consideremos o Jacobiano da transformação,

$$Jf = a^2 |f'(f(\zeta))|^2. \quad (4.45)$$

Se tomarmos

$$\zeta = \xi + i\eta \text{ e } \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0, \quad (4.46)$$

temos

$$d\Omega' = dx dy = Jf d\xi d\eta = a^2 |f'(\zeta)|^2 d\xi d\eta. \quad (4.47)$$

E finalmente temos

$$w(x(\zeta), y(\zeta)) = a |f'(\zeta)|^{-1/2} W(\xi, \eta), \quad (4.48)$$

$$V(x(\zeta_0), y(\zeta_0)) = |f'(\zeta_0)|^{-3/2} \mathcal{V}(\xi_0, \eta_0). \quad (4.49)$$

e

$$H_r(x(\zeta), y(\zeta)) = -a^3 |f'(\zeta)|^{3/2} \mathcal{H}_r(\zeta, \zeta_0). \quad (4.50)$$

Substituindo (4.48), (4.49) e (4.50) em (4.33), temos

$$\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{W(\xi, \eta)}{S^3} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_D W(\xi, \eta) \left\{ \mathcal{K}(\zeta, \zeta_0) + \mathcal{H}_r(\zeta, \zeta_0) \right\} d\xi d\eta = \mathcal{V}(\xi_0, \eta_0), \quad (4.51)$$

$\forall (\xi_0, \eta_0) \in D$ , onde todas as quantidades são adimensionais. Esta equação é resolvida sujeita a  $W = 0$  para  $|\zeta| < 1$ . Note que a ordem da hipersingularidade foi preservada.

Podemos escrever (4.51) em notação de operadores como

$$(P + \mathcal{K} + \mathcal{L}_r)W = \mathcal{V}, \quad (4.52)$$

onde  $P$  é o operador hypersingular, definido pelo primeiro termo do lado esquerdo de (4.51),  $\mathcal{K}$  é o operador integral fracamente singular e  $\mathcal{L}_r$  é o núcleo regular que inclui todos os efeitos das ondas.

Afim de enfatizar a abrangência e possíveis aplicações desta formulação, mencionamos o resultado conhecido como Teorema do Mapeamento Conforme de Riemann [1, p. 229].

**Teorema 4.4.1.** *Dada qualquer região simplesmente conexa  $\Omega$  que não é todo o plano complexo, e um ponto  $z_0 \in \Omega$ , então existe uma única função analítica  $f(z) \in \Omega$ , normalizada pelas condições  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$ , tal que  $f(z)$  define um mapeamento um-a-um de  $\Omega$  no disco  $|w| < 1$ .*

## 5 MÉTODO NUMÉRICO E RESULTADOS

Neste capítulo iremos descrever o método numérico utilizado para resolver a equação integral (4.51) e resultados para os coeficientes hidrodinâmicos de obstáculos aproximadamente circulares.

### 5.1 O Método Espectral

Em duas dimensões, muitos problemas de ondas aquáticas envolvendo obstáculos finos são governados pela equação

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(x-t)^2} + H(x,t) \right\} v(t) dt = f(x) \text{ para } -1 < x < 1, \quad (5.1)$$

sujeita a duas condições de contorno, como, por exemplo,  $v(-1) = v(1) = 0$ . Aqui,  $v$  é a função desconhecida,  $H$  é o núcleo e  $f$  é dada. Assumindo que  $f$  é suave suficientemente, a solução vai para zero como raiz quadrada nas extremidades do domínio. Isto sugere que escrevamos

$$v(x) = \sqrt{1-x^2} u(x). \quad (5.2)$$

Assim, expandimos  $u$  usando polinômios ortogonais. Podemos escolher os polinômios de Chebyshev do segundo tipo, definidos por

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\text{sen}[(n+1)\theta]}{\text{sen}(\theta)}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

Fazemos esta escolha por causa da fórmula

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_n(t)}{(x-t)^2} dt = -(n+1) U_n(x). \quad (5.4)$$

Assim, temos

$$u(x) \approx \sum_{n=0}^N a_n U_n(x), \quad (5.5)$$



substituímos (5.5) em (5.1) e avaliamos a integral hipersingular analiticamente, usando (5.4). Para determinar os  $N + 1$  coeficientes  $a_n$ , podemos escolher (*colocamos*)  $N + 1$  pontos. Para garantir a convergência da aproximação, escolhemos os zeros de  $T_{N+1}$  ou  $U_{N+1}$ , onde  $T_n$  é um polinômio de Chebyshev [4] do primeiro tipo. Consideraremos agora o caso tridimensional.

Seja  $S$  um disco horizontal circular dado em coordenadas cilíndricas por

$$S = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r < a, -\pi \leq \theta < \pi, z = -d\}. \quad (5.6)$$

Este obstáculo tem raio  $a$  e está submerso a uma distância  $d$  abaixo da superfície livre; podemos tomar  $a = 1$  sem perda de generalidade.

Adotaremos um procedimento de expansão-colocação onde a função desconhecida é expandida por séries de Fourier em  $\theta$  e os coeficientes são expandidos usando funções de Legendre [1]. Esta abordagem pode ser vista como uma generalização do método de Chebyshev, descrito acima para problemas físicos bidimensionais

Se escrevemos  $\xi = s \cos \alpha$ ,  $\eta = s \sin \alpha$  e  $\zeta = -d$ , temos

$$R^3 = [r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta - \alpha)]^{3/2}, \quad (5.7)$$

podemos escrever (4.51) como

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Phi(s, \alpha)] \left( \frac{1}{R^3} + K(r, \theta; s, \alpha, d, \lambda) \right) s ds d\alpha, \quad (5.8)$$

com  $(r, \theta) \in S$  e com a solução sujeita à condição

$$[\Phi] = 0, \text{ em } r = 1, \quad (5.9)$$

onde  $K = \mathcal{K} + H_r$ .

Note que a parte hipersingular,  $R^{-3}$ , não depende da profundidade de submersão do obstáculo. Além disso, todos os efeitos de ondas estão incluídos em  $H_r$ .

Para fins de simplicidade, assumimos que  $V$  é uma função par de  $\theta$ . Assim, a equação integral (5.8) implica que  $[\Phi]$  é uma função par de  $\theta$ . Expandiremos esta função usando as funções base

$$B_k^m(r, \theta) = P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos(m\theta), \quad k, m = 0, 1, \dots \quad (5.10)$$

onde  $P_n^m$  é o polinômio associado de Legendre. A parte radial destas funções base podem ser representadas alternativamente em termos de polinômios de Gegenbauer ou de Jacobi.

As funções  $B_k^m$  são ortogonais sobre o disco unitário em relação ao peso  $(1-r^2)^{-1/2}$ :

$$\begin{aligned} & \int_S B_k^m(r, \theta) B_l^n(r, \theta) \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = \\ & = 2\sigma_m \delta_{mn} \int_0^1 P_{m+2k+1}^m(\rho) P_{m+2l+1}^m(\rho) d\rho = \frac{\sigma_m \delta_{mn} \delta_{kl}}{m+2k+3/2} O_k^m, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,

$$O_k^m = \frac{(2m+2k+1)!}{(2k+1)!}, \quad (5.12)$$

$\sigma_m = \frac{\pi}{2}$  se  $m > 0$  e  $\sigma_0 = \pi$ . No último passo, usamos o fato que o integrando é uma função de  $\rho$  e as relações ortogonais para as funções associadas de Legendre.

