

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC**

**ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ESPACIAIS**  
**RETICULADAS**  
**COM A CONSIDERAÇÃO DO EMPENAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL**

**Gladimir de Campos Grigoletti**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

**Porto Alegre**

**1999**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de *Mestre em Engenharia Civil* e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann, UFRGS  
Orientador



---

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Banca Examinadora:

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal  
Ph.D., North Carolina State University, USA

Prof. Ruy Carlos Ramos de Menezes  
Dr. Techn., Universität Innsbruck

Prof. Alberto Tamagna  
Dr., UFRGS

Prof. Ignácio Iturrioz  
Dr., UFRGS

Porto Alegre, junho de 1999.

*“Não se pode ensinar coisa alguma a alguém,  
pode-se apenas auxiliar a descobrir por si  
mesmo.”*

Galileu Galilei

A meu pai (in memoriam) e a minha mãe que  
foram a base para a minha formação.

## **AGRADECIMENTOS**

À Coordenação do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela oportunidade de desenvolver este trabalho e concluir uma importante fase de minha vida.

Ao professor José Carlos Ferraz Hennemann, pela atenção e espontaneidade sempre oferecida nos momentos em que recorri.

Aos meus familiares que sempre me incentivaram.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil fundamentais para a minha formação.

Aos colegas e amigos do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelo convívio no decorrer dos créditos.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Aos funcionários do CPGEC pela atenção dispensada toda vez que necessitei.

A todos que, mesmo não citados, colaboraram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho, o meu reconhecimento.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
RESUMO.....	xviii
ABSTRACT.....	xix
1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Objetivos.....	2
1.2 - Conteúdo da dissertação.....	3
2 - TEORIA TÉCNICA DA TORÇÃO E FLEXÃO DE VIGAS DE PAREDE FINA.....	4
2.1 - Hipóteses Básicas .....	5
2.2 - Torção e Flexão combinadas (Teoria de Vlasov).....	6
2.2.1 - Generalidades.....	6
2.2.2 - Cinemática da Deformação .....	7
2.2.3 - Relações Tensões-Deformação Generalizadas.....	14
2.2.4 - Estado de Tensões em Seções Abertas.....	19
3 - DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ.....	25
3.1 - Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	25
3.2 - A formulação Lagrangeana Atualizada.....	28
3.3 - Formulação por elementos finitos.....	37
3.4 - A natureza dos momentos sofrendo rotações finitas .....	48
3.4.1 - O problema do equilíbrio de nós em ângulo.....	48
3.4.2 - A solução do problema.....	49

<b>4 - ALGORITMOS PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA.....</b>	<b>56</b>
4.1 - Delineamento do Problema.....	56
4.2 - Métodos de Solução Incrementais-Iterativos.....	59
4.2.1 - Notação para a análise incremental-iterativa.....	62
4.2.2 - O Método de Newton-Raphson (NR).....	64
4.2.3 - O Método do Controle do Deslocamento.....	65
4.2.4 - O Método do Comprimento do Arco.....	67
4.2.5 - O Método do Controle do Trabalho.....	70
4.2.6 - O Método do Controle do Deslocamento Generalizado.....	73
4.2.6.1 - Uma comparação entre os parâmetros PRG e PRC.....	76
4.3 - Procedimentos para a recuperação dos esforços no elemento.....	78
4.3.1 - Atualização da geometria do elemento.....	78
4.3.2 - Eixos do elemento e eixos das seções nodais.....	81
4.3.3 - Cálculo das deformações naturais.....	86
4.3.4 - Cálculo das solicitações no elemento.....	92
4.4 - Critério de convergência.....	93
4.5 - Diagrama de blocos.....	93
<b>5 -EXEMPLOS.....</b>	<b>97</b>
<b>6 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES.....</b>	<b>125</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>129</b>
<b>Apêndice A - A integral de matrizes.....</b>	<b>136</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1 - Viga de parede fina sujeita a uma carga axial excêntrica.....	8
2.2 - (a) Geometria qualquer da seção transversal de uma viga de parede fina	
(b) Geometria da deformação.....	10
2.3 - Geometria da seção coordenadas e componentes dos deslocamentos normal	
e tangencial.....	12
2.4 - Área setorial.....	14
2.5 - Resultantes de tensões.....	15
2.6 - (a) Sistema de coordenadas da seção transversal	
Variação das (b) tensões normais e (c-e) tensões de corte sobre a parede da seção	
transversal aberta de uma viga de parede fina.....	22
2.7 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal de uma viga de parede fina na direção x.....	24
3.1 - Movimento de uma viga tri-dimensional e seu sistema de coordenadas.....	27
3.2 - Tensões, deslocamentos e coordenadas generalizadas do elemento.....	38
4.1 - Curva carga-deflexão característica de um sistema não-linear.....	60
4.2 - Esquema do método de Newton-Raphson.....	65
4.3 - Esquema do método do controle do deslocamento.....	66
4.4 - Esquema do método do comprimento do arco.....	69
4.5 - Esquema do Método do controle do trabalho.....	71
4.6 - Características do PRG.....	77
4.7 - Coordenadas nodais do elemento.....	79
4.8 - Conceito de rotação finita.....	80
4.9 - Coordenadas do elemento e coordenadas nodais:	
(a) configuração $C_0$ ; (b) configuração $C_1$ .....	83

4.10 - Cálculo das coordenadas do elemento	
(a) projeções médias $C_0$ ; (b) novos eixos do elemento.....	85
4.11 - Deslocamentos de corpo rígido e deformações naturais.....	88
4.12 - Variação das coordenadas das seções nodais: (a) configuração $C_1$ ; (b) configuração $C_2$ ; (c) incrementos rotacionais.....	89
4.13 - Viga com momento torçor (T) distribuído.....	98
4.14 - Gráfico da variação do ângulo de torção ao longo da viga.....	100
4.15 - Gráfico do momento torçor com o empenamento livre nos apoios.....	100
4.16 - Gráfico do momento torçor com o empenamento restringido nos apoios.....	102
4.17 - Gráfico da variação do bimomento ao longo da viga.....	103
4.18 - Grelha com momento de torção concentrado.....	104
4.19 - Pórtico de Williams.....	106
4.20 - Gráfico: carga P x deflexão central.....	107
4.21 - Gráfico: carga P x reação horizontal.....	108
4.22 - Viga com carga concentrada.....	109
4.23 - Gráfico: parâmetro de carga $\mathcal{P}$ x deslocamento $u/L$ .....	110
4.24 - Gráfico: parâmetro de carga $\mathcal{P}$ x deslocamento $v/L$ .....	111
4.25 - Gráfico: parâmetro de carga $\mathcal{P}$ x deformação angular $\theta_2$ .....	112
4.26 - Viga com carga momento.....	113
4.27 - Gráfico: parâmetro de carga $\mathcal{M}$ x deslocamentos: $u/L$ , $v/L$ e $\theta_2/2\pi$ .....	114
4.28 - Viga-coluna à flexo-torção.....	116
4.29 - Gráfico: carga P x deslocamento axial $u_x$ .....	117
4.30 - Gráfico: carga P x ângulo de torção $\theta_x$ no meio do vão.....	118
4.31 - Gráfico: carga P x deformação angular $\theta_2$ no apoio $A_0$ .....	119
4.32 - Viga-coluna à flambagem lateral.....	120
4.33 - Gráfico: momento M x deslocamento $u_y$ no meio do vão.....	122
4.34 - Gráfico: momento M x ângulo de torção $\theta_x$ no meio do vão.....	123
4.35 - Gráfico: momento M x deformação angular $\theta_2$ no apoio B.....	124

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Matriz de Rigidez Linear  $\{k_e\}_{14 \times 14}$

TABELA 2 - Matriz de Rigidez Geométrica  $\{k_g\}_{14 \times 14}$

TABELA 3 - Matriz de Correção das Rotações Generalizadas  $\{k_c\}_{14 \times 14}$

TABELA 4 - Matriz de Rigidez Geométrica Corrigida  $\{k_g^{corr}\}_{14 \times 14}$

TABELA 5 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 1

TABELA 6 - Condições de contorno

TABELA 7 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 2

TABELA 8 - Resultados obtidos pelo programa implementado e por Conci (1988)

TABELA 9 - Propriedades geométricas e mecânicas da seção do exemplo 3

TABELA 10 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 4

TABELA 11 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 5

TABELA 12 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 6

TABELA 13 - Cargas críticas: programa implementado x análise por autovalores

TABELA 14 - Condições de contorno para a viga-coluna

TABELA 15 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 7

TABELA 16 - Cargas críticas: análise por autovalores x solução analítica x análise não-linear

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas Maiúsculas

$A$  - área da seção transversal

$B, M_w$  - bimomento ou momento de empenamento

$C_w, I_w$  - constante de empenamento ou momento setorial de inércia

$[C], k, H_n$  - parâmetros de restrição

$\{ {}_1C \}$  - matriz de constantes elásticas

$C_0$  - configuração inicial indeformada

$C_1$  - última configuração calculada

$C_2$  - configuração de equilíbrio vizinha (desejada)

${}_1C_{ijkl}$  - componentes do tensor de constantes elásticas

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal (“Young Modulus”)

$F_{xA}, F_{yA}, F_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}, B_A$  - forças nodais no nó A do elemento

$F_{xB}, F_{yB}, F_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}, B_B$  - forças nodais no nó B do elemento

$F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z, B$  - resultante de tensões

$F$  - vetor de forças nodais internas na (n-1)-ésima iteração

$[{}^1F]$  - vetor de cargas nodais externas agindo na estrutura no início do passo incremental

$[{}^2F]$  - vetor de cargas nodais externas agindo na estrutura no fim do passo incremental

$[F_x], [F_y], [F_z], [M_x]$  - vetores de forças nodais

$G$  - módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento (“Shear Modulus”)

$H_n, k, [C]$ , - parâmetros de restrição

$I_y$  - momento de inércia em relação ao eixo  $y$

$I_z$  - momento de inércia em relação ao eixo  $z$

$I_{yz}$  - produto de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$

$I_w, C_w$  - momento setorial de inércia ou constante de empenamento da seção transversal.

$I_{wy}, I_{wz}$  - produtos setoriais de inércia.

$J$  - constante torsional de St. Venant

$\{K^G\}$  - matriz de rigidez global da estrutura

$\{K_{n-1}^i\}$  - matriz de rigidez tangente na  $(n-1)$ -ésima iteração do  $i$ -ésimo incremento

$\bar{K}$  - coeficiente de Wagner

$L$  - comprimento do vão da viga

$[M]$  e  $[M_\rho]$  - vetores dos momentos generalizados

$MS_y$  - momento estático em relação ao eixo  $y$ .

$MS_z$  - momento estático em relação ao eixo  $z$ .

$MS_w$  - momento estático setorial em relação ao eixo  $z$ .

$M_x$  - momento torçor total desenvolvido em alguma seção ( $M_x = T_{sv} + T_w$ )

$M_w, B$  - momento de empenamento ou bimomento

$N$  - ponto arbitrário localizado na linha central da seção transversal.

$P$  - carga axial excêntrica

$[\bar{P}]$  - vetor de cargas de referência

$[P^i]$  - vetor de cargas nodais externas aplicadas no  $i$ -ésimo incremento de carga.

$[R_{n-1}^i]$  - vetor de forças desequilibradas correspondente a  $(n-1)$ -ésima iteração.

${}^2R$  - trabalho virtual externo

$[{}^0R]$  - matriz de rotação do elemento na configuração indeformada.

$\{{}^1R\}$  - matriz de rotação do elemento na configuração  $C_1$ .

$\{{}^kR\}$  - matriz de transformação do elemento na configuração  $C_k$ .

$S_y$  e  $S_z$  - coordenadas de  $S$  que é um ponto arbitrário na seção transversal.

$T_{sv}$  - momento torçor uniforme ou de St. Venant devido a  $(\tau_{xs})_T$ .

$T_w$  - momento torçor não uniforme ou momento torçor de empenamento

$S_y$  e  $S_z$  - coordenadas do centro de torção

$[U]$  - vetor de deslocamentos nodais incrementais entre  $C_1$  e  $C_2$

$X, Y, Z$  - sistema de coordenadas globais

$W(y, z)$  - área setorial principal

### **Letras Romanas Minúsculas**

$a_y$  e  $a_z$  - coordenadas do centro de corte

$d$  - dimensão característica da seção transversal

${}_{,l}e_{ij}$  - componentes lineares do tensor de deformações incrementais de Green-Lagrange

$[l^e]$  - vetor de deformação linear

$[l^f]$  - vetor de forças nodais internas no elemento no início do passo incremental

$[l^2f]$  - vetor de forças nodais internas no elemento no fim do passo incremental

$\{k\}$  - matriz de rigidez tangente  $\{k\} = \{k_e\} + \{k_g\}$

$\{k_c\}$  - matriz de correção das rotações generalizadas

$\{k_e\}$  - matriz de rigidez linear

$\{k_g\}$  - matriz de rigidez geométrica

$\{k_g^{corr}\}$  - matriz de rigidez geométrica corrigida

$\{k_\rho\}$  - matriz de rigidez geométrica em função das rotações finitas

$\{k_{\theta\rho}\}$  - matriz que inter relaciona as rotações generalizadas em termos de derivadas de deslocamento e rotações finitas.

$k, [C], H_n$  - parâmetros de restrição

$n$  - direção normal a  $S$ , tendo sentido para fora

$[n_i]$  e  $[n_s]$  - funções de interpolação

$[p_i]$  e  $[p_j]$  - matrizes de orientação das seções extremas, para as seções  $i$  e  $j$  respectivamente

$q$  - fluxo de corte

$s$  - coordenada tangencial medida ao longo da linha média da parede da viga

$t$  - espessura da parede

${}^2_1t_k$  - componente das forças de superfície em  $C_2$  mas medido em  $C_1$ .

$[\tilde{u}_x], [\tilde{u}_y], [\tilde{u}_z]$  e  $[\tilde{\theta}_x]$  - vetores de deslocamento incrementais nos nós A e B do elemento.

$[u]_n$  - vetor de deformações naturais

$u_x$  - deslocamento longitudinal ao longo do eixo axial x

$u_y$  - deslocamento do centro de corte, na direção do eixo y

$u_z$  - deslocamento do centro de corte, na direção do eixo z

$u_{yT}, u_{zT}$  - componentes dos deslocamentos de um ponto arbitrário T na seção transversal, nas direções de y e z respectivamente.

$u_{yS}, u_{zS}$  - componentes dos deslocamentos de um ponto arbitrário S na seção transversal, nas direções de y e z respectivamente

x, y, z – sistema de coordenadas localizada no centro de gravidade da seção

$x, y, z$  - sistema de coordenadas locais

### Letras Gregas Minúsculas

$\alpha$  - taxa de momento total  $M_x$ , resistido por  $\tau_{xx}$

$\beta_y, \beta_z, \beta_w$  - constantes geométricas da seção transversal

$\gamma_{sn}, \gamma_{xm}, \gamma_{xs}, \epsilon_n$  - componentes das deformações normais a superfície média.

$\delta_b$  - encurtamento axial devida a flexão do elemento

$\delta_1 e_{ij}$  - variação virtual do tensor de deformação linear ou de Almansi

$\delta u_k$  - variação virtual das componentes dos deslocamentos em  $C_2$

$[\delta u]$  - vetor de variação dos deslocamentos nos nós

$\varepsilon_x$  - deformação linear axial

$\eta$  - deslocamento de N na direção tangente à parede da viga-coluna

$[{}^1\eta]$  - vetor de deformações não-linear

${}^1\eta_{ij}$  - componentes não-lineares do tensor de deformações incrementais de Green-Lagrange

$\xi$  - deslocamento de N normal à tangente à parede da viga-coluna

$\lambda_n$  - parâmetro de de carga

$\lambda_n^i$  - fator de incremento de carga para a  $n$ -ésima iteração do  $i$ -ésimo incremento

$\rho$  - distância de T à tangente ao contorno em N

$\rho_x, \rho_y$  e  $\rho_z$  - rotações finitas de Rodriguez

$\sigma_x$  - tensão normal axial

$\sigma_w$  - tensão normal devida a restrição ao empenamento

$\sigma_n, \tau_{xn}, \tau_{sn}$  - componente das tensões normais a parede

$\tau_w$  - tensão de corte devida a restrição ao empenamento

$\tau_{xs}$  - componente das tensões cortantes

${}^2\tau_{ij}$  - componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy em  $C_2$

${}^1\tau_{ij}$  - componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy em  $C_1$

$[{}^1\tau]$  - vetor de tensões de Cauchy

$\theta'_x$  - taxa de torção

$\theta_x$  - ângulo de torção da seção transversal sobre o eixo longitudinal x

$\theta_y$  e  $\theta_z$  - rotações sobre os eixos y e z respectivamente

### **Letras Gregas Maiúsculas**

$[\Delta U_{\alpha}^i]$  - deslocamento prescrito do  $\alpha$ -ésimo grau de liberdade, o qual está contido no vetor

$[\Delta U_n^i]$  - vetor do incremento dos deslocamentos

$\Delta W$  - incremento de trabalho

$[\Delta S]$  - comprimento do arco

$[\Delta U]$  - vetor de deformações relativas

$\|\varepsilon\|$  - norma Euclidiana modificada

## RESUMO

Procedimentos padrões do método dos elementos finitos aplicados à análise não-linear geométrica de estruturas espaciais formadas por perfis de aço de seção transversal de parede fina são empregados.

A inclusão da torção não uniforme é feita através da adoção do princípio das áreas setoriais para deslocamentos da seção transversal, requerendo com isto a introdução de um grau de liberdade a mais, o empenamento, aos seis outros graus de liberdade já conhecidos em cada nó do elemento.

Utilizando-se como ferramenta básica o princípio dos trabalhos virtuais, a Formulação Lagrangeana Atualizada é empregada para a análise não-linear geométrica.

A compatibilidade cinemática das rotações finitas nos nós que ligam elementos em ângulo, no espaço tridimensional, é analisada.

Utiliza-se também procedimentos baseados na teoria das rotações finitas para atualizar as rotações nodais de cada elemento.

O algoritmo empregado para o traçado da curva carga x deslocamento é o do *método do controle do deslocamento generalizado* proposto por Yang.

O método foi implementado em computador e utilizado para o estudo do comportamento de estruturas espaciais considerando-se o empenamento da seção transversal. Pretende-se que os resultados sejam de valor para projetistas que empreguem perfis de aço de seção transversal de parede fina.

Apresenta-se também exemplos que mostram a eficiência e aplicabilidade do programa desenvolvido.

## ABSTRACT

Standard procedures of the method of the finite elements applied to the geometric nonlinear analysis of space frames to formed by profiles of steel of transverse section of thin-walled are employed.

The inclusion of the nonuniform torsion is made through the adoption of the Principle of the Sectorial Areas for the displacements of the cross section, requesting with that introduction of one more degree of freedom, the warping, at the six other degrees of freedom already known in each end of the element.

Being used as basic tool the principle of the Virtual Works, the Update Lagrangian Formulation is used for the geometric nonlinear analysis.

The compatibility cinematic of the finite rotations in the joints that interconnected elements in angle, in the three-dimensional space, is analyzed.

Procedures based on the theory of the finite rotations to update the end rotations of each element is also used.

The algorithm employed for the plan of the load x displacement curve is the generalized displacement control method proposed by Yang.

The method was implemented in computer and used for the study of the behavior of space frames structures being considered the warping of the cross section. It is intended that the results are of value for designers that use profiles of steel of transverse section of thin-walled.

Introduce also examples that show the efficiency and the aplicability of the program.

## 1 - INTRODUÇÃO

Perfis de aço de seção transversal de parede fina (“thin-walled”) ocupam um lugar importante no campo da moderna engenharia estrutural, sendo largamente empregados na construção da estrutura de veículos (caminhões, ônibus, vagões, etc.), na indústria aeronáutica e na indústria da construção civil.

Na indústria da construção civil estes perfis são utilizados, na forma de elementos secundários - como é o caso, por exemplo, das terças e de elementos de fixação de tapamentos laterais de galpões industriais, ou como elementos principais do tipo vigas, colunas e elementos de treliças. A destacar ainda silos, pontes, edifícios e as torres de transmissão de energia elétrica, onde encontram larga utilização.

O estudo destes perfis é de interesse pois os mesmos oferecem alta performance em termos da relação mínimo peso para uma dada resistência. Contudo, é bem conhecido que tais elementos tem um comportamento estrutural complexo, e são, principalmente, suscetíveis a flambagem espacial.

Em muitos softwares comerciais somente o momento torçor uniforme ou de St. Venant é considerado no modelo das vigas-coluna\*. É sabido, contudo, que o momento torçor não uniforme ou de empenamento, em elementos de vigas-coluna restringidas, é significativo, e não pode deixar de ser considerado.

A estabilidade de estruturas constituídas por tais perfis tem sido o objetivo de muitas pesquisas, sendo seu estudo um importante item de projeto, já que prediz um limite para a capacidade de carga da estrutura. Nestes perfis, constata-se, em primeiro lugar, que a baixa rigidez torcional destes elementos conduz a levar em conta a presença do modo de instabilidade por torção, seja em vigas - instabilidade lateral da viga - seja no caso de peças comprimidas - instabilidade por flexo-torção. Em segundo lugar, pode-se ter a presença da

---

\* O termo viga-coluna será adotado daqui para frente por se tratar de um elemento estrutural que apresenta tanto as características de uma viga quanto de uma coluna (Chen e Atsuta, 1977).

instabilidade local nas paredes, caracterizada por um modo análogo ao modo de instabilidade de placas esbeltas, fenômenos conhecido como “flambagem local” do perfil.

A não consideração dos fatores acima citados na análise pode levar a resultados diferentes do comportamento real, o que, em alguns casos, pode comprometer a segurança da própria estrutura (Conci, 1988).

Embora as equações diferenciais para viga-coluna de parede fina (Timoshenko e Gere, 1961), (Vlasov, 1961), (Gjelsvik, 1981) sejam válidas para geometrias, carregamentos e condições de contorno variadas, a complexidade destas equações é tal que, somente uns poucos problemas tem sido resolvidos usando a matemática clássica. Muitas soluções gerais surgem da aproximação das equações diferenciais usando a técnica das diferenças finitas (Galambos, 1968), ou resolvendo as equações por integração numérica direta (Timoshenko e Gere, 1961). Até mesmo estes métodos oferecem somente um progresso parcial sobre os métodos clássicos de solução. Por outro lado, o desenvolvimento de um procedimento geral pelo método dos elementos finitos é encorajador e tem resultado em um número de aplicações bem sucedidas (Barsoum e Gallagher, 1970), (Rajasekaran, 1971), (Yang, 1984, 1986, 1992), (Chan e Kitipornchai, 1987), (Conci, 1988) e (Kim *et al*, 1996.).

## 1.1 - Objetivos

O objetivo da presente dissertação é o estudo de estruturas espaciais formadas por perfis de aço e seção transversal de parede fina considerando o empenamento da seção transversal e os efeitos não-lineares devido às mudanças de geometria das mesmas.

Para isso os seguintes procedimentos são adotados:

- a) desenvolver um conjunto de equações de equilíbrio incremental utilizando o princípio dos trabalhos virtuais;
- b) redução destas equações para uma equação matricial, através da técnica dos elementos finitos, que é aplicável a análise elástica não-linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais formadas por perfis de aço e seção transversal de parede fina e;
- c) implementar computacionalmente este tipo de análise.

## 1.2 - Conteúdo da dissertação

A presente dissertação é composta por cinco capítulos.

No capítulo 1 são apresentados os objetivos e o conteúdo deste trabalho.

No capítulo 2 faz-se uma revisão da teoria clássica da torção e flexão de vigas de parede fina instituindo, com base nas hipóteses de Vlasov, o campo de deformações e as relações tensão-deformação das mesmas.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação para a modelagem do elemento finito de viga-coluna de seção transversal de parede fina. Baseado no princípio dos trabalhos virtuais, uma equação de equilíbrio incremental é derivada usando-se a formulação lagrangeana atualizada. Procedimentos padrões dos elementos finitos são então empregados para calcular a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica para este elemento.

O problema da falta de equilíbrio nos nós em ângulo é analisado e solucionado modificando-se a matriz de rigidez geométrica deduzida de modo a torná-la equivalente a uma matriz derivada de uma formulação que considera a continuidade cinemática das rotações finitas nodais.

No capítulo 4 faz-se uma breve revisão dos algoritmos para a análise não-linear geométrica, expõe-se os procedimentos para a recuperação dos esforços no elemento, bem como o diagrama de blocos geral do programa computacional implementado. São analisados também, no capítulo 5, exemplos que demonstram a eficiência do algoritmo empregado e o efeito do empenamento da seção transversal.

Segue o capítulo 6 com as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente no apêndice A apresenta-se as integrais de matrizes utilizadas na dedução da matriz de rigidez linear e matriz de rigidez geométrica.

## 2 - TEORIA TÉCNICA DA TORÇÃO E FLEXÃO DE VIGAS DE PAREDE FINA

O número de soluções analíticas de problemas envolvendo vigas-coluna no qual o empenamento da seção transversal é considerado, e que utilizam a teoria da elasticidade é muito pequeno, e em certos casos, estas soluções são extremamente complexas para serem aplicadas mesmo em problemas simples.

Há necessidade, então, de se fazer simplificações que dão como resultado as chamadas teorias de engenharia ou teorias técnicas de vigas e placas, entre outras. Nestas teorias, nem todas as equações da teoria da elasticidade são satisfeitas. Todavia, as formulações da teoria técnica são tão úteis que elas compreendem a base da maior parte da análise e projeto de estruturas em engenharia (Shames, 1983).

O uso destas teorias facilita a obtenção das matrizes de rigidez sem alterar a precisão da análise.

As teorias de vigas de Bernoulli-Euler-Navier e de Timoshenko não podem ser aplicadas às seções de paredes finas, pois o empenamento da seção é nelas desconsiderado a partir das hipóteses básicas das seções planas permanecerem planas (Timoshenko e Gere, 1961 e Fung, 1965).

A teoria geral da torção, flexão e estabilidade de estruturas formadas por elementos de parede fina é relativamente recente. Soluções que descrevem o comportamento elástico de barras com várias condições de contorno são os aspectos mais desenvolvidos. Estas teorias e importantes soluções são dadas em vários textos. Pode-se citar, por exemplo, os nomes de Wagner (1929), Bleich (1936, 1952, 1953), Goodier (1941, 1942), Timoshenko e Gere (1961), Vlasov (1961), Chen e Atsuta (1977), Gjelsvik (1981) e Murray (1986) entre outros.

É importante salientar que, embora na década de trinta os trabalhos do notável cientista soviético Vasili Zakharovitch Vlasov já fossem conhecidos dentro das fronteiras russas, a quase inexistência de intercâmbio técnico-científico entre o Ocidente e a URSS, fez

com que apenas em 1961, com a tradução do seu livro “Thin-Walled Elastic Beams” para o inglês e francês, despertasse o interesse da comunidade científica do Ocidente nesta área, surgindo várias contribuições. “Uma viga de parede fina (...) é considerada, nesta teoria, como um sistema espacial composto de placas capazes de suportar, em cada ponto da superfície média, não só tensões axiais (normais e cisalhantes) como também momentos. A deformação da viga não é analisada sob a hipótese usual das seções planas. Ao invés desta, Vlasov usa a hipótese mais geral e natural de inextensibilidade do contorno e ausência de tensão cisalhante na superfície média.” Esta hipótese constitui a base de uma nova equação de deslocamentos longitudinais na seção transversal. Esta equação é denominada por Vlasov de *Lei das Áreas Setoriais* e inclui a *Lei das Seções Planas* como caso particular, permitindo o cálculo das tensões nos casos mais gerais de flexo-torção de vigas (Vlasov, 1961).

Neste capítulo, a teoria técnica de Vlasov para vigas é revisada a fim de dar base para o desenvolvimento de um elemento finito geral para vigas-coluna de parede fina.

## 2.1 - Hipóteses Básicas

Vlasov define como vigas de parede fina as que satisfazem as seguintes relações:

$$\frac{d}{L} \leq 0,1 \quad e$$

$$\frac{t}{d} \leq 0,1$$

onde:

$t$  - espessura da parede

$L$  - comprimento da viga (vão)

$d$  - dimensão característica da seção transversal

As seguintes hipóteses básicas são adotadas:

1) O material é homogêneo, elástico e isótropo. O coeficiente de Poisson é pequeno e seu quadrado desprezível quando comparado com a unidade;

2) Após a deformação da barra, a geometria da seção transversal projeta-se indeformada no seu plano;

3) As distorções da superfície média ( $\gamma_{xz}$ ) são desprezadas;

4) Cada elemento comporta-se como casca de pequena espessura, ou seja, segue a hipótese de Kirchhoff: retas perpendiculares à superfície média da seção transversal, após a deformação da barra, permanecem perpendiculares à superfície média deformada;

5) Somente cargas conservativas são consideradas;

6) A flambagem local não é considerada;

7) As cargas externas longitudinais, como resultado do empenamento, são consideradas diferentes das transversais, no seguinte sentido: na teoria clássica, ambas poderiam ser substituídas por um sistema estático equivalente, agora as primeiras não são mais substituíveis por tal sistema. Em outras palavras, o princípio de Saint Venant não se aplica para cargas longitudinais nas seções de paredes finas.

## **2.2 - Torção e Flexão Combinadas (Teoria de Vlasov)**

### **2.2.1 - Generalidades**

Quando um elemento de parede fina, tem uma ou mais seções transversais restringidas ao empenamento, e está sob a ação de um sistema de cargas externas, este fica sujeito a uma complexa distribuição de tensões normais e transversais que não pode ser determinada por teorias elementares da resistência dos materiais. Efeitos semelhantes ocorrem quando o momento torçor varia ao longo do elemento: seções vizinhas tendem a girar com ângulos diferentes, ou seja, tendem a ter empenamentos diferentes. A hipótese de que as seções planas permanecem planas durante a deformação não é mais válida, e aplicações do princípio de Saint Venant podem conduzir a sérios erros (Oden, 1981).

A existência destas tensões no empenamento restringido é do ponto de vista físico ou mecânico, facilmente verificada.

É óbvio que, se uma seção está restringida ao empenamento, a mesma não pode ter deslocamentos fora de seu próprio plano, então um sistema de tensões normais deve ser desenvolvido para eliminar este empenamento. No geral, estas tensões normais variam de ponto a ponto ao longo do elemento; portanto elas são acompanhadas por uma distribuição de tensões cortante não uniforme que, por sua vez, alteram a torção da seção. Como

resultado, o momento torçor desenvolvido em cada seção não é proporcional a taxa de torção  $\theta'_x$  e as tensões de corte finais não podem ser obtidas pela superposição daquelas produzidas pela torção uniforme e flexão.

Tais tensões de empenamento são também desenvolvidas em elementos de parede fina sujeitos a cargas excêntricas.

Considere-se, por exemplo, a viga da figura 2.1, que é composta por quatro barras longitudinais de igual área conectadas por placas finas. Por simplicidade, assume-se que as barras desenvolvem somente tensões normais e as placas somente tensões de corte. De acordo com a teoria de Bernoulli-Navier para flexão, a carga excêntrica  $P$  produz a força axial  $F_x$  e os momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$  como mostra a figura 2.1. Tensões resultantes adicionais não são dadas pela teoria técnica clássica porque a mesma é baseada na hipótese de que as seções planas permanecem planas após a deformação (hipótese de Bernoulli-Navier). Isto, contudo, é impossível. A superposição dos casos (b), (c) e (d) na figura 2.1 não dá como resultante a força  $P$ ; um sistema de forças adicionais mostrado na figura 2.1(e) é também necessário. Este sistema é equivalente a dois binários iguais e opostos, denotado por  $B$ , desenvolvidos em planos paralelos. A estes binários estaticamente nulos, isto é, estaticamente auto-equilibrados que produzem um empenamento fora da seção muito similar ao produzido pela torção, Vlasov (1961) denominou de *bimomento*\*. Note-se que o bimomento não influencia os deslocamentos lineares e angulares do eixo do elemento nem a rotação da seção transversal. Inversamente, se um momento de torção, em vez de uma carga axial, é aplicado no bordo livre da viga, as restrições que eliminam o empenamento no bordo fixo também produzem bimomentos.

De acordo com o princípio de St. Venant (Fung, 1965), os efeitos de tais sistemas de tensões estaticamente nulos devem cair rapidamente ao afastar-se do seu ponto de aplicação. Para seções fechadas isto é comumente válido; mas no caso de seções abertas, a aplicação do princípio pode levar a erros significantes. Em elementos de parede fina as tensões produzidas por empenamento diminui muito lentamente do seu ponto de aplicação e podem constituir as tensões mais importantes desenvolvidas (Oden, 1981, p. 209).

### 2.2.2 - Cinemática da Deformação

---

\* No geral, o Bimomento pode consistir de mais de dois binários auto-equilibrados.

Em vista da hipótese de que a geometria da seção transversal não se altera durante a deformação, conclui-se que a seção transversal do elemento desloca-se como um corpo rígido, que tem sua posição determinada pelas translações dos pontos sobre a seção, mais os deslocamentos destes pontos devido a rotação da seção sobre algum ponto neste plano. Este ponto no plano da seção transversal sobre o qual a seção gira é chamado de *centro de torção*, isto é, o único ponto da seção transversal que permanece em repouso durante a deformação (Oden, 1981).

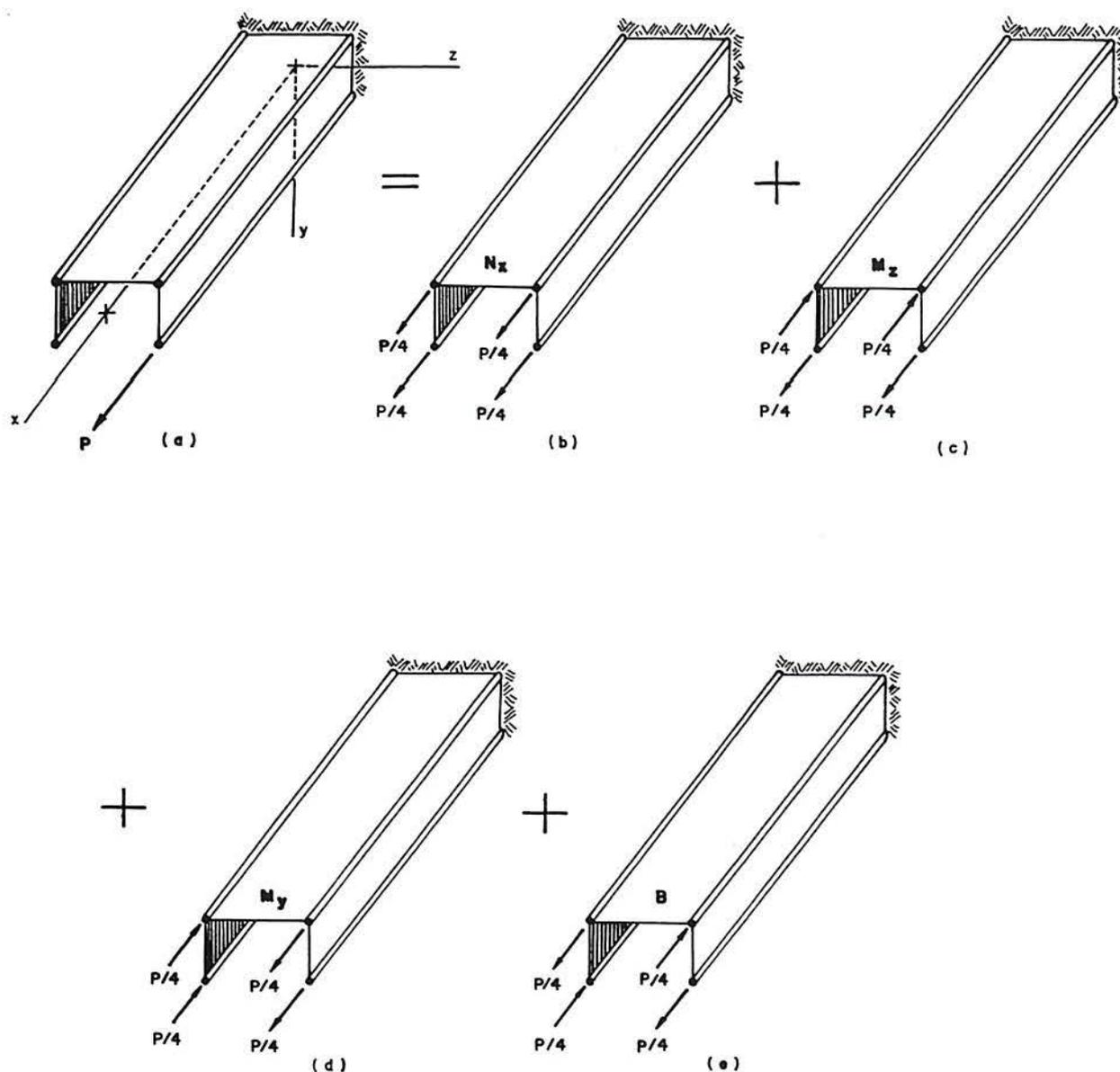


Figura 2.1 - Viga de parede fina sujeita a uma carga axial excêntrica.

Considere-se agora a seção transversal de parede fina da forma geral, mostrada na figura 2.2. A origem do sistema de coordenadas  $x, y, z$  é localizada no centro de gravidade da seção. Seja T um ponto arbitrário na seção transversal tendo coordenadas  $a_y$  e  $a_z$  e sejam  $u_{yT}$  e  $u_{zT}$  as componentes dos deslocamentos nas direções de  $y$  e  $z$  respectivamente. Ademais, sejam  $S_y$  e  $S_z$  as coordenadas de S, que é outro ponto da seção, e sejam  $u_{yS}$  e  $u_{zS}$  as componentes dos deslocamentos de S. Investiga-se agora as relações cinemáticas entre os deslocamentos de T e S por exame na geometria dos deslocamentos dos elementos da seção transversal mostrada na figura 2.2.

Os deslocamentos de T e S devidos as translações da seção são iguais. Se a seção transversal rota um pequeno ângulo  $\theta_x$  contrário aos ponteiros do relógio, então os deslocamentos de S são

$$u_{yS} = u_{yT} - (S_z - a_z)\theta_x \quad (2.1)$$

$$u_{zS} = u_{zT} + (S_y - a_y)\theta_x$$

Note-se que estas relações são independentes do centro de torção.

Considerando-se o ponto S como o centro de torção da seção, então, por definição,  $u_{yS}$  e  $u_{zS}$  são nulos. Então as coordenadas do centro de torção são

$$S_y = a_y - \frac{u_{zT}}{\theta_x} \quad (2.2)$$

$$S_z = a_z + \frac{u_{yT}}{\theta_x}$$

Vê-se que, em geral, a localização do centro de torção varia de ponto a ponto ao longo do elemento. Esta localização depende da deformação do elemento e, conseqüentemente, das condições de contorno e carregamento.

Agora seja N um ponto arbitrário localizado na linha central da seção transversal cujas coordenadas são  $(y, z)$ . De acordo com as equações (2.1), os deslocamentos deste ponto são

$$u_y = u_{yT} - (z - a_z)\theta_x$$

(2.3)

$$u_z = u_{zT} + (y - a_y)\theta_x$$

onde  $u_{yT} = u_{yT}(x)$  e  $u_{zT} = u_{zT}(x)$  denotam os deslocamentos do eixo axial que passa por T nas direções de y e z respectivamente,  $a_y$  e  $a_z$  localizam T em relação a origem C e  $\theta = \theta(x)$  é a rotação da seção transversal sobre o eixo longitudinal x.

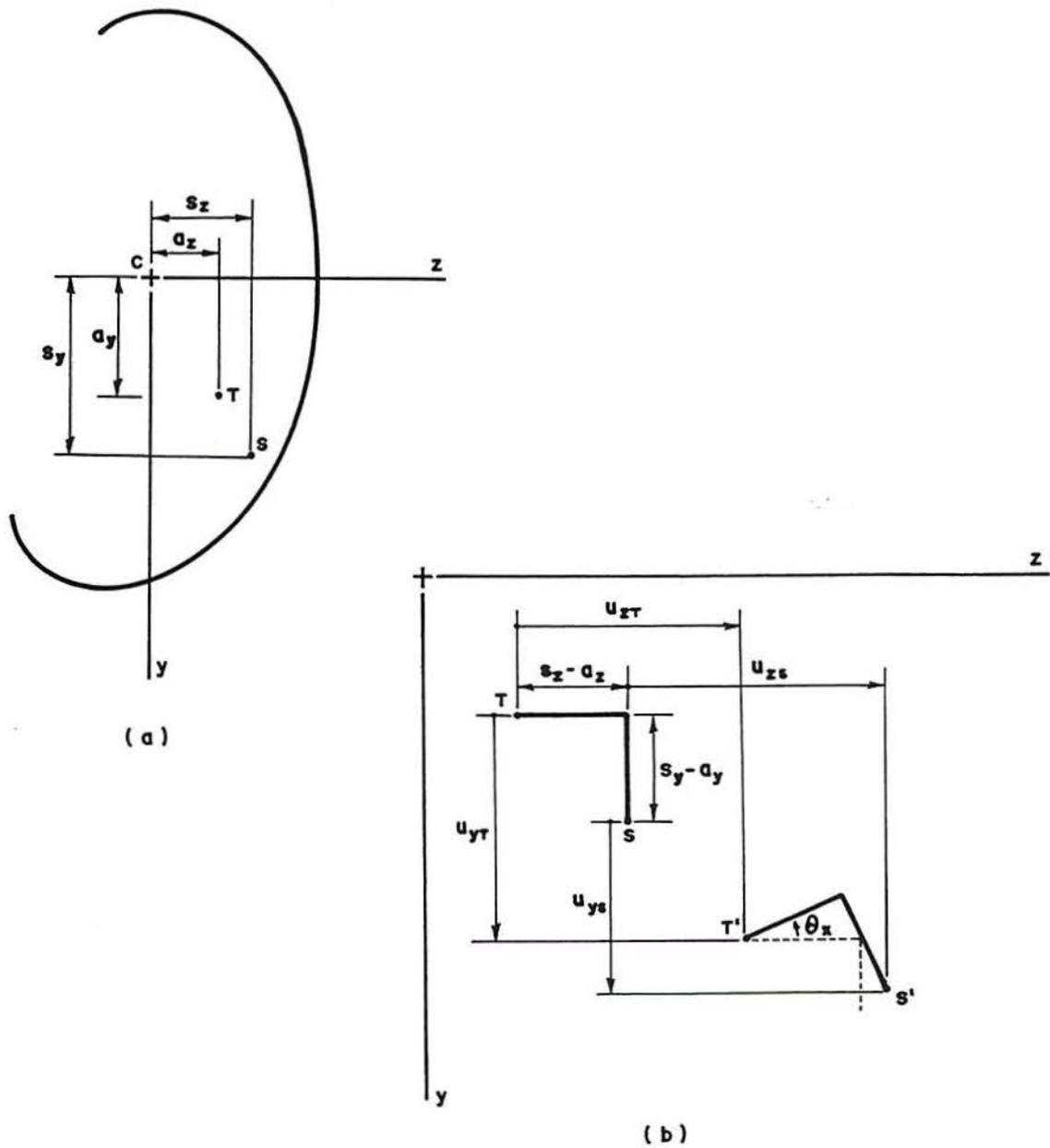


Figura 2.2 - (a) Geometria qualquer da seção transversal de uma viga de parede fina; (b) Geometria da deformação.

