

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APROXIMAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS DE ESCOAMENTOS  
AXISSIMÉTRICOS DE FLUIDO HERSCHEL-BULKLEY ATRAVÉS DE EXPANSÕES  
ABRUPTAS

por

Fernando Machado Machado

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, 20 de setembro de 2007

APROXIMAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS DE ESCOAMENTOS  
AXISSIMÉTRICOS DE FLUIDO HERSCHEL-BULKLEY ATRAVÉS DE EXPANSÕES  
ABRUPTAS

por

Fernando Machado Machado  
Bacharel em Física

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Laura Martins Costa, UFF.

Prof<sup>a</sup>. Dra. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Flávio Lorini  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de setembro de 2007

*“Nem tudo que se enfrenta pode ser modificado, mas nada pode ser modificado até que seja enfrentado.”*

**Albert Einstein**

## AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que estiveram envolvidas no meu crescimento ao longo deste meu trabalho, em especial:

aos meus pais, irmãos e minha avó por toda uma vida de dedicação, pelo amor, confiança, afinal, por serem a minha base;

ao professor Dr. Sérgio Frey pela orientação e dedicação;

a minha Maninha, amiga e colega Ana Paula Schwarz, não só pelo conhecimento compartilhado e ajuda cotidiana na minha formação, tanto acadêmica, como pessoal, mas também pela cumplicidade, pela valiosa e sincera amizade e por estar sempre ao meu lado;

a minha amiga, colega e “co-orientadora” Flávia Zinani, pelo conhecimento transmitido, pelo exemplo a ser seguido e principalmente pela amizade;

a todos os meus colegas do LAMAC, em especial aos meus amigos Filipe Silveira e Daniel Dall’Onder, não só pelo apoio, mas também pelas horas do *rush*;

a minha namorada e companheira Carolina Mota de Freitas, não só pelo amor, carinho e cumplicidade, mas também por entender os momentos de ausência;

aos demais professores e funcionários do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica;

a Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, pela infra-estrutura proporcionada;

agradeço a CAPES pela bolsa concedida.

A todos vocês, o meu muito obrigado pela ajuda que foi indispensável durante todo esse trabalho.

## RESUMO

O estudo de escoamentos de fluidos não-Newtonianos através de expansões desperta um grande interesse em pesquisadores nas diversas áreas da engenharia, devido a sua ampla aplicação em indústrias e no meio acadêmico. O objetivo principal desta Dissertação é simular problemas de escoamentos envolvendo fluidos viscoplásticos através de expansões axissimétricas abruptas. O modelo mecânico empregado é baseado nas equações de conservação de massa e de momentum para escoamentos isocóricos acoplados com a equação constitutiva de um Fluido Newtoniano Generalizada (GNL), com a função de viscosidade de Herschel-Bulkley regularizada pela equação de Papanastasiou. O modelo mecânico é aproximado por um modelo estabilizado de elementos finitos, denominado método Galerkin Mínimos-Quadrados, ou Galerkin Least-squares (GLS). Esse método (GLS) é usado a fim superar as dificuldades numéricas do modelo de Galerkin clássico: a condição de Babuška-Brezzi e a instabilidade inerente em regiões advectivas do escoamento. O método é construído adicionando termos de malha-dependentes a fim aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin clássica sem danificar sua consistência. A formulação GLS é aplicada para estudar a influência do índice *power-law*, da tensão limite de cisalhamento e razão de aspecto na dinâmica do escoamento de fluidos de Herschel-Bulkley através de expansões axissimétricas abruptas de razão de aspecto 1:2 e 1:4. Os problemas que envolvem números de Reynolds desprezíveis, para uma escala do número de Herschel-Bulkley entre 0 e 100 e índice de comportamento entre 0,2 e 1,0 são apresentados. Os resultados são fisicamente detalhados e estão de acordo com a literatura.

**Palavras-chave:** *fluido viscoplástico; Herschel-Bulkley; elementos finitos; Galerkin mínimos-quadrados; escoamentos em expansão abrupta.*

## ABSTRACT

### “GALERKIN LEAST-SQUARES APPROXIMATIONS FOR HERSCHEL BULKLEY FLUID FLOWS THROUGH AN AXISYMMETRIC ABRUPTS EXPANSIONS”

The study of non-Newtonian fluid flows in expansions is of great interest for researchers in the several branches of engineering, due to their wide application both in industry and academy. The objective of this Dissertation is to simulate flow problems involving a viscoplastic fluid through an axisymmetric abrupt expansion. The mechanical model employed is based on the mass and momentum conservative equations for isochoric flows coupled with the Generalized Newtonian Liquid (GNL) constitutive equation, with the Papanastasiou-regularized Herschel-Bulkley viscosity function. The mechanical model is approximated by a stabilized finite element scheme, namely the Galerkin Least-squares method. This method (GLS) is used in order to overcome the numerical difficulties of the classical Galerkin method: the Babuška-Brezzi condition and the inherent instability in advective flow regions. The method is built adding mesh-dependent terms in order to increase the stability of the classical Galerkin formulation without damaging its consistency. The GLS formulation is applied to study the influence of power-law index, yield stress and aspect reason in the flow dynamics of Herschel-Bulkley fluids through an axisymmetric abrupt expansions of aspect reason 1:2 and 1:4. Problems involving negligible Reynolds numbers, for a Herschel-Bulkley number range between 0 and 100 and e power-law index range between 0.2 and 1.0 are presented. The results are physically comprehensive and are in accordance with the literature.

**Keywords:** *viscoplastic fluid; Herschel-Bulkley; finite elements; Galerkin least-squares; abrupt expansion flow.*

# ÍNDICE

	Pág.
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>01</b>
1.1 FLUIDO NEWTONIANO.....	01
1.2 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS .....	02
1.3 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS.....	04
1.3.1 Métodos Estabilizados.....	04
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOPLÁSTI- COS.....	06
1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO .....	09
<b>2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO.....</b>	<b>11</b>
2.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS .....	11
2.1.1 Conservação de Massa.....	11
2.1.2 Conservação de Momentum.....	13
<b>3. FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS .....</b>	<b>16</b>
3.1 FLUIDO NEWTONIANO.....	16
3.2 FLUIDO NEWTONIANO GENERALIZADO .....	18
3.2.1 Modelo Power-Law de Ostwald de Waele .....	19
3.2.2 Modelo de Ellis.....	20
3.2.3 Modelo de Bingham .....	20
3.2.4 Modelo de Herschel-Bulkley .....	21
3.2.5 Modelo de Herschel-Bulkley Regularizado pela Equação de Papanastasiou .....	23
<b>4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>25</b>
4.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES .....	25
4.2 FORMULAÇÃO FORTE.....	26
4.3 O MÉTODO DE GALERKIN .....	27
4.4 O MÉTODO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS.....	29
4.5 DIFICULDADES DO MÉTODO GALERKIN .....	30
4.6 ELEMENTO QUADRANGULAR BI-LINEAR.....	35
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>38</b>
5.1 ESCOAMENTO SOBRE UM DEGRAU DE EXPANSÃO.....	38

5.2 ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE HERSCHEL-BULKLEY ATRAVÉS DE EXPAN- SÕES AXISSIMÉTRICAS ABRUPTAS .....	45
5.2.1 <i>Escoamento Através de Expansões 1:2 Axissimétricas Abruptas</i> .....	46
5.2.1.1 <i>Análise Global: Distribuições de Tensão de Cisalhamento, Pressão e Velocidade</i> .....	48
5.2.1.2 <i>Análise Local: Perfis de Velocidade e Queda de Pressão</i> .....	57
5.2.2 <i>Escoamento Através de Expansões 1:4 Axissimétricas Abruptas</i> .....	61
<b>6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS .....</b>	<b>72</b>
6.1 COMENTÁRIOS FINAIS .....	73
6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS .....	74
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>75</b>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{C}_h$	Partição do domínio $\Omega$ em elementos finitos.....	[-]
$\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espaço das funções contínuas em $\Omega$ .....	[-]
$C_p$	Número de Euler .....	[-]
$\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação.....	[s <sup>-1</sup> ]
$D$	Desvio percentual.....	[%]
$d$	Distância adimensional do do ponto de recolamento .....	[m]
$d_A$	Grau de liberdade associados ao nó global $A$ da partição $\mathcal{C}_h$ .....	[-]
$\mathbf{g}$	Aceleração da gravidade .....	[m/s <sup>2</sup> ]
$h_K$	Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento $K$ .....	[m]
$h$	Altura a montante de degrau .....	[m]
$H$	Altura a jusante de degrau.....	[m]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$ .....	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em $\Gamma_g$ .....	[-]
$H_b$	Número de Herschel-Bulkley.....	[-]
$\mathbf{I}$	Tensor unitário .....	[-]
$I_D, II_D, III_D$	Invariantes do tensor deformação .....	[-]
$K$	Índice de consistência.....	[Pa.s <sup>n</sup> ]
$L$	Comprimento total do duto .....	[m]
$L_0$	Comprimento do duto a montante da expansão.....	[m]
$L_1$	Comprimento do duto a jusante da expansão .....	[m]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integráveis em $\Omega$ .....	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em $\Omega$ .....	[-]
$m$	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos $P_m$ e $Q_m$ .....	[-]
$N$	Número de dimensões do problema .....	[-]
$\mathbf{n}$	Vetor normal exterior unitária .....	[-]
$n$	Índice power-law .....	[-]
$N_A$	Função de aproximação do nó global $A$ da partição $\mathcal{C}_h$ .....	[-]
$p$	Pressão hidrostática do fluido .....	[Pa]
$p^h$	Aproximação do campo de pressão do fluido .....	[Pa]
$P_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento triangular ou tetraédrico.....	[-]

$P$	Espaço funcional do campo de pressão .....	[-]
$P^h$	Aproximação por elementos finitos do campo de pressão .....	[Pa]
$q^h$	Função peso do campo de pressão .....	[-]
$Q_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento quadrilátero ou hexaédrico.....	[-]
Q1	Elemento quadrangular bi-linear .....	[-]
$\mathfrak{R}$	Espaço dos números reais .....	[-]
$R_m$	Espaço polinomial de grau $m$ .....	[-]
$R_0$	Raio do cilindro a montante da expansão.....	[m]
$R_l$	Raio do cilindro a jusante da expansão .....	[m]
Re	Número de Reynolds .....	[-]
$Re_K$	Número de Reynolds de malha .....	[-]
$t$	Tempo .....	[s]
$\mathbf{t}$	Vetor tensão.....	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{T}$	Tensor tensão.....	[N/m <sup>2</sup> ]
$u_i$	Componente da velocidade na direção $i$ .....	[m/s]
$u_0$	Velocidade média de entrada na expansão .....	[m/s]
$\mathbf{u}$	Campo de velocidade admissível.....	[m/s]
$\mathbf{u}^h$	Aproximação do campo de velocidades .....	[m/s]
$U$	Variável genérica.....	[-]
$U^h$	Aproximação do conjunto de variáveis $U$ .....	[-]
$v^h$	Função peso do campo de velocidades .....	[-]
$\mathbf{v}$	Velocidade de um elemento fluido infinitesimal .....	[m/s]
$\mathbf{V}$	Espaço funcional do campo de velocidade.....	[-]
$\mathbf{V}^h$	Aproximação por elementos finitos do campo de velocidade .....	[-]
$\mathbf{x}$	Posição em uma configuração .....	[m]

## LETRAS GREGAS

$\mathbf{a}$	Parâmetro Regularizador de Papanastasiou.....	[-]
$\mathbf{b}$	Razão de aspecto da expansão .....	[-]
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$ .....	[-]
$\Gamma_g$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Dirichlet.....	[-]
$\Gamma_h$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Neumann .....	[-]

$m$	Viscosidade absoluta do fluido newtoniano .....	[kg/m.s]
$m_t$	Viscosidade aparente do fluido não-newtoniano .....	[kg/m.s]
$r$	Massa específica do fluido .....	[kg/m <sup>3</sup> ]
$t_0$	Tensão limite de escoamento .....	[N/m <sup>2</sup> ]
$t$	Parcela do tensor tensões de cisalhamento.....	[N/m <sup>2</sup> ]
$t$	Tensor - extra de tensão .....	[N/m <sup>2</sup> ]
$\Omega$	Domínio do problema .....	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema .....	[-]
$\Omega_K$	Domínio do elemento finito $K$ .....	[-]
?	Parâmetro de estabilidade.....	[-]
$\dot{g}$	Taxa de deformação por cisalhamento.....	[s <sup>-1</sup> ]
?	Coordenada natural.....	[-]
?	Coordenada natural.....	[-]
$h$	Viscosidade viscométrica aparente.....	[Kg/m.s]
$h_0$	Viscosidade viscométrica aparente para baixas taxas de cisalhamento.....	[Kg/m.s]

## SOBRESCRITO

$a$	Número do ponto nodal do elemento .....	[-]
$g$	Condição de contorno essencial (Dirichlet).....	[-]
$h$	Condição de contorno natural (Neumman) .....	[-]
$k$	Grau dos polinômios dos termos de velocidade .....	[-]
$h$	Elemento finito da partição $C_h$ .....	[-]

## SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente espacial.....	[-]
$\Delta p$	Queda de pressão .....	[Pa]
$(\cdot, \cdot)$	Produto interno de $L^2(\Omega)$ .....	[-]
$(\cdot, \cdot)_K$	Produto interno de $L^2(\Omega_K)$ .....	[-]

$\ \cdot\ _0 \dots$	Norma de $L^2(\Omega)$ .....	[-]
$\ \cdot\ _{0,K} \dots$	Norma de $L^2(\Omega_K)$ .....	[-]
$\ \cdot\ _1 \dots$	Norma de $H^1(\Omega)$ .....	[-]

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
1.1 Curva de escoamentos para fluido Newtoniano.....	1
1.1 Curva de escoamentos para alguns tipos de fluido não-Newtoniano.....	2
2.1 Volume arbitrário $\Omega$ fixo no espaço com fronteira $\Gamma$ .....	11
3.1 Tensão de cisalhamento em função da taxa de cisalhamento ajustada pelo modelo de Herschel-Bulkley regularizado pela função de Papanastasiou.....	23
4.1 Descrição do problema da cavidade forçada.....	31
4.2 Iso-regiões da pressão, para uma malha com 100 elementos Q1/Q1: (a) Método de Galerkin clássico e (b) Método de GLS.....	32
4.3 Iso-regiões da pressão, para uma malha com 4.900 elementos Q1/Q1: (a) Método de Galerkin clássico e (b) Método de .....	32
4.4 Perfis de velocidade pelos métodos de Galerkin e GLS, para uma malha com 100 elementos Q1/Q1 (a) velocidade vertical, em $x_2=0,5$ e (b) velocidade horizontal, em $x_1=0,5$ .....	33
4.5 Perfis de velocidade pelos métodos de Galerkin e GLS, para uma malha com 4900 elementos Q1/Q1 (a) velocidade vertical, em $x_2=0,5$ e (b) velocidade horizontal, em $x_1=0,5$ .....	34
4.6 Domínio de elemento quadrilátero bi-linear no <i>parent domain</i> e ordenação modal local...	35
4.7 Função de forma local ( $N_a$ ) e global ( $N_A$ ) do elemento quadrilátero bi-linear Q1.....	37
5.1 Escoamento sobre degrau abrupto: descrição do problema.....	39
5.2 Escoamento sobre degrau abrupto: detalhe do modulo da velocidade e linhas de corrente a jusante do degrau, para (a) $Re=50$ e (b) $Re=150$ .....	40
5.3 Escoamento sobre degrau abrupto: isobáricas e magnitude do campo de pressão, para (a) $Re=50$ e (b) $Re=150$ .....	41
5.4 Escoamento sobre degrau abrupto: relação entre o comprimento de recolamento e o número de Reynolds.....	42
5.5 Escoamento sobre degrau abrupto: coeficiente de pressão ao longo da parede superior...	43
5.6 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2: descrição do problema.....	46
5.7 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2: teste de independência de malha.....	47
5.8 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - Malha selecionada 9.590 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 10.039 pontos nodais.....	47
5.9 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 – detalhe da malha.....	47
5.10 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 – iso-regiões de $t$ , para $n=0,37$ ,	

$K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0,1$ , (b) $H_b=1$ , (c) $H_b=10$ , (d) $H_b=20$ , (e) $H_b=50$ e (f) $H_b=100$ ...	49
5.11 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - influências do índice <i>power-law</i> , para $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $H_b=0,1$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $n=1$ , (b) $n=0,8$ , (c) $n=0,6$ , (d) $n=0,5$ , (e) $n=0,37$ , (f) $n=0,2$ .	51
5.12 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - influência do índice <i>power-law</i> e do número de $H_b$ na quina da expansão, para $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $n=0,8$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0$ , (b) $b=0,005$ , (c) $H_b=0,01$ , (d) $H_b=0,05$ , (e) $H_b=0,1$ e (f) $H_b=1$ .....	52
5.13 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - influência do índice <i>power-law</i> e do número de $H_b$ na quina da expansão, para $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $n=0,37$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0$ , (b) $b=0,005$ , (c) $H_b=0,01$ , (d) $H_b=0,05$ , (e) $H_b=0,1$ e (f) $H_b=1$ .....	53
5.14 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - Iso-regiões do campo de pressão, $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $Re=0$ , $n=0,37$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0$ , (b) $H_b=0,1$ , (c) $H_b=1$ , (d) $H_b=10$ , (e) $H_b=50$ e (f) $H_b=100$ .....	54
5.15 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - superfícies do módulo do campo de velocidade, $Re=0$ , $n=0,37$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0$ , (b) $H_b=0,1$ , (c) $H_b=1$ , (d) $H_b=10$ , (e) $H_b=50$ e $H_b=100$ .....	56
5.16 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $Re=0$ , $n=0,37$ e 9.590 elementos $Q1/Q1$ .....	57
5.17 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$ , para $n=0,37$ , $Re=0$ e 9.590 elementos $Q1/Q1$ .....	58
5.18 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidades axiais em $x_1=10$ , para $n=0,37$ , $Re=0$ e 9.590 elementos $Q1/Q1$ .....	59
5.19 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - queda de pressão ao longo da linha de simetria, $Re=0$ , $H_b=0,1$ e 9.590 elementos $Q1/Q1$ .....	60
5.20 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidade axial no plano de expansão, para $Re=0$ , $H_b=0,1$ e 9.590 elementos $Q1/Q1$ .....	61
5.21 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - descrição do problema.....	61
5.22 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - teste de independência de malha.	62
5.23 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - malha selecionada, com 15.825 elementos $Q1/Q1$ e 16.336 pontos nodais.....	62
5.24 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - detalhe da malha selecionada, com 15.825 elementos $Q1/Q1$ e 16.336 pontos nodais.....	63
5.25 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - iso-regiões de $t$ , para $n=0,37$ , $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) $H_b=0,1$ , (b) $H_b=1$ , (c) $H_b=10$ , (d) $H_b=20$ , (e) $H_b=50$ e (f) $H_b=100$ .....	64

5.26 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – influências da pseudoplasticidade e do número de Hb na quina da expansão, $n=0,8$ e $\mathbf{a}=10^3$ :(a) Hb=0, (b) Hb=0,005, (c) Hb=0,01, (d) Hb=0,05, (e) Hb=0,1 e (f) Hb=1.....	66
5.27 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – influências da pseudoplasticidade e do número de Hb na quina da expansão, $n=0,37$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) Hb=0, (b) Hb=0,005, (c) Hb=0,01, (d) Hb=0,05, (e) Hb=0,1 e (f) Hb=1.....	67
5.28 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – comparação com os resultados obtidos por Jay et al. (2001), para $n=1$ e $\mathbf{a}=10^3$ : (a) Hb=1, (b) Hb=10.....	68
5.29 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $Re=0$ , $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $n=0,37$ e 15.825 elementos Q1/Q1.	69
5.30 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – velocidades axiais no plano de expansão, para $Re=0$ , $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , $n=0,37$ e 15.825 elementos Q1/Q1.....	70
5.31 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – velocidades axiais para $x_1=10$ , para $n=0,37$ , $Re=0$ , $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ e 15.825 elementos Q1/Q1.....	70
5.32 Comparação entre a queda de pressão ao longo da linha de simetrias para expansões de razão de aspecto 1:2 e 1:4, Hb=10, para $Re$ desprezível e $n=0,37$ .....	71

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
4.1 Coordenadas locais no espaço $x$ .....	36
5.1: Pesquisadores e Métodos utilizados por GAMM <i>workshop</i> [Morgan et al., 1982] e Macedo (1995) .....	39
5.2: Comparação dos valores de recolamento.....	41
5.3: Velocidades horizontais para $d=1,6$ .....	44
5.4 Velocidades horizontais para $d=4,0$ .....	44
5.5: Velocidades horizontais para $d=8,0$ .....	44



## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. FLUIDO NEWTONIANO

A lei de Newton para viscosidade descreve o comportamento do escoamento de um fluido viscoso através da seguinte expressão;

$$\mathbf{t} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{t}$  é a tensão de cisalhamento,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  é a taxa de cisalhamento e  $\mu$  é definido como viscosidade dinâmica absoluta. Denomina-se, então, como fluido Newtoniano o material sujeito a um escoamento puramente cisalhante, obedece a Eq. (1.1).

Newton considerou que a curva equivalente da Eq. (1.1), para o escoamento de um fluido ideal em regime laminar seria uma linha reta com início na origem dos eixos coordenados, onde qualquer ponto desta reta define pares de valores para tensão de cisalhamento  $\mathbf{t}$  e da taxa de cisalhamento  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , e que esta reta possui uma inclinação angular  $\theta$ , conforme ilustra a Figura 1.1. Dividindo a tensão de cisalhamento  $\mathbf{t}$  pela taxa de cisalhamento  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , obtém-se o valor de viscosidade  $\mu$ . Este valor também pode ser definido como a tangente do ângulo de inclinação  $\theta$  da curva de fluxo, ou seja,  $\mu = \text{tg}(\theta)$ .

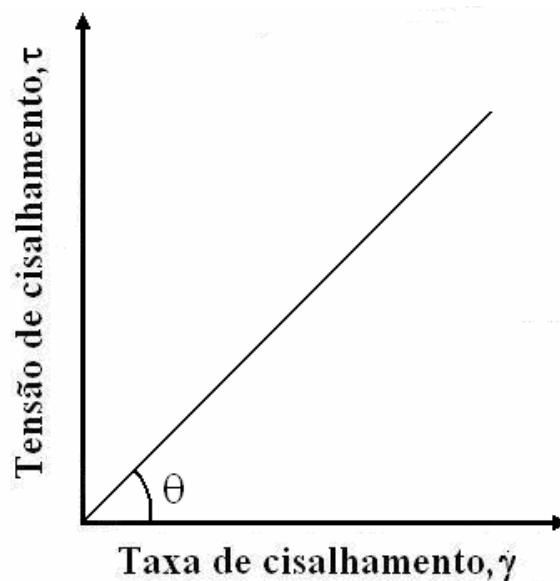


Figura 1.1 Curva de escoamento para um fluido Newtoniano.

Portanto, um determinado fluido é Newtoniano quando a viscosidade só é influenciada pela temperatura e pressão. São exemplos de fluidos Newtonianos água, óleo mineral e melado.

## 1.2 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Todos os outros líquidos que não exibem o comportamento previsto pela Eq. (1.1) são chamados de fluidos não-Newtonianos. Provavelmente a característica mais importante dos fluidos não-Newtonianos é o fato de eles apresentarem uma viscosidade variável dependente da taxa de cisalhamento do material. A viscosidade de um fluido não-Newtoniano é definido como:

$$m_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.2)$$

onde a viscosidade  $\mu_a$ , variável como função de  $\dot{\gamma}$  é denominada de viscosidade aparente, isto é, a viscosidade que o fluido teria de fosse Newtoniano, naquela condição de escoamento. Esta viscosidade só é válida para uma determinada taxa de cisalhamento, isto é, essa propriedade, sempre que citada, deve vir acompanhada da taxa de cisalhamento correspondente.

Estes fluidos são classificados conforme o aspecto da curva de fluxo, demonstrado na Figura 1.2, e correlação com alguma equação ou modelo matemática que melhor adapte.

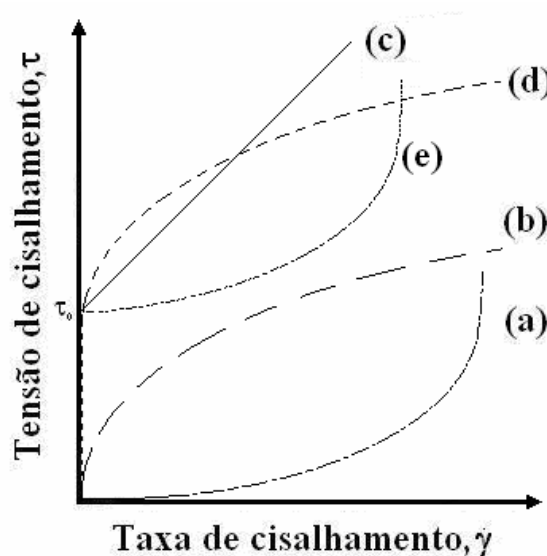


Figura 1.2 Curva de escoamento para alguns tipos de fluidos não-Newtonianos: (a) dilatante; (b) pseudoplástico; (c) plástico de Bingham; (d) viscoplástico pseudoplástico e (e) viscoplástico dilatante.

Portanto, todo o fluido cuja relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento não detêm como característica a proporcionalidade, ou seja, não é constante, é denominado não-Newtoniano - considerando ainda a temperatura e a pressão constantes e o escoamento laminar. Essa viscosidade pode ser uma função da taxa de deformação. Assim, tais fluidos podem ser classificados como fluidos pseudoplásticos, fluidos dilatantes ou fluidos viscoplásticos.

Os fluidos que se caracterizam por uma drástica diminuição na viscosidade quando a taxa de cisalhamento passa de níveis mais baixos para níveis mais altos (curva (b) na Fig. 1.2), geralmente são chamados de fluidos pseudoplásticos ou *shear-thinning*. São exemplos de fluidos pseudoplásticos o sangue, saliva, ketchup, chocolates fundidos e sucos concentrados [Machado, 2002].

Alguns fluidos comportam-se de maneira inversa, ou seja, a viscosidade do fluido aumenta com o aumento da taxa de cisalhamento. Este comportamento é chamado de dilatância ou *shear-thickening* (curva (a) na Fig. 1.2). O comportamento dilatante é exibido em suspensões bastante concentradas de partículas de pequenos diâmetros. Dentre os fluidos dilatantes destacam-se as dispersões de polímeros ou resinas e algumas pastas de cimento [Machado, 2002].

Comportamento ainda mais complexo é apresentado pelos fluidos pseudoplásticos com limite de escoamento, ou seja, fluidos que não escoam a menos que sujeitos a uma tensão crítica de escoamento - nesta Dissertação denotada por  $t_0$ . Tais fluidos são denominados *viscoplásticos* e podem ser classificados ora como fluido ora como corpo rígido, dependendo do valor de sua tensão de cisalhamento. Eles são, na maioria das vezes, dispersões que, em repouso, podem formar uma rede inter-molecular/inter-particular devido a forças internas de ligação tais como forças polares e forças de Van Der Waals, entre outras. Essas forças reduzem as alterações dos elementos do volume da substância, dando a ela um comportamento rígido com uma viscosidade extremamente alta. As forças externas, se menores do que as forças de ligação deformarão elasticamente a substância sólida e, somente quando as forças externas forem fortes o suficiente para exceder as forças internas, superando assim a tensão limite de cisalhamento, a estrutura entrará em colapso. Quando isso acontecer, os elementos de volume mudarão de posição irreversivelmente, isto é, o material passará a ter um comportamento de um fluido viscoso. Após sua viscosidade sofrer uma queda brusca, o fluido passará a apresentar comportamento Newtoniano ou dilatante ou pseudoplástico.

Os fluidos viscoplásticos possuem curvas de escoamento com origem na tensão crítica de escoamento, como ilustrado nas curvas (d) e (e) da Figura 1.2. Dentre as substâncias com limite

de escoamento, destacam-se as pastas de dentes, borrachas naturais, certos tipos de tintas, graxas e lamas de perfuração de poços de petróleo [Schramm, 2006].

### 1.3. ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

A metodologia de elementos finitos consiste um método de aproximação numérica de equações diferenciais, o qual se baseia no conceito de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação propriamente selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy e Gartling, 1994].

Quando ocorre a solução de um problema através do método de elementos finitos, o problema é formulado variacionalmente, com seu domínio discretizado em um conjunto de subdomínios finitos não superpostos, os elementos finitos, os quais permitem a construção de funções de aproximação de forma simples, através da teoria de interpolação de funções. As funções de aproximação são, então, substituídas na forma variacional das leis de conservação, juntamente com as funções peso do problema, gerando, assim, um conjunto de equações algébricas, para o regime permanente dos problemas estudados [Hughes, 1987].

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos [Rektorys, 1975]. O que há de novo e poderoso na metodologia de elementos finitos é sua escolha particular das funções base, que utiliza funções polinomiais bi-lineares por partes de suporte compacto, construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associados e zero no restante do domínio. É esta importante característica do método que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz de banda, reduzindo, assim, drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas associado.

#### *1.3.1. Métodos Estabilizados*

O método de elementos finitos mais empregado é o método de Galerkin, o qual tem sido aplicado, nas últimas décadas, a uma variada classe de problemas. Entretanto, sua extensão do método para problemas de escoamentos, algumas patologias numéricas foram detectadas em várias situações de interesse de engenharia. Constatou-se o surgimento de oscilações espúrias,

sobre todo o domínio computacional, em problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir as aproximações de escoamentos advectivo-dominados. Em um primeiro momento, o refinamento da malha surgiu como uma primeira tentativa de eliminar o problema, mesmo acarretando no aumento do custo computacional. Em seguida, foram propostas novas estratégias, tais como o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus e Hughes, 1978; Crouzeix e Raviart, 1973]. Alguns pesquisadores seguiram a linha da manutenção da formulação de Galerkin clássica com uso de elementos não conformes, enquanto, outros optaram pela manutenção de funções de interpolação usuais isoparamétricas com a alteração da formulação de Galerkin, visando adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção gerou o que atualmente é conhecido como métodos estabilizados.

Especificamente a aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível, via método de Galerkin, enfrenta duas grandes dificuldades. Primeiro, a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, satisfazendo, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Em seguida, tem-se a instabilidade inerente a esquemas de discretizações centrais, através da formulação de Galerkin ou através de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks e Hughes, 1982; Patankar e Spalding, 1972; Patankar, 1980]. O tratamento simétrico do termo de advecção pela formulação de Galerkin clássica, na qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é identificada como a fonte das instabilidades numéricas nos escoamentos de altos números de Reynolds.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks e Hughes, 1982, e Hughes e Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind / Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*) - a qual atua somente na direção das linhas de corrente - às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é suficientemente regular.

Dentre as evoluções a partir do método SUPG, destaca-se, o chamado método Galerkin mínimos-quadrados, ou Galerkin Least-Squares (GLS), introduzido por Hughes et al., 1986 no contexto do problema de Stokes. Esta metodologia consiste na adição de termos dependentes da malha, ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original

sem, contudo, prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada com sucesso a uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos Franca e Hughes, 1988; Gresho, 1991; Franca et al., 1992; Franca e Frey, 1992; Franca e Hughes, 1993; Harari e Hughes, 1994; Franceschini e Frey, 2003; Ruas et al., 2004, Zinani e Frey, 2005, Coronado et al., 2006.

