UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Caracterização das Superfícies de Curvatura Média Constante de Bordo Planar Convexo

Dissertação de Mestrado

Marcelo Maximiliano Danesi

Porto Alegre, 9 de Outubro de 2007.

Dissertação submetida por Marcelo Maximiliano Danesi[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPGMat-UFRGS)
Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat-UFRGS)
Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat-UFRGS)
Dra. Nedir do Espírito Santo (UFRJ)

Data Da Defesa: 09 de Outubro de 2007.

[1]Parcialmente apoiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

"Milhares de velas podem ser acesas por uma única sem que essa seja enfraquecida. Felicidade não diminui por ser compartilhada."

— Siddhartha Gautama (563 AC - 483 AC)

Agradecimentos

Aos meus pais, pois sem a ajuda deles eu, decididamente, não teria chegado até aqui.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e meu orientador Jaime Ripoll por ter me dado esta oportunidade.

Gostaria, também, de expressar minha enorme gratidão à secretária do Programa, Rosane Reginatto, por todo tempo dedicado a resolver os problemas dos alunos; sempre com enorme atenção e eficiência.

Às minhas colegas da pós-graduação, em especial à Cinthya Schneider, Isabel Bonow, Dite Taufer e Thaísa Tamusiunas mais que colegas, minhas grandes amigas.

Ao Burger e ao Sergio, in memoriam.

Obrigado!

Resumo

Nesse trabalho, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema. *Dados $H \geqslant 0$ e $\gamma \subset P := \partial \mathbb{R}^3_+$ uma curva suave fechada e bordo de um domínio limitado. Seja M uma superfície compacta de curvatura média constante H mergulhada em $\mathbb{R}^3_+$ tal que $\gamma = \partial M$ e denote por k e k_g as curvaturas geodésicas de γ em P e em M respectivamente. Então a desigualdade*

$$H \leqslant \min |k| \sqrt{1 - \max \left(\frac{k_g}{k} \right)^2}$$

vale se e somente se M está contida numa esfera ou em P.

Abstract

In this work we prove the following result.

Theorem. *Given* $H \geqslant 0$ *and* $\gamma \subset P := \partial \mathbb{R}^3_+$ *a closed smooth curve, boundary of a domain, let be* M *a compact embedded surface of constant mean curvature* H *in* $\mathbb{R}^3_+$ *such as* $\gamma = \partial M$*. Then the inequality*

$$H \leqslant \min |k| \sqrt{1 - \max \left(\frac{k_g}{k} \right)^2}$$

holds if and only if M *is a cap sphere or a domain in* P*, where* k *and* k_g *are the geodesic curvatures of* γ *in* P *and on the surface* M*, respectively.*

Sumário

Introdução

F. Brito, R. Earp, W. Meeks e H. Rosenberg, em [2], apresentaram a conjectura que se M é uma superfície de curvatura média constante mergulhada em $\{z \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^3$, cuja fronteira é uma curva convexa no plano $z = 0$, então M tem genus zero.

A. Ros e H. Rosenberg, em [10], com as mesmas hipóteses, provaram a existência de um valor $\mathcal{O}(\min k; \max k)$ dependendo apenas dos valores extremos da curvatura, $\min k$ e $\max k$, tal que se $H \leqslant \mathcal{O}(\min k; \max k)$, então a conjectura é verdadeira. Até o presente momento não foi obtida nenhuma fórmula explícita de $\mathcal{O}(\min k; \max k)$.

P. A. Hinojosa, em [7], com as mesmas hipóteses, provou que se M é ortogonal ao plano $z = 0$ então M é uma hemisfera de raio $\frac{1}{|H|}$.

Esta dissertação é baseada em [9] e tem por objetivo aplicar alguns resultados fundamentais da Geometria Diferencial e da teoria das Equações Diferenciais Parciais Elípticas, como o Método da Reflexão de Alexandrov, o Princípio do Máximo e o Método de Perron na demonstração do seguinte teorema.

Teorema. *Dados $H \geqslant 0$ e $\gamma \subset P := \partial\mathbb{R}^3_+$ uma curva suave fechada e bordo de um domínio limitado. Seja M uma superfície compacta de curvatura média constante H mergulhada em $\mathbb{R}^3_+$ tal que $\gamma = \partial M$ e denote por k e k_g as curvaturas geodésicas de γ em P e em M respectivamente. Então a desigualdade*

$$H \leqslant \min|k|\sqrt{1 - \max\left(\frac{k_g}{k}\right)^2}$$

vale se e somente se M está contida numa esfera ou em P.

Observe que o Teorema não dá uma fórmula para $\mathcal{O}(\min k; \max k)$, uma vez que a curvatura geodésica k_g depende também da superfície M.

Vale mencionar também o exemplo do semi-cilindro circular de CMC $H > 0$ ortogonal à P e interceptando P num círculo γ. Em cima da curva γ vale que

$$H = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\min|k|\sqrt{1 - \max\left(\frac{k_g}{k}\right)^2}.$$

Isso mostra que a hipótese de compacta não poderia ser substituída por completa, por exemplo, e que existem superfícies de CMC que satisfazem a desigualdade sem que essas sejam calotas esféricas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições

Definição 1.1 (Domínio Suave)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio suave se Ω é um aberto limitado conexo cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma variedade unidimensional de classe C^∞ mergulhada em $\mathbb{R}^2$.