Além disso, seja  $\eta$  o deslocamento de N na direção tangente à parede do elemento e  $\xi$  o deslocamento de N normal a esta tangente (figura 2.3). Então da simples geometria, acha-se

$$\xi = u_y \cos \alpha + u_z \sin \alpha \quad (2.4)$$

$$\eta = -u_y \sin \alpha + u_z \cos \alpha$$

Substituindo-se a equação (2.3) na equação (2.4), resulta

$$\xi = u_{yT} \cos \alpha + u_{zT} \sin \alpha + [-(z - a_z) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha] \theta_x \quad (2.5a)$$

$$\eta = -u_{yT} \sin \alpha + u_{zT} \cos \alpha + [(z - a_z) \sin \alpha + (y - a_y) \cos \alpha] \theta_x \quad (2.5b)$$

Referindo-se à figura 2.3, vê-se que as quantidades entre colchetes nas equações (2.5) são, respectivamente, as projeções de  $\rho(s)$  à tangente em N e a perpendicular à tangente em N. Chamando-se estas quantidades por  $\rho_T$  e  $\rho_n$ , respectivamente, têm-se

$$\xi = u_{yT} \cos \alpha + u_{zT} \sin \alpha + \rho_T \theta_x \quad (2.6a)$$

$$\eta = -u_{yT} \sin \alpha + u_{zT} \cos \alpha + \rho_n \theta_x \quad (2.6b)$$

Usando-se a hipótese 3, do item 2.2, pode-se escrever

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cong 0 \quad (2.7)$$

substituindo-se a equação (2.6b) na equação (2.7), obtém-se

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = \frac{du_{yT}}{dx} \sin \alpha - \frac{du_{zT}}{dx} \cos \alpha - \frac{d\theta_x}{dx} \rho_n \quad (2.8)$$

como  $\sin \alpha = -\frac{dy}{ds}$  e  $\cos \alpha = \frac{dz}{ds}$ , fica

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = -\frac{du_{yT}}{dx} \frac{dy}{ds} - \frac{du_{zT}}{dx} \frac{dz}{ds} - \frac{d\theta_x}{dx} \rho_n \quad (2.9)$$

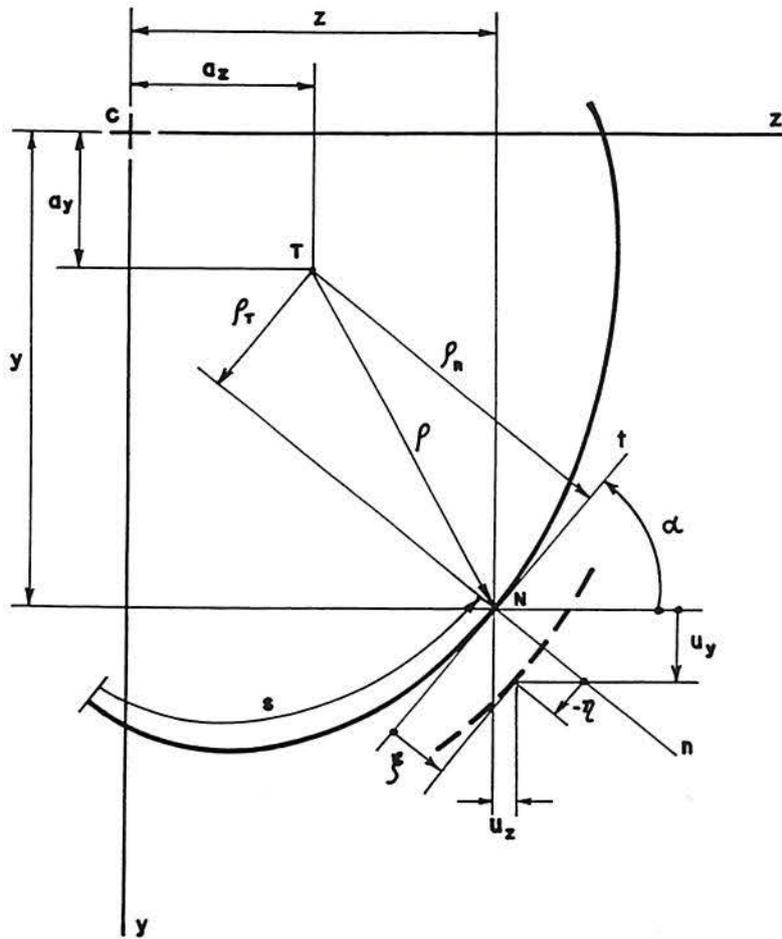


Figura 2.3 - Geometria da seção, coordenadas e componentes dos deslocamentos normal e tangencial.

Denotando-se a diferencial em relação a  $x$  com o primo, ou seja,  $(\ )' = d(\ )/dx$ , e multiplicando-se a equação (2.9) por  $ds$  e integrando, chega-se a

$$[u_x]_D^N = -\int_D^N u'_{yT} \frac{dy}{ds} ds - \int_D^N u'_{zT} \frac{dz}{ds} ds - \int_D^N \theta'_x \rho_n ds \quad (2.10)$$

como:

$\theta_x = \theta_x(x)$ ,  $u_{yT} = u_{yT}(x)$  e  $u_{zT}(x)$  a equação (2.10) fica

$$u_{xN}(x, y, z) = u_{xD} - u'_{yT}(y_N - y_D) - u'_{zT}(z_N - z_D) - \theta'_x W_{DN}^T \quad (2.11)$$

onde:

$$W_{DN}^T(s) = \int_D^N \rho_n ds \quad (2.12)$$

$W_{DN}^T(s)$  - área setorial do ponto N em relação ao pólo T e origem setorial D (figura 2.4).

Embora a origem C não esteja no contorno, o deslocamento longitudinal em C pode ser obtido em conexão com algum ponto da seção. Então, substituindo-se as coordenadas da equação (2.11) por aquelas na origem, resulta

$$u_{xC} = u_{xD} - y_D u'_{yT} + z_D u'_{zT} - W_{DC}^T \theta'_x \quad (2.13)$$

subtraindo-se a equação (2.13) da equação (2.11), obtém-se

$$u_x = u_{xC} - y u'_{yT} - z u'_{zT} - (W_{DN}^T - W_{DC}^T) \theta'_x \quad (2.14)$$

O caminho imaginário conectando C ao contorno, pode ser sempre escolhido de maneira que  $W_{DC}^T$  se anule e, conseqüentemente a equação (2.14) fica

$$u_x(x, y, z) = u_{xC} - y u'_{yT} - z u'_{zT} - W_{DN}^T \theta'_x \quad (2.15)$$

As equações (2.3) e (2.15) dão os deslocamentos de um ponto arbitrário N no contorno da seção em termos de  $x, y, z$  e  $\theta_x$  ou suas derivadas, para alguma localização de C, T e D consistente com as hipóteses da teoria técnica de vigas de parede fina. A equação (2.15) descreve a *Lei das Áreas Setoriais* para o deslocamento longitudinal  $u_x(x, s)$  de uma viga de seção transversal aberta e parede fina. Na equação (2.15)  $u_{xC}$  representa o deslocamento longitudinal para a origem da coordenada  $s$ . O deslocamento  $u_{xC}$  é independente de  $s$ , para uma dada seção ele representa um deslocamento uniforme para todos os pontos na direção  $x$ . O segundo e o terceiro termo do lado direito da equação (2.15) representam os deslocamentos longitudinais devido as rotações do plano da seção transversal através dos ângulos  $du_{yT}/dx$  e  $du_{zT}/dx$  sobre os eixos  $z$  e  $y$ . Estes termos, juntamente com  $u_{xC}$ , satisfazem a hipótese de Bernoulli-Navier na qual as seções inicialmente planas permanecem planas após a deformação. O empenamento é dado pelo termo  $-W_{DN}^T(d\theta_x/dx)$ . A quantidade  $\theta'_x(x) = d\theta_x/dx$  mede o ângulo de torção relativo e serve como medida do empenamento da seção. Vê-se que o deslocamento longitudinal dado pela

teoria técnica de vigas de Bernoulli-Navier e a teoria da torção de St. Venant pode ser considerado como caso particular, equação (2.15), da teoria de Vlasov.

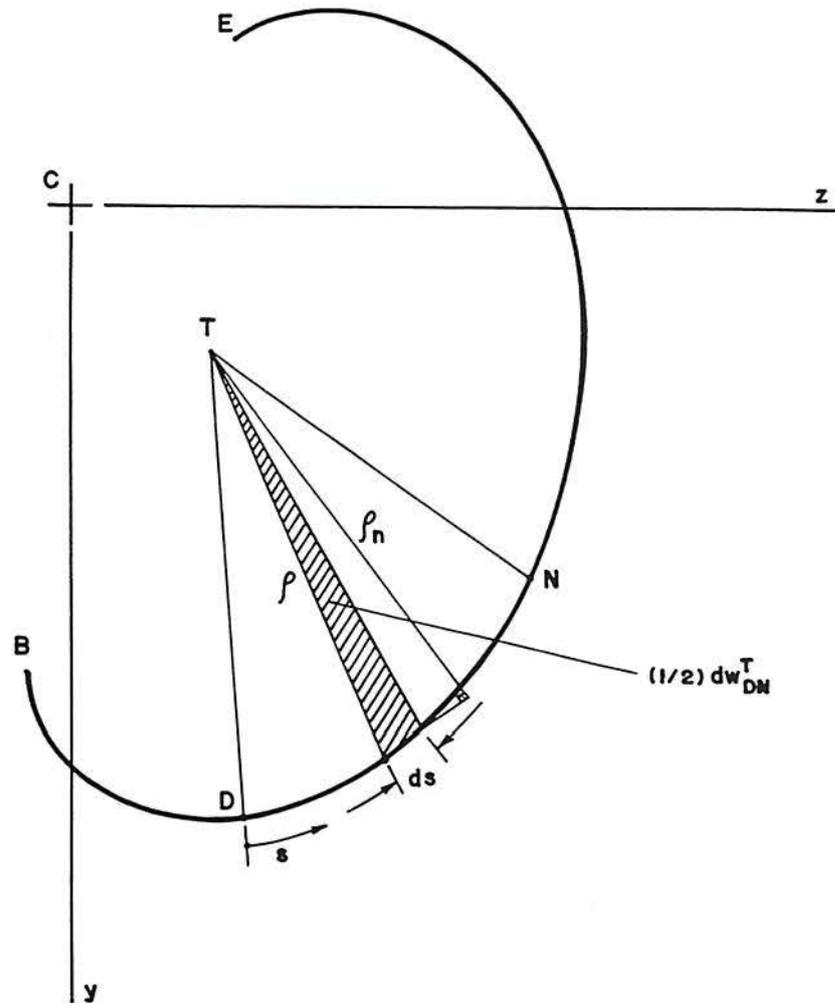


Figura 2.4 - Área setorial

### 2.2.3 - Relações Tensão-Deformações Generalizadas

A deformação linear axial  $\varepsilon_x$  está relacionada com as deformações generalizadas: deformação axial  $u'_x$ , curvaturas biaxiais,  $u''_y$ ,  $u''_z$  e a curvatura de empenamento  $\theta''_x$ , por

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = u'_{xC} - yu''_{yT} - zu''_{zT} - W_{DN}^T \theta''_x \quad (2.16)$$

onde  $u'_{xC}$ ,  $u'_{yT}$ ,  $u'_{zT}$  são os ângulos de rotação da seção transversal sobre os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Deve ser notado que os termos de segunda ordem foram negligenciados na equação (2.16). De acordo com Yang (1984) esta aproximação da teoria técnica de vigas, para pequenas deformações, é boa.

As resultantes de tensões  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  e  $B$  são consideradas positivas no sentido mostrado na figura 2.5.

Assume-se a partir daqui que o carregamento do elemento se restringirá às cargas nodais.

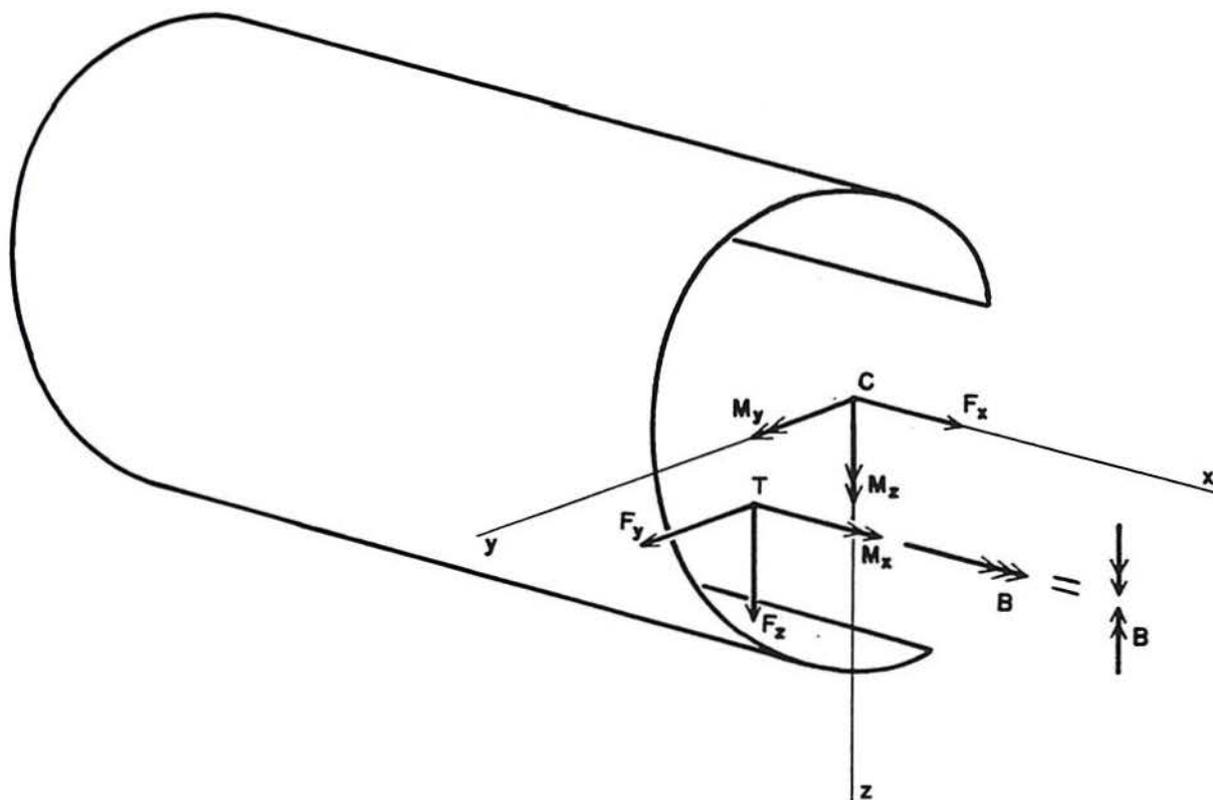


Figura 2.5 - Resultantes de Tensões

As resultantes de tensão estão relacionadas com as tensões por (Chen (1977), Yang (1986), Conci (1988)):

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_A \sigma_x dA \\
 F_y &= \int_A \tau_{yx} dA \\
 F_z &= \int_A \tau_{zx} dA \\
 M_x &= \int_A [\tau_{zx}(y - a_y) - \tau_{yx}(z - a_z)] dA \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\
 M_z &= - \int_A \sigma_x y dA \\
 B &= - \int_A \sigma_x W_{DN}^T dA
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nas relações acima, as resultantes de tensões na seção transversal se referem ao estado inicial da seção. Note-se que a força normal  $F_x$  e os momentos de flexão  $M_y$  e  $M_z$  são referidos ao centróide, enquanto as forças  $F_y$  e  $F_z$ , o momento torçor  $M_x$  e o bimomento  $B$  são referidos ao centro de cisalhamento. O uso de sete resultantes de tensão para vigas de paredes finas provém do fato de que as hipóteses de Vlasov atribuem ao elemento de viga sete graus de liberdade (Vlasov, 1961). A resultante de tensões  $B$  (bimomento) tem a dimensão de força multiplicada por área e representa um conjunto de forças auto-equilibradas. Alguns autores chamam esta resultante de momento de empenamento  $M_w$  (Chen, 1977).

Nas equações anteriores, os termos  $F_y$ ,  $F_z$  e  $M_x$ , são necessários ao equilíbrio do elemento, embora não sejam obtidos a partir da tensão longitudinal,  $\sigma_x$ . São, por este motivo, considerados reações e não tensões generalizadas (Chen, 1977).

O fato de  $M_x$  provir de uma equação de equilíbrio o torna empregável tanto para os casos em que o torque consiste de torção uniforme quanto de torção não uniforme (Vlasov, 1961).

A relação tensão-deformação para um material elástico é

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \tag{2.18}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal (“Young Modulus”).

Substituindo-se a equação (2.16) na equação (2.18), fica

$$\sigma_x = E (u'_{xC} - yu''_{yT} - zu''_{zT} - W_{DN}^T \theta''_x) \quad (2.19)$$

Substituindo-se a equação (2.19) na equação (2.17) obtém-se as relações entre as tensões generalizadas  $F_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  e  $B$  em termos das deformações generalizadas  $u'_{xC}$ ,  $u''_{yT}$ ,  $u''_{zT}$  e  $\theta''_x$  sobre os eixos de referência como

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ M_y \\ M_z \\ B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & MS_z & -MS_y & -MS_w \\ & I_y & -I_{yz} & -I_{wz} \\ & & I_z & I_{wy} \\ \text{Simétrica} & & & I_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_x \\ -u''_{zT} \\ u''_{yT} \\ \theta''_x \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

em que

$$A = \int_A dA$$

$$MS_y = \int_A y dA$$

$$MS_z = \int_A z dA$$

$$MS_w = \int_A W_{DN}^T dA \quad (2.21)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_w = \int_A (W_{DN}^T)^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

$$I_{wy} = \int_A y W_{DN}^T dA$$

$$I_{wz} = \int_A z W_{DN}^T dA$$

De forma análoga à terminologia utilizada na resistência dos materiais,  $MS_w$  é chamado de *Momento Estático Setorial* e  $I_{wy}$  e  $I_{wz}$  são chamados de *Produtos Setoriais de Inércia*, pois são propriedades geométricas relacionadas à área setorial.  $I_w$  é denominado *Momento Setorial de Inércia* ou *Momento de Inércia à Torção por Empenamento* (Vlasov, 1961, Chen, 1977). A notação  $C_w$  e a denominação *Constante de Empenamento* também é utilizada para a expressão de  $I_w$  (Timoshenko, 1961, Fung, 1965 e Conci, 1988).

As relações tensão-deformação generalizadas, equação (2.20), podem ser simplificadas se as funções  $1$ ,  $y$ ,  $z$  e  $W_{DN}^T$  satisfizerem as seguintes condições de ortogonalidade para as coordenadas generalizadas:

$$MS_y = MS_z = I_{yz} = MS_w = I_{wy} = I_{wz} = 0 \quad (2.22)$$

As três primeiras condições determinam os eixos principais centrais de inércia da seção. As duas últimas são usadas na determinação do pólo setorial principal, isto é, o centro de corte, para  $W_{DN}^T$ . A condição  $MS_w = 0$  é usada para determinar a área setorial principal ou área setorial normalizada  $W(s)$ :

$$W(s) = W_{DN}^T - \frac{1}{A} \int_A W_{DN}^T dA \quad (2.23)$$

em que a área setorial  $W_{DN}^T$  é determinada com uma origem arbitrária D.

Em outras palavras, se os pontos C e T forem respectivamente o centróide e o centro de cisalhamento então as funções básicas  $1$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  e  $W(s)$  que compõe as equações (2.21) são ortogonais. Estas coordenadas são chamadas Coordenadas Principais Generalizadas da seção transversal.

Escrevendo-se  $I_y$ ,  $I_z$  e  $I_w$  em relação às Coordenadas Principais Generalizadas tem-se:

$$F_x = EA u'_{xC} \quad (2.24)$$

$$M_y = -EI_y u''_{zT} \quad (2.25)$$

$$M_z = EI_z u''_{yT} \quad (2.26)$$

$$B = EI_w \theta_x'' \quad (2.27)$$

A tensão normal, equação (2.19), também pode ser expressa em termos destas coordenadas:

$$\sigma_x = (F_x / A) + (M_y / I_z)z - (M_z / I_y)y - (B / I_w)W \quad (2.28)$$

#### 2.2.4 - Estado de Tensões em Seções Abertas

Para descrever a distribuição de tensões em vigas de parede fina, estabelece-se em adição ao usual sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  um sistema de coordenadas curvilíneo ( $s$ ,  $n$ ), como mostra a figura 2.6. A coordenada tangencial  $s$  é medida ao longo da linha média da parede da viga sendo o sentido positivo contrário ao movimento dos ponteiros do relógio, e  $n$  está na direção normal a  $s$ , tendo sentido positivo para fora. Assumindo-se que as dimensões da seção transversal são constantes ao longo do eixo longitudinal da viga tal que  $s$  e  $n$  são independentes de  $x$  e  $x$ ,  $s$  e  $n$  formem um sistema tri-ortogonal.

Justifica-se a hipótese de a tensão normal  $\sigma_x$  ser essencialmente uniforme sobre a espessura, figura 2.6, e que as componentes de tensões e deformações normais a parede serem desprezíveis, pelo fato de  $t$  ser muito menor, comparado com as outras dimensões da seção transversal. Isto é,

$$\sigma_n = \tau_{xn} = \tau_{sn} = \varepsilon_n = \gamma_{xn} = \gamma_{sn} = 0 \quad (2.29)$$

Por isso somente a componente  $\tau_{xs}$  das tensões cortantes necessita ser calculada.

No caso de vigas de parede fina, estas tensões cortantes são desenvolvidas devido a dois modos distintos de deformação:

- deformação devido a torção pura da viga no qual todas as seções são livres de empenar e,

- deformação devido a uma flexão transversal da viga acoplada com as deformações axiais não uniformes.

O primeiro modo de deformação, como foi visto anteriormente, refere-se as tensões cortantes que variam linearmente sobre a espessura. Denota-se estas tensões pelo símbolo  $(\tau_{xy})_T$ . As tensões cortantes adicionais desenvolvidas durante o segundo modo de deformação são essencialmente uniformes sobre  $t$ . Estas tensões produzem um fluxo de corte  $q$ , que atua ao longo do contorno da seção. Portanto, a tensão cortante total em algum ponto é dado pela fórmula.

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_T + q / t \quad (2.30)$$

Similarmente, o momento torçor total desenvolvido em alguma seção é

$$M_x = T_{sv} + T_w \quad (2.31)$$

onde

$T_{sv}$  - momento devido a  $(\tau_{xy})_T$  e,

$T_w$  - momento devido a  $q$ .

O momento  $T_{sv}$  é chamado momento torçor uniforme ou de Saint-Venant uma vez que resulta das tensões oriundas da torção uniforme. Este momento é conhecido da resistência dos materiais e está relacionado com o ângulo de torção  $\theta_x(x)$ , pela fórmula.

$$T_{sv} = GJ \frac{d\theta}{dx} \quad (2.32)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal e  $J$  a constante torcional de Saint-Venant da seção.

Para seções abertas de paredes finas

$$J = \frac{1}{3} \int_B^E t^3 ds \quad (2.33)$$

onde  $t$  é a espessura da seção e a integração é feita do início B até o fim E da coordenada  $s$ .

A fórmula geral da constante de torção é (Fung, 1965 e Love, 1944):

$$J = \iint_A (y^2 + z^2 - y \frac{\partial \omega}{\partial z} + z \frac{\partial \omega}{\partial y}) dy dz \quad (2.34)$$

Para uma seção transversal com  $n$  elementos de parede fina, a constante torcional de Saint-Venant pode ser calculada por

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i^3}{3} \quad (2.35)$$

em que  $b_i$  e  $t_i$  são o comprimento e a espessura do  $i$ -ésimo elemento, respectivamente.

O momento  $T_w$  é chamado *momento torçor de empenamento* ou *momento torçor não-uniforme* visto que é resultante de tensões produzidas pela restrição ao empenamento.

Devido a isso, tensões normais adicionais  $\sigma_w$  e tensões de corte  $\tau_w$  são geradas. A tensão normal  $\sigma_w$  (figura 2.7), induzida pela restrição ao empenamento, é assumida nula na teoria da torção pura, onde a tensão cisalhante é considerada a única tensão existente na seção transversal. Esta tensão é dada pelo último termo da equação (2.19).

$$\sigma_w(x, s) = -E W(s) \theta_x''(x) \quad (2.36)$$

onde  $W(s)$  é a área setorial principal da seção transversal.

Na determinação da tensão cisalhante  $\tau_w$ , não é possível utilizar um procedimento análogo ao empregado na obtenção da tensão normal, ou seja, considerar as tensões proporcionais às deformações, pois as deformações cisalhantes são assumidas nulas. As equações de equilíbrio são empregadas ao invés da lei de Hooke.

Então, pelo equilíbrio de um elemento infinitesimal em um ponto  $N$  da linha do contorno (figura 2.7), obtém-se

$$\frac{\partial(\tau_w t(s))}{\partial s} = - \frac{\partial(\sigma_w t(s))}{\partial x} = E W(s) \theta_x'''(x) t(s) \quad (2.37)$$

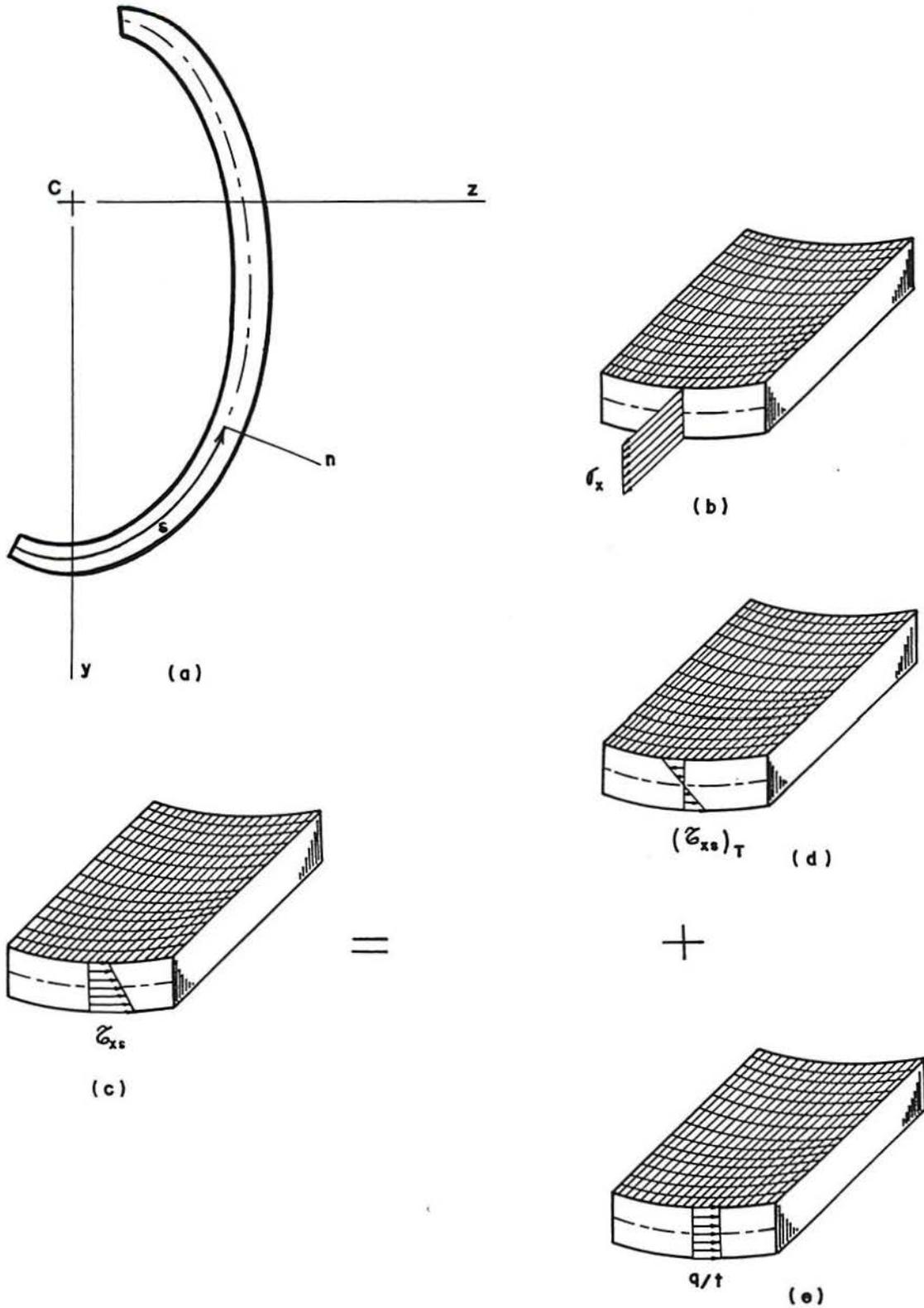


Figura 2.6 - (a) Sistema de coordenadas da seção transversal. Variação das (b) tensões normais e (c-e) tensões de corte sobre a parede da seção transversal aberta de uma viga de parede fina.

Integrando-se a equação anterior em  $s$ , tem-se

$$\tau_w t(s) = \tau_D t_D + E \theta_x'''(x) \int_0^s W(s) t(s) ds \quad (2.38)$$

onde  $\tau_D$  é a tensão cisalhante devida ao empenamento na origem D das coordenadas  $s$  e  $t_D$  é a espessura da seção em D. Se o ponto for uma extremidade da seção transversal então  $\tau_D = 0$ . Lembrando que  $t ds = dA$  e  $\int_A W dA = MS_w$ , a tensão cisalhante devida ao empenamento é:

$$\tau_w t = E \theta_x'''(x) \int_0^s W(s) dA = E \theta_x'''(x) MS_w \quad (2.39)$$

A componente torcional adicional  $T_w$  que surge devido a restrição ao empenamento pode então ser expressa como

$$T_w = \int_A \tau_w \rho dA = \int_C^D \tau_w t \rho ds \quad (2.40)$$

onde C e D denotam os pontos inicial e final da integração, respectivamente. Substituindo  $\tau_w t$  na equação (2.40), integrando por partes e levando-se em conta as relações (2.22), obtém-se

$$T_w = -E I_w \theta_x'''(x) \quad (2.41)$$

A equação (2.31) do momento de torção fica então, para o caso de torção concentrada, uma equação diferencial de terceira ordem:

$$M_x = GJ \theta_x'(x) - E I_w \theta_x'''(x) \quad (2.42)$$

Quando são utilizadas coordenadas generalizadas principais, observa-se que:

$$T_w = -B' \quad (2.43)$$

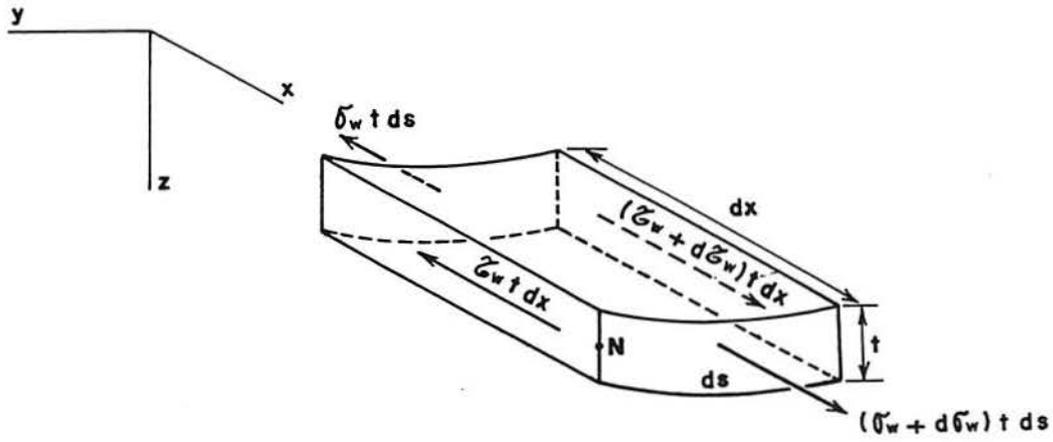


Figura 2.7 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal de uma viga de parede fina na direção  $x$ .

### 3 - DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Neste capítulo será derivada a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica para um elemento de viga-coluna com a consideração do efeito do empenamento da seção transversal. Posteriormente estas matrizes serão utilizadas em um programa, que emprega a *Formulação Lagrangeana Atualizada*, para a análise elástica não linear geométrica.

O desenvolvimento parte da equação fundamental do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* e usa procedimentos padrões do método dos elementos finitos. Como foi visto anteriormente, os momentos internos são representados como resultantes de tensões calculadas pelas teorias técnicas de vigas: Euler-Bernoulli-Navier para momentos fletores e Timoshenko-Vlasov para momentos torçores. O uso de teorias técnicas, em vez da Teoria da Elasticidade, são essenciais para a prática de projetos (Dym e Shames, 1973). Estas teorias são satisfatórias, exceto quando podem resultar em problemas relacionados com o comportamento de momentos fletores e torçores quando sofrem rotações finitas. Estes problemas são aqui também descritos.

Todo desenvolvimento para obtenção das referidas matrizes, bem como a notação empregada, segue àquela utilizada por Yang (1984, 1986).

A dedução das matrizes de rigidez elástica e geométrica, será feita mediante duas etapas:

1 - desenvolvimento de um conjunto de equações de equilíbrio incremental utilizando o princípio dos trabalhos virtuais e,

2 - redução destas equações para uma equação matricial através do uso de elementos finitos (Zienkiewicz, 1977).

#### 3.1 - Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais

A formulação Lagrangeana Atualizada (LA) será utilizada ao invés da formulação Lagrangeana Total (LT) por ser a primeira mais eficaz computacionalmente (Bathe e Bolourchi, 1974), e mais eficiente nos casos de rotação finita, pois as operações com ângulos referidos a configuração atualizada são menos sensíveis a erros (Tang et al., 1980).

A figura 3.1 mostra um elemento típico de viga-coluna em seu caminho de deformação. Como indicado, a configuração 0 ( $C_0$ ) representa o estado inicial indeformado, a configuração 1 ( $C_1$ ) é o estado de equilíbrio deformado corrente (conhecido); e a configuração 2 ( $C_2$ ) é um estado de equilíbrio deformado vizinho (desejado). A figura 3.1 também mostra os sistemas de coordenadas global e local.

Em uma formulação Lagrangeana Atualizada o estado de referência para cada elemento é sua última configuração calculada, ou seja,  $C_1$ . Na análise global, deslocamentos, cargas, e propriedades são referidas ao sistema de coordenadas cartesianas mostrado. A notação tensorial e nomenclatura utilizada na referência (Bathe, Ramm e Wilson, 1975) será adotada com pequena modificação. A descrição do movimento de um corpo é baseada nas três configurações  $C_0$ ,  $C_1$ , e  $C_2$ . Ambos sub-índices e super-índices esquerdos são usados para identificar estas configurações. Um super-índice denota a configuração em que a quantidade ocorre. A ausência de tal super-índice indica que a quantidade é um incremento entre  $C_1$  e  $C_2$ . Um sub-índice denota a configuração em que a quantidade é medida. Uma vírgula indica diferenciação em relação a coordenada seguinte; então, por exemplo,

$${}^2_0 u_{i,j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial^0 x_j} \quad (3.1)$$

A aplicação conveniente do princípio dos trabalhos virtuais requer que o equilíbrio do corpo seja expresso na forma deformada  $C_2$ :

$$\int_{2_V} {}^2 \tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2 dV = {}^2 R \quad (3.2)$$

em que  ${}^2 R =$  expressão do trabalho virtual externo

$${}^2 R = \int_{2_A} {}^2 t_k \delta u_k {}^2 dA \quad (3.3)$$

se as forças de volume são desprezadas.

Nas equações (3.2) e (3.3),

${}^2\tau_{ij}$  - componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy,

$\delta_2 e_{ij}$  - variação (virtual) do tensor de deformação linear ou de Almansi,

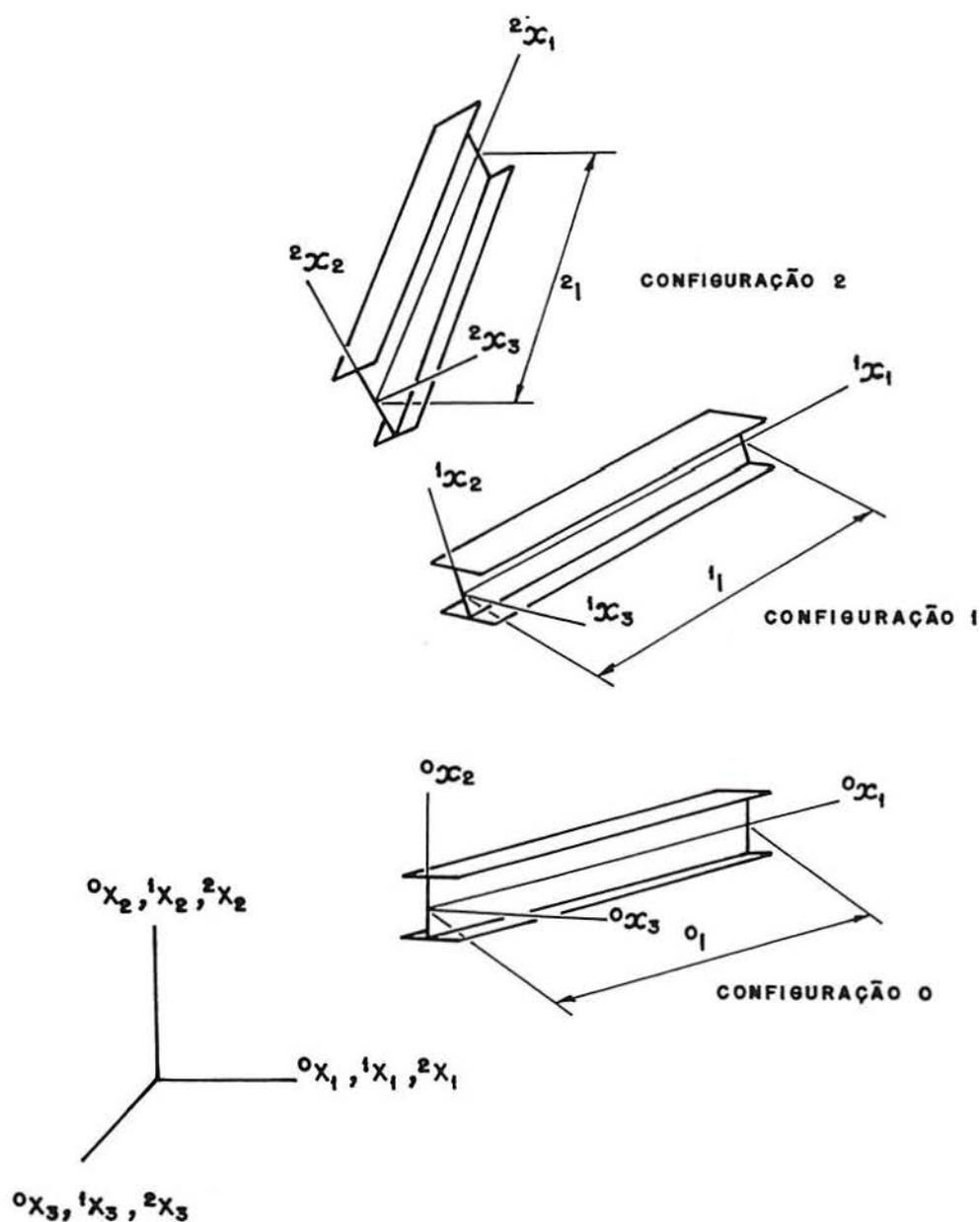


Figura 3.1 - Movimento de uma viga tri-dimensional e seu sistema de coordenadas.

${}^2t_k$  – componente das forças de superfície em  $C_2$ ,

$\delta u_k$  - variação virtual das componentes dos deslocamentos em  $C_2$ ,

### 3.2 - A formulação Lagrangeana Atualizada (LA)

A equação (3.2) não pode ser resolvida diretamente já que  $C_2$  é desconhecido. A solução pode ser obtida referindo todas as variáveis a uma configuração de equilíbrio conhecida previamente calculada. Para este propósito, em princípio, uma configuração de equilíbrio já calculada deve ser usada. Na prática, todavia, a referência (Bathe, Ramm e Wilson, 1975) mostra que, em uma formulação LA, a equação (3.2) pode ser transformada em uma forma incremental e então linearizada nos deslocamentos incrementais resultando em

$$\int_{1V} {}_1C_{ijkl} {}_1e_{kl} \delta_1 e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} {}^1dV = {}^2R - {}^1R \quad (3.4)$$

em que

$${}^2R = \int_{1A} {}^2t_k \delta u_k {}^1dA \quad (3.5a)$$

e

$${}^1R = \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta e_{ij} {}^1dV \quad (3.5b)$$

onde

${}_1C_{ijkl}$  – componentes do tensor de constantes elásticas,

${}_1e_{ij}$  – componentes lineares do tensor de tensões de deformações incrementais de Green-Lagrange,

${}_1\eta_{ij}$  – componentes não-lineares do tensor de deformações incrementais de Green-Lagrange,

${}^1\tau_{ij}$  – componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy em  $C_1$  e,

${}^2_1 t_k$  – forças de superfície em  $C_2$  mas medido em  $C_1$ .

A equação (3.5b) representa o trabalho virtual interno efetuado pelas tensões do elemento no estado de equilíbrio  $C_1$  (Bathe e Bolourchi, 1979). Para um corpo em equilíbrio, o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo feito pelas cargas de superfície na mesma configuração. Isto pode ser também obtido diretamente da equação (3.2) substituindo-se todos os sub-índices e super-índices 2 do lado esquerdo por 1.

As equações de equilíbrio incrementais da viga foram dadas em relação ao sistema de coordenadas globais ( ${}^1X_1, {}^1X_2, {}^1X_3$ ). Todavia, usando a técnica dos elementos finitos, é mais efetivo calcular primeiro as matrizes do elemento finito em relação ao sistema de coordenadas locais ( ${}^1x_1, {}^1x_2, {}^1x_3$ ), que são os eixos principais centrais de inércia, do elemento (figura 3.1), e então transformá-lo para o sistema de coordenadas globais para posterior montagem da matriz de rigidez global, conforme referências: Bazant et al. (1973), Gere e Weaver (1981) e Santos (1981).

Por esta razão, as equações de equilíbrio incremental e as correspondentes equações de rigidez serão referidas às coordenadas locais. Por conveniência, o sistema global será denotado como  $(X, Y, Z)$  e o sistema local em  $C_1$ , como  $(x, y, z)$ .

Na teoria técnica de vigas tridimensionais,  ${}^1\tau_{22} = {}^1\tau_{33} = {}^1\tau_{23} = 0$ ,  ${}^1\tau_{12} = {}^1\tau_{21}$  e  ${}^1\tau_{13} = {}^1\tau_{31}$ . Então há somente três componentes de tensões independentes,  ${}^1\tau_{11}$ ,  ${}^1\tau_{12}$  e  ${}^1\tau_{13}$ , e três componentes de deformações independentes (incrementos),  ${}^1\varepsilon_{11}$ ,  ${}^1\varepsilon_{12}$  e  ${}^1\varepsilon_{13}$ . Se a seguinte notação é usada para tensões e deformações:

$$\sigma_x = {}^1\tau_{11}$$

$$\tau_{yx} = {}^1\tau_{12} \tag{3.6}$$

$$\tau_{zx} = {}^1\tau_{13}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= {}_1\varepsilon_{11} = e_{xx} + \eta_{xx} = {}_1e_{11} + {}_1\eta_{11} \\ \gamma_{xy} &= 2{}_1\varepsilon_{12} = (e_{yx} + \eta_{yx}) = 2({}_1e_{12} + \eta_{12}) \\ \gamma_{zx} &= 2{}_1\varepsilon_{13} = (e_{zx} + \eta_{zx}) = 2({}_1e_{13} + \eta_{13})\end{aligned}\quad (3.7)$$

onde:

$[{}^1\tau]$  - vetor de tensões de Cauchy

$[{}_1e]$  - vetor de deformação linear

$[{}_1\eta]$  - vetor de deformação não linear

as tensões e deformações podem ser escritas como (Bathe e Bolourchi, 1979):

$$\begin{aligned} [{}^1\tau] &= \{\sigma_x \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx}\} \\ [{}_1e] &= \{e_{xx} \quad e_{yx} \quad e_{zx}\} \\ [{}_1\eta] &= \{\eta_{xx} \quad \eta_{yx} \quad \eta_{zx}\}\end{aligned}\quad (3.8)$$

A matriz de constantes elásticas  $\{{}_1C\}$  pode ser expressa como (Washizu, 1961):

$$\{{}_1C\} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}\quad (3.9)$$

Introduzindo-se as equações (3.8) e (3.9) na equação (3.4), a equação de equilíbrio dos trabalhos virtuais para uma viga tridimensional, baseado na formulação Lagrangeana Atualizada (LA), assume a forma

$$\begin{aligned} &\int_V (E e_{xx} \delta e_{xx} + G e_{yx} \delta e_{yx} + G e_{zx} \delta e_{zx}) dV + \\ &\int_V [\sigma_x \delta \eta_{xx} + \tau_{yx} \delta \eta_{yx} + \tau_{zx} \delta \eta_{zx}] dV = {}^2R - {}^1R\end{aligned}\quad (3.10)$$

em que os super-índices de  $V$  e  $dV$  e os sub-índices para  ${}^2R$  e  ${}^1R$  foram suprimidos, já que é conhecido que todas as variáveis desta equação foram expressas em relação as coordenadas conhecidas da configuração 1.