A próxima fórmula, descoberta por Krenk (1979,1982) é essencial para a construção do método. Ela permite a avaliação analítica da integral hipersingular:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{R^3} B_k^m(s, \alpha) s ds d\alpha = C_k^m \frac{B_k^m(r, \theta)}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (5.13)$$

onde

$$C_k^m = -\frac{\pi [P_{m+2k+1}^{m+1}(0)]^2}{4 O_k^m}. \quad (5.14)$$

A fórmula (5.13) pode ser interpretada como uma versão bidimensional de (5.4).

Para fazer uso de (5.13), expandimos  $[\Phi]$  em termos das funções  $B_k^m$ . Abreviadamente, escrevemos

$$[\Phi] \approx \sum_{k,m}^N a_k^m B_k^m := \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} a_k^m B_k^m. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) na equação integral (5.8) e assim avaliando as integrais hiper-singulares usando (5.13), obtemos

$$\sum_{k,m}^N \left\{ C_k^m \frac{B_k^m(r, \theta)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_S B_k^m(s, \alpha) K(r, \theta; s, \alpha, d, \lambda) ds d\alpha \right\} = V(r, \theta), \quad (5.16)$$

para  $(r, \theta) \in S$ .

Para determinar os coeficientes  $a_k^m$ , podemos usar o Método de Galerkin: multiplicar (5.16) por  $B_l^n(r, \theta)$  e integrar sobre  $S$  para obter

$$\begin{aligned} & a_l^n \frac{\sigma_n C_l^n O_l^n}{n + 2l + 3/2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k,m}^N a_k^m \int_S B_l^n(r, \theta) \\ & \times \int_S B_k^m(s, \alpha) K(r, \theta; s, \alpha, d, \lambda) ds d\alpha r dr d\theta = \int_S V B_l^n dS. \end{aligned} \quad (5.17)$$

A principal desvantagem deste método é a integral quádrupla; embora seja possível avaliar algumas integrais analiticamente para certas configurações. Um método mais pragmático que será usado é o de colocação, que avalia a equação (5.16) em  $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$  pontos no disco, gerando um sistema linear para os coeficientes  $a_k^m$ , que pode ser resolvido eficientemente de forma numérica. Esse método foi implementado em linguagem FORTRAN e esse código usa a rotina **CGERFS** da biblioteca LAPACK para resolver o sistema linear e a rotina **D01GCF** da biblioteca NAG para calcular as integrais duplas da equação (5.16). As funções especiais  $\mathbf{H}_0, Y_0$  e  $J_0$ , presentes na função de Green, são calculadas por aproximações de polinômios de Chebyshev.

Os pontos de colocação são tomados como a intersecção de círculos concêntricos igualmente separados com raios emanados da origem. Precisamente, a

colocação de pontos são

$$(r_l, \theta_n), \quad l = 0, 1, \dots, N_1, \quad n = 0, 1, \dots, N_2. \quad (5.18)$$

onde  $\{r_l\}$  e um conjunto de pontos distintos em  $(0, 1)$  e

$$\theta_n = \frac{(2n + 1)\pi}{(2N_2 + 2)}, \quad n = 0, 1, \dots, N_2 \quad (5.19)$$

são os zeros de  $\cos(N_2 + 1)\theta$  em  $(0, \pi)$ .

A escolha desses pontos igualmente distribuídos pode conduzir a um sistema algébrico mal condicionado, sendo que em Farina [5] foram adaptados polinômios de Chebyshev do primeiro tipo na escolha dos pontos na direção radial.

Este método foi previamente empregado para soluções de equações integrais hipersingulares sobre regiões circulares planas por Farina and Martin [6] e circulares não planares por Ziebell and Farina [19] e Farina and Ziebell [7].

## 5.2 Resultados Numéricos

Neste trabalho, iremos apenas tratar movimentos do tipo *heave*, ou seja, o obstáculo realizará oscilações apenas na vertical. Logo, podemos definir os coeficientes de massa adicional ( $\mathcal{A}$ ) e amortecimento ( $\mathcal{B}$ ), como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + i\mathcal{B} &= - \int_{\Omega} [\phi] d\Omega = - \int_{\Omega} \omega(x, y) dx dy \\ &= - \int_D a |f'(\zeta)^{-1/2} |W(\xi, \eta) a^2 |f'(\zeta)|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + i\mathcal{B} &= -a^3 \int_D |f'(\zeta)^{3/2} |W(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= -a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\xi(r, \theta), \eta(r, \theta)) |f'(\zeta(r, \theta))|^{3/2} r dr d\theta. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para o problema de radiação de ondas para uma região aproximadamente circular, devemos resolver numericamente a seguinte equação:

$$\sum_{k,m}^N a_k^n \left\{ C_k^m \frac{B_k^m(r, \theta)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_S B_k^m(s, \alpha) (K(r, \theta) + \mathcal{H}_r(r, \theta; s, \alpha, d, \lambda)) ds d\alpha \right\} = 1, \quad (5.22)$$

para  $(r, \theta) \in S$ . Usaremos  $N_1 = N_2 = 6$  e  $k = 0 : 0.01 : j$ , onde  $j = 1, 2, 3, \dots$

Uma dificuldade que enfrentamos está na integração numérica do núcleo  $K$ . A quadratura utilizada da biblioteca NAG, D01GCF, que usa o método de Korobov-Conroy, não mostrou-se eficaz para a integração quando utilizamos regiões distantes do caráter circular. Por ser da forma

$$K(\zeta, \zeta_0) = \frac{|f'(\zeta)|^{3/2} |f'(\zeta_0)|^{3/2}}{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|^3} - \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^3}, \quad (5.23)$$

possui uma singularidade da ordem  $S^{-1}$  quando  $S \rightarrow 0$ , de acordo com Martin [14]. Além disto as potências cúbicas em (5.23) geram uma "quase-hipersingularidade" do ponto de vista computacional.

Para as simulações numéricas, usaremos mapeamentos do tipo

$$f(\varsigma) = \varsigma + \epsilon g(\varsigma), \quad (5.24)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro adimensional pequeno e  $g(\varsigma)$  é uma função analítica em  $S$ .

Quando combinamos (5.24) com (4.41), podemos observar que o disco unitário no plano- $\varsigma$  é mapeado no domínio  $S$  no plano- $z$  que é aproximadamente um círculo de raio  $a$ . Além disso,  $\varsigma = 0$  é mapeado em  $z = 0$ .

Como exemplo, temos

$$g(\varsigma) = \varsigma^{n+1} \quad (5.25)$$

que leva a uma região com contorno dado por

$$r = \rho(\theta) = a(1 + \epsilon \cos(n\theta)), \quad (5.26)$$

com erro de  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Tais geometrias são consideradas por Gao and Rice [8] em seu estudo de regiões com "rachaduras".

### 5.2.1 Região Quase Circular A

Vamos supor que  $S$  é uma região quase circular aproximada usando o mapeamento

$$f(\zeta) = \zeta + \epsilon 0.5\zeta + \epsilon 0.5\zeta^2, \quad (5.27)$$

onde  $\zeta \in D$ . A função  $f(\zeta)$  é analítica pois é diferenciável em todos os pontos de  $|\zeta| < 1$  e é conforme pelo fato que  $f'(\zeta) \neq 0$ . Na figura 5.1 são mostradas cinco regiões considerando diferentes valores de  $\epsilon$ .

