

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Generalizações da Teoria de Fiedler para a Conectividade Algébrica

por

Israel de Souza Rocha

Tese submetida como requisito obrigatório
para obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Porto Alegre, Maio de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rocha, Israel de Souza

Generalizações da Teoria de Fiedler para a Conectividade Algébrica / Israel de Souza Rocha.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2015.

108 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Trevisan, Vilmar

Tese: Matemática Aplicada

Vetor de Fiedler, Conectividade algébrica, Conexidade de vértices, Matriz Laplaciana, Componentes de Perron, Matriz Laplaciana perturbada, Conectividade algébrica absoluta, Separator-Shadow

Generalizações da Teoria de Fiedler para a Conectividade Algébrica

por

Israel de Souza Rocha

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa:

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Raposo Del-Vecchio
Instituto de Matemática-UFF

Profa. Dra. Maria Inês Martins Copetti
Departamento de Matemática-UFSM

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Instituto de Matemática-UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE ABREVIATURAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	5
2.1 Definições	5
2.2 Teoria de Matrizes	7
2.2.1 Matrizes Não-negativas	8
2.2.2 Entrelaçamento de Autovalores	11
2.3 A conectividade algébrica	11
3 CONECTIVIDADE ALGÉBRICA PARA GRAFOS K-CONEXOS	16
3.1 Grafos sem pontos de articulação	16
3.2 Uma relação entre conectividade algébrica e a estrutura do grafo	17
3.3 Lemas técnicos	23
3.4 Resultados Estruturais	25
3.5 Caracterizando a conectividade algébrica	32
3.6 Limitando a conectividade algébrica	39
3.7 Observações sobre expansão em grafos	42
4 UMA TEORIA DE FIEDLER PARA A LAPLACIANA PERTURBADA	45
4.1 Motivação	45

4.2	Notação e resultados conhecidos	48
4.3	Teorema de monotonicidade	50
4.4	Caracterizando o segundo menor autovalor	55
4.5	Matrizes bottleneck perturbadas de uma árvore	58
4.6	Vértices característicos via valores de Perron	62
4.7	Partição de sinais de grafos	64
5	CONNECTIVIDADE ALGÉBRICA ABSOLUTA DE ÁRVORES	69
5.1	Preliminares	69
5.2	Teorema Separator-Shadow	76
5.3	Descrição das imersões	81
5.4	Cálculo das imersões	83
5.5	Cálculo da conectividade algébrica absoluta de árvores	89
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	93
6.1	Outros Trabalhos	96
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98

Lista de Figuras

Figura 2.1	Grafo com 9 blocos (triângulos e arestas).	7
Figura 3.1	Grafo 2-conexo.	16
Figura 3.2	Grafo 3-conexo.	20
Figura 3.3	Ciclo com 10 vértices.	30
Figura 3.4	Um grafo 2-conexo.	31
Figura 3.5	Grafo com única dobradiça mista.	31
Figura 3.6	Exemplo 1	42
Figura 3.7	Exemplo 2	42
Figura 3.8	Grafo 3-conexo.	43
Figura 4.1	Grafo cuja monotonicidade não vale para a autofunção.	55
Figura 5.1	Uma double broom $T(10, 6, 0)$	70
Figura 5.2	Um grafo completo com 4 vértices.	72
Figura 5.3	Imersão do grafo K_4	73
Figura 5.4	Um H grafo com 30 vértices.	78
Figura 5.5	Imersão do grafo H	79
Figura 5.6	Representação gráfica do Teorema Separator-Shadow.	80
Figura 5.7	Representação gráfica do Teorema Separator-Shadow.	80

LISTA DE ABREVIATURAS

$d(v)$	grau do vértice v
P_n	caminho com n vértices
S_n	estrela com $n + 1$ vértices
K_n	grafo completo com n vértices
$a(G)$	conectividade algébrica do grafo G
$L(G)$	matriz Laplaciana do grafo G
$\mathbf{1}$	vetor com todas as entradas iguais a 1
e_i	vetor com a i -ésima entrada igual a 1 e com as entradas restantes iguais a 0
$\ x\ $	norma do vetor x
$x \perp v$	x ortogonal a v
J	matriz com todas as entradas iguais a 1
I	matriz identidade
$\sigma(A)$	espectro da matriz A
$\rho(A)$	raio espectral da matriz A
$In(A)$	inércia da matriz A
$adj(A)$	matriz adjunta da matriz A

RESUMO

Esta tese generaliza resultados sobre a conectividade algébrica e seus autovetores associados. Generalizamos resultados que foram descobertos por Fiedler et. al. na investigação da conectividade algébrica de grafos com um ponto de articulação para grafos sem pontos de articulação. Exibimos uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta sobre uma classe de árvores específica. Além disso, exibimos expressões para os autovetores que geram o autoespaço associado a conectividade algébrica absoluta. Também apresentamos um novo algoritmo combinatório que computa a conectividade algébrica absoluta para qualquer árvore em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Desenvolvemos uma teoria como a de Fiedler para a matriz Laplaciana perturbada, levando a resultados que são do mesmo tipo dos obtidos para a conectividade algébrica de um grafo.

ABSTRACT

This thesis generalizes results on the algebraic connectivity and its eigenvectors. We generalize results that were found by Fiedler et. al. investigating the algebraic connectivity of graphs with articulation points to graphs without articulation points. We exhibit an explicit formula for the absolute algebraic connectivity over a specific class of trees. Besides, we exhibit expressions for the eigenvectors that generates the eigenspace associated with the absolute algebraic connectivity. Also, we present a new combinatorial algorithm that computes the absolute algebraic connectivity in time $\mathcal{O}(n^3)$. We develop a theory like Fiedler's to the perturbed Laplacian matrix, leading to results that are of the same kind obtained for the algebraic connectivity of a graph.