A equação de equilíbrio (3.10) pode ser usada como base para a formulação não linear do elemento finito. Da primeira integral desta equação, obtém-se a matriz de rigidez linear, enquanto da segunda integral deriva-se a matriz de rigidez geométrica ou matriz das tensões iniciais (Bathe et al., 1975, Bathe e Bolourchi, 1979).

As componentes linear e não linear das deformações são expressas como

$$\begin{aligned} e_{xx} &= u_{x,x} \\ e_{yx} &= u_{x,y} + u_{y,x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$e_{zx} = u_{x,z} + u_{z,x}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= \frac{1}{2}(u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) \\ \eta_{yx} &= u_{x,y} u_{x,x} + u_{y,y} u_{y,x} + u_{z,y} u_{z,x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\eta_{zx} = u_{x,z} u_{x,x} + u_{y,z} u_{y,x} + u_{z,z} u_{z,x}$$

onde  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  são os deslocamentos incrementais de um ponto arbitrário N no contorno da seção, referida à configuração  $C_1$ , ao longo dos eixos x, y e z respectivamente.

Substituindo-se as equações (3.11) e (3.12) na equação (3.10), a equação do trabalho virtual fica

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_v \{ E \delta(u_{x,x}^2) + G \delta[(u_{x,y} + u_{y,x})^2 + (u_{x,z} + u_{z,x})^2] \} dV + \\ &\frac{1}{2} \int_v \{ \sigma_x \delta(u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) + \tau_{yx} \delta(u_{x,y} u_{x,x} + u_{z,y} u_{z,x}) + \tau_{zx} \delta(u_{x,z} u_{x,x} + u_{z,z} u_{z,x}) \} dV = {}^2R - {}^1R \end{aligned} \quad (3.13)$$

como  $u_{y,y} = u_{z,z} = 0$ , eliminou-se estes termos da equação (3.13). Na equação (3.13) o termo contendo o quadrado da derivada de  $u_x$  na deformação axial não linear será desprezado como usual\*.

Os termos contendo os produtos de derivadas de  $u_x$  nas deformações de cortes, isto é,  $u_{x,y}u_{x,x}$  e  $u_{x,z}u_{x,x}$ , podem ser de magnitude significativa e são, de acordo com Yang (1984), preservados.

Os deslocamentos longitudinais e os deslocamentos transversais para um ponto N da seção transversal, figura 2.3, pode ser obtido das equações (2.3) e (2.15) como:

$$u_x = u_{xC} - yu'_{yT} - zu'_{zT} - W\theta'_x \quad (3.14)$$

e

$$u_y = u_{yT} - (z - a_z)\theta_x \quad (3.15)$$

$$u_z = u_{zT} + (y - a_y)\theta_x$$

onde  $W(y,z)$  representa a área setorial principal, e indica que o deslocamento tratado se refere ao deslocamento do centro de corte da seção.

Sabendo-se que:

$u_{xC} = u_{xC}(x)$ ,  $u_{yT} = u_{yT}(x)$ ,  $u_{zT} = u_{zT}(x)$ ,  $\theta_x = \theta_x(x)$  e  $W = W(y,z)$ , acha-se de imediato as derivadas de  $u_x(x,y,z)$  dadas abaixo:

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= u'_{xC} - yu''_{yT} - zu''_{zT} - W\theta''_x \\ u_{x,y} &= -u'_{yT} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\theta'_x \\ u_{x,z} &= -u'_{zT} - \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)\theta'_x \\ u_{y,x} &= u'_{yT} - (z - a_z)\theta'_x \end{aligned} \quad (3.16)$$

\*  $\frac{1}{2} (du_x/dx)$  é desprezado da expressão de  $n_{xx}$  já que para deformações incrementais pequenas este termo é desprezível em comparação com os outros dois (Washizu (1961), Dym e Shames (1973)).

$$\begin{aligned}
u_{y,y} &= 0 \\
u_{y,z} &= -\theta_x \\
u_{z,x} &= u'_{zT} + (y - a_y)\theta'_x \\
u_{z,y} &= \theta_x \\
u_{z,z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo-se as equações (3.16) na equação (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_V \{E \delta(u'_{xC} - zu''_{yT} - yu''_{zT} - W\theta''_x)^2 + G \delta[-(\partial W / \partial y)\theta'_x - (z - a_z)\theta'_x]^2 \\
& + [-(\partial W / \partial z)\theta'_x + (y - a_y)\theta'_x]^2\} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \delta\{[u'_{yT} - (z - a_z)\theta'_x]^2 \\
& + [u'_{zT} + (y - a_y)\theta'_x]^2\} dV \\
& + \int_V \tau_{yx} \delta\{-u'_{yT} - (\partial W / \partial y)\theta'_x\}(u'_{xC} - zu''_{yT} - yu''_{zT} - W\theta''_x) \\
& + [u'_{zT} + (y - a_y)\theta'_x]\theta_x\} dV \\
& + \int_V \tau_{zx} \delta\{-u'_{zT} - (\partial W / \partial z)\theta'_x\}(u'_{xC} - zu''_{yT} - yu''_{zT} - W\theta''_x) \\
& + [u'_{yT} + (z - a_z)\theta'_x]\theta_x\} dV = [\delta u]([{}^2f]^T - [{}^1f]^T)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde  $[\delta u]$  é a variação dos deslocamentos nos nós, em que

$$[u] = \{u_{xA} \ u_{yA} \ u_{zA} \ \theta_{xA} \ \theta_{yA} \ \theta_{zA} \ u_{xB} \ u_{yB} \ u_{zB} \ \theta_{xB} \ \theta_{yB} \ \theta_{zB}\} \tag{3.18}$$

$[{}^2f]$  é o vetor de forças nodais no fim do passo,

$$[{}^2f] = \{{}^2F_{xA} \ {}^2F_{yA} \ {}^2F_{zA} \ {}^2M_{xA} \ {}^2M_{yA} \ {}^2M_{zA} \ {}^2B_A \ {}^2F_{xB} \ {}^2F_{yB} \ {}^2F_{zB} \ {}^2M_{xB} \ {}^2M_{yB} \ {}^2M_{zB} \ {}^2B_B\} \tag{3.19a}$$

e  $[{}^1f]$  é o vetor de forças nodais no início do passo,

$$[{}^1f] = \{ {}^1F_{xA} \ {}^1F_{yA} \ {}^1F_{zA} \ {}^1M_{xA} \ {}^1M_{yA} \ {}^1M_{zA} \ {}^1B_A \ {}^1F_{xB} \ {}^1F_{yB} \ {}^1F_{zB} \ {}^1M_{xB} \ {}^1M_{yB} \ {}^1M_{zB} \ {}^1B_B \} \quad (3.19b)$$

Tanto  $[{}^2f]$  como  $[{}^1f]$  são referidas às coordenadas de  $C_1$ .

Negligenciando-se os termos de ordem superior contendo (Yang, 1984),

$$(\theta_x \ \theta'_x), (u'_y \ u''_y), (u'_z \ u''_z), (u'_y \ \theta''_x), (u'_z \ \theta''_x), (u'_x \ \theta'_x), (u'_z \ \theta'_x), (u''_y \ \theta'_x) \text{ e } (\theta'_x \ \theta''_x),$$

adotando-se as condições de ortogonalidade (2.22) para as coordenadas generalizadas principais e efetuando-se os produtos e potências a equação (3.17) fica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E \delta \int_V [(u'_{xC})^2 + z^2 (u''_{zT})^2 + y^2 (u''_{yT})^2 + W^2 (\theta'_x)^2] dV \\ & + \frac{1}{2} G \delta \int_V [(z - a_z)^2 + (y - a_y)^2 + 2(z - a_z) (\partial W / \partial y) \\ & - 2(y - a_y) (\partial W / \partial z) + (\partial W / \partial y)^2 + (\partial W / \partial z)^2] (\theta_x'^2) dV \\ & + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x [\delta (u_{yT}'^2 - 2(z - a_z) u'_{yT} \theta'_x + (z - a_z)^2 \theta_x'^2) \\ & + \delta (u_{zT}'^2 + 2(y - a_y) u'_{zT} \theta'_x + (y - a_y)^2 \theta_x'^2)] dV \\ & + \int_V [\tau_{yx} \delta (\theta_x u'_{zT}) - \tau_{zx} \delta (\theta_x u'_{yT})] dV + \int_V [\tau_{yx} z \delta (u'_{yT} u''_{zT})] dV \\ & + \int_V [\tau_{zx} y \delta (u'_{zT} u''_{yT})] dV - \int_V [\tau_{yx} \delta (u'_{yT} u'_{xC})] dV - \int_V [\tau_{zx} \delta (u'_{zT} u'_{xC})] dV = \\ & \delta [u] ([{}^2f] - [{}^1f]) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se a seção transversal do elemento é constante, e baseando-se em considerações de equilíbrio, as resultantes de tensões de uma seção transversal de um elemento, referido a configuração indeformada da seção, é dada pelas equações (2.17).

Utilizando-se as expressões (2.17), obtém-se a seguinte equação em termos das coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l [EA \delta(u'_{xc})^2 + EI_y \delta(u''_{zT})^2 + EI_z \delta(u''_{yT})^2 + EC_w \delta(\theta_x''^2) \\
& + GJ \delta(\theta_x'^2)] dx + \int_0^l F_x \delta(u'_{yT} a_z \theta'_x - u'_{zT} a_y \theta'_x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{K} \delta(\theta_x'^2) dx \\
& - \int_0^l M_x (1 - \alpha) \delta(u'_{yT} u''_{zT}) dx - \int_0^l [F_y \delta(u'_{yT} u'_{xc}) + F_z \delta(u'_{zT} u'_{xc})] dx \\
& + \int_0^l [F_y \delta(u'_{zT} \theta'_x)] dx - \int_0^l [F_z \delta(u'_{yT} \theta'_x)] dx + \int_0^l (F_x / 2) \delta(u_{yT}^2 + u_{zT}^2) dx \\
& - \int_0^l M_y \delta(u'_{yT} \theta'_x) dx - \int_0^l M_z \delta(u'_{zT} \theta'_x) dx \\
& + \int_0^l M_x \alpha \delta(u''_{yT} u'_{zT}) dx = \delta[u]([{}^2f]{}^T - [{}^1f]{}^T) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

onde  $\bar{K}$  é o coeficiente de Wagner que define o incremento torcional causado pela deformação de empenamento da seção transversal (Chen, 1977):

$$\bar{K} = \int_A \sigma_x [(z - a_z)^2 + (y - a_y)^2] dA \quad (3.22)$$

Empregando-se as coordenadas generalizadas principais, juntamente com a equação (2.27), e substituindo-se na expressão acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\bar{K} &= \int_A [F_x / A + (M_y / I_y) z - (M_z / I_z) y - (B_w / I_w) W] \\
& [(y - a_y)^2 + (z - a_z)^2] dA = F_x [((I_y + I_z) / A) + a_{yT}^2 + a_{zT}^2] \\
& + M_y [(1 / I_y) (\int_A z y^2 dA + \int_A z^3 dA - 2a_{zT})] \\
& - M_z [(1 / I_z) (\int_A y^3 dA + \int_A y z^2 dA - 2a_{yT})] \\
& - B(1 / I_w) (\int_A W y^2 dA + \int_A W z^2 dA) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

fazendo-se

$$\begin{aligned}\beta_y &= (1 / I_y) (\int_A z y^2 dA + \int_A z^3 dA - 2a_{zT}) \\ \beta_z &= (1 / I_z) (\int_A y^3 dA + \int_A y z^2 dA - 2a_{yT}) \\ \beta_w &= (1 / I_w) (\int_A W y^2 dA + \int_A W z^2 dA)\end{aligned}\quad (3.24)$$

onde  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  e  $\beta_w$  são chamadas de constantes geométricas da seção transversal (Chen e Blandford, 1991).

Substituindo-se as expressões (3.24) na equação (3.23) o coeficiente de Wagner fica expresso como:

$$\bar{K} = F_x [((I_y + I_z) / A) + a_{yT}^2 + a_{zT}^2 + M_y \beta_y - M_z \beta_z - B \beta_w] \quad (3.25)$$

O parâmetro  $\alpha$  é definido como taxa do momento total  $M_x$ , resistido por  $\tau_{zx}$  ou

$$\alpha = \int_A (\tau_{zx} y / M_x) dA = 1 - \int_A (-\tau_{yx} z / M_x) dA \quad (3.26)$$

Na obtenção da equação (3.21), as seguintes propriedades da seção transversal foram usadas:

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad e \quad I_w = \int_A W^2 dA \quad (3.27)$$

Em particular, a constante torcional de Saint Venant,  $J$ , foi reconhecida por Love, em 1927, no seu clássico livro como:

$$J = \int_A [z^2 + y^2 + z(\partial w / \partial y) - y(\partial w / \partial z)] dA \quad (3.28)$$

ou

$$J = \int_A [z^2 + y^2 + 2z(\partial w / \partial y) - 2y(\partial w / \partial z) + (\partial w / \partial y)^2 + (\partial w / \partial z)^2] dA \quad (3.29)$$

baseado na identidade

$$\int_A [(\partial w / \partial y)^2 + (\partial w / \partial z)^2] dA = - \int_A [z(\partial w / \partial y) - y(\partial w / \partial z)] dA \quad (3.30)$$

### 3.3 - Formulação por elementos finitos

O elemento estudado é o mostrado na figura 3.2, em que as coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$  são escolhidas de tal maneira que passem sobre os centros de corte  $T$  e  $T'$  do elemento, antes da deformação, e são paralelos aos eixos principais centrais  $x$ ,  $y$  e  $z$  da seção transversal do elemento. Seja

$u_x$  - deslocamento longitudinal ao longo do eixo axial  $CC'$ ,

$u_y$  - deslocamento do centro de corte, na direção de  $y$ ,

$u_z$  - deslocamento do centro de corte, na direção de  $z$ ,

$\theta_x$  - ângulo de torção sobre o centro de corte e,

$\theta_y$  e  $\theta_z$  - ângulo de rotação sobre os eixos  $y$  e  $z$  respectivamente.

Tal sistema de coordenadas desacopla deslocamentos e rotações, bem como satisfaz as condições de ortogonalidade (2.22) usadas para derivação da equação de equilíbrio incremental (3.21).

A figura (3.2) indica os sentidos positivos para os deslocamentos e forças nodais. O sentido positivo do empenamento e do bimomento é representada por setas duplas contrárias, estabelecendo uma relação direta com o sentido do empenamento e dos momentos que causam o bimomento. Observe-se que o empenamento não tem correspondência com o sentido positivo do bimomento como esforço interno da convenção utilizada na teoria de vigas de paredes finas.

Os sub-índices  $C$  e  $T$  utilizados nos deslocamentos foram suprimidos por simplicidade.

Um campo de deslocamento linear é adotado para o deslocamento axial,  $u_x$ , e um campo de deslocamentos cúbicos para os deslocamentos  $u_y$ ,  $u_z$  e  $\theta_x$ , ambos satisfazendo os critérios de convergência (Zienkiewicz, 1977) e (Chen, 1977). A escolha destas funções foi sugerida pela solução exata dos deslocamentos axiais e de flexão. Então, pode-se escrever os deslocamentos  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  e o giro  $\theta_x$  no interior do elemento em função dos deslocamentos dos nós através das relações:

$$u_x = [n_1][\tilde{u}_x]^T \quad (3.31)$$

$$u_y = [n_3][\tilde{u}_y]^T \quad (3.32)$$

$$u_z = [n_3][\tilde{u}_z]^T \quad (3.33)$$

$$\theta_x = [n_3][\tilde{\theta}_x]^T \quad (3.34)$$

onde  $[n_1]$  e  $[n_3]$  são as funções de interpolação

$$[n_1] = \{(i-1) \quad i\} \quad (3.35)$$

$$[n_3] = \{(1-3i^2+2i^3) \quad (i-2i^2+i^3) \quad (3i^2-2i^3) \quad (i^3-i^2)\} \quad (3.36)$$

e

$$i = x/\ell \quad (3.37)$$

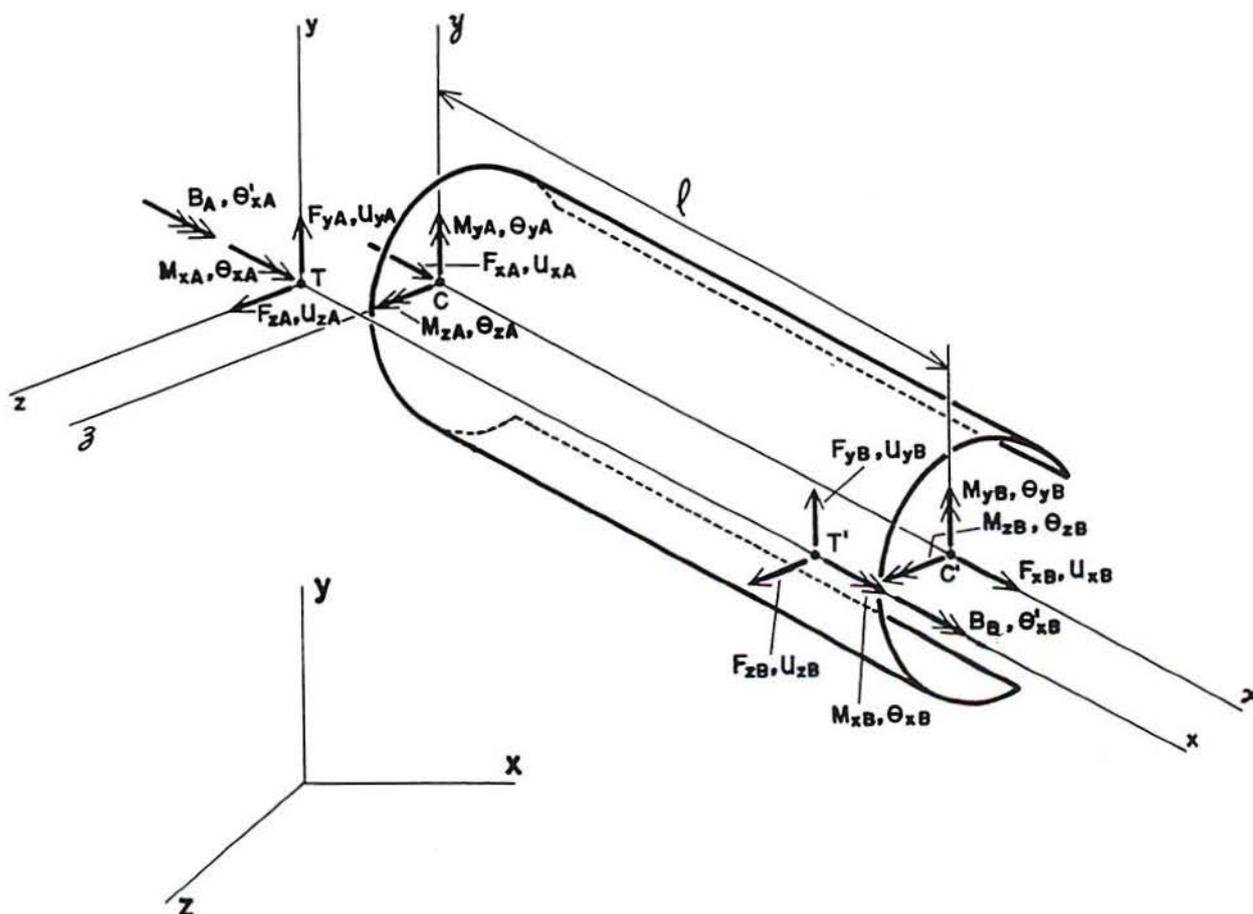


Figura 3.2 - Tensões, deslocamentos e coordenadas generalizadas do elemento.

Os graus de liberdade nodais, isto é, os deslocamentos incrementais nos nós A e B do elemento são, como indica a figura 3.2:

$$[\tilde{u}_x] = \{u_{xA} \quad u_{xB}\} \quad (3.38)$$

$$[\tilde{u}_y] = \{u_{yA} \quad \ell\theta_{zA} \quad u_{yB} \quad \ell\theta_{zB}\} \quad (3.39)$$

$$[\tilde{u}_z] = \{u_{zA} \quad -\ell\theta_{yA} \quad u_{zB} \quad -\ell\theta_{yB}\} \quad (3.40)$$

$$[\tilde{\theta}_x] = \{\theta_{xA} \quad \ell\theta'_{xA} \quad \theta_{xB} \quad \ell\theta'_{xB}\} \quad (3.41)$$

As correspondentes forças nodais são mostradas na figura 3.2.

As tensões resultantes em  $C_1$  na seção  $x$  do elemento pode ser expressa em termos das forças nodais como:

$$F_x = F_{xB} \quad (3.42)$$

$$F_y = -(M_{zA} + M_{zB}) / \ell \quad (3.43)$$

$$F_z = (M_{yA} + M_{yB}) / \ell \quad (3.44)$$

$$M_x = M_{xB} \quad (3.45)$$

$$M_y = -M_{yA}(1 - x / \ell) + M_{yB}(x / \ell) \quad (3.46)$$

$$M_z = -M_{zA}(1 - x / \ell) + M_{zB}(x / \ell) \quad (3.47)$$

$$B = -B_A(1 - x / \ell) + B_B(x / \ell) \quad (3.48)$$

enquanto o coeficiente de Wagner é (equação 3.25):

$$\bar{K} = F_x [(I_y + I_z) / A] + a_{yT}^2 + a_{zT}^2 + M_y \beta_y - M_z \beta_z - B \beta_w \quad (3.49)$$

Nas expressões acima foi utilizada uma variação linear, na aproximação por elementos finitos para os momentos fletores e para o bimomento. A variação real do bimomento ao longo da viga é hiperbólica (Conci, 1988).

Substituindo-se as expressões (3.38) a (3.41) para deslocamentos incrementais e as expressões (3.42) a (3.49) para tensões resultantes na equação (3.21), obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos nodais e forças nodais:

$$\begin{aligned}
& [\delta u_x] \left\{ \int_0^1 \left( \frac{EA}{\ell} \right) [n'_1]^T [n'_1] di [u_x]^T + \int_0^1 \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell^2} \right) [n'_1]^T [n'_3] di [u_y]^T \right. \\
& \left. - \int_0^1 \left( \frac{M_{yA} + M_{yB}}{\ell^2} \right) [n'_1]^T [n'_3] di [u_z]^T \right\} + \\
& [\delta u_y] \left\{ \left[ \int_0^1 \left( \frac{EI_z}{\ell^3} \right) [n'_3]^T [n'_3] di + \int_0^1 \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \right] [u_y]^T \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell^2} \right) [n'_3]^T [n'_1] di [u_x]^T + \left[ - \int_0^1 \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) (1 - \alpha) [n'_3]^T [n'_3] di \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) \alpha [n'_3]^T [n'_3] di \left. \right] [u_z]^T + \left[ \int_0^1 \left( \frac{M_{yA} + M_{yB}}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{yA}}{\ell} \right) (1 - i) [n'_3]^T [n'_3] di - \int_0^1 \left( \frac{M_{yB}}{\ell} \right) i [n'_3]^T [n'_3] di \\
& \left. + \int_0^1 \left( \frac{a_z}{\ell} \right) F_{xB} [n'_3]^T [n'_3] di \right] [\theta_x^T] \left. \right\} \\
& + [\delta u_z] \left\{ \left[ \int_0^1 \left( \frac{EI_y}{\ell^3} \right) [n'_3]^T [n'_3] di + \int_0^1 \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \right] [u_z]^T \right. \\
& - \int_0^1 \left( \frac{M_{yA} + M_{yB}}{\ell^2} \right) [n'_3]^T [n'_1] di [u_x]^T + \left[ - \int_0^1 \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) (1 - \alpha) [n'_3]^T [n'_3] di \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) \alpha [n'_3]^T [n'_3] di \left. \right] [u_y]^T + \left[ - \int_0^1 \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left( \frac{M_{zA}}{\ell} \right) (1 - i) [n'_3]^T [n'_3] di - \int_0^1 \left( \frac{M_{zB}}{\ell} \right) i [n'_3]^T [n'_3] di - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \frac{a_y}{\ell} \right) F_{xB} [n'_3]^T [n'_3] di \left] [\theta_x^T] \right\} \\
& [\delta\theta_x] \left\{ \left[ - \int_0^1 \left( \frac{EI_x}{\ell^3} \right) [n''_3]^T [n''_3] di + \int_0^1 \left( \frac{GJ}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \right. \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) \left[ \left( \frac{I_y + I_z}{A} \right) + a_y^2 + a_z^2 \right] [n'_3]^T [n'_3] di \\
& + \int_0^1 (-M_{xA}(1-i) + M_{yB}i) \left( \frac{\beta_y}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \\
& - \int_0^1 (-M_{zA}(1-i) + M_{zB}i) \left( \frac{\beta_z}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \\
& - \int_0^1 (B_A(1-i) + B_B i) \left( \frac{\beta_w}{\ell} \right) [n'_3]^T [n'_3] di \left. \right] [\delta\theta_x]^T \\
& + \left[ - \int_0^1 \left( \frac{M_{xA} + M_{yB}}{\ell} \right) [n_3]^T [n'_3] di \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{yA}}{\ell} \right) (1-i) [n'_3]^T [n'_3] di - \int_0^1 \left( \frac{M_{yB}}{\ell} \right) i [n'_3]^T [n'_3] di \\
& + \int_0^1 \left( \frac{a_z}{\ell} \right) F_{xB} [n'_3]^T [n'_3] di \left. \right] [u_y]^T + \left[ - \int_0^1 \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell} \right) [n_3]^T [n'_3] di \right. \\
& + \int_0^1 \left( \frac{M_{zA}}{\ell} \right) (1-i) [n'_3]^T [n'_3] di - \int_0^1 \left( \frac{M_{zB}}{\ell} \right) i [n'_3]^T [n'_3] di \\
& \left. - \int_0^1 \left( \frac{a_y}{\ell} \right) F_{xB} [n'_3]^T [n'_3] di \right] [u_z]^T \left. \right\} = \\
& [\delta u_x] ([{}^2F_x]^T - [{}^1F_x]^T) + [\delta u_y] ([{}^2F_y]^T - [{}^1F_y]^T) + [\delta u_z] ([{}^2F_z]^T - [{}^1F_z]^T) + \\
& [\delta\theta_x] ([{}^2M_x]^T - [{}^1M_x]^T) \tag{3.50}
\end{aligned}$$

onde o símbolo “~” acima do vetor de deslocamentos foi retirado por simplicidade.

Os vetores de deslocamentos virtuais no lado direito da equação (3.50) são simplesmente variações dos deslocamentos nodais dadas nas equações (3.38) a (3.41). Os vetores de forças são

$$[{}^2F_x] = \{ {}^2F_{xA} \quad {}^2F_{xB} \} \quad (3.51)$$

$$[{}^2F_y] = \{ {}^2F_{yA} \quad {}^2M_{zA} / \ell \quad {}^2F_{yB} \quad {}^2M_{zB} / \ell \} \quad (3.52)$$

$$[{}^2F_z] = \{ {}^2F_{zA} \quad -{}^2M_{yA} / \ell \quad {}^2F_{zB} \quad -{}^2M_{yB} / \ell \} \quad (3.53)$$

$$[{}^2M_x] = \{ {}^2M_{xA} \quad {}^2B_A / \ell \quad {}^2M_{xB} \quad {}^2B_B / \ell \} \quad (3.54)$$

e  $[{}^1F_x]$ ,  $[{}^1F_y]$ ,  $[{}^1F_z]$  e  $[{}^1M_x]$  são obtidas substituindo-se os super-índices das equações (3.51) a (3.54) por 1.

Admitindo-se a natureza arbitrária dos deslocamentos virtuais, podemos escrever as equações de equilíbrio para um elemento de viga-coluna de parede fina como quatro equações simultâneas:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{EA}{\ell} \right) [K_{11}^{110}] [u_x]^T + \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell^2} \right) [K_{13}^{110}] [u_y]^T - \left( \frac{M_{yA} + M_{yB}}{\ell^2} \right) [K_{13}^{110}] [u_z]^T = \\ & \{ {}^2F_{xA} \quad {}^2F_{xB} \}^T - \{ {}^1F_{xA} \quad {}^1F_{xB} \}^T \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{EI_z}{\ell^3} \right) [K_{33}^{220}] + \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right] [u_y]^T + \left( \frac{M_{zA} + M_{zB}}{\ell^2} \right) [K_{31}^{110}] [u_x]^T \\ & - \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) \left( (1 - \alpha) [K_{33}^{120}] - \alpha [K_{33}^{120}] \right) [u_z]^T \\ & + \left[ \left( \frac{M_{yA}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{100}] + [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) + \left( \frac{M_{yB}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{100}] - [K_{33}^{111}] \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{a_z F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right] [\theta_x^T] = \\ & \{ {}^2F_{yA} \quad {}^2M_{zA} / \ell \quad {}^2F_{yB} \quad {}^2M_{zB} / \ell \}^T - \{ {}^1F_{yA} \quad {}^1M_{zA} / \ell \quad {}^1F_{yB} \quad {}^1M_{zB} / \ell \}^T \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{EI_y}{\ell^3} \right) [K_{33}^{220}] + \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right] [u_z]^T - \left( \frac{M_{yA} + M_{yB}}{\ell^2} \right) [K_{31}^{110}] [u_x]^T \\
& - \left( \frac{M_{xB}}{\ell^2} \right) \left( (1 - \alpha) [K_{33}^{210}] - [K_{33}^{120}] \right) [u_y]^T \\
& + \left[ \left( \frac{M_{zA}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{100}] + [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) + \left( \frac{M_{zB}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{100}] - [K_{33}^{111}] \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{a_y F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right] [\theta_x^T] \\
& = \{ {}^2F_{zA} \quad -{}^2M_{yA}/\ell \quad {}^2F_{zB} \quad -{}^2M_{yB}/\ell \}^T - \{ {}^1F_{zA} \quad -{}^1M_{yA}/\ell \quad {}^1F_{zB} \quad -{}^1M_{yB}/\ell \}^T
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \frac{EI_w}{\ell^3} \right) [K_{33}^{220}] + \left( \frac{GJ}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right. \\
& + \left( \frac{F_{xB}}{\ell} \right) \left[ \left( \frac{I_y + I_z}{A} \right) + a_y^2 + a_z^2 \right] [K_{33}^{110}] - \left( \frac{M_{yA} \beta_y}{\ell} \right) \left( [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) \\
& + \left( \frac{M_{yB} \beta_y}{\ell} \right) [K_{33}^{111}] + \left( \frac{M_{zA} \beta_z}{\ell} \right) \left( [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) - \left( \frac{M_{zB} \beta_z}{\ell} \right) [K_{33}^{111}] \\
& \left. + \left( \frac{B_A \beta_w}{\ell} \right) \left( [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) - \left( \frac{B_B \beta_w}{\ell} \right) [K_{33}^{111}] \right\} [\theta_x^T] \\
& + \left[ \left( \frac{M_{yA}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{010}] + [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) + \left( \frac{M_{yB}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{010}] - [K_{33}^{111}] \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{a_z F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] \right] [u_y]^T \\
& + \left[ \left( \frac{M_{zA}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{010}] + [K_{33}^{110}] - [K_{33}^{111}] \right) + \left( \frac{M_{zB}}{\ell} \right) \left( [-K_{33}^{010}] - [K_{33}^{111}] \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{a_y F_{xB}}{\ell} \right) [K_{33}^{110}] [u_z]^T \\
& = \{ {}^2M_{xA} \quad {}^2B_A / \ell \quad {}^2M_{xB} \quad {}^2B_B / \ell \}^T - \{ {}^1M_{xA} \quad {}^1B_A / \ell \quad {}^1M_{xB} \quad {}^1B_B / \ell \}^T
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\text{em que } [K_{gh}^{snv}] = \int_0^1 i^v [n_g^s][n_h^t] di \tag{3.59}$$

Os símbolos em (3.59) são adotados da referência (Rajasekaran, 1971), (Chen, 1977) como uma estenografia para a integral de matrizes.

Os sub-índices  $g$  e  $h$  indicam o grau dos vetores de interpolação, os super-índices  $s$  e  $t$  a ordem de diferenciação, e  $v$  o expoente do fator de multiplicação  $i$ . As matrizes das equações (3.55) a (3.59) que são usadas no presente desenvolvimento são dadas no apêndice A. A equação de equilíbrio para o elemento de viga-coluna de parede fina que resulta das integrações simbolizadas nas equações (3.55) a (3.59) pode ser escrita em uma forma matricial compacta como

$$\{k_e\}[u]^T + \{k_g\}[u]^T = [{}^2f]^T - [{}^1f]^T \tag{3.60}$$

em que  $\{k_e\}$  e  $\{k_g\}$  são as matrizes de rigidez linear e geométrica, respectivamente,  $[u]^T$  o vetor de deslocamentos nodais incremental como dado na expressão (3.18), e  $[{}^1f]^T$  e  $[{}^2f]^T$  as forças nodais do elemento no início e no fim do passo incremental (expressões 3.19). As forças no elemento que aparecem em  $\{k_g\}$  são naturalmente aquelas que existem na configuração 1.

As matrizes de rigidez  $\{k_e\}$  e  $\{k_g\}$  obtidas são dadas nas tabelas 1 e 2. Observe-se que devido a maneira com que as teorias técnicas da flexão e torção foram incorporadas na dedução da matriz de rigidez geométrica  $\{k_g\}$ , os momentos fletores tem comportamento quase-tangencial e os momentos torçores comportamento semi-tangencial. A definição de tais momentos encontra-se na referência (Ziegler, 1977).

A matriz de rigidez linear derivada na presente tese é idêntica àquela obtida por Yang (1984). Contudo a matriz de rigidez geométrica é diferente, pois a matriz aqui desenvolvida pode ser empregada tanto para seções simétricas como assimétricas.

Tabela 1 - Matriz de Rigidez Linear  $[k_e]_{14 \times 14}$ 

	$U_{xA}$	$u_{yA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{yB}$	$u_{zB}$	$\theta_{xB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta'_{xA}$	$\theta'_{xB}$
$F_{xA}$	$a$						$-a$							
$F_{yA}$		$b$						$-b$				$c$		
$F_{zA}$			$d$		$-e$				$-d$		$-e$			
$M_{xA}$				$f$						$-f$			$k$	$k$
$M_{yA}$					$g$				$e$		$h$			
$M_{zA}$						$i$		$-c$				$j$		
$F_{xB}$							$a$							
$F_{yB}$								$b$				$c$		
$F_{zB}$									$d$		$e$			
$M_{xB}$				<i>SIMÉTRICA</i>							$f$		$-k$	$-k$
$M_{yB}$											$g$			
$M_{zB}$												$i$		
$B_A$													$l$	$m$
$B_B$														$l$

onde:

$$a = EA / \ell$$

$$g = 4EI_y / \ell$$

$$b = 12EI_z / \ell^3$$

$$h = 2EI_y / \ell$$

$$c = 6EI_z / \ell^2$$

$$i = 4EI_z / \ell$$

$$d = 12EI_y / \ell^3$$

$$j = 2EI_z / \ell$$

$$e = 6EI_y / \ell^2$$

$$k = (GJ / 10) + 6EI_w / \ell^2$$

$$f = (6GJ / 5\ell) + (12EI_w / \ell^3)$$

$$l = (2GJ\ell / 15) + (4EI_w / \ell)$$

$$m = -(GJ\ell / 30) + (2EI_w / \ell)$$

Tabela 2 - Matriz de Rigidez Geométrica  $[k_g]_{14 \times 14}$ 

	$u_{xA}$	$u_{yA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{yB}$	$u_{zB}$	$\theta_{xB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta'_{xA}$	$\theta'_{yB}$
$F_{xA}$		$a$	$-b$					$-a$	$b$					
$F_{yA}$		$c$		$d$	$e$	$f$	$-a$	$-c$		$g$	$-e$	$f$	$h$	$i$
$F_{zA}$			$c$	$j$	$-f$	$e$	$b$		$-c$	$k$	$-f$	$-e$	$l$	$m$
$M_{xA}$				$n$	$o$	$p$		$-d$	$-j$	$-n$	$q$	$r$	$s$	$s$
$M_{yA}$					$t$	$u$		$-e$	$f$	$-o$	$v$	$w$	$x$	$y$
$M_{zA}$						$t$		$-f$	$-e$	$-p$	$-w$	$v$	$z$	$z'$
$F_{xB}$								$a$	$-b$					
$F_{yB}$								$c$		$-g$	$e$	$-f$	$-h$	$-i$
$F_{zB}$									$c$	$-k$	$f$	$e$	$-l$	$-m$
$M_{xB}$				<i>SIMÉTRICA</i>							$n$	$-q$	$-r$	$-s$
$M_{yB}$											$t$	$-u$	$y'$	$x'$
$M_{zB}$												$t$	$w'$	$v'$
$B_A$													$u'$	$t'$
$B_B$														$u'$

onde:

$$a = (M_{zA} + M_{zB}) / \ell^2$$

$$b = (M_{yA} + M_{yB}) / \ell^2$$

$$c = 6F_{xB} / 5\ell$$

$$d = 1,1M_{yA} / \ell - M_{yB} / 10\ell + 6a_z F_{xB} / 5\ell$$

$$e = M_{xB} / \ell$$

$$f = F_{xB} / 10$$

$$g = -M_{yA} / 10\ell + 1,1M_{yB} / \ell - 6a_z F_{xB} / 5\ell$$

$$h = M_{yA} / 10 + a_z F_{xB} / 10$$

$$j = 1,1M_{zA} / \ell - M_{zB} / 10\ell - 6a_y F_{xB} / 5\ell$$

$$k = -M_{zA} / 10\ell + 1,1, M_{zB} / \ell - 6a_y F_{xB} / 5\ell$$

$$l = M_{zA} / 10 - a_y F_{xB} / 10$$

$$m = -M_{zB} / 10 - a_y F_{xB} / 10$$

$$n = 6\bar{K} / 5\ell - 3\beta_y (M_{yA} - M_{yB}) / 5\ell + 3\beta_z (M_{zA} - M_{zB}) / 5\ell - 3\beta_w (-B_A + B_B) / 5\ell$$

$$o = M_{zA} / 10 + M_{zB} / 5 + a_y F_{xB} / 10$$

$$p = -M_{yA} / 10 - M_{yB} / 5 + a_z F_{xB} / 10$$

$$q = -M_{zA} / 5 - M_{zB} / 10 + a_y F_{xB} / 10$$

$$r = M_{yA} / 5 + M_{yB} / 10 + a_z F_{xB} / 10$$

$$s = (\bar{K} + \beta_y M_{yB} - \beta_z M_{zB} - \beta_w B_B) / 10$$

$$t = 2F_{xB} \ell / 15$$

$$u = -M_{zB} / 2 + M_{xB} \alpha$$

$$v = -F_{xB} \ell / 30$$

$$w = M_{zB} / 2$$

$$x = -M_{zA} \ell / 10 + M_{zB} \ell / 30 + 2a_y F_{xB} \ell / 15$$

$$y = M_{zA} \ell / 30 - a_y F_{xB} \ell / 30$$

$$z = M_{yA} \ell / 10 - M_{yB} \ell / 30 + 2a_z F_{xB} \ell / 15$$

$$t' = -\bar{K} \ell / 30 + \beta_y \ell (M_{yA} - M_{yB}) / 60 - \beta_z \ell (M_{zA} - M_{zB}) / 60 + \beta_w \ell (-B_A + B_B) / 60$$

$$u' = 2\bar{K} \ell / 15 - \beta_y \ell (3M_{yA} - M_{yB}) / 30 + \beta_z \ell (3M_{zA} - M_{zB}) / 30 - \beta_w \ell (-3B_A + B_B) / 30$$

$$v' = M_{yA} \ell / 30 - M_{yB} \ell / 10 + 2a_z F_{xB} \ell / 15$$

$$w' = M_{yB} \ell / 30 - a_z F_{xB} \ell / 30$$

$$x' = -M_{zA} \ell / 30 + M_{zB} \ell / 10 + 2a_y F_{xB} \ell / 15$$

$$y' = -M_{zB} \ell / 30 - a_y F_{xB} \ell / 30$$

$$z' = -M_{yA} \ell / 30 - a_z F_{xB} \ell / 30$$

### 3.4 - A natureza dos momentos sofrendo rotações finitas

As matrizes  $\{k_e\}$  e  $\{k_g\}$  obtidas anteriormente podem ser usadas em programas para determinação das cargas críticas elásticas ou em programas que utilizem uma formulação LA, para a análise não linear geométrica de estruturas uni, bi ou tri-dimensionais. Assim como estas matrizes estão, são tão compreensivas como as matrizes de natureza comparável que foram derivadas anteriormente e, em alguns aspectos, elas são superiores as outras em racionalidade e nos efeitos significantes que incluem (Yang, 1984 e 1986). A aplicação destas matrizes é clara e não requereria mais exames não fosse certos problemas, que a afetam, em comum com as outras. Estes problemas, que relatam o comportamento de momentos sofrendo rotações finitas e uma aparente falta de equilíbrio na posição deslocada, será discutida no próximo item.

#### 3.4.1 - O problema do equilíbrio de nós que unem elementos em ângulo

Argyris et. al. (1979) mostrou que, usando a representação por elementos finitos convencional, deslocamentos rotacionais de flexão, que são derivados dos deslocamentos transversais e momentos quase-tangenciais, resultam em momentos potencialmente desequilibrados nos nós que unem elementos em ângulo de estruturas espaciais. Este recomendou e usou com sucesso uma representação de momento semi-tangencial com seu campo de deslocamentos em coordenadas naturais para eliminar a falta de equilíbrio do momento no nó em ângulo.

Yang e McGuire (1986b) eliminaram o momento desequilibrado no nó que une elementos em ângulo em ângulo usando também um momento semi-tangencial, mas com um

campo de deslocamentos em coordenadas cartesianas convencional.

Elias (1986) mostrou que existe uma inconsistência quando se usa deslocamentos rotacionais de flexão para a análise não linear geométrica de estruturas tri-dimensionais. Esta inconsistência é a causa para o aparecimento de momentos desequilibrados nos nós que unem elementos em ângulo de estruturas espaciais. Para resolver este problema, a matriz de rigidez geométrica, deduzida usando-se derivadas dos deslocamentos como deslocamentos rotacionais, deve ser modificada. Esta descontinuidade não foi reconhecida por Argyris et. al. (1978), nem por Yang e McGuire (1986a, 1986b). Elias (1986) e Conci e Gattas (1990) escolheram as componentes vetoriais da rotação modificada, ou de Rodriguez, como campo de deslocamentos rotacionais na formulação por elementos finitos. Este campo de deslocamentos rotacionais mantém a continuidade cinemática nos nós que unem elementos em ângulo, eliminando com isso o problema da falta de equilíbrio.