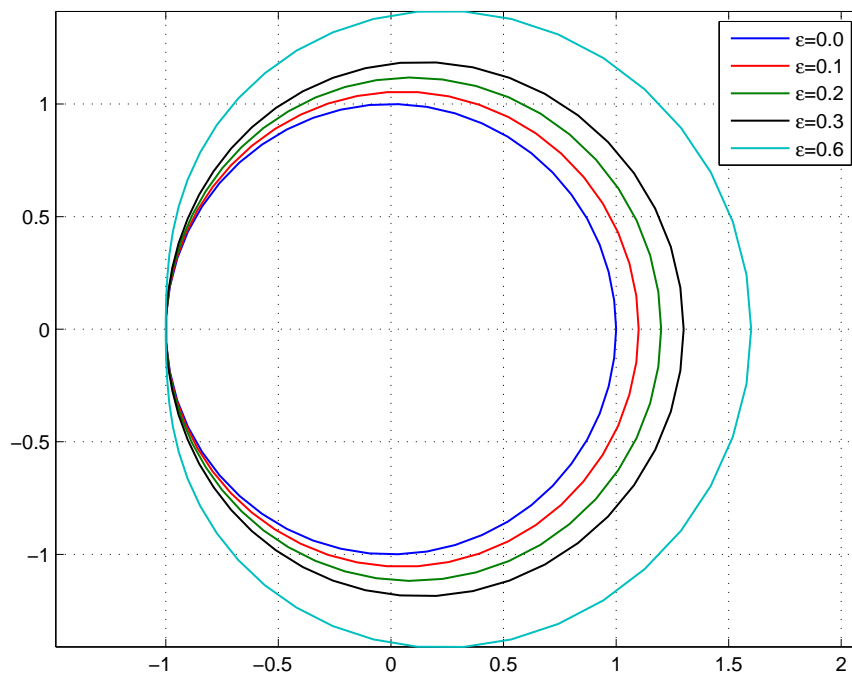


Figura 5.1: Cinco regiões usando o mapeamento  $f(\zeta) = \zeta + \epsilon 0.5\zeta + \epsilon 0.5\zeta^2$  para diferentes valores de  $\epsilon$ .

O próximo passo é determinar numericamente as forças hidrodinâmicas de massa adicional e o amortecimento para essa região, considerando diferentes profundidades de submersão. Tomaremos  $\epsilon = 0.2$

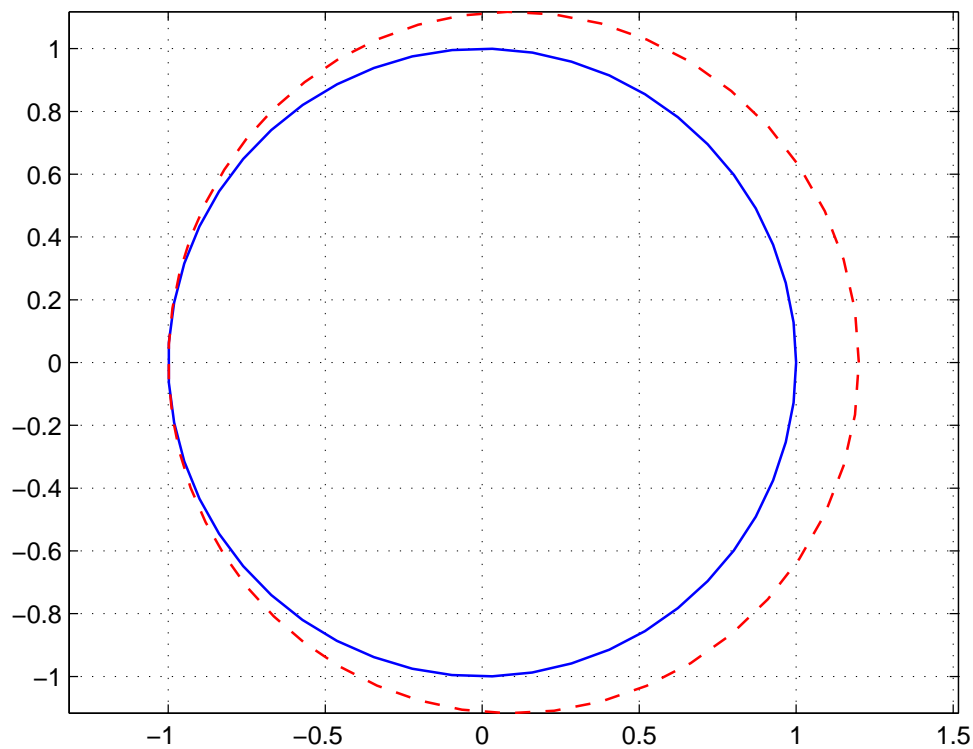


Figura 5.2: Região quase circular  $A$  (em vermelho) mapeada no disco unitário (em azul) usando  $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ .

Na figura 5.2 as regiões circular (em azul) e aproximadamente circular (em vermelho) são mostradas. As figuras 5.3 e 5.5 apresentam os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional e amortecimento, respectivamente, para a região

circular. Estes coeficientes apresentam máximos maiores, e com frequências de ondas menores, à medida que a submersão do obstáculo diminui. As frequências nas quais os picos ocorrem são denominadas frequências ressonantes do sistema e fornecem informações importantes a este tipo de problema físico.

Na figura 5.4 os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional são plotados como função de  $k$  para a região quase circular  $A$ . Note que os picos nas curvas diminuem quando aumentamos a submersão  $d$ . Esta situação equivale ao obstáculo afastar-se da superfície livre. Adicionalmente, subpicos menores, que aparecerem entre  $0.5 < k < 1$ , também mostram o mesmo comportamento. Os coeficientes de amortecimento, mostrados na figura 5.6, tem os máximos para frequências ressonantes baixas, que diminuem quando o valor de submersão é aumentado.

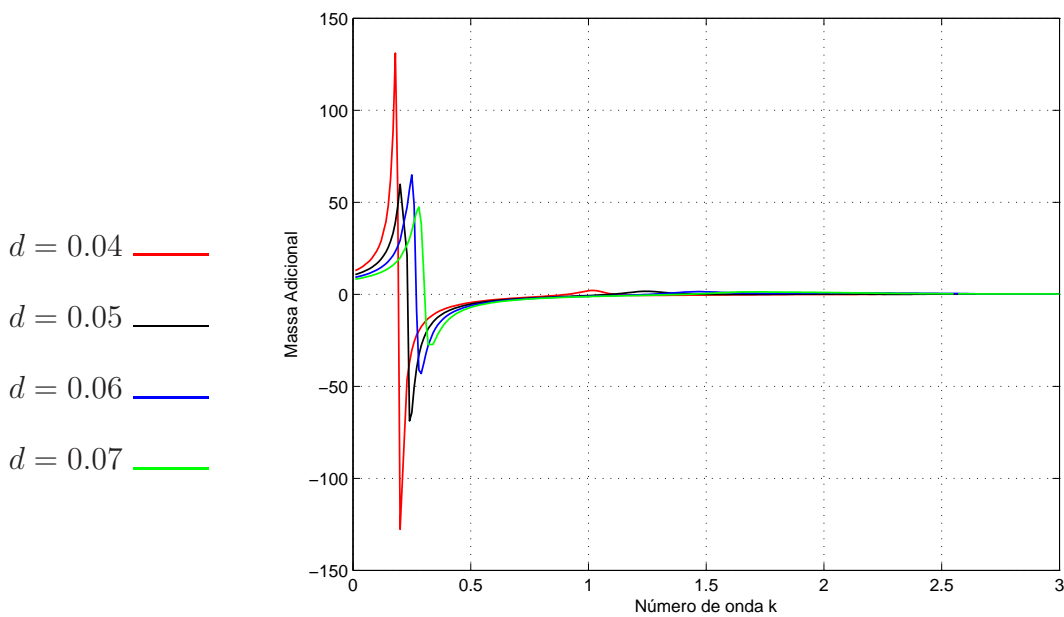


Figura 5.3: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região circular.