Nesse trabalho, a menos que se avise o contrário, Ω é sempre um domínio suave do $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.2 (Curvatura Geodésica de uma curva)**.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, orientável e orientada por um campo normal unitário $N : S \to \mathbb{R}^3$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $\gamma : I \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos a sua curvatura geodésica em $s \in I$ como

$$k_g(s) = \langle \gamma''(s), N(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle.$$

No caso em que S é o plano $z = 0$, usaremos a notação $k(s)$ no lugar de $k_g(s)$.

Definição 1.3 (Classes de Hölder)**.** $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1)$ em Ω se

$$[u]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

E, $C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega)|$ as derivadas de ordem k de u são Hölder contínuas em Ω com expoente α em $\Omega\}$.

1.2 Alguns Fatos e Resultados Importantes

Seja $H \geqslant 0$. O problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante H em um domínio suave Ω do $\mathbb{R}^2$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é o problema de existência e unicidade de soluções do sistema:

$$\begin{cases} Q_H(u) := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + 2H = 0, \; u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde ∇ e div são o gradiente e o divergente usuais do $\mathbb{R}^2$.

Como observação, convém mencionar que se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução de (1.1), então o gráfico S de u, a saber,

$$S = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\},$$

é uma superfície de curvatura média constante H do $\mathbb{R}^3$ com relação ao vetor normal N satisfazendo $\langle N, (0, 0, 1)\rangle \leqslant 0$.

Lema 1.1. *Dados $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ e $p \in \partial\Omega$, se $u(p) = v(p) = 0$, e $0 \leqslant u \leqslant v$, então*

$$|\nabla u(p)| \leqslant |\nabla v(p)|.$$

Prova: Seja η o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ em p apontando para o interior de Ω. Seja a um vetor unitário tal que $\langle a, \eta\rangle \geqslant 0$ e seja $\gamma : [0, l) \to \overline{\Omega}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0^+) = a$. Dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < l$ tal que $\forall\, t \in (0, \delta)$,

$$0 \leqslant \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t} \leqslant \frac{v(\gamma(t)) - v(p)}{t} \leqslant |\nabla v(p)| + \epsilon,$$

de modo que

$$\left|\frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t}\right| \leqslant |\nabla v(p)| + \epsilon.$$

Fazendo $t \to 0$, obtemos

$$\langle \nabla u(p), a\rangle \leqslant |\nabla v(p)| + \epsilon.$$

Logo, $\langle \nabla u(p), a\rangle \leqslant |\nabla v(p)|$, e o resultado segue. □

Teorema 1.1 (Princípio da Comparação)**.** *Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazem $Q_H(u) \geqslant 0$, $Q_H(v) \leqslant 0$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} \geqslant v|_{\partial\Omega}$ então $u \geqslant v$ em $\overline{\Omega}$.*

Teorema 1.2. *Seja Ω um domínio suave, limitado do $\mathbb{R}^2$, e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Suponha que exista M tal que, se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, então*

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leqslant M.$$

Então o problema de Dirichlet (1.1) tem uma e somente uma solução.

Teorema 1.3 (Princípio da Tangência)**.** *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies de curvatura média constante, $p \in S_1 \cap S_2$ um ponto de tangência entre S_1 e S_2 ($T_pS_1 = T_pS_2$) e N_1, N_2 campos unitários e normais a S_1 e S_2 respectivamente e tais que $N_1(p) = N_2(p)$. Suponha que S_1 e S_2 tenham curvaturas médias H_1 e $H_2 \geqslant 0$ respectivamente, com relação aos campos N_1 e N_2. Suponha que S_2 esteja acima de S_1 em uma vizinhança de p com relação ao vetor normal $N_1(p)$. Então $H_2 \geqslant H_1$ e vale $H_2 = H_1$ se, e somente se, existem vizinhanças U_1 e U_2 de p em S_1 e S_2, respectivamente, tais que $U_1 = U_2$. Além disso, se S_1 e S_2 são conexas, $H_1 = H_2$ e completas (ou, completas até o bordo e com o mesmo bordo) então $S_2 = S_1$.*

Uma observação pertinente ao Teorema 1.3 é que o ponto de intersecção das superfícies S_1 e S_2 pode ser um ponto do bordo das superfícies.

Finalmente observamos que estes teoremas decorrem dos métodos e resultados gerais de [5]. Demonstrações particulares para o caso do operador de curvatura média constante podem ser vistas em [1].

1.3 O Método da Reflexão de Alexandrov

Usamos o seguinte fato da topologia das superfícies.

Teorema 1.4 (Jordan-Brouwer)**.** *Se S é uma superfície conexa, compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$ então S divide o $\mathbb{R}^3$ em duas componentes conexas.*

Esse resultado faz parte de um resultado mais geral da Topologia Algébrica que leva o mesmo nome. A demonstração do caso em questão está disponível em [6].