#### 1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

Papanastasiou (1987) estudou escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos de Bingham modelados através de uma equação constitutiva modificada, válida para todo escoamento - seja nas regiões onde ocorre escoamento (doravante denominadas simplesmente por regiões de escoamento) como nas regiões onde praticamente o material não escoava (doravante denominadas de regiões rígidas). As equações de conservação e a relação constitutiva foram resolvidas simultaneamente via método de Galerkin clássico e o esquema iterativo de Newton. Essa estratégia numérica elimina a necessidade de rastrear superfícies do escoamento. Esta análise foi aplicada para o escoamento em um canal unidimensional, para o escoamento de uma camada limite bidimensional e para o escoamento de uma extrusão bidimensional. As aproximações de elementos finitos concordaram satisfatoriamente com soluções analíticas disponíveis para casos assintóticos.

Burgos et al. (1999) analisaram em seu artigo os fluidos de Herschel-Bulkley, os quais descrevem materiais que se comportam como sólidos rígidos quando a tensão local  $t$  é mais baixa do que o limite de escoamento  $t_0$ . O domínio do escoamento é caracterizado por duas regiões, uma onde  $t > t_0$  - a chamada região de escoamento - e a outra na qual  $t < t_0$  - região rígida. A região na qual  $t = t_0$  é conhecida como superfície de escoamento. Os autores, através do uso de soluções analíticas para um escoamento cisalhante entre duas paredes rígidas, discutiram a eficiência dos modelos regularizados de Herschel-Bulkley - tais como o de Papanastasiou - do modelo de bi-viscosidade e do modelo de Bercovier e Engelman em determinar a topografia da superfície de escoamento. São mostrados resultados para diferentes parâmetros de escoamento e comparados com soluções exatas. É concluído que os modelos regularizados, com uma escolha apropriada dos parâmetros de regularização, podem ser usados para prever as dimensões do escoamento e descrever as zonas rígidas. O modelo de Papanastasiou prediz bem a superfície de escoamento, enquanto os modelos de Papanastasiou e o de bi-viscosidade predizem bem a tensão

longe dela. O modelo de Bercovier e de Engelman é equivalente ao modelo de Papanastasiou, para uma escolha apropriada do parâmetro de regularização  $d$  seja feita. Também é demonstrado que em alguns casos a superfície de escoamento pode ser recuperada usando um procedimento de extrapolação baseado em uma representação analítica da solução.

Alexandrou et al. (2001) relataram em seu artigo um estudo sobre escoamentos permanentes de fluidos de Herschel–Bulkley em expansões planares tridimensionais com razão de aspecto 1:2: e 1:4. O comportamento do fluido foi modelado usando uma relação constitutiva contínua regularizada, e o escoamento foi aproximado numericamente empregando uma formulação mista de Galerkin acoplado a uma estratégia iterativa de Newton. Os autores apresentaram resultados para a topologia das regiões de escoamento e rígida ao longo das expansões – bem como de suas zonas de recirculação - como uma função dos números de Bingham e Reynolds e do expoente *power-law*. Seus resultados revelaram forte dependência entre os números de Reynolds e Bingham e suas influências na formação e destruição das zonas de estagnação nas quinas da expansão, e no tamanho e localização das regiões de escoamento tampão.

Barnes et al. (2001) mostraram que, a partir da utilização de reômetros de tensão controlada, já é possível aferir, em regime permanente, curvas de escoamento de líquidos estruturados para uma ampla variação da tensão de cisalhamento aplicada. Em diversos líquidos, estas curvas apresentam novas formas, as quais têm características fortemente pseudoplásticas. Os autores introduziram uma categoria de modelos matemáticos empíricos, os quais são simplificações ou elaborações dos bem conhecidos modelos de Cross e Ellis. Estes modelos visam descrever o comportamento de líquidos estruturados fortemente pseudoplásticos, o qual, até o momento, tem sido descritos apenas para elevadas taxas ou tensões de cisalhamento através de um modelo constitutivo com limite de escoamento tal como o modelo de Casson, Bingham e Herschel–Bulkley. Estas novas equações descrevem as curvas de escoamento tanto acima quanto abaixo de qualquer tensão de escoamento do material e encontram aplicação para uma variada gama de líquidos de interesse industrial, indo desde as lamas de perfuração até aos chocolates fundidos.

Pascal Jay et al. (2001) realizaram simulações numéricas de escoamentos através de uma expansão 1:4 axissimétrica abrupta, usando os líquidos de Herschel–Bulkley e Bingham com modelo de bi-viscosidade. Eles analisaram a influência da pseudoplasticidade, da inércia, da tensão limite de escoamento, a estrutura dos escoamentos e suas perdas de cargas. Analisando a estrutura dos escoamentos, eles mostraram o surgimento de um vórtice inicial e, em seguida, a formação de duas zonas estagnadas de formato toroidal – uma localizada junto à quina da

expansão e a outra no ponto de recolamento a jusante do vórtice. Os efeitos de inércia e da tensão de escoamento agem em efeitos opostos. Quando a inércia cresce, o vórtice aumenta e a zona estagnada decresce. Contrariamente, quando o limite de escoamento aumenta, o vórtice decresce e a zona estagnada aumenta. O aumento da pseudoplasticidade reduz as dimensões tanto do vórtice como da zona estagnada. Já a perda de carga aumenta com a tensão de escoamento. Os resultados numéricos mostraram-se consistentes quando comparados com resultados experimentais.

Scott et al. (1988) descreveram em seu artigo resultados obtidos para soluções de escoamentos, em regime permanente com baixo número de Reynolds, de materiais viscoplásticos com estrutura de vórtices utilizando o método de elementos finitos. O comprimento do recolamento e a intensidade dos vórtices em expansões planares e axissimétricas abruptas são relatados em função do número de Reynolds e da tensão de escoamento adimensionalizada para os fluidos de Bingham e Casson. O escoamento em uma estenose é examinado usando as relações constitutivas de Bingham e Casson. As zonas de separação em uma bifurcação planar a 180° de entradas planas e curvas são comparada para os fluidos de Bingham e Newtoniano. Os resultados mostraram que o tamanho e a intensidade da recirculação são reduzidos para materiais viscoplásticos.

Souza Mendes et al. (2004) propuseram uma nova função de viscosidade para líquidos com alta pseudoplasticidade ou com tensão limite de escoamento, como, por exemplo, pastas e lamas de perfuração. Essa função é contínua e apresenta um platô para baixas taxas de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para valores da taxa de cisalhamento limiar (tensão limite), e uma subsequente região de *power-law*. A equação foi ajustada para os dados de duas soluções aquosas de Carbopol com diferentes concentrações, para fluidos de perfuração, para emulsão água/óleo e maionese comercial. A qualidade dos ajustes encontrada por eles foi plenamente satisfatória.

Souza Mendes et al. (2006) analisaram o escoamento axissimétrico de um líquido viscoplástico através de uma expansão abrupta seguida de uma contração abrupta. Os autores obtiveram soluções numéricas permanentes, sem inércia, através da resolução das equações de conservação de massa e momentum empregando o método de volumes finitos. O comportamento viscoplástico do líquido foi modelado através de um modelo de líquido Newtoniano generalizado com uma função viscosidade recentemente proposta [Souza Mendes et al., 2004]. Eles também realizaram experimentos de visualização com uma solução aquosa de Carbopol em diferentes concentrações. Superfícies geradas delimitando regiões rígidas e as regiões de não rígidas foram observadas para diferentes combinações de parâmetros governantes.



Neofytou (2005) investiga os efeitos não-Newtonianos em escoamentos de fluidos Newtonianos generalizados, empregando um esquema numérico baseado na formulação de volumes finitos. Este esquema utiliza o método de correção de pressão em conjunto com o algoritmo SIMPLE, de modo a solucionar o sistema de equações discretizadas. Visando minimizar a difusividade artificial dos esquemas de baixa ordem, a aproximação dos termos convectivos é realizada usando o esquema QUICK de terceira ordem. Para modelar o comportamento da viscosidade não-Newtoniana, foram empregados os modelos *power-law*, Quemada, e Bingham e Casson modificados. A validação do código foi realizada através da comparação de resultados numéricos disponíveis na literatura. Analisando o problema da cavidade, uma dupla investigação é realizada no que diz respeito aos efeitos não-Newtonianos do escoamento. O problema é tanto explorado empregando diferentes modelos constitutivos, como variando as características pseudoplásticas e dilatantes do fluido.

## 1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO

Esta Dissertação objetiva a modelagem mecânica e simulação numérica via método de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), de escoamentos axissimétricos de fluidos viscoplásticos de Herschel-Bulkley modificado através de expansões abruptas.

Finalizando este capítulo e para um melhor entendimento e apreciação desta Dissertação, é conveniente apresentar um plano geral de seus capítulos:

- Capítulo 1: Introdução do trabalho, sua motivação, o estado da arte do método de elementos finitos em fluidos e escoamentos de fluidos viscoplásticos.
- Capítulo 2: Modelagem mecânica baseada na definição de grandezas e leis de conservação de massa e momentum linear utilizadas na modelagem de escoamentos de fluidos não-Newtonianos.
- Capítulo 3: Comportamento material dos fluidos puramente viscosos com limite de escoamento, para os quais é estabelecido a relação do tensor-tensão com o tensor taxa de deformação segundo o modelo do Herschel-Bulkley regularizado.
- Capítulo 4: Apresenta uma descrição da aproximação de elementos finitos de Galerkin mínimos-quadrados para as equações do modelo mecânico introduzido nos Capítulos 2 e 3, assim como as deficiências do método de Galerkin clássico em aproximar o modelo proposto.

- Capítulo 5: Apresenta a validação da implementação computacional da formulação GLS introduzida no Capítulo 4. Discute fisicamente os resultados das simulações numéricas de escoamentos de fluidos de Herschel-Bulkley regularizados através de expansões axissimétricas abruptas.
- Capítulo 6: Faz um resumo do conteúdo de cada um dos Capítulos da Dissertação, enfatiza as principais conclusões obtidas no Capítulo 5 e projeta perspectivas futuras para o trabalho.
- Capítulo 7: Referências bibliográficas utilizadas.

## 2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar as equações que descrevem o escoamento dos fluidos. Tais equações indicam como a massa e momentum do fluido varia de acordo com a sua posição e o tempo. Estas equações serão apresentadas em termos de fluxos, de modo a serem válidas para qualquer tipo de fluido.

### 2.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS

O movimento isotérmico de um fluido é descrito pelas equações de conservação de massa e momentum. Considere uma região arbitrária fixa do espaço, de volume  $\Omega$  e superfície  $\Gamma$  (Fig. 2.1), na qual, para toda superfície elementar  $d\Gamma$  há um vetor normal unitário exterior  $\mathbf{n}$ . Idealize-se, então, esta região fixa no meio do escoamento de um fluido, com o mesmo movendo-se através de suas fronteiras.

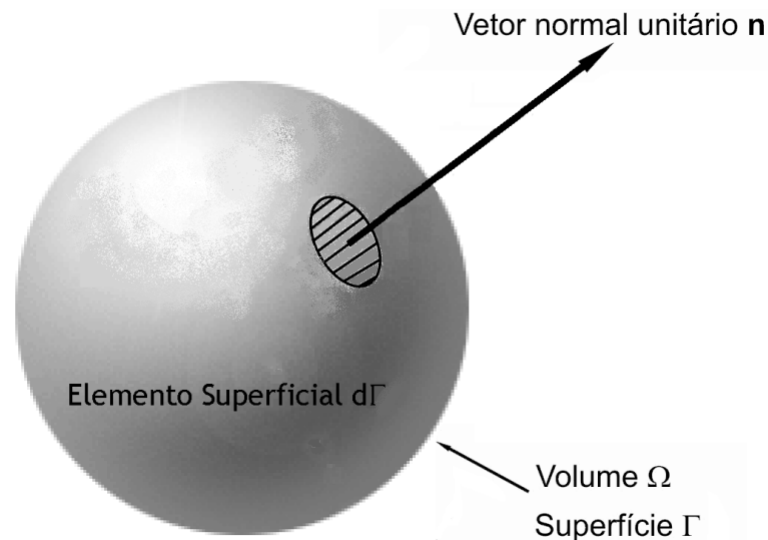


Figura 2.1 Volume arbitrário  $\Omega$  fixo no espaço, de fronteira  $\Gamma$ .

#### 2.1.1 Conservação de Massa

Suponha que um elemento fluido infinitesimal de superfície  $d\Gamma$  atravesse as fronteiras do volume  $\Omega$  com velocidade  $\mathbf{v}$ . A vazão volumétrica elementar do fluido que escoar através de  $d\Gamma$  é dada por  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ . Se o fluxo deixa o volume  $\Omega$ , então, a vazão elementar  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$  será positiva; caso contrário, havendo afluxo de fluido,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$  será negativa. Logo, a vazão mássica elementar de

fluido será dada por  $\mathbf{r}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\Gamma$ , com  $\mathbf{r}\mathbf{v}$  denotando o chamado fluxo de massa, isto é, massa por unidade de área e tempo.

De acordo com o princípio da conservação de massa, tem-se que “a massa total de fluido no interior do volume  $\Omega$ , somente aumentará devido ao afluxo líquido de fluido através da fronteira  $\Gamma$ ” [Ferguson e Kemblowsky, 1991]. Matematicamente,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathbf{r}d\Omega=-\int_{\Gamma}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\mathbf{v})d\Gamma$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{aumento da} \\ \text{massa no} \\ \text{interior de } \Omega \end{array}\right] \left[\begin{array}{l} \text{Afluxo} \\ \text{líquido} \\ \text{de massa} \\ \text{através de } \Gamma \end{array}\right] \quad (2.1)$$

Quando o teorema da divergência de Gauss é aplicado à Eq. (2.1), a integral de superfície pode ser transformada em um integral de volume;

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathbf{r}d\Omega=-\int_{\Omega}\text{div}(\mathbf{r}\mathbf{v})d\Omega \quad (2.2)$$

Aplicando, então, o teorema de transporte de Reynolds, pode-se trazer a derivação no tempo para dentro da integral.

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}+\text{div}(\mathbf{r}\mathbf{v})\right]d\Omega=0 \quad (2.3)$$

Argumentando, agora, que a Eq. (2.3) deve ser válida para um volume arbitrário  $\Omega$ , chega-se à forma diferencial Euleriana da *equação da continuidade*.

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}=-\text{div}(\mathbf{r}\mathbf{v}) \quad (2.4)$$

No qual o lado esquerdo sinal de igual da equação Eq. (2.4) representa taxa de variação da densidade no interior de  $\Omega$ , e o seu lado direito, representa a vazão líquida de entrada em  $\Omega$ , por unidade de volume. Empregando-se o conceito do operador derivada material de um campo

escalar na Eq. (2.4). pode-se, ainda, obter a forma diferencial Lagrangeana da *equação da continuidade*.

$$\frac{d_m(\bullet)}{dt} = D_t(\bullet) = \frac{\partial}{\partial t}(\bullet) + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\bullet) = 0 \quad (2.5)$$

obté-m-se.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{r} + \mathbf{r} \text{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D \mathbf{r}}{Dt} &= -\mathbf{r} \text{div} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalmente, caso seja suposto que o fluido tenha massa específica constante, tanto à forma Euleriana, quanto a Lagrangeana da equação da continuidade, Eq. (2.4) e Eq. (2.6), respectivamente, reduzem-se à:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.7)$$

Essa relação é freqüentemente usada para os chamados *fluidos incompressíveis*.

### 2.1.2 Conservação de Momentum

Como visto na seção anterior, a vazão mássica elementar de um fluido através de um elemento de superfície  $d\Gamma$  é dada por  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ . Se multiplicada pelo momentum, por unidade de volume de fluido, obtém-se  $\mathbf{r}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma$ , o qual representa a taxa pela qual o momentum é transportado pelo escoamento do fluido através do elemento de superfície  $d\Gamma$  – com o tensor de 2ª ordem  $\mathbf{r} \mathbf{v} \mathbf{v}$  denotando o fluxo de momentum (momentum, por unidade de área e tempo) associado ao volume escoado de fluido (esse tipo de transporte, devido ao escoamento do fluido, é denominado *transporte convectivo*).

Nota-se que ocorre um paralelismo entre o primeiro parágrafo da seção anterior e o atual, porém com a ordem tensorial das grandezas envolvidas sendo diferentes. Na seção anterior, a grandeza sendo transportada era a massa (escalar), e o fluxo de massa representado pelo vetor

$\mathbf{rv}$ . Agora, a grandeza a ser transportada é momentum (vetorial), e o fluxo de momentum é representado por um tensor de 2ª ordem,  $\mathbf{rv} \otimes \mathbf{v}$ .

Além do transporte convectivo de momentum devido ao escoamento do fluido, há também o momentum transferido devido aos movimentos e interações moleculares dentro do fluido. Do ponto de vista fenomenológico, em Mecânica este transporte molecular representa a resultante das forças de contato atuantes no fluido,  $\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Gamma$ , onde  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  é o chamado *vetor tensão*. A comparação da integral acima com termo correspondente da Eq. (2.8), conduz a  $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$ . Isso representa que a força  $\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Gamma$ , correspondente a qualquer orientação  $\mathbf{n}$  de  $d\Gamma$ , pode ser obtida a partir do tensor de 2ª ordem  $\mathbf{T}$ , referido como *tensor tensão*. Utiliza-se a convenção que o  $ij$ -ésimo componente do tensor  $\mathbf{T}$  representa o sentido positivo da  $j$ -ésima força de contato na  $i$ -ésima direção positiva do elemento fluido.

Segundo o princípio da conservação de momentum, “o momentum total do fluido no interior do volume  $\Omega$  irá aumentar devido ao afluxo líquido de momentum por transporte convectivo através de suas fronteiras  $\Gamma$  e devido à ação das resultantes das forças de contato e corpo atuando no fluido. Matematicamente, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{rv} d\Omega = - \int_{\Gamma} [\mathbf{rv} \otimes \mathbf{v}] \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{g} d\Omega$$

Taxa de aumento de momentum no interior do volume $\Omega$	Afluxo de momentum através de $\Gamma$ por transporte convectivo	Força de contato agindo sobre a superfície $\Gamma$	Força de corpo agindo no volume $\Omega$ devido a gravidade	(2.8)
--	--	---	---	-------

onde  $\mathbf{g}$  é a força gravitacional, por unidade de massa. Aplicando-se os teoremas da divergência de Gauss e do transporte de Reynolds à Eq. (2.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rv} d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{rv} \otimes \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{T} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{g} d\Omega \quad (2.9)$$

Sendo o volume  $\Omega$  arbitrário, a Eq. (2.9) reduz-se a,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rv} + \text{div}(\mathbf{rv} \otimes \mathbf{v}) = \text{div} \mathbf{T} + \mathbf{r} \mathbf{g} \quad (2.10)$$

A Eq. (2.10) é denominada forma diferencial Euleriana da *equação de movimento*, onde o seu lado esquerdo do sinal de igual representa as forças de inércia por unidade de volume atuantes no fluido, enquanto seu lado direito representa as forças de contato e de corpo, por unidade de volume, atuantes no fluido.

A forma Lagrangeana da equação de movimento pode ser obtida através da substituição, na Eq. (2.10), da identidade tensorial;

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v}\operatorname{div}(\mathbf{r}\mathbf{v}) + \mathbf{r}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (2.11)$$

e da forma Euleriana da equação da continuidade, Eq. (2.4), como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\mathbf{r}\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{g} \\ \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} + \operatorname{div}(\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{r}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} &= \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{g} \\ \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} + \operatorname{div}(\mathbf{r}\mathbf{v})\right)\mathbf{v} + \mathbf{r}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} &= \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{g} \\ \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{r}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} &= \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo, então, a Eq. (2.5), obtém-se a forma Lagrangeana da equação de movimento,

$$\mathbf{r}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{g} \quad (2.13)$$

### 3. FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS

O postulado de conservação de massa e os primeiros e segundos postulados de Euler são válidos para todos os materiais mecânicos. Contudo, a nossa experiência diz que, sob circunstâncias similares, o aço e o ar podem responder a forças solicitantes de maneiras drasticamente diferentes. Portanto, todo e qualquer modelo mecânico para escoamentos de fluidos deve incorporar equações que descrevam a resposta em particular de cada material a tensões nele atuantes, as chamadas *equações constitutivas*.

#### 3.1 FLUIDO NEWTONIANO

A forma mais geral para uma equação constitutiva de um fluido puramente viscoso é dado pela equação de equação Reiner e Prager (Slattery, 1972).

$$\mathbf{T} = x_0 \mathbf{I} + x_1 \mathbf{D} + x_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad (3.1)$$

na qual;

$$x_k = x_k(I_{\mathbf{D}}, II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) \quad (3.2)$$

onde  $I_{\mathbf{D}}$ ,  $II_{\mathbf{D}}$ , e  $III_{\mathbf{D}}$  representam os três invariantes principais do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , isto é, os coeficientes da equação dos valores principais de  $\mathbf{D}$ ,

$$0 = \det(m\mathbf{I} + \mathbf{D}) = m^3 + I_{\mathbf{D}}m^2 + II_{\mathbf{D}}m + III_{\mathbf{D}} \quad (3.3)$$

definidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{D}} &= \text{tr} \mathbf{D} \\ II_{\mathbf{D}} &= \frac{1}{2} [I_{\mathbf{D}}^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)] \\ III_{\mathbf{D}} &= \det \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.4)$$



e

$$\mathbf{\Pi}_D = \text{tr} \mathbf{D}^2 \quad (3.5)$$

De acordo com a Eq. (3.1), a relação linear mais geral entre o tensor tensão e o tensor taxa de deformação, é dada por;

$$\mathbf{T} = (\mathbf{w} + I \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2m \mathbf{D} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{w}$  e  $I$  são parâmetros escalares. Caso  $\mathbf{w}$  seja igual à pressão termodinâmica do fluido,  $\mathbf{w} = -P$ , a Eq. (3.6) particulariza-se para

$$\mathbf{T} = (-P + I \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2m \mathbf{D} \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7) é denominada como o modelo Newtoniano para o comportamento fluido ou a lei da viscosidade Newton. O coeficiente  $\mu$  é conhecido por viscosidade cisalhante do fluido e o coeficiente  $I$  é normalmente definido pela hipótese de Stokes,  $I + 2/3 m = 0$ , a qual é bem substantiada para gases monoatômicos de baixa densidade.

Outro caso especial da Eq. (3.6), corresponde ao caso dos fluidos incompressíveis;

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2m \mathbf{D} \quad (3.8)$$

com a Eq. (3.8) representando a lei de Newton para fluidos incompressíveis. O escalar  $p$  é conhecido como a *pressão média* ou *hidrostática*. A partir da Eq. (3.8), ela pode ser definida por,

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{T} &= \text{tr}(-p \mathbf{I} + 2m \mathbf{D}) \\ \text{tr} \mathbf{T} &= -p \text{tr}(\mathbf{I}) + 2m \text{tr}(\mathbf{D}) \\ \text{tr} \mathbf{T} &= -3p + 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

logo;

$$p \equiv -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T} \quad (3.10)$$

Também, é comum e usual, expressar a equação constitutiva Newtoniana, Eq. (3.7) em termos do tensor-extra de tensão  $\mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} + P\mathbf{I} \quad (3.11)$$

de maneira que a parcela estritamente termodinâmica,  $P$ , do tensor tensão seja desacoplada dos efeitos decorrentes da deformação do fluido, a chamada parcela desviadora ou viscosa da tensão. Para os líquidos incompressíveis, pode-se definir o tensor-extra de tensão como;

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} + p\mathbf{I} \quad (3.12)$$

onde  $p$  é a pressão média do fluido dada pela Eq. (3.9).

Finalmente, cabe ressaltar que o modelo Newtoniano definido pela Eq. (3.7), é muito apropriado para descrever o comportamento de líquidos com baixo peso molecular e suas misturas, muitos gases e misturas gasosas.

### 3.2 FLUIDO NEWTONIANO GENERALIZADO

É fato que muitos fluidos reais, para os quais o modelo newtoniano é inadequado, são bem representados pela Eq. (3.1). No entanto, observações experimentais de fluidos incompressíveis mostraram que modelos empíricos baseados na Eq. (3.1) podem ser de grande utilidade na predição de alguns aspectos do comportamento de fluido de interesse industrial.

A classe mais comum desses modelos empíricos surge a partir da generalização da equação constitutiva Newtoniana incompressível, Eq. (3.8), o chamado Fluido Newtoniano Generalizado (GNL), o qual pode ser expressão por:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= -p\mathbf{I} + \mathbf{t} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})\mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde a chamada viscosidade aparente do fluido,  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$ . Se a viscosidade  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$  - uma grandeza escalar - depende do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , então, ela deve depender somente de combinações particulares dos componentes deste tensor, as quais sejam independentes do

sistema de coordenadas adotado, ou seja, invariantes do tensor taxa de deformação, Eq. (3.4). Para um fluido incompressível, o primeiro invariante da Eq. (3.4) reduz-se a zero,

$$I_{\mathbf{D}} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.14)$$

e, nos escoamentos puramente cisalhantes, também o terceiro invariante da Eq. (3.4) se anula,

$$III_{\mathbf{D}} = \det \mathbf{D} = 0 \quad (3.15)$$

pois os elementos fluidos não sofrem alterações de volume. Como a Eq. (3.13) deve ser empregada somente para escoamentos cisalhantes, ou, ao menos, escoamentos quase-cisalhantes, a omissão do invariante  $III_{\mathbf{D}}$  não é uma séria limitação. Assim, a função viscosidade  $\mathbf{h}$  dependerá somente do segundo invariante do tensor  $\mathbf{D}$ ,  $II_{\mathbf{D}}$ . Na prática, é preferível empregar-se a magnitude do tensor da taxa de deformação,  $\dot{\mathbf{g}}$ , o tensor tensão, em vez de  $II_{\mathbf{D}}$ ,

$$\dot{\mathbf{g}} = \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{D}^2) \right]^{1/2} = \left( \frac{1}{2} II_{\mathbf{D}} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

com a escolha apropriada do sinal da raiz quadrada da Eq. (3.16) para que  $\dot{\mathbf{g}}$  tenha sempre valor positivo. Nos escoamentos cisalhantes,  $\dot{\mathbf{g}}$  é chamado simplesmente de *taxa de cisalhamento*.

Definindo-se tensão de cisalhamento como a magnitude do tensor-extra de tensão  $\mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{t} = \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{t}^2) \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

por analogia com a Eq. (3.8) tem-se que;

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\dot{\mathbf{g}}) = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \dot{\mathbf{g}} \quad (3.18)$$

### 3.2.1 Modelo Power-Law de Ostwald de Waele

Dentre os diversos modelos constitutivos utilizados para caracterizar o comportamento dos fluidos não-Newtonianos, destaca-se o modelo generalizado Newtoniano de Ostwald de Waele ou modelo de fluido *power-law*, o qual possui apenas dois parâmetros reológicos,

$$\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) = m\dot{\mathbf{g}}^{n-1} \quad (3.19)$$

onde  $m$  e  $n$  são parâmetros os quais devem ser determinados empiricamente. Quando  $n=1$  e  $m=\mu$ , o modelo *power-law*, Eq. (3.19), reduz-se ao modelo Newtoniano para fluidos incompressíveis. O modelo, *power-law* é um modelo relativamente simples, mas usado extensamente para cálculos teóricos. A desvantagem do modelo de Ostwald de Waele, Eq. (3.19), é não se reduzir ao comportamento newtoniano nos limites quando  $\dot{\mathbf{g}} \rightarrow 0 (t \rightarrow 0)$  e  $\dot{\mathbf{g}} \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$ , comportamento assintótico este o qual todo fluido real possui.

### 3.2.2 Modelo de Ellis

Uma superposição do comportamento newtoniano e do modelo *power-law* é obtido pelo modelo de Ellis (Slattery, 1999), um modelo a três parâmetros reológicos,

$$\mathbf{j}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\mathbf{h}_0} \left[ 1 + \left( \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{1/2}} \right)^{a-1} \right] \quad (3.20)$$

onde  $a$ ,  $\mathbf{h}_0$  e  $t_{1/2}$  são parâmetros a serem fixados por comparação com dados experimentais. O modelo Ellis, Eq. (3.20), tem o fluido *power-law* como um caso assintótico quando no limite

$$\frac{1}{\mathbf{h}_0} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\mathbf{h}_0 (\mathbf{t}_{1/2})^{a-1}} \rightarrow m^{-1/n} \quad e \quad a \rightarrow \frac{1}{n} \quad (3.21)$$

Para polímeros e soluções poliméricas, obtém-se bons ajustes com o modelo de Ellis tomando o parâmetro  $a$  entre 1 e 3.

### 3.2.3 Fluido de Bingham

O tradicional modelo viscoplástico de Bingham [Mitsoulis e Huilgol, 2004]; possui um grande interesse histórico, mas com um valor prático limitado. O modelo de Bingham descreve o

comportamento de um material que se comporta como um sólido rígido até a tensão de cisalhamento local exceder o valor da tensão crítica de escoamento,

$$\begin{cases} \mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) = \mathbf{h}_0 + \frac{\mathbf{t}_0}{\dot{\mathbf{g}}} & \text{para } \mathbf{t} > \mathbf{t}_0 \\ \dot{\mathbf{g}} = 0 & \text{para } \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

sendo um modelo a dois parâmetros reológicos, a viscosidade para baixas taxas de cisalhamento  $\mathbf{h}_0$  e a tensão limite de escoamento  $\mathbf{t}_0$ .

#### 3.2.4 Modelo Herschel-Bulkley

Os fluidos de Herschel-Bulkley consistem em materiais que se comportam como sólidos rígidos, quando a tensão de cisalhamento local  $\mathbf{t}$  é mais baixa do que a tensão limite de escoamento  $\mathbf{t}_0$ . Quando a tensão de cisalhamento local  $\mathbf{t}$  excede a tensão limite de escoamento  $\mathbf{t}_0$ , o material escoar com uma relação da taxa não-linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação do material, podendo escoar tanto como um fluido dilatante ou como um fluido pseudoplástico.

O domínio do escoamento é caracterizado por duas regiões distintas: uma onde a tensão crítica de escoamento é menor que a tensão de cisalhamento local,  $\mathbf{t} > \mathbf{t}_0$  – a chamada *região de escoamento* - e outra na qual tensão crítica de escoamento é maior que a tensão de cisalhamento local  $\mathbf{t} < \mathbf{t}_0$ . – região na qual não há escoamento, denominada *região rígida*. Entre elas, existe uma região na qual  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ , a qual é conhecida como *superfície de escoamento*.

O modelo de Herschel-Bulkley - também conhecido como modelo do fluido de potência com limite de escoamento ou fluido de potência modificada - consiste em uma das funções mais utilizadas para ajustar dados da viscosidade de matérias viscoplásticos, com sua equação englobando três parâmetros reológicos:  $\mathbf{t}_0$  representando a tensão limite de escoamento ou limite de escoamento real, o índice de consistência  $K$  e  $n$  o índice de comportamento ou expoente *power-law*. O modelo de Herschel-Bulkley possui uma grande flexibilidade para abranger uma gama de variedades de curvas experimentais de viscosidade  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$ , mostrando-se útil para simulações numéricas, as quais necessitam de uma expressão analítica para a curva de

viscosidade não-Newtoniana. Matematicamente, este modelo pode ser expresso na seguinte forma;

$$\begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + K \dot{\mathbf{g}}^n & \text{para } \mathbf{t} > \mathbf{t}_0 \\ \dot{\mathbf{g}} = 0 & \text{para } \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

onde com o índice de consistência  $K$  representado o grau de resistência do fluido diante do escoamento e o coeficiente *power-law*,  $n$ , indicando o afastamento do fluido do modelo Newtoniano.