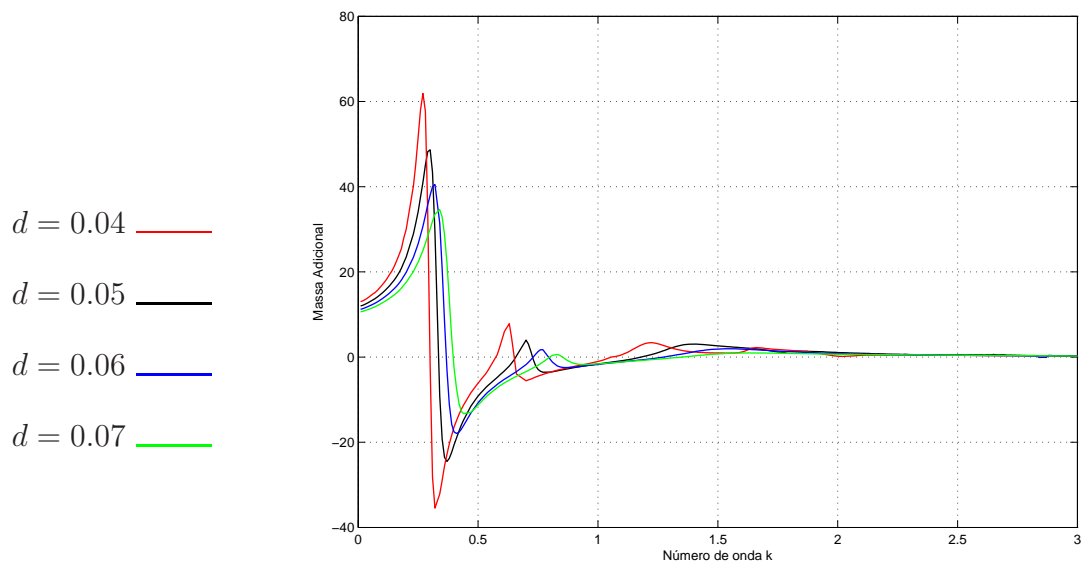


Figura 5.4: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $A$ , dada por  $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ .

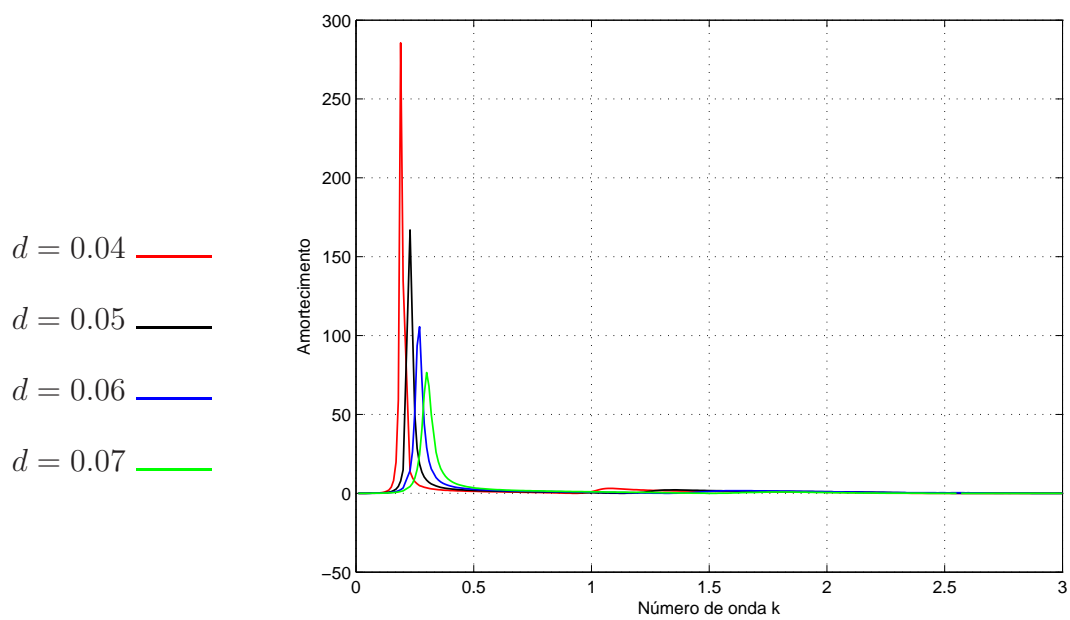


Figura 5.5: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região circular.

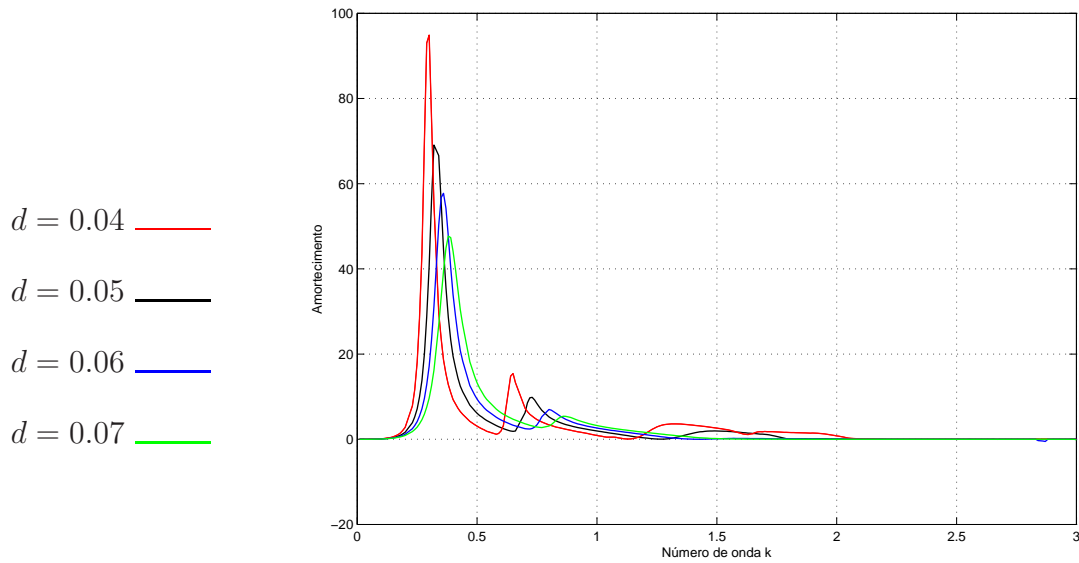


Figura 5.6: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $A$ , dada por  $f(\zeta) = \zeta + 0.1\zeta + 0.1\zeta^2$ .