No resto dessa seção, S sempre será uma superfície conexa, compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ é a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^3 \backslash S$.

Lema 1.2. *Se S é uma superfície compacta, mergulhada em $\mathbb{R}^3$ que possui planos de simetria em todas as direções do $\mathbb{R}^3$ então S é uma esfera.*

Demonstração: Sejam P_1, P_2 e P_3 planos de simetria de S mutuamente ortogonais e seja q o seu único ponto de intersecção. Mostraremos que S é invariante por qualquer rotação em q.

Seja P um outro plano de simetria de S. É claro que $q \in P$, caso contrário, dado $u \in S$ e uma composição de reflexões pelos planos P_1, P_2 e P_3 podemos obter, através das sucessivas imagens de u pontos arbitrariamente distantes de q, contrariando a hipótese de compaticidade de S.

Assim S é invariante por reflexões em qualquer plano contendo q, de onde segue a afirmação, logo que qualquer rotação pode ser obtida pela composição de tais reflexões. □

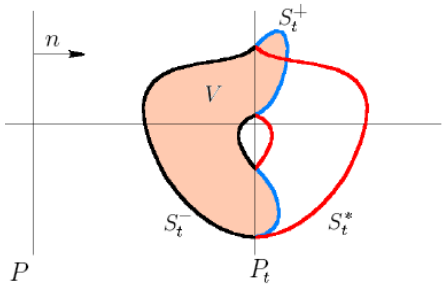
Teorema 1.5 (Alexandrov). *Seja S uma superfície conexa, compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e de curvatura média constante. Então S é uma esfera.*

Demonstração: Apresentamos aqui a idéia fundamental utilizada por Alexandrov. Maiores detalhes da prova podem ser vistas em [8], capítulo VII.

Vamos mostrar que S tem um plano de simetria em qualquer direção do espaço. Sejam P um plano qualquer e n o vetor normal a P. Dado $t \in \mathbb{R}$, seja $T_t : P \to \mathbb{R}^3$ a translação dada por

$$T_t(p) = p + tn.$$

Definimos os planos P_t paralelos a P como a imagem de P por T_t. Sejam V_t^+ e V_t^- os fechos das componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus P_t$ tal que n aponta para V_t^+, $S_t^+ = V_t^+ \cap S$, $S_t^- = V_t^- \cap S$ e S_t^* a reflexão de S_t^- em torno de P_t.



Assim, tomando $\alpha = \inf\{t \in \mathbb{R}; P_t \cap S \neq \varnothing\}$ temos que $P_\alpha = T_{P_\alpha \cap S} S$ e $S \subset V_\alpha^+$. Seja

$$t_0 = \sup\{t > \alpha; S_b^* \subset V, \forall\, \alpha \leqslant b < t\}.$$

É claro que $t_0 < \infty$, pois S é compacta. Mostremos que P_{t_0} é um plano de simetria de S.

Observe que $S_{t_0}^*$ e $S_{t_0}^+$ são superfícies com mesmo bordo, ou seja, $\partial S_{t_0}^* = \partial S_{t_0}^+$, com $S_{t_0}^*$ de um mesmo lado de $S_{t_0}^+$. Além disso, ou $S_{t_0}^*$ e $S_{t_0}^+$ se tangenciam em um ponto do interior ou no bordo (na verdade isto vale para uma escolha genérica de P, o que é suficiente para a prova; veja seção 3, capítulo VII de [8]). Em qualquer dos casos podemos aplicar o Princípio da Tangência para concluir que $S_{t_0}^* = S_{t_0}^+$, ou seja, P_{t_0} é um plano de simetria de S.

$\square$

A técnica usada na demonstração acima é dita método (da reflexão) de Alexandrov e será utilizado no capítulo 2 da dissertação.

1.4 O Método de Perron

Parte dos argumentos que utilizaremos na prova do Teorema 2.1 é baseado na existência de soluções para o Problema de Dirichlet de classe C^2 em Ω e de classe C^0 em $\overline{\Omega}$. Para garantir a existência de soluções, neste caso, aplicamos o método de Perron, explicado no que segue.

Definição 1.4 (Super-subsoluções)**.** Uma função $s \in C^0(\Omega)$ é uma super-solução (subsolução) de Q_H se, dado qualquer subdomínio $D \subset\subset \Omega$, se $v \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ satisfaz $Q_H(v) = 0$ em D e $v|_{\partial D} \leqslant s|_{\partial D}$ ($v|_{\partial D} \geqslant s|_{\partial D}$), então $v \leqslant s_D$ ($v \geqslant s_D$).

Uma candidata à solução do problema 1.1 é a função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \sup\{v(x)|\ v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ é uma subsolução de 1.1 e } v_{|\partial\Omega} \leqslant \varphi\}. \quad (1.2)$$

Vamos provar que u está bem definida se supormos que Ω está contida em um disco de raio $1/H$ (se $H = 0$ essa suposição é desnecessária).