Assim, partindo da Eq. (3.23), a função viscosidade do modelo de Herschel-Bulkley pode ser definida por

$$\begin{cases} \mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) = \frac{\mathbf{t}_0}{\dot{\mathbf{g}}} + K \dot{\mathbf{g}}^{n-1} & \text{para } \mathbf{t} > \mathbf{t}_0 \\ \dot{\mathbf{g}} = 0 & \text{para } \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$  corresponde à função da viscosidade aparente do material

As soluções analíticas para problemas de escoamentos de matérias viscoplásticas são disponíveis apenas para poucos casos simples [ver, por exemplo, Bird et al., 1983]. Porém, até mesmo na sua aproximação numérica, são encontradas dificuldades significativas na solução de escoamentos mais gerais. Além da não-linearidade tanto nas relações constitutivas quanto nas equações de balanço, uma dificuldade inerente ao modelo é sua descontinuidade do campo de tensão de cisalhamento  $\mathbf{t}$ . Nas vizinhanças da superfície de escoamento, a presença do  $\dot{\mathbf{g}}$  no denominador da Eq. (3.24), faz a viscosidade aparente  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$  se torne ilimitada – superfície, a qual, quando da resolução do escoamento, tem topologia e localização a priori desconhecidas. Para superar essas dificuldades, várias versões modificadas da Eq. (3.24) foram propostas, tais como o modelo regularizador de Papanastasiou [Papanastasiou, 1987], o modelo de bi-viscosidade [Jay et al., 2001] e do modelo de Bercovier e Engelman [Burgos e Alexandro, 1999], os quais apresentam campo de tensões de cisalhamento contínuo e são aplicáveis tanto as regiões rígida ou de escoamento [Burgos e Alexandro, 1999]. Estes modelos podem ser versões regularizadoras do modelo básico descontínuo.

Neste trabalho será utilizada a função regularizadora proposta por Papanastasiou [Papanastasiou, 1987], na forma de uma função de viscosidade contínua a qual é válida para a

ampla faixa de tensões, de modo a superar as limitações impostas pelo caráter descontínuo do modelo clássico de Herschel-Bulkley.

### 3.2.5 Modelo Herschel-Bulkley Regularizado pela Equação de Papanastasiou

Papanastasiou (1987) propôs uma regularização para modelos clássicos, de caráter descontínuo, que modelam o comportamento da viscosidade não-Newtoniana viscoplástica. Para superar a dificuldade a descontinuidade dos modelos viscoplásticos clássicos, Papanastasiou, através de uma equação constitutiva modificada, introduzindo um termo de suavização exponencial na expressão da viscosidade, torna a função viscosidade válida para todo escoamento, seja nas regiões de escoamento escoadas ou nas regiões praticamente rígidas. Essa estratégia numérica elimina a necessidade de rastrear as superfícies do escoamento do material.

A função de Papanastasiou modificada é expressa através da seguinte expressão;

$$h(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{t_0}{\dot{\gamma}}(1 - \exp(-a\dot{\gamma})) \quad (3.25)$$

onde  $h(\dot{\gamma})$  consiste na viscosidade regularizada e  $a$  o parâmetro regularizador. Quando  $a \rightarrow \infty$ , a função de Papanastasiou, Eq. (3.25), reproduz a função viscosidade de Herschel-Bulkley, Eq.(3.24), como pode ser observado na curva de escoamento ilustrada na Figura 3.1.

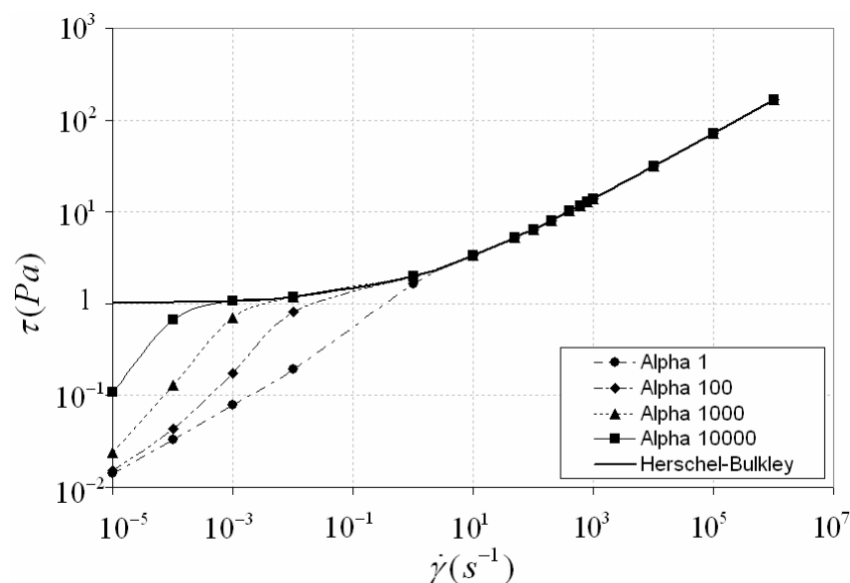


Figura 3.1 Tensão de cisalhamento em função da taxa de cisalhamento ajustada pelo modelo de Herschel-Bulkley regularizado pela função de Papanastasiou.

Conforme se observa na Figura 3.1, o parâmetro  $\mathbf{a}$  controla a taxa de crescimento da taxa de cisalhamento  $\dot{\mathbf{g}}$  na relação de deformação do material: quanto maior o parâmetro  $\mathbf{a}$ , mais próxima à função regularizada de Papanastasiou se aproxima da função de Herschel-Bulkley clássica, com ainda a importante vantagem do ponto-de-vista numérico de ser contínua em todo domínio do escoamento.

Nas aplicações do modelo, entretanto, o parâmetro  $\mathbf{a}$  não pode ser escolhido arbitrariamente, pois altos valores de  $\mathbf{a}$  podem causar problemas de convergência ao esquema numérica empregado. Além disso, até mesmo para altos valores de  $\mathbf{a}$ , não há nenhuma garantia que a soluções encontradas são as verdadeiras representações das superfícies de escoamento para todos os tipos de escoamento. Por exemplo, na região de transição do escoamento, o limite entre as regiões de escoamento e as regiões rígidas pode não convergir para uma posição fixa [ver Papanastasiou, 1987]. Além disso, nas regiões de transição do escoamento, a solução empregando elevados valores do parâmetro  $\mathbf{a}$  pode não ser suave. Conseqüentemente, as predições dos modelos de regularização devem ser analisadas com cuidado [ver Alexandrou et al., 2001].



## 4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo são apresentadas as formulações em elementos finitos para as equações de conservação apresentadas nos Capítulos 2 e 3. Inicialmente, na seção 4.1, apresentam-se as definições preliminares, onde é demonstrada a notação utilizada no presente trabalho. Em seguida, na Seção 4.2, apresenta-se as formulações fortes para um escoamento em regime laminar de um fluido newtoniano generalizado. Na seção 4.3 é introduzido o método de Galerkin clássico, também conhecido como Bubnov-Galerkin. Na seção 4.4 apresenta-se o método estabilizado de Galerkin Mínimos-Quadrados, que será o método de aproximação de elementos finitos utilizado nesta Dissertação. Sua introdução está ligada à necessidade de eliminar as dificuldades encontradas pelo método de Galerkin clássico na aproximação de escoamentos de fluidos incompressíveis. Na Seção 4.5, são realizados alguns testes computacionais do problema da cavidade forçada para o escoamento não-inercial com a finalidade de demonstrar as dificuldades que o método de Galerkin clássico enfrenta na aproximação de escoamentos de fluidos, como também da melhora de sua estabilidade introduzida pelos termos mínimos quadrados acrescentados à formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados. E, por fim, na Seção 4.6, é definido o elemento isoparamétrico quadrangular bi-linear Q1.

### 4.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado  $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$ , sendo  $N$  o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira  $\Gamma$  poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Gamma_g$  é a parte da fronteira  $\Gamma$  na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e  $\Gamma_h$  a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais).

Sobre o domínio fechado  $\bar{\Omega}$  realiza-se uma partição  $\Omega_h$  de elementos finitos, com domínio elementar  $\Omega_K$  na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in \Omega_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a aproximação de uma variável  $U$  por  $U^h$ , pertencente à discretização  $\Omega_h$ , é então representada como uma expansão na forma:

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde  $N_A$  e  $d_A$  são a função de base, ou de aproximação, e o grau de liberdade associados ao ponto nodal global  $A$  da discretização  $\Omega_h$ , respectivamente.

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $m \geq 0$ , sendo  $m$  o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos  $P_m$  e  $Q_m$  (Ciarlet, 1978).

Sobre os espaços de funções,  $L^2(\Omega)$  define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre  $\Omega$ ,  $L_0^2(\Omega)$  o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  e  $H_0^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  que se tornam zero em  $\Gamma_g$  [Rektorys, 1975].

## 4.2 FORMULACÃO FORTE

O problema forte obtido da particularização das equações de conservação de massa e momentum, Eqs. (2.4) e (2.13) respectivamente, para um fluido newtoniano generalizado, Eq. (3.13), escoando lentamente em regime laminar e permanente:

$$\begin{aligned}
\nabla p - 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{r}\mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
(-p\mathbf{I} + 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})\mathbf{D}(\mathbf{u}))\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
\end{aligned} \tag{4.5}$$

no qual  $\mathbf{r}$  representa a massa específica do fluido,  $\nabla p$  o vetor gradiente de pressão,  $\mathbf{u}$  o campo de velocidade admissível,  $\mathbf{D}$  o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{g}$  a aceleração da gravidade,  $\mathbf{t}_h$  a força de superfície e o tensor tensão  $\mathbf{T}$  relacionando-se com a deformação do fluido através do modelo GNL, Eq. (3.13),

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \mathbf{t} \\
&= -p\mathbf{I} + 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})\mathbf{D}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde  $\mathbf{t}$  é o tensor desviador de tensão e a função viscosidade  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$  dada pela equação de Herschel-Bulkley regularizada, Eq. (3.25);

$$\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) = K\dot{\mathbf{g}}^{n-1} + \frac{\mathbf{t}_0}{\dot{\mathbf{g}}} (1 - \exp(-a\dot{\mathbf{g}})) \tag{4.7}$$

### 4.3 O MÉTODO DE GALERKIN

O método de aproximações de elementos finitos denominado método de Galerkin, também conhecido como Bubnov-Galerkin, caracteriza-se pelas funções peso, e teste pertencentes ao mesmo espaço de funções. As funções teste consistem nas funções candidatas à solução do problema e as funções peso, ou variações, são funções similares às funções teste, porém com valor zero sobre  $\Gamma_g$ . Os espaços de dimensão infinita empregados na formulação variacional são aproximados por subespaços de dimensão finita convenientes, ou seja, por exemplo, sendo  $P$  e  $\mathbf{V}$ , espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade virtual, respectivamente, são aproximados pelos subespaços  $P^h$  e  $\mathbf{V}^h$ . Como os subespaços  $P^h$  e  $\mathbf{V}^h$  são subconjuntos dos espaços  $P$  e  $\mathbf{V}$ , podem-se escrever,

$$\begin{aligned} P^h \subset P & \quad (\text{ou seja, se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}^h \subset \mathbf{V} & \quad (\text{ou seja, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

o índice  $h$  faz referência à discretização do domínio,  $\Omega_h$ , parametrizada por um comprimento característico dos elementos  $h$ . A Eq. (4.8) define o que é conhecido em Teoria de Funções como uma *aproximação interna*, uma característica orgânica dos métodos de elementos finitos, diferentemente dos métodos de diferenças finitas os quais, ao invés de aproximarem os espaços das funções empregadas, aproximam suas derivadas.

A aproximação de elementos finitos das Eqs. (4.5), portanto, é construída sobre as definições dos subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para a aproximação dos campo de velocidade ( $\mathbf{V}^h$ ) e pressão ( $P^h$ ) (Ciarlet, 1976),

$$P^h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_{\Omega_K} \in R_l(\Omega_K), \Omega_K \in \Omega_h\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}^h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega_K)^N, \Omega_K \in \Omega_h\} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V}_g^h = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega_K)^N, \Omega_K \in \Omega_{Kh}, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \quad (4.11)$$

onde  $R_k, R_l$  denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau  $k$  e  $l$  [Ciarlet, 1978].

A aproximação de Galerkin para o problema definido pelas Eqs. (4.5) pode ser dada por: Achar o par  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h, \times P^h$  tal que:

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}^h \times P^h \quad (4.12)$$

onde

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega \quad (4.13)$$

e

$$F(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (4.14)$$

onde  $\mathbf{v}$  e  $q$  são, respectivamente, os campos de velocidade e pressão virtuais.

#### 4.4 O MÉTODO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

Baseado nas definições dos subespaços de pressão e velocidade, Eqs. (4.9)-(4.11), respectivamente, é possível introduzir uma formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) para o problema definido pelas Eqs. (4.5) como segue: Achar o par  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$ , tal que:

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}^h \times P^h \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = & \int_{\Omega} 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega \\ & + \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} (\nabla p - 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{z}(\operatorname{Re}_K) (\nabla q - 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\Omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$F(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} \mathbf{r} \mathbf{g} \cdot \mathbf{z}(\operatorname{Re}_K) (\nabla q^h - 2\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\Omega_K \quad (4.17)$$

onde o parâmetro de estabilidade  $\operatorname{Re}_K$ , avaliado em nível de elemento, é computado por:

$$\mathbf{z}(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \mathbf{x}(\operatorname{Re}_K) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x}(\operatorname{Re}_K) = \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\operatorname{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\mathbf{m}} \quad (4.20)$$

com  $|\cdot|_p$  denotando a norma  $p$  do  $\mathfrak{R}^N$  e o parâmetro  $m_k$  proveniente da análise de erro da formulação GLS [ver Franca e Frey, 1992].

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (4.21)$$

*Comentários:*

1. Fazendo  $\tau$  igual à zero na formulação GLS definida pelas Eqs. (4.15)-(4.21), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin, definida pela Eqs. (4.12)-(4.14).
2. A expressão usual do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada com a inclusão do parâmetro  $m_k$  na Eq.(4.20), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por  $Re_K > 1$  e as difusivo-dominadas por  $Re_K < 1$ , independente do elemento considerado (Franca e Frey, 1992)
3. As discretizações das Eqs. (4.15)-(4.21) são obtidas expandindo as aproximações de elementos finitos dos pares  $(\mathbf{u}^h, p^h)$  e  $(\mathbf{v}^h, q^h)$  como uma combinação linear das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, gerando, dessa maneira, um sistema de equações discretas não lineares.
4. O *solver* empregado na resolução do sistema de equações discretas foi um método de quase Newton incremental, com uma estratégia de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da equação de movimento da formulação GLS definida nas Eqs. (4.15)-(4.21). Como estimativa inicial, o algoritmo emprega campos nulos de velocidade e pressão (ver Franceschini e Frey, 2003 para maiores detalhes).

#### 4.5 DIFICULDADES DO MÉTODO DE GALERKIN

Para um melhor entendimento das dificuldades que o método de Galerkin, Eqs. (4.12)-(4.14), enfrenta na aproximação de escoamentos de fluidos, como também da melhora de sua estabilidade introduzida pelos termos mínimos quadrados acrescentados à formulação de Galerkin mínimos-quadrados, Eqs. (4.15)-(4.21), foram realizados alguns testes computacionais

do problema da cavidade forçada para o escoamento não-inercial de um fluido Newtoniano (ver Figura 4.1 para a descrição do problema).

As condições de contorno de velocidade impostas foram não-deslizamento e impermeabilidade nas paredes da cavidade, com exceção de sua tampa superior, na qual foi prescrita uma velocidade horizontal  $u_1=1\text{m/s}$ .

O domínio computacional foi discretizado por duas malhas de elementos finitos, uma bastante grosseira e a bastante refinada para este tipo de problema, com o objetivo de mostrar duas questões: a primeira, que as oscilações numéricas geradas pelo método de Galerkin não são eliminadas com um simples refino de malha - um conceito corrente na área de engenharia - e a segunda, que a formulação GLS consegue gerar aproximações estáveis mesmo para malhas bastantes grosseiras. A primeira malha possui 100 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 121 pontos nodais, e a segunda, 4.900 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 5.041 pontos nodais.

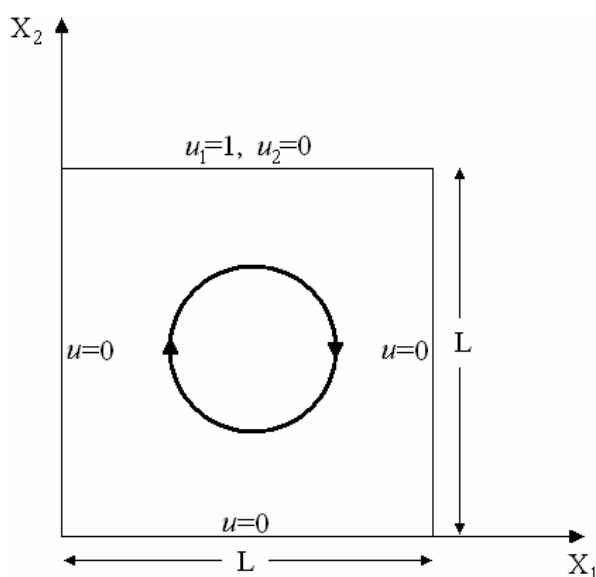


Figura 4.1: Definição do problema da cavidade forçada.

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram as iso-regiões do campo de pressão obtidas pelos métodos de Galerkin Clássico (Eqs. (4.12)-(4.14)) e de Galerkin mínimos-quadrados (Eq. (4.15)-(4.21)). Enquanto o método de GLS (Figs. 4.2(b) e 4.3(b)) apresenta uma superfície de pressão suficientemente suave - mesmo para a malha mais grosseira, Figura 4.2(b) - a aproximação de Galerkin apresenta oscilações espúrias junto às quinas superiores da cavidade para ambas as malhas empregadas (Figs. 4.2(a) e 4.3(a)). Por se tratar de um escoamento sem inércia, as oscilações geradas pelo de Galerkin devem-se unicamente a não-satisfação da condição de Babuška-Brezzi por parte dos sub-espacos de velocidade e pressão.

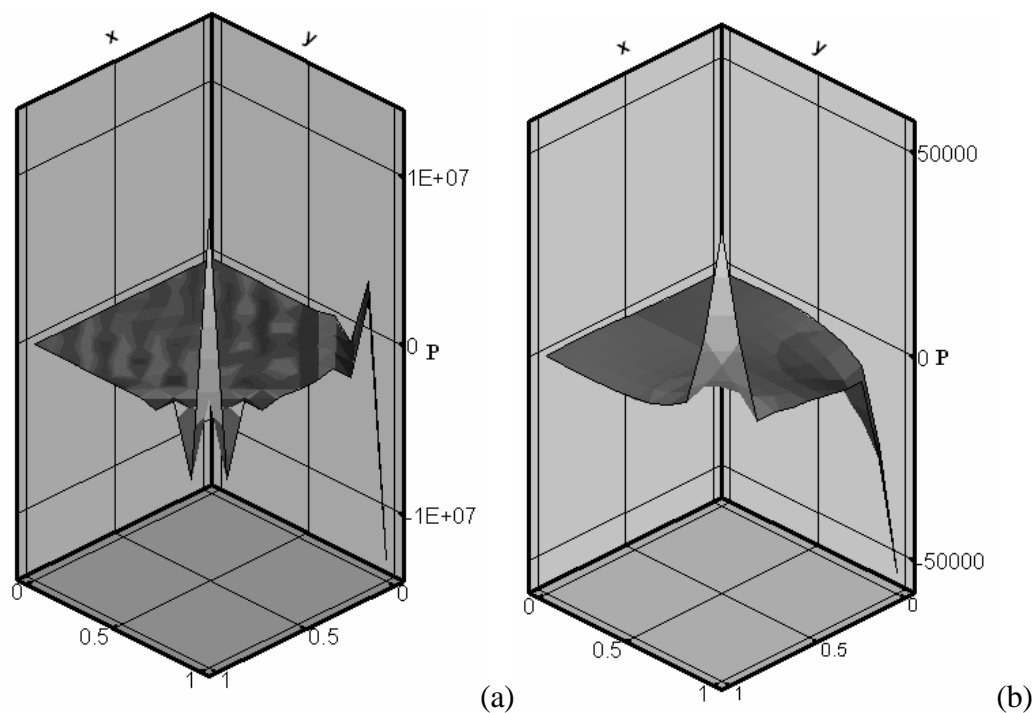


Figura 4.2 Iso-regiões da pressão, para uma malha com 100 elementos Q1/Q1: (a) Método de Galerkin clássico e (b) Método de GLS.

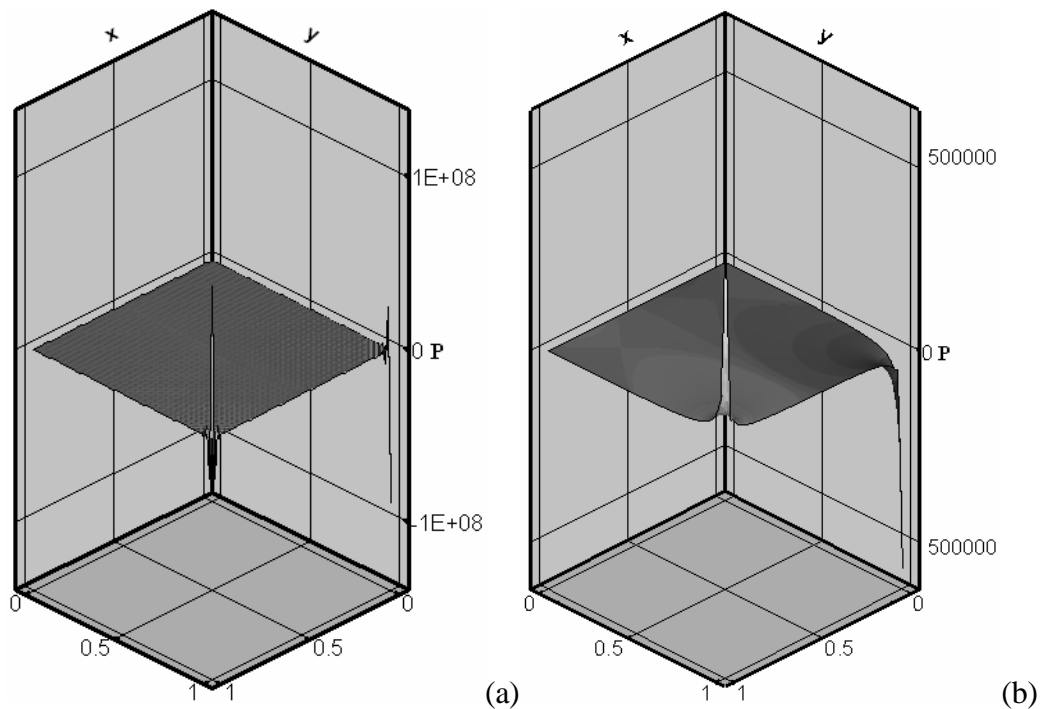


Figura 4.3 Iso-regiões da pressão, para uma malha com 4.900 elementos Q1/Q1: (a) Método de Galerkin clássico e (b) Método de GLS.



O mesmo comportamento espúrio também é verificado na aproximação de Galerkin do campo de velocidades para a malha mais grosseira, tanto nas velocidades verticais em  $x_2=0,5$  (Fig. 4.4(a)), como para as velocidades horizontais em  $x_1=0,5$  (Fig. 4.4(b)).

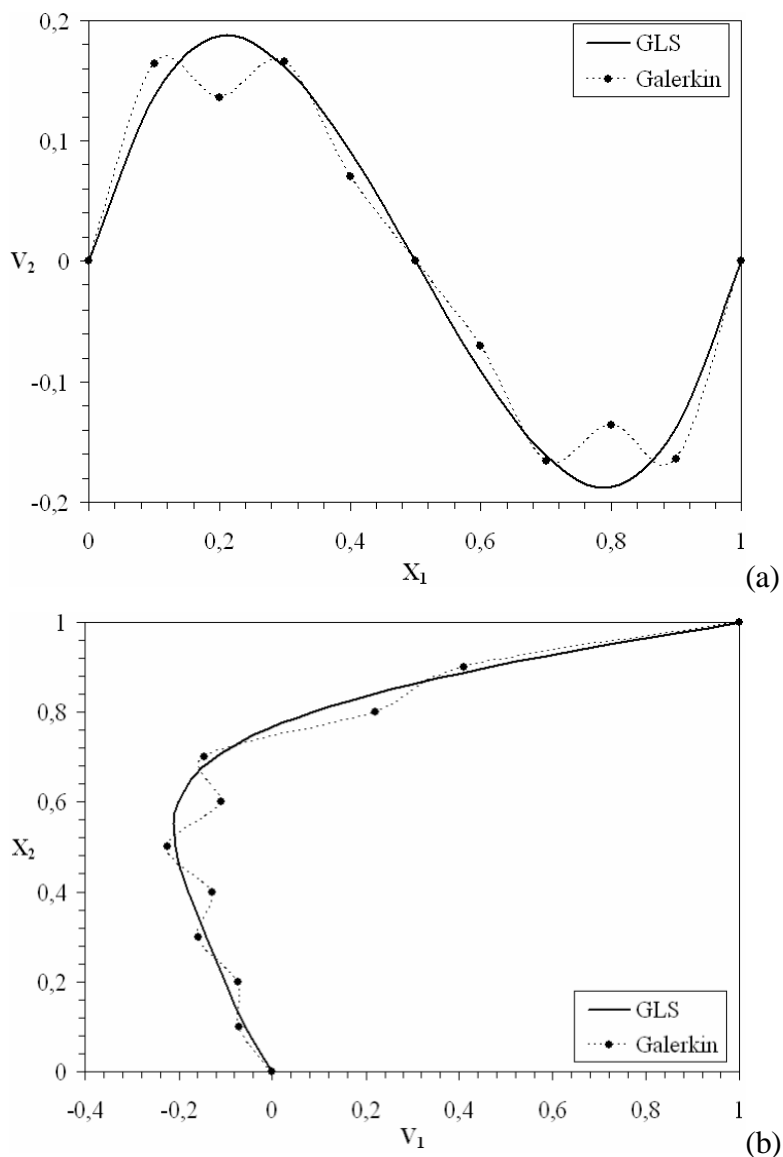


Figura 4.4 Perfis de velocidade pelos métodos de Galerkin e GLS, para uma malha com 100 elementos Q1/Q1 (a) velocidade vertical, em  $x_2=0,5$  e (b) velocidade horizontal, em  $x_1=0,5$ .

Finalmente, na Figura 4.5, são apresentadas as aproximações de Galerkin e GLS para o campo de velocidade, empregando a malha mais refinada. Diferentemente das aproximações do campo de pressão, os perfis de velocidade gerados pelo método de Galerkin mostraram-se com oscilações muito suaves. Isto pode explicado pelo fato do escoamento ser infinitamente difusivo dominado ( $Re=0$ ). Como as oscilações as aproximações de Galerkin do campo de velocidade

estão em grande parte relacionadas à assimetria do operador convectivo dos termos de inércia da equação de movimento em escoamentos advectivos dominados – termos, estes, ausentes na equação de movimento de escoamento não-inerciais - as oscilações das velocidades são apenas devidas à violação da condição da Babuška-Brezzi, a qual pode ser mitigada com um refino de malha, conforme observado nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b).

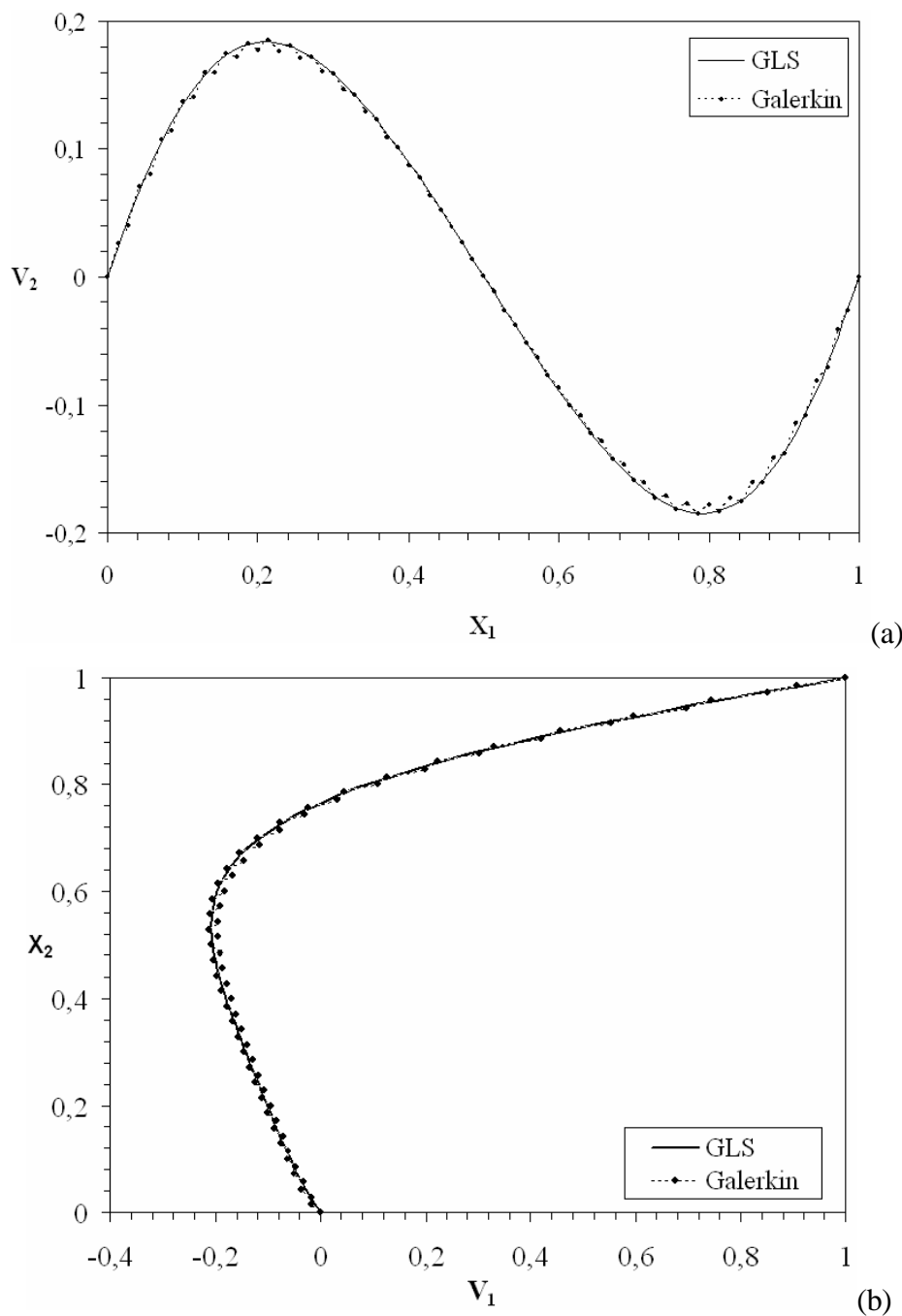


Figura 4.5 Perfis de velocidade pelos métodos de Galerkin e GLS, para uma malha com 4900 elementos Q1/Q1 (a) velocidade vertical, em  $x_2=0,5$  e (b) velocidade horizontal, em  $x_1=0,5$ .