### 5.2.2 Região Quase Circular $B$

Agora vamos considerar a seguinte função analítica:

$$r(\zeta) = \zeta + \epsilon(\zeta^3 + \zeta^4). \quad (5.28)$$

Temos

$$r'(\zeta) = 1 + \epsilon(3\zeta^2 + 4\zeta^3), \quad (5.29)$$

para todo  $|\zeta| < 1$ . Como  $r'(\zeta)$  existe e  $r'(\zeta) \neq 0$ , logo  $r(\zeta)$  é analítica e conforme. Na figura 5.7, vemos representações da região quase circular  $B$ , definidas pela fórmula (5.28) para diferentes valores de  $\epsilon$ . A linha na cor preta, a região para  $\epsilon = 0$ , isto é, o disco circular. Em vermelho a região para  $\epsilon = 0.025$ , em azul para  $\epsilon = 0.05$  e em verde para  $\epsilon = 0.06$ .

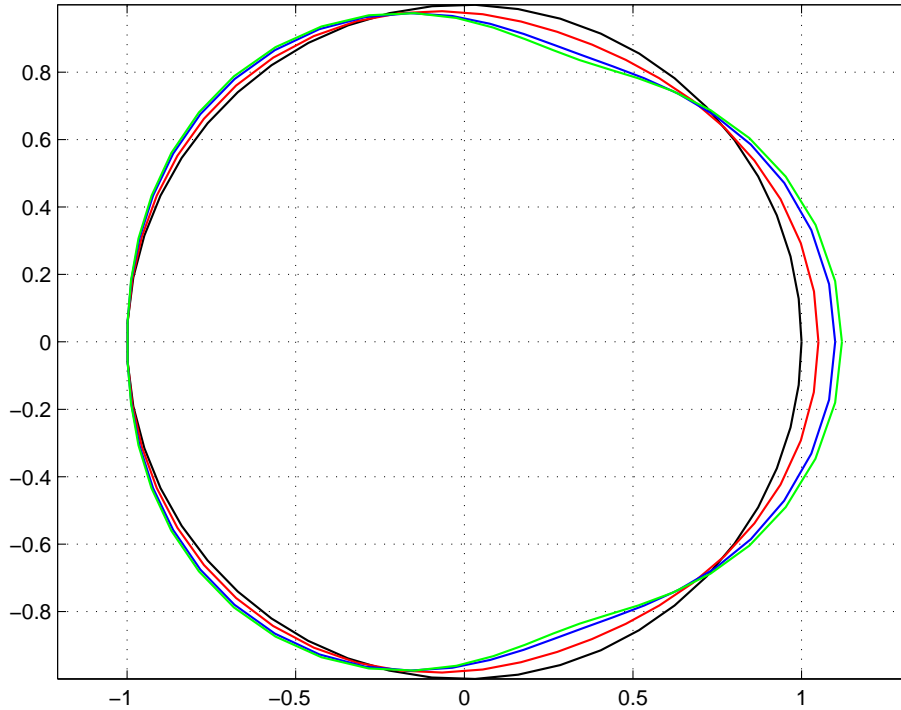


Figura 5.7: Regiões mapeadas no disco unitário (em preto) por  $r(\zeta) = \zeta + \epsilon(\zeta^3 + \zeta^4)$  com  $\epsilon = 0.025$  (em vermelho),  $\epsilon = 0.05$  (em azul) e  $\epsilon = 0.06$  (em verde).

Na figura (5.8) os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional são plotados como função de  $k$  para uma região quase circular  $B$  com  $\epsilon = 0.025$ . Note que os picos para as submersões  $d = 0.05$ ,  $d = 0.06$  e  $d = 0.07$  estão em uma faixa próxima, variando entre 45 e 55, enquanto que para a submersão  $d = 0.04$ , há um máximo de aproximadamente 145 e um mínimo de  $-145$ . Adicionalmente, subpicos menores não aparecem, como vimos para a região quase circular  $A$ . Os coeficientes de amortecimento, mostrados na figura 5.9, seguem um comportamento decrescente em relação à submersão e também não há picos menores.

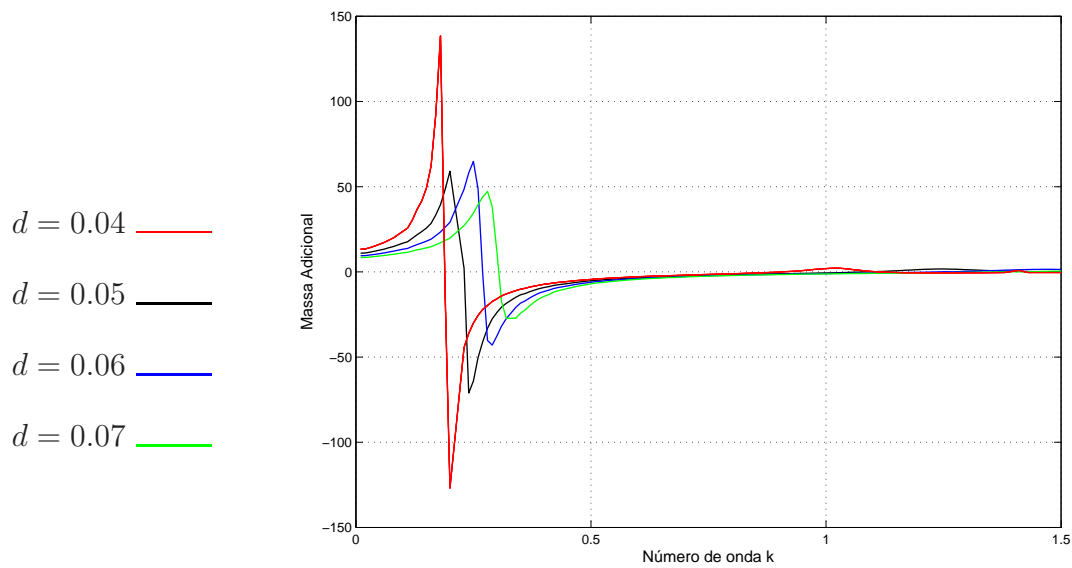


Figura 5.8: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $B$ , dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.025(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

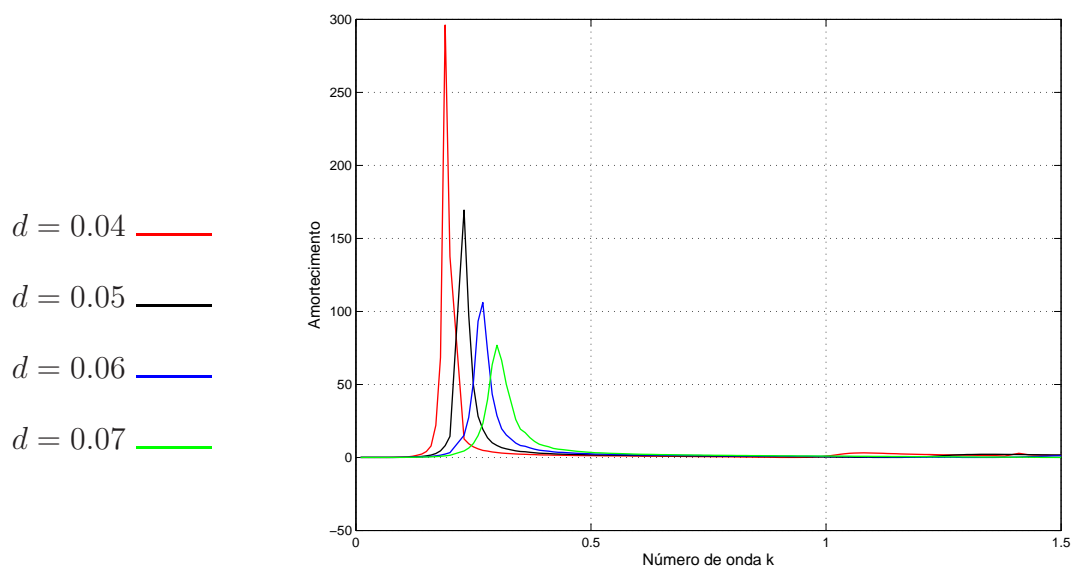


Figura 5.9: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $B$ , dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.025(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