Suponha inicialmente o caso $H = 0$. Note que u está bem definida, no sentido que, toda função constante é solução de $Q_H = 0$. Assim, tem-se que qualquer subsolução v com $v|_{\partial\Omega} \leqslant \varphi$ satisfaz $v \leqslant K = \max \varphi$, isto é, $u \leqslant K$. Além disso, o conjunto das subsoluções menores ou iguais a φ no bordo é não vazio (um exemplo é $v(x) \equiv \min \varphi$).

Suponha agora que $H > 0$. Sendo D um disco de raio $1/H$ contendo Ω, seja $w \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ a função não negativa cujo gráfico é uma semi-esfera de raio $1/H$, w satisfaz que $Q_H(w) = 0$ e $w|_{\partial D} = 0$. Primeiro observemos que

$$\hat{w} = w + \inf_{\partial\Omega} \varphi$$

é uma subsolução de Q_H, o que decorre do Teorema 1.1, uma vez que $Q_H(\hat{w}) = 0$ e $\hat{w}|_{\partial D} = \inf \varphi$. Por outro lado, pondo

$$\tilde{w} = w + \sup_{\partial\Omega} \varphi$$

decorre que $\tilde{w}$ é uma supersolução de Q_H em Ω, o que decorre novamente do Teorema 1.1. Portanto, se v é uma subsolução de Q_H em Ω com $v|_{\partial\Omega} = \varphi$, então $v \leqslant \tilde{w}$.

Pode-se provar (ver Teorema 4.1 em [4]) que $u \in C^2(\Omega)$ e que $Q_H(u) = 0$, se as seguintes condições forem satisfeitas:

a) (solubilidade local) dado $x \in \Omega$, existe um aberto $U \subset \Omega$ com $x \in U$ tal que dada $\sigma \in C^0(\partial U)$, existe uma solução $v \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ de $Q_H = 0$ em U tal que $v|_{\partial U} = \sigma$

b) (compacidade de seqüências de soluções) se $v_n \in C^2(U)$ é uma seqüência de soluções de $Q_H = 0$ em U uniformemente limitada, então existe uma subseqüência de v_n convergindo uniformemente em compactos de U a uma solução $u \in C^2(U)$ de $Q_H = 0$.

Definição 1.5. Sejam $\sigma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma subsolução de Q_H em Ω, $x \in \Omega$ e $U_x \subset\subset \Omega$ ($\overline{U}_x \subset \Omega$) uma vizinhança que contenha x como em a). Então existe uma solução $v_{x,\sigma} \in C^2(U_x) \cap C^0(\overline{U}_x)$ de $Q_H = 0$ em U_x satisfazendo $v_{x,\sigma}|_{\partial U_x} = \sigma$. Definimos em Ω o levantamento de σ (em U_x) por

$$\mathcal{L}(\sigma, U_x)(y) = \begin{cases} v_{x,\sigma}(y), & \text{se } y \in U_x \\ \sigma(y), & \text{se } y \in \Omega \backslash U_x. \end{cases}$$

Repare que $\sigma \leqslant \mathcal{L}(\sigma, U_x)$ em Ω e que essa operação está bem definida pela unicidade da solução $v_{x,\sigma}$, o que decorre do Teorema da Comparação 1.1.

Lema 1.3. *Sejam $\sigma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma subsolução de Q_H em Ω, $x \in \Omega$ e $U_x \subset\subset \Omega$ uma vizinhança que contenha x como em a). Então $\mathcal{L}(\sigma, U_x)$ é uma subsolução de Q_H em Ω.*

Demonstração: Seja $W \subset\subset \Omega$ um aberto e seja w uma solução de $Q_H = 0$ em W satisfazendo $\mathcal{L}(\sigma, U_x) \leqslant w$ em ∂W.

Observe que da construção de w, segue imediatamente que $\sigma \leqslant w$ em ∂W, pois $\sigma \leqslant \mathcal{L}(\sigma, U_x)$ em Ω.

Em $W \backslash U_x$, $\mathcal{L}(\sigma, U_x) = \sigma$ é uma subsolução de Q_H em Ω. Pela observação anterior temos que $\sigma \leqslant w$ em W e portanto $\mathcal{L}(\sigma, U_x) = \sigma \leqslant w$ em $W \backslash U_x$.

Por outro lado, em $W \cap U_x$, $\mathcal{L}(\sigma, U_x)$ e w são duas soluções de $Q_H = 0$ e segue pelo Teorema 1.1 que $\mathcal{L}(\sigma, U_x) \leqslant w$.

Portanto, $\mathcal{L}(\sigma, U_x) \leqslant w$ em W e sendo W arbitrário, segue que $\mathcal{L}(\sigma, U_x)$ é subsolução de $Q_H = 0$ em Ω. $\square$

Teorema 1.6. *Se a) e b) são satisfeitas e u é a função definida em 1.2, então $u \in C^2(\Omega)$ e $Q_H(u) = 0$.*

Demonstração: Seja $x \in \Omega$. Por definição de u, existe uma seqüência $\{v_n\}$ de subsoluções tal que

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x) = u(x).$$

Note que, dado n,

$$v_n(y) \leqslant K = \max_{\partial\Omega} \varphi, \quad \forall y \in \Omega$$

já que pelo Teorema 1.1, $w(x) \equiv K$ é uma supersolução. Logo $\{v_n\}$ é uniformemente limitada.