### 3.4.2 - A solução do problema

Na formulação da matriz de rigidez de um elemento, o aspecto fundamental na escolha dos deslocamentos generalizados é a representação adequada dos deslocamentos  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  e da rotação  $\theta_x$  no intervalo  $(0, \ell)$ . Quando procura-se a matriz de rigidez de diversos elementos, um outro fator deve ser levado em conta: a *continuidade cinemática nos nós*. O uso de deslocamentos generalizados compostos de vetores de rotações finitas e vetores de translação satisfazem a essas necessidades (Elias, 1986).

No caso de serem usadas derivadas de deslocamentos ( $u'_y$  e  $u'_z$ ), como rotações generalizadas, uma transformação não-linear pode ser feita para assegurar que essa continuidade seja obedecida (Elias, 1986). Como consequência, uma parcela deve ser acrescida à matriz de rigidez nos casos em que as rotações generalizadas não são representadas pelos vetores de rotação finita. Esta correção não é necessária se a estrutura for composta por diversos elementos que representam um único membro reto, pois neste caso não existe descontinuidade de rotação nos nós.

As rotações generalizadas usadas podem ser relacionadas com as rotações finitas de Rodriguez,  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  e  $\rho_z$ , através de (para dedução destas expressões veja Elias (1986) e Conci (1988))

$$\theta_x = \rho_x \quad (3.61)$$

$$\theta_y = -u'_z = \rho_y - \frac{1}{2} \rho_x \rho_z \quad (3.62)$$

$$\theta_z = u'_y = \rho_z - \frac{1}{2} \rho_x \rho_y \quad (3.63)$$

Devido a estas relações os incrementos de rotações finitas virtuais de Rodriguez e os incrementos de rotações virtuais generalizadas usadas podem ser relacionadas por:

$$\begin{bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_z/2 & 1 & \rho_x/2 \\ -\rho_y/2 & -\rho_x/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho_x \\ d\rho_y \\ d\rho_z \end{bmatrix} = \{T\} [d\rho] \quad (3.64)$$

Chamando de  $M$  e  $M_\rho$  os vetores dos momentos generalizados correspondentes a estas rotações generalizadas, a invariância do trabalho virtual requer que:

$$[M]^T [d\theta] = [M_\rho]^T [d\rho] \quad (3.65)$$

Unindo-se as duas últimas expressões, tem-se:

$$[M]^T \{T\} [d\rho] = [M_\rho]^T [d\rho] \quad (3.66)$$

e como os deslocamentos virtuais são arbitrários

$$[M_\rho] = \{T\}^T [M] \quad (3.67)$$

$$[dM_\rho] = \{T\}^T [dM] + \{dT\}^T [M] \quad (3.68)$$

Se  $\{k_{g\rho}\}$  e  $\{k_g\}$  representarem as matrizes de rigidez derivadas em função de  $\rho$  e  $\theta$ , tais que:

$$[dM_\rho] = \{k_{g\rho}\} [d\rho] \quad (3.69)$$

$$[dM] = \{k_g\} [d\theta] \quad (3.70)$$

pode-se escrever, substituindo-se na equação (3.68) as equações (3.69), (3.70) e (3.64):

$$\{k_{g\rho}\}[d\rho] = \{T\}^T \{k_g\} \{T\}[d\rho] + \{dT\}^T [M] \quad (3.71)$$

porém:

$$\{dT\}^T [M] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & d\rho_z & -d\rho_y \\ 0 & 0 & -d\rho_x \\ 0 & d\rho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -M_z & M_y \\ -M_z & 0 & 0 \\ M_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho_x \\ d\rho_y \\ d\rho_z \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

de modo que:

$$\{k_{g\rho}\} = \{T\}^T \{k_g\} \{T\} + \{k_{\theta\rho}\} \quad (3.73)$$

onde

$$\{k_{\theta\rho}\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -M_z & M_y \\ -M_z & 0 & 0 \\ M_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

É interessante observar que a hipótese do incremento de deformações partir de uma configuração indeformada, mas sob tensão, permite desprezar as rotações na configuração 1 em  $\{T\}$ . Como resultado desta observação as equações (3.64), (3.67) e (3.73) levam a:  $\{T\} = \{I\}$ ,  $[d\rho] = [d\theta]$ ,  $[M\rho] = [M]$  e  $\{k_{g\rho}\} = \{k_g\} + \{k_{\theta\rho}\}$ . A matriz  $\{k_c\}$  que adicionada a  $\{k_g\}$  corresponde a utilização de uma matriz de rigidez em função das rotações finitas de Rodriguez é dada na tabela 3.

Nos trabalhos de Yang (1984), Yang e McGuire (1986b) e Argyris (1978) são derivadas e utilizadas matrizes de correções idênticas. Nestes trabalhos a necessidade de correção é atribuída ao comportamento quase-tangencial dos momentos nodais internos  $M_y$  e  $M_z$  sob rotação finita. A torção de Saint-Venant tem um comportamento semi-tangencial, no entanto a torção devido ao empenamento e o bimomento tem comportamento mais complexo. A matriz  $\{k_c\}$  quando adicionada a matriz de rigidez  $\{k_g\}$  do elemento, pode equivaler a assumir uma aplicação semi-tangencial dos momentos, o que talvez tenha motivado a argumentação destes autores (Conci, 1988).

A matriz de rigidez geométrica corrigida  $\{k_g^{corr}\} = \{k_c\} + \{k_g\}$  é dada na tabela 4.

Tabela 3 - Matriz de correção das rotações generalizadas  $\{k_c\}_{14 \times 14}$

	$u_{xA}$	$u_{yA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{yB}$	$u_{zB}$	$\theta_{xB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta'_{xA}$	$\theta'_{xB}$
$F_{xA}$														
$F_{yA}$														
$F_{zA}$														
$M_{xA}$					$a$	$b$								
$M_{yA}$				$a$										
$M_{zA}$				$b$										
$F_{xB}$														
$F_{yB}$														
$F_{zB}$														
$M_{xB}$											$c$	$d$		
$M_{yB}$										$c$				
$M_{zB}$										$d$				
$B_A$														
$B_B$														

onde:

$$a = -(1/2) M_{zA}$$

$$b = (1/2) M_{yA}$$

$$c = -(1/2) M_{zB}$$

$$d = (1/2) M_{yB}$$

Tabela 4 - Matriz de rigidez geométrica corrigida  $\{k_g^{corr}\}_{14 \times 14}$ 

	$u_{xA}$	$u_{yA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{yB}$	$u_{zB}$	$\theta_{xB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta'_{xA}$	$\theta'_{xB}$
$F_{xA}$		$a$	$-b$					$-a$	$b$					
$F_{yA}$		$c$		$d$	$e$	$f$	$-a$	$-c$		$g$	$-e$	$f$	$h$	$i$
$F_{zA}$			$c$	$j$	$-f$	$e$	$b$		$-c$	$k$	$-f$	$-e$	$l$	$m$
$M_{xA}$				$n$	$o$	$p$		$-d$	$-j$	$-n$	$q$	$r$	$s$	$s$
$M_{yA}$					$t$	$u$		$-e$	$f$	$-o$	$v$	$w$	$x$	$y$
$M_{zA}$						$t$		$-f$	$-e$	$-p$	$-w$	$v$	$z$	$z'$
$F_{xB}$								$a$	$-b$					
$F_{yB}$								$c$		$-g$	$e$	$-f$	$-h$	$-i$
$F_{zB}$									$c$	$-k$	$f$	$e$	$-l$	$-m$
$M_{xB}$				<i>SIMÉTRICA</i>						$n$	$r'$	$s'$	$-s$	$-s$
$M_{yB}$											$t$	$-u$	$y'$	$x'$
$M_{zB}$												$t$	$w'$	$v'$
$B_A$													$u'$	$t'$
$B_B$														$u'$

onde:

$$a = (M_{zA} + M_{zB}) / \ell^2$$

$$b = (M_{yA} + M_{yB}) / \ell^2$$

$$c = 6F_{xB} / 5\ell$$

$$d = 1,1M_{yA} / \ell - M_{yB} / 10\ell + 6a_z F_{xB} / 5\ell$$

$$e = M_{xB} / \ell$$

$$f = F_{xB} / 10$$

$$g = -M_{yA} / 10\ell + 1,1M_{yB} / \ell - 6a_z F_{xB} / 5\ell$$

$$h = M_{yA} / 10 + a_z F_{xB} / 10$$

$$i = -M_{yB} / 10 + a_z F_{xB} / 10$$

$$j = 1,1M_{zA} / \ell - M_{zB} / 10\ell - 6a_y F_{xB} / 5\ell$$

$$k = -M_{zA} / 10\ell + 1,1M_{zB} / \ell - 6a_y F_{xB} / 5\ell$$

$$l = M_{zA} / 10 - a_y F_{xB} / 10$$

$$m = -M_{zB} / 10 - a_y F_{xB} / 10$$

$$n = 6\bar{K} / 5\ell - 3\beta_y (M_{yA} - M_{yB}) / 5\ell + 3\beta_z (M_{zA} - M_{zB}) / 5\ell - 3\beta_w (-B_A + B_B) / 5\ell$$

$$o = -2M_{zA} / 5 + M_{zB} / 5 + a_y F_{xB} / 10$$

$$p = -2M_{yA} / 5 - M_{yB} / 5 + a_z F_{xB} / 10$$

$$q = -M_{zA} / 5 - M_{zB} / 10 + a_y F_{xB} / 10$$

$$r = M_{yA} / 5 + M_{yB} / 10 + a_z F_{xB} / 10$$

$$s = (\bar{K} + \beta_y M_{yB} - \beta_z M_{zB} - \beta_w B_B) / 10$$

$$t = 2F_{xB} \ell / 15$$

$$u = -M_{xB} / 2 + M_{xB} \alpha$$

$$v = -F_{xB} \ell / 30$$

$$w = M_{xB} / 2$$

$$x = -M_{zA} \ell / 10 + M_{zB} \ell / 30 + 2a_y F_{xB} \ell / 15$$

$$y = M_{zA} \ell / 30 - a_y F_{xB} \ell / 30$$

$$z = M_{yA} \ell / 10 - M_{yB} \ell / 30 + 2a_z F_{xB} \ell / 15$$

$$r' = -M_{zA} / 5 - 2M_{zB} / 5 + a_y F_{xB} / 10$$

$$s' = -M_{yA} / 5 - 2M_{yB} / 5 + a_z F_{xB} / 10$$

$$t' = -\bar{K}\ell / 30 + \beta_y \ell (M_{yA} - M_{yB}) / 60 - \beta_z \ell (M_{zA} - M_{zB}) / 60 + \beta_w \ell (-B_A + B_B) / 60$$

$$u' = 2\bar{K}\ell / 15 - \beta_y \ell (3M_{yA} - M_{yB}) / 30 + \beta_z \ell (3M_{zA} - M_{zB}) / 30 - \beta_w \ell (-3B_A + B_B) / 30$$

$$v' = M_{yA} \ell / 30 - M_{yB} \ell / 10 + 2a_z F_{xB} \ell / 15$$

$$w' = M_{yB} \ell / 30 - a_z F_{xB} \ell / 30$$

$$x' = -M_{zA} \ell / 30 + M_{zB} \ell / 10 + 2a_y F_{xB} \ell / 15$$

$$y' = -M_{zB} \ell / 30 - a_y F_{xB} \ell / 30$$

$$z' = -M_{yA} \ell / 30 - a_z F_{xB} \ell / 30$$

## **4 - ALGORITMOS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA INCLUINDO O EFEITO DO EMPENAMENTO**

Embora, na prática, o projeto de estruturas não seja baseado no estado pós-crítico, o conhecimento da resposta estrutural nesta fase é de grande valor. A razão para isso é que uma análise mais precisa da resposta global do sistema pode ser feita somente quando o mecanismo de colapso da estrutura é conhecido.

A determinação de tal resposta requer o uso da análise não linear geométrica e física, porém, somente a não linearidade geométrica será considerada no presente trabalho.

Nos recentes anos, consideráveis esforços tem sido dedicados para o desenvolvimento de técnicas numéricas que solucionem problemas de sistemas não lineares, onde pode-se citar por exemplo os trabalhos de Zienkiewicz (1971), Crisfield (1981, 1983), Dumont e Kruger (1989), Clarke e Hancock (1990), Yang e Shieh (1990), Kuo et al. (1995) entre outros.

Nos próximos tópicos far-se-á o delineamento do problema, uma revisão dos principais métodos de solução incrementais-iterativos, os procedimentos para recuperação dos esforços no elemento, o critério de convergência e o diagrama de blocos para a análise não-linear geométrica.

### **4.1 - Delineamento do Problema**

O movimento não-linear de uma estrutura pode ser descrito por três configurações típicas: a configuração inicial indeformada  $C_0$ , a última configuração calculada  $C_1$ , e a corrente configuração deformada  $C_2$  (fig. 3.1).

Numa análise não-linear incremental, assume-se que todas as informações da estrutura da configuração  $C_0$  a  $C_1$  são conhecidas, incluindo a história do carregamento e as correspondentes deformações, e que o interesse é no comportamento da estrutura no passo incremental da configuração  $C_1$  a  $C_2$ , em resposta ao incremento de cargas externas. Embora

as deformações da estrutura, geradas em cada passo incremental, sejam por hipótese pequenas, as deformações totais, resultantes da acumulação das deformações geradas durante todos os passos incrementais anteriores a  $C_1$ , podem ser de grande magnitude. Esta é certamente uma vantagem da análise não-linear incremental.

Baseado na *Formulação Lagrangeana Atualizada*, a última configuração calculada  $C_1$  é selecionada como configuração de referência para descrever o movimento dentro do passo incremental de  $C_1$  a  $C_2$ . Com esta formulação derivou-se nos capítulos anteriores as equações de equilíbrio incremental para um elemento de viga-coluna de parede fina escrita em uma forma matricial compacta como

$$\{k_e\}[u]^T + \{k_g\}[u]^T = [{}^2f]^T - [{}^1f]^T \quad (4.1)$$

em que  $\{k_e\}$  e  $\{k_g\}$  são as matrizes de rigidez linear e geométrica, respectivamente,  $[u]^T$  o vetor de deslocamentos nodais incremental gerados durante a passagem da configuração  $C_1$  a  $C_2$ ,  $[{}^1f]^T$  as forças nodais agindo no elemento no início do passo incremental, isto é, em  $C_1$ , e  $[{}^2f]^T$  as forças agindo no elemento no fim do passo incremental, isto é, em  $C_2$ . As forças no elemento que aparecem em  $\{k_g\}$  são naturalmente aquelas que existem na configuração 1.

Para que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas para cada nó de uma estrutura tridimensional com o comportamento não-linear geométrico, a matriz de correção das rotações generalizadas  $\{k_c\}$  foi somada a matriz de rigidez geométrica  $\{k_g\}$ , ficando a equação de equilíbrio (4.1) na forma seguinte

$$\{k_e\}[u]^T + \{k_g^{corr}\}[u]^T = [{}^2f]^T - [{}^1f]^T \quad (4.2)$$

onde  $\{k_g^{corr}\} = \{k_g\} + \{k_c\}$  é a matriz de rigidez geométrica corrigida. Pode-se ainda escrever a equação de equilíbrio, na forma

$$\{k\}[u]^T = [{}^2f]^T - [{}^1f]^T \quad (4.3)$$

onde  $\{k\} = \{k_e\} + \{k_g^{corr}\}$  é a matriz de rigidez tangente do elemento.

Um aspecto que faz a análise não-linear geométrica de estruturas espaciais diferente de estruturas planas e estruturas do tipo treliças é a necessidade de considerar a não

comutatividade dos graus de liberdade rotacionais no espaço tridimensional. Note-se que este problema não aparece no caso de pórticos planos, visto que todas as rotações acontecem sobre um eixo normal ao plano da estrutura, que por natureza são comutativas, e no caso de treliças, já que neste tipo de estrutura só existe graus de liberdade translacionais.

Observe-se que as equações de equilíbrio incremental (4.3) constituem somente o primeiro passo da análise não-linear iterativa-incremental, uma vez que estas equações foram calculadas para cada elemento da estrutura. Seguindo-se os procedimentos padrões do método da rigidez direta (Santos, 1980, Gere e Weaver, 1981), monta-se as equações de equilíbrio da estrutura a nível global, como

$$\{K^G\}[U]^T = [{}^2F]^T - [{}^1F]^T \quad (4.4)$$

onde  $\{K^G\}$  é a matriz de rigidez global da estrutura,  $[U]^T$  é o vetor de deslocamentos nodais incremental gerados durante o passo de  $C_1$  a  $C_2$ ,  $[{}^1F]^T$  é o vetor de cargas nodais externas agindo na estrutura no início do passo incremental, isto é, em  $C_1$ , e  $[{}^2F]^T$  o vetor de cargas nodais agindo na estrutura no fim do passo incremental, isto é, em  $C_2$ .

É importante ressaltar que as matrizes de rotação utilizadas para a mudança do sistema local para o sistema global são semelhantes as matrizes utilizadas por Bazant (1973). Esta forma de transformação é empregada em todos os trabalhos pesquisados, que utilizam as características nodais do presente trabalho.

As equações (4.4) formam um sistema de equações não lineares, já que a matriz de rigidez  $\{K^G\}$  é função das deformações e solicitações em cada elemento da estrutura.

Numa análise não linear incremental assume-se que todas as informações da estrutura são conhecidas na configuração  $C_1$ . Tais informações devem incluir as coordenadas de cada nó, a deformada de cada elemento, as forças iniciais  $[{}^1f]^T$  agindo em cada elemento, e as cargas nodais aplicadas  $[{}^1F]^T$  agindo na estrutura.

Assumindo-se que as cargas aplicadas agindo na estrutura são incrementadas de uma pequena quantia para estrutura mudar da configuração  $C_1$  a  $C_2$ , resolve-se o sistema de equações não lineares (4.4), obtendo-se, em resposta ao incremento de cargas, o incremento

de deslocamentos  $[U]$  para a estrutura. Uma vez que o incremento de deslocamentos  $[U]$  é conhecido, a geometria da estrutura pode ser atualizada, e as curvas carga-deflexão para os graus de liberdade desejados, podem ser plotadas.

A solução do sistema de equações não-lineares é tentada pela combinação de procedimentos incrementais e iterativos, que podem ser caracterizados por três etapas. A *primeira etapa* envolve a solução do incremento dos deslocamento  $[U]$  através da solução das equações de equilíbrio incrementais da estrutura, no qual os deslocamentos incrementais  $\{u\}$  de cada elemento podem ser determinados. A *segunda etapa* diz respeito ao processo de recuperação dos esforços incrementais  $[f]$  do elemento para os deslocamentos incrementais  $\{u\}$  obtidos na primeira etapa. As forças resultantes  $[^2f]$  agindo em cada elemento no fim do passo incremental pode então ser obtida pela acumulação de todas as forças incrementais geradas antes e durante o corrente passo, isto é, entre  $[^1f]$  e  $[^2f]$ . Na *terceira etapa*, o equilíbrio da estrutura é checado para assegurar a convergência das iterações na nova configuração deformada. Isto é conseguido somando-se, em cada nó, as forças nodais internas de cada elemento  $[^2f]$ , para formar o vetor de forças nodais internas, e comparando-se com as cargas nodais externas  $[^2F]$ , calculando-se assim o vetor de forças desequilibradas da estrutura. Sempre que as forças desequilibradas não puderem ser desprezadas, uma nova iteração deve ser feita para o equilíbrio da estrutura onde a *primeira* e a *segunda etapa* são então repetidas. Deve ser notado previamente que a precisão para soluções não lineares dependem primariamente das equações usadas na segunda etapa, enquanto a primeira etapa somente afeta a velocidade da convergência e o número de iterações (Yang e Leu, 1991).

A seguir será apresentado os procedimentos para resolução das três etapas citadas anteriormente. Estes procedimentos seguem de uma maneira geral as publicações técnicas de Yang e Shieh (1990), Yang e Leu (1991) e Kuo et al. (1993).

#### 4.2 - Métodos de solução Incrementais-Iterativos

Em estruturas que tem um comportamento altamente não linear, no qual aparecem regiões envolvendo pontos críticos (figura 4.1), tais como os fenômenos comumente chamados de *snap-back* (reversão do deslocamento) e *snap-through* (reversão da carga), a maneira pelo qual as iterações são executadas é que determina se a convergência numérica pode ser alcançada (Yang, 1984).

Portanto, um requerimento básico para o sucesso do esquema de solução de um sistema não-linear é sua habilidade para vencer os problemas numéricos associados com os fenômenos anteriormente descritos. Para o uso na prática da engenharia o método de solução deve ser também preciso e eficiente. Existem muitos métodos que não são suficientemente gerais para garantir a convergência, estabilidade e eficiência em tais situações.

O *método incremental simples*, como o próprio nome sugere, tem como vantagem a sua simplicidade. Contudo para problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações, os erros acumulados em cada passo incremental podem ser significantes. Além disso não há garantia de que a estrutura permaneça em equilíbrio em cada ponto de solução encontrado, uma vez que não existe as iterações dentro de cada passo incremental.

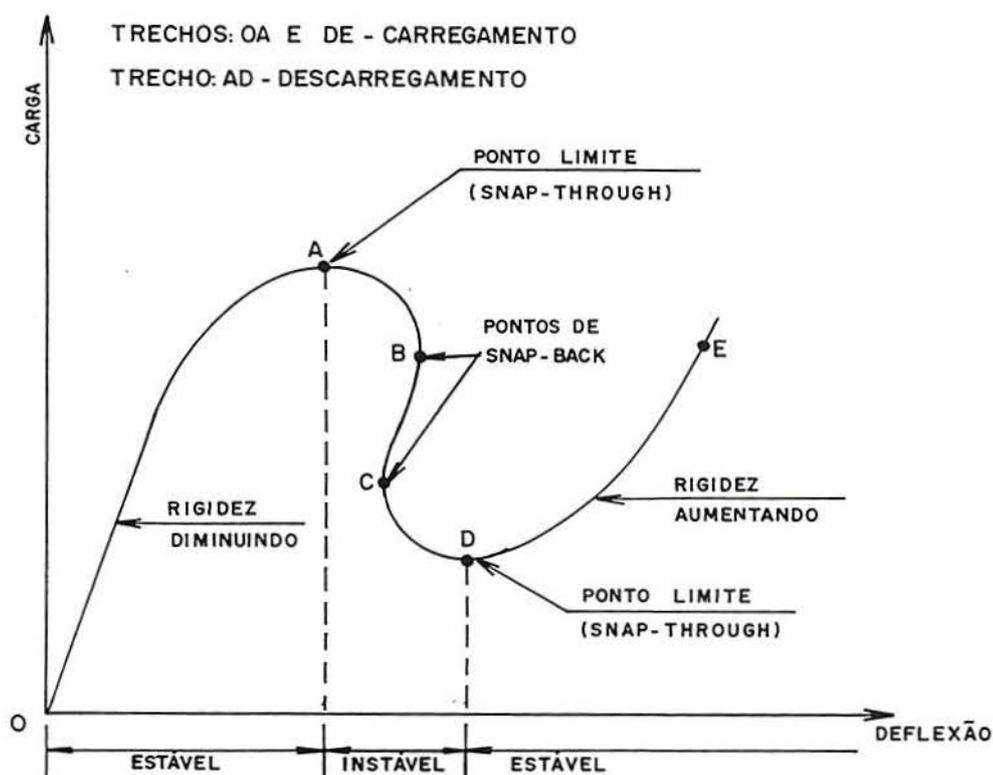


Figura 4.1 - Curva carga-deflexão característica de um sistema não-linear

O *método de Newton-Raphson* é um dos esquemas iterativos mais antigos que se conhece e até hoje usado. Este método é preciso para solução de problemas no qual a

estrutura tem a matriz de rigidez positivo definida, ou seja, em regiões onde o comportamento da estrutura é estável. Em regiões onde a estrutura torna-se instável, como por exemplo a ocorrência de singularidade na matriz de rigidez ou a ocorrência de pontos limites (*snap-through*) na curva carga-deflexão, este método simplesmente falha, visto que suas iterações são executadas com carga constante.

A singularidade pode ser contornada pelo *método do controle do deslocamento*. Este método requer que o analista escolha adequadamente a componente do deslocamento a ser usada para controle, o que não é sempre óbvio, principalmente em estruturas consistindo de um grande número de graus de liberdade. Além disso, este método não funciona no caso de se ter, durante o desenvolvimento da análise, uma reversão do deslocamento (*snap-back*) que serve de controle. Todos os métodos até agora mencionados, não consideram a variação da não linearidade ou rigidez da estrutura ao longo da trajetória de equilíbrio porque um incremento constante de carga ou um incremento constante da componente do deslocamento é usado em cada caso.

Para contornar este problema, pode-se adotar procedimentos que inclui todas as componentes dos deslocamentos, ao invés de uma única componente, para controlar a direção da iteração.

O *método do comprimento do arco* e o *método do controle do trabalho* que serão discutidos a seguir, podem ser considerados procedimentos que se enquadram nesta categoria.

O *método do comprimento do arco* tem sido geralmente usado para lidar com problemas de *snap-back* e *snap-through*, isto porque suas iterações são realizadas com carga e deslocamento variáveis. Na teoria, este método usa um comprimento de arco constante para determinar o tamanho do passo para cada incremento de carga, fazendo com que se leve indiretamente em conta a variação do grau de não linearidade da estrutura. Uma condição de ortogonalidade é então aplicada para dirigir as iterações subsequentes. Yang (1984) demonstra que as equações de restrição empregadas, comprimento do arco e ortogonalidade, são puramente matemáticas, não tendo unidades físicas consistentes. Como resultado disto, dificuldades numéricas podem ocorrer, principalmente em problemas com gradientes bruscos nas proximidades de pontos de *snap-back*.

No *método do controle do trabalho*, o conceito do incremento constante do trabalho é usado para determinar o incremento de carga para cada passo. Este método tendo unidades físicas consistentes na sua equação de restrição, que é certamente um avanço sobre o método do comprimento do arco, pode ser usado para traçar curvas carga-deflexão com pontos limites (*snap-through*), mas com sucesso limitado no traçado de curvas com pontos de *snap-back*.

A seguir faz-se um breve resumo dos algoritmos de solução dos métodos incrementais-iterativos explanados anteriormente. Apresenta-se também, o *método do controle do deslocamento generalizado*, proposto por Yang e Shieh (1990). Este método foi implementado computacionalmente para resolução dos exemplos do capítulo 5, por parecer ser superior aos métodos citados.

#### 4.2.1 - Notação para a análise incremental-iterativa

Foi visto anteriormente, que o processo de deformação (ou carregamento) não linear de uma estrutura pode ser descrito por três configurações típicas: a configuração inicial indeformada  $C_0$ , última configuração calculada  $C_1$ , e a configuração corrente (conhecida)  $C_2$ . Nos próximos itens, utilizar-se-á ao invés da simbologia anterior, a seguinte notação:  $C_0$  indicando novamente a configuração inicial indeformada,  $C_{i-1}$  a última configuração calculada, e  $C_i$  a configuração corrente (desejada). Com esta nova notação, o passo incremental da estrutura de  $C_0$  a  $C_1$  será chamado primeiro passo, de  $C_1$  a  $C_2$  o segundo passo, e de  $C_{i-1}$  a  $C_i$  o  $i$ -ésimo passo.

Todas as quantidades geradas durante um passo incremental será denotada pelo símbolo  $\Delta$ .

Como os métodos a serem expostos são incrementais-iterativos, ou seja, as iterações são executadas dentro do passo incremental, uma distinção deve ser feita entre os passos incremental e iterativo. Para este fim, colocar-se-á um super-índice direito nos símbolos para indicar o número da seqüência do passo incremental, e um sub-índice direito para indicar o número de iterações executadas com o dito passo incremental. Sempre que a identificação do passo incremental tornar-se desnecessário, o super-índice será retirado para simplificar a notação usada.

Usando a presente notação, as equações não lineares da estrutura para uso na  $n$ -ésima iteração do  $i$ -ésimo passo incremental podem ser escritas na seguinte forma geral:

$$\{K_{n-1}^i\}[\Delta U_n^i] = [P_n^i] - [F_{n-1}^i] \quad (4.5)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$  com as condições iniciais:

$$\{K_o^i\} = \{K_u^{i-1}\}, \quad [F_o^i] = [F_u^{i-1}], \quad [U_o^i] = [U_u^{i-1}] \quad (4.6)$$

onde o sub-índice “ $u$ ” é usado para indicar a última iteração.

Aqui,  $[\Delta U_n^i]$  indica o incremento de deslocamento da estrutura para  $n$ -ésima iteração,  $[P_n^i]$  é o vetor de cargas nodais externas aplicadas na estrutura na  $n$ -ésima iteração, e  $[F_{n-1}^i]$  é o vetor de forças nodais internas em cada nó da estrutura, equivalentes as tensões no elemento, na  $(n-1)$ -ésima iteração e função dos deslocamentos  $[U_{n-1}^i]$  e  $\{K_{n-1}^i\}$  é a matriz de rigidez tangente.

As cargas externas também podem ser decompostas na forma:

$$[P_n^i] = [P_{n-1}^i] + [\Delta P_n^i] = [P_{n-1}^i] + \lambda_n^i [\bar{P}] \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

onde a condição inicial é  $[P_0^i] = [P_u^{i-1}]$ ,  $\lambda_n^i$  é o fator do incremento de carga para a  $n$ -ésima iteração do  $i$ -ésimo incremento, e  $[\bar{P}]$  é um carregamento de referência. Com o incremento de deslocamentos  $[\Delta U_n^i]$  obtidos pela resolução da equação (4.5) para o  $n$ -ésimo passo, o deslocamento total  $[U_n^i]$  da estrutura pode ser obtido por:

$$[U_n^i] = [U_{n-1}^i] + [\Delta U_n^i] \quad (4.8)$$

Seja

$$[R_{n-1}^i] = [P_{n-1}^i] - [F_{n-1}^i] \quad (4.9)$$

o vetor de forças desequilibradas correspondentes a  $(n-1)$ -ésima iteração. A equação (4.5) pode ser reescrita como

$$\{K_{n-1}^i\}[\Delta U_n^i] = \lambda_n^i [\bar{P}] + [R_{n-1}^i] \quad (4.10)$$

Substituindo-se a equação anterior pelo sistema duplo de equações (Bathoz e Dhatt, 1979):

$$\{K_{n-1}^i\}[\Delta\bar{U}_n] = [\bar{P}] \quad (4.11a)$$

$$\{K_{n-1}^i\}[\Delta\bar{U}_n] = [R_{n-1}^i] \quad (4.11b)$$

A superposição das soluções das equações (4.11) dá o vetor do incremento dos deslocamentos:

$$[\Delta U_n^i] = \lambda_n^i[\Delta\bar{U}_n] + [\Delta\bar{U}_n] \quad (4.12)$$

A seguir, explicar-se-á como o fator do incremento de carga  $\lambda_n^i$ , para a condição de restrição imposta, pode ser determinado para cada método de solução. Para um maior entendimento, o super-índice “i” que indica o número do passo incremental será omitido daqui para frente. Para aqueles casos em que haja necessidade da identificação do passo incremental o super-índice será recolocado.

#### 4.2.2 - O método de Newton-Raphson (NR)

Este método é sem dúvida o mais velho dos métodos iterativos em uso. Os diversos métodos numéricos iterativos para a resolução de problemas formulados em termos de deslocamentos, podem ser considerados como generalizações do método de Newton-Raphson.

Neste método as cargas externas são incrementadas de um valor constante somente na primeira iteração, isto é, para  $n = 1$ , em cada passo incremental. Para as iterações seguintes do mesmo passo incremental, isto é,  $n \geq 2$ , o incremento de carga é igual a zero, mantendo assim as cargas externas constantes. Em termos do fator do incremento de carga  $\lambda_n$ , a condição de restrição pode ser expressa como segue:

$$\lambda_n = \begin{cases} \text{constante para } n = 1 \\ 0 \text{ para } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Este procedimento é esquematicamente ilustrado na figura 4.2.

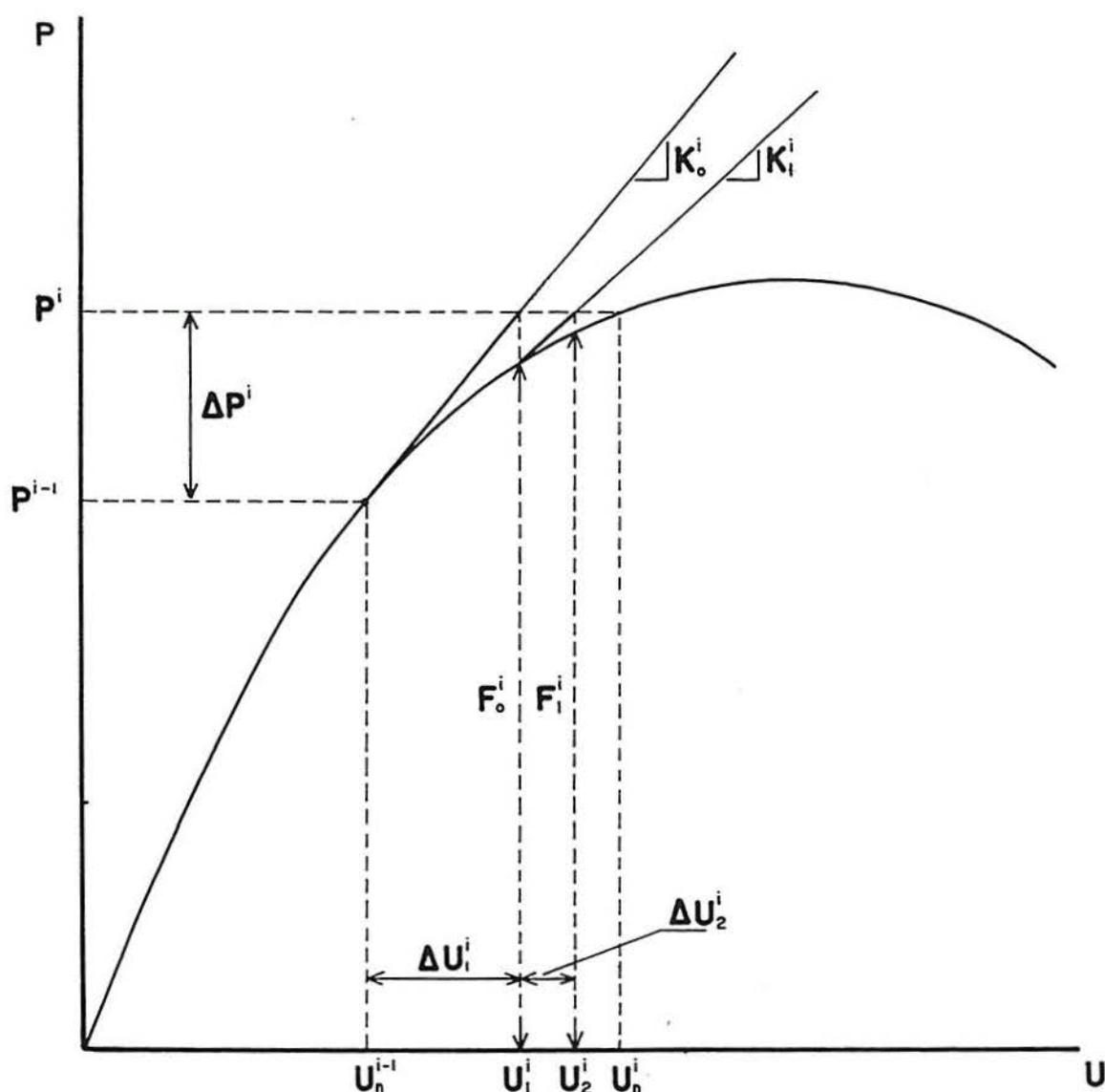


Figura 4.2 - Esquema do método de Newton-Raphson (NR)

#### 4.2.3 - O método do controle do deslocamento

Este método foi desenvolvido inicialmente por Argyris e posteriormente modificado por outros pesquisadores. Enquanto no método de NR as iterações são processadas para um nível constante de carregamento, neste método procura-se a solução do problema para um valor fixo de um determinado deslocamento nodal. Neste método, há a necessidade da seleção de uma componente particular do deslocamento, a  $q$ -ésima componente, para ser usada como parâmetro de controle na realização das iterações. Seja  $\Delta U_{qn}$  denotando o incremento do deslocamento da  $q$ -ésima componente associada com a  $n$ -

ésima iteração. A condição de restrição imposta pelo método do deslocamento controlado pode ser expresso como segue:

$$\Delta U_{qn} = \begin{cases} \text{constante para } n = 1 \\ 0 \text{ para } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.14)$$

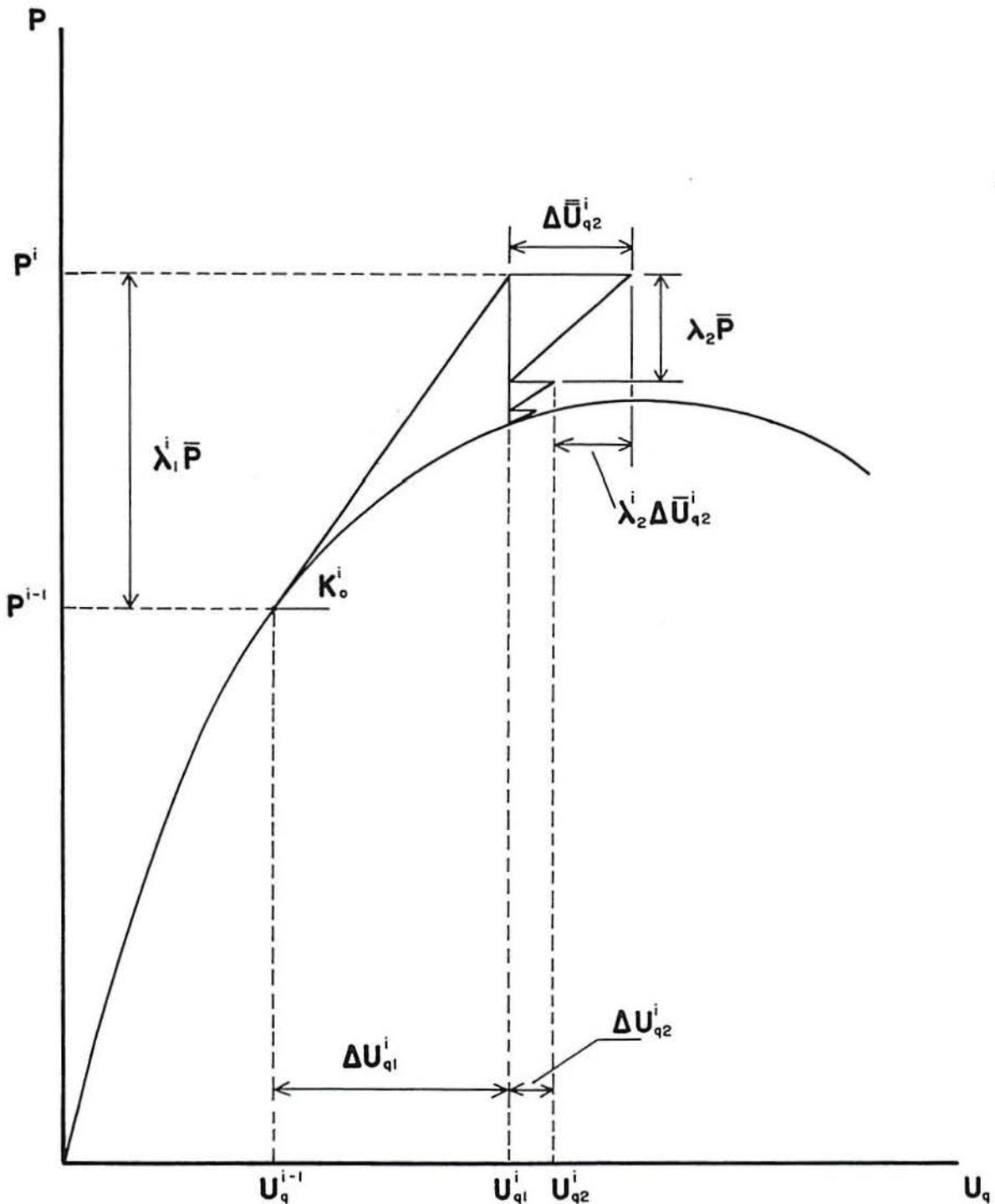


Figura 4.3 - Esquema do método do controle do deslocamento

De acordo com a equação (4.12), a  $q$ -ésima componente do deslocamento pode ser dividida em duas partes:

$$[\Delta U_{qn}] = \lambda_n [\Delta \bar{U}_{qn}] + [\Delta \bar{\bar{U}}_{qn}] \quad (4.15)$$

no qual o parâmetro de carga  $\lambda_n$  pode ser expresso,

$$\lambda_n = \frac{[\Delta U_{qn}] - [\Delta \bar{\bar{U}}_{qn}]}{[\Delta \bar{U}_{qn}]} \quad (4.16)$$

Para a primeira iteração de cada passo incremental, isto é, para  $n = 1$ , o vetor de forças desequilibradas  $[R_0] = [0]$ , e para as iterações subsequentes ( $n \geq 2$ ), o incremento do controle do deslocamento  $[\Delta U_{qn}] = [0]$ , de acordo com a equação (4.14). Disto segue que o parâmetro de carga  $\lambda_n$  da equação (4.16) reduz-se á

$$\lambda_n = \begin{cases} [\Delta U_{qn}] / [\Delta \bar{U}_{qn}] & \text{para } n = 1 \\ -[\Delta \bar{\bar{U}}_{qn}] / [\Delta \bar{U}_{qn}] & \text{para } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.17)$$

Obviamente, as cargas externas são mantidas constantes no processo de iteração. Um esquema mostrando o método do controle do deslocamento é apresentado na figura 4.3.