Na figura (5.10) os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional são plotados como função de  $k$  para uma região quase circular  $B$ , porém usando  $\epsilon = 0.05$ . Como a região afasta-se bastante da forma circular, utilizamos valores de submersão maiores do que das regiões anteriores. Logo os efeitos das ondas são aliviados devido o obstáculo não estar tão próximo da superfície livre. Observamos um comportamento decrescente natural dos picos e o não aparecimento de subpicos. O amortecimento mostrado na figura 5.11 também mostra um comportamento decrescente em relação à submersão e a predominância dos picos para frequências baixas.

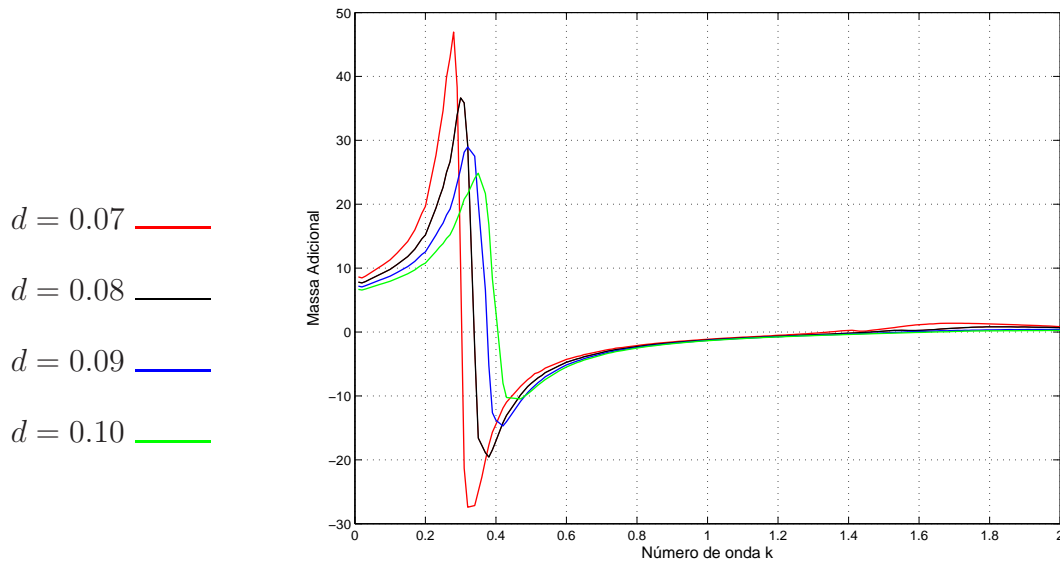


Figura 5.10: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $B$ , dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.05(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

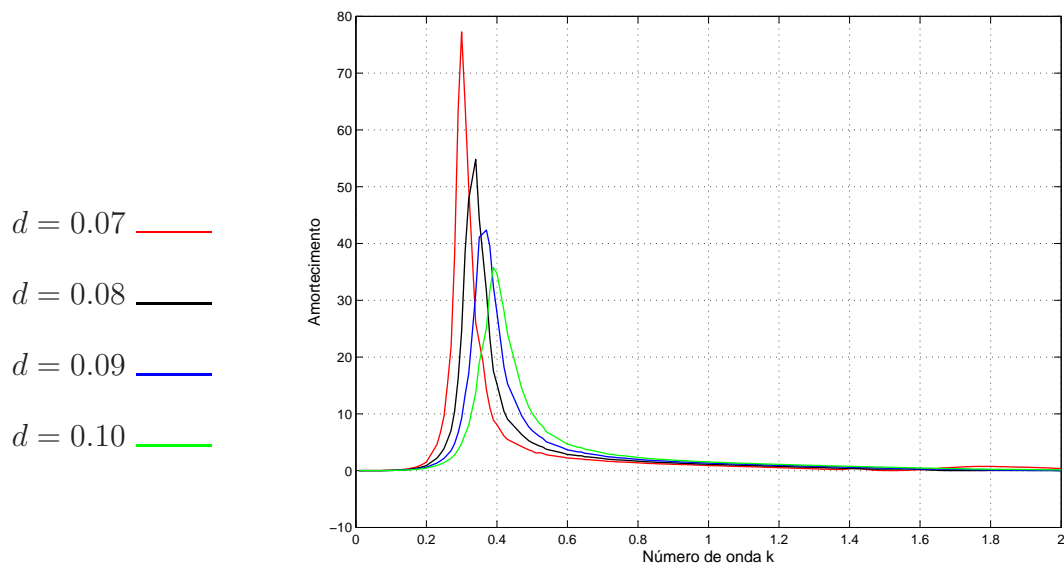


Figura 5.11: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $B$ , dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.05(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

Nas figuras 5.12 e 5.13 é mostrado a massa adicional e o amortecimento para a região usando o mapeamento  $r(\zeta) = \zeta + 0.06(\zeta^3 + \zeta^4)$ , respectivamente. Os resultados são semelhantes aos resultados obtidos com  $\epsilon = 0.05$ .

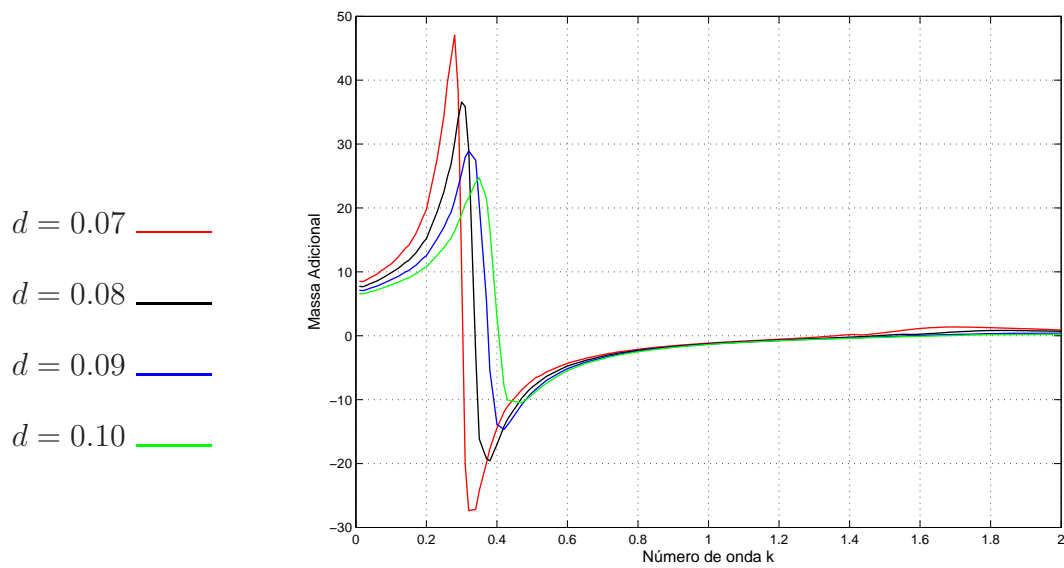


Figura 5.12: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região aproximadamente circular, dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.06(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