Seja agora $U_x \subset\subset \Omega$ uma vizinhança de x tal como em a) e defina a seqüência $\mathcal{L}(v_n, U_x)$ pelo levantamento de v_n em U_x como na Definição 1.5. Por construção, temos que $\mathcal{L}(v_n, U_x)$ é solução de $Q_H = 0$ em U_x $\forall n$ e por b)

$\{\mathcal{L}(v_n, U_x)\}$ contém uma subseqüência $\{\mathcal{L}(v_{n_k}, U_x)\}$ convergindo uniformemente em compactos de U_x a uma solução $u^* \in C^2(U_x)$ de $Q_H = 0$.

Usando o Lema 1.3 temos que $\forall n$, $\mathcal{L}(v_n, U_x)$ é uma subsolução, então podemos afirmar que $u^* \leqslant u$ em U_x e $u^*(x) = u(x)$.

Por absurdo, suponha que $\exists y \in U_x$ tal que $u^*(y) < u(y)$. Nesse caso, existe uma seqüência de subsoluções convergindo em y à $u(y)$, e existe uma subsolução $\bar{u}$ tal que $u^*(y) < \bar{u}(y)$. Isso nos permite definir a seqüência $\{w_k = \max\{v_{n_k}, \bar{u}\}\}$ e a seqüência formada por seu levantamento em U_x, $\mathcal{L}(w_k, U_x)$. Assim, por b) existe uma subseqüência $\mathcal{L}(w_{k_l}, U_x)$ convergindo uniformemente em compactos de U_x a uma solução $w \in C^2(U_x)$ de $Q_H = 0$ tal que $u^* \leqslant w \leqslant u$ em U_x e $u^*(x) = w(x) = u(x)$.

Pelo Teorema da Comparação 1.1, devemos ter que $u^* = w$ em U_x, o que entre em contradição com a definição de $\bar{u}$. Portanto $u^* = u$ em U_x e u é solução de $Q_H = 0$ em U_x. Como U_x é uma vizinhança arbitrária de x, segue que $u \in C^2(\Omega)$ é solução de $Q_H = 0$ em Ω.

□

Contudo, as condições a) e b) não são suficientes para garantir que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Para isso, utiliza-se da técnica de barreiras. Seja $p \in \partial\Omega$. Dizemos que $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é regular em p (ou que φ admite barreiras em p) se existem super e subsoluções $S_p, s_p \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que

$$s_p \leqslant \varphi \leqslant S_p$$

em $\partial\Omega$ e

$$s_p(p) = \varphi(p) = S_p(p).$$

Cada s_p, S_p é dita uma barreira para φ (relativa a Q_H) em p. Temos então:

Lema 1.4. *Se φ é regular e se $u \in C^0(\Omega)$ é dada por (1.2) então $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

Demonstração: Dado $p \in \partial\Omega$, seja $\{x_n\} \subset \Omega$ uma seqüência convergindo a p. Como φ é regular, existem $S_p, s_p \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que

$$s_p \leqslant \varphi \leqslant S_p$$

em $\partial\Omega$. Restringindo-se estas desigualdades à seqüência x_n vem que

$$s_p(x_n) \leqslant u(x_n) \leqslant S_p(x_n).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} s_p(x_n) = \lim_{n\to\infty} S_p(x_n) = \varphi(p)$$

segue que existe o limite de $u(x_n)$ quando $n \to \infty$ e, além disso,

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = \varphi(p).$$

Portanto podemos definir $u(p)$ de forma contínua em $\overline{\Omega}$ e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, terminando o lema. □

As condições a) e b) são sempre satisfeitas decorrendo a) do conhecido Teorema de James Serrin (veja Teorema 16.11 de [5]) e b) do Teorema 16.6 de [5].

Com isso, temos o seguinte:

Teorema 1.7. *Sejam* Ω *um domínio limitado de classe* C^0 *em* $\mathbb{R}^2$*,* $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ *e* $H \geqslant 0$*. Suponha que, para* Q_H*,* φ *seja regular em* p*,* $\forall p \in \partial\Omega$*. Então* u *dada por (1.2) satisfaz* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*,* $Q(u) = 0$ *em* Ω *e* $u|_{\partial\Omega} = \varphi$*.*

O teorema acima é o Método de Perron aplicado ao operador Q_H.

Capítulo 2

O Teorema

Teorema 2.1. *Dados $H \geqslant 0$ e $\gamma \subset P := \partial\mathbb{R}^3_+$ uma curva suave fechada e bordo de um domínio limitado. Seja M uma superfície compacta de curvatura média constante H mergulhada em $\mathbb{R}^3_+$ tal que $\gamma = \partial M$ e denote por k e k_g as curvaturas geodésicas de γ em P e em M respectivamente. Então a desigualdade*

$$H \leqslant \min|k|\sqrt{1 - \max\left(\frac{k_g}{k}\right)^2} \tag{2.1}$$

vale se e somente se M está contida numa esfera ou em P.