#### 4.2.4 - O método do comprimento do arco

O método do comprimento do arco em forma original é baseado na seguinte condição de restrição para determinar os incrementos de carga e realizar as iterações:

$$[\Delta U_1]^T [\Delta U_n] + \lambda_1 \lambda_n = \Delta S^2 \quad (4.18)$$

onde  $[\Delta U_1]$  e  $[\Delta U_n]$  denotam os incrementos de deslocamentos para a primeira e  $n$ -ésima iterações respectivamente, para o passo incremental  $i$ -ésimo, e  $\Delta S$  o comprimento do arco,

$$\Delta S = \begin{cases} \text{constante para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.19)$$

No início de cada passo incremental, isto é, para  $n = 1$ , não há forças desequilibradas, implicando que  $[\Delta \bar{U}_1] = [0]$  conforme a equação (4.11b). Assim o incremento dos deslocamentos para o primeiro passo iterativo pode ser escrito da equação (4.12) na forma

$$[\Delta U_1] = \lambda_1 [\Delta \bar{U}_1] \quad (4.20)$$

Substituindo-se a equação (4.20) na equação (4.18) tem-se

$$\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{[\Delta \bar{U}_1]^T [\Delta \bar{U}_1] + 1}} \quad (4.21)$$

Esta equação dá o parâmetro do incremento de carga, por conseguinte, o incremento de carga, no início do  $i$ -ésimo passo incremental. Um inconveniente do método do comprimento do arco na forma apresentada é a falta de informação para determinar o sinal do parâmetro de carga  $\lambda_1$  na equação (4.21). Note-se que numa análise não linear iterativa-incremental, um sinal positivo para  $\lambda_1$  indica um estágio de carregamento, enquanto que um sinal negativo para  $\lambda_1$  indica um estágio de descarregamento para a estrutura em consideração. Para os demais passos iterativos, isto é,  $n \geq 2$ , as iterações são realizadas de maneira que não haja aumento no comprimento do arco  $\Delta S$  como indica a equação de restrição (4.19). Neste caso, a equação do comprimento do arco (4.18) reduz-se a uma condição de ortogonalidade. Pela substituição da equação (4.12) para o incremento dos deslocamentos  $[\Delta U_n]$  na equação (4.18) e observando que  $\Delta S$  é igual a zero para  $n \geq 2$ , o parâmetro de carga  $\lambda_n$  pode ser obtido como segue:

$$\lambda_n = - \frac{[\Delta U_1]^T [\Delta \bar{U}_n]}{[\Delta U_1]^T [\Delta \bar{U}_n] + \lambda_1} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (4.22)$$

Como pode ser visto, no método do comprimento do arco nem as cargas nem os deslocamentos são constantes no processo iterativo. Com o parâmetro de carga  $\lambda_n$  determinado, o incremento dos deslocamentos  $[\Delta U_n]$  para a  $n$ -ésima iteração pode ser calculado pela equação (4.12). Observe-se que a equação de restrição (4.18) e as condições de ortogonalidade envolvidas não tem unidades físicas consistentes. Por exemplo, nas equações (4.21) e (4.22), o fator de carga  $\lambda_n$  é por si só um escalar, mas os vetores de

deslocamentos  $[\Delta U_1]$ ,  $[\Delta \bar{U}_1]$ ,  $[\Delta \bar{\bar{U}}_1]$ ,  $[\Delta \bar{U}_n]$  e  $[\Delta \bar{\bar{U}}_n]$  contém translações e rotações que tem unidades e ordem de magnitude diferentes. Devido a tais inconsistências alguns tipos de problemas numéricos podem ocorrer.

Um esquema mostrando o método do controle do comprimento do arco é apresentado na figura 4.4.

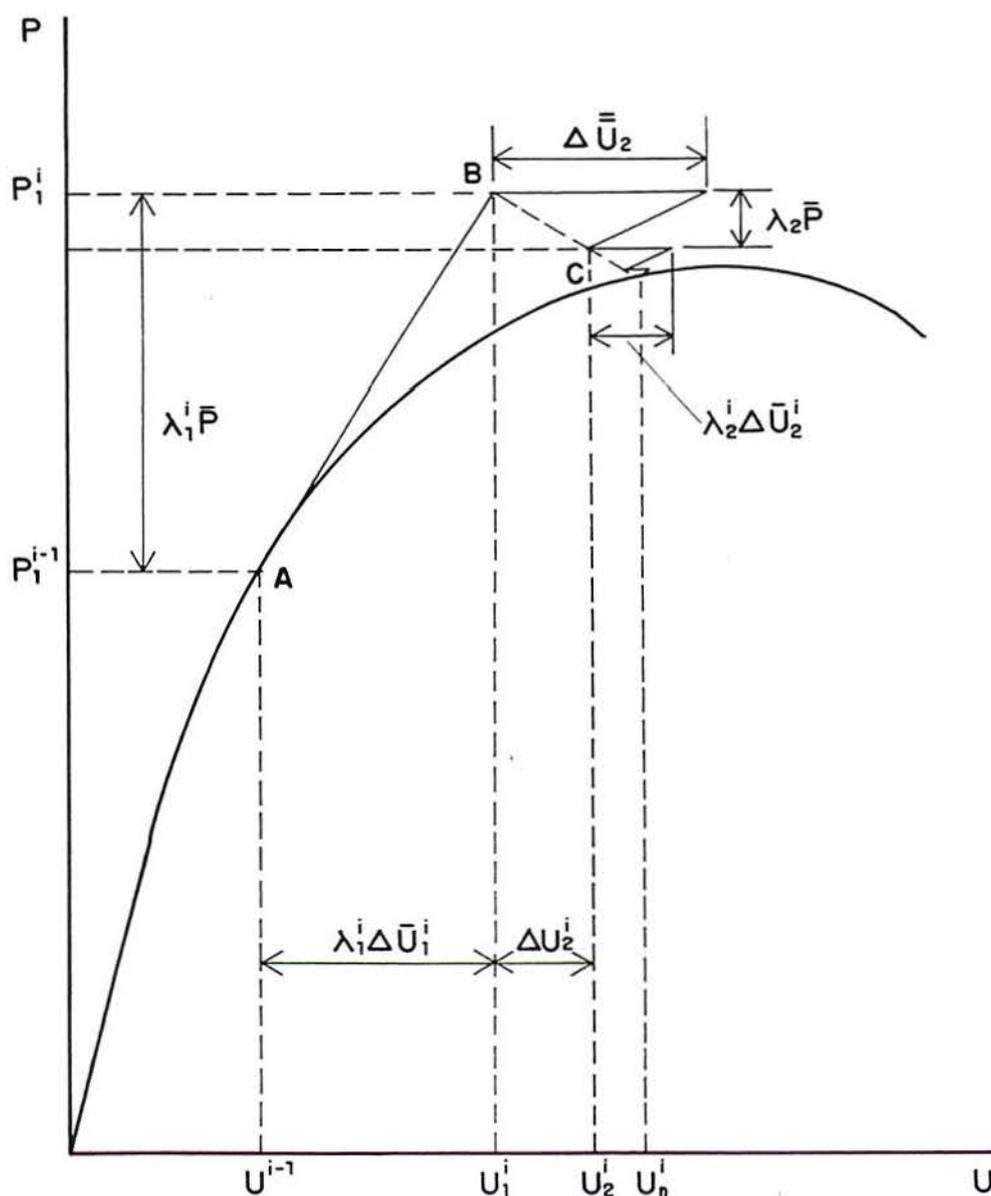


Figura 4.4 - Esquema do método do comprimento do arco

#### 4.2.5 - O método do controle do trabalho

O método do controle do trabalho proposto por Yang e McGuire (1985) é baseado na seguinte equação de restrição:

$$[\Delta U_n]^T \lambda_n [\bar{P}] = \Delta W \quad (4.23)$$

onde o incremento de trabalho  $\Delta W$  é definido como

$$\Delta W = \begin{cases} \text{constante para } n = 1 \\ 0 \text{ para } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.24)$$

Para a primeira iteração ( $n = 1$ ), a equação de restrição implica que o parâmetro de carga  $\lambda_1$  é determinado de tal modo que a estrutura absorva sempre um incremento constante de trabalho ( $\Delta W$ ) para cada novo nível de solicitação, visto que a resposta não-linear carga-deslocamento é de fato um processo de absorção-dissipação de energia. Pela substituição da equação (4.20) na equação (4.23), o parâmetro de carga  $\lambda_1$  pode ser obtido como

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{[\Delta \bar{U}_1]^T [\bar{P}]}} \quad (4.25)$$

onde o sinal de  $\lambda_1$  deve ser determinado.

O critério de que os incrementos de carga na  $n$ -ésima iteração produzam trabalho nulo ( $\Delta W = 0$ ) sobre os incrementos de deslocamentos. Para determinação dos valores subsequentes de  $\lambda_n$  ( $n \geq 2$ ) no processo iterativo de obtenção do equilíbrio da estrutura, resulta na expressão seguinte,

$$[\Delta U_n]^T (\lambda_n [\bar{P}]) = [0] \quad \text{para } n \geq 2 \quad (4.26)$$

A substituição de  $[\Delta U_n]$  da equação (4.12) na equação (4.26) fornece a expressão final de  $\lambda_n$  no método do controle do trabalho:

$$\lambda_n = -\frac{[\Delta \bar{U}_n]^T [\bar{P}]}{[\Delta \bar{U}_n]^T [\bar{P}]}, \quad \text{para } n \geq 2 \quad (4.27)$$

A consistência das unidades físicas envolvidas nas equações (4.25) a (4.27) podem ser facilmente verificadas. Comparando-se a equação (4.27) com a equação (4.22) verifica-se que o método do controle do trabalho difere do método do comprimento do arco não só pela omissão do termo de correção  $\lambda_1$  no denominador mas também pelo uso de diferentes vetores para calcular o parâmetro de carga  $\lambda_n$ .

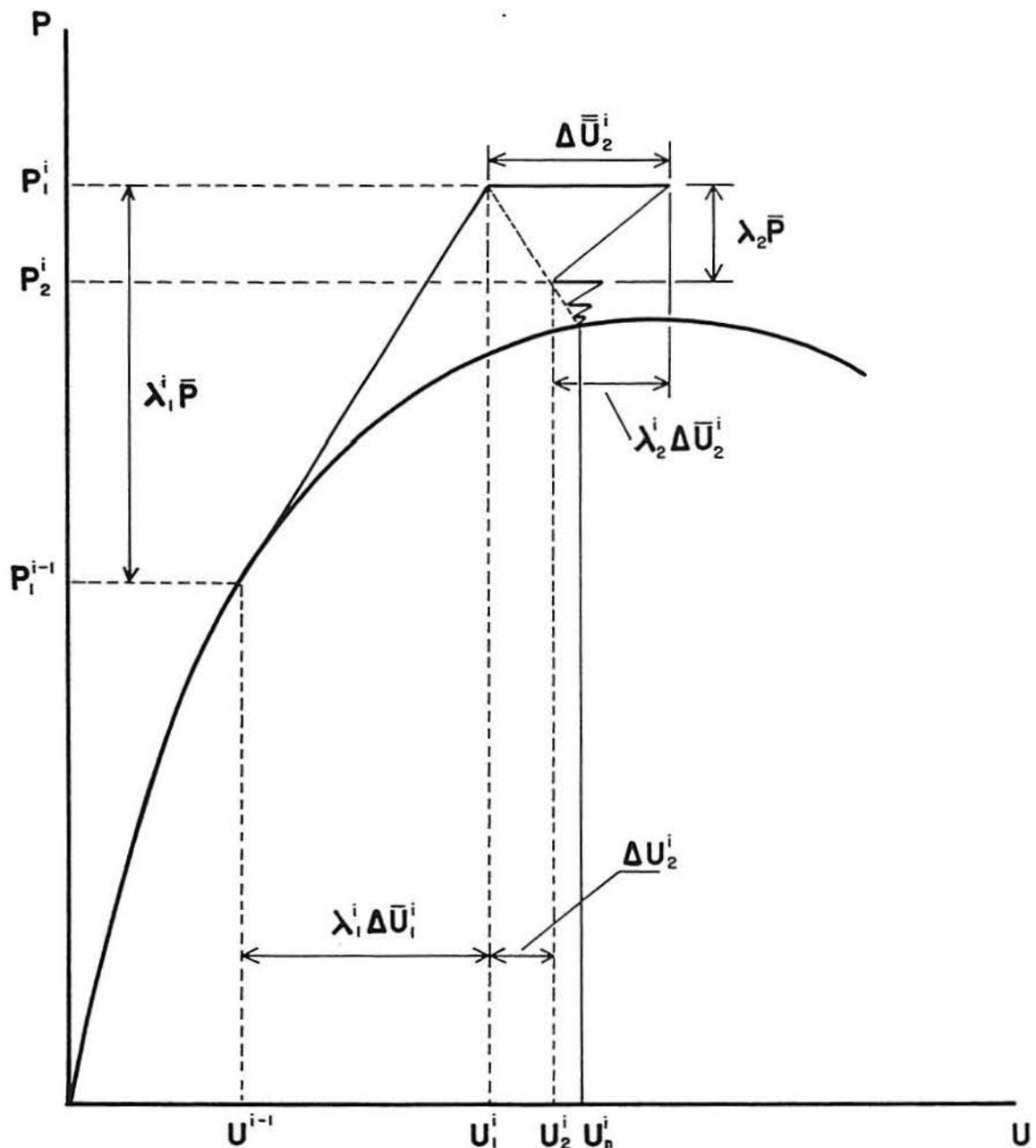


Figura 4.5 - Esquema do método do controle do trabalho

Para problemas onde o carregamento consiste de apenas uma carga nodal aplicada à estrutura, a equação (4.27), para os passos iterativos com ( $n \geq 2$ ), reduz-se a equação (4.17) porque o vetor dos carregamentos de referência  $[\bar{P}]$  contém só um elemento que não é nulo. Para este caso especial, o método do controle do trabalho é idêntico ao método do controle do deslocamento, com o deslocamento correspondente à carga nodal aplicada servindo como controle. Contudo, para casos onde há mais do que uma carga nodal aplicada, as características das iterações no método do controle do trabalho são diferentes do método do controle do deslocamento, já que naquele método tanto os deslocamentos como as cargas variam durante as iterações.

Um esquema mostrando o método do incremento constante de trabalho é dado na figura 4.5.

O parâmetro de incremento de carga  $\lambda_i$  pode ser relacionado com *parâmetro de rigidez corrente* (PRC) proposto por Bergan (1978, 1980) como

$$\lambda_i^i = \pm \lambda_i^1 |PRC|^{1/2} \quad (4.28)$$

onde  $\lambda_i^i$  e  $\lambda_i^1$  indicam, respectivamente, o incremento de carga para o passo incremental corrente e o incremento de carga para o primeiro passo incremental. Nesta equação o parâmetro de rigidez corrente (PRC) é definido como:

$$PRC = \frac{\frac{1}{\lambda_i^1} [\Delta U_i^1]^T [\bar{P}]}{\frac{1}{\lambda_i^i} [\Delta U_i^i]^T [\bar{P}]} \quad (4.29)$$

onde  $[\Delta U_i^1]$  e  $[\Delta U_i^i]$  indicam os incrementos de deslocamentos associados com a primeira iteração para o primeiro e  $i$ -ésimo passos incrementais respectivamente. Para verificar a relação dada na equação (4.28), substitui-se a equação (4.29) nesta para obter-se:

$$(\lambda_i^i [\Delta U_i^i]^T [\bar{P}])^{1/2} = (\lambda_i^1 [\Delta U_i^1]^T [\bar{P}])^{1/2} \quad (4.30)$$

Reorganizando, tem-se

$$[\Delta U_i^i]^T (\lambda_i^i [\bar{P}]) = [\Delta U_i^1]^T (\lambda_i^1 [\bar{P}]) = \text{constante} \quad (4.31)$$

que é exatamente a base do conceito do incremento constante do trabalho.

O parâmetro de rigidez corrente (PRC) tem um valor inicial unitário para algumas estruturas não-lineares. Uma propriedade geral deste parâmetro é que ele tende a aumentar para estruturas que são carregadas dentro do estágio de enrijecimento, e tende a diminuir para estruturas no estágio de decréscimo de rigidez. Para estruturas atingindo o ponto limite (*snap-through*) da curva carga-deflexão, o parâmetro de rigidez corrente anula-se. Então, um PRC positivo refere-se a regiões estáveis na curva carga-deflexão, para o qual as cargas externas podem ser incrementadas gradativamente. Para agir de acordo com o estágio de carregamento, o parâmetro de carga  $\lambda_l$  na equação (4.28) deve ser positivo. Já um valor negativo para o PRC indica uma região instável da curva carga-deflexão, no qual as cargas externas devem ser decrescidas, indicando que o sinal negativo deve ser adotado na equação (4.28). Este método geralmente é bom para o traçado de curvas com pontos limites, mas tem problemas no caso de ocorrerem pontos de *snap-back*. Por exemplo, para estruturas com o número de graus de liberdade pequeno, os termos  $[\Delta U_1]^T [\bar{P}]$  podem aproximar-se de zero quando os deslocamentos associados com a direção do maior carregamento tendem a um ponto de *snap-back*. Como consequência, o parâmetro de rigidez corrente (PRC) tende ao infinito, resultando com isso, divergências numéricas. Isto é certamente uma falha do PRC, como se verá a seguir. Outro ponto negativo do método do controle do trabalho é o uso do vetor  $[\bar{P}]$  como parâmetro de ponderação na equação (4.27). Este vetor, sendo arbitrário, não é um bom representante das propriedades da estrutura.

#### 4.2.6 - O método do controle do deslocamento generalizado

Do exposto anteriormente, viu-se que a maioria dos métodos existentes não são perfeitos em termos dos seguintes critérios:

- (a) estabilidade numérica na aproximação de pontos críticos, tais como, pontos limites (*snap-through*) e pontos de reversão do deslocamento (*snap-back*),
- (b) ajustamento dos incrementos de carga que reflita a variação da rigidez da estrutura, e
- (c) capacidade auto-adaptável na determinação da direção do carregamento.

No trabalho publicado em 1990, por Yang e Shieh, eles deduzem a seguinte equação para o fator do incremento de carga  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = \frac{1}{[C]^T [\Delta \bar{U}_n] + k} (H_n - [C]^T [\Delta \bar{U}_n]) \quad (4.32)$$

Esta equação serve como uma base útil para avaliar a estabilidade numérica de vários métodos incrementais-iterativos para a solução de problemas não-lineares. Aqui o método de solução é dito ser numericamente estável somente quando, tanto o incremento de carga  $\lambda_n$  quanto o incremento de deslocamento  $[\Delta U_n]$ , resolvidos com o método permanecem confinados ao longo da história do carregamento. Sempre que, para algum ponto, a carga ou alguma das componentes do deslocamento deixe do confinamento, instabilidades numéricas ou divergências podem ocorrer no processo de solução.

Portanto, a confiabilidade e eficácia de um esquema de solução não-linear depende das características de confinamento do fator do incremento de carga  $\lambda_n$  e dos incrementos de deslocamento  $[\Delta U_n]$ , que, por sua vez, resulta na escolha apropriada dos parâmetros de restrição  $[C]$ ,  $k$  e  $H_n$ .

Baseado nas considerações precedentes, o seguinte foi proposto por Yang e Shieh (1990):  $k=0$ , e  $[C] = \lambda_1 [\Delta \bar{U}_1^{i-1}]$ . Da equação (4.32), obtém-se:

$$\lambda_n = \frac{H_n - \lambda_1 [\Delta \bar{U}_n^{i-1}]^T [\Delta \bar{U}_n]}{\lambda_1 [\Delta \bar{U}_n^{i-1}]^T [\Delta \bar{U}_n]} \quad (4.33)$$

onde todas as quantidades sem o super-índice referem-se ao  $i$ -ésimo passo incremental,  $[\Delta \bar{U}_1^{i-1}]$  indica o incremento dos deslocamentos para a primeira iteração do  $(i-1)$ -ésimo passo incremental, e  $H_n$  é um deslocamento generalizado. Já que  $[\Delta \bar{U}_n] = [0]$  para  $n = 1$  e  $H_n = 0$  para  $n \geq 2$ , a equação precedente reduz-se a

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{H_1}{[\Delta \bar{U}_1^{i-1}]^T [\Delta \bar{U}_1]}} \quad (4.34)$$

para o primeiro passo iterativo, e

$$\lambda_n = -\frac{[\Delta\bar{U}_1^{i-1}]^T [\Delta\bar{U}_n]}{[\Delta\bar{U}_1^{i-1}]^T [\Delta\bar{U}_1]} \quad \text{com } n \geq 2 \quad (4.35)$$

para os passos iterativos restantes.

Fazendo-se  $[\Delta\bar{U}_1^0] = [\Delta\bar{U}_1^1]$  na equação (4.34), obtém-se o deslocamento generalizado  $H_n$  como

$$H_1 = (\lambda_1^1)^2 [\Delta\bar{U}_1^1]^T [\Delta\bar{U}_1^1] \quad (4.36)$$

que pode ser substituída na equação (4.34) resultando

$$\lambda_1 = \lambda_1^1 \left( \frac{[\Delta\bar{U}_1^1]^T [\Delta\bar{U}_1^1]}{[\Delta\bar{U}_1^{i-1}]^T [\Delta\bar{U}_1^1]} \right)^{1/2} \quad (4.37)$$

onde define-se o *parâmetro de rigidez generalizada* (PRG) como

$$PRG = \frac{[\Delta\bar{U}_1^1]^T [\Delta\bar{U}_1^1]}{[\Delta\bar{U}_1^{i-1}]^T [\Delta\bar{U}_1^1]} \quad (4.38)$$

O parâmetro de incremento de carga  $\lambda_1$  para o  $i$ -ésimo passo pode ser calculado como

$$\lambda_1^i = \pm \lambda_1^1 |PRG|^{1/2} \quad (4.39)$$

onde o parâmetro de incremento de carga  $\lambda_1$  para o primeiro passo de carga é um valor prefixado.

Este método de solução foi denominado por Yang e Shieh (1990), como *método do controle do deslocamento generalizado*. Este método é superior a muitos métodos existentes, conforme (Yang e Kuo (1994)), pelas seguintes razões:

(a) a estabilidade numérica pode sempre assegurada em regiões próximas a pontos limites (*snap-through*) ou pontos de *snap-back*, já que tanto o parâmetro de incremento de carga  $\lambda_n$  quanto o incremento de deslocamento  $[\Delta U_n]$  permanecem confinados,

(b) a variação não-linear da rigidez da estrutura é levada em conta através do parâmetro de rigidez generalizada (PRG), como pode ser visto pela equação (4.39), e

(c) a mudança do sinal do parâmetro de rigidez generalizada (PRG) serve como um indicador para a reversão da direção do carregamento.

Uma análise das propriedades do parâmetro de rigidez generalizada (PRG) será feita no próximo item, com o intuito de esclarecer o que foi exposto.

#### 4.2.6.1 - Uma comparação entre os parâmetros PRG e PRC

O parâmetro de rigidez corrente (PRC), proposto por Bergan (1978,1980), tem sido usado para monitorar a variação da rigidez da estrutura numa análise não-linear geométrica. Partindo com um valor inicial unitário, este parâmetro aumenta quando a rigidez da estrutura aumenta e diminui quando a rigidez da estrutura diminui. Um valor nulo para o PRC indica a ocorrência de um ponto limite. Apesar destas características, o PRC não é satisfatório para aplicar em problemas envolvendo múltiplos pontos críticos. Primeiro, porque o PRC muda de sinal tanto em pontos limites (*snap-through*) como em pontos de *snap-back*, sendo assim impossível de distinguir a diferença entre estes dois tipos de pontos. Sabendo-se que a direção do carregamento necessita ser revertida somente quando passar por pontos limites, conclui-se que o PRC não é um parâmetro apropriado para guiar a direção do carregamento. Além disso, o PRC varia de uma maneira abrupta sempre que há reversão em alguma das componentes do deslocamento (ponto de *snap-back*). Esta falta de suavidade quando PRC se aproxima de um ponto de *snap-back* pode causar certos problemas numéricos se for tentado uma relação entre o parâmetro de incremento de carga  $\lambda_n$  e o PRC, ou seja, usando uma equação do tipo dada em (4.28).

O parâmetro de rigidez generalizado (PRG), como definido na equação (4.38) tem várias características importantes:

1 - O PRG foi definido na equação (4.38) como a razão da norma do incremento dos deslocamentos para o primeiro passo pela norma (aproximada) do incremento dos deslocamentos do corrente passo. Com esta definição, o PRG é um representante da rigidez da estrutura no corrente passo incremental em relação ao primeiro passo. Uma vantagem deste parâmetro é que nenhum salto nos valores numéricos pode ocorrer até mesmo em

regiões próximas de pontos de *snap-back*.

2 - O PRG resulta negativo somente para os passos incrementais imediatamente depois de pontos limites, sendo que para os outros passos incrementais este valor permanece positivo. Isto pode ser atribuído ao fato de que o sinal do PRG depende somente dos vetores  $[\Delta\bar{U}_1^{i-1}]$  e  $[\Delta\bar{U}_1^i]$ , como pode ser visto na equação (4.38) ou esquematicamente na figura 4.6. Como o PRG pode confiavelmente prever a ocorrência de pontos limites, ele serve como um bom indicador para a mudança da direção do carregamento.

3 - O PRG, similarmente ao PRC, começa com um valor inicial unitário e anula-se em pontos limites. Estes parâmetros aumentam em estruturas no estágio de enrijecimento, e decrescem no estágio de desenrijecimento. Contudo o PRG é superior ao PRC, pois este permanece confinado ao longo da história de carregamento, indiferentemente da presença de pontos de *snap-back*. Por isso o PRG pode ser usado, com êxito, na equação (4.39) para ajustar o parâmetro de incremento de carga  $\lambda_n$  em cada passo incremental, como um reflexo da variação da não-linearidade da estrutura considerada.

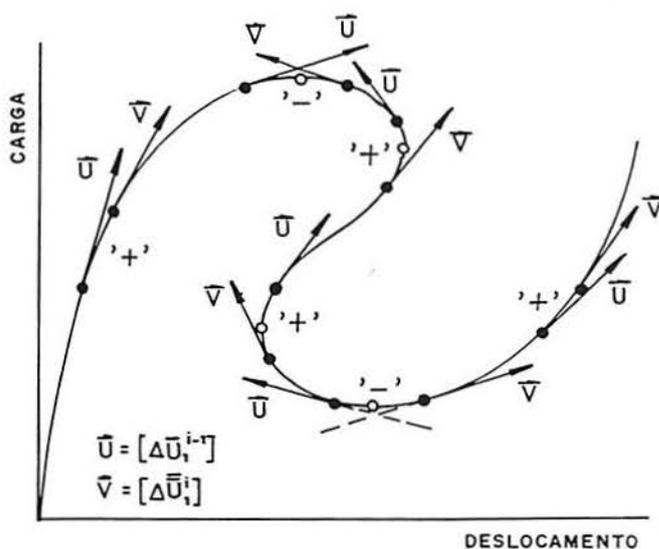


Figura 4.6 - Características do parâmetro de rigidez corrente (PRG)

Uma observação que não pode deixar de ser dita a respeito de pontos críticos, tais como, pontos limites (*snap-through*) e pontos de *snap-back*, é que eles representam simplesmente um ponto matemático na curva carga-deflexão que dificilmente podem ser encontrados na prática devido a presença de erros computacionais, como por exemplo, erros de truncamento e arredondamento. Portanto, quando fala-se sobre a natureza iterativa do esquema de solução, preocupa-se unicamente com as características de convergência geral do método na aproximação e afastamento do ponto limite ou outro ponto crítico. Por esta razão o correto é usar-se o termo *vizinhança do ponto crítico* em vez de ponto crítico.

### 4.3 - Procedimentos para a recuperação dos esforços no elemento

Neste ítem ver-se-á os procedimentos relacionados com a *segunda etapa*, na qual pode ser decomposta em três partes:

- (a) a atualização de geometria para cada elemento (ítem 4.3.1),
- (b) o cálculo das deformações do elemento (ítem 4.3.3), e
- (c) o cálculo das forças no elemento (ítem 4.3.4).

Estes procedimentos seguem os trabalhos de Kuo, Yang e Chou (1993).

#### 4.3 1 – Atualização da geometria do elemento

Assumindo-se que para um passo incremental típico, o incremento de deslocamentos  $[U]$  da estrutura já tenha sido resolvida pelas equações de equilíbrio (4.4), no qual o incremento de deslocamentos  $[u]$  pode ser facilmente calculada para cada elemento. O cálculo das forças nodais  $[{}^2f]$  para cada elemento, dado o incremento dos deslocamentos nodais  $[u]$ , será feito utilizando uma aproximação baseada no conceito de deformações naturais. Com esta aproximação tem-se que primeiramente atualizar as seções extremas de cada elemento par levar em conta o incremento de deslocamentos  $[u]$  recém gerados, no qual as deformações naturais  $[u]_n$  podem ser calculadas para cada elemento.

Convencionalmente, as rotações nodais para cada elemento de estruturas espaciais são por hipótese pequenas (Oran, 1973; Chan e Kitipornchai, 1987; Marques, 1990). Como a lei da comutatividade permanece válida para pequenas rotações sobre os três

eixos, as rotações nodais para cada elemento podem ser calculadas simplesmente pela adição dos incrementos das rotações geradas no corrente passo com aquelas acumuladas no passo anterior. Por conseguinte, com a hipótese das pequenas rotações, o procedimento para atualizar as seções extremas torna-se tarefa trivial. Contudo, para o caso onde as rotações nodais são de magnitude finitas, o procedimento para a atualização das seções extremas de cada elemento no espaço tridimensional deve ser desenvolvido baseado na teoria das rotações finitas de Euler para levar em conta a natureza não-comutativa destas rotações no espaço tridimensional.

Como foi exposto anteriormente, em uma análise não-linear incremental, denota-se a configuração inicial indeformada do corpo sólido por  $C_0$ , a última configuração calculada por  $C_1$ , e a corrente configuração deformada por  $C_2$ .

Na presente dissertação somente estruturas com nós rígidos serão discutidas.

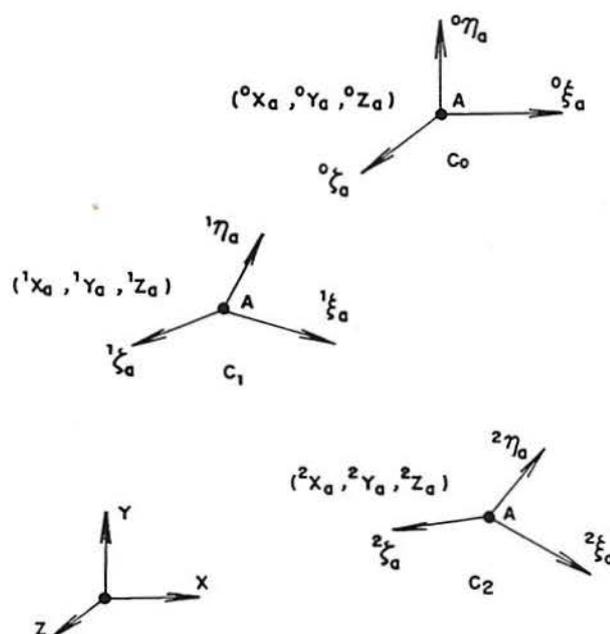


Figura 4.7 - Coordenadas nodais do elemento

Para o presente estudo, pode-se arbitrar para cada nó do elemento, um sistema de eixos de referência ortogonais. Como mostra a figura 4.7, os eixos de referência para o nó A do elemento para a configuração  $C_0$  são indicados pelos três vetores unitários  ${}^0\bar{\xi}_a$ ,  ${}^0\bar{\eta}_a$ ,  ${}^0\bar{\zeta}_a$ ,

para a configuração  $C_1$  pelos vetores unitários  ${}^1\bar{\xi}_a, {}^1\bar{\eta}_a, {}^1\bar{\zeta}_a$ , e para a configuração  $C_2$  pelos vetores unitários  ${}^2\bar{\xi}_a, {}^2\bar{\eta}_a, {}^2\bar{\zeta}_a$ . As coordenadas do nó A para as três configurações são denotadas por  $({}^0X_a, {}^0Y_a, {}^0Z_a)$ ,  $({}^1X_a, {}^1Y_a, {}^1Z_a)$ , e  $({}^2X_a, {}^2Y_a, {}^2Z_a)$ . Note que para a configuração  $C_0$ , os eixos de referência para cada nó são paralelos ao sistema de coordenadas global  $XYZ$ .

A seguir, o procedimento para atualização das rotações nodais para cada elemento baseado na teoria das rotações finitas será descrito.

Como mostra a figura 4.8, o plano  $OSP$  move-se para  $OSP'$  quando sujeito a rotação rígida  $\phi$  sobre o eixo axial  $OS$ , que é acompanhada pelo movimento do vetor posição  $\vec{r}$  para  $\vec{r}'$ . Conforme a fórmula da rotação finita de Euler (Cheng e Gupta, 1989),

$$\vec{r}' = \cos\phi \vec{r} + \sin\phi (\vec{n} \otimes \vec{r}) + (1 - \cos\phi) (\vec{n} \bullet \vec{r}) \vec{n} \quad (4.40)$$

onde “ $\otimes$ ” indica o produto vetorial, “ $\bullet$ ” o produto escalar, e  $\vec{n}$  o vetor unitário na direção de  $OS$ ,

$$\vec{n} = \frac{\vec{OS}}{|\vec{OS}|} \quad (4.41)$$

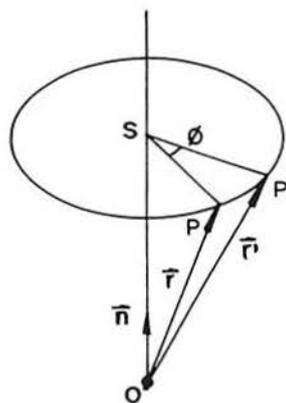


Figura 4.8 - Conceito de rotação finita

Durante o movimento do elemento da configuração  $C_1$  para a configuração  $C_2$ , o incremento de deslocamento  $\Delta\vec{u}_a$  e o incremento de rotação  $\Delta\vec{\theta}_a$  experimentado pelo nó A

pode ser escrito como

$$\Delta \vec{u}_a = \Delta u_x \vec{i} + \Delta u_y \vec{j} + \Delta u_z \vec{k} \quad (4.42)$$

$$\Delta \vec{\theta}_a = \Delta \theta_x \vec{i} + \Delta \theta_y \vec{j} + \Delta \theta_z \vec{k} \quad (4.43)$$

O módulo  $\phi_a$  e o vetor unitário da direção  $\vec{n}_a$  para o incremento de rotação  $\Delta \vec{\theta}_a$  pode ser determinado como

$$\phi_a = |\Delta \vec{\theta}_a| = \sqrt{\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2 + \Delta \theta_z^2} \quad (4.44)$$

$$\vec{n}_a = \frac{\Delta \vec{\theta}_a}{\phi_a} \quad (4.45)$$

De acordo com as equações (4.40)-(4.45), os vetores unitários para os eixos de referência do nó A na configuração  $C_2$  podem ser escritos como,

$${}^2\vec{\xi}_a = \cos\phi_a \cdot {}^1\vec{\xi}_a + \sin\phi_a (\vec{n}_a \otimes {}^1\vec{\xi}_a) + (1 - \cos\phi_a) (\vec{n}_a \bullet {}^1\vec{\xi}_a) \vec{n}_a \quad (4.46)$$

$${}^2\vec{\eta}_a = \cos\phi_a \cdot {}^1\vec{\eta}_a + \sin\phi_a (\vec{n}_a \otimes {}^1\vec{\eta}_a) + (1 - \cos\phi_a) (\vec{n}_a \bullet {}^1\vec{\eta}_a) \vec{n}_a \quad (4.47)$$

$${}^2\vec{\zeta}_a = \cos\phi_a \cdot {}^1\vec{\zeta}_a + \sin\phi_a (\vec{n}_a \otimes {}^1\vec{\zeta}_a) + (1 - \cos\phi_a) (\vec{n}_a \bullet {}^1\vec{\zeta}_a) \vec{n}_a \quad (4.48)$$

Já as coordenadas do nó A para a configuração  $C_2$  são simplesmente

$$({}^2X_a, {}^2Y_a, {}^2Z_a) = ({}^1X_a + \Delta u_x, {}^1Y_a + \Delta u_y, {}^1Z_a + \Delta u_z) \quad (4.49)$$

As equações (4.42) - (4.49) podem ser facilmente obtidas para o nó B seguindo um raciocínio análogo ao feito para o nó A.

#### 4.3.2 - Eixos do elemento e eixos das seções nodais

Neste ítem, a variação dos eixos do elemento e dos eixos das seções nodais no processo de deformação do elemento será discutida. Como mostra a figura 4.9(a), os eixos da seção para o nó A do elemento na configuração  $C_0$  são denotados por  ${}^0\vec{\alpha}_a$ ,  ${}^0\vec{\beta}_a$ , e  ${}^0\vec{\gamma}_a$  onde  ${}^0\vec{\alpha}_a$  é assumido como sendo coincidente com o eixo do elemento que passa no

baricentro da seção, e  ${}^0\bar{\beta}_a$ , e  ${}^0\bar{\gamma}_a$ , são, respectivamente, os eixos principais centrais de inércia da seção. Similarmente, um sistema de eixos ortogonais  ${}^0\bar{\alpha}_b$ ,  ${}^0\bar{\beta}_b$ , e  ${}^0\bar{\gamma}_b$ , pode ser tomado para o nó B na configuração  $C_0$ . Da mesma forma é necessário introduzir um terceiro sistema de eixos ortogonais  ${}^0\bar{x}$ ,  ${}^0\bar{y}$ , e  ${}^0\bar{z}$  para o elemento na configuração  $C_0$ , onde  ${}^0\bar{x}$  é assumido como sendo o eixo baricêntrico do elemento. Pela figura 4.9(a), vê-se que para a configuração  $C_0$  os três sistemas de eixos ortogonais anteriores são paralelos entre si.

Quando o elemento move-se da configuração  $C_0$  para a configuração  $C_1$  (figura 4.9(b)), os eixos das seções ( ${}^0\bar{\alpha}_a$ ,  ${}^0\bar{\beta}_a$ ,  ${}^0\bar{\gamma}_a$ ) e ( ${}^0\bar{\alpha}_b$ ,  ${}^0\bar{\beta}_b$ ,  ${}^0\bar{\gamma}_b$ ) para os dois nós mudam para as direções normal e principais das seções nodais rotacionadas. Como o eixo baricêntrico do elemento torna-se curvo, as duas seções nodais, no geral, não permanecem paralelas uma com a outra. Neste caso, pode-se definir o eixo do elemento  ${}^1\bar{x}$  na configuração  $C_1$  como o eixo que passa através dos baricentros das seções nodais. Além disso, assumindo-se um plano  ${}^1S$  perpendicular ao eixo axial  ${}^1\bar{x}$ , pode-se definir  ${}^1\bar{y}$ , e  ${}^1\bar{z}$  para a mesma configuração como a média das projeções dos eixos principais centrais de inércia das duas seções nodais no plano  ${}^1S$ . Logo, o procedimento para determinar os eixos do elemento e os eixos das seções nodais baseado nas posições e eixos de referência dos nós do elemento é apresentado.

Os eixos da seção para o nó A para a configuração  $C_0$  pode ser relacionado com os eixos de referência como

$$[{}^0p_a] = \{{}^0R\}[{}^0q_a] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma, \quad q = \xi, \eta, \zeta) \quad (4.50)$$

onde o super-índice esquerdo “0” indica a configuração  $C_0$ ,  $[{}^0p_a]$  os eixos da seção para o nó A do elemento, e  $[{}^0q_a]$  os eixos de referência para o nó A. Como os eixos de referência são paralelos ao sistema de eixos globais XYZ na configuração  $C_0$ , a matriz de rotação  $\{{}^0R\}$  pode ser escrita como

$$\{{}^0R\} = \{[{}^0\alpha_a] \ [{}^0\beta_a] \ [{}^0\gamma_a]\} \quad (4.51)$$

no qual  $[{}^0\alpha_a]$ ,  $[{}^0\beta_a]$ , e  $[{}^0\gamma_a]$  indicam as componentes dos eixos da seção para o nó A em coordenadas globais XYZ. A matriz  $\{{}^0R\}$  pode ser interpretada como a matriz de

transformação entre os eixos do elemento e os eixos de coordenadas globais para a configuração  $C_0$ , já que nesta configuração o elemento está indeformado e os eixos das seções nodais do elemento são paralelos aos eixos do elemento.

Baseado na hipótese de nós rígidos, a transformação entre os eixos de referência e os eixos das seções para os nós do elemento não são influenciados pelas deformações do elemento. Então

$$[{}^1p_a] = \{{}^0R\} [{}^1q_a] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma; \quad q = \xi, \eta, \zeta) \quad (4.52)$$

$$[{}^2p_a] = \{{}^0R\} [{}^2q_a] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma; \quad q = \xi, \eta, \zeta) \quad (4.53)$$

onde  $[{}^1p_a]$  e  $[{}^2p_a]$  representam os eixos da seção para o nó A na configuração  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente. Similarmente, o seguinte pode ser escrito para o nó B:

$$[{}^1p_b] = \{{}^0R\} [{}^1q_b] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma; \quad q = \xi, \eta, \zeta) \quad (4.54)$$

$$[{}^2p_b] = \{{}^0R\} [{}^2q_b] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma; \quad q = \xi, \eta, \zeta) \quad (4.55)$$

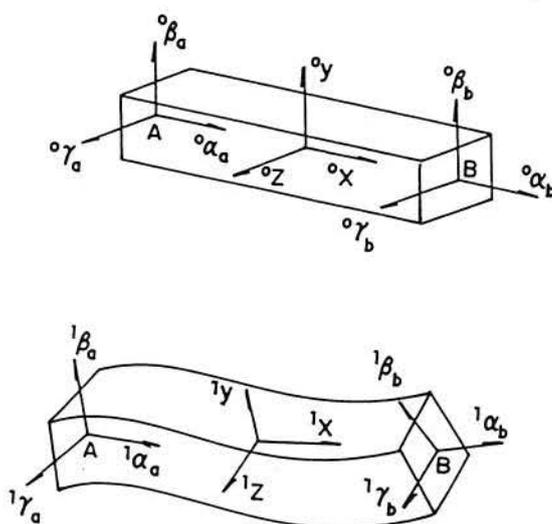


Figura 4.9 - Coordenadas do elemento e coordenadas nodais:  
(a) configuração  $C_0$ ; (b) configuração  $C_1$

Nas equações (4.50) - (4.55), todos os vetores foram referidos ao sistema de coordenadas global XYZ.

O eixo axial  ${}^1\bar{x}$  para o elemento em  $C_1$  pode ser determinado pelo vetor posição formado pelos nós A e B,

$$[{}^1x] = \frac{1}{{}^1L} [{}^1X_b - {}^1X_a, \quad {}^1Y_b - {}^1Y_a, \quad {}^1Z_b - {}^1Z_a]^T \quad (4.56)$$

onde  ${}^1L$  denota o comprimento do elemento em  $C_1$

$${}^1L = \sqrt{({}^1X_b - {}^1X_a)^2 + ({}^1Y_b - {}^1Y_a)^2 + ({}^1Z_b - {}^1Z_a)^2} \quad (4.57)$$

Sendo  ${}^1S$ , por definição, um plano perpendicular ao eixo axial  ${}^1\bar{x}$ , as projeções dos eixos da seção  ${}^1\bar{\beta}$  e  ${}^1\bar{\gamma}$  para os nós A e B no plano  ${}^1S$  podem ser escritas como (figura 4.10)

$$[{}^1p_j^*] = [{}^1p_j] - \bar{\lambda}_{pj} [{}^1x] \quad (j = a, b; \quad p = \beta, \gamma) \quad (4.58)$$

onde

$$\bar{\lambda}_{pj} = [{}^1p_j]^T [{}^1x] \quad (j = a, b; \quad p = \beta, \gamma) \quad (4.59)$$

Normalizando

$$[{}^1\bar{p}_j] = \frac{1}{\mu_{pj}} [{}^1p_j^*] \quad (j = a, b; \quad p = \beta, \gamma) \quad (4.60)$$

onde

$$\mu_{pj} = \sqrt{[{}^1p_j^*]^T [{}^1p_j^*]} \quad (j = a, b; \quad p = \beta, \gamma) \quad (4.61)$$

No geral, os eixos da seção  ${}^1\bar{\beta}$  e  ${}^1\bar{\gamma}$  para os nós A e B não permanecem paralelos entre si quando o elemento deforma-se. Consequentemente, as projeções dos eixos da seção para estes nós não serão coincidentes. Tomando-se a média (figura 4.10(a)), tem-se

$$[{}^1e_s] = [{}^1\bar{p}_a] + [{}^1\bar{p}_b] \quad (s = y, z; p = \beta, \gamma) \quad (4.62)$$

que pode ser normalizada para dar

$$[{}^1\bar{e}_s] = \frac{1}{\mu_s} [{}^1e_s] \quad (s = y, z) \quad (4.63)$$

onde

$$\mu_s = \sqrt{[{}^1e_s]^T [{}^1e_s]} \quad (s = y, z) \quad (4.64)$$

No geral, os vetores unitários  $[{}^1\bar{e}_y]$  e  $[{}^1\bar{e}_z]$ , que representam as direções médias das projeções dos eixos da seção para os dois nós, não são perpendiculares um com o outro. Em ordem para estabelecer um sistema de eixos ortogonais, mais modificações deverão ser feitas.