4.6 ELEMENTO QUADRANGULAR BI-LINEAR

O elemento quadrangular bi-linear, denominado pelo símbolo Q1, é atribuído, segundo Hughes (1987), e Taig (1961). O domínio elementar global de um elemento quadrilátero Q1 é definido pela localização de seus quatro pontos nodais de coordenadas globais  $\mathbf{x}_a^K$ ,  $a = 1, \dots, 4$  no plano  $\mathfrak{R}^2$ . Assume-se que os pontos nodais são numerados localmente no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 4.6. Através de uma transformação linear, relaciona-se o elemento global, cujas coordenadas de um ponto são  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ , com o elemento do ponto de vista local, um quadrilátero bi-unitário. O domínio do quadrilátero bi-unitário é denominado *parent domain* e é representado pelas coordenadas locais

$$\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\} \tag{4.22}$$

no qual  $\xi$  e  $\eta$  são as chamadas coordenadas naturais, onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$ , mapeando em  $\Omega_h$  segundo as transformações

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}) x_{1a}^K \\ x_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}) x_{2a}^K \end{aligned} \tag{4.23}$$

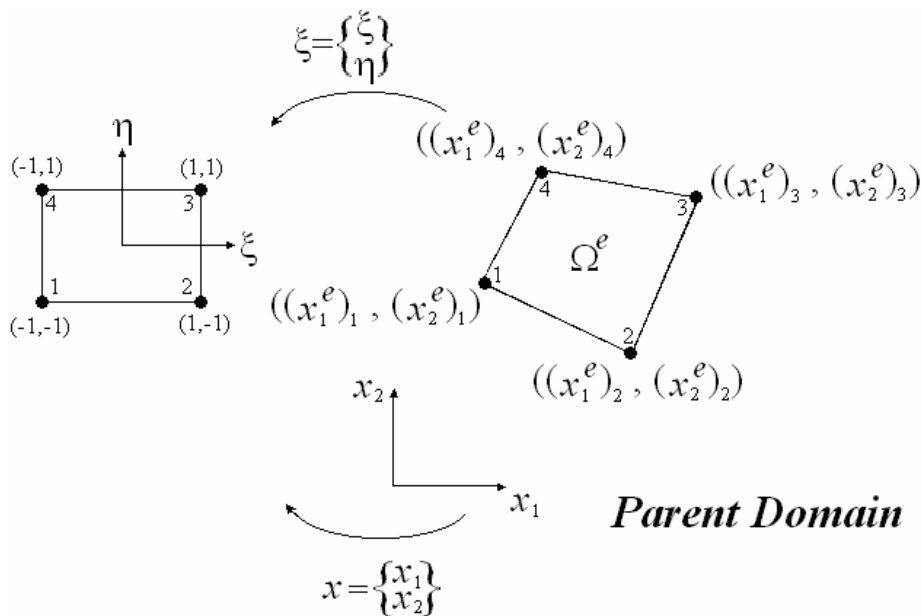


Figura 4.6 Domínio de elemento quadrilátero bi-linear no *parent domain* e ordenação nodal local.

Vetorialmente, as expressões (4.23) podem ser escritas como;

$$\mathbf{x}(?) = \sum_{a=1}^4 N_a(?) \mathbf{x}_a^K \quad (4.24)$$

As funções de base locais  $N_a(\mathbf{x})$  empregadas com expressões bi-lineares das coordenadas ? Eq. (4.24) podem ser determinadas assumindo, inicialmente, as expansões

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x} + \mathbf{a}_2 \mathbf{h} + \mathbf{a}_3 \mathbf{xh} \\ x_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \mathbf{h} + \mathbf{b}_3 \mathbf{xh} \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são coeficientes incógnitos a serem determinados. Em seguida, impondo que as Eqs. (4.25) satisfaçam, respectivamente, as condições do mapeamento;

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{x}_a, \mathbf{h}_a) &= x_{1a}^K \\ x_2(\mathbf{x}_a, \mathbf{h}_a) &= x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde  $\eta_a$  e  $\mathbf{x}_a$  são definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Coordenadas locais no espaço  $\mathbf{x}$

$A$	$\mathbf{x}_a$	$\eta_a$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

As Eqs. (4.25)-(4.26) levam ao um sistema de equações em  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{11}^K \\ x_{12}^K \\ x_{13}^K \\ x_{14}^K \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{21}^K \\ x_{22}^K \\ x_{23}^K \\ x_{24}^K \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Resolvendo-se os sistemas (4.27) e (4.28) para os coeficientes  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente, obtém-se a equação da função de forma, ou de aproximação, bi-linear local  $N_a(\mathbf{x})$ :

$$N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{x}_a \mathbf{x})(1 + \mathbf{h}_a \mathbf{h}) \quad (4.29)$$

com os valores de  $\mathbf{x}_a$  e  $\eta_a$  dados pela Tab. 4.1 e visualizadas na Figura 4.7.

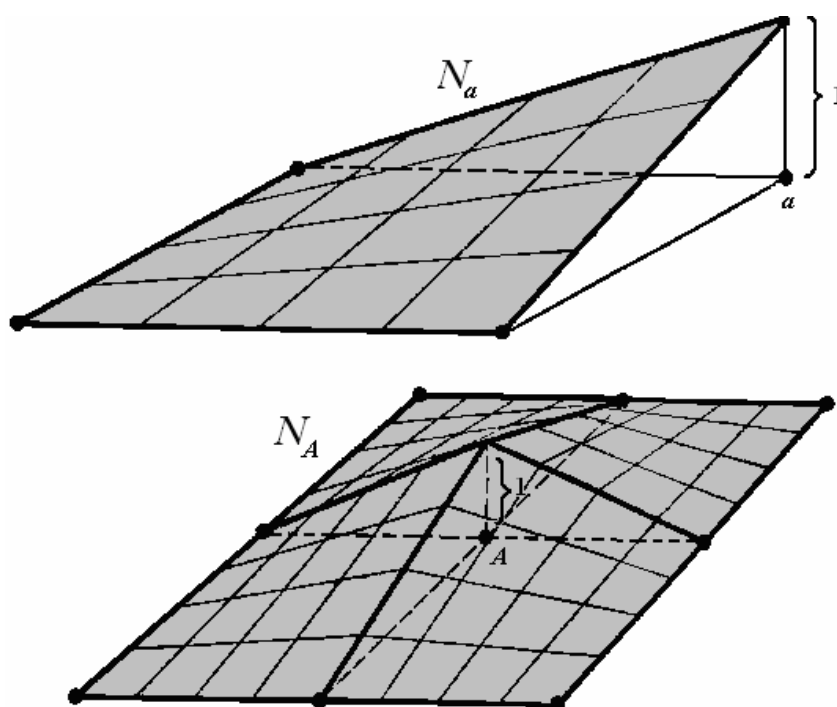


Figura 4.7 Funções de forma local ( $N_a$ ) e global ( $N_A$ ) do elemento quadrilátero bi-linear Q1.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Objetivo desse capítulo é apresentar a aplicação do método de elementos finitos, com aproximações de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), Eq. (4.15)-(4.20), para o problema definido pela Eq. (4.5), que representa escoamento isocórico de um fluido Newtoniano generalizado (Eq.(3.13)) empregando a função viscosidade de Herschel-Bulkley regularizada pela equação de Papanastasiou (Eq.(3.25)), através de expansões axissimétricas abruptas. Todos os resultados computacionais foram obtidos utilizando o código de elementos finitos NNFEM, em desenvolvimento pelos pesquisadores do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), do Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

### 5.1 ESCOAMENTO SOBRE UM DEGRAU DE EXPANSÃO

A fim de validar a não linearidade geométrica da implementação computacional (NNFEM) da formulação Galerkin mínimos-quadrados definida na Eq. (4.15)-(4.20) foram realizadas simulações de um escoamento planar sobre um degrau abrupto, um *benchmark* para validação de códigos.

O caso do escoamento sobre um degrau abrupto foi escolhido como forma de validação devido a sua vasta importância no tratamento de singularidades em problemas bidimensionais. Este escoamento também representa um importante *benchmark* para a validação de escoamento laminar Newtoniano das equações de Navier-Stokes - conforme apresentado no *workshop* “Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step” (GAMM - *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*), editado por Morgan et al. (1982). No trabalho publicado neste *workshop*, vários pesquisadores realizaram uma comparação de seus resultados do tamanho da recirculação a jusante do degrau, empregando o valor obtido para o comprimento de recolamento das linhas de corrente. Nesse *workshop*, são ainda comparados os valores de velocidade horizontal máxima e mínima para diferentes distâncias a jusante do degrau.

Os resultados obtidos nessa Dissertação foram comparados com os resultados obtidos por 6 pesquisadores do GAMM *workshop* [Morgan et al., 1982] e também com os resultados obtidos por Macedo (1995). Os métodos utilizados pelos autores do *workshop* e o utilizado por Macedo estão ilustrados na Tabela 5.1

Tabela 5.1: Pesquisadores e Métodos utilizados por GAMM *workshop* [Morgan et al., 1982] e Macedo (1995).

Pesquisadores	Método
<b>Presente trabalho</b>	MEF - <b>u</b> , p
Kueny-Binder	Experimental
Dhatt-Hubert	MEF - <b>u</b> , p
Donea-Giuliani, Laval	MEF - <b>u</b> , p
Ecer-Rout-Ward	MEF - método Chebsch
Glowinsky et al.	MEF - <b>u</b> , p
Hecht	MEF – streamlines
Macedo	MEF - <b>u</b> , p

Para a validação do código NNFEM, na implementação para um problema de escoamento Newtoniano sobre o degrau, gerou-se uma malha com 1.825 pontos nodais e com 1.656 elementos bi-lineares Q1/Q1. A Figura 5.1, apresenta descrição do problema e a nomenclatura e condições de contorno empregada,

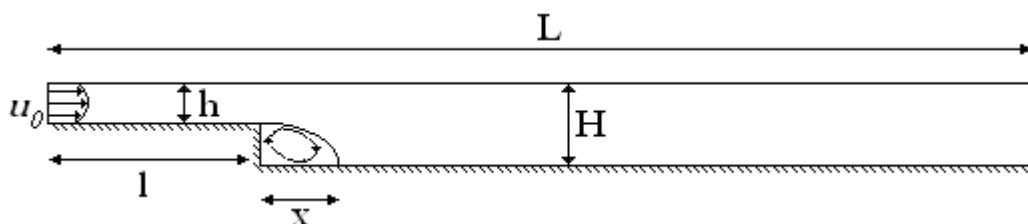


Figura 5.1 Escoamento sobre degrau abrupto: descrição do problema.

onde  $L$  é o comprimento total do duto,  $l$  o comprimento a montante do degrau,  $H$  representa a altura a jusante do degrau,  $h$  é a altura a montante do degrau e  $x$  a distância de recolamento do fluido a jusante do degrau. Nesta Dissertação, foi selecionada, a seguinte configuração para o problema:  $L=13$  m,  $l=3$  m,  $H=1$  m e  $h=0.5$  m.

Adotaram-se condições de impermeabilidade e não deslizamento nas paredes do canal, na entrada um perfil de velocidade horizontal parabólico  $u_0=1\text{m/s}$  -  $u_0$  representa a velocidade média de entrada - e na saída foi imposta condição de contorno natural de tração livre [Hughes, 1987]. O número de Reynolds para o escoamento sobre o degrau de expansão é adotado como o sugerido em Morgan et al. (1982);

$$\text{Re} = \frac{\rho 1.5 u_0 (H - h)}{\mu} \quad (5.1)$$

onde  $\rho$  e  $\mu$  representam, respectivamente, a densidade e a viscosidade absoluta do fluido. As simulações dessa Dissertação foram realizadas para escoamentos com números de Reynolds igual à  $Re=50$  e  $Re=150$ , visando analisar a dinâmica do escoamento.

Na Figura 5.2, ilustra-se as linhas de corrente para a aproximação GLS de escoamentos com os números de Reynolds igual a 50 e 150. Nesta figura fica evidente a dependência do comprimento de recolamento da recirculação com o número de Reynolds: à medida que Reynolds aumenta o vórtice à jusante do degrau cresce. Isso ocorre devido o escoamento para  $Re=150$  (Fig. 5.2 (b)) ser mais advectivo que o escoamento para  $Re=50$  (Fig. 5.2 (a)). Como o número de Reynolds representa a relação entre as forças viscosas e as forças de inércia, a situação ilustrada na Figura 5.2 (b), as forças de inércia são mais significativas do que na Figura 5.2 (a), promovendo uma maior distância de recolamento do fluido à jusante do degrau de expansão.

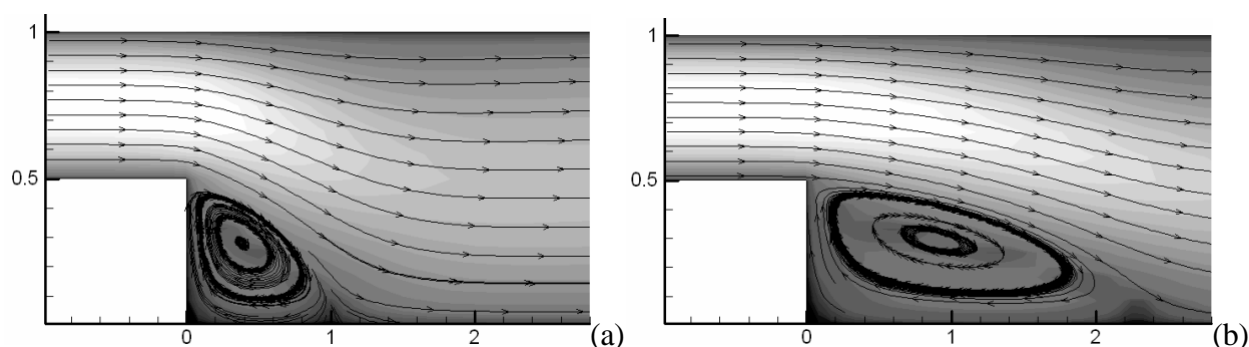


Figura 5.2 Escoamento sobre degrau abrupto: detalhe do módulo da velocidade e linhas de corrente a jusante do degrau, para (a)  $Re=50$  e (b)  $Re=150$ .

Através da Figura 5.3, pode-se verificar que as aproximações GLS obtidas para campo de pressão a jusante do degrau, tanto para  $Re=50$  (Fig. 5.3 (a)) com para  $Re=150$  (Fig. 5.3 (b)), são estáveis mesmo na descontinuidade do domínio, com isobáricas suaves e isentas de oscilações espúrias à solução exata do escoamento.

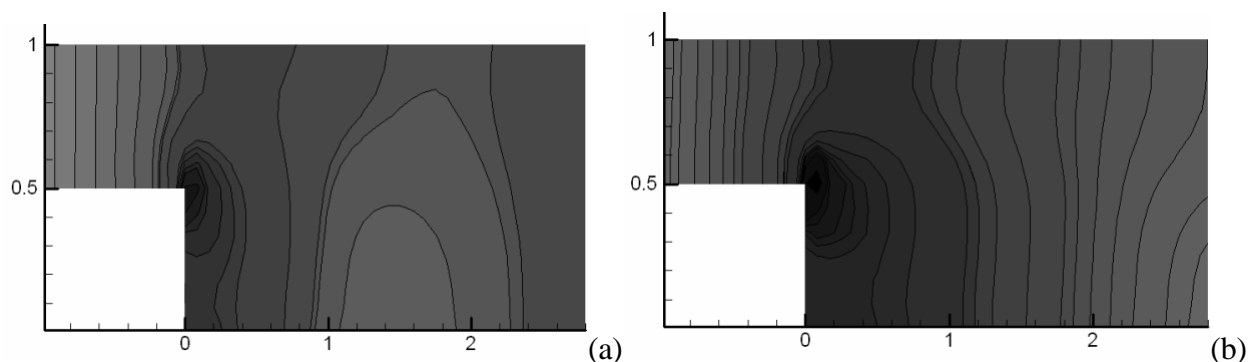


Figura 5.3 Escoamento sobre degrau abrupto: isobáricas e magnitude do campo de pressão, para (a)  $Re=50$  e (b)  $Re=150$ .



O ponto aproximado de recolamento foi determinado através da visualização das linhas de corrente do escoamento (Fig. 5.2). Ponderando-se os perfis de velocidade nesta região estimada, tomou-se como ponto de recolamento o valor da coordenada  $x_1$  da seção transversal a partir da qual a velocidade  $u_1$  não apresenta mais valores negativos.

A distância do ponto de recolamento foi adimensionalizada segundo a seguinte expressão:

$$d = \frac{x}{(H-h)} \quad (5.2)$$

onde  $x$  corresponde à distância do recolamento ao degrau.

Na da Tabela 5.2, são comparados os resultados obtidos nessa Dissertação com os resultados de Morgan et al. (1982) e Macedo (1995). São demonstrados também, os desvios percentuais em comparação com os comprimentos de recolamento alcançados pelos mesmos autores. O desvio percentual das componentes é calculado através da seguinte equação;

$$D\% = \left| \frac{E_L - E_D}{E_L} \right| \times 100 \quad (5.3)$$

onde  $D$  representa o desvio percentual,  $E_L$  valor da componente encontrada na literatura e  $E_D$  valor da componente encontrada com o código NNFEM.

Os resultados obtidos com o código NNFEM apresentaram boa concordância com os resultados encontrados na literatura.

Tabela 5.2: Comparação dos valores de recolamento.

Trabalhos	Re=50		Re=150	
	$d$ recolamento	Desvio	$D$ recolamento	Desvio
<b>Presente trabalho</b>	<b>2,0</b>	-	<b>4,5</b>	-
Kueny-Binder	2,1	4,76%	4,5	0%
Dhatt-Hubert	1,0	100%	5,0	10%
Donea-Giuliani, Laval	2,0	0%	5,0	10%
Ecer-Rout-Ward	2,0	0%	4,7	4,25%
Glowinsky et al.	2,8	28,57%	4,4	2,27%
Hecht	1,8	11,11%	4,6	2,17%
Macedo	2,1	4,76%	4,4	2,27%

A Figura 5.4 ilustra a dependência do comprimento de recolamento,  $d$ , com o valor do número de Reynolds, já observada na Figura 5.2. Segundo a figura, esta dependência foi bem representada por uma regressão linear cujo coeficiente angular é  $2,57 \times 10^{-2}$  e o coeficiente linear é dado por  $6,945 \times 10^{-1}$ .

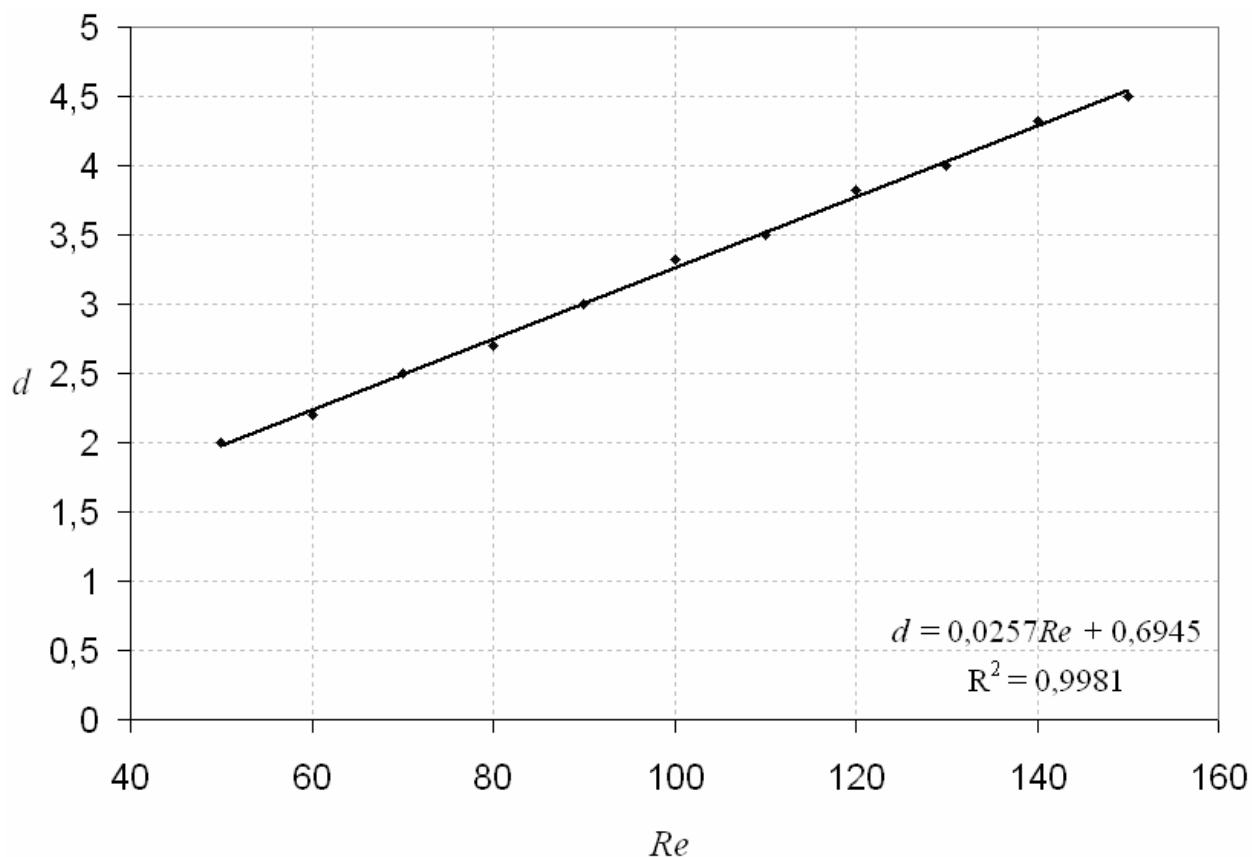


Figure 5.4 Escoamento sobre degrau abrupto: relação entre o comprimento de recolamento e o número de Reynolds.

Na Figura 5.5, está ilustrado o coeficiente de pressão,  $C_p$ , ao longo da parede superior da geometria, para  $Re=50$  e  $Re=150$ , com  $C_p$  representando a relação entre as forças de pressão estática e de inércia do escoamento,

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{\frac{1}{2} \rho u_{ref}^2} \quad (5.4)$$

onde  $p_{ref}$  representa uma pressão de referência do escoamento - neste caso escolhida como a pressão na saída do canal e a velocidade de referência,  $u_{ref}$ , tomada como a velocidade média na entrada do canal.

Analisando a Figura 5.5, verifica-se inicialmente uma queda linear brusca do  $C_p$  a montante do degrau, seguida de uma ligeira depressão associada à região de recirculação e, a jusante do degrau, uma posterior recuperação do campo de pressão. A linearidade das quedas de pressão a montante e a jusante do degrau indicam que os comprimentos empregados nessas regiões foram suficientes para que ambos os escoamentos se desenvolvesse hidrodinamicamente.

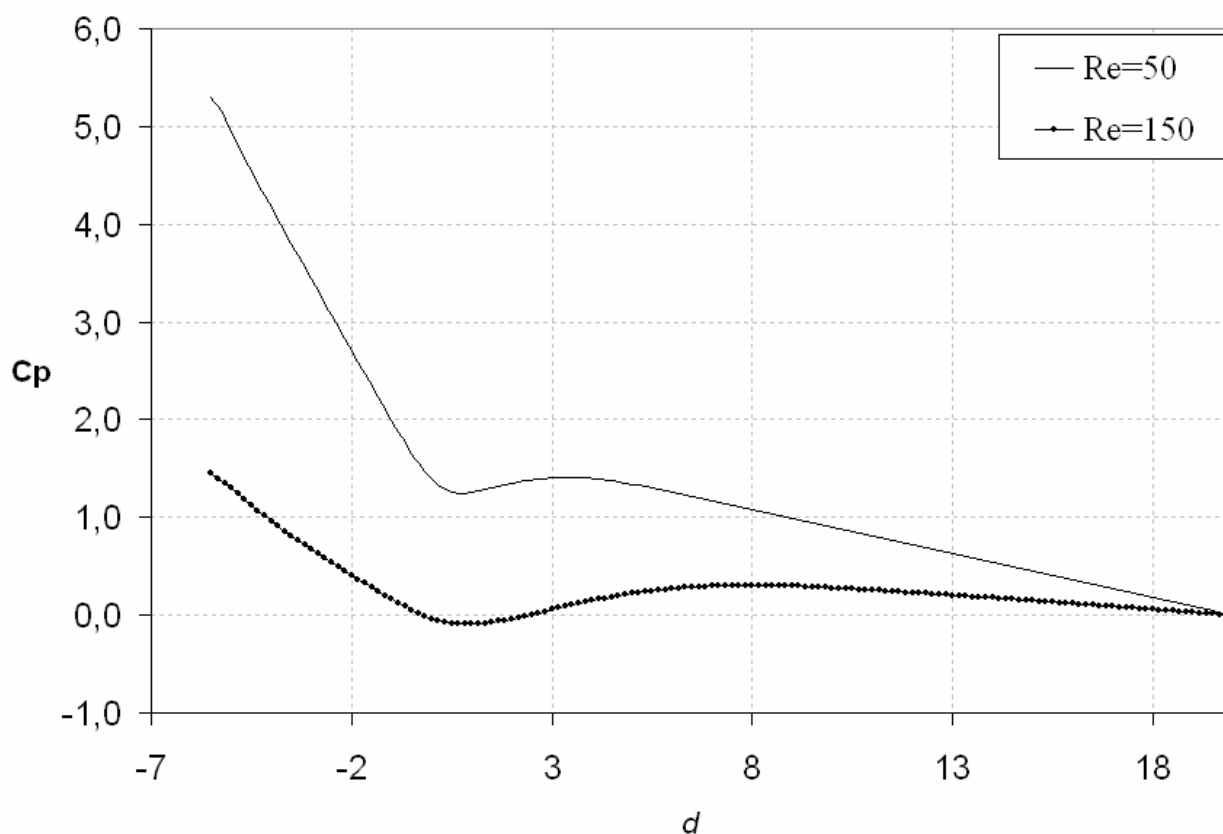


Figura 5.5 Escoamento sobre degrau abrupto: coeficiente de pressão ao longo da parede superior.

Como uma outra forma de comparação, analisou-se os valores obtidos para os perfis de velocidades horizontais,  $u_1$ , adimensionalizadas em relação à velocidade de entrada ( $u_1/\mathbf{u}_{\max}$ , onde  $\mathbf{u}_{\max}=1.5u_0$ ). Esses perfis foram obtidos em três diferentes seções a jusante do degrau ( $d=1,6$ ,  $d=4,0$  e  $d=8,0$ ) e seus resultados são comparados com os valores obtidos em Morgan et al.,(1982) e Macedo (1995) e - ver Tabelas 5.3-5.5. São demonstrados também, os desvios percentuais (Eq. (5.3)) de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  em comparação com resultados encontrados pelos mesmos autores.

Tabela 5.3: Velocidades horizontais para  $d=1,6$ .

Trabalho	Re=50 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$				Re=150 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$			
	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio
<b>Presente estudo</b>	<b>-0,035</b>	-	<b>0,70</b>	-	<b>-0,104</b>	-	<b>0,90</b>	-
Kueny-Binder	-	-	-	-	-0,09	15,55%	0,92	2,17%
Dhatt-Hubert	-0,05	30%	0,74	5,40%	-0,10	4%	0,91	1,09%
Donea-Giuliani	-0,06	41,66%	0,73	4,10%	-0,10	4%	0,90	0%
Ecer-Rout-Ward	-0,06	41,66%	0,72	2,77%	-0,04	160%	0,87	3,44%
Glowinsky et al.	-0,03	16,66%	0,71	1,40%	-0,10	4%	0,90	0%
Hecht	-0,04	12,50%	0,72	2,77%	-0,103	0,97%	0,90	0%
Macedo	0,0	-	0,67	4,47%	-0,08	30%	0,90	0%

Tabela 5.4: Velocidades horizontais para  $d=4,0$ .

Trabalho	Re=50 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$				Re=150 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$			
	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio
<b>Presente estudo</b>	<b>0,0</b>	-	<b>0,52</b>	-	<b>-0,05</b>	-	<b>0,72</b>	-
Kueny-Binder	-	-	-	-	-0,016	212,5%	0,71	1,40%
Dhatt-Hubert	0,0	0%	0,52	0%	-0,04	25%	0,72	0%
Donea-Giuliani	0,0	0%	0,53	1,88%	-0,06	16,66%	0,72	0%
Ecer-Rout-Ward	0,0	0%	0,53	1,88%	-0,03	66,66%	0,71	1,40%
Glowinsky et al.	0,0	0%	0,52	0%	-0,05	0%	0,72	0%
Hecht	0,0	0%	0,52	0%	-0,05	0%	0,73	1,36%
Macedo	0,0	0%	0,49	6,12%	-0,05	0%	0,68	5,88%

Tabela 5.5: Velocidades horizontais para  $d=8,0$ .

Trabalho	Re=50 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$				Re=150 $u_1/\mathbf{u}_{\max}$			
	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio	Mínima	Desvio	Máxima	Desvio
<b>Presente estudo</b>	<b>0,0</b>	-	<b>0,50</b>	-	<b>0,0</b>	-	<b>0,55</b>	-
Kueny-Binder	-	-	-	-	0,0	0%	0,56	1,78%
Dhatt-Hubert	0,0	0%	0,50	0%	0,0	0%	0,56	1,78%
Donea-Giuliani	0,0	0%	0,50	0%	0,0	0%	0,55	0%
Ecer-Rout-Ward	0,0	0%	0,51	1,96%	0,0	0%	0,51	7,84%
Glowinsky et al.	0,0	0%	0,50	0%	0,0	0%	0,56	1,78%
Hecht	0,0	0%	0,50	0%	0,0	0%	0,56	1,78%
Macedo	0,0	0%	0,50	0%	0,0	0%	0,53	3,77%

Considerando-se os resultados apresentados na tabelas 5.3-5.5, verificou-se que os resultados obtidos nesta Dissertação possuem uma boa concordância com os resultados dos autores Morgan et al., (1982) e Macedo (1995). Por exemplo, para citar alguns valores, pode-se destacar: (a) para  $d=1,6$ , 1,40% de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  máximo obtido por Glowinsky et al. (Re=50) e 0 % de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  máximo obtido por Glowinsky et al., Hecht e Macedo (Re=150); (d) para  $d=4,0$ , 0% de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  mínimo obtido por todos os autores

(Re=50) e 0 % de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  máximo obtido por Glowinsky et al. e Dhatt-Hubert (Re=150) e (c) para  $d=8,0$ , 0% de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  mínimo obtido por todos os autores com exceção de Ecer-Rout-Ward (Re=50) e 0 % de desvio para de  $u_1/\mathbf{u}_{\max}$  máximo obtido por Donea-Giuliani, Laval (Re=150).