Com relação a este teorema, observe que

$$0 \leqslant \left(\frac{k_g}{k}\right)^2 \leqslant 1$$

uma vez que, dado um campo normal unitário $N : M \to \mathbb{R}^3$, em cada ponto de γ vale que

$$k^2 - k_g^2 = k^2\langle N, n\rangle^2$$

onde n é normal à curva. Logo,

$$k^2(1 - \langle N, n\rangle^2) = k_g^2,$$

isto é,

$$\frac{k_g^2}{k^2} = 1 - \langle N, n\rangle^2 \leqslant 1.$$

2.1 Prova

Considere inicialmente o caso $H = 0$. A desigualdade (2.1) é trivialmente verdadeira, de modo que basta mostrar que $M \subset P$.

Se $M \cap \{z = c\} \neq \varnothing$ para algum $c > 0$ então existe um plano π, horizontal e distinto de $z = 0$, tangente a M, estando M totalmente contido na componente conexa de $\mathbb{R}^3\backslash\pi$ que contém P ao mesmo tempo que $M \subset \pi$ pelo Princípio da Tangência, o que é um absurdo.

Suponha agora $H > 0$.

Demonstremos a volta do teorema.

Dado S, uma esfera de raio $1/H$ e centro (x_0, y_0, z_0), sem perda de generalidade, considere o círculo C, de raio r, dado pela intersecção de S com um plano $z =$ constante. A relação das curvaturas k e k_g, em C, nos dá que

$$k^2 - k_g^2 = k^2\langle N, n\rangle^2$$

onde N denota a normal interior da esfera e n normal ao círculo.

Isto é, se θ é o ângulo interno entre n e N, então

$$k^2\langle N, n\rangle^2 = k^2\cos^2\theta = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta,$$

onde $r = \frac{1}{H}\cos\theta$ e finalmente

$$k^2 - k_g^2 = H^2,$$

ou ainda,

$$k^2\left(1 - \frac{k_g^2}{k^2}\right) = H^2.$$

Como em cada círculo C, k e k_g são constantes,

$$\min|k|\sqrt{1 - \max\left(\frac{k_g}{k}\right)^2} = H.$$

Demonstremos a implicação contrária agora.

Seja $\Omega \subset P$ o domínio limitado por γ.

Af.: *Existe $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ tal que $G^* = \{(x, u(x))|x \in \overline{\Omega}\}$ é uma superfície de CMC H e $\partial G^* = \gamma$.*

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + 2H = 0, \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Pela desigualdade (2.1) temos imediatamente que $\min k^2 \geqslant H^2 > 0$. Decorre daí que, em particular, γ é uma curva convexa. Vamos supor γ orientada de tal forma que

$$n(s) = \gamma'(s) \wedge N(\gamma(s))$$

seja o vetor normal interior de $\gamma = \partial\Omega$ onde $N(\gamma(s)) = (0, 0, 1)$. Daí vem que $k \geqslant H > 0$.

Considere a seguir, o caso $\min k > H$.

Dado $p \in \partial\Omega$ existe um círculo, em P, de centro $(x_0, y_0, 0)$ e raio $1/(\min k)$, passando por p, tal que a região C_p limitada pelo círculo contém Ω. Tome a esfera de raio $1/H$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1/H^2$$

tal que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1/(\min k)^2$$

e $z_0 \leqslant 0$ satisfaz

$$z_0^2 = 1/H^2 - 1/(\min k)^2.$$

Podemos obter então uma função não-negativa $v_p \in C^\infty(\overline{C}_p)$ tal que seu gráfico é uma calota esférica de bordo ∂C_p e CMC H, dada explicitamente por:

$$v_p(x, y) = z_0 + \sqrt{1/H^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}.$$

Daí

$$\nabla v_p(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1/H^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}(x - x_0, y - y_0)$$

e

$$|\nabla v_p(x, y)|_{|C_p} = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{1/H^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}_{|C_p} = \sqrt{\frac{H^2}{(\min k)^2 - H^2}}.$$

Pelo Teorema 1.1 temos que v_p domina qualquer solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de (2.2) e como conseqüência, pelo Lema 1.1, $|\nabla u(p)| \leqslant |\nabla v_p(p)|$, isto é,

$$|\nabla u(p)| \leqslant \sqrt{\frac{H^2}{(\min k)^2 - H^2}}, \ \forall\, p \in \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Segue pelo Teorema 1.2 que existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para o problema 2.2. Observe que o Teorema 1.2 não garantiria a existência de uma solução caso $\min k = H$.

Consideremos a seguir o caso $\min k = H$.

Observe que, $\forall p \in \partial\Omega$, $v_p \in C^\infty(C_p) \cap C^0(\overline{C}_p)$. Assim, para garantir a existência de uma solução do problema (2.2), vamos usar o método de Perron (Teorema 1.7) usando v_p e $-v_p$ como supersolução e subsolução, respectivamente, em cada $p \in \partial\Omega$. Convém observar também que o método de Perron nos dá uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, ou seja, apenas contínua em $\overline{\Omega}$.

Em resumo, até agora provamos que existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = 0$ tal que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ se $\min k > H$.