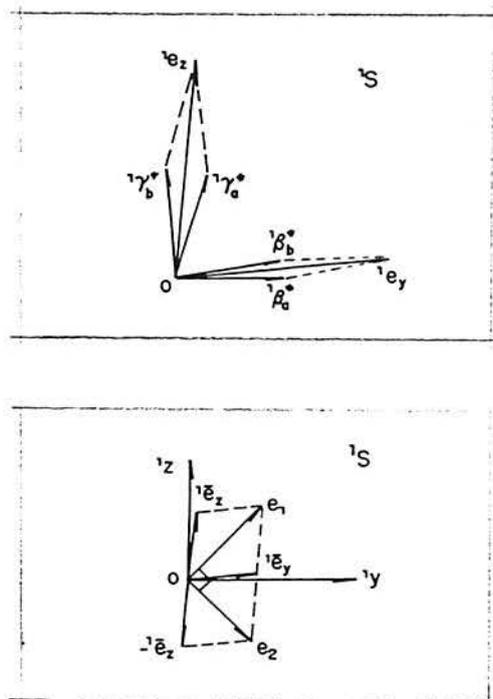


Figura 4.10 - Cálculo das coordenadas do elemento:

(a) projeções médias  $C_0$ ; (b) novos eixos do elemento

Sabendo-se que as diagonais de um losango formados pelos vetores  $[\bar{e}_y]$  e  $[\bar{e}_z]$ , são perpendiculares entre si e que elas dividem os ângulos internos do losango em dois ângulos iguais, estas diagonais (figura 4.10(b)) podem ser expressas como

$$[e_1] = [\bar{e}_y] + [\bar{e}_z] \quad (4.65)$$

$$[e_2] = [\bar{e}_y] - [\bar{e}_z] \quad (4.66)$$

que podem ser normalizadas como

$$[\bar{e}_k] = \frac{1}{\mu_k} [e_k] \quad (k = 1, 2) \quad (4.67)$$

onde

$$\mu_k = \sqrt{[e_k]^T [e_k]} \quad (k = 1, 2) \quad (4.68)$$

Rotando os vetores unitários  $[\bar{e}_y]$  e  $[\bar{e}_z]$  no sentido anti-horário de um ângulo de  $45^\circ$  (figura 4.10(b)), obtém-se os eixos do elemento (média dos eixos das seções nodais) como segue:

$$[{}^1y] = \frac{1}{\sqrt{2}} ([\bar{e}_1] + [\bar{e}_2]) \quad (4.69)$$

$$[{}^1z] = \frac{1}{\sqrt{2}} ([\bar{e}_1] - [\bar{e}_2]) \quad (4.70)$$

A matriz de rotação para o elemento na configuração  $C_1$  pode ser formada pela combinação dos eixos  $[{}^1x]$  da equação (4.56),  $[{}^1y]$  da equação (4.69), e  $[{}^1z]$  da equação (4.70), isto é,

$$\{{}^1R\} = \{[{}^1x] \ [{}^1y] \ [{}^1z]\} \quad (4.71)$$

Similarmente, os eixos da seção para o elemento na configuração  $C_2$  podem ser formuladas baseado nas posições e eixos de referência dos nós do elemento na dita configuração.

### 4.3.3 - Cálculo das deformações naturais

Para calcular as solicitações no elemento para cada passo incremental, os incrementos de deslocamentos  $[u]$ , obtidos das equações de equilíbrio incrementais da estrutura, podem ser conceitualmente decompostos em duas partes: os deslocamentos de corpo rígido  $[u]_r$ , e as deformações naturais  $[u]_n$ , onde

$$[u] = [u]_r + [u]_n \quad (4.72)$$

De acordo com o teorema do movimento de corpo rígido, o efeito dos deslocamentos de corpo rígido é rotacionar todas as forças iniciais atuando sobre o elemento finito num ângulo igual ao da rotação do corpo rígido. O resultado é a preservação do equilíbrio do elemento finito na configuração deslocada, sem nenhuma mudança nas grandezas das forças atuantes (Conci, 1988).

Para os deslocamentos de corpo rígido, os eixos  ${}^1\bar{x}$ ,  ${}^1\bar{y}$  e  ${}^1\bar{z}$  do elemento na configuração  $C_1$  serão convertidos nos eixos  ${}^2\bar{x}$ ,  ${}^2\bar{y}$  e  ${}^2\bar{z}$  na configuração  $C_2$ , como indicado pela curva pontilhada na figura 4.11. Nesta figura, a deformação do elemento da curva pontilhada para a curva sólida em  $C_2$  é referida como deformação natural ou deformação do elemento. Para um elemento espacial com sete graus de liberdade em cada nó, o vetor de deformações naturais  $[u]_n$  em relação aos eixos  ${}^2\bar{x}$ ,  ${}^2\bar{y}$  e  ${}^2\bar{z}$  no estado  $C_2$ , pode ser escrito como:

$$[u]_n = [0, 0, 0, \theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}, \Delta U_b, 0, 0, \theta_{xb}, \theta_{yb}, \theta_{zb}, u'_{xa}, u'_{xb}] \quad (4.73)$$

onde  $\Delta U_b$  representa a variação do comprimento da corda do elemento,  $\theta_{xa}$ ,  $\theta_{ya}$  e  $\theta_{za}$  as rotações do nó  $A$  do elemento sobre os eixos  ${}^2\bar{x}$ ,  ${}^2\bar{y}$  e  ${}^2\bar{z}$ , respectivamente, e definições similares são adotadas para  $\theta_{xb}$ ,  $\theta_{yb}$  e  $\theta_{zb}$ .

Por definição,

$$\Delta U_b = {}^2L - {}^1L \quad (4.74)$$

onde  ${}^2L$  e  ${}^1L$  representam o comprimento da corda do elemento nos estados  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente (ver equação (4.57) para  ${}^1L$ ).

As outras componentes do vetor de deformações naturais  $[u]_n$  na equação (4.73) podem ser determinadas pelos eixos das seções nodais e eixos do elemento nas configurações  $C_1$  e  $C_2$ . Primeiro, os vetores diretores para os eixos da seção em coordenadas globais nas equações (4.52) e (4.53) na configuração  $C_k$  ( $k = 1, 2$ ) podem ser transformados em coordenadas locais  ${}^k\bar{x}$ ,  ${}^k\bar{y}$  e  ${}^k\bar{z}$ , como

$$[{}^k_0 p_a] = \{{}^k R\}^T [{}^k q_a] \quad (k = 1, 2; \quad p = \alpha, \beta, \gamma) \quad (4.75)$$

onde o sub-índice "0" indica que a configuração de referência é  $C_0$ , e  $\{{}^k R\}$  é a matriz de transformação para o elemento na configuração  $C_k$ :

$$\{{}^k R\} = \{[{}^k x] \quad [{}^k y] \quad [{}^k z]\} \quad (4.76)$$

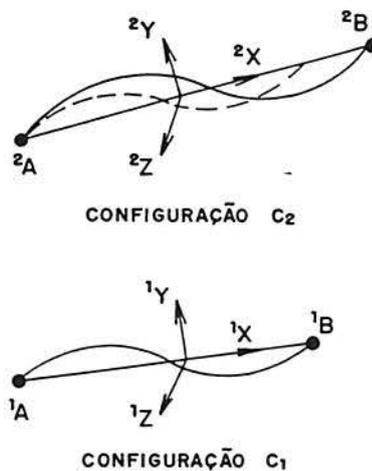


Figura 4.11 - Deslocamentos de corpo rígido e deformações naturais

Como mostram as figuras 4.12(a) e 4.12(b),  $[{}^1_0 p_a]$  e  $[{}^2_0 p_a]$  representam as deformações naturais (rotações) do elemento no nó A da configuração  $C_0$  para  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente. Consequentemente, os incrementos de deformações do elemento no nó A durante o passo incremental pode ser expresso em relação aos eixos da seção na configuração  $C_1$  como:

$$[{}^2_1 p_a] = \{[{}^1_0 \alpha_a] \quad [{}^1_0 \beta_a] \quad [{}^1_0 \gamma_a]\}^T [{}^2_0 p_a] \quad (p = \alpha, \beta, \gamma) \quad (4.77)$$

onde  $[{}^1_0 \alpha_a]$ ,  $[{}^1_0 \beta_a]$  e  $[{}^1_0 \gamma_a]$  são os vetores base para os eixos da seção no nó A

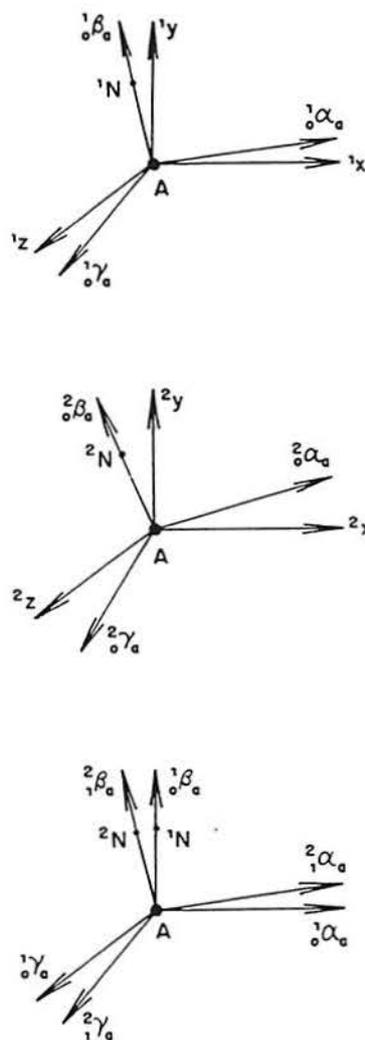


Figura 4.12 - Variação das coordenadas da seções nodais: (a) Configuração  $C_1$ ;  
(b) Configuração  $C_2$ ; (c) Incrementos Rotacionais

Mostrou-se que, quando o elemento move-se da configuração  $C_1$  para a configuração  $C_2$ , os eixos  $[_0^2\alpha_a]$ ,  $[_0^2\beta_a]$  e  $[_0^2\gamma_a]$  da seção do nó A são rotacionados para transformar-se nos eixos  $[_1^2\alpha_a]$ ,  $[_1^2\beta_a]$  e  $[_1^2\gamma_a]$  mostrados na figura (4.12(c)). Desta maneira, o valor do ângulo de rotação  $\phi_a$ , para o nó A, que surge durante o passo incremental da configuração  $C_1$  a configuração  $C_2$ , e seu eixo de rotação  $[_1n_a]$ , podem ser determinados. Seja

Seja

$$[{}^1n_a] = [n_1, n_2, n_3]^T \quad (4.78)$$

o qual está sujeito à condição:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (4.79)$$

Além disso, adotando-se

$$\bar{r} = [{}^1\alpha_a] = [1, 0, 0]^T \quad (4.80)$$

$$\bar{r}' = [{}^2\alpha_a] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T \quad (4.81)$$

pode-se obter as seguintes relações para os eixos  ${}^2\bar{\alpha}_a$ , utilizando-se a fórmula da rotação finita de Euler (4.40):

$$\alpha_1 = \cos \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1^2 \quad (4.82)$$

$$\alpha_2 = n_3 \operatorname{sen} \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_2 \quad (4.83)$$

$$\alpha_3 = -n_2 \operatorname{sen} \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_3 \quad (4.84)$$

Similarmente, adotando-se

$$\bar{r} = [{}^1\beta_a] = [0, 1, 0]^T \quad (4.85)$$

$$\bar{r}' = [{}^2\beta_a] = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \quad (4.86)$$

a seguinte relação para o eixo  ${}^2\bar{\beta}_a$  pode ser obtida:

$$\beta_1 = -n_3 \operatorname{sen} \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_2 \quad (4.87)$$

Agora, subtraindo-se a equação (4.83) da equação (4.86) obtém-se

$$2n_3 \operatorname{sen} \phi_a = -\beta_1 + \alpha_2 \quad (4.88)$$

Definindo-se

$$[{}^1_0\gamma_a] = [0, 0, 1]^T \quad (4.89)$$

$$[{}^2_1\gamma_a] = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T \quad (4.90)$$

pode-se mostrar que, além da equação (4.88), as seguintes relações são válidas:

$$2n_2 \operatorname{sen} \phi_a = -\alpha_3 + \gamma_1 \quad (4.91)$$

$$2n_1 \operatorname{sen} \phi_a = -\gamma_2 + \beta_3 \quad (4.92)$$

Das equações (4.79), (4.88), (4.91) e (4.92), as seguintes componentes podem ser obtidas para o eixo da rotação:

$$n_1 = -\frac{\gamma_2 - \beta_3}{\lambda} \quad (4.93)$$

$$n_2 = -\frac{\alpha_3 - \gamma_1}{\lambda} \quad (4.94)$$

$$n_3 = -\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\lambda} \quad (4.95)$$

junto com o ângulo de rotação  $\phi_a$  como

$$\phi_a = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (4.96)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2} \quad (4.97)$$

O vetor  $[{}_1n_a]$  derivado anteriormente para o eixo de rotação está referido aos eixos da seção  $[{}_0p_a]$ , onde  $p = \alpha, \beta, \gamma$ . Eles podem também ser transformados ao sistema local como abaixo:

$$[n_a] = \{[{}^1_0\alpha_a] \ [{}^1_0\beta_a] \ [{}^1_0\gamma_a]\}^T [{}_1n_a] \quad (4.98)$$

Com as expressões (4.96) e (4.98), as rotações naturais associadas com o nó A

do elemento durante o passo incremental da configuração  $C_1$  a configuração  $C_2$  podem ser determinadas como

$$[\theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}] = \phi_a [n_a]^T \quad (4.99)$$

Raciocínio idêntico pode ser feito para o nó B.

#### 4.3.4 – Cálculo das solicitações no elemento

Com as deformações naturais calculadas, as solicitações (forças) nodais agindo no elemento na configuração  $C_2$  pode ser determinada. Baseado na *Formulação Lagrangeana Atualizada*, a última configuração calculada  $C_1$  é selecionada como configuração de referência para descrever o movimento dentro do passo incremental de  $C_1$  a  $C_2$ . Com esta formulação derivou-se nos capítulos anteriores as equações de equilíbrio incremental para um elemento de viga-coluna de parede fina escrita em uma forma matricial compacta como

$$[{}^2f]^T = \{K\} [u]^T + [{}^1f]^T \quad (4.100)$$

onde o sub-índice “1” foi acrescentado para indicar que as quantidades associadas são referidas a configuração  $C_1$ . Na equação (4.100),  $[{}^1f]^T$  indica as forças nodais agindo no elemento no início do passo incremental, isto é, em  $C_1$ , e  $[{}^2f]^T$  as forças nodais agindo no elemento no fim do passo incremental, isto é, em  $C_2$ . De acordo com a equação (4.3) a matriz  $\{K\}$  para o elemento é igual a soma das matrizes  $\{K_e\}$  e  $\{K_g^{corr}\}$ , que foram deduzidas explicitamente no capítulo 3.

Na seção precedente, mostrou-se que os incrementos de deslocamento  $[u]$  podem ser conceitualmente decompostos em duas partes: os deslocamentos do corpo rígido  $[u]_r$ , e as deformações naturais  $[u]_n$ . De acordo com a regra do corpo rígido, o efeito dos deslocamentos de corpo rígido é rotacionar todas as forças iniciais  $[{}^1f]^T$  atuando sobre o elemento finito num ângulo igual ao da rotação do corpo rígido. Para levar em conta os deslocamentos de corpo rígido no programa computacional, pode-se simplesmente considerar as forças iniciais  $[{}^1f]^T$ , agindo no elemento em  $C_1$  e referidas aos eixos da configuração  $C_1$  antes da rotação de corpo rígido, como as forças agindo no elemento em  $C_2$

$[{}^2f]^T$  agindo no elemento para a configuração  $C_2$  como

$$[{}^2f]^T = [{}^1f]^T + \{K\} [u]_n \quad (4.101)$$

onde o sub-índice “2” foi acrescentado para indicar que as forças totais agindo no elemento são referidas a configuração  $C_2$ .

As forças nodais no elemento também são designadas por alguns autores de *solicitações nos extremos das barras* (Santos e Klein, 1980) e *ações de extremidade de membro* (Gere e Weaver, 1981).

#### 4.4 - Critério de convergência

Como critério de convergência, para as iterações, adotou-se a *Norma Euclidiana Modificada* conforme Attard (1987), dada abaixo

$$\|\varepsilon\| = \frac{\sqrt{[R_n][R_n]^T}}{\mathcal{G}|\text{máx}(P)|} \quad (4.102)$$

Aqui  $\mathcal{G}$  é a dimensão do vetor de forças desequilibradas  $[R_n]$ , e  $n$  a iteração atual. A norma adotada é adimensional e escalada por  $\mathcal{G}$ . As iterações terminam quando a norma torna-se menor que um valor específico normalmente entre  $10^{-3}$  e  $10^{-6}$  dependendo da precisão desejada.

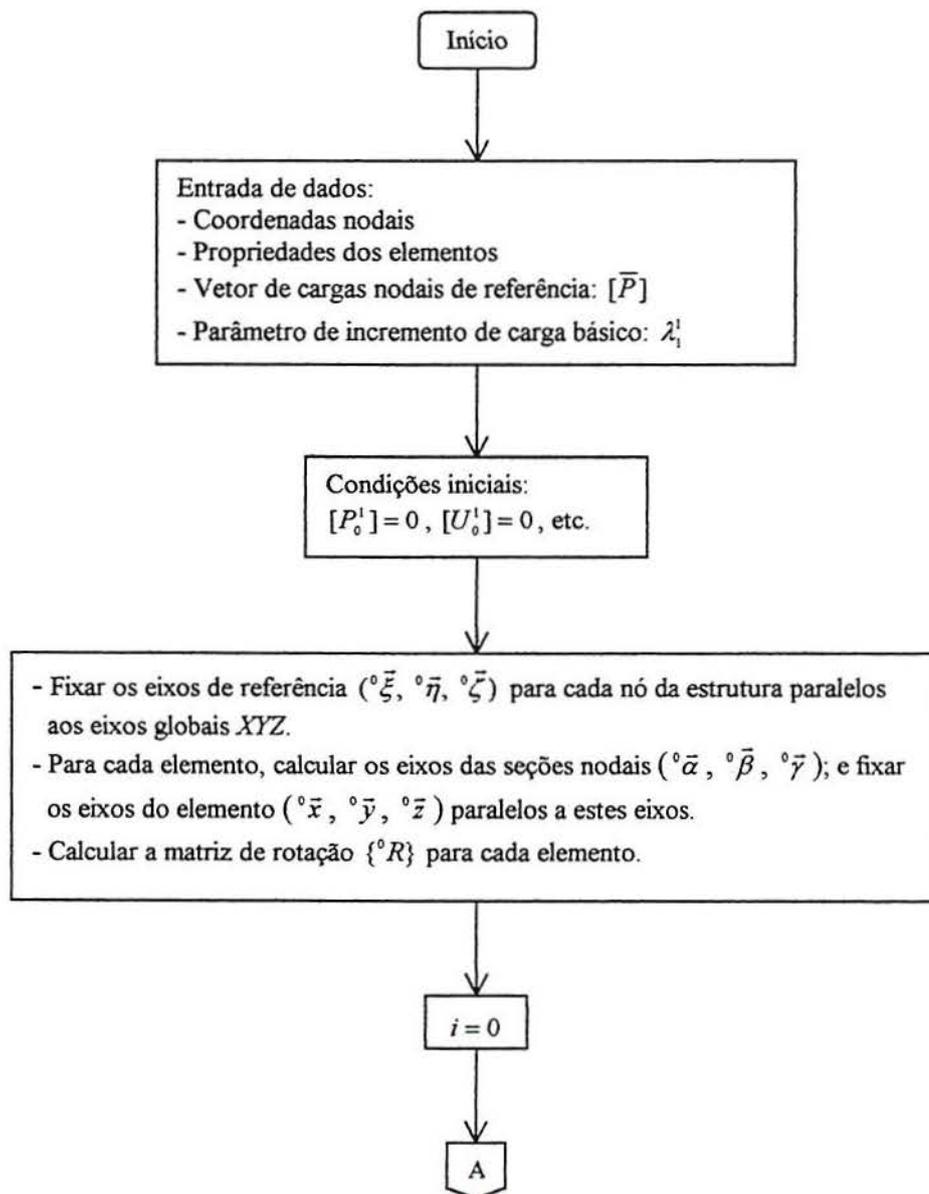
#### 4.5 - Diagrama de blocos

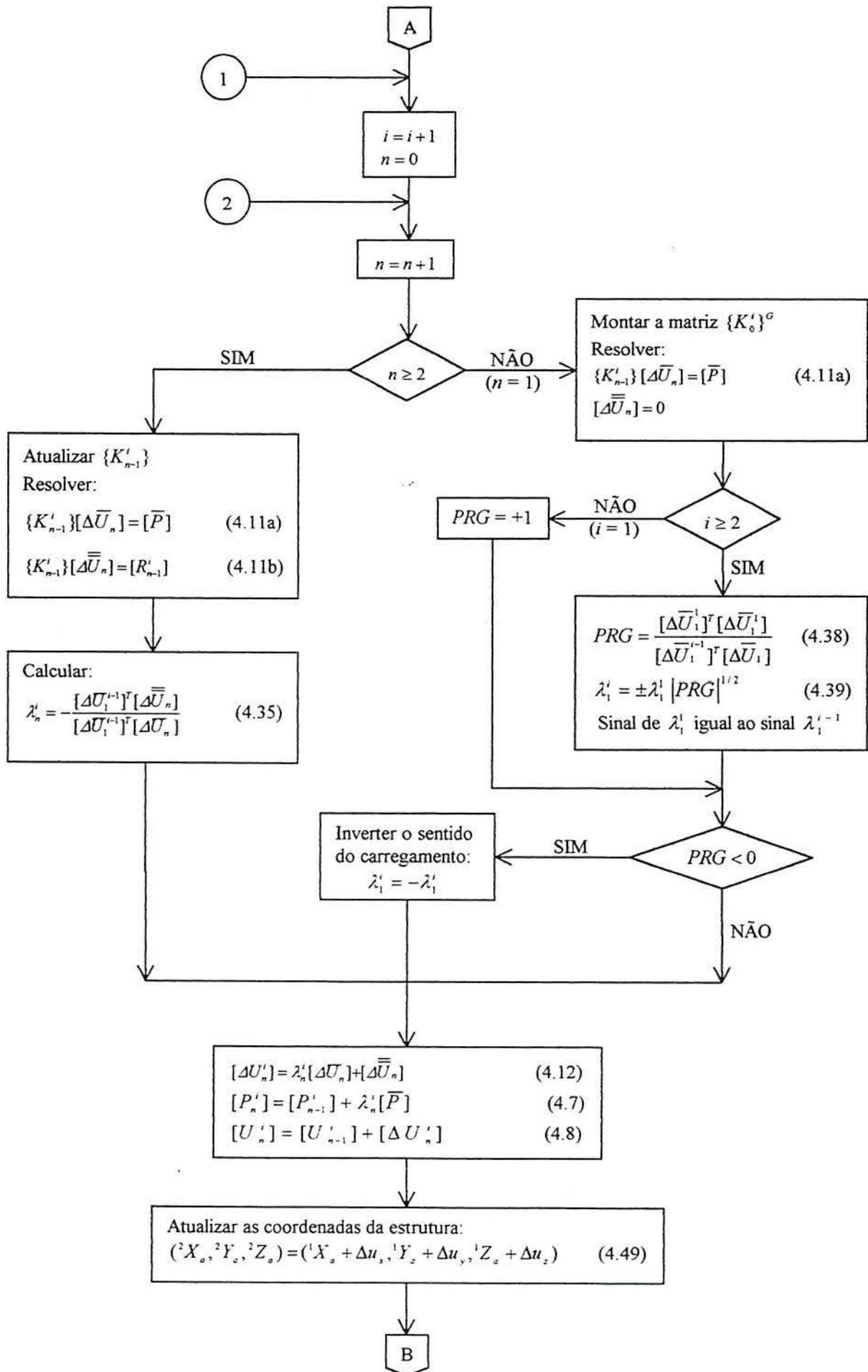
A seguir é apresentado, de uma maneira resumida, o diagrama de blocos do programa computacional desenvolvido para a análise não linear geométrica. O método utilizado é o do controle do deslocamento generalizado, dado no item 4.2.6.

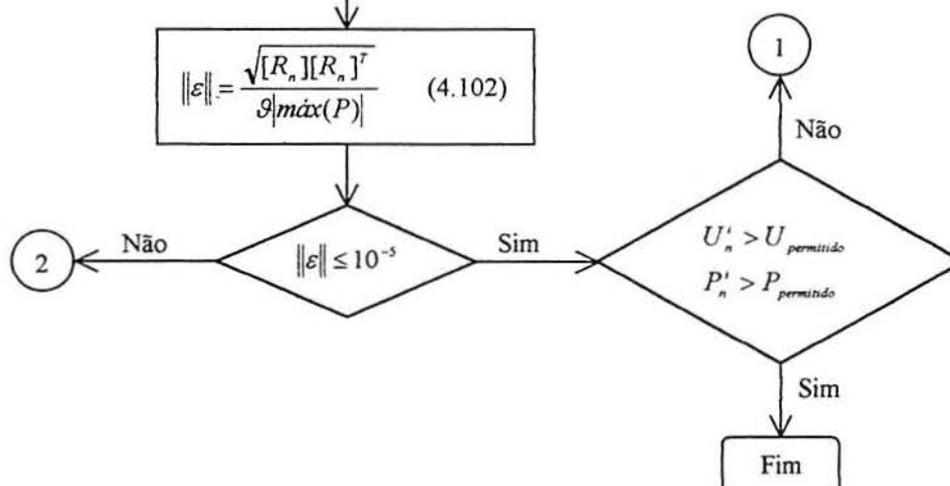
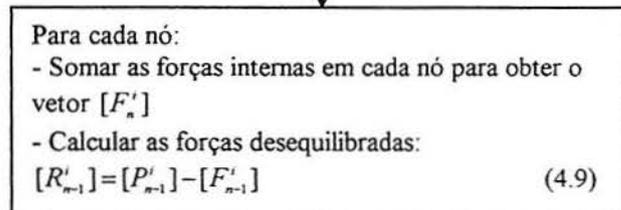
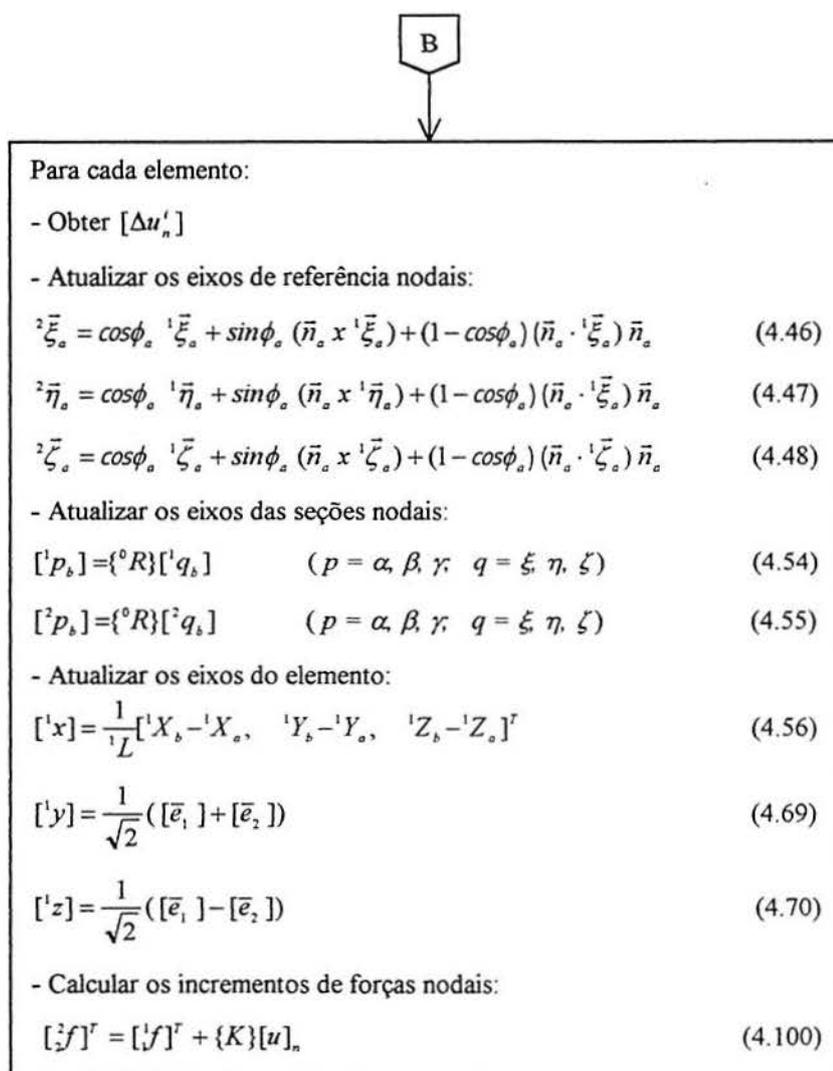
Neste esquema o super-índice  $i$  indica o  $i$ -ésimo passo incremental e o sub-índice  $n$  indica a  $n$ -ésima iteração.

Colocou-se também ao lado de cada equação utilizada o número em que a mesma é referida no texto para facilitar sua localização e entendimento.

Colocou-se também ao lado de cada equação utilizada o número em que a mesma é referida no texto para facilitar sua localização e entendimento.







## 5 - EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados sete exemplos com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do programa computacional implementado.

Para atingir tais objetivos, analisou-se estruturas com o comportamento linear e não-linear geométrico, a fim de testar o programa desenvolvido, no que se refere:

- as grandezas ligadas à torção (torção de Saint-Venant, torção de empenamento e ângulo de torção) e ao bimomento,
- o efeito do empenamento na resposta da estrutura,
- as matrizes de rigidez  $\{k_e\}$  e  $\{k_g\}$  desenvolvidas,
- o processo de recuperação dos esforços, e
- a capacidade do programa na análise da instabilidade de estruturas.

Para auxiliar a interpretação, o programa computacional implementado controla o sinal dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez tangente  $\{K\}$ , onde um elemento negativo caracteriza a existência de um ponto crítico. A forma das curvas carga-deslocamento auxilia a identificação deste ponto. É neste aviso de elemento negativo que foram obtidas as cargas críticas dos exemplos 6 e 7.

Estas curvas também possibilitam avaliar o comportamento pós-flambagem da estrutura, mostrando a existência ou não de resistência adicional pós-crítica.

Os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas, quando houver, e com soluções numéricas encontradas na literatura.

### **EXEMPLO 1: Viga com momento de torção distribuído**

Com o intuito de avaliar o efeito da restrição ou liberação do empenamento da seção transversal, uma viga com carregamento e geometria conforme esquematizada na

figura (4.13) é analisada. As três situações de condições de contorno adotadas são dadas na tabela 6.

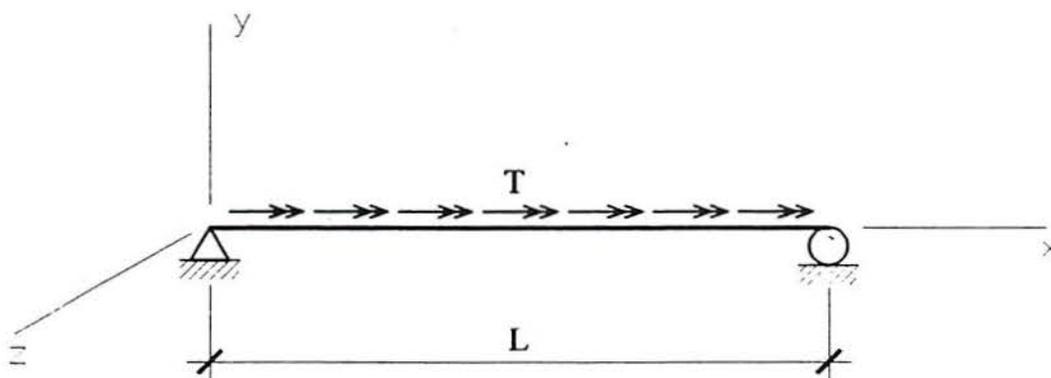


Figura 4.13 - Viga com momento torçor (T) distribuído

Dados:

$$T = 1,88 \text{ kN.m/m}$$

$$L = 12,19 \text{ m}$$

Tabela 5 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 1

Perfil W36x230 - padrão americano				
Propriedades geométricas				
A (cm <sup>2</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> )
436,13	1.190,42	39.125,75	624.347,14	7,572x10 <sup>7</sup>
Propriedades mecânicas				
E = 200.000 MPa		G = 77.200 MPa		

Fonte: American Institute of Steel Construction - AISC, *Manual of Steel Construction*, Chicago, 1980.

Tabela 6 - Condições de contorno

Viga sem a consideração do empenamento	Viga com empenamento restringido nos apoios	Viga com empenamento livre nos apoios
$u_{xA} = u_{xB} = 0$	$u_{xA} = u_{xB} = 0$	$u_{xA} = u_{xB} = 0$
$u_{yA} = u_{yB} = 0$	$u_{yA} = u_{yB} = 0$	$u_{yA} = u_{yB} = 0$
$u_{zA} = u_{zB} = 0$	$u_{zA} = u_{zB} = 0$	$u_{zA} = u_{zB} = 0$
$\theta_{xA} = \theta_{xB} = 0$	$\theta_{xA} = \theta_{xB} = 0$	$\theta_{xA} = \theta_{xB} = 0$
$\theta_{yA} = \theta_{yB} = 0$	$\theta_{yA} = \theta_{yB} = 0$	$\theta_{yA} = \theta_{yB} = 0$
$\theta_{zA} = \theta_{zB} = 0$	$\theta_{zA} = \theta_{zB} = 0$	$\theta_{zA} = \theta_{zB} = 0$
	$\theta'_{xA} = \theta'_{xB} = 0$	$\theta'_{xA} \text{ e } \theta'_{xB} \neq 0$
		$(\theta''_{xA} \text{ e } \theta''_{xB} = 0)$

Nesta análise a viga foi discretizada com 5 (cinco), 8 (oito) e 10 (dez) elementos, constatando-se que para um número menor de elementos os resultados obtidos não eram tão precisos. A explicação para isto deve-se principalmente pela utilização da hipótese de torção constante no interior do elemento.

O momento torçor distribuído (ação externa) ao longo da barra foi transformado em 9 (nove) momentos de torção concentrados (ações nodais equivalentes) nos nós intermediários com o valor de 2,292 kN̄.m e 2 (dois) momentos de torção concentrados nos apoios com o valor de 1,145 kN.m.

A solução analítica para esta viga, e é dada seguir (Murray, 1986):

1º caso: Empenamento livre nos apoios ( $x=0$  e  $x=L \Rightarrow \theta_x = B=0$  e  $\theta'_x \neq 0$ ):

$$\theta_x = \frac{T}{\lambda^2 GJ} \left[ \frac{\lambda^2}{2} (Lx - x^2) - 1 + \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda(L-x))}{\sinh(\lambda L)} \right]$$

$$B = \frac{T}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda(L-x))}{\sinh(\lambda L)} \right]$$

$$T_w = -\frac{T}{\lambda} \left[ \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda(L-x))}{\sinh(\lambda L)} \right]$$

$$T_{sv} = \frac{T}{\lambda} \left[ \lambda \left( \frac{L}{2} - x \right) + \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda(L-x))}{\sinh(\lambda L)} \right]$$

$$M_x = T_w + T_{sv} = T \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

2º caso: Empenamento restringido nos apoios ( $x=0$  e  $x=L \Rightarrow \theta_x=0$  e  $\theta'_x=0$ ):

$$\theta_x = \frac{T}{2\lambda^2 GJ} \left[ \lambda^2 (Lx - x^2) - \lambda L \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L \sinh(\lambda L) (1 - \cosh(\lambda x))}{1 - \cosh(\lambda L)} \right]$$

$$B = \frac{T}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda L}{2} \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L \sinh(\lambda L) \cosh(\lambda x)}{2(1 - \cosh(\lambda L))} + 1 \right]$$

$$T_w = \frac{T}{2} \left[ \cosh(\lambda x) + \frac{\sinh(\lambda L) \sinh(\lambda x)}{1 - \cosh(\lambda L)} \right]$$

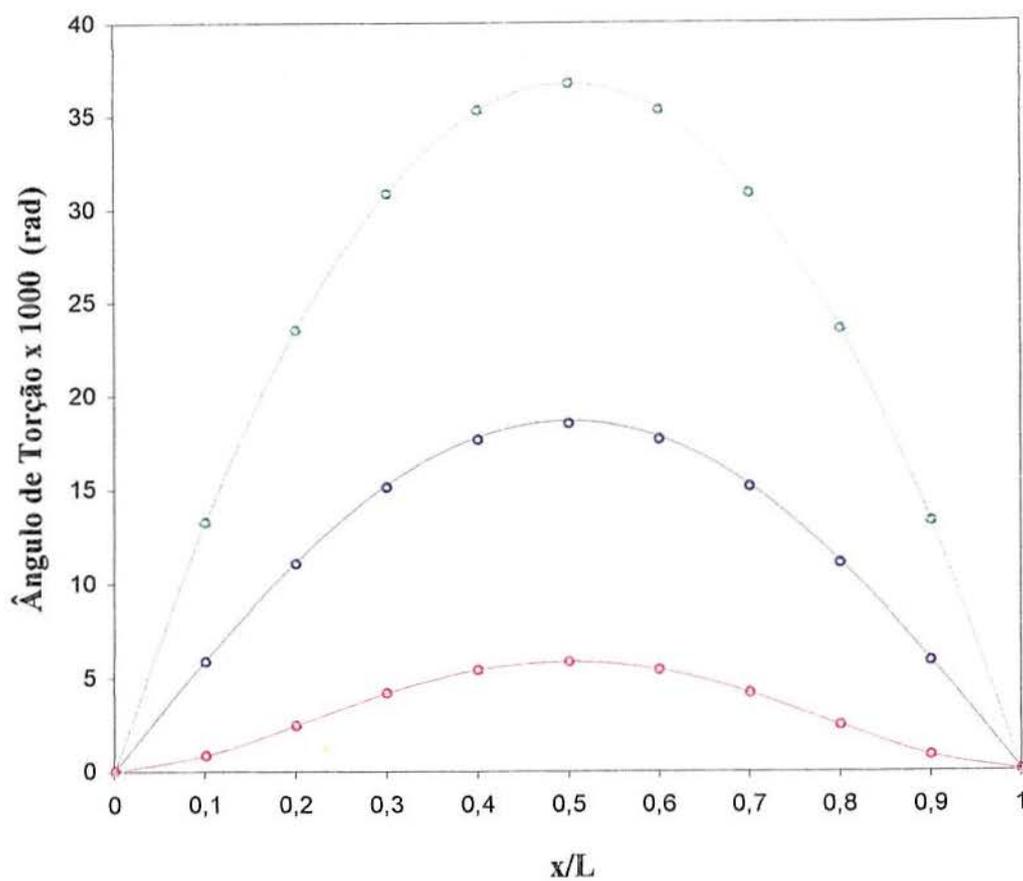
$$T_{sv} = T \left[ \frac{L}{2} - x - \frac{L}{2} \cosh(\lambda x) - \frac{L \sinh(\lambda L) \sinh(\lambda x)}{2(1 - \cosh(\lambda L))} \right]$$

$$M_x = T_w + T_{sv} = T \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

$$\text{onde: } \lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EI_w}}$$

Os gráficos a seguir, figuras 4.14 a 4.17, contêm as soluções para o ângulo de torção, torção de Saint-Venant, torção de empenamento e o bimomento ao longo da viga para as três situações de condições de contorno citadas anteriormente.

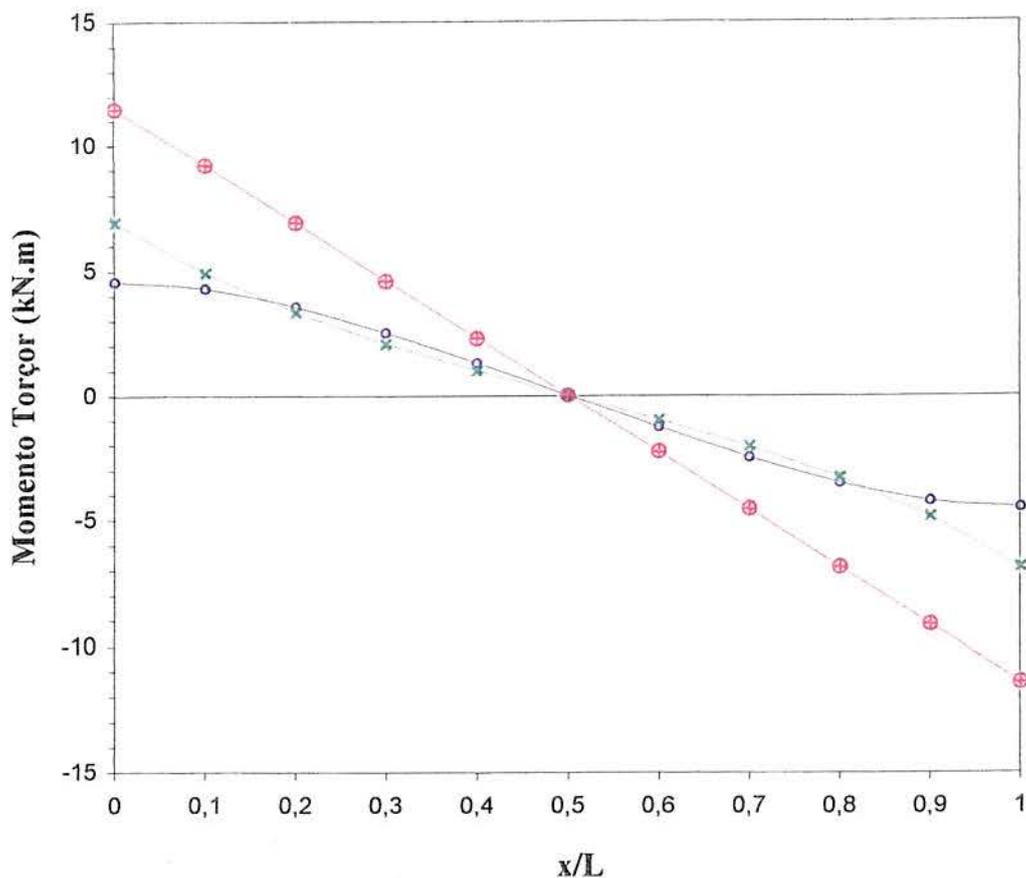
Como pode-se observar os resultados obtidos com o programa implementado fecham com as soluções analíticas. Nota-se também que o impedimento do empenamento nos apoios modifica muito a distribuição de esforços ao longo da viga, enrijecendo a estrutura.