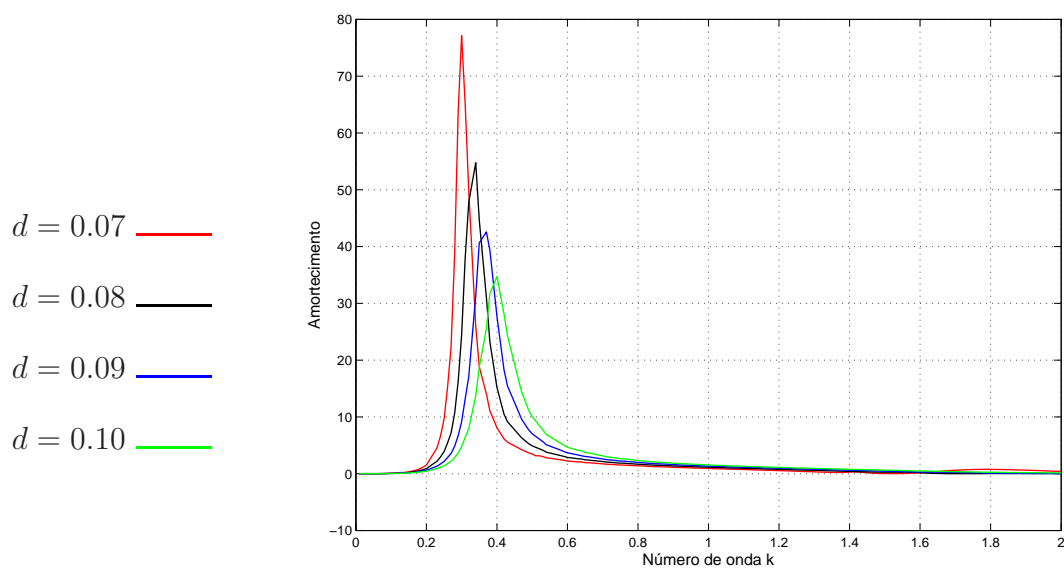


Figura 5.13: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região aproximadamente circular, dada por  $r(\zeta) = \zeta + 0.06(\zeta^3 + \zeta^4)$ .

### 5.2.3 Região Quase Circular $C$

Considere agora o mapeamento,

$$h(\zeta) = \zeta + \epsilon(e^{\zeta^3} - 1). \quad (5.30)$$

Note que  $h'(\zeta) = 1 + \epsilon(3\zeta^2 e^{\zeta^3}) \neq 0$ , para  $|\zeta| < 1$ , e concluímos que  $h(\zeta)$  é analítica e conforme. A figura 5.14 mostra a região quase circular  $C$  definida pela fórmula (5.30), com  $\epsilon = 0.045$ .

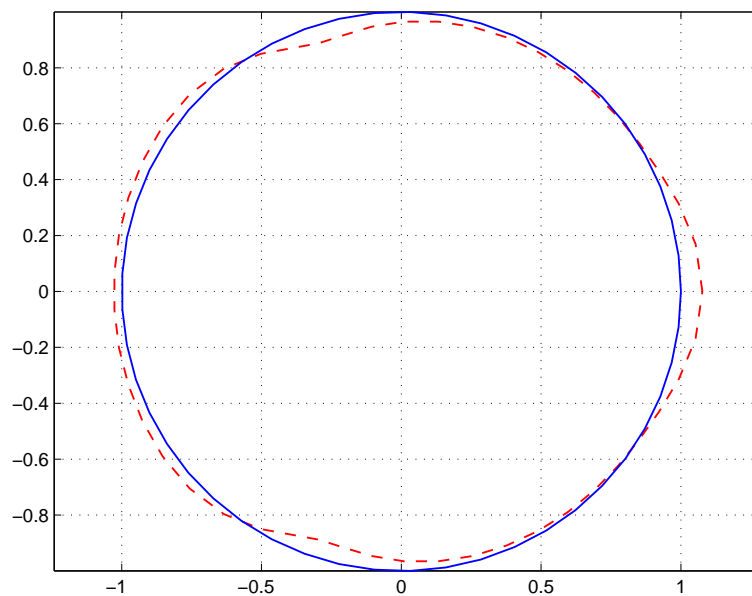


Figura 5.14: Região mapeada no disco unitário por  $h(\zeta) = \zeta + 0.045(e^{\zeta^3} - 1)$  (em vermelho).

Nas figuras 5.15 e 5.16 são mostrados os coeficientes da massa adicional e amortecimentos, respectivamente. Usamos os valores de submersão  $d = 0.07, d = 0.09, d = 0.1$  e  $d = 0.2$ , pois a região afasta-se bastante da forma circular. Podemos observar que os picos assumem valores baixos em relação as regiões anteriores e para



$d = 0.2$ , os coeficientes são bastante suaves, sem ressonâncias e apresentam valores inferiores aos outros observados para submersões menores.

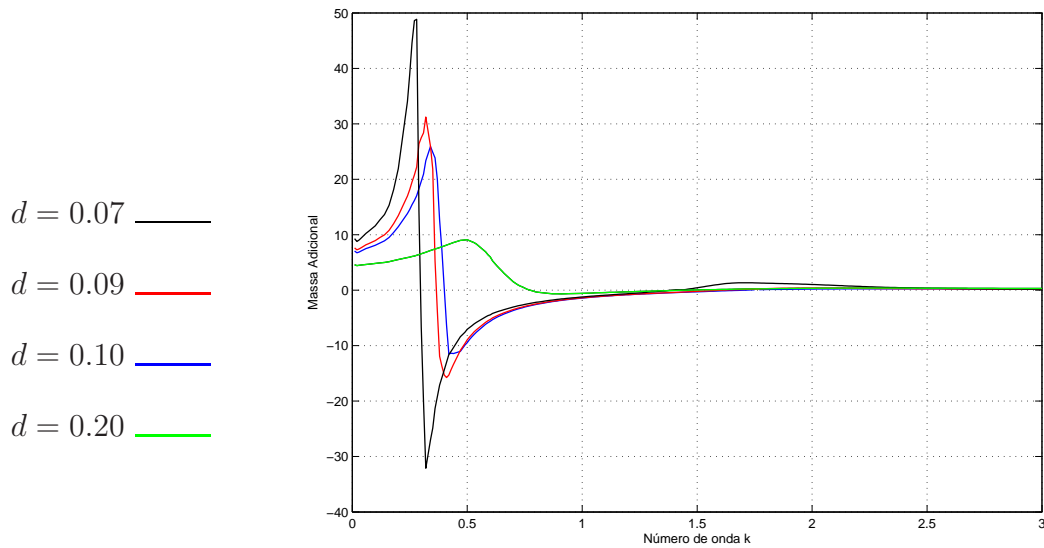


Figura 5.15: Massa adicional para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $C$ , dada por  $h(\zeta) = \zeta + 0.045(e^{\zeta^3} + 1)$ .