Seja G a reflexão de G^* pelo plano P e considere $B := M \cup G$. Então B é uma superfície topológica compacta, mergulhada em $\mathbb{R}^3$, sem fronteira, diferenciável em $B \backslash \gamma$. Denote por N_1 e N_2 os vetores normais unitários de M e G, respectivamente, apontando para o interior de B e seja θ o ângulo interno entre planos tangentes de M e G num ponto comum de γ como mostram as figuras 2.1 e 2.2.

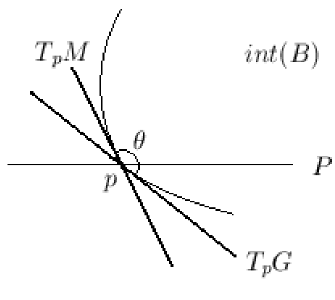


Figura 2.1:

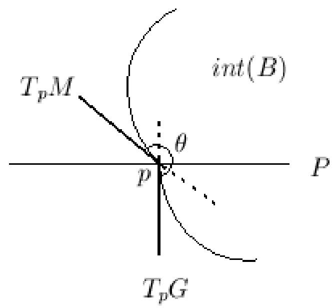


Figura 2.2:

Provemos no que segue que M é um gráfico sobre Ω ou é uma calota esférica (ou ambos). Para isso usaremos o Método de Alexandrov, considerando as reflexões de B nos planos horizontais $z = c$ desde $z = \infty$.

Sejam $B_c = B \cap \{z \geqslant c\}$ e B_c^* a reflexão de B_c por $z = c$. Tomando $\alpha = \min\{s \in \mathbb{R}; B_s^* \subset int(B)\}$, temos que se $\alpha \leqslant 0$ então M é um gráfico sobre Ω, donde segue pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1) que $M = G^*$.

Se $\alpha > 0$, então, existe $p \in B_\alpha^* \cap B$ tal que p é a reflexão de um ponto de $M \setminus \partial\Omega$. Seguem 3 casos

- se $p \in M \setminus \partial\Omega$, então $M \cup (B_\alpha^* \cap \{z < 0\})$ é uma superfície compacta de CMC H mergulhada em $\mathbb{R}^3$, em outras palavras, M pode ser completada com a sua reflexão a fim de termos uma superfície compacta. Assim, pelo Teorema de Alexandrov 1.5, M está contida numa esfera;

- se $p \in G \setminus \partial\Omega$, então $G \subset B_\alpha^*$ e todos os pontos em $\partial\Omega$ são reflexão de algum ponto em $M \setminus \partial\Omega$. Podemos então tratar este caso dentro do seguinte;

- se $p \in \partial\Omega$, observamos primeiramente que $\min k < H$. De fato, se $\min k = H$ segue por (2.1) que $k_g \equiv 0$, (ou seja, γ é uma geodésica de M). Segue que M é ortogonal à P ao longo de γ. Decorre que $T_p B_\alpha^* = T_p M$ e, pelo Princípio da Tangência no bordo 1.3, segue que $z = \alpha$ é um plano de simetria para M, o que é um absurdo sendo M ortogonal a P.

  Assim temos $\min k < H$. Vamos provar que o ângulo interno θ entre o plano tangente de M e G em p é 0, ou seja B_α^* e G são tangentes em p, de modo que $G = B_\alpha^*$. Segue que B é uma superfície compacta de CMC H mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e pelo Teorema de Alexandrov 1.5, B é uma esfera.

Note que $\forall p \in \partial\Omega$, $\gamma'(p) \in T_pM \cap T_pG$. Logo $n(p)$ (a normal de γ apontando para o interior de Ω em p), $N_1(p)$ e $N_2(p)$ são coplanares, ou mais precisamente, eles pertencem ao plano normal à curva γ em p.

Basta provar que se $\min k < H$ então $\theta \leqslant \pi$ uma vez que por questões de regularidade não podemos ter $\theta < \pi$ com $p \in \partial\Omega$ sendo p a reflexão de um ponto de $M \backslash \partial\Omega$.

Temos que

$$\langle N_1, n\rangle \geqslant 0, \tag{2.4}$$

pois M é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3_+$ tal que $\partial M \subset \{z = 0\}$ é uma curva convexa fechada.

Do fato que $G = \{(x, y, -u(x, y)); (x, y) \in \overline{\Omega}\}$, temos que

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\,(\nabla u + e_3)$$

e,

$$|\nabla u| n = \nabla u.$$

Então, caso $\langle N_1, e_3\rangle < 0$ a afirmação é imediata, pois $\langle N_2, e_3\rangle > 0$ e

$$\langle N_2, n\rangle = \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} > 0. \tag{2.5}$$

Suponha então que $\langle N_1, e_3\rangle \geqslant 0$ e mostremos que

$$\langle N_1, n\rangle \geqslant \langle N_2, n\rangle. \tag{2.6}$$

Suponha $\gamma(t)$ uma parametrização pelo comprimento de arco de γ. Então

$$n = \gamma''/|\gamma''| = \gamma''/k$$

e

$$\gamma'' = \langle N_1, \gamma''\rangle N_1 + \langle N_1 \wedge \gamma', \gamma''\rangle N_1 \wedge \gamma'.$$