Legenda:

- Solução numérica sem empenamento
- Emp. livre nos apoios - Solução Analítica
- Emp. livre nos apoios - Solução Numérica
- Emp. restrungido nos apoios - Solução Analítica
- Emp. restrungido nos apoios - Solução Numérica

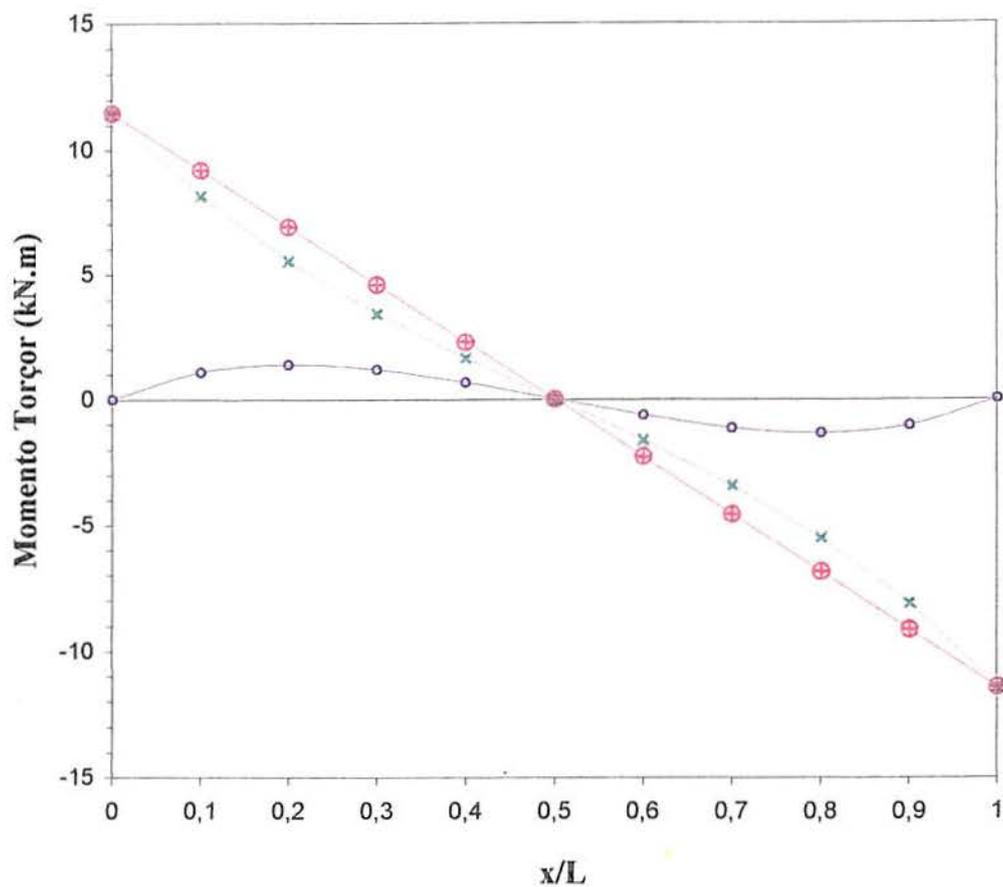
Figura 4.14 - Gráfico da variação do ângulo de torção ao longo da viga



Legenda:

- Torção de St. Venant - Solução Analítica
- o Torção de St. Venant - Solução Numérica
- Torção de Empenamento - Solução Analítica
- x Torção de Empenamento - Solução Numérica
- Torção Total - Solução Analítica
- + Torção Total - Solução Numérica
- o Torção sem Empenamento

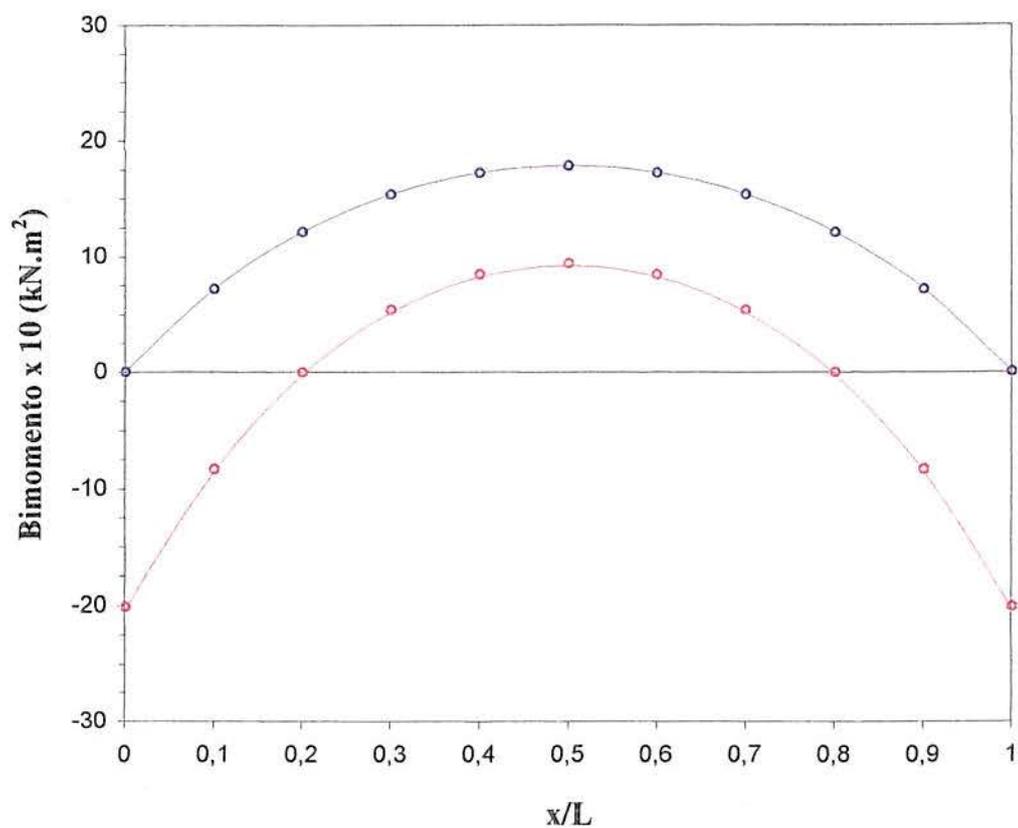
Figura 4.15 - Gráfico do momento torçor com o empenamento livre nos apoios



Legenda:

- Torção de St. Venant - Solução Analítica
- Torção de St. Venant - Solução Numérica
- Torção de Emp. - Solução Analítica
- × Torção de Emp. - Solução Numérica
- Torção Total - Solução Analítica
- + Torção Total - Solução Numérica
- Torção sem Empenamento

Figura 4.16 - Gráfico do momento torçor com o empenamento restringido nos apoios



Legenda:

- Emp. Livre nos apoios - Solução Analítica
- Emp. Livre nos apoios - Solução Numérica
- Emp. restringido nos apoios - Solução Analítica
- Emp. restringido nos apoios - Solução Numérica

Figura 4.17 - Gráfico da variação do bimomento ao longo da viga

### EXEMPLO 2: Grelha com momento de torção concentrado

Neste exemplo é feita a análise linear da grelha indicada na figura 4.18, cujo objetivo principal é avaliar o efeito da restrição ao empenamento da seção transversal.

O perfil utilizado é o W36x230, padrão americano, cujas propriedades são dadas na tabela 7. Na discretização usou-se 2 elementos por barra. Na tabela 8 é mostrado os resultados obtidos pelo programa desenvolvido, as condições de contorno adotadas, bem como, as respostas obtidas por Conci (1988). Através destes resultados constata-se que o efeito da restrição ou da liberação ao empenamento não é desprezível em nenhum dos esforços analisados. O impedimento ao empenamento introduz bimomentos significativos no menor vão.

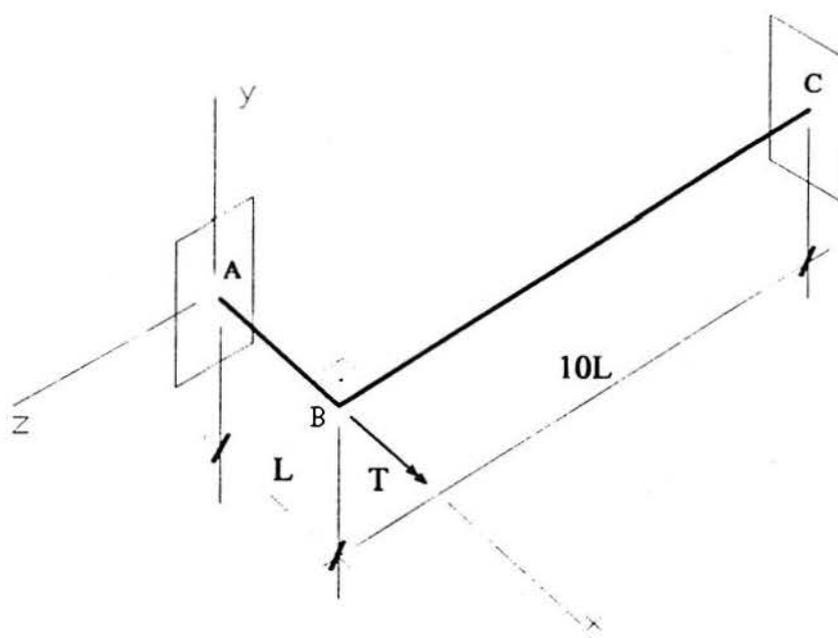


Figura 4.18 - Grelha com momento de torção concentrado

Dados:

$$T = 11,3 \text{ kN.m}$$

$$L = 152,4 \text{ cm}$$

Tabela 7 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 2

Perfil W36x230 - padrão americano				
Propriedades geométricas				
A (cm <sup>2</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> )
436,13	1.190,42	39.125,75	624.347,14	7,572x10 <sup>7</sup>
Propriedades mecânicas				
E = 206.700 MPa		G = 82.700 MPa		

Fonte: American Institute of Steel Construction - AISC, *Manual of Steel Construction*, Chicago, 1980.

Tabela 8 - Resultados obtidos pelo programa implementado e por Conci (1988)

Condições de contorno	(M <sub>z</sub> /T) x 10 <sup>2</sup>	(M <sub>x</sub> /T) x 10 <sup>2</sup>	(B/TL) x 10 <sup>3</sup>
Nós A, B e C com empenamento restringido $\theta_{xA} = \theta_{xC} = 0$ $\theta_{yA} = \theta_{yC} = 0$ $\theta_{zA} = \theta_{zC} = 0$ $\theta'_{xA} = \theta'_{xB} = \theta'_{xC} = 0$	Nós A = 12,92 (12,96) BA = 0,00 (0,00) BC = 86,26 (86,26) C = 43,00 (43,00)	Nós A = 13,74 (13,74) BA = 13,74 (13,74) BC = 0,00 (0,00) C = 0,00 (0,00)	Nós A = 67,93 (67,93) BA = 67,93 (67,93) BC = 0,02 (0,02) C = 0,02 (0,02)
Nós A e C com empenamento restringido $\theta'_{xA} = \theta'_{xB} = 0$ $\theta'_{xB} \neq 0$ ( $\theta''_{xB} = 0$ )	Nós A = 14,07 (14,06) BA = 0,12 (0,12) BC = 94,69 (94,64) C = 47,20 (47,18)	Nós A = 5,31 (5,36) BA = 5,31 (5,36) BC = 0,12 (0,12) C = 0,12 (0,12)	Nós A = 42,31 (42,26) BA = 9,63 (9,54) BC = 9,63 (9,54) C = 2,47 (2,50)
Empenamento livre $\theta'_{xA}, \theta'_{xB}$ e $\theta'_{xC} \neq 0$ ( $\theta''_{xA} = \theta''_{xB} = \theta''_{xC} = 0$ )	Nós A = 14,81 (14,81) BA = 0,06 (0,06) BC = 99,20 (99,21) C = 49,45 (49,46)	Nós BA = 0,80 (0,79) BC = 0,06 (0,06)	Nós A = 0,00 (0,00) BA = 6,12 (6,05) BC = 6,12 (6,05) C = 0,00 (0,00)
Sem considerar o efeito do empenamento	Nós A = 14,96 BA = 0,00 BC = 99,82 C = 49,76	Nós A = 0,18 BA = 0,18 BC = 0,00 C = 0,00	Não é considerado

Obs: Os valores em vermelho foram obtidos por Conci (1988).

### EXEMPLO 3: Pórtico de Williams

Nesta análise demonstra-se a capacidade que o programa implementado tem para resolver problemas de reversão de carga (“snap-through”), já que este exemplo tem sido utilizado por diversos pesquisadores como um teste (“benchmark”) para este tipo de problema.

A solução analítica para este exemplo é encontrada em Williams (1964). Soluções numéricas também são encontradas em Yang (1984) e Zienkiewicz (1971).

Observa-se através das figuras 4.20 e 4.21 que os resultados obtidos fecham com aqueles dados pelas referências citadas anteriormente.

Para esta análise discretizou-se cada barra do pórtico com 10 elementos.

O modelo estrutural é dado na figura 4.19 abaixo.

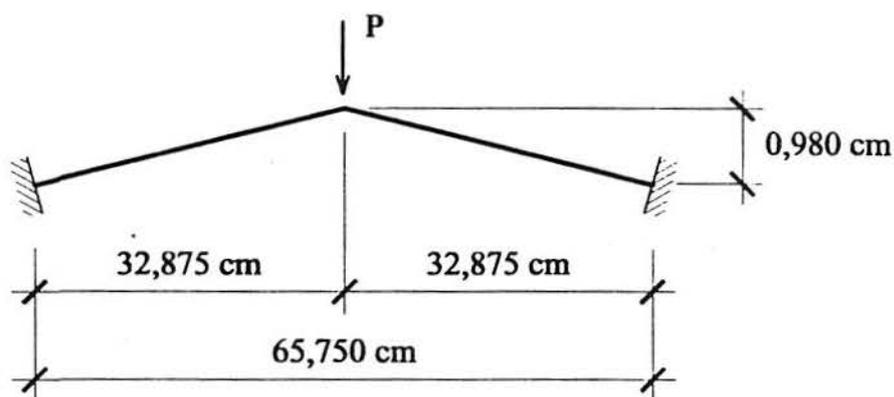
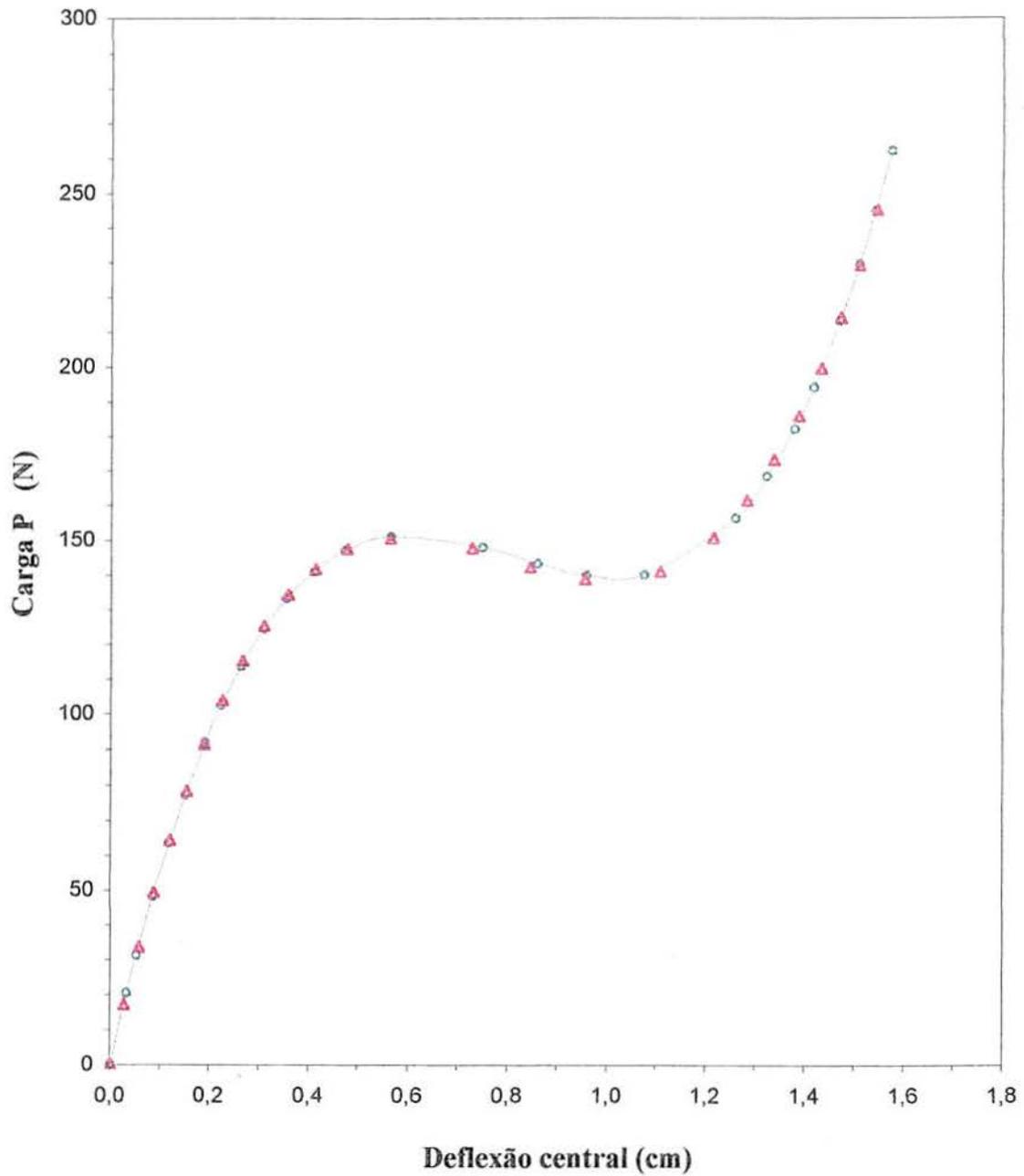


Figura 4.19 - Pórtico de Williams

Dados:

Tabela 9 - Propriedades geométricas e mecânicas da seção do exemplo 3

Propriedades geométricas		
A (cm <sup>2</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	
1,18	3,74x10 <sup>-2</sup>	
Propriedades mecânicas		
E = 71.000 MPa	G = 35.500 MPa	ν = 0,0

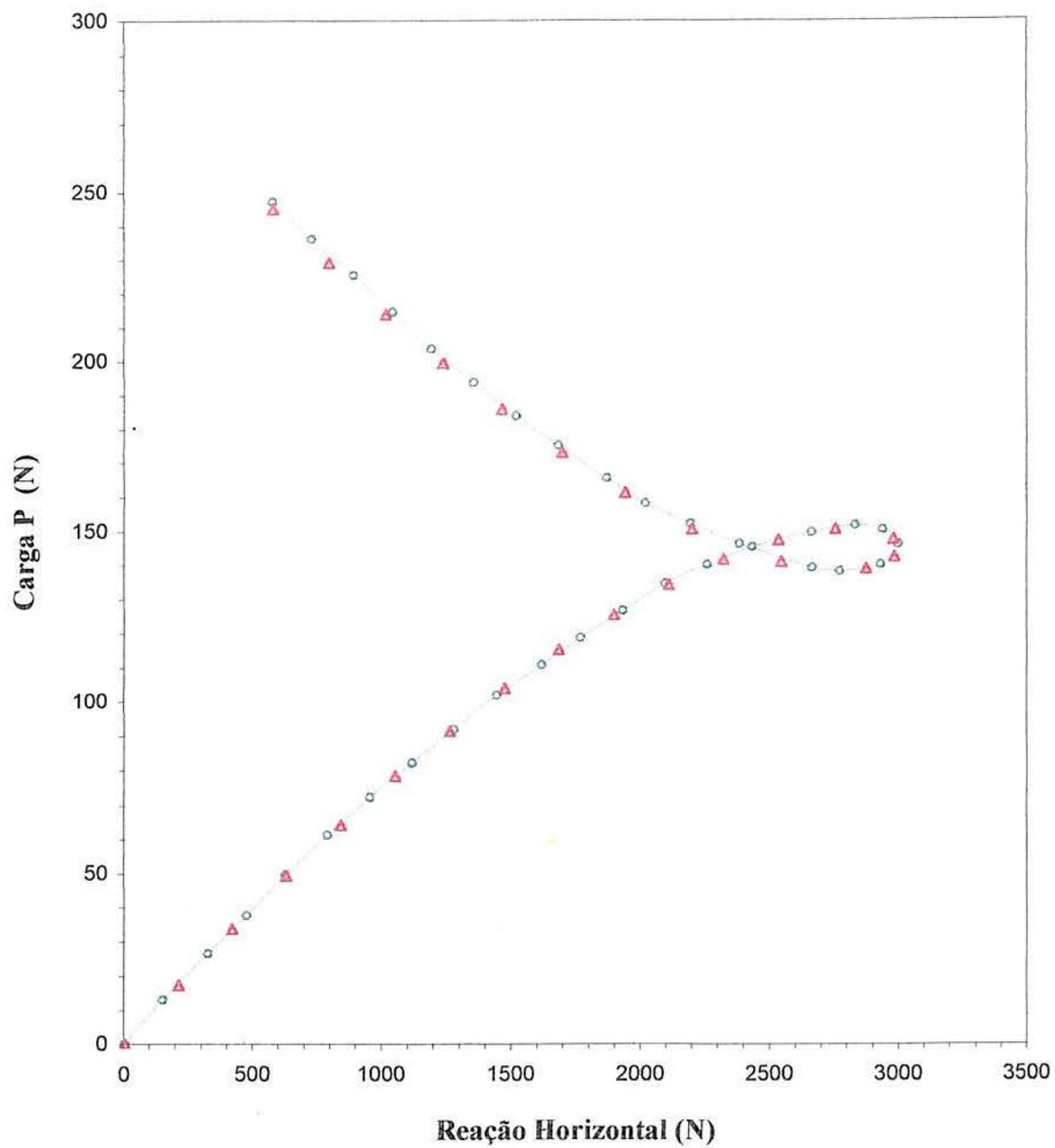


Legenda:

○ Solução Numérica - Yang

△ Solução Numérica - Programa implementado

Figura 4.20 - Gráfico: carga  $P$  x deflexão central



Legenda:

- Solução Numérica - Yang
- △— Solução Numérica - Programa implementado

Figura 4.21 - Gráfico: carga P x reação horizontal

#### EXEMPLO 4: Viga com carga concentrada

Neste exemplo procura-se demonstrar a precisão do processo de recuperação dos esforços. Sua solução analítica é encontrada em Mattiasson (1981).

Foram utilizados 40 (quarenta) incrementos de carga, sendo que, para cada incremento ocorreu no máximo 4 (quatro) iterações. A viga foi discretizada em 10 (dez) elementos.

Observa-se através das figuras 4.23 e 4.25 que os resultados obtidos fecham com excelente aproximação com aqueles obtidos analiticamente.

O modelo estrutural da viga é dado na figura 4.22.

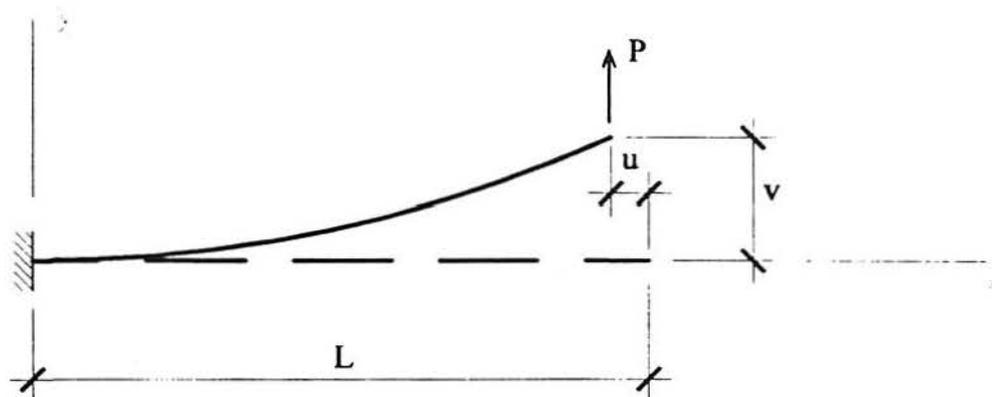


Figura 4.22 - Viga com carga concentrada

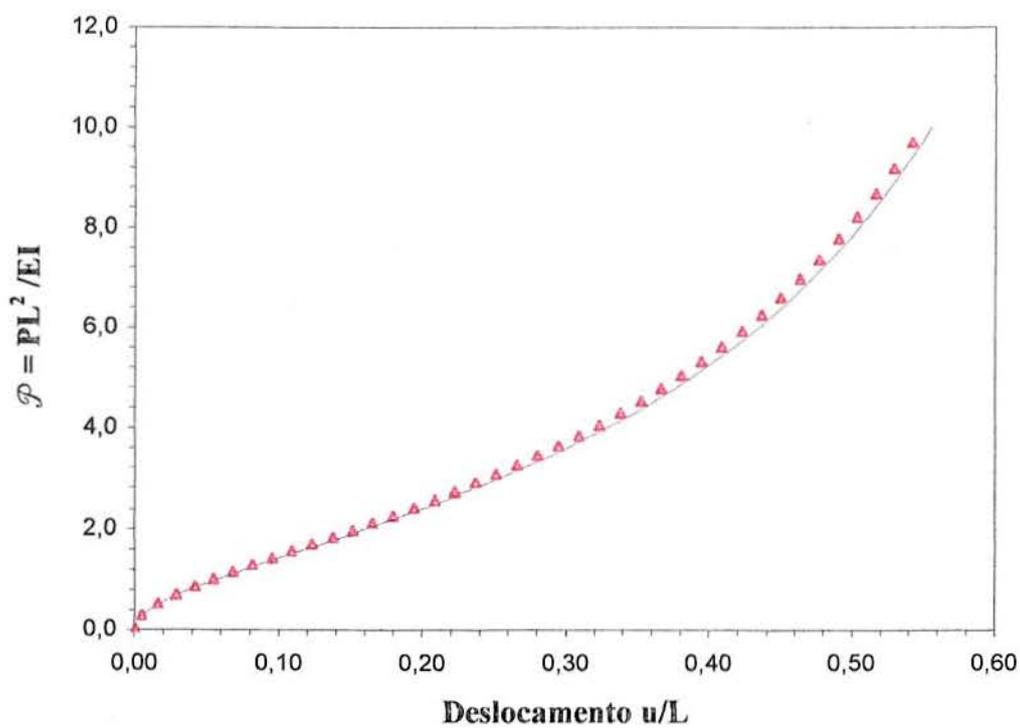
Dados:

$$L = 100 \text{ cm}$$

Tabela 10 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 4

Propriedades geométricas	
A (cm <sup>2</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )
10 <sup>5</sup>	0,1
Propriedades mecânicas	
E = 1,0 MPa	

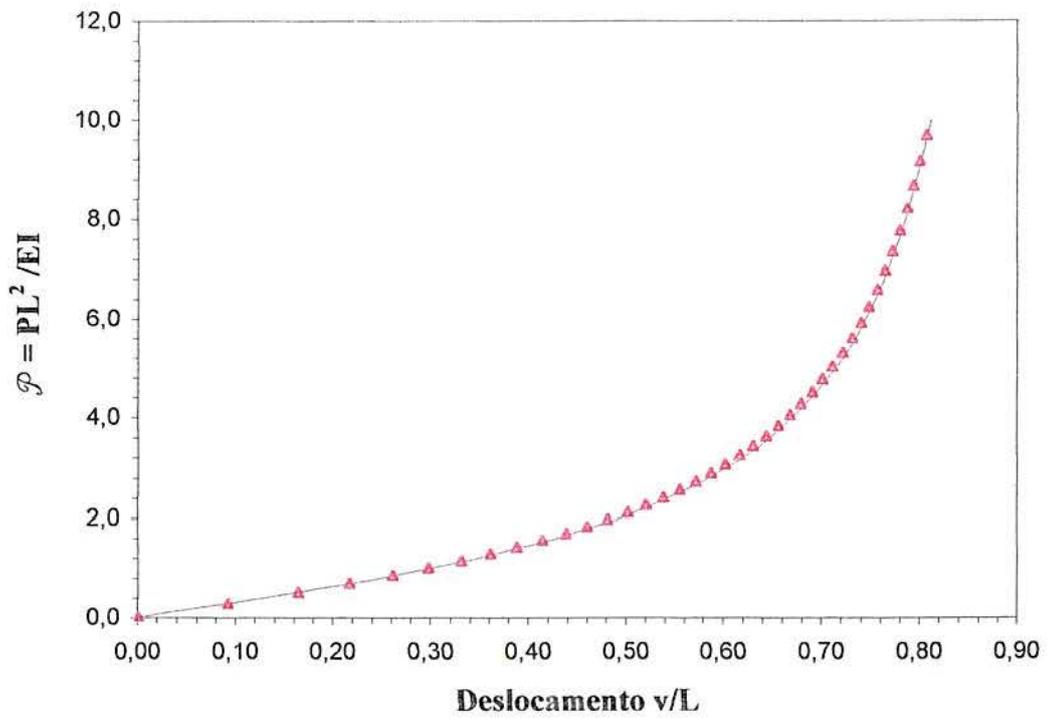
Nota: Utilizou-se um grande valor para a área da seção transversal visto que os resultados analíticos consideram a viga inextensível.



Legenda:

- Solução Analítica
- ▲ Solução Numérica - Programa implementado

Figura 4.23 - Gráfico: parâmetro de carga  $\mathcal{P}$  x deslocamento  $u/L$



Legenda:

- Solução Analítica
- ▲ Solução Numérica - Programa implementado

Figura 4.24 - Gráfico: parâmetro de carga  $\mathcal{P}$  x deslocamento  $v/L$

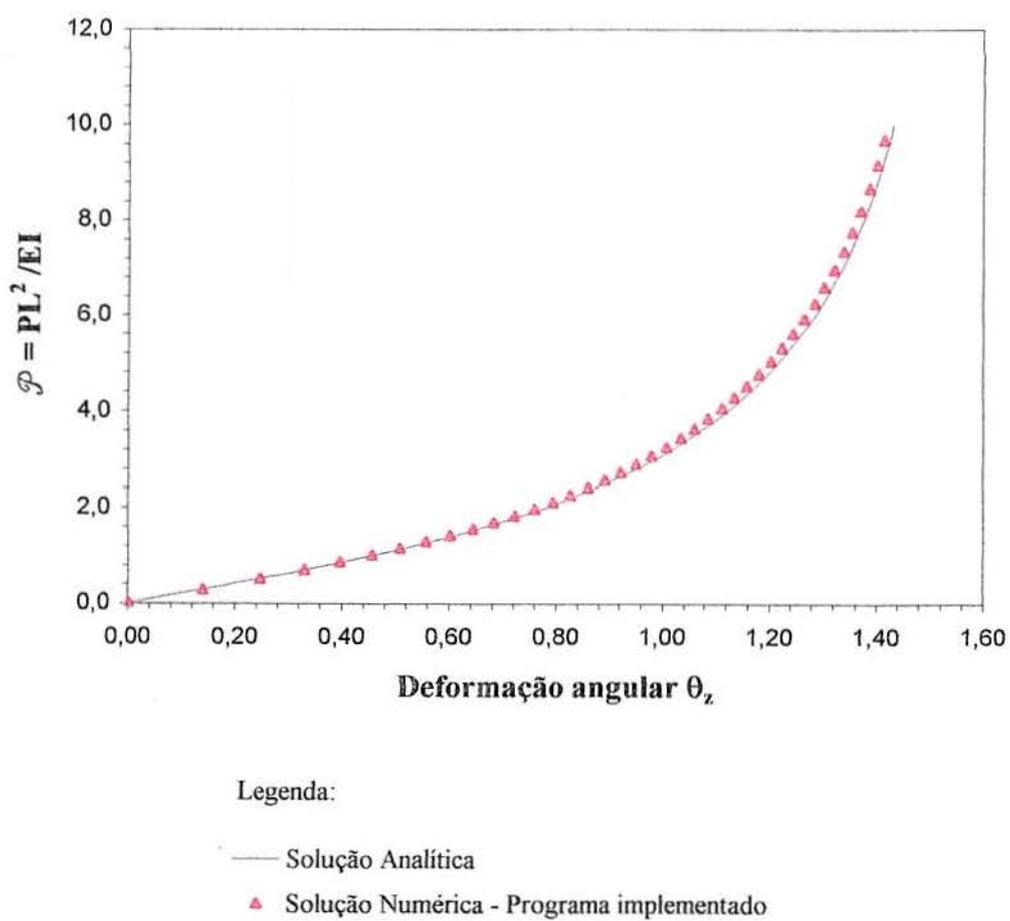


Figura 4.25 - Gráfico: parâmetro de carga  $\mathcal{P}$  x deformação angular  $\theta_z$

### EXEMPLO 5: Viga com carga momento

O intuito deste exemplo foi de procurar demonstrar a capacidade do programa em resolver problemas com grandes rotações.

A solução analítica para este exemplo é dada a seguir:

$$\theta_z = \frac{ML}{EI_z}$$

$$u = L - r \operatorname{sen} \theta_z = L - \frac{EI_z}{M} \operatorname{sen} \frac{ML}{EI_z}$$

$$v = r (1 - \cos \theta_z) = \frac{EI_z}{M} (1 - \cos \frac{ML}{EI_z})$$

Para esta análise a viga foi discretizada com 10 (dez) elementos. Foram utilizados 150 (cento e cinquenta) passos de carga ocorrendo no máximo 6 (seis) iterações para a convergência.

Os resultados obtidos encontram-se na figura 4.27. Como pode-se observar eles fecham com os resultados obtidos analiticamente. Note-se que neste exemplo quando o parâmetro de carga  $\mathcal{M} = \frac{ML}{2\pi EI_z}$  for igual a um, a viga tem a forma circular.

O modelo estrutural da viga é dado na figura 4.26 abaixo.

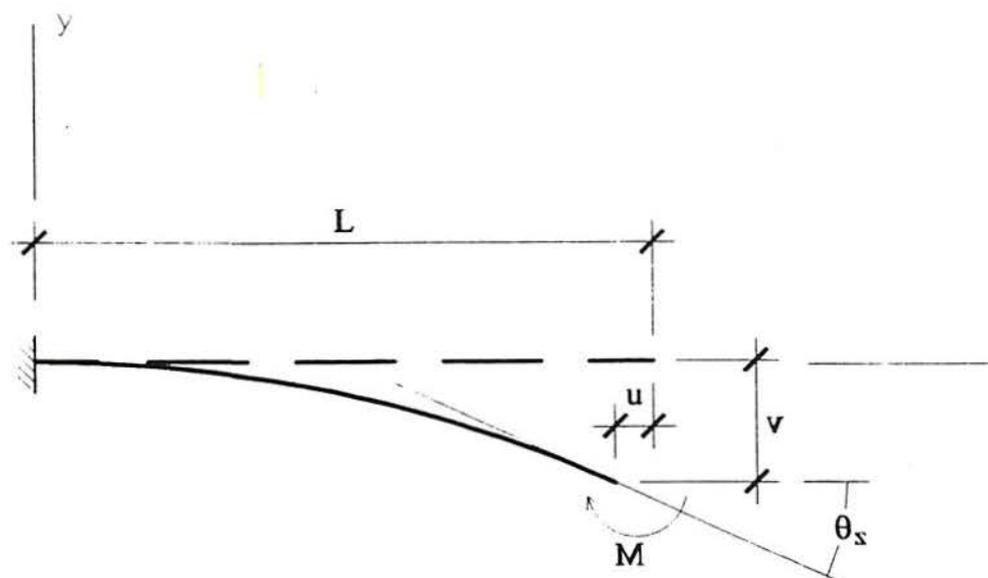


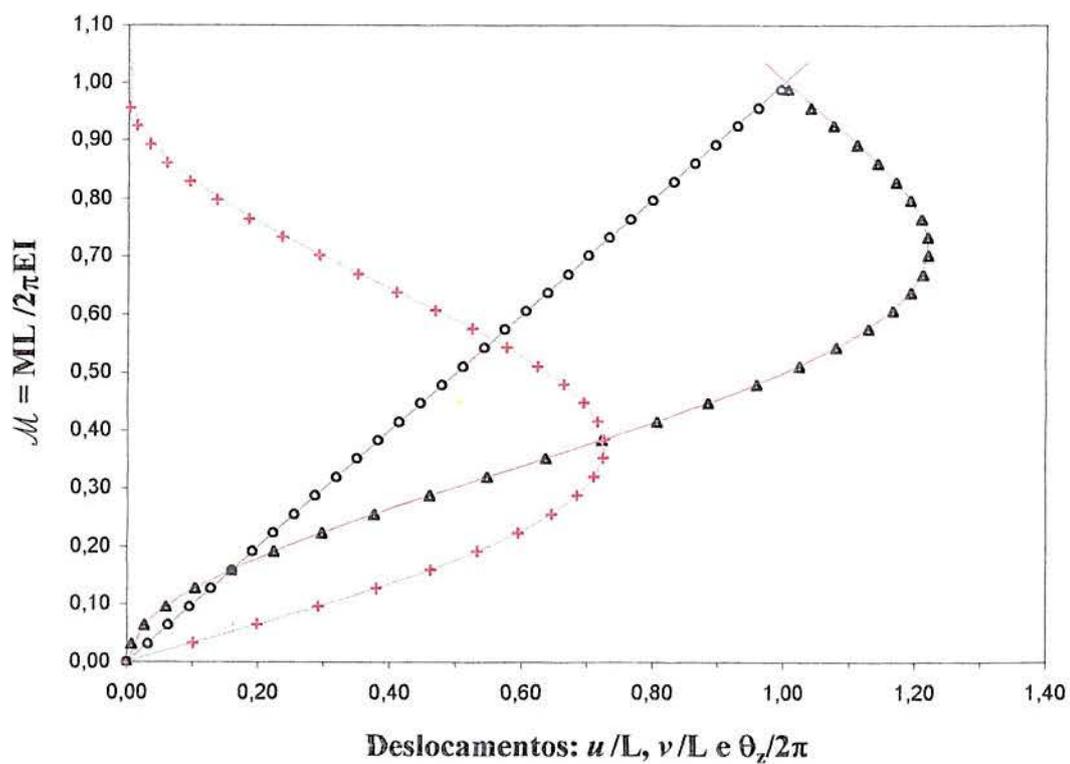
Figura 4.26 - Viga com carga momento

Dados:

$L = 100 \text{ cm}$

Tabela 11 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 5

Propriedades geométricas	
$A \text{ (cm}^2\text{)}$	$I_z \text{ (cm}^4\text{)}$
$10^5$	0,1
Propriedades mecânicas	
$E = 1,0 \text{ MPa}$	



Legenda:

- $u/L$  - Solução Analítica
- ▲  $u/L$  - Programa implementado
- $v/L$  - Solução Analítica
- +  $v/L$  - Programa implementado
- $\theta_z/2\pi$  - Solução Analítica
- $\theta_z/2\pi$  - Solução Implementado

Figura 4.27 - Gráficos: parâmetro de carga  $\mathcal{M}$  x deslocamentos:  $u/L$ ,  $v/L$  e  $\theta_z/2\pi$

Nota: Como no exemplo anterior, também utilizou-se um grande valor para a área da seção transversal já que os resultados analíticos consideram a viga inextensível.

Nos dois exemplos seguintes a *influência do empenamento* da seção transversal na resposta da estrutura é analisada.

### EXEMPLO 6: Flambagem à flexo-torção

A viga-coluna (figura 4.28) submetida a carga de compressão  $P$ , cuja excêntrica  $e_y = 0,381$  m gera o momento  $M = M_z = P \cdot e_y$ , é analisada. As propriedades geométricas e mecânicas do perfil utilizado são dadas na tabela 12.

A solução analítica para o caso de empenamento livre é dada pela equação do 2º grau a seguir (Timoshenko e Gere, 1961):

$$(P - P_{cy})(P - P_{ct}) = P^2 \frac{Ae_y^2}{I_p}$$

onde:

$I_p$  é o momento de inércia polar;

$P_{cy}$  é a carga crítica de flambagem em relação ao eixo  $y$  e

$P_{ct}$  é a carga crítica de flambagem torsional.

Resolvendo-se a equação acima obtém-se para a carga crítica ( $P_{cr}$ ) o valor de 737,96 kN contra o valor de 677,91 kN (diferença de 8,1 %) obtido pela análise não-linear (programa implementado).

Neste exemplo a viga também é discretizada com 10 (dez) elementos.

Para iniciar o processo de deformação um momento torçor  $T = \alpha P$  é aplicado no centro da viga-coluna, com  $\alpha = 0,05$ . O valor adotado para o parâmetro  $\alpha$  é idêntico ao utilizado no trabalho de Yang (1984). Neste trabalho, Yang faz uma comparação dos resultados obtidos para a carga crítica com  $\alpha$  variando de 0,05 à 0,15. Este conclui que para  $\alpha = 0,05$  obtém-se a solução mais próxima da solução analítica.

Os resultados obtidos para o empenamento restringido e empenamento livre se encontram nas figuras 4.29, 4.30 e 4.31.

Observe-se que não há aumento na carga externa uma vez que o ponto crítico foi

ultrapassado.

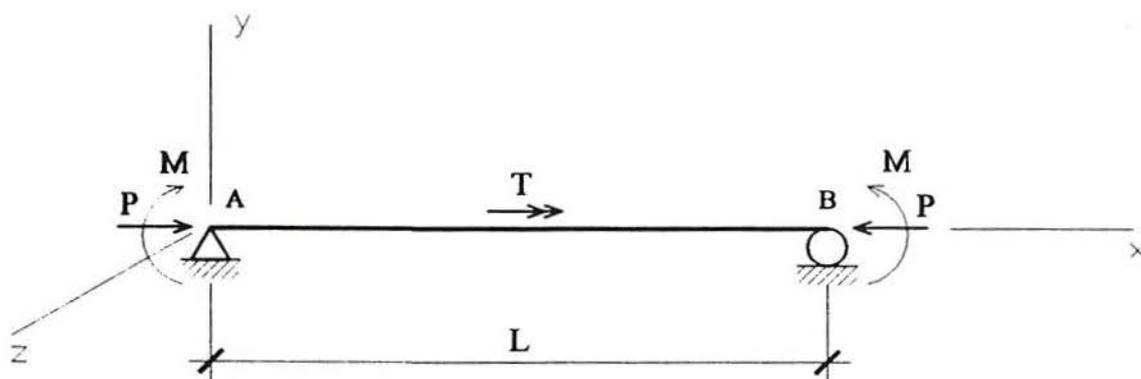


Figura 4.28 - Viga-coluna à flexo-torção

Dados:

$$L = 7,3152 \text{ m}$$

Tabela 12 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 6

Perfil W24x76 - padrão americano				
Propriedades geométricas				
A (cm <sup>2</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> )
144,52	111,55	3.433,91	87.408,60	2,981x10 <sup>3</sup>
Propriedades mecânicas				
E = 199.948 MPa		G = 77.221 MPa		

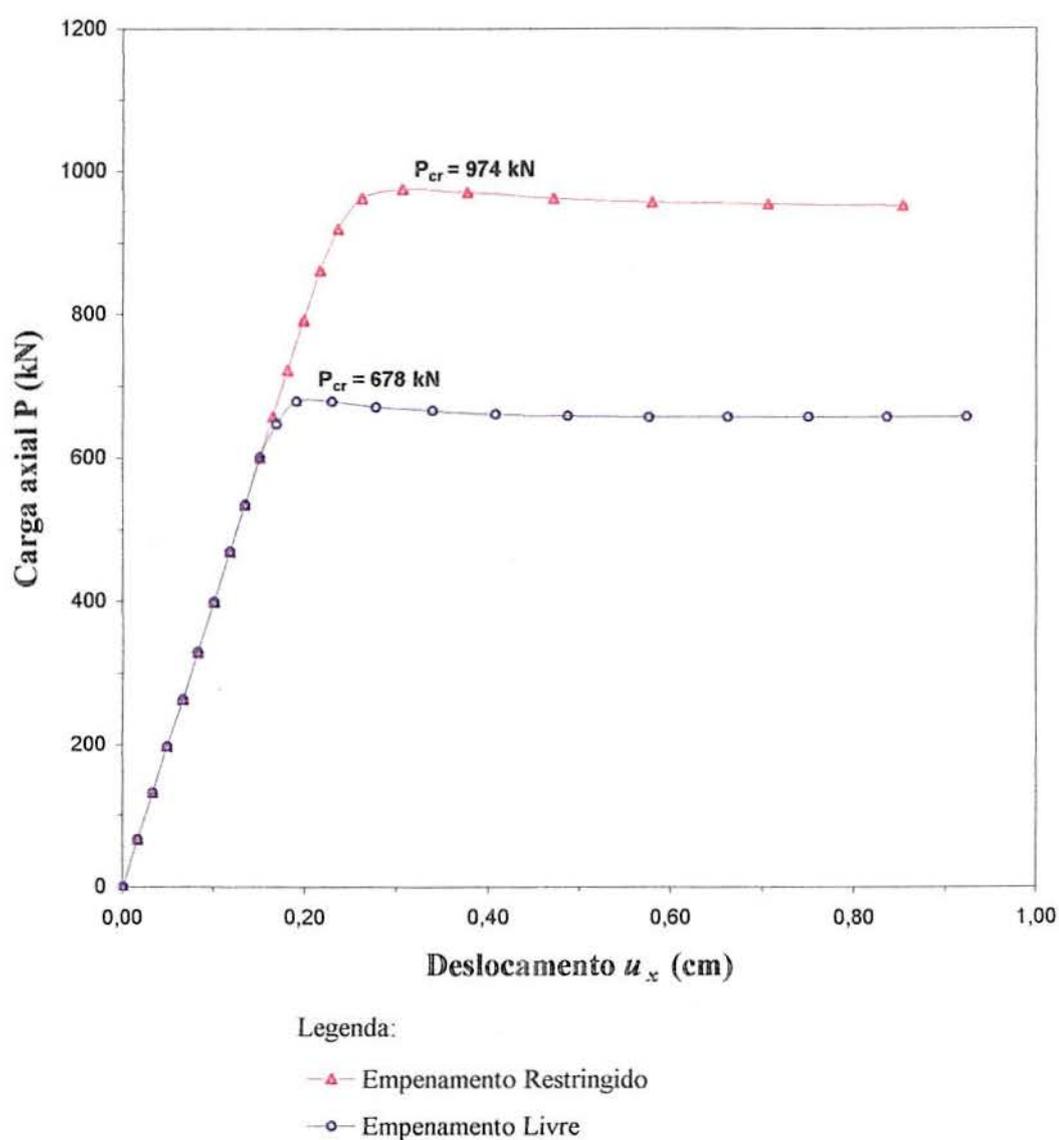
Fonte: American Institute of Steel Construction - AISC, *Manual of Steel Construction*, Chicago, 1980.