## 5.2 ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE HERSCHEL-BULKLEY ATRAVÉS DE EXPANSÕES AXISSIMÉTRICAS ABRUPTAS

Nesta seção, serão realizadas aproximações GLS (Eq. (4.15)-(4.20)) de escoamentos de fluido de Herschel-Bulkley regularizado pela equação de Papanastasiou (Eq. (4.5) e (3.25)) através de expansões axissimétricas abruptas de razão de aspecto 1:2 e 1:4. A razões de aspecto do escoamento são definidas pela relação entre o raio do tubo de menor,  $R_0$ , e o raio do tubo de maior,  $R_1$ ,  $\mathbf{b} \equiv R_0/R_1$ . Para garantir que o escoamento já esteja hidrodinamicamente desenvolvido, tanto no tubo menor, quanto no tubo maior, foi empregado as seguintes relações de comprimento,  $L_0/R_0=30$  e  $L_1/R_0=45$ , onde  $L_0$  e  $L_1$  representam respectivamente os comprimentos do tubo menor e maior.

Em ambas as razões de aspecto foi adotado o sistema de coordenadas cilíndricas polares, explorando a simetria em relação à coordenada angular  $\theta$ . Como condições de contorno para a velocidade, nas paredes do tubo maior e menor da expansão, são especificadas condições de impermeabilidade e não deslizamento, na linha de centro é imposta condição de simetria para o campo de velocidade ( $\partial_{x_2} u_1 = u_2 = 0$ ) e, na entrada e na saída do duto são prescritos perfis de velocidade totalmente desenvolvido – com o perfil de saída respeitando a conservação de massa do escoamento. O perfil de velocidade na entrada do duto possui velocidade média  $u_0=1\text{m/s}$ .

O fluido utilizado nas simulações é construído de modo a ser um fluido Newtoniano generalizado (GNL), Eq.(3.13), com o tensor tensão de cisalhamento  $\mathbf{t}$  dado pela função de Herschel-Bulkley regularizada pela equação de Papanastasiou

$$\mathbf{t} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})\dot{\mathbf{g}} = K\dot{\mathbf{g}}^n + \mathbf{t}_0(1 - \exp(-a\dot{\mathbf{g}})) \quad (5.5)$$

onde a função viscosidade  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{g}})$  é pela Eq. (3.25) e o parâmetro de regularização selecionado com  $a=10^3$ .

Definindo o número de Herschel-Bulkley como:

$$Hb = \frac{t_0}{K \left( \frac{u_0}{R_0} \right)^n} \quad (5.6)$$

onde  $t_0$  representa a tensão limite de cisalhamento do material,  $R_0$  o raio do tubo de entrada da expansão,  $u_0$  a velocidade média de entrada,  $n$  consiste no expoente *power-law* e  $K$  o índice de consistência.

### 5.2.1 Escoamento Através de Expansões 1:2 Axissimétricas Abruptas

A geometria considerada corresponde a uma expansão axissimétrica abruptas com razão de aspecto 1:2. O escoamento através da expansão ilustrada na Figura 5.6 é descrito pelo problema de valor contorno definido pela Eq.(4.5).

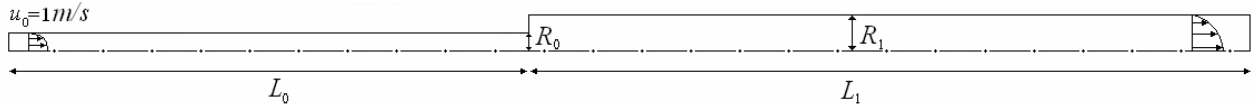


Figura 5.6 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2: descrição do problema.

Após um processo de refinamento de malha, no qual se construiu três malhas distintas, sendo estas: Malha#1 com 3.920 elementos finitos bi-lineares (Q1/Q1) e 4.199 pontos nodais; Malha#2 com 9.590 elementos finitos bi-lineares (Q1/Q1) e 10.039 pontos nodais e Malha#3 com 12.400 elementos finitos bi-lineares (Q1/Q1) e 12.903 pontos nodais. O processo de refinamento de malha teve como objetivo testar a independência de malha dos resultados da queda de pressão adimensionalizada ( $C_p$ ) ao longo do duto, ilustrado na Figura 5.7. O critério utilizado no teste de independência de malha foi o seguinte: foi selecionada a malha que apresentasse uma queda de pressão diferindo de menos de 3% dos valores gerados pela malha anterior e posterior a ela. Com base nesse critério, o domínio computacional foi discretizado por uma combinação de 9.590 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 10.039 pontos nodais, ou seja, foi escolhida a Malha#2.

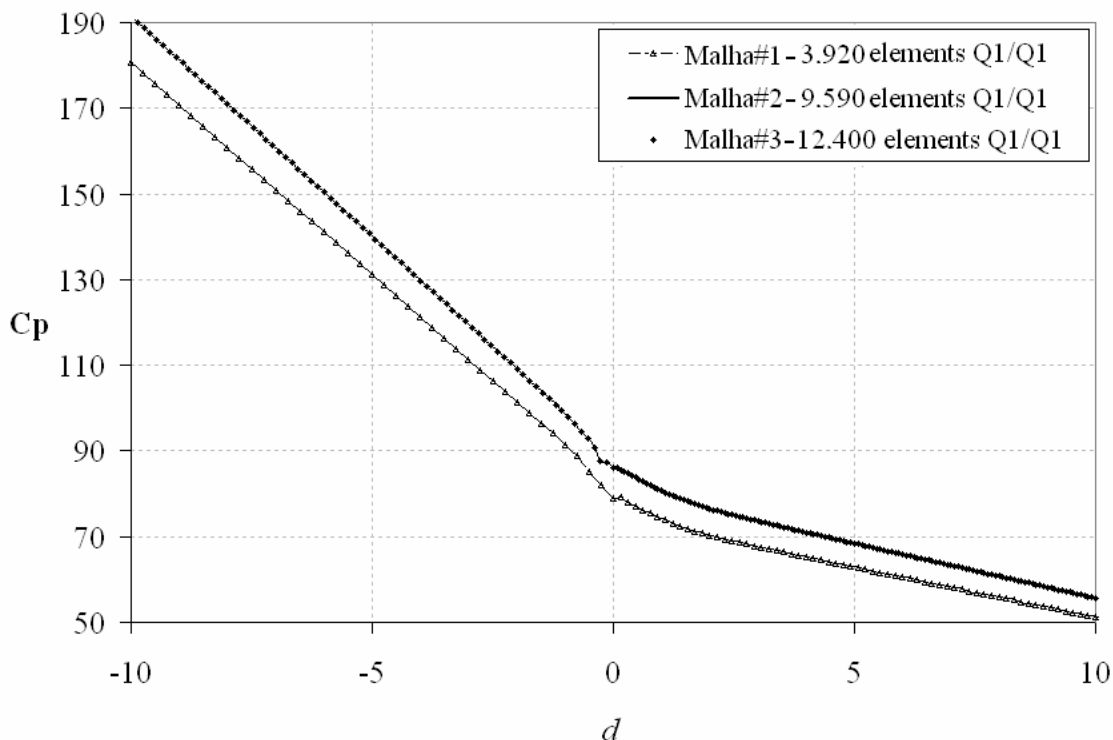


Figura 5.7 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2: teste de independência de malha.

A malha utilizada para a simulação está ilustrada na Figura 5.8. Para obter resultados mais precisos para zonas de estagnação e formação do vórtice, a malha é altamente refinada próxima à expansão, Figura 5.9.



Figura 5.8 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - Malha selecionada: 9.590 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 10.039 pontos nodais.

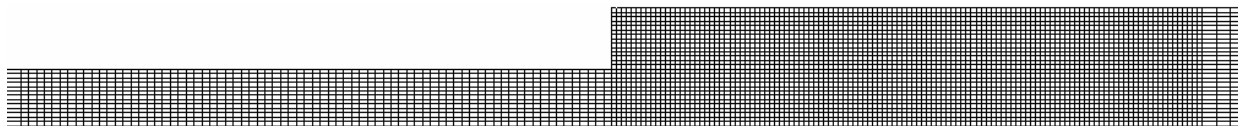


Figura 5.9 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 – detalhe da malha selecionada: 9.590 elementos bi-lineares (Q1/Q1) e 10.039 pontos nodais.

### 5.2.1.1 Análise Global: Distribuições de Tensão de Cisalhamento, Pressão e Velocidade

Nesta subseção são apresentas resultados, obtidos para razão de aspecto 1:2, da variação na dinâmica do escoamento, ao longo do duto, com relação à influência do número de Herschel-Bulkley e índice de comportamento *power-law*. Para tal, são apresentados resultados do campo de tensão de cisalhamento, pressão e velocidade ao longo de toda a expansão.

Na Figura 5.10 são apresentadas as iso-regiões da aproximação GLS do campo de tensão de cisalhamento, para número de Re desprezível, parâmetro regularizador de Papanastasiou,  $a=10^3$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa.s}^n$ , coeficiente *power-law*,  $n=0,37$  e número de Herschel-Bulkley variando de  $Hb=0$  a 100 (Fig. 5.10(a)-Fig. 5.10(f), respectivamente). Observa-se que, à medida que se aumenta o número de Herschel-Bulkley, o efeito viscoplástico se torna mais drástico, aumentando o tamanho das zonas rígidas (zonas pretas na Fig. 5.10), região na qual a tensão limite de escoamento é maior que a tensão de cisalhamento local,  $t < t_0$ .

Para  $Hb=0,1$  (Fig. 5.10(a)), a zona de escoamento (zona branca na Fig. 5.10) ocupada quase a totalidade do domínio a exceção de diminutas zona estagnada junto as quinas da expansão e a zona de *plug flow* na região ao longo do seu eixo de simetria. Esse padrão desenvolveu-se até  $Hb=10$  (Fig. 5.10(c)), apenas com as dimensões das zonas rígidas aumentando continuamente com o crescimento de  $Hb$ . Já a partir de  $Hb=20$ , as dimensões das zonas rígidas apresentam um crescimento extremamente lento com aumento de  $Hb$  - conforme se observa nas Figuras 5.10(d)- 5.10(f) para  $Hb=20-100$ , respectivamente. Também pode ser notado que aumentando o  $Hb$ , as zonas de *plug flow*, ou zonas de movimento de corpo rígido, no eixo de simetria, aumentam drasticamente de tamanho tanto a montante quanto a jusante da expansão. Por exemplo, para  $Hb=0,1$ , a região de movimento de corpo rígido, no eixo de simetria, a montante da expansão é praticamente desprezível (Fig. 5.10(a)) enquanto que, para  $Hb=100$ , Figura 5.10(f), a região de movimento de corpo rígido toma praticamente todos os espaços a montante do duto.

Essa dependência crescente das dimensões das zonas rígidas como número de  $Hb$ , verificada na figura, pode ser explicada da seguinte maneira. Para um mesmo índice *power-law* e consistência  $K$ , e uma taxa de deformação imposta na entrada do canal – na Eq.(5.6) representada por  $u_0/R_0$  - o aumento contínuo do número  $Hb$  necessariamente aumenta a tensão limite de escoamento do material. Conseqüentemente a incidência de zonas rígidas sujeitas a tensão de cisalhamento inferiores ao limite de escoamento passa a ser maior.



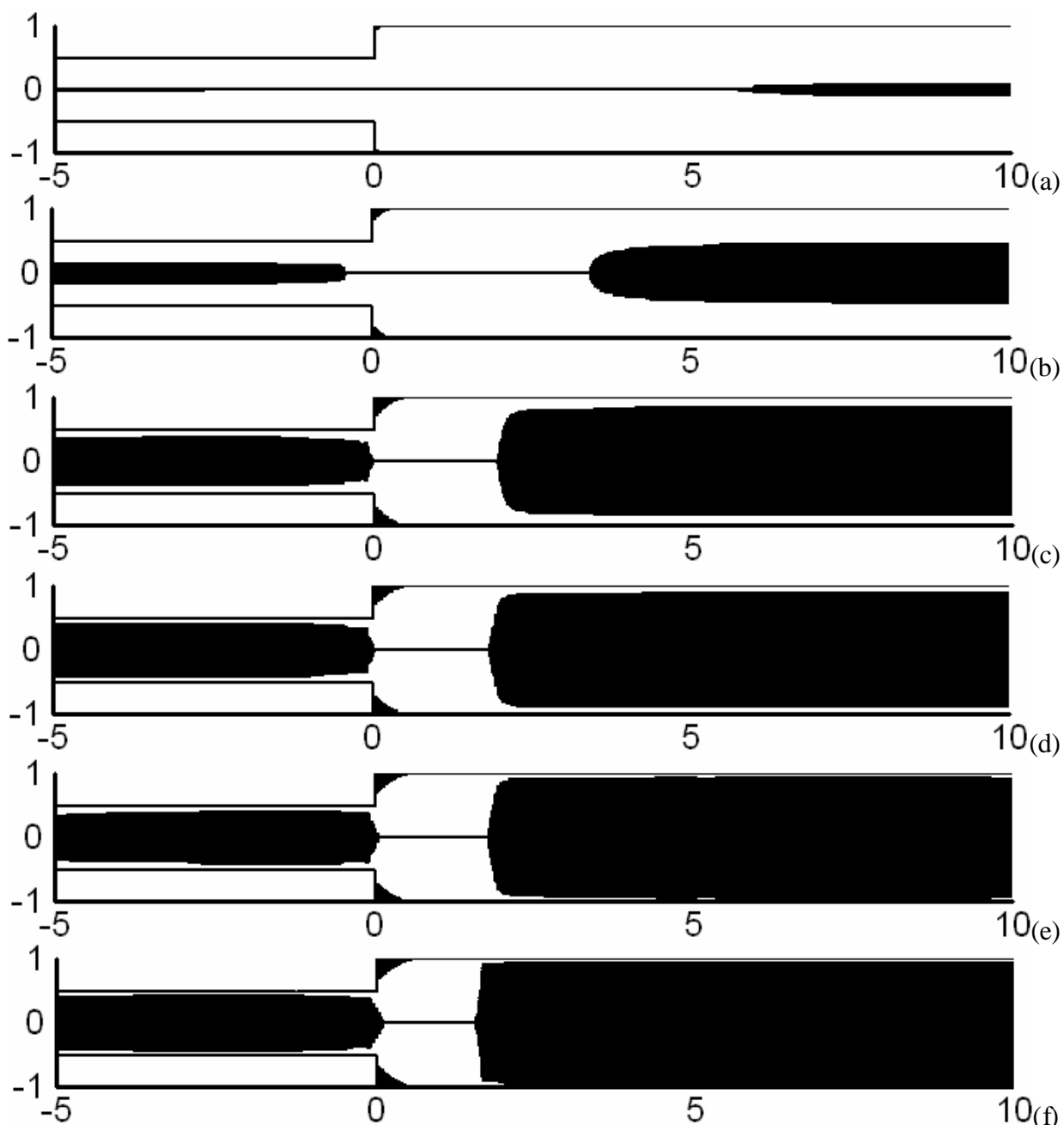


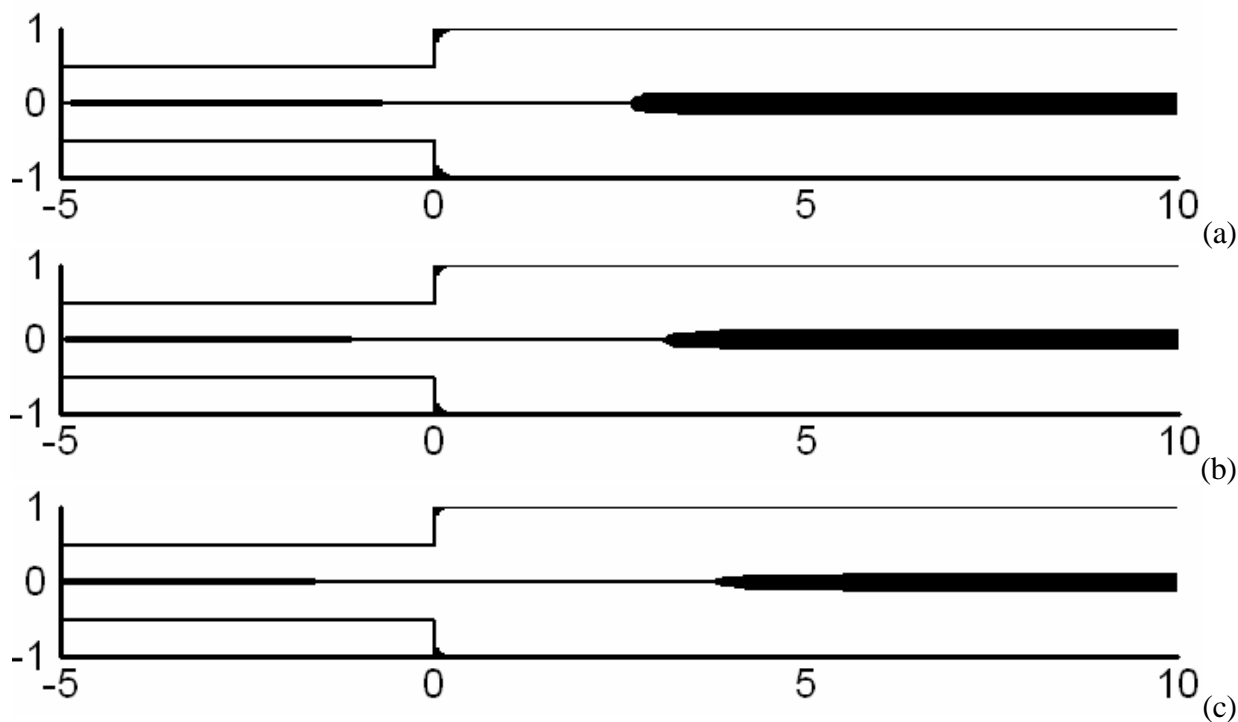
Figura 5.10 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 – iso-regiões de  $t$ , para  $n=0,37$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e  $a=10^3$ : (a)  $H_b=0,1$ , (b)  $H_b=1$ , (c)  $H_b=10$ , (d)  $H_b=20$ , (e)  $H_b=50$  e (f)  $H_b=100$ .

É interessante também analisar as mudanças na dinâmica do escoamento em função da variação do índice de comportamento, ou índice *power-law*. Para esta análise, realizaram-se simulações utilizando o índice de comportamento variando de  $n=1-0,2$ , o número de Herschel-Bulkley fixo igual a 0,1, parâmetro estabilizador de Papanastasiou,  $a=10^3$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e número de Reynolds desprezível.

Na Figura 5.11, pode-se constatar que, para o mesmo número de Herschel-Bulkley, os fluidos mais pseudoplásticos apresentam regiões rígidas menores. Nesta figura, verifica-se que à medida que  $n$  diminui, as zonas de movimento de corpo rígida central, tanto a montante como a jusante da expansão, tendem a desaparecer (Fig. 5.11(a)-(f)). Esta tendência é mais significativa na zona rígida a montante, a qual para valores de  $n=0,37$  inexiste (Fig. 5.11(e)), enquanto a zona rígida a jusante da expansão só irá desaparecer completamente para o valor  $n=0,2$  (Fig. 5.11(f)).

A diminuição das dimensões das zonas rígidas com a queda do coeficiente *power-law* pode ser explicada analisando a expressão do número de Hb, Eq.(5.6). Fixado os valores do índice de consistência  $K$ , da tensão limite do material  $t_0$  e uma taxa de deformação imposta na entrada do canal,  $u_0/R_0$ , a diminuição contínua do índice *power-law* faz o denominador da Eq.(5.6) diminuir. Logo a única maneira de se manter fixo o número da Hb é através da queda da tensão limite de escoamento do material,  $t_0$ . Conseqüentemente, haverá uma menor ocorrência de regiões rígidas, nas quais  $t < t_0$ .

Quanto ao desaparecimento prematuro das regiões rígidas à montante da expansão, se comparada às regiões rígidas a jusante dela, esse pode ser explicado pelas maiores taxas de deformação experimentadas no duto de menor diâmetro. Segundo a Eq. (3.25), maiores taxas de cisalhamento implicam em maiores tensões de cisalhamento, o que favorece o surgimento de regiões de escoamento nesse duto, ou seja,  $t > t_0$ .



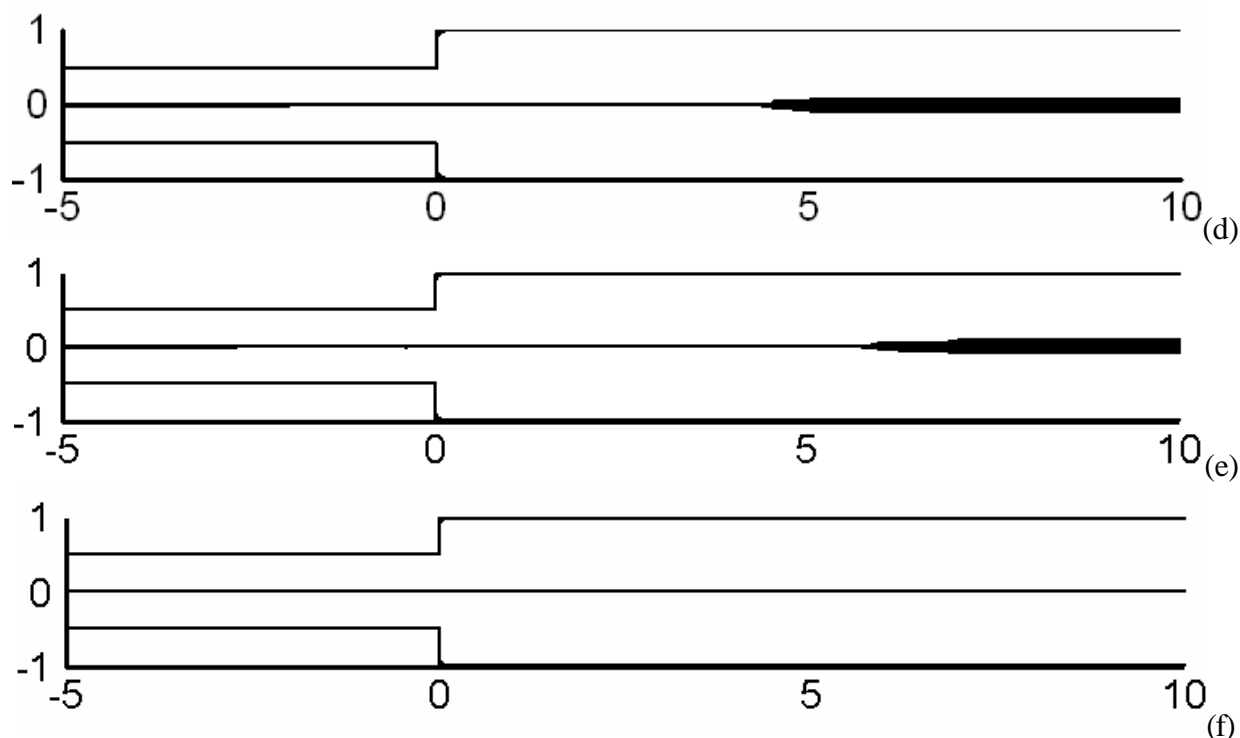


Figura 5.11 Escoamento através de uma expansão axis simétrica 1:2 - influências do índice *power-law*, para  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $H_b=0,1$  e  $a=10^3$ : (a)  $n=1$ , (b)  $n=0,8$ , (c)  $n=0,6$ , (d)  $n=0,5$ , (e)  $n=0,37$ , (f)  $n=0,2$ .

A influência, simultânea, do índice *power-law* e do número de Herschel-Bulkley, na quina da expansão é mostrada em maiores detalhes nas Figuras 5.12-5.13. Realizou-se uma comparação do comportamento da dinâmica do escoamento na quina da expansão, utilizando-se índices de comportamento igual a  $n=0,8$  (Fig. 5.12) e  $n=0,37$  (Fig. 5.13), para  $a=10^3$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , número de Reynolds desprezível e, tanto para a Figura 5.12 e 5.13, o número Herschel-Bulkley variando,  $H_b=0$ ,  $H_b=0,005$ ,  $H_b=0,01$ ,  $H_b=0,05$ ,  $H_b=0,1$  e  $H_b=1$ .

Para  $n=0,8$  e  $H_b=0$ , (Fig. 5.12(a)), pode ser notado a existência de um vórtice junto à quina da expansão, o qual a partir de  $H_b=0,01$  (Fig. 5.12(c)), desaparece dando lugar a uma zona rígida estagnada para  $H_b=0,05$  (Fig. 5.12(d)) a  $H_b=1$  (Fig. 5.12(f)) - correspondendo a regiões de baixas tensões de cisalhamento. Esse comportamento pode ser explicado empregando a definição do número de Herschel-Bulkley Eq. (5.6): para  $n$  e  $K$  fixos e taxa de cisalhamento na entrada prescrita, o aumento de  $H_b$  força o crescimento da tensão limite de escoamento do material, ou seja, propicia o aparecimento de uma região rígida ( $t < t_0$ ) junto ao canto da expansão.

Já na Figura 5.13, para  $n=0,37$ , o coeficiente *power-law* foi suficientemente pequeno para evitar a formação de vórtices para valores de  $H_b$  muito baixos ( $H_b=0$ , Fig. 5.13(a) e  $H_b=0,005$ , Fig. 5.13(b)). No entanto, a partir de  $H_b=0,01$  (Fig. 5.13(c)), percebe-se a formação de uma zona

rígida estagnada junto à expansão, a qual aumenta com o aumento de  $H_b$  ( $H_b=0,01-1$ , Fig. 5.13(c)-(f)). Entretanto, é interessante observar que as dimensões dessas zonas rígidas, se comparadas às dimensões das zonas rígidas obtidas para  $n=0,8$  (Fig. 5.12), apresenta-se ligeiramente menores. Este padrão de comportamento é idêntico aos padrões verificados e já analisados na Figuras 5.11.

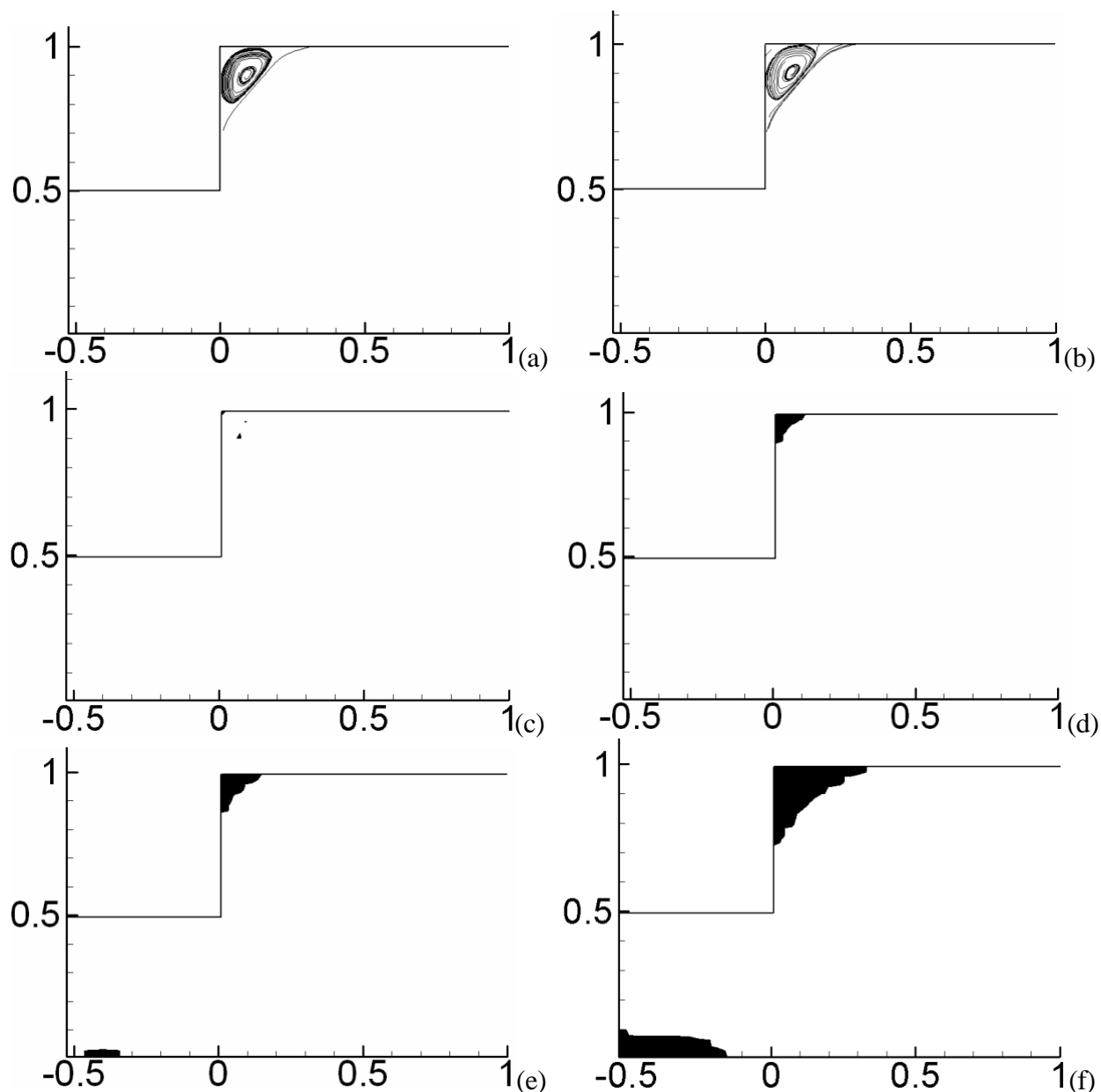


Figura 5.12 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - influência do índice *power-law* e do número de  $H_b$  na quina da expansão, para  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n=0,8$  e  $a=10^3$ : (a)  $H_b=0$ , (b)  $H_b=0,005$ , (c)  $H_b=0,01$ , (d)  $H_b=0,05$ , (e)  $H_b=0,1$  e (f)  $H_b=1$ .