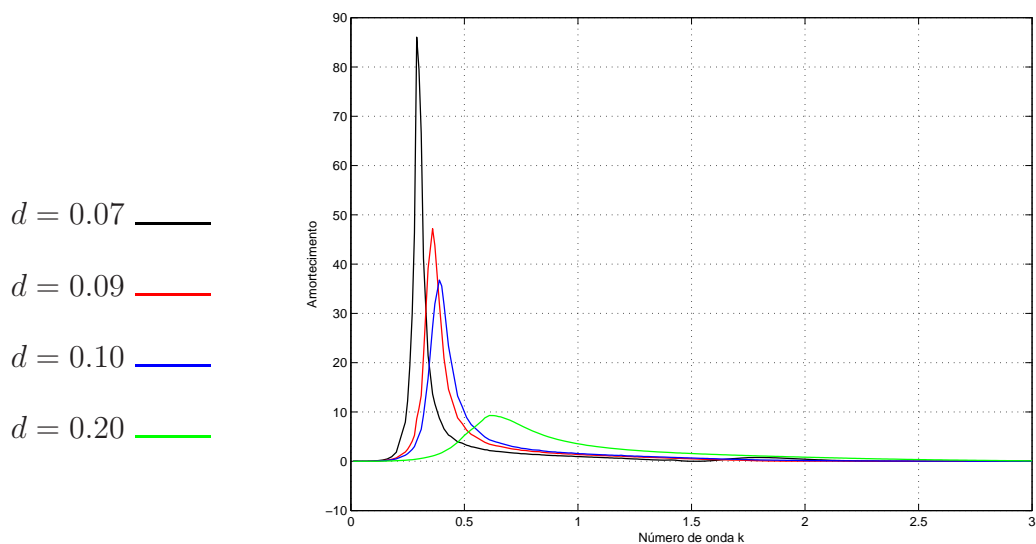


Figura 5.16: Amortecimento para o movimento *heave* como função do número de onda, para a região quase circular  $C$ , dada por  $h(\zeta) = \zeta + \epsilon(e^{\zeta^3} + 1)$ , com  $\epsilon = 0.045$ .

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Primeiramente, apresentamos a formulação do problema de ondas aquáticas considerando as condições de contorno de superfície livre e do fundo, determinado pela batimetria. Em seguida, usamos fortemente a linearidade e a hipótese de movimento simplesmente harmônico para encontrarmos uma solução analítica para o potencial de velocidade  $\Phi$ .

No terceiro capítulo, descrevemos o fenômeno de espalhamento e radiação para obstáculos arbitrários, a formulação integral do problema considerando a condição de contorno do objeto e apresentamos as forças e momentos hidrodinâmicos de massa adicional e amortecimento.

Posteriormente, descrevemos o problema para um obstáculo fino quase circular submerso, sua aplicação das atividades offshore e solução utilizando o recurso de integrais hipersingulares. Como nossa contribuição, consideramos regiões quase-circulares usando mapeamentos conformes, tendo como base o trabalho de elasticidade de Martin [14] para um fluido ilimitado. Entretanto consideramos os efeitos das ondas e equações integrais mais gerais.

Para a obtenção de soluções numéricas empregamos o método espectral descrito no capítulo 5. Os coeficientes de massa adicional e amortecimento para três regiões quase circulares mapeadas no disco plano circular foram calculados. Variamos os parâmetros adimensionais de profundidade e número de onda. Para mais próximas do aspecto circular, o método foi capaz de simular casos com submersões consideráveis baixas. Ao passo que para regiões menos próximas de formas circulares, utilizamos submersões maiores, a fim de evitar problemas computacionais devido a quase-hipersingularidade presente no núcleo da equação integral.

Os resultados obtidos mostraram comportamentos da força hidrodinâmica semelhante aos de um disco circular, com diferenças particulares e específicas. Em geral, a proximidade da superfície livre ocasiona picos maiores e ocorrendo para frequências de ondas mais baixas. Como aspecto novo, o aparecimento de subpicos para submersões moderadas indicam frequências ressonantes secundárias que não ocorrem no caso de um disco circular para tais valores de submersão.

Para trabalhos futuros, pretendemos concentrar esforços para solucionar o problema da integração hipersingular em regiões bidimensionais arbitrárias e propor um algoritmo para realizar tal tarefa. Tal método possibilitará um estudo semelhante ao desenvolvido neste trabalho, porém para uma classe maior de regiões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (2014). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Martino Fine Books.
- [2] Ahlfors, L. V. (1966). *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill.
- [3] Falnes, J. (2002). *Ocean Waves and Oscillating Systems*. Cambridge University Press. Cambridge Books Online.
- [4] Farina, L., e. a. (2012a). *Pesquisa Aplicadas em Modelagem Matemática*. Editora Unijuí.
- [5] Farina, L. (2012b). *Ondas Oceânicas de Superfície*. SBMAC, 2a edition.
- [6] Farina, L. and Martin, P. (1998). Scattering of water waves by a submerged disc using a hypersingular integral equation. *Applied Ocean Research*, 20(3):121 – 134.
- [7] Farina, L. and Ziebell, J. (2013). Solutions of hypersingular integral equations over circular domains by a spectral method. *Proceedings of Applications of Mathematics*, pages 52 – 66.
- [8] Gao, H. and Rice, J. (1987). Somewhat circular tensile cracks. *International Journal of Fracture*, 33(3):155–174.
- [9] Garrett, C. J. R. (1971). Wave forces on a circular dock. *Journal of Fluid Mechanics*, 46:129–139.
- [10] Hadamard, J. (2003). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover phoenix editions. Dover Publications.

- [11] John, F. (1950). On the motion of floating bodies ii. simple harmonic motions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3(1):45–101.
- [12] Krenk, S. (1981). *Polynomial Solutions to Singular Integral Equations, with Applications to Elasticity Theory*. Riso-R.438. Risø National Laboratory.
- [13] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Sykes, J. B., and Reid, W. H. (1959). *Fluid Mechanics*. Pergamon Press Oxford, England.
- [14] Martin, P. (1995). Mapping flat cracks onto penny-shaped cracks: Shear loadings. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(2):275 – 294.
- [15] Martin, P. A. and Farina, L. (1997). Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc. *Journal of Fluid Mechanics*, 337:365–379.
- [16] Newman, J. (1984). *Approximations for the Bessel and Struve Functions*. Defense Technical Information Center.
- [17] Newman, J. N. (1977). *Marine Hydrodynamics*. Wei Cheng Cultural Enterprise Company.
- [18] Stoker, J. (2011). *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley.
- [19] Ziebell, J. S. and Farina, L. (2012). Water wave radiation by a submerged rough disc. *Wave Motion*, 49(1):34 – 49.
- [21] Wikipedia. Disponível em:  
<[http://en.wikipedia.org/wiki/Mars\\_\(oil\\_platform\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_(oil_platform))>. Acesso em: 06 de junho de 2014.
- [22] Wikipedia. Disponível em:  
<[http://en.wikipedia.org/wiki/Breakwater\\_\(structure\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Breakwater_(structure))>. Acesso em: 10 de junho de 2014.
- [23] Wikipedia. Disponível em:

<<http://pt.wikipedia.org/wiki/Oceano>>. Acesso em: 20 de agosto de 2014.

[24] Wikipedia. Disponível em:

<[http://en.wikipedia.org/wiki/Kansai\\_International\\_Airport](http://en.wikipedia.org/wiki/Kansai_International_Airport)>. Acesso em: 02 de setembro de 2014.

[25] Wikipedia. Disponível em:

<[http://en.wikipedia.org/wiki/Spar\\_\(platform\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spar_(platform))>. Acesso em: 28 de setembro de 2014.