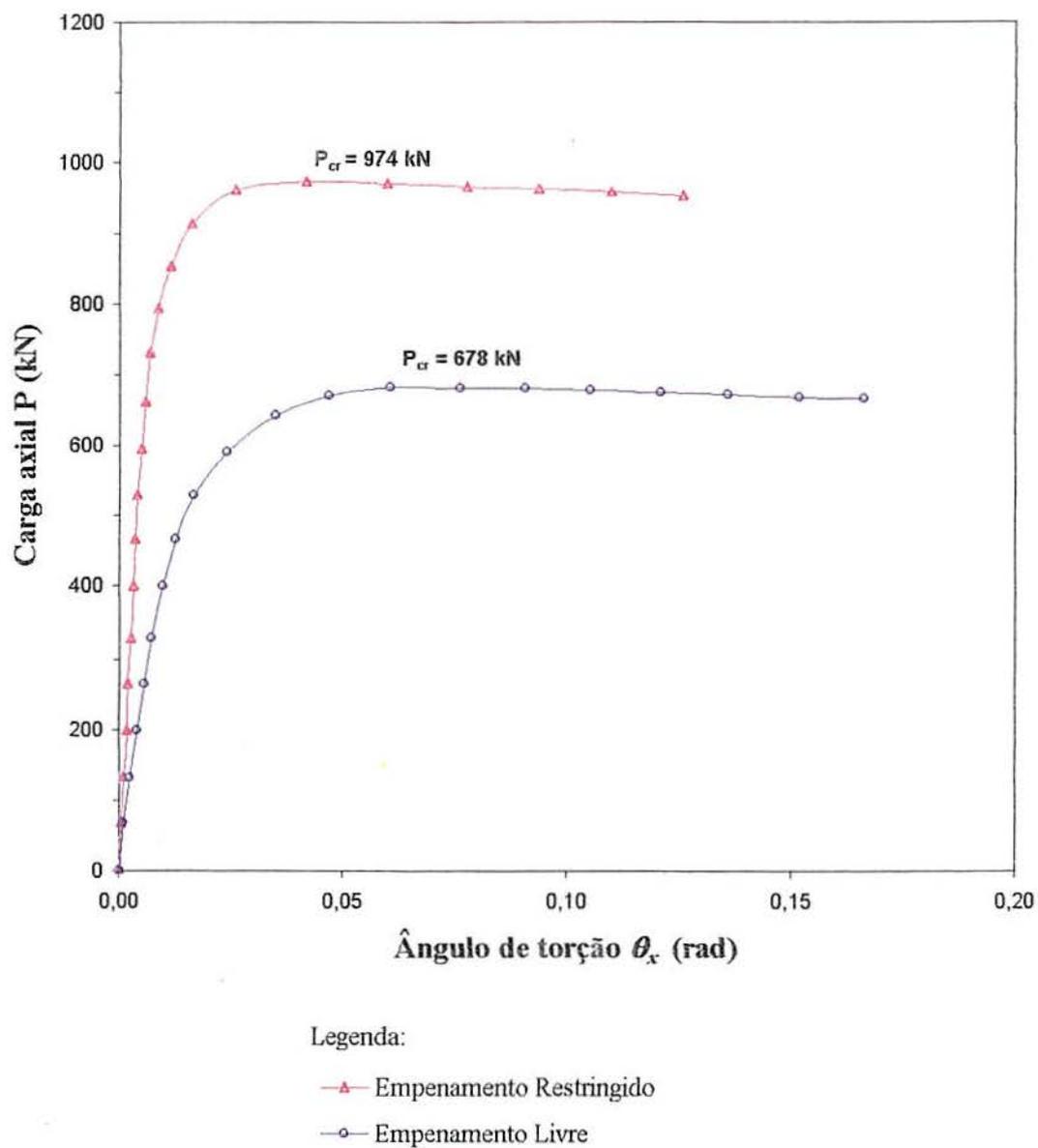
A tabela 13 mostra uma comparação entre as cargas críticas obtidas pelo programa implementado utilizando a análise não-linear com aquelas obtidas por Yang (1984) através da análise por autovalores.

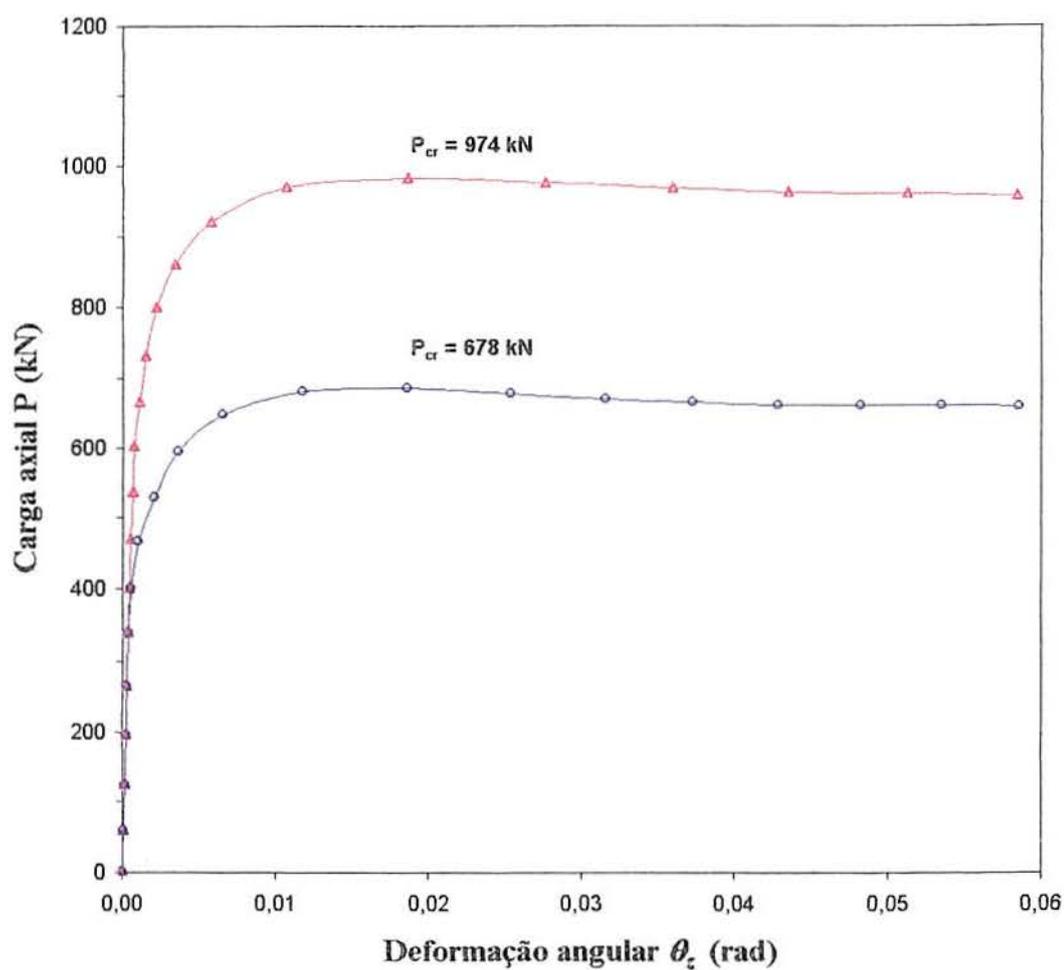
Note-se que a diferença encontrada se deve principalmente a negligência das deformações pré-flambagem na obtenção da carga crítica utilizando autovalores e a incorporação da carga de distúrbio T na análise não-linear geométrica.

Tabela 13 - Cargas críticas: programa implementado x análise por autovalores

Condições de empenamento	$P_{CR}$ (kN)		Erro (%)
	Análise não-linear (programa implementado)	Análise por autovalores (Yang)	
Empenamento livre	677,91	763,36	11,2
Empenamento restringido	973,63	1053,69	7,6
Diferença (%)	43,6	38,0	

Figura 4.29 - Gráfico: carga  $P$  x deslocamento axial  $u_x$

Figura 4.30 - Gráfico: carga  $P$  x ângulo de torção  $\theta_x$  no meio do vão



Legenda:

- ▲— Empenamento Restringido
- Empenamento Livre

Figura 4.31 - Gráfico: carga  $P$  x deformação angular  $\theta_z$  no apoio A

### EXEMPLO 7: Flambagem lateral

A viga-coluna a ser analisada esta submetida a dois momentos  $M_z$  iguais e de sentidos opostos aplicados na suas extremidades, podendo flambar lateralmente se a rigidez lateral não for suficiente. A figura 4.32 mostra o esquema estrutural da viga-coluna.

Neste exemplo a viga-coluna foi discretizada com 5 (cinco), 8 (oito) e 10 (dez) elementos, para testar o comportamento do elemento, constatando-se que os resultados foram praticamente idênticos. Observe-se que os gráficos, figuras 4.33, 4.34 e 4.35, foram obtidos com a viga-coluna discretizada com 10 (dez) elementos.

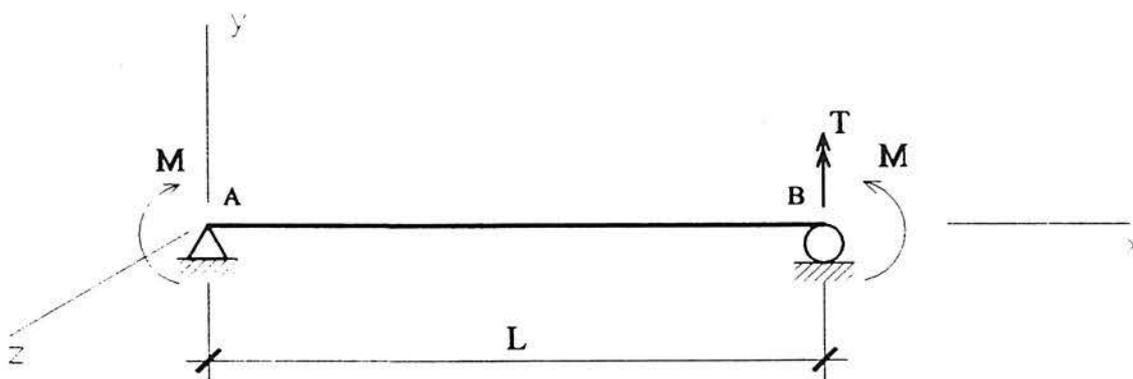


Figura 4.32 - Viga-coluna à flambagem lateral

A finalidade deste exemplo é mostrar a habilidade do programa implementado em detectar e ultrapassar a região de instabilidade.

Para iniciar a deformação um momento desestabilizador  $M_y = 0,01 M_z$ , agindo em torno do eixo  $y$ , é aplicado no apoio B da viga-coluna.

A solução analítica para determinação do momento crítico é dada pela expressão a seguir (Timoshenko e Gere, 1961, Chajes, 1974):

$$M_{CR1} = \frac{\pi}{n_1 L} \sqrt{EI_y GJ \left[ 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJ(n_2 L)^2} \right]}$$

onde os coeficientes  $n_1$  e  $n_2$  são fatores de comprimento que levam em conta as condições de contorno da deflexão lateral  $u_z$  e do ângulo de torção  $\theta_x$ , respectivamente.

Os valores para os coeficientes  $n_1$  e  $n_2$  são dados na tabela 14 para as condições de contorno analisadas neste exemplo (Galambos, 1968).

Analisando-se a expressão anterior verifica-se que a flambagem lateral depende das características de torção, flexão e empenamento.

Note-se que a flambagem lateral, teórica, de vigas ocorre com a bifurcação do equilíbrio.

Tabela 14 - Condições de contorno para a viga-coluna

Condições de contorno				Coeficientes
Deflexão lateral	Flexão lateral	Torção	Empenamento	
impedido $u_z = 0$	livre $u_z'' = 0$ ( $M_y = 0$ )	impedida $\theta_x = 0$	livre $\theta_x' \neq 0$ e $\theta_x'' = 0$	$n_1 = 1,00$ $n_2 = 1,00$
impedido $u_z = 0$	livre $u_z'' = 0$ ( $M_y = 0$ )	impedida $\theta_x = 0$	restringido $\theta_x' = 0$ e $\theta_x'' \neq 0$	$n_1 = 0,883$ $n_2 = 0,492$

Dados:

$$L = 6,096 \text{ m}$$

Tabela 15 - Propriedades geométricas e mecânicas do perfil do exemplo 7

Perfil W10x100 - padrão americano				
Propriedades geométricas				
A (cm <sup>2</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> )
189,68	453,69	8.615,99	25.931,22	1,383x10 <sup>6</sup>
Propriedades mecânicas				
E = 199.948 MPa		G = 77.221 MPa		

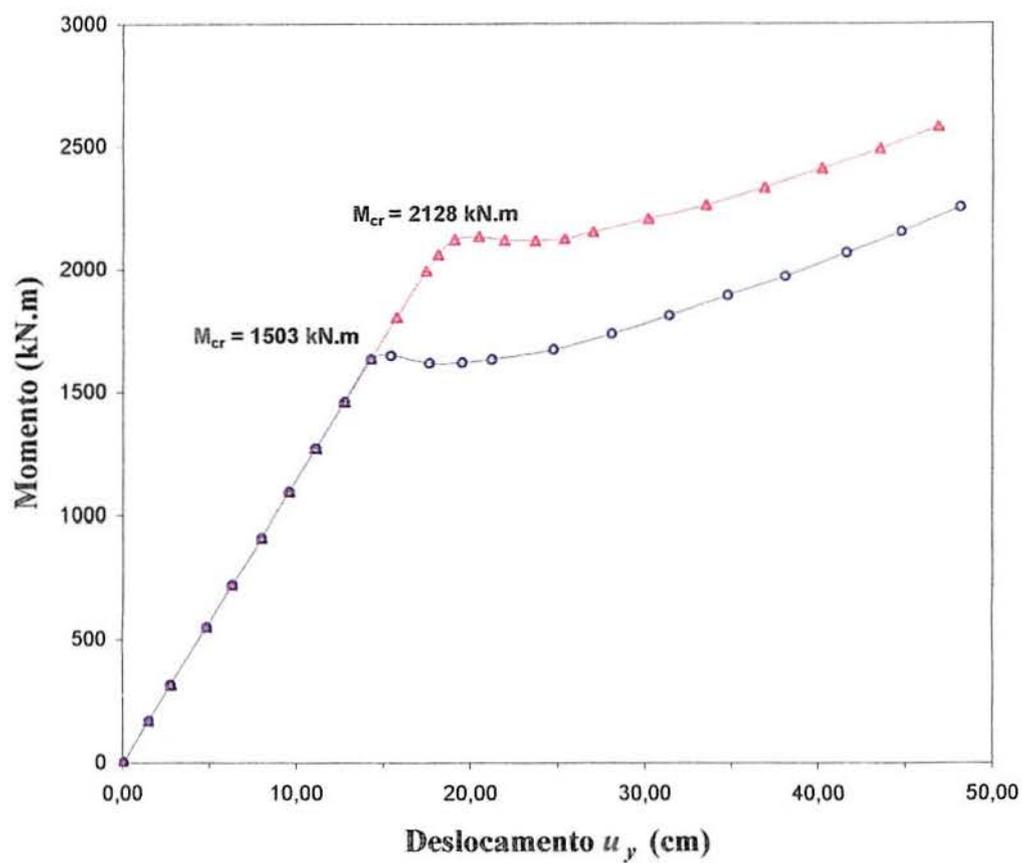
Fonte: American Institute of Steel Construction - AISC, *Manual of Steel Construction*, Chicago, 1980.

A tabela 16, a seguir, exhibe uma comparação entre os resultados obtidos através da solução analítica, por análise de autovalores (Yang, 1984) e através da análise não-linear. Observa-se nos resultados obtidos uma boa precisão, bem como a influência do empenamento no valor da carga crítica.

Verifica-se também, através da análise dos gráficos (figuras 4.33, 4.34 e 4.35) que este tipo de instabilidade tem resistência adicional pós-flambagem, podendo apresentar grandes deformações antes da ruína. Esta é uma das vantagens do estudo da instabilidade através da análise não-linear geométrica, visto que, esta ao contrário da análise por autovalores, possibilita a avaliação da resistência pós-flambagem da estrutura. Esta análise tem no entanto a desvantagem de ser dependente da magnitude da carga de perturbação aplicada.

Tabela 16 - Cargas críticas: análise por autovalores x solução analítica x análise não-linear

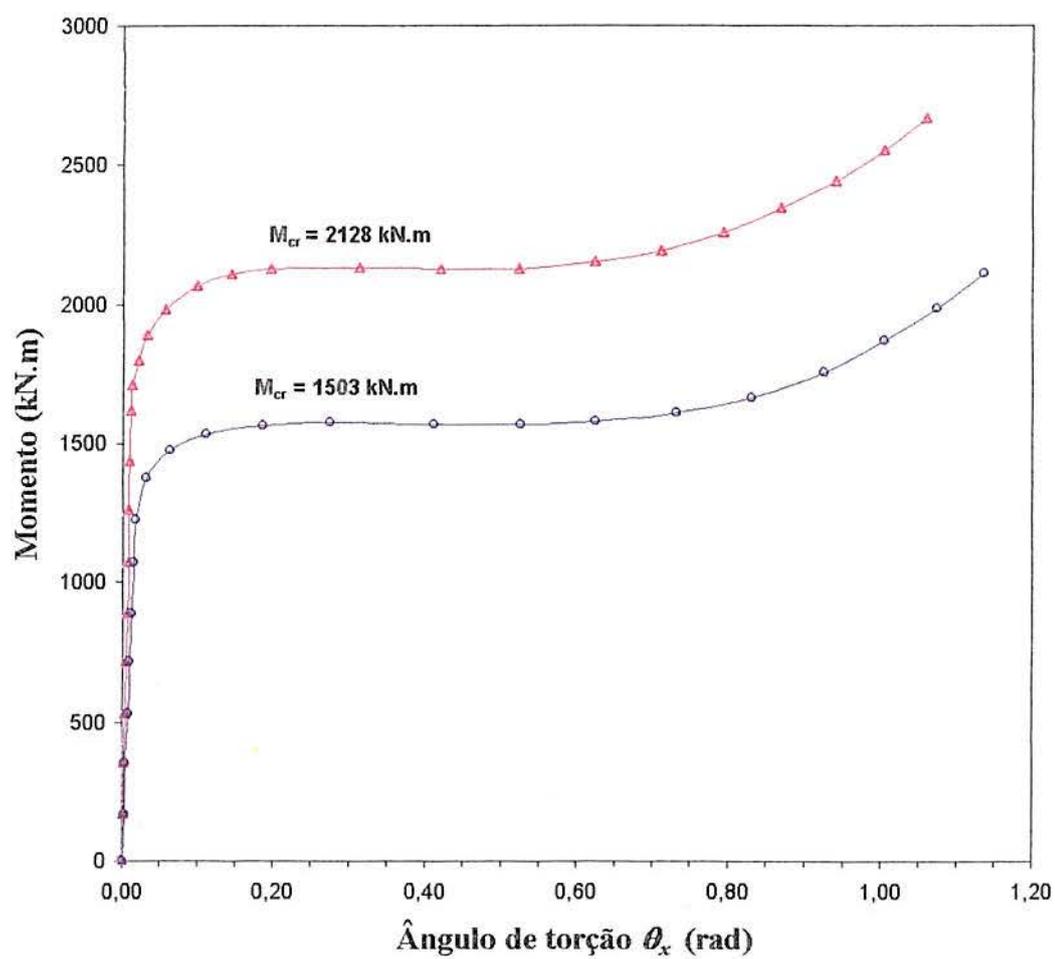
Condições de empenamento	$M_{CR}$ (kN.m)			Erro (%)
	Análise por autovalores (Yang)	Solução analítica	Análise não-linear (programa implementado)	
Empenamento livre	1.444,4	1392,5	1503,3	8,0
Empenamento restringido	2.040,0	1.958,7	2128,1	8,6
Diferença (%)	41,2	40,7	41,6	



Legenda:

- ▲— Empenamento Restringido
- Empenamento Livre

Figura 4.33 - Gráfico: Momento  $M$  x deslocamento  $u_y$  no meio do vão



Legenda:

- ▲— Empenamento Restringido
- Empenamento Livre

Figura 4.34 - Gráfico: Momento  $M$  x ângulo de torção  $\theta_x$  no meio do vão

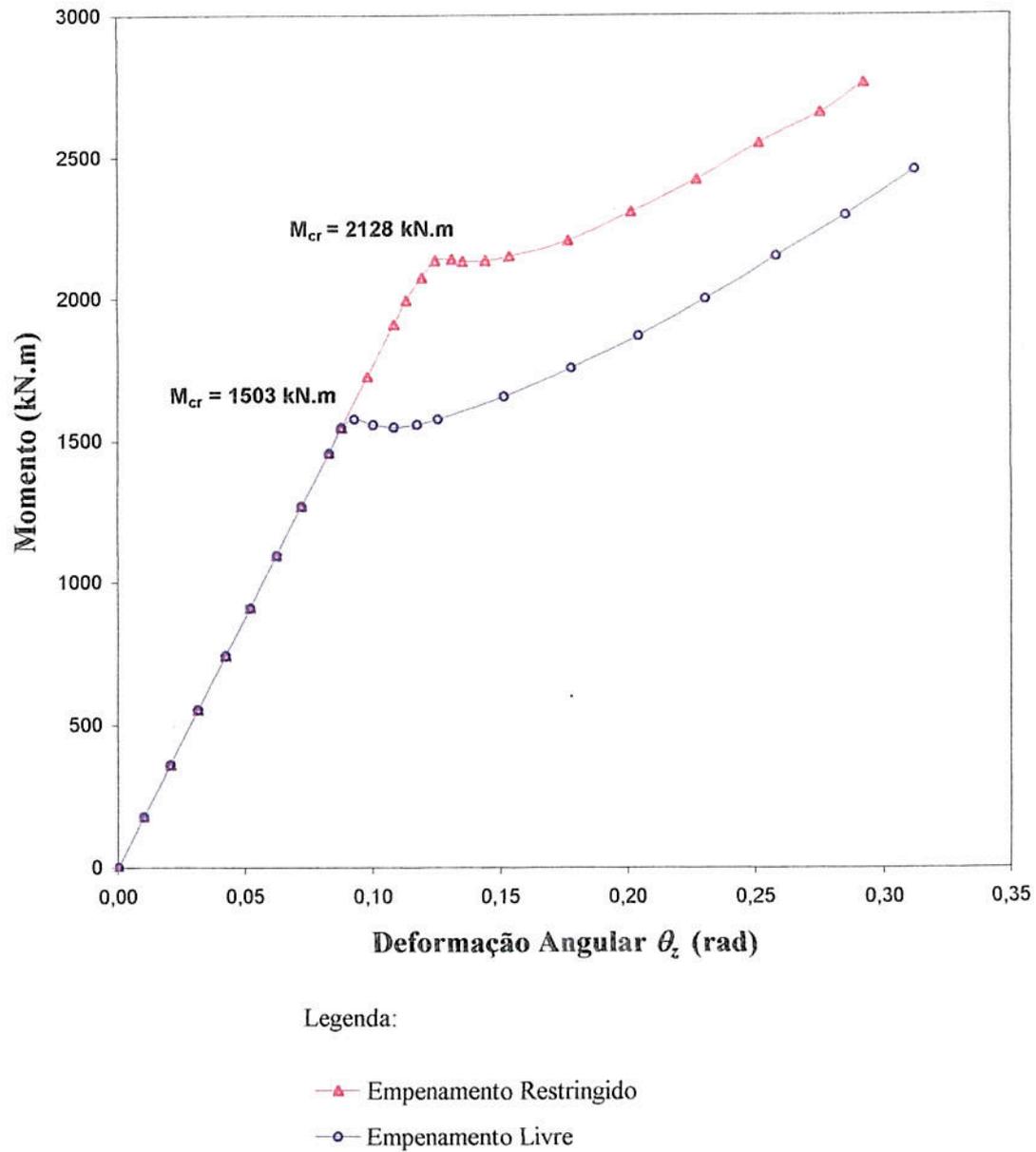


Figura 4.35 - Gráfico: Momento  $M$  x deformação angular  $\theta_z$  no apoio B

## 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Nos capítulos anteriores fez-se uma revisão bibliográfica do atual estado da arte na análise não-linear geométrica com a consideração do empenamento da seção transversal de vigas-colunas de parede fina. Mostrou-se também:

- a dedução de um elemento finito de viga-coluna tridimensional que considera o efeito do empenamento;
- o algoritmo de solução empregado para a análise não-linear geométrica e;
- a aplicabilidade do programa computacional implementado, utilizando tal elemento e algoritmo, através da resolução de alguns exemplos encontrados na literatura.

Do exposto, pôde-se chegar as seguintes conclusões e sugestões para trabalhos futuros:

- Quanto a qualidade do elemento finito utilizado:
  - a inclusão da consideração da torção não-uniforme e a introdução dos graus de liberdade relacionados ao empenamento foram importantes em todos os exemplos analisados. A restrição ou não do empenamento nos nós se mostrou importante nos casos analisados, principalmente na análise de estruturas sujeitas a flambagem, como pode-se comprovar no cálculo da carga crítica do exemplo 6 e 7 onde a diferença entre cargas críticas atingiu aproximadamente 40%.
  - o elemento utilizado verificou a variação do bi-momento e das parcelas de torção, como pôde-se observar na análise linear feita no exemplo 1 e 2, no qual fechou com a solução analítica e com os resultados numéricos de outros pesquisadores.
  - a utilização da matriz de correção das rotações generalizadas  $\{K_c\}$ , foi importante para resolver o problema da falta de equilíbrio (momentos desequilibrados), na posição deslocada, dos nós que unem elementos em ângulos diferentes de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . A não utilização desta matriz pode conduzir a resultados diferentes daqueles esperados ou até a

não-convergência dos resultados no processo incremental-iterativo.

- para a modelagem e análise da estrutura o número de elementos empregados variou conforme o problema analisado. Por exemplo, para cargas distribuídas e grandes deslocamentos um número maior de elementos foi exigido (em torno de 10 é aparentemente o ideal).

- da pesquisa bibliográfica feita conclui-se que para a análise de estruturas reticuladas espaciais com a consideração do empenamento da seção transversal, não há um elemento de viga-coluna, no atual estado da arte, totalmente eficiente, principalmente no que concerne a transmissão do empenamento, e por consequência do bimomento, em nós ligados em ângulos diferentes de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .

- Quanto ao algoritmo de solução empregado para a análise não-linear geométrica:

- o método do controle do deslocamento generalizado proposto por Yang e Shieh (1990) para contornar problemas de *snap-back* (reversão do deslocamento) e *snap-through* (reversão da carga) e aqui implementado foi satisfatório para os exemplos analisados.

- outro aspecto importante é que, para problemas fortemente não-lineares é aconselhável atualizar a matriz de rigidez geométrica para cada iteração executada dentro do passo incremental.

- o procedimento para a recuperação dos esforços na análise não-linear geométrica tridimensional, conforme apresentado no capítulo 4 item 4.3, mostrou-se eficiente.

- o problema das rotações nodais finitas, ou seja a sua não comutatividade no espaço tridimensional foi analisada. Para isso foram apresentadas, baseando-se nos trabalhos de Yang e Leu (1991) e Kuo et. al (1993) fórmulas gerais para atualização da geometria e para o cálculo das deformações e rotações naturais do elemento em cada passo incremental. A capacidade do presente procedimento para lidar com problemas de rotações finitas foi demonstrado no exemplo 5.

- embora a presente dissertação tenha sido desenvolvida com o intuito de estudar o efeito do empenamento da seção transversal de vigas-colunas de parede fina, pretendeu-se

também dar uma contribuição para a resolução de problemas de estruturas espaciais com o comportamento não-linear geométrico, pois verificou-se que não há na literatura pesquisada um consenso no método de resolução de tais problemas. Uma das explicações para isso, conforme Yang, é que a análise não-linear contém várias etapas computacionais no qual muitas não tem sido unificadas ou estão sujeitas a argumentos de diferentes níveis. Além disso, as teorias fundamentais e métodos de solução de várias publicações técnicas não são mostradas numa profundidade suficiente para que se possa entender claramente e com isso fazer um julgamento matemático ou físico, sem se mencionar a possibilidade de erros nos códigos dos programas computacionais.

- do ponto de vista computacional, o atual estado da arte, também não pode garantir que o processo de resolução seja preciso, consistente e convergente como na análise linear e com o mesmo grau de confiança como por exemplo no obtido pelo método da rigidez direta no qual é consagrado no meio técnico. Em virtude disto, os projetistas ainda calculam os esforços utilizando a análise linear, embora para o dimensionamento utilizem métodos preconizados pelas normas atuais que se baseiam no comportamento não-linear físico e geométrico. É importante ressaltar aqui que o objetivo de tais normas é de encorajar a utilização deste comportamento no projeto de estruturas e o desenvolvimento de pesquisas nesta área.

- Sugestões para futuras pesquisas:

- implementar no programa a consideração de seções assimétricas. Embora a matriz de rigidez deduzida na presente dissertação seja válida para seções assimétricas, o programa computacional implementado considera somente seções simétricas. Para considerar tais seções basta substituir a matriz de orientação do elemento  $\{R\}$  pela matriz  $\{R\}$  dada nas referências (Bazant e Minieri (1973) e Chen e Atsuta (1977)).

- desenvolver uma sub-rotina para considerar no elemento cargas distribuídas ou pontuais não coincidentes com os nós do elemento

- desenvolver a computação gráfica iterativa para geração de dados e visualização dos deslocamentos ou esforços.

- estudar a influência do tipo de ligação no comportamento da peça e a transmissão do bimomento em nós com ângulo diferente de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .

- implementar a análise não-linear física
- analisar mais exemplos para testar o programa computacional implementado (“benchmark”) e por consequência a consistência da matriz de rigidez deduzida.
- realizar ensaios experimentais para confrontar com as análises numéricas efetuadas.

Com as conclusões acima pode-se dizer que o programa computacional implementado pode ser utilizado, resguardando as limitações e problemas anteriormente mencionados, para a análise linear e não-linear geométrica de estruturas espaciais com a consideração ou não do empenamento da seção transversal.

**BIBLIOGRAFIA**

1. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION - AISC, "*Manual of Steel Construction*", Chicago, 1980.
2. ARGYRIS, J.H., DUNNE, P. C., MALEJANNAKIS, G.A., and SCHARPF, D.W. "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 14, pp. 401-451, 1978, and v. 15, pp. 99-135, 1978.
3. \_\_\_\_\_. "On the Geometrical Stiffness of a Beam in Space - A Consistent V. W. Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 20, pp. 105-131, 1979.
4. ATTARD, M. N. and SOMERVILLE, I.J. "Non-Linear Analysis of Thin-Walled, Open Beams", *Computer & Structures*, v. 25, n° 3, pp. 437-443, 1987.
5. BARSOUM, R.S., and GALLAGHER, R.H. "Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, n° 1, pp. 335-352, 1970.
6. BATHE, K.J., RAMM, E. and WILSON, E.L. "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, pp. 353-386, 1975.
7. BATHE, K.J. and BOLOURCHI, S. "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beams Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 961-986, 1979.
8. BATHOZ, J.L., and DHATT, G., "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 1262-1266, 1979.

9. BATISTA, E.M. "Colunas Constituídas de Perfis de Chapa Dobrada", *RBE - Caderno de Engenharia Estrutural*, Rio de Janeiro, v. 5, nº 2, dezembro, 1987.
10. BAZANT, Z.P. and MINIERI, M.E. "Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled and Frames", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 19, nº EM6, pp. 1259-1281, 1973.
11. BERGAN, P.G. "Solution Technique for Nonlinear Finite Element Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 1262-1266, 1978.
12. BERGAN, P.G. "Solution Algorithm for Nonlinear Structural Programs", *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, Taylor, C., Hinton, E., and Owen, D.R.J. (eds.), Pineridge, Swansea, pp. 291-305, 1980.
13. BLEICH, F. *Buckling Strength of Metal Structures*, New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1952.
14. BLEICH, F. & BLEICH, H. "Bending, Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin Walls", *Congress, International Association for Bridge and Structural Engineers*, Berlin, English Rdn., pp. 871, 1936.
15. BLEICH, H. "Refinement of the Theory of Torsional Buckling of Thin Walled Columns", *Proceedings, First Mid-Western Conference on Solid Mechanics*, April, 1953.
16. BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A.J. *Computational Methods for the Solution of Engineering Problems*, Pentech Press Limited, London, 1978.
17. BULL, J.W. *Finite Element Analysis of Thin-Walled Structure*, Elsevier Applied Publishers Ltda., New York, 1988.
18. CHAJES, A, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
19. CHAN, S.L., and KITTIPORNCHAI, S. "Geometric Nonlinear Analysis of Asymmetric Thin-Walled Beam-Columns", *Engineering Structural*, v. 9, outubro, 1987.

20. CHEN, H., and BLANDFORD, G.E. "Thin-Walled Space Frames. I: Large-Deformation Analysis Theory", *Journal of Structural Engineering*, v. 117, nº 8, pp. 2499-2520, Aug. 1991.
21. \_\_\_\_\_. "Thin-Walled Space Frames. II: Algorithmic Details and Applications", *Journal of Structural Engineering*, v. 117, nº 8, pp. 2521-2539, Aug., 1991.
22. CHEN, W.F. & ATSUTA, T. *Theory of Beam-Columns*, v. 1: In-plane Behavior and Design, New York, McGraw-Hill, Inc., 1977.
23. \_\_\_\_\_. *Theory of Beam-Columns*, vol. 2: Space Behavior and Design, New York, McGraw-Hill, Inc., 1977.
24. CHENG, H. and GUPTA, K.C. "An Historical Note on Finite Rotations", *Journal of Applied Mechanics*, v. 56, pp. 139-1145, march, 1989.
25. CLARKE, M.J. and HANCOCK, G.J. "A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, nº 7, pp. 1365-1391, may, 1990.
26. CRISFIELD, M.A. "A Fast Incremental-Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", *Computer & Structures*, v. 13, pp. 55-62, 1981.
27. CRISFIELD, M.A. "An Arc Length Method Including Line Searches and Accelerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 19, pp. 1269-1289, 1983.
28. CONCI, A. *Análise de Estruturas Reticuladas de Aço com Consideração de Empenamento e Não-Linearidades Geométrica e Material*, Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, maio, 1988.
29. DUMONT, N.A. e KRUGER, S.D. "Um Método Numérico Eficiente para a Resolução de Problemas Altamente Não Lineares", *X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, RJ, Dezembro, 1989.
30. DYM, C.L. and SHAMES, I.H. *Solid Mechanics - A Variational Approach*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.

31. ELIAS, Z.M. *Theory and Methods of Structural Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1986.
32. FUNG, Y.C. *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
33. \_\_\_\_\_. *Foundations of Solids Mechanics*, Prentice-Hall International Series in Dynamics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
34. GALAMBOS, T.V. *Structural Members and Frames*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
35. GERE, J.M. e WEAVER, Jr.W. *Análise de Estruturas Reticuladas*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
36. GJELSVIK, A. *The Theory of Thin-Walled Bars*, New York, A Wiley-Interscience Publication, 1981.
37. GOODIER, J.N. "Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure", *Cornell University Engineering Experiment Station Bulletin*, nº 27, Ithaca, New York, December, 1941.
38. GOODIER, J.N. "Flexural-Torsional Buckling of Bars of Open Section Under Bending, Eccentric Thrust or Torsional Loads", *Cornell University Engineering Experiment Station Bulletin*, nº 28, Ithaca, New York, January, 1942.
39. \_\_\_\_\_. "Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin Walled Open Section Under Compressive and Bending Loads", *Journal of Applied Mechanics*, v. 9, nº 3, September, pp. A-1-3, A-107, 1942.
40. HENNEMANN, J.C.F., TAMAGNA, A. & MOURA, C.G.S. "Projeto de Estruturas de Chapa de Aço Dobrada a Frio", *CT-70*, Porto Alegre, CPGEC, Novembro, 1985.
41. HENNEMANN, J.C.F. e TAMAGNA, A. "Propriedades Geométricas de Seções Abertas de Pequena Espessura", *CT-36*, Porto Alegre, CPGEC, Janeiro 1983.
42. KARAMANLIDIS, D., HONECKER, A. and KNOTHE, K. "Large Deflection Finite Element Analysis of Pre- and Post-Critical Response of Thin Elastic Frames", *Nonlinear*

- Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Ruhr-Universität Bolhum, Germany, Eds Wunderlich, W. et al., pp. 217-235, July, 1980.
43. KIM, M.Y., CHANG, S.P. and KIM, S.B. "Spatial Stability Analysis of Thin-Walled Space Frames", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, pp. 499-525, 1996.
  44. KITIPORNCHAI, S. and CHAN, S.L. "Nonlinear Finite Element Analysis of Angle and Tee Beam-Columns", *Journal Structural Engineering*, ASCE, v. 113, n<sup>o</sup> 4, 1987.
  45. KUO, S.R., YANG, Y.B. and CHOU, J.H. "Non-Linear Analysis of Space Frames with Finite Rotations", *Journal of Structural Engineering*, v. 119, n<sup>o</sup> 1, pp. 1-15, January, 1993.
  46. LOVE, A.E.H. *A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover Publication, New York, 1944.
  47. MATTIASSON, K. "Numerical Results from Large Deflection Beam and Frame Problems Analysed by Means of Elliptic Integrals", *International Journal Numerical Methods in Engineering*, v. 17, n<sup>o</sup> 1, 1981, pp. 145-153.
  48. MEEK, J.L. and TAN, H.S. "Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by An Incremental Iterative Technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 47, pp. 261-282.
  49. MURRAY, N.W. *Introduction to Theory of Thin-Walled Structures*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
  50. ODEN, J.T., and RIPPERGER, E.A. *Mechanics of Elastic Structures*, 2<sup>a</sup> ed., Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1981.
  51. ORAN, C. "Tangent Stiffness in Space Frames", *Journal Structural Division*, ASCE 99, pp. 987-1001, 1973.
  52. RAJASEKARAN, S. *Finite Element Analysis of Thin-Walled Members of Open Section*, Ph.D. Thesis, University of Alberta, Edmonton, September, 1971.

53. SANTOS, M.I.G. "Tópicos Especiais em Análise Matricial das Estruturas", CT-27, Porto Alegre, CPGEC, UFRGS, Junho, 1981.
54. SANTOS, M.I.G. e KLEIN, S.P. "Análise Matricial de Estruturas pelo Método da Rigidez", Porto Alegre, CT-66, CPGEC, UFRGS, 1980.
55. SHAMES, I.H. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1983.
56. TANG, S.C., YOUNG, R.S., CHON, C.T. "On The Tangent Stiffness Matrix in Conected Coordinate System", *Computers of Structures*, vol 12, pp. 849-856, 1980.
57. TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. *Theory of Elastic Stability*, 2<sup>a</sup> ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1961.
58. VLASOV, V.Z. *Thin-Walled Elastic Beams*, National Science Foundation, Washington, D.C. and The Departament of Commerce by The Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 2nd ed., 1961.
59. YANG, Y.B. *Linear e Non-Linear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion Using Interactive Computer Graphics*, Ph.D. Thesis, Cornell Univ., Ithac, New York, 1984.
60. YANG, Y.B. and LEU, L.J. "Force Recovery Procedures in Nonlinear Analysis", *Computers of Structures*, v. 41, nº 6, pp. 1255-1261, 1991.
61. YANG, Y.B. and McGUIRE, W. "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", *Journal of Structural Engeneering*, v. 112, nº 4, April, 1986.
62. \_\_\_\_\_. "Joint Rotations and Geometric Analysis", *Journal of Structural Engineering*, v. 112, nº 4, April, 1986.
63. YANG, Y.B. and SHIEH, M. "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", *AIAA J.*, v. 28, nº 12, pp 2110-2116, April, 1990.
64. YANG, Y.B. and KUO, S.R. "Frame Buckling Analysis with Full Consideration of Joint Compatibilities", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 118, nº 5, May, 1992.

65. YOO, C.H. "Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages", *Computer and Structures*, v. 11, 1980, pp. 465-471.
66. WASHIZU, K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon Press, New York, N.Y., 1961.
67. WILLIAMS, F.W. "An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 17, 1964, pp. 451-469.
68. ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method*, 3<sup>a</sup> ed., London, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977.
69. ZIENKIEWICZ, O.C. "Incremental Displacement in Nonlinear Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 3, pp. 587-588, 1971.
70. ZIEGLER, H. *Principals of Structural Stability*, 2nd. ed., Birkhauser Verlag, Basel und Stuttgart, 1977.

## APÊNDICE A

### Integrais de Matrizes

A integral de matriz definida pela equação,

$$[K_{gh}^{sv}] = \int_0^1 i^v [n_g^s][n_h'] di \quad (\text{A.1})$$

é usado no cálculo das matrizes de rigidez do item 3.3. Neste apêndice são dadas as várias integrais de matrizes definidas pela equação (A.1) e que foram utilizadas na derivação do elemento finito de viga-coluna.

$$[K_{33}^{100}] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -15 & -3 & -15 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 0.5 \\ 15 & 3 & 15 & -3 \\ -3 & -0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{33}^{110}] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K_{33}^{111}] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 18 & 3 & -18 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -0.5 \\ -18 & -3 & 18 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{33}^{220}] = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K_{33}^{120}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K_{13}^{110}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{11}^{110}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo as demais, dada a seguir

$$[K_{33}^{010}] = [K_{33}^{100}]^T, \quad [K_{33}^{210}] = [K_{33}^{120}]^T \quad \text{e} \quad [K_{31}^{110}] = [K_{13}^{110}]^T$$