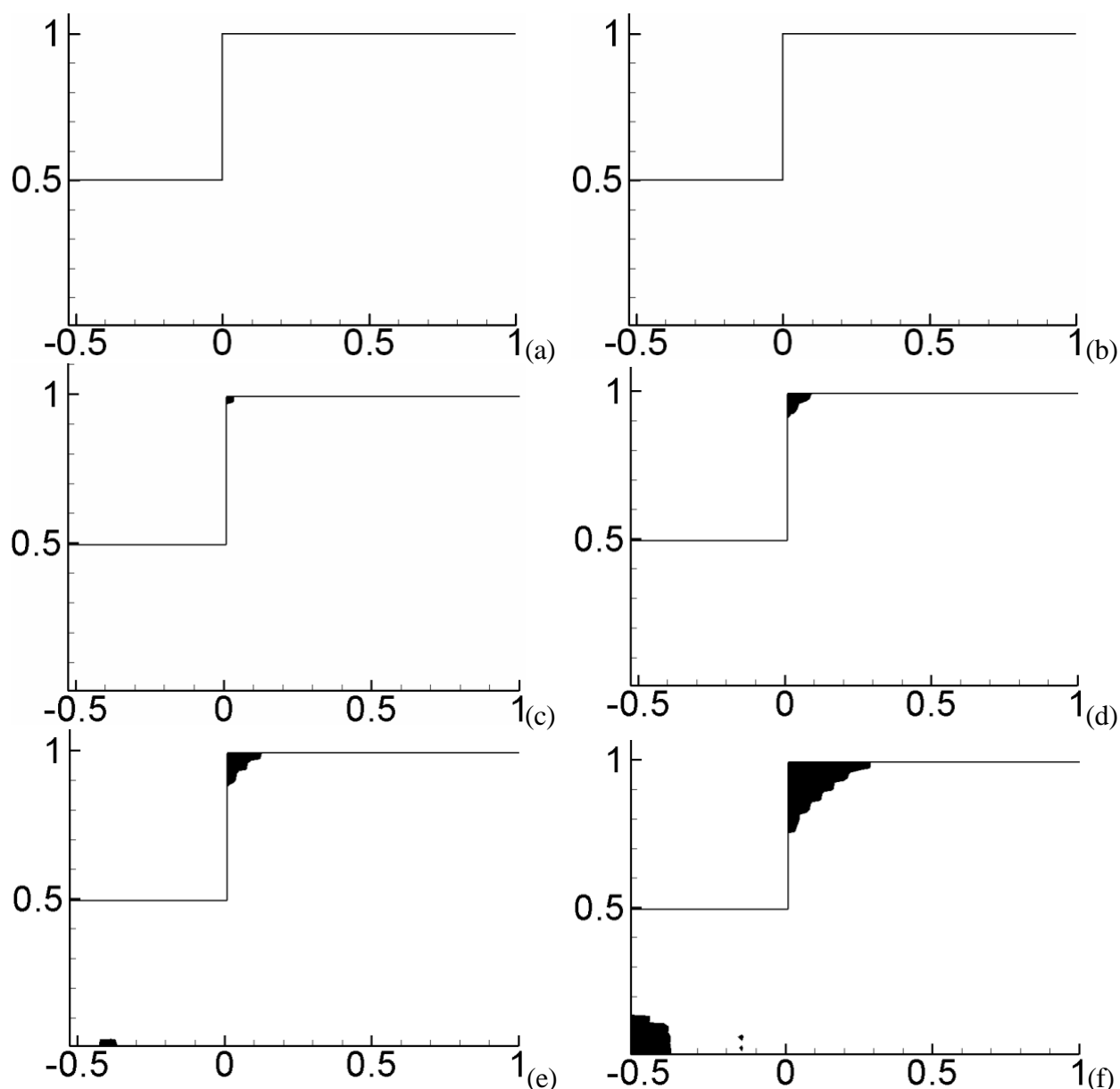
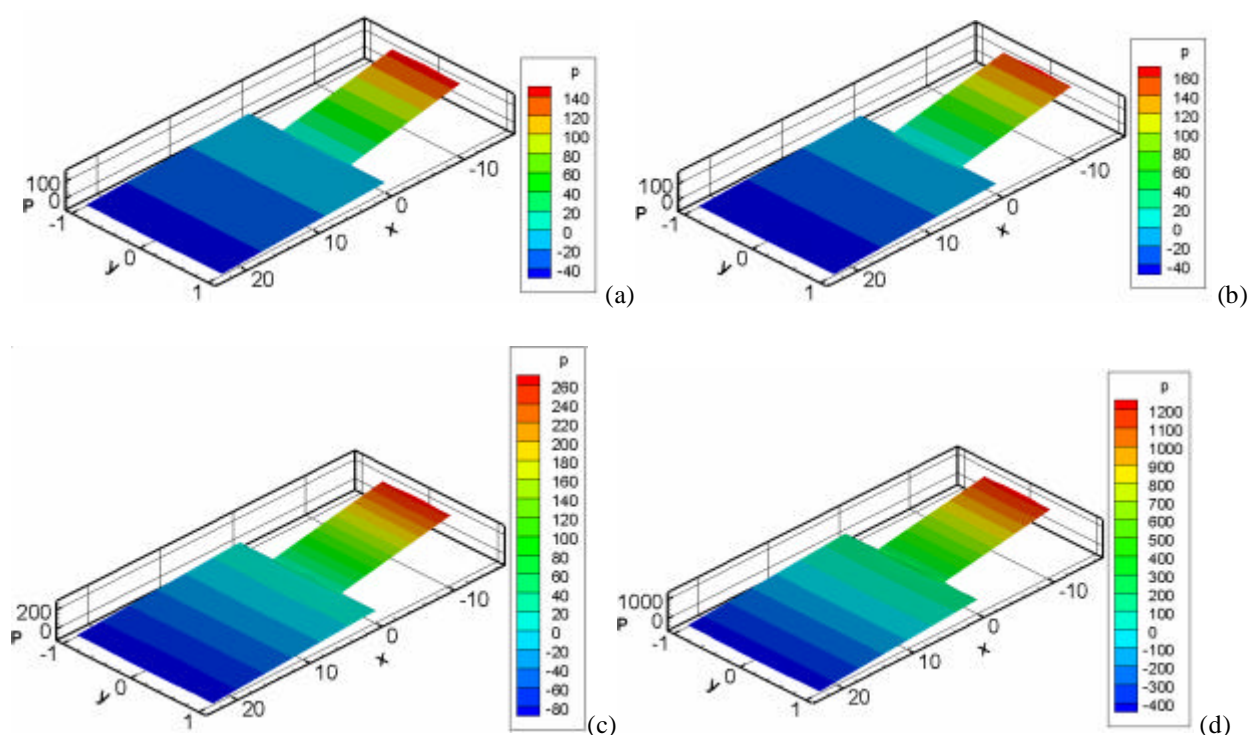


Figura 5.13 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - influência do índice *power-law* e do número de Hb na quina da expansão, para  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n=0,37$  e  $a=10^3$ : (a)  $Hb=0$ , (b)  $Hb=0,005$ , (c)  $Hb=0,01$ , (d)  $Hb=0,05$ , (e)  $Hb=0,1$  e (f)  $Hb=1$ .

Na Figura 5.14 é apresentada as iso-regiões do campo de pressão, para número de Reynolds desprezível, ou *creeping flow*; coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e número de Herschel-Bulkley variando de  $Hb=0-100$ , (Figs. 5.14(a)-5.14(f), respectivamente). Com uma observação global das Figuras, constata-se inicialmente que, à medida que o número de Herschel-Bulkley aumenta, a queda de pressão ao longo da expansão é mais elevada (ver Figs. 5.14(a)-5.14(f)) - com a maior discrepância dos valores de  $\Delta p$  verificada na transição do caso Newtoniano,  $Hb=0$  (Fig. 5.14(a)), e  $Hb=10$  (Fig. 5.14(d)). O aumento da queda de pressão ao longo do duto é devido ao crescimento das regiões de *plug flow* com o Hb,

comportamento já observado nas Figuras 5.10(a)-5.10(f). A existência das regiões de *plug flow* diminui a área efetiva do escoamento e conseqüentemente aumentando sua perda de carga. Na situação Newtoniana ( $H_b=0$ ) a queda de pressão ao longo do tubo segue os padrões dos escoamentos desenvolvidos: queda de pressão linear tanto no tubo de menor diâmetro quanto no tubo de maior diâmetro (Fig. 5.14(a)). Entretanto, esse comportamento é drasticamente alterado para altos valores de  $H_b$  (por exemplo, para  $H_b=100$  (Fig. 5.14(f))). Nessas situações a áreas efetivas de escoamento do tubo menor e maior são praticamente idênticas, devido a quase completa obstrução desses dutos pelas zonas de movimento de corpo rígido. Na Figura 5.14(e)- (f), essa forte obstrução dos dutos mitiga, inclusive, a própria existência da expansão, com o padrão desses escoamentos ficando similar a escoamentos capilares de tubos retos sujeitos a altíssimas quedas de pressão. Finalmente, pode-se observar ainda que, os comprimentos dos tubos de maior e menor diâmetro, para todas as situações investigadas (Fig. 5.14(a)-(f)) foram suficientes para desenvolver hidrodinamicamente o escoamento, visto as isobáricas de todas as figuras mostrarem-se perpendiculares em relação à linha de simetria do escoamento.



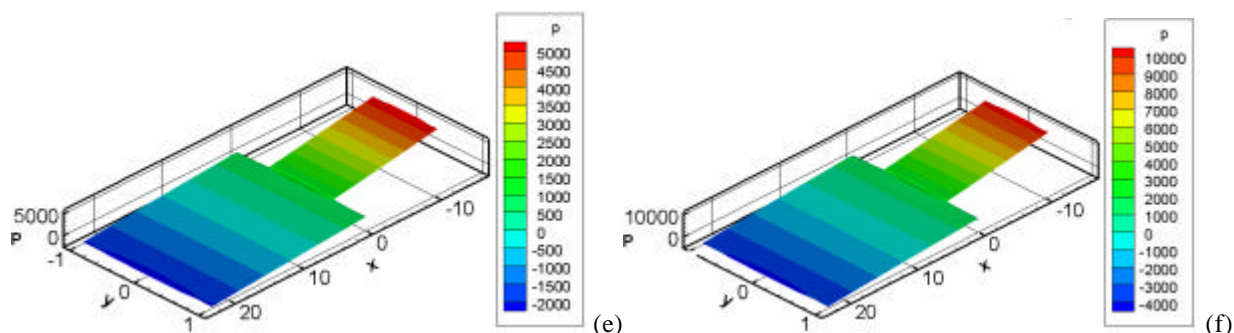


Figura 5.14 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - Iso-regiões do campo de pressão,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $\text{Re}=0$ ,  $n=0,37$  e  $a=10^3$ : (a)  $\text{Hb}=0$ , (b)  $\text{Hb}=0,1$ , (c)  $\text{Hb}=1$ , (d)  $\text{Hb}=10$ , (e)  $\text{Hb}=50$  e (f)  $\text{Hb}=100$ .

Na Figura 5.15 é apresentada as superfícies do módulo do campo de velocidade, para simulações com número de Reynolds desprezível, o expoente de comportamento,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e o número de Herschel-Bulkely foi variado de  $\text{Hb}=0-100$  (Figs. 5.15(a)-5.15(f), respectivamente). Essa figura é útil para uma clara visualização espacial do desenvolvimento das zonas rígidas de *plug flow* a medida que o  $\text{Hb}$  aumenta, conforme já analisado nas Figuras 5.10.

No caso Newtoniano,  $\text{Hb}=0$  (Figura 5.15(a)), é possível observar claramente uma suave camada limite junto às paredes dos dutos de maior e menor diâmetro – oriunda da imposição da condição de contorno de não deslizamento e impermeabilidade ali imposta. Nas situações sujeitos a valores mais elevados de  $\text{Hb}$ , (Figs. 5.15(c)-(f)), fica muito bem representada as regiões rígidas ocupando a quase totalidade dos dutos a exceção de severas camadas limites de velocidade. Finalmente, é importante ainda observar que, por argumentos de conservação de massa, que os níveis de velocidades das regiões de *plug flow* no duto de maior diâmetro são menores que as do duto de menor diâmetro.

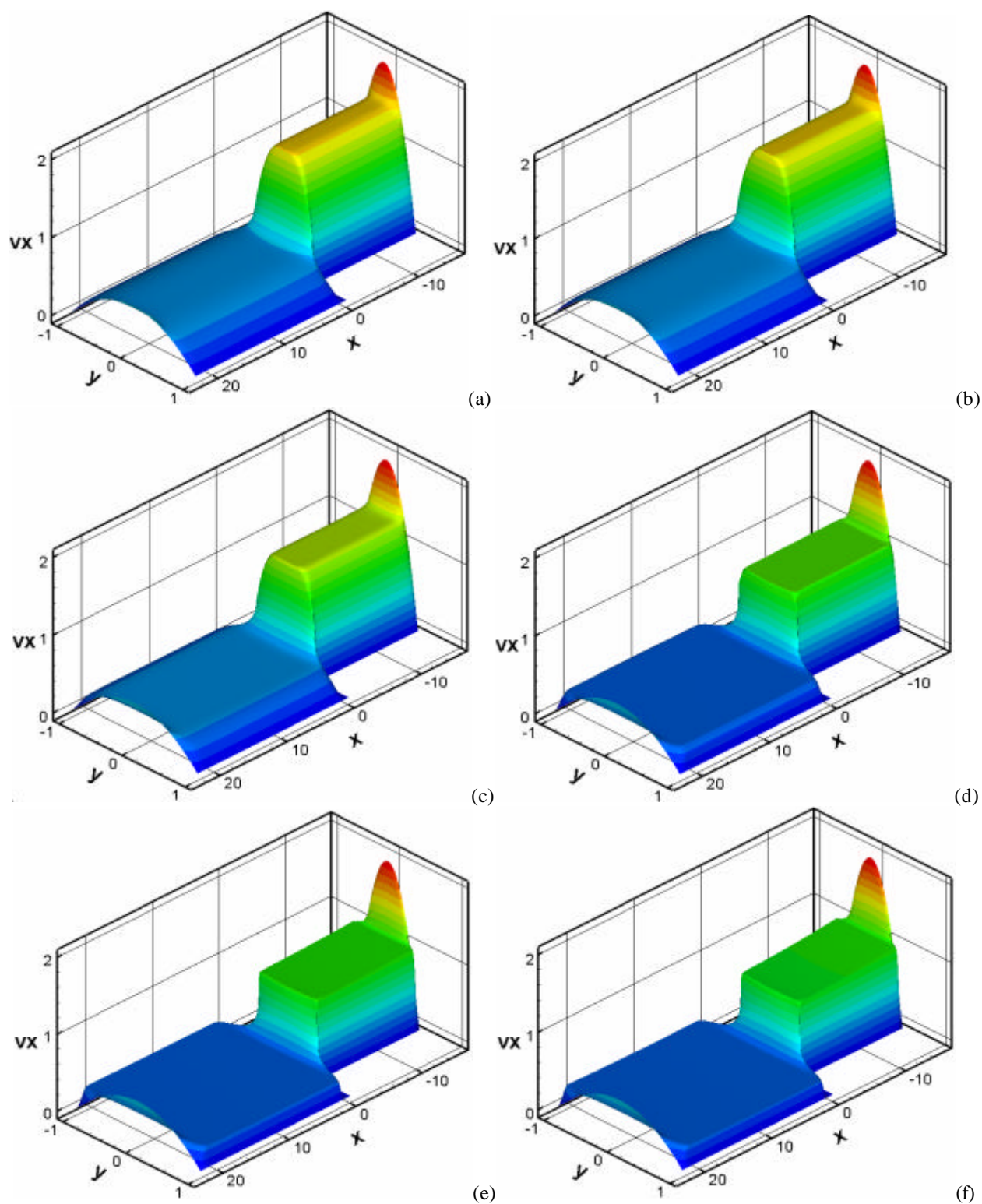


Figura 5.15 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - superfícies do módulo do campo de velocidade,  $Re=0$ ,  $n=0,37$  e  $a=10^3$ : (a)  $H_b=0$ , (b)  $H_b=0,1$ , (c)  $H_b=1$ , (d)  $H_b=10$ , (e)  $H_b= 50$  e  $H_b=100$ .



### 5.2.1.2 Análise local: Perfis de Velocidade e Queda Pressão

Na Figura 5.16 é apresentada a queda de pressão adimensionalizada ao longo da expansão 1:2, dada pelo número de Euler (Eq. (5.4)). São apresentados os coeficientes de pressão ( $C_p$ ) - , em escala semi logorítma - ao longo da linha de simetria, para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa.s}^n$  e número de Herschel-Bulkley variando de  $Hb=0-100$ . O comportamento da queda de pressão com o número  $Hb$  já foi analisado na Fig. 5.14: quanto maior o valor de  $Hb$ , maior será a queda de pressão na expansão. A própria necessidade da inclusão da escala logarítmica para os valores de  $C_p$ , devido à forte queda de pressão para  $Hb=100$  (Fig. 5.14(f)) se comparada ao  $\Delta p$  das situações com números de Herschel-Bulkley baixos  $Hb=0$  (Fig. 5.14(a)) e 0,1 (Fig. 5.14(b)), já ilustrada o comentário dessa figura.

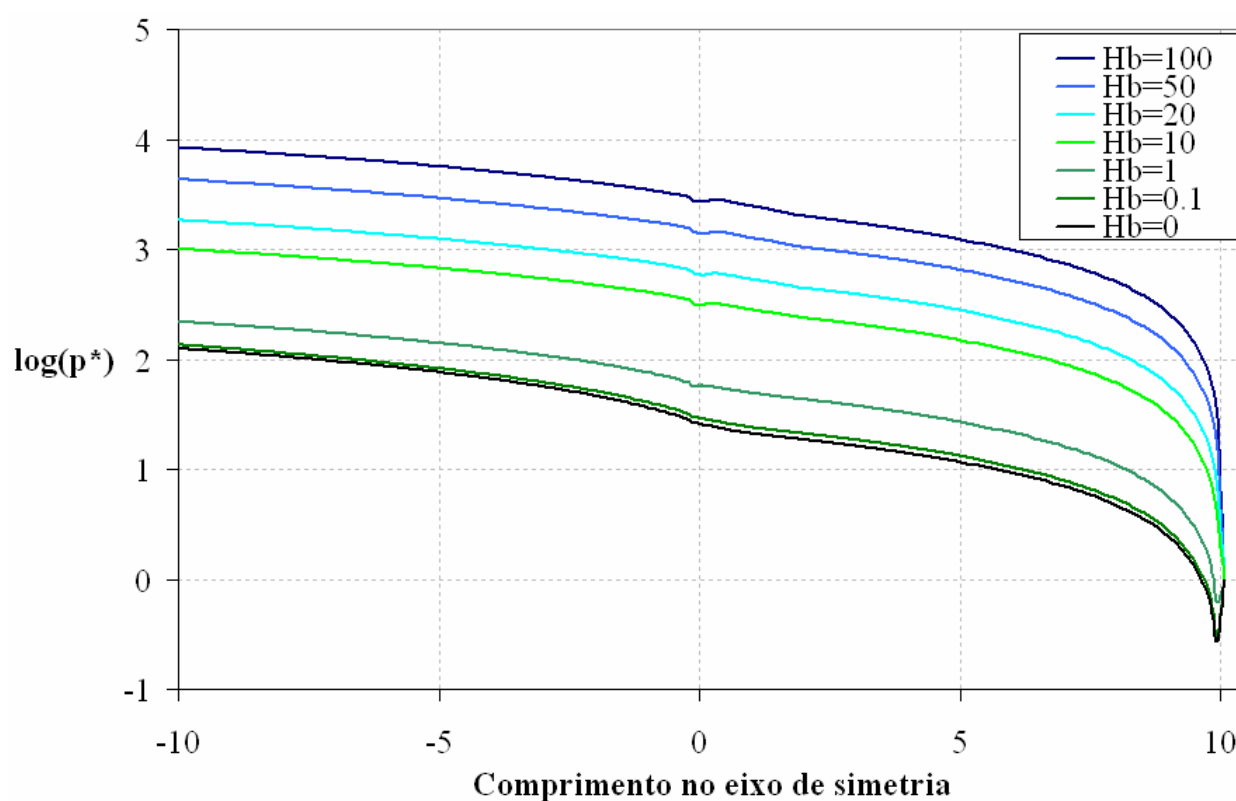


Figura 5.16 escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para  $Re=0$ ,  $n=0,37$  e 9.590 elementos Q1/Q1.

Nas Figuras 5.17 e 5.18 são apresentados os perfis de velocidade axial adimensionalizada ( $u^*=u_0/u_1$ ) versus  $r^*=2x_2/D_0$  - no plano da expansão em  $x_1=0$  (Fig. 5.17) e uma região desenvolvida a jusante da expansão em  $x_1=10$  (Fig. 5.18), para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa.s}^n$ , e número de Herschel-Bulkley

variando de  $Hb=0-100$ . Conforme já observado nas análises globais do campo de velocidade, Figura 5.15, o aumento do número de Herschel-Bulkley tende a desenvolver regiões rígidas de *plug flow* e severas camadas limite de velocidade. Apenas dois comentários adicionais a dos introduzidos na Fig. 5.15. Primeiro, observa-se que as velocidades máximas de todas as situações investigadas nessas figuras ( $Hb=0-100$ ) são maiores nos perfis do plano da expansão do que nos perfis da região desenvolvida - fato este explicado por argumentos de conservação de massa. Segundo, os perfis da Fig. 5.18 apresentando oscilações localizadas (*overshoot* ou *undershoot*) nas bordas de suas camadas limites (para  $Hb=20-100$ ), os quais poderiam ser talvez eliminados utilizando-se técnicas de *shock-capture* [Galeão e Dutra do Carmo, 1988].

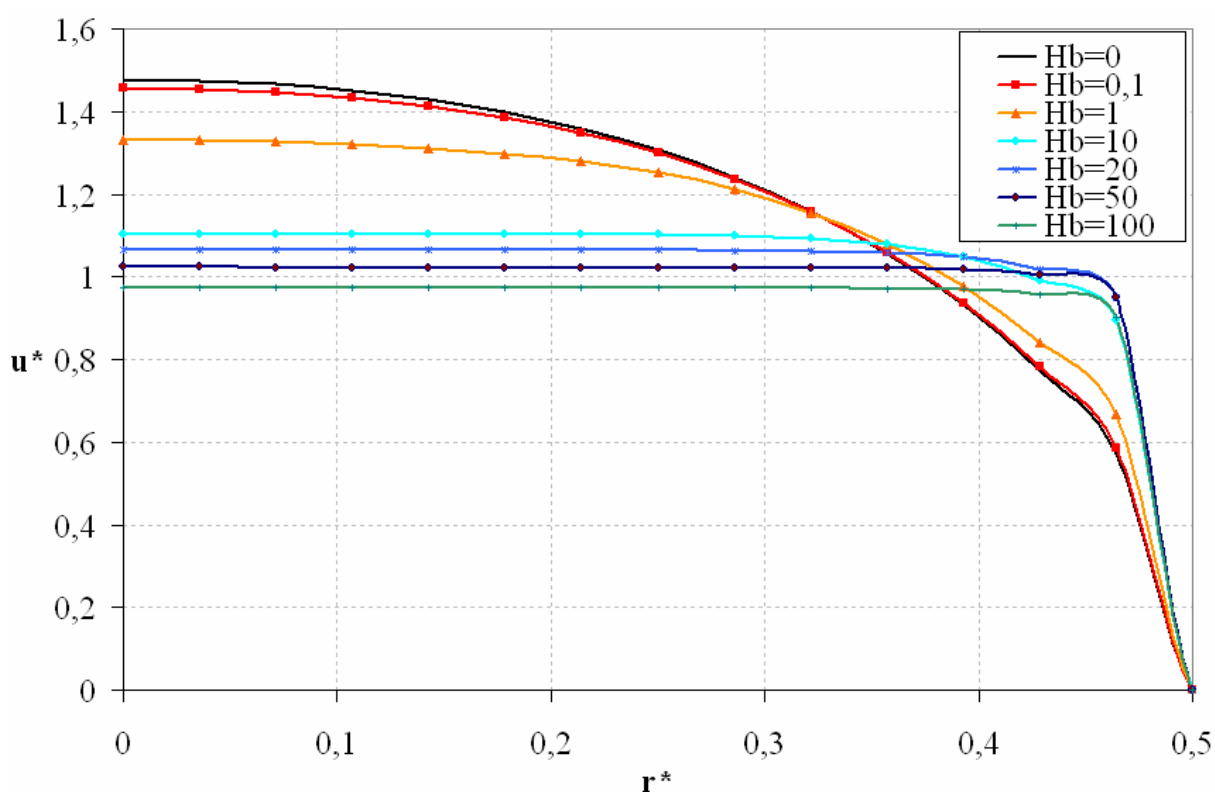


Figura 5.17 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidades axiais no plano de expansão em  $x_1=0$ , para  $n=0,37$ ,  $Re=0$  e 9.590 elementos Q1/Q1.

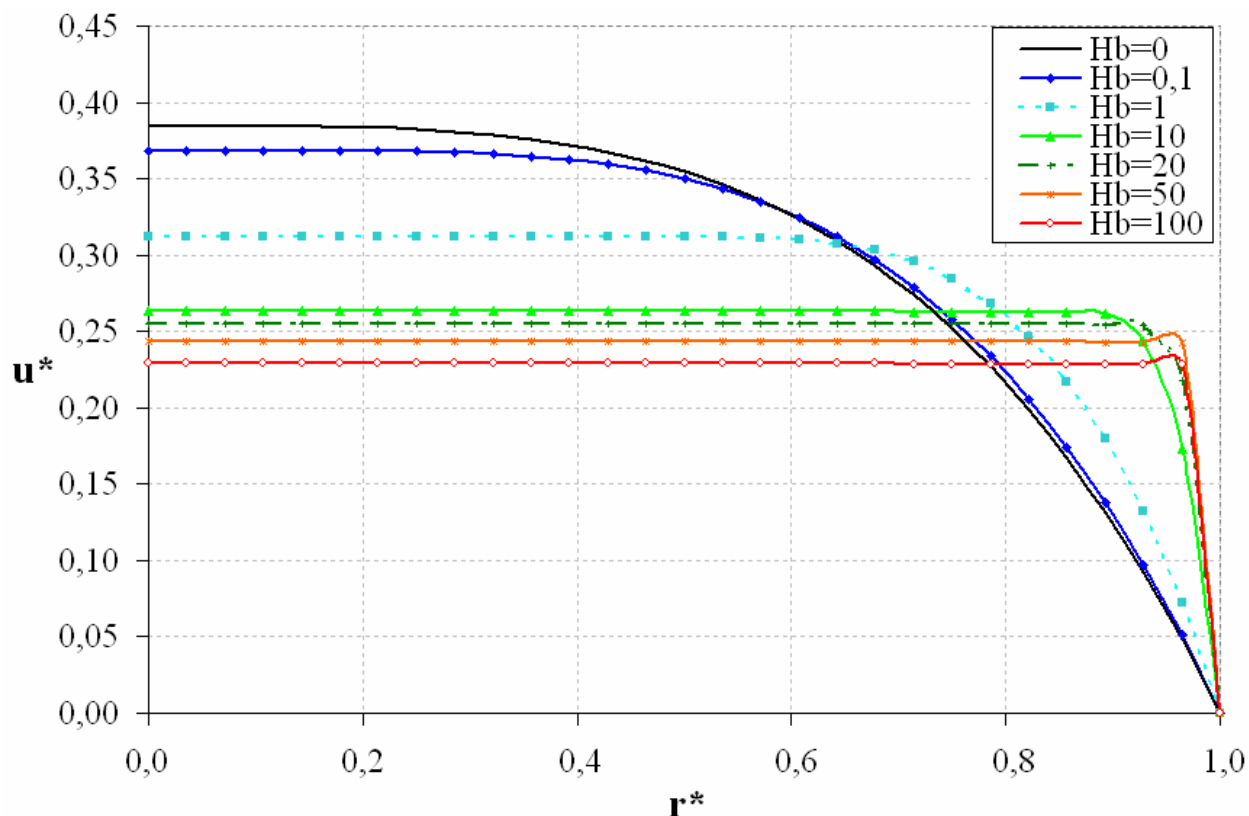


Figura 5.18 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidades axiais em  $x_1=10$ , para  $n=0,37$ ,  $Re=0$  e 9.590 elementos Q1/Q1.

Na Figura 5.19 retorna-se à análise da queda de pressão ao longo da linha de simetria, com número de  $Re$  desprezível, agora, porém, para o número de Herschel-Bulkley fixo igual a  $Hb=0,1$ , parametrizadas por diferentes valores do coeficiente *power-law*,  $n=0,2-1,0$ . Conforme observado na Fig. 5.11, a medida que  $n$  decai, as zonas rígidas do canal diminuem de dimensão. Portanto, para menores valores de  $n$ , haverá menos obstrução do escoamento, gerando assim quedas de pressão mais baixas – o que fica evidente na região do duto menor.

Já para a região do duto de maior diâmetro, todos os perfis da Fig. 5.19 coincidem, mesmo adotando-se nessa figura uma escala logarítmica. Talvez, pelo fato do número de Herschel-Bulkley adotado ter sido baixo ( $Hb=0,1$ ), a análise da influência da queda de  $n$  sobre a  $\Delta p$  ao longo do tubo maior, tenha ficado prejudicada. Para  $Hb=0,1$ , as zonas rígidas obstruem muito pouco este duto – ver Fig. 5.11 tornando as quedas de pressão para todas as situações investigadas similares.

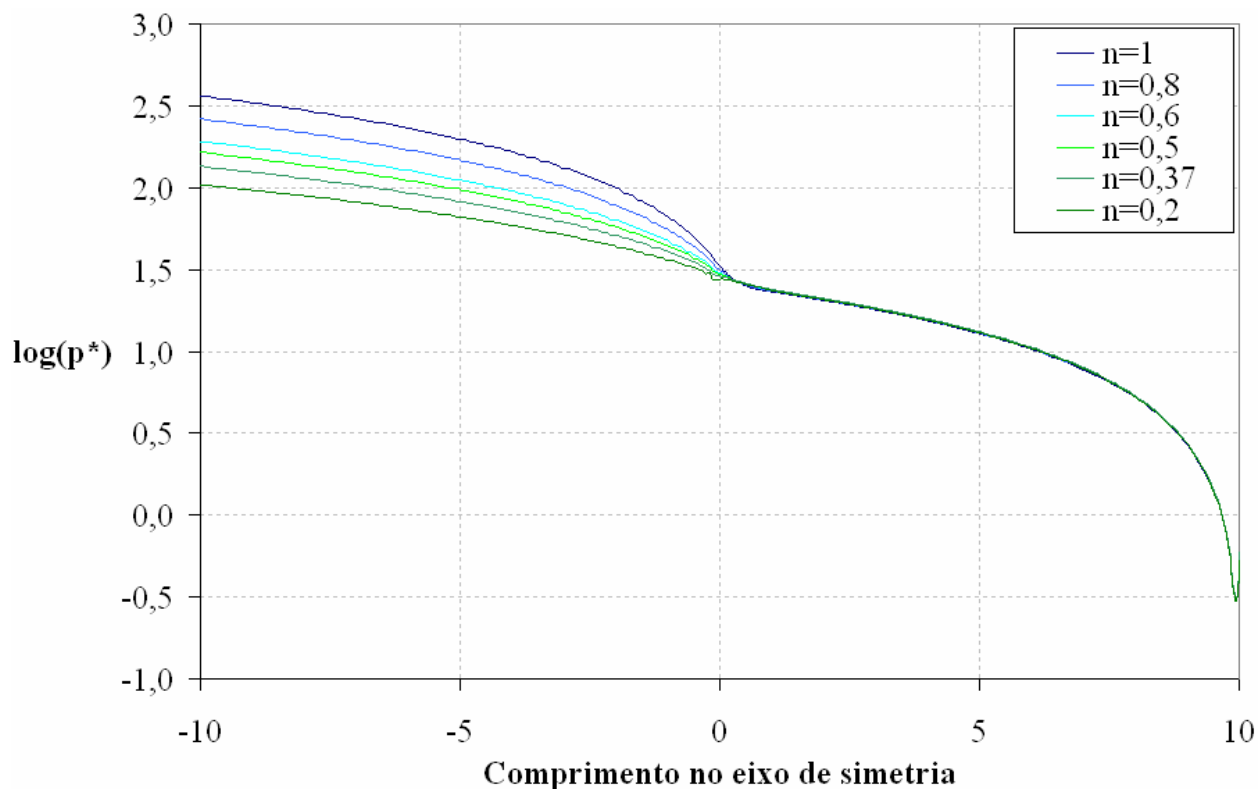


Figura 5.19 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - queda de pressão ao longo da linha de simetria,  $Re=0$ ,  $Hb=0,1$  e 9.590 elementos Q1/Q1.