Assim,

$$|\gamma''|^2 = \langle \gamma'', \gamma''\rangle = \langle N_1, \gamma''\rangle^2 + \langle N_1 \wedge \gamma', \gamma''\rangle^2$$

e

$$\langle N_1, \gamma''\rangle^2 = |\gamma''|^2 - \langle N_1 \wedge \gamma', \gamma''\rangle^2 = k^2 - k_g^2$$

logo,

$$\langle N_1, n\rangle^2 = \langle N_1, \gamma''/k\rangle^2 = \frac{k^2 - k_g^2}{k^2} = 1 - \frac{k_g^2}{k^2} \geqslant 1 - \max\left(\frac{k_g}{k}\right)^2. \tag{2.7}$$

Segue, portanto, direto da hipótese (2.1) que

$$\langle N_1, n\rangle^2 \geqslant \frac{H^2}{(\min k)^2}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, usando (2.5) e (2.3) obtemos

$$\langle N_2, n\rangle = \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \leqslant \frac{H}{\min k} \tag{2.9}$$

completando o argumento.

Mostremos, para encerrar, que um gráfico satisfazendo a condição $\min k > H$ é uma calota esférica.

Como $M = G^* = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\}$, temos que

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} (\nabla u - e_3)$$

e,

$$|\nabla u| n = \nabla u,$$

logo,

$$\langle N_1, n\rangle = \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \langle N_2, n\rangle.$$

Podemos usar (2.4), (2.8) e (2.9) para obter

$$\langle N_1, n\rangle \geqslant \frac{H}{\min k} \geqslant \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \langle N_2, n\rangle.$$

Então no caso de M ser o gráfico da função u, temos que

$$\frac{|\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2} = \frac{H^2}{(\min k)^2} = \text{constante} < 1;$$

o que significa que $|\nabla u|$ e $\langle N, n\rangle$ são constantes ao longo de $\partial\Omega$.

Usando novamente o método de Alexandrov, sejam $\widehat{n}$ um vetor em P e $\widehat{P}$ um plano que tem $\widehat{n}$ como normal. Considerando $\widehat{P}_t = \widehat{P} + t\widehat{n}$ as translações de $\widehat{P}$, sejam $\widehat{P}_t^+$ e $\widehat{P}_t^-$ os fechos das componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus \widehat{P}_t$ tal que $\widehat{n}$ aponta para $\widehat{P}_t^+$. E sejam $M_t^+ = M \cap \widehat{P}_t^+$ e M_t^* a reflexão de M_t^+ por $\widehat{P}_t$. Tomando $\alpha = \min\{s \in \mathbb{R}; M_s^* \subset \overline{int}(M \cup \Omega)\}$, dado $p \in M \cap M_\alpha^*$, temos 2 casos

- se $p \in M \setminus \partial\Omega$, então $M_\alpha^- = M_\alpha^*$ pelo Princípio da Tangência;
- se $p \in \partial\Omega$, então em p, temos por construção que as tangentes ao bordo de M_α^- e M_α^* coincidem, ao longo de γ a binormal $(\gamma' \wedge n)$ é fixa, e $|\nabla u|$ e $\langle N, n\rangle$ são constantes. Assim, $N_{M_\alpha^-}(p) = N_{M_\alpha^*}(p)$ e pelo Teorema 1.3 $M_\alpha^- = M_\alpha^*$.

Assim, temos uma simetria vertical em M em qualquer direção escolhida no plano P. Segue que M é invariante por um grupo de simetrias rotacionais. Decorre da descrição dada por C. Delaunay em [3], das superfícies de CMC rotacionais que M é uma calota esférica.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bonow, I. C. - *O Problema de Dirichlet para a Equação das Superfícies de Curvatura Média Constante.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007.

[2] Brito, F.; Earp, R.; Meeks, W. e Rosenberg, H. - Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve. *Indiana Math. Journal*, Vol. **40**, pp. 333-343, 1991.

[3] Delaunay, C. - Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante. *J. de Mathématiques*, Vol. **6**, pp. 309-320, 1841.

[4] Figueiredo, E. S. - *O Método de Perron: Aplicações e Extensões.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2000.

[5] Gilbarg, D. e Trudinger, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] Guillemin, V.; Pollack, A. - *Differential Topology.* Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

[7] Hinojosa, P.A. - Surfaces of Constant Mean Curvature in Euclidean 3-space Orthogonal to a Plane along its Boundary. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, Vol. **74**, pp. 33-35, 2002.

[8] Hopf, H. - Differential Geometry in the Large. *Lecture Notes in Mathematics*, **1000**, Springer- Verlag, Berlin 1983.

[9] Ripoll, J. - A characteristic property of cap spheres. preprint.

[10] Ros, A. e Rosenberg, H. - Constant mean curvature surfaces in a half-space of $\mathbb{R}^3$ with boundary in the boundary of the half-space. *Journal of Differential Geometry*, Vol. **44**, pp. 807-817, 1996.