Finalmente, na Figura 5.20, analisa-se o perfil de velocidade axial no plano de expansão 1:2 em  $x_1=0$ , para uma situação sem inércia, índice de consistência  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e um valor fixo do número de Herschel-Bulkley,  $Hb=0,1$  parametrizadas por diferentes valores do coeficiente *power-law*,  $n=0,2-1$ . Através da análise da Figura 5.20 fica evidente que a queda do coeficiente *power-law*  $n$ , tem a função de diminuir a velocidade média dos perfis de velocidade investigados, indo desde do perfil parabólico laminar Newtoniano ( $n=1$ ) até os perfis mais planos para os valores mais baixos de  $n=0,37$  e  $0,2$ . Entretanto, como o número de  $Hb$  adotado na figura foi baixo,  $Hb=0,1$ , não houve formação de expressivas zonas rígidas de *plug flow* ao longo do duto – ver Fig. 5.11. Portanto, os perfis de velocidade apresentados não são tão uniformes - junto à linha de simetria - nem apresentam camadas limites tão severas - junto à parede da expansão – como os perfis ilustrados nas figuras 5.17 e 5.18 – situações nas quais houve grande obstrução *plug flow* do canal.

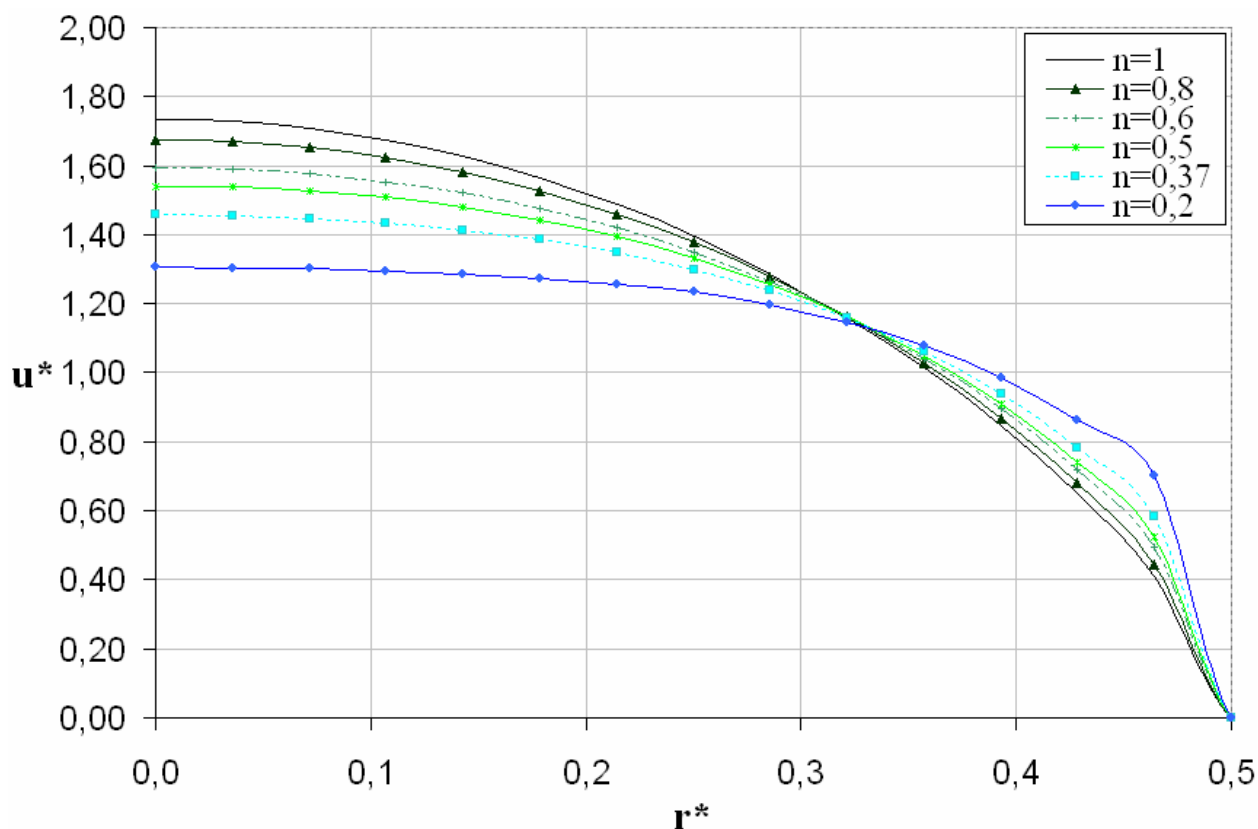


Figura 5.20 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:2 - velocidade axial no plano de expansão, para  $Re=0$ ,  $Hb=0,1$  e 9.590 elementos Q1/Q1.

### 5.2.2 Escoamento Através de Expansões 1:4 Axissimétricas Abruptas

A geometria considerada nesta subseção corresponde a uma expansão axissimétrica abrupta com razão de aspecto 1:4. A descrição do escoamento, dada pelo problema de valor contorno definido pela Eq.(4.5), através da expansão 1:4 é ilustrada na Figura 5.21.

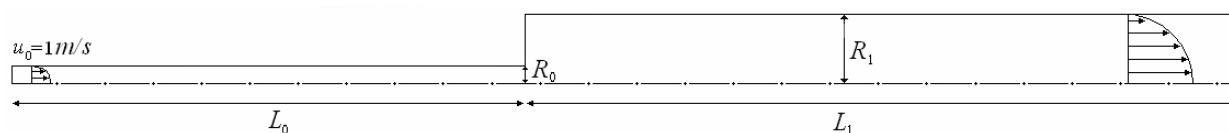


Figura 5.21 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - descrição do problema.

Depois de realizar um processo de refinamento de malha, no qual se empregou quatro malhas distintas, sendo estas: Malha#1 com 2.700 elementos Q1/Q1 e 2.901 pontos nodais; Malha#2 com 15.825 elementos Q1/Q1 e 16.236 pontos nodais, Malha#3 com 19.800 elementos Q1/Q1 e 20.281 pontos nodais e Malha#4 com 21.920 elementos Q1/Q1 e 22.455 pontos nodais.

O procedimento de refinamento de malha teve como meta testar a independência de malha dos resultados obtidos através da queda de pressão adimensionalizada, obtido através do número de Euler Eq.(5.4), ao longo do eixo de simetria do duto, ilustrado na Figura 5.22. Considerou-se a malha ideal, quando a diferença entre os resultados obtidos com essa apresentasse uma queda de pressão espaçando de menos de 3% dos valores gerados pela malha anterior e posterior a ela. Com base nesse critério, o domínio computacional foi discretizado por uma combinação de 15.825 elementos Q1/Q1 e 16.336 pontos nodais, ou seja, foi escolhida a Malha#2.

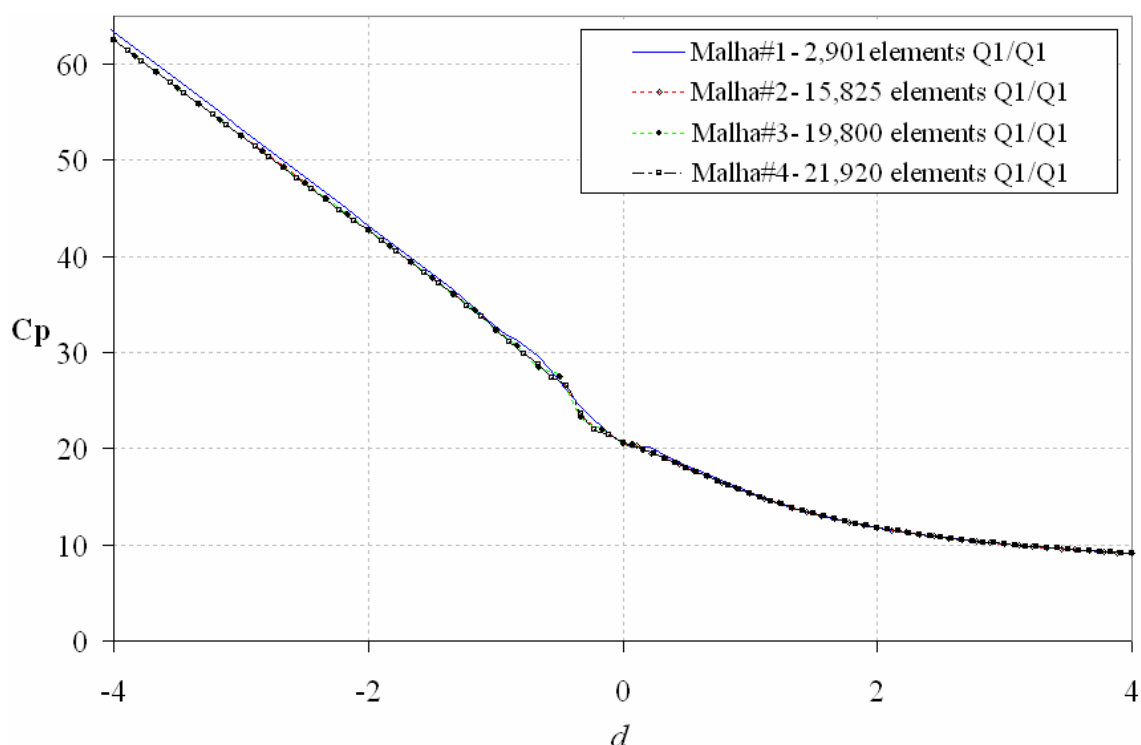


Figura 5.22 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - teste de independência de malha.

A malha utilizada para as simulações está ilustrada na Figura 5.23. Para obter resultados mais precisos para zonas de estagnação e formação do vórtice, a malha é altamente refinada próxima à expansão, Figura 5.24.



Figura 5.23 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - malha selecionada, com 15.825 elementos Q1/Q1 e 16.336 pontos nodais.

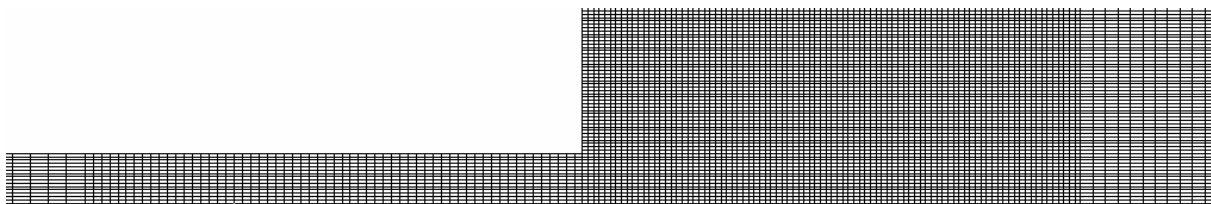
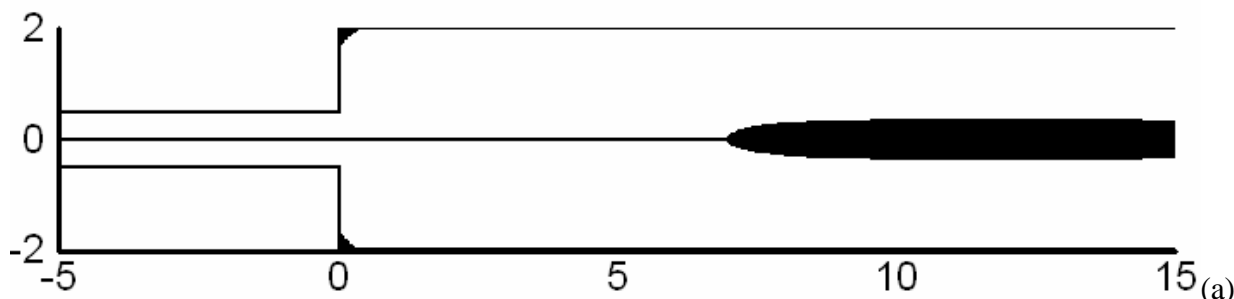


Figura 5.24 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - detalhe da malha selecionada, com 15.825 elementos Q1/Q1 e 16.336 pontos nodais.

Nas próximas figuras são apresentados resultados, encontrados para razão de aspecto 1:4, da variação na dinâmica do escoamento, ao longo do domínio da expansão, com relação à influência do número de Herschel-Bulkley e índice de comportamento *power-law*. Para tal, são apresentados os resultados do campo de tensão de cisalhamento ao longo de toda a expansão. Tendo em vista que os campos de tensão de cisalhamento de tensão já foram investigados e analisados fisicamente para o mesmo escoamento, sujeito a uma razão de aspecto 1:2 (Figs. 5.10 - 5.15) será dado ênfase nos resultados apresentados a seguir apenas na influência da variação de razão de aspecto tem sobre a dinâmica do escoamento estudado.

Apresenta-se na Figura 5.25 as iso-regiões do campo de tensão de cisalhamento - para número de Reynolds desprezível, índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , parâmetro regularizador de Papanastasiou,  $a=10^3$ , expoente *power-law*,  $n=0,37$  e número de Herschel-Bulkley variando de  $Hb=0$  a 100 (Fig. 5.25(a)-Fig. 5.25(f)) - obtidas pela aproximação GLS (Eq.(4.15)-(4.20)) do problema forte definido pelas Eqs.(4.5). Verifica-se nesta figura que o aumento da razão de aspecto aumentou as dimensões das zonas rígidas do escoamento. Isto acontece devido à razão de aspecto 1:4 estar sujeita a menores taxas de deformação e, conseqüentemente, menores tensões de cisalhamento.



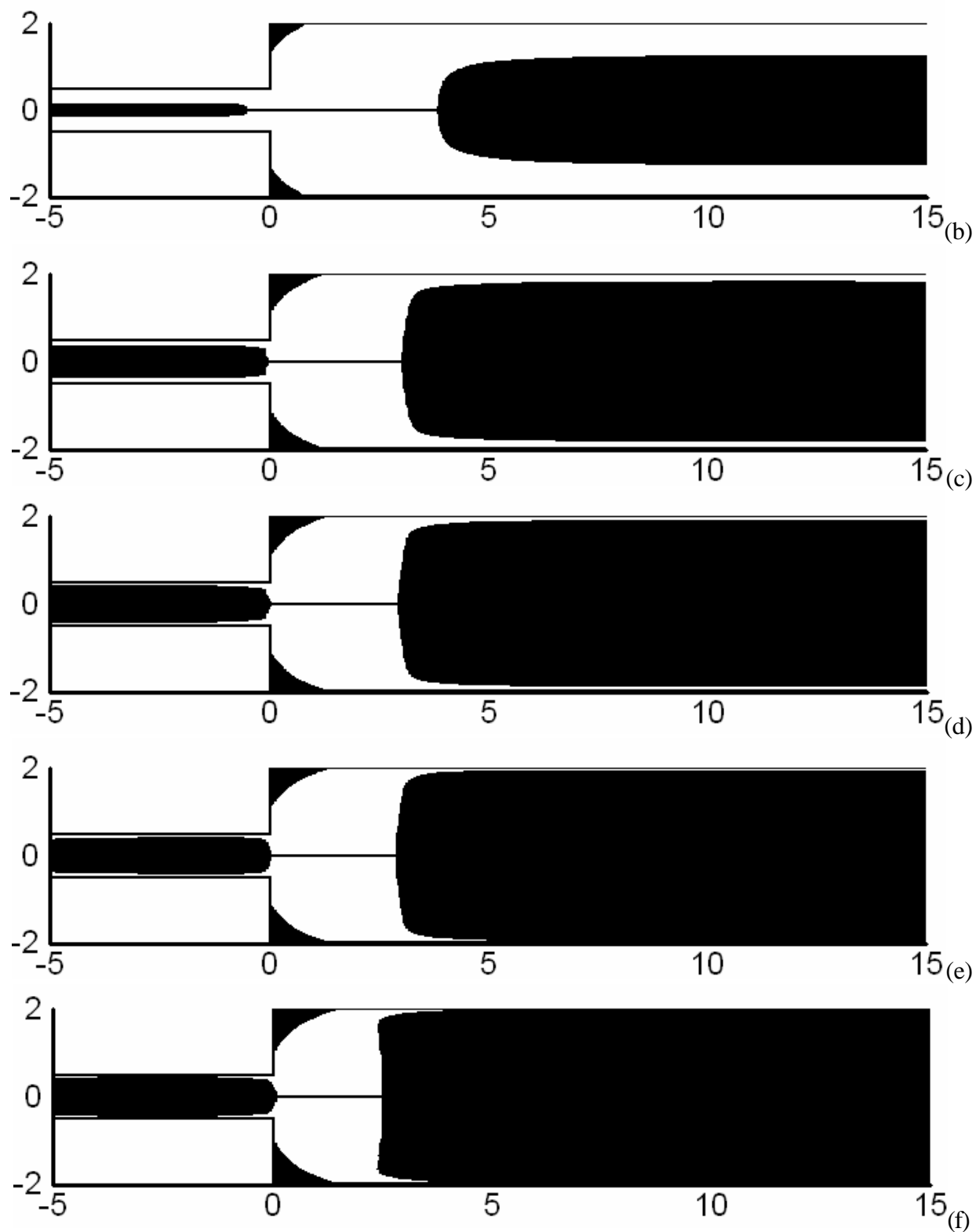
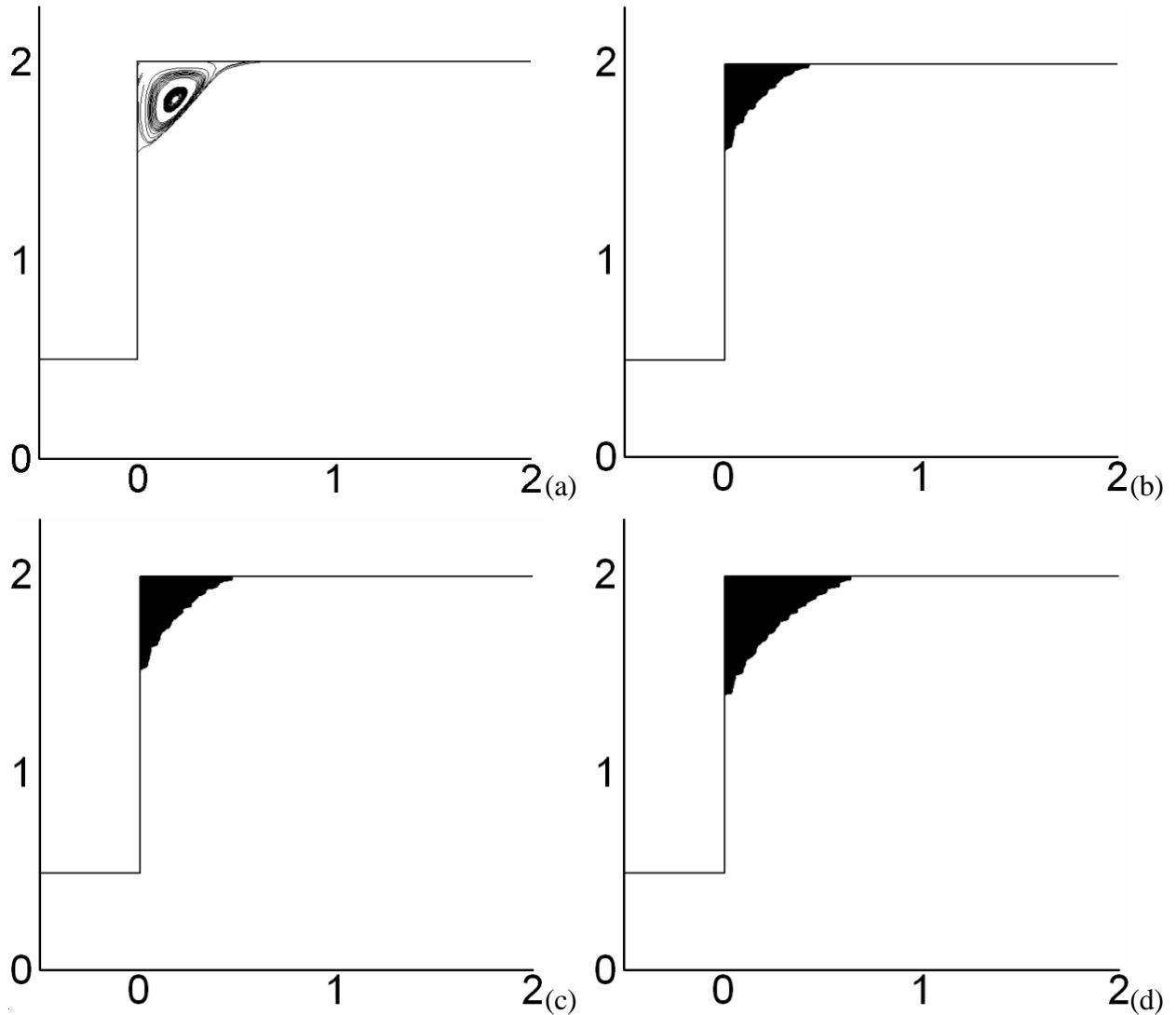


Figura 5.25 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 - iso-regiões de  $t$ , para  $n=0,37$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e  $a=10^3$ : (a)  $H_b=0,1$ , (b)  $H_b=1$ , (c)  $H_b=10$ , (d)  $H_b=20$ , (e)  $H_b=50$  e (f)  $H_b=100$ .

As influências, simultaneamente, do índice *power-law* e do número de Herschel-Bulkley, na quina da expansão são ilustradas com maiores detalhes através das Figuras 5.26 e 5.27, para a



razão de aspecto 1:4. Realizou-se uma comparação do comportamento da dinâmica do escoamento no canto da expansão, utilizando-se índices *power-law* igual a  $n=0,8$  (Fig. 5.26) e  $n=0,37$  (Fig. 5.27), para  $a=10^3$ , número de Reynolds desprezível e número Herschel-Bulkley variando de  $H_b=0$  a  $H_b=0,1$ . Conforme se observa na comparação das Figuras 5.26 e 5.27 com as Figuras 5.12 e 5.13, respectivamente a resposta à influência da variação de  $H_b$  é mais pronunciada para a razão de aspecto 1:4.



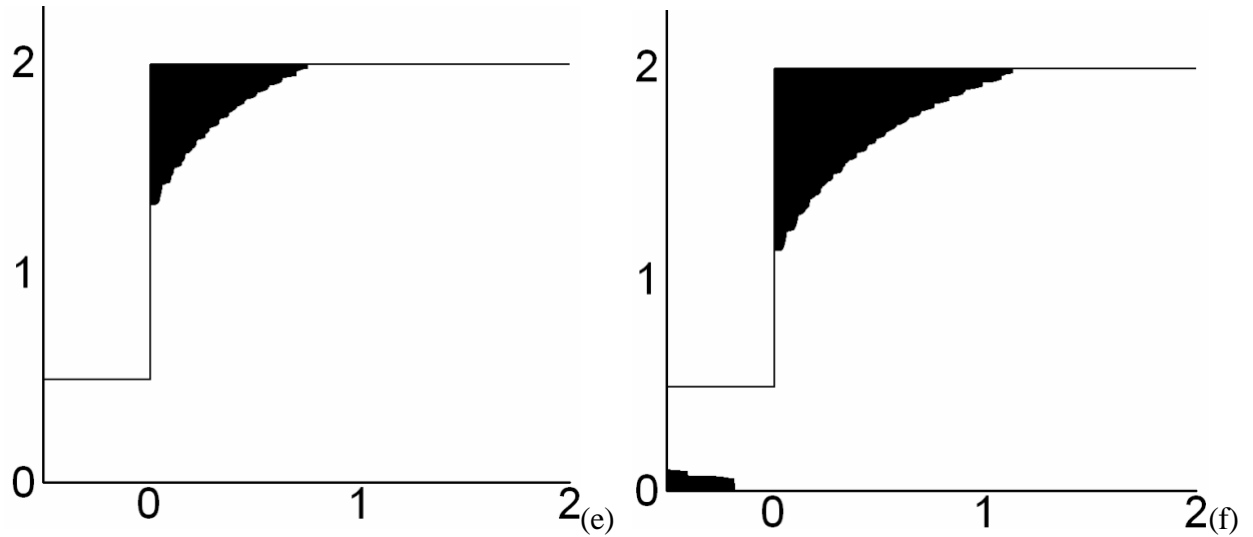
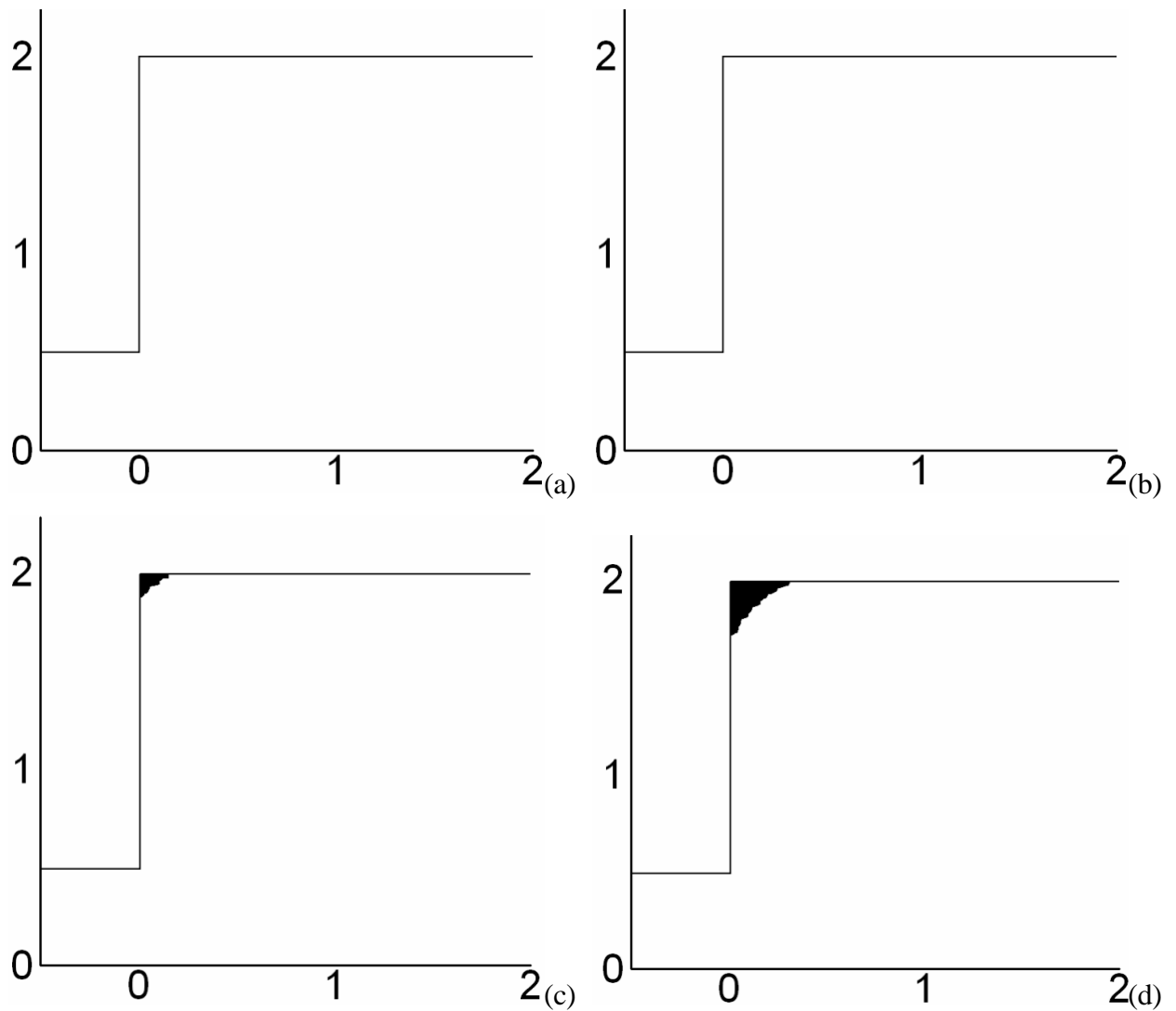


Figura 5.26 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – influências da pseudoplasticidade e do número de Hb na quina da expansão,  $n=0,8$  e  $a=10^3$ :(a)  $Hb=0$ , (b)  $Hb=0,005$ , (c)  $Hb=0,01$ , (d)  $Hb=0,05$ , (e)  $Hb=0,1$  e (f)  $Hb=1$ .



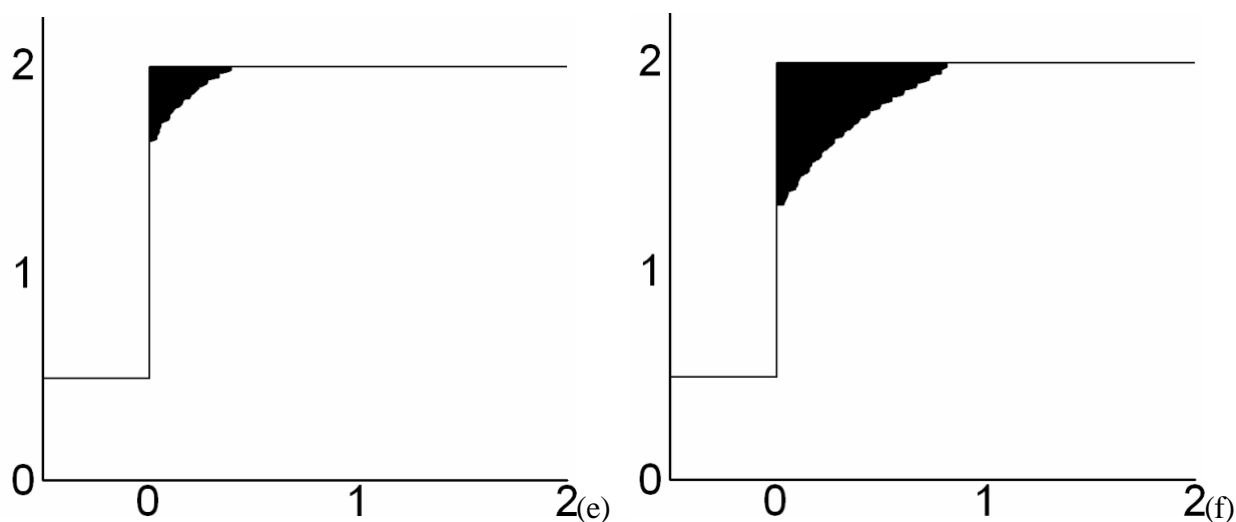


Figura 5.27 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – influências da pseudoplasticidade e do número de Hb na quina da expansão,  $n=0,37$  e  $\mathbf{a}=10^3$ : (a)  $Hb=0$ , (b)  $Hb=0,005$ , (c)  $Hb=0,01$ , (d)  $Hb=0,05$ , (e)  $Hb=0,1$  e (f)  $Hb=1$ .

Na Figura 5.28 é apresentado uma comparação dos resultados obtidos nesta Dissertação com os resultados obtidos por Jay et al.(2001), para o caso da expansão 1:4 axissimétrica abrupta, para o índice de comportamento,  $n=1$ , parâmetro regularizador,  $\mathbf{a}=10^3$ , índice de consistência  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , número de Re desprezível e  $Hb=1$  e  $Hb=10$  (Fig. 5.28(a) e 5.28(b), respectivamente). A concordância nas superfícies de *plug flow* no duto menor e nas superfícies rígidas estagnadas no canto da expansão foi excelente. Ainda, foi alcançada uma boa concordância na região de *plug flow* no duto de maior diâmetro, para a situação mais viscoplástica  $Hb=10$  (Fig. 5.28(b)). Para a situação menos viscoplástica,  $Hb=1$  (Fig. 5.28(a)), a concordância da forma da região do duto maior é ainda muito boa, apresentando apenas uma discrepância na distância da região rígida ao plano de expansão. Vale salientar que Jay et al. (2001) realizam suas simulações utilizando o *software* FLUENTE, empregando o modelo de Herschel-Bulkley regularizado pela equação da bi-viscosidade, com o índice de consistência,  $K=1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , índice de comportamento,  $n=1$  e uma malha com 7.123 pontos nodais.

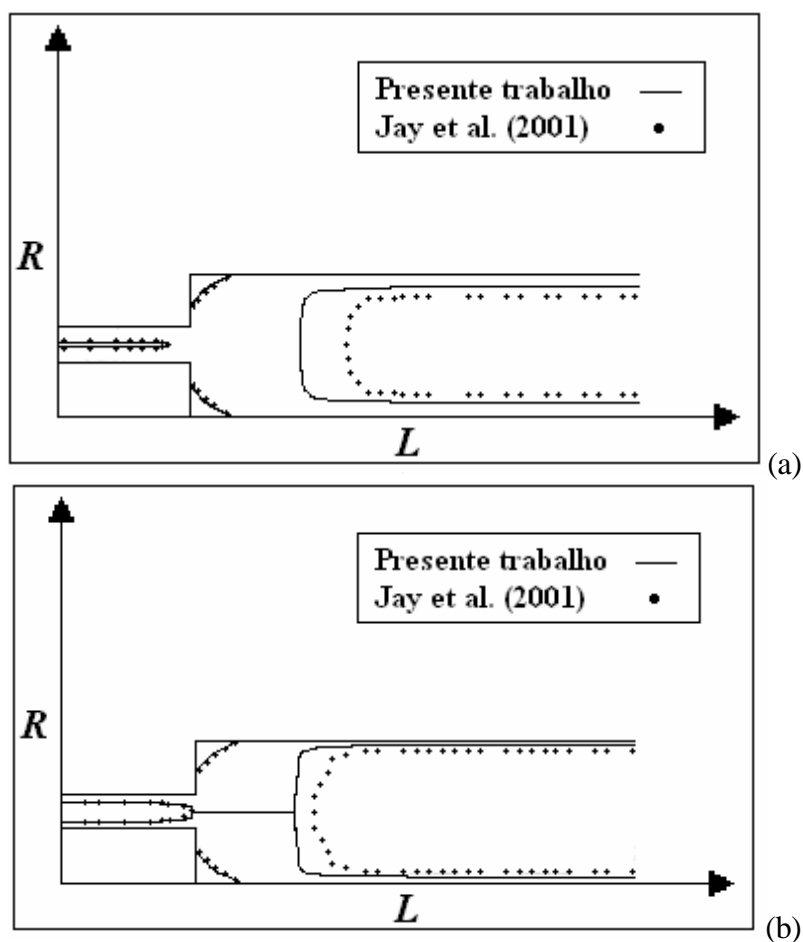


Figura 5.28 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – comparação com os resultados obtidos por Jay et al. (2001), para  $n=1$  e  $a=10^3$ : (a)  $H_b=1$ , (b)  $H_b=10$ .

Na Figura 5.29 são apresentadas as quedas de pressão adimensionalizadas, dadas pela Eq.(5.4) ao longo da expansão 1:4. Verificaram-se os coeficientes de pressão ao longo da linha de simetria, para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e número de Herschel-Bulkley variando,  $H_b=0-100$ , em escala semi logorítma (Fig. 5.29). Tendo em vista o valor do coeficiente *power-law* escolhido ser baixo ( $n=0,37$ ), constata-se que tanto o comportamento como os níveis das quedas de pressão para a razão de aspecto 1:4 são similares aos apresentados na Figura 5.16, para razão de aspecto 1:2.

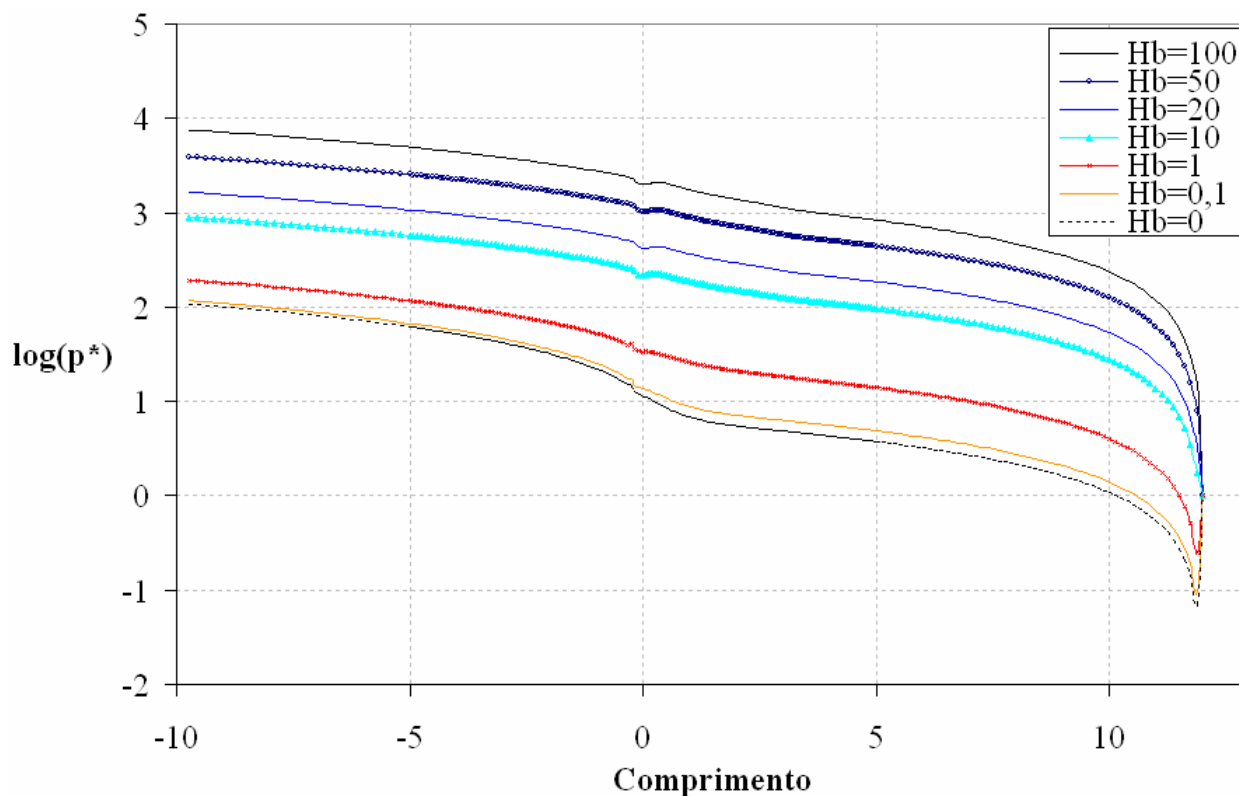


Figura 5.29 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para  $Re=0$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n=0,37$  e 15.825 elementos Q1/Q1.

Nas Figuras 5.30 e 5.31 são apresentados os perfis de velocidade axial adimensionalizada ( $u^*=u_0/u_1$ ) versus  $r^*=2x_2/D_0$  - no plano da expansão em  $x_1=0$  (Fig. 5.30) e uma região desenvolvida a jusante da expansão em  $x_1=10$  (Fig. 5.31), para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , e número de Herschel-Bulkley variando de  $H_b=0-100$ . Observa-se na Figura 5.31, primeiramente que as velocidades médias de todos os perfis investigados são menores se comparadas aos perfis da Figura 5.18, para a razão de aspecto 1:2. Em seguida, e talvez a observação mais interessante, observa-se que o perfil para  $H_b=1$  apresenta um região de *plug flow* maior que o perfil correspondente da Figura 5.18, indicando assim, que o aumento da razão de aspecto aumento as dimensões das zonas rígidas do duto. Finalmente, observa-se que as oscilações nas borda das camadas limites, para as situações mais viscoplásticas  $H_b=20-100$  foram atenuadas com o aumento da razão de aspecto.

Já para o perfil tomado no plano da expansão Figura 5.30 apresenta quase nenhuma diferença aos perfis da Figura 5.17 para razão de aspecto 1:2, pois sua localização é muito pouco afetada pela alteração de razão de aspecto do canal.

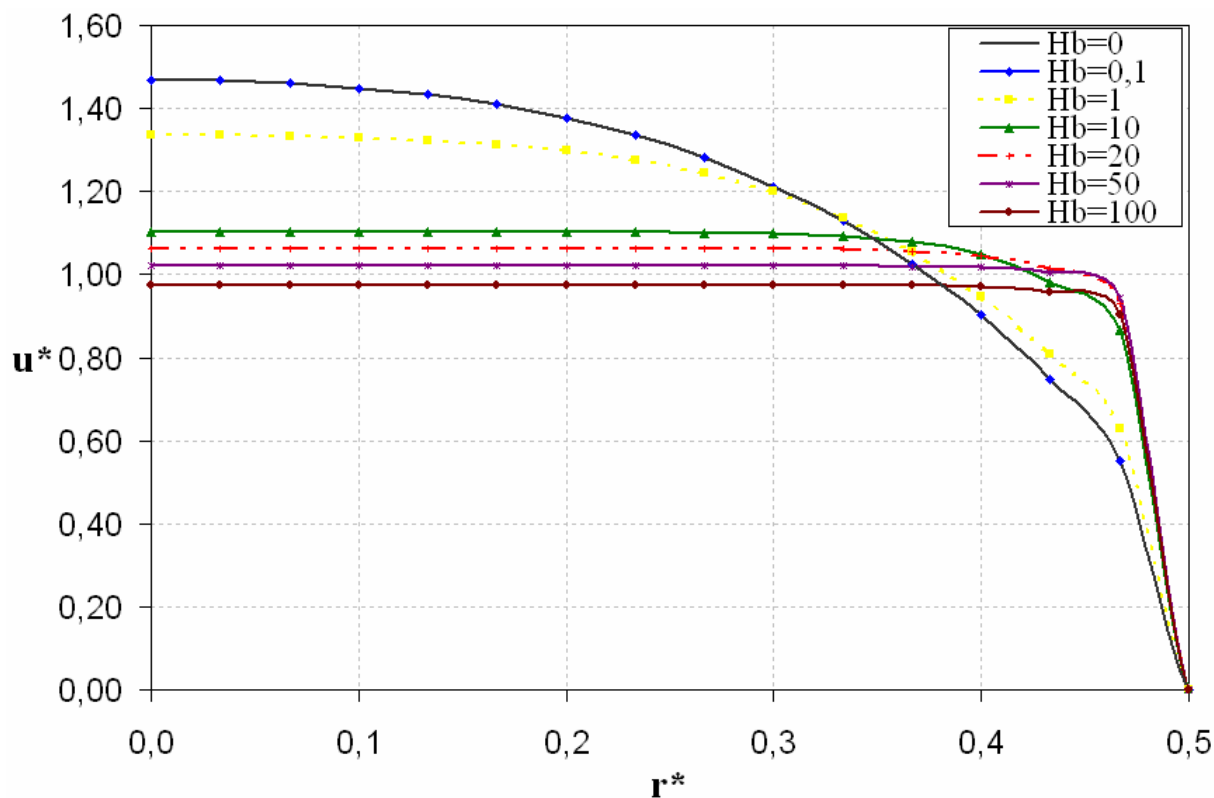


Figura 5.30 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – velocidades axiais no plano de expansão, para  $Re=0$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n=0,37$  e 15.825 elementos Q1/Q1.

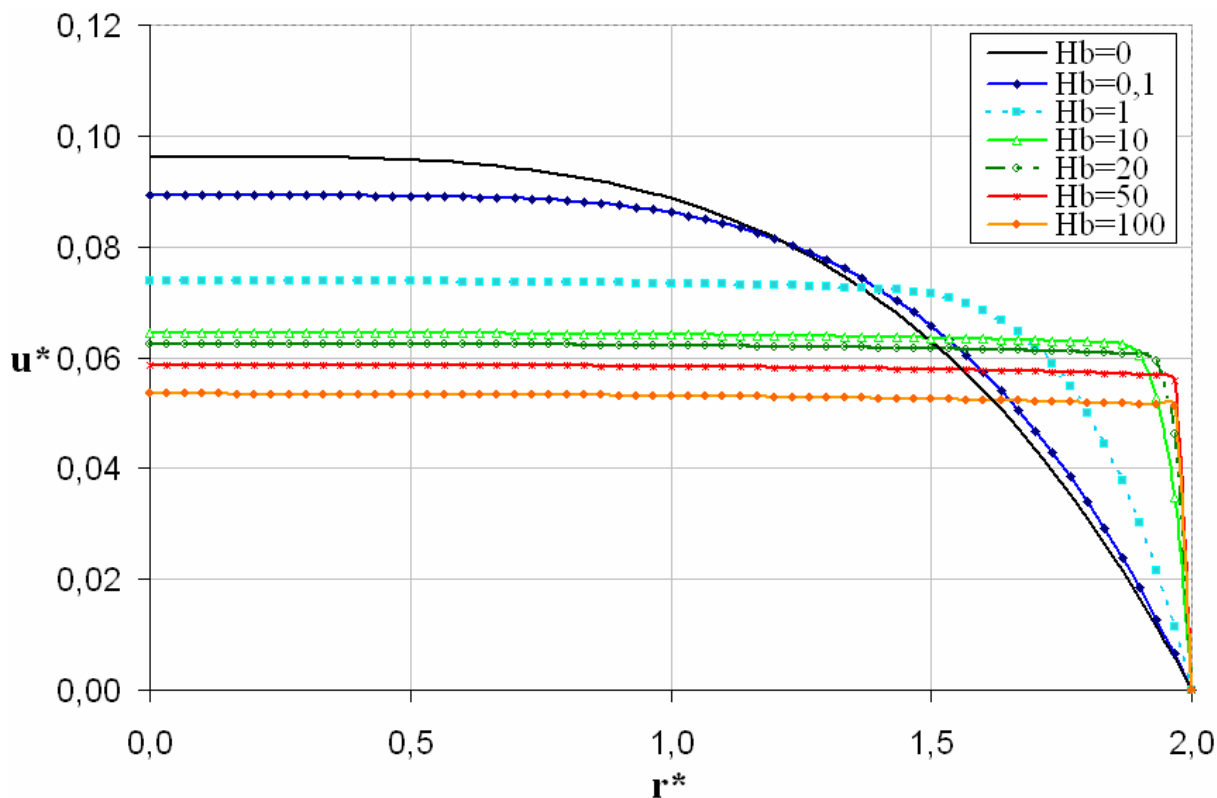


Figura 5.31 Escoamento através de uma expansão axissimétrica 1:4 – velocidades axiais para  $x_1=10$ , para  $n=0,37$ ,  $Re=0$ ,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  e 15.825 elementos Q1/Q1.

Finalmente, a Figura 5.32, têm como objetivo analisar conjuntamente as variações que a razão de aspecto pode ter sobre escoamentos de fluidos de Herschel-Bulkley através de expansões axissimétricas abruptas. Para isso, será analisada a queda de pressão ao longo do eixo de simetria das expansões de razão de aspecto 1:2 e 1:4. Com o auxílio da Figura 5.32, analisa-se a queda de pressão, obtido através do número de Euler Eq.(5.4), ao longo do eixo de simetria, para expansões de razão de aspecto 1:2 e 1:4, coeficiente *power-law*,  $n=0,37$ , índice de consistência,  $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ , com  $Re$  desprezível, para valor de  $H_b=10$ , simulando um fluido com alta tensão limite de escoamento. Como uma primeira observação (Fig. 5.32), verifica-se a queda linear do coeficiente de pressão a montante do degrau, seguida de uma depressão na região das expansões. Posteriormente, a jusante das expansões ocorre a recuperação da pressão quando a velocidade se estabiliza em um perfil mais lento, o escoamento volta a ser desenvolvido e a queda do coeficiente de pressão volta a ser linear. Devido, a maior formação de regiões de movimento de corpo rígido para razão de aspecto 1:4, seus níveis de pressão no duto de maior diâmetro e mais elevado– conforme vem sendo observado nas figuras anteriores.

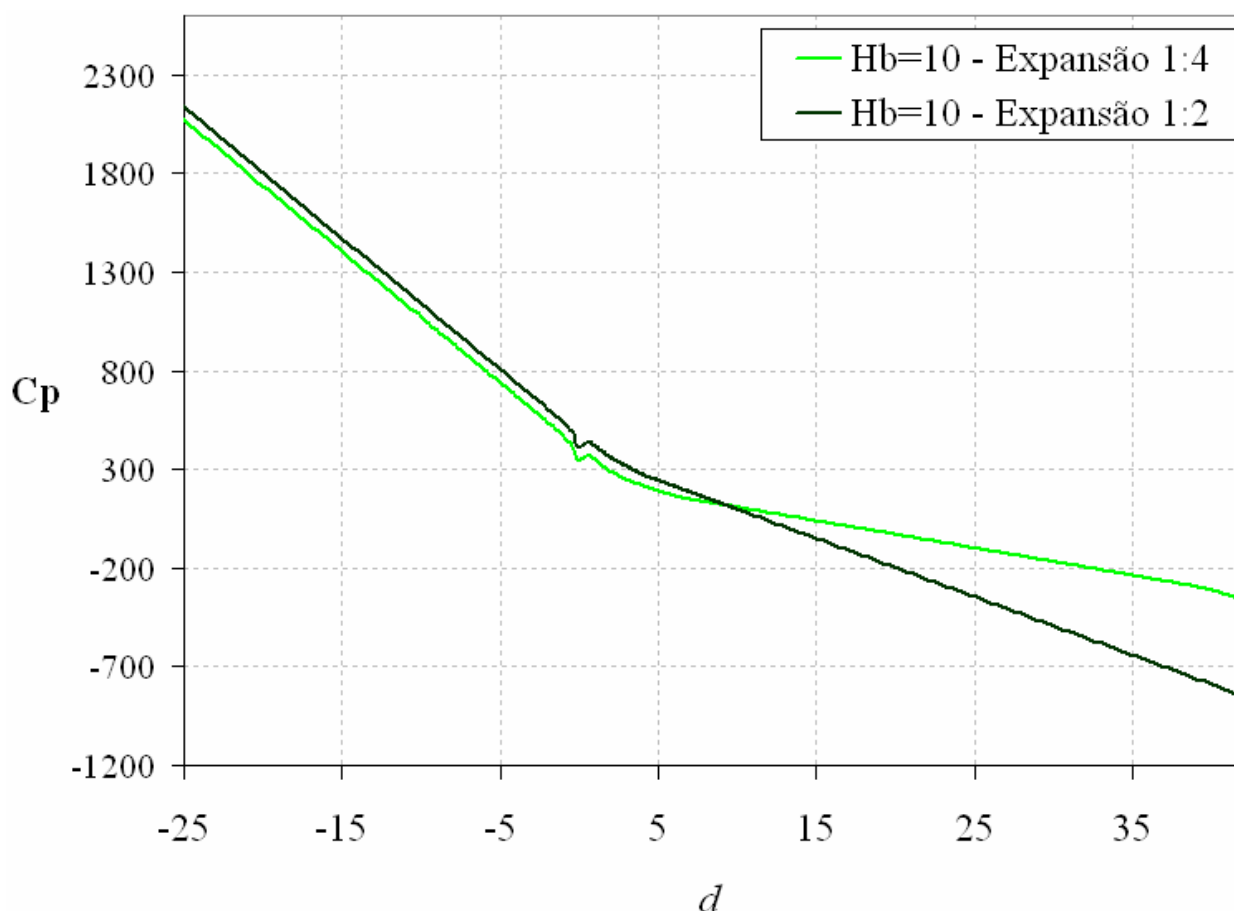


Figura 5.32 Comparação entre a queda de pressão ao longo da linha de simetria das para expansões de razão de aspecto 1:2 e 1:4,  $H_b=10$ , para  $Re$  desprezível e  $n=0,37$ .

## 6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta Dissertação objetivou a aproximação numérica, via metodologia de elementos finitos de Galerkin Mínimos-Quadrados, de escoamentos isocóricos de um fluido de Herschel-Bulkley através de expansões axissimétrica abruptas.

O Capítulo 1 desta Dissertação introduziu os princípios das equações básicas da Mecânica dos Fluidos, a diferenciação do comportamento de um fluido Newtoniano de um não-Newtoniano, os princípios da aproximação de elementos finitos, suas dificuldades quando da aproximação de problemas de escoamentos de fluidos, a alternativa ao método clássico de Galerkin, empregada nesta Dissertação – a metodologia de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) – e, por fim, uma revisão de alguns artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplásticos.

No Capítulo 2 são introduzidas as equações de conservação de massa e momentum, as quais formam o modelo mecânico a ser utilizado nesta Dissertação. Inicialmente, essas equações são expressas em termos de fluxo de massa e momentum, gerando, assim, as equações da continuidade e movimento, respectivamente. Em seguida, com o acoplamento do tensor tensão com a cinemática do escoamento através do tensor taxa de deformação, as equações de conservação são rescritas em função das variáveis primais usuais para escoamentos isocóricos Newtonianos, a saber, velocidade e pressão.

No Capítulo 3, destinado ao comportamento material dos fluidos puramente viscosos, é analisada a relação do tensor tensão com o tensor taxa de deformação para os chamados fluidos Newtonianos generalizados. Estes modelos empíricos, através da generalização da viscosidade Newtoniana de modo a permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento, criam, assim, o conceito de viscosidade aparente. Por fim, são introduzidas correlações empíricas para a função viscosidade aparente: a função viscosidade *power-law* de Ostwald de Waele, a função de viscosidade de Ellis, a função de viscosidade de Bingham, o modelo de Herschel-Bulkley e a função viscosidade de Herschel-Bulkley Regularizado pela Equação de Papanastasiou – a ser utilizada nos testes numéricos desta Dissertação.

No Capítulo 4, a aproximação numérica do modelo mecânico introduzidos nos Capítulo 2 e Capítulo 3, é realizada através da utilização do método de Galerkin mínimos-quadrados (GLS). A partir da definição dos sub-espacos de elementos finitos do campo de velocidade e pressão, introduz-se a formulação GLS através da adição à formulação de Galerkin clássica, de termos estabilizados, funções do comprimento de malha empregado. Por serem introduzidos na forma



residual, à solução exata - ou soluções aproximadas obtidas a partir de malhas muito refinadas – anula estes termos, deixando, assim, a formulação GLS consistente. Por fim, foram realizados alguns testes computacionais do problema da cavidade forçada para o escoamento não-inercial de um fluido Newtoniano, com a finalidade de demonstrar as dificuldades que o método de Galerkin clássico enfrenta na aproximação de escoamentos de fluidos, como também da melhora de sua estabilidade introduzida pelos termos mínimos quadrados acrescentados à formulação de Galerkin mínimos-quadrados.

O Capítulo 5 é dedicado à análise dos resultados numéricos obtidos nesta Dissertação. Inicialmente, a implementação da formulação GLS é validada para o problema do degrau de expansão, com o comprimento de recolamento da recirculação e os perfis de velocidades horizontais,  $u_1$ , adimensionalizadas em relação à velocidade de entrada, obtidos em três diferentes seções a jusante do degrau, apresentando ótima concordância com a literatura. Em seguida, são realizadas as aproximações GLS dos escoamentos isocóricos de um fluido viscoplásticos de Herschel-Bulkley através de expansões axissimétricas abruptas de razão de aspecto 1:2 e 1:4. Os resultados na dinâmica do escoamento, com relação à influência do número de Herschel-Bulkley, índice de comportamento *power-law* e razão de aspecto para os campos de tensão de cisalhamento, pressão e velocidade ao longo de toda a expansão mostrando-se fisicamente realistas e concordantes com a literatura.

## 6.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Sobre os comentários tecidos no Capítulo 5, podem-se destacar os seguintes tópicos:

- A formulação de GLS se mostrou bastante estável tanto na aproximação de escoamentos de fluidos não-Newtonianos viscoplásticos, caracterizado pela dependência da viscosidade em relação à taxa de cisalhamento e pela tensão limite de escoamento, quanto na aproximação de escoamentos de fluidos Newtonianos.
- Considerando-se os resultados obtidos na aproximação de escoamentos de fluidos Newtonianos, verificou-se que os resultados obtidos nessa Dissertação possuem uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura, tanto para o valor da distância de recolamento, como para os perfis de velocidade horizontais máximas e mínimas.
- Para o mesmo índice de comportamento, ou índice *power-law*, as zonas rígidas se apresentaram maiores para fluidos com tensão limite de escoamento mais elevada.

- Para o mesmo número de Herschel-Bulkley, os fluidos mais pseudoplásticos apresentaram zonas rígidas menores.
- Os fluidos mais viscoplásticos causam quedas de pressão mais acentuada, devido a maior formação de regiões de movimento de corpo rígido, ou *plug flow*.
- O campo de pressão obtido confirmou que os comprimentos dos dutos de maior e menor diâmetro foram suficientes para desenvolver hidrodinamicamente o escoamento.
- Os fluidos mais pseudoplásticos causam menores quedas de pressão devido à pequena formação de regiões de movimento de corpo rígido, ou *plug flow*.
- Os níveis das quedas de pressão ao longo da expansão diminuem, sensivelmente, com o aumento da pseudoplasticidade do fluido, visto que a perda de carga do escoamento diminui para um  $H_b$  fixo e a diminuição de  $n$ .
- O campo de velocidades no plano e em uma região desenvolvida a jusante da expansão, para um  $n$  fixo, foi fortemente influenciado pelo aumento de  $H_b$ , causando severas camadas limites de velocidade próximo as paredes da expansão.
- Para o mesmo número de Herschel-Bulkley e índice de comportamento, ou expoente *power-law*, a resposta à influência da formação de zonas rígidas, em relação à variação da razão de aspecto, mostraram-se mais pronunciada para a razão de aspecto 1:4.

## 6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras para a continuação das simulações e análises desenvolvidas nesta Dissertação, poder-se-ia propor:

- introduzir o termo de inércia nas simulações dessa Dissertação;
- calcular o coeficiente de perda de carga localizada devido à expansão;
- realizar simulações Multicampos GLS nos campos de tensão de cisalhamento, pressão e velocidade, **t-p-u**;
- introduzir técnicas de *shock-capture* para eliminar as oscilações localizadas (*overshoot* ou *undershoot*) apresentando nas bordas das camada limites.
- visualização do escoamento através da iluminação a laser de uma expansão 1:4 de acrílico, através da qual escoa uma solução aquosa diluída de Carbopol, visando a validação experimental dos resultados.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexandrou, A. N., McGilvray, T. M., and Burgos, G., 2001. "Steady Herschel-Bulkley fluid in tree-dimensional expansions", **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 100, pp. 77-96.

Barnes, H. A., Roberts, G. P., and Carew, P., 2001. "Modelling the flow behaviour of very shear-thinning liquids", **Chemical Engineering Science**, vol. 56, pp 5617-5623.

Bird, R. B. Armstrong, R. C. Hassager, O., 1987, "Dynamics of polymeric liquids". v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

Brooks, A.N., Hughes, T.J.R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 199-259.

Burgos, G., Alexandrou, A. N., and Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids", **J. of Rheology**, vol. 43 (3), pp. 463-483.

Ciarlet, P.G., 1978. "The Finite Element Method for Elliptic Problems". North-Holland, Amsterdam, pp. 530.

Coronado, M. J., Arora, D., Behr and M., Pasquali, M., 2006. "Four-field Galerkin/Least-squares formulation for viscoelastic fluids", **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 140, pp. 132-144.

Galeão, A. C., do Carmo E. G. D., 1988. "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-Dominated problems", **Comput. Methods Appl.**, vol. 68, pp. 83-95.

Evan Mitsoulis e R. R. Huilgol, 2004."Entry flows of Bingham plastics in expansions" **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 122, pp. 45-54.

Ferguson, J., and Kemblowsky, Z., 1991. "Applied Fluid Rheology" Elsevier Applied Science, London.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1988. "Two classes of mixed finite element methods", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1993. "Convergence Analyses Of Galerkin Least-Squares Methods For Symmetrical Advective Diffusive Forms Of The Stokes And Incompressible Navier-Stokes Equations". **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 2, pp. 285-298.

Franca, L.P., Frey, S., and Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 95, pp. 253-276.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003a. "Finite element approximation for single-phase multicomponent flows", **Mechanics Research Communications**, USA.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Hughes, T.J.R., 1987. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Johnson, C., Nävert, U., and Pitkäranta, J., 1984. "Finite element methods for linear hyperbolic problem", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 45, pp. 285-312.

Macedo, A. P., 1995. "Aplicação de métodos de elementos finitos totalmente estabilizados – GLS – à simulações numéricas de escoamentos laminares e turbulentos", Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, Brasília.

Machado, J. C. V., 2002. "Reologia e Escoamento de Fluidos: ênfase na indústria de petróleo". Editora Interciência, Rio de Janeiro.

Morgan, K., Periaux, J. e Thomasset, F., 1982. "Analysis of Laminar Flow over a Backwaed Facing Step". GAMM workshop, Friedr. Vieweg & Sohn.

Neofytou, P, 2005. "A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 36, pp. 664-680.

Papanastasiou, T. C., 1987. "Flows of Materials with Yield", **J. of Rheology**, vol. 31 (5), pp. 385-404.

Pascal, J., Magnin, A., and Piau, J. M., 2001. "Viscoplastic Fluid Flow Through a Sudden Axisymmetric Expansion", **AIChE Journal**, vol. 47, pp. 2155-2166.

Patankar, S.V, 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York. 'momentum transfer in three-dimensional parabolic flows', **International Journal of heat transfer and mass transfer**, vol.15, pp. 1787-1806.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**", CRC Press Inc., USA.

Ruas, V., Carneiro de Araujo, J. H., Silva Ramos, M. A. M., 2004. “**Multi-field finite element method with discontinuous pressures for axisymmetric incompressible flow**”, *Jornal of Computational and Applied Mathematics*; vol. 168, pp. 393-402.

Scott, P. S., and Mirza, F., 1988. “Laminar Viscoplastic Flows with Regions of Recirculation”, *J. of Rheology*, vol. 32 (4), pp. 387-400.

Slattery, J.C., 1999. “**Advanced transport phenomena**”, Cambridge University Press, Cambridge.

Schramm, G., 2006. “**Reologia e Reometria – Fundamensto Teóricos e Práticos**”, Artliber Editora Ltda, Alemamha.

Souza Mendes, P. R., Naccache, M. F., Vargas, P. R., and Marchesini, F. H., 2007. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions - contractions”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 142, pp. 207-217.

Souza Mendes, P. R., and Dutra, E. S. S., 2004. “Viscosity Function for Yield-Stress Liquids”, *Applied Rheology*, vol. 14, pp. 296-302.

Zinani, F.; Frey, S., 2006. “Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids”. *Journal of Fluids Engineering* - Transactions of the Asme, Estados Unidos, v. 128, n. 4, p. 856-863.