1 INTRODUÇÃO

Um *grafo* é um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde os elementos de E são subconjuntos de dois elementos de V . Os elementos de V são os *vértices* do grafo, os elementos de E são suas *arestas*.

A abordagem fundamental feita em Teoria Espectral de Grafos consiste em associar a qualquer grafo uma matriz correspondente que contém informações sobre sua estrutura. Essencialmente a Teoria Espectral de Grafos tenta responder a seguinte pergunta: Como os autovalores de uma matriz que representa um grafo se relacionam com a estrutura do grafo?

Uma representação frequente de um grafo em Teoria Espectral de Grafos é dada pela sua matriz Laplaciana. Um resultado bem conhecido que descreve parte da estrutura de um grafo por meio da matriz Laplaciana é o Teorema da Matriz-Árvore, que determina o número de árvores geradoras de um grafo em função dos cofatores da matriz Laplaciana correspondente. Esse resultado data de 1847, quando Kirchhoff, estudando circuitos elétricos, demonstrou o Teorema da Matriz-Árvore. A determinação do número de árvores geradoras de um grafo é um dos problemas mais antigos e famosos da teoria de grafos.

Apesar do estudo de matrizes de grafos ser bem antigo, os fundamentos da Teoria Espectral de Grafos foram estabelecidas na década de 1950 e 1960, desde o trabalho fundamental da Collatz e Sinogowitz [13], em 1957. Em [13], os autores estabeleceram uma relação entre os graus de um grafo e os seus autovalores além de diversas outras observações a respeito do espectro de grafos. Desde então, a Teoria Espectral de Grafos tem aparecido com frequência na literatura matemática.

A matriz Laplaciana e, em especial, o seu segundo menor autovalor, desempenham um papel relevante em diversas aplicações. O resultado que deu

destaque para esse autovalor diz que um grafo é conexo se, e somente se, o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana é diferente de zero. Provado por Fiedler [21], esse resultado motivou que tal autovalor fosse chamado de conectividade algébrica. Desde então, uma gama enorme de resultados surgiu relacionando a conectividade algébrica com outros parâmetros do grafo. Em [8, 19, 21, 47], usando a conectividade algébrica, são abordados problemas difíceis em teoria de grafos: propriedades de expansão de um grafo, grafos com peso, conectividade algébrica absoluta, número isoperimétrico e outras propriedades de um grafo. Em [2], um resumo sobre resultados em conectividade algébrica é fornecido.

Nessa tese chamamos de Teoria de Fiedler para a conectividade algébrica os resultados teóricos sobre conectividade algébrica e seu autovetor associado introduzidos por Fiedler [20, 21], além de propriedades descobertas por outros autores em investigações posteriores descrevendo propriedades de particionamento e monotonicidade dadas pelas entradas do autovetor [32, 33, 34].

A dissertação de mestrado do presente autor [52] apresenta certas ferramentas matemáticas conhecidas utilizadas no estudo da conectividade algébrica através de seu autovetor associado. No momento da elaboração dessa dissertação foram sugeridas, na forma de trabalhos futuros, extensões de certos resultados para classes de grafos mais gerais.

No capítulo 3, apresentaremos algumas extensões que foram feitas desde a dissertação de mestrado. Essas extensões consistem essencialmente em uma generalização dos resultados que foram descobertos por Fiedler et. al. na investigação da conectividade algébrica de grafos com um ponto de articulação (um vértice cuja a remoção desconecta o grafo). No capítulo 3 a classe de grafos investigada consiste em grafos sem ponto de articulação, onde pouco se sabe sobre o autovetor associado à conectividade algébrica. Além disso, discutimos uma aplicação dessa teoria para fornecer um limitante superior para a conectividade algébrica. Esse limitante se baseia em um parâmetro combinatório que introduzimos.

Uma matriz ainda mais geral que a matriz Laplaciana é a matriz Laplaciana perturbada, que foi definida por Bapat, Kirkland e Pati [5]. É importante observar que diversas matrizes comuns estudadas em Teoria Espectral de Grafos são apenas instâncias particulares da matriz Laplaciana perturbada. Dentre elas podemos citar: a matriz de adjacência, a matriz Laplaciana, a matriz Laplaciana sem sinal e a matriz Laplaciana normalizada. Todas essas matrizes ainda podem se apresentar na versão de um grafo com pesos, sejam nas arestas ou nos vértices, e ainda assim são apenas casos particulares da matriz Laplaciana perturbada.

No capítulo 4, desenvolvemos uma teoria como a de Fiedler para essa matriz, levando a resultados que são do mesmo tipo dos obtidos para a conectividade algébrica de um grafo G . O objetivo desse capítulo é estudar o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana perturbada e seus autovetores. Nós exibiremos uma propriedade para os autovetores associados ao segundo menor autovalor dessa matriz que, como no trabalho de Fiedler, nos permite classificar cada grafo em duas famílias distintas de grafos. Como um resultado geral desse trabalho, nós mostramos que um autovetor do segundo menor autovalor da matriz Laplaciana perturbada fornece propriedades de particionamento que são similares as propriedades que um vetor de Fiedler fornece para um grafo.

Uma outra matriz comum em Teoria Espectral de Grafos é a matriz Laplaciana com pesos. Nesse caso estamos estudando um grafo cujas arestas recebem números não-negativos: os pesos das arestas. Daí o motivo do nome de tal matriz que é apenas uma representação matricial de um grafo com seus pesos. Essa matriz é na verdade uma generalização da matriz Laplaciana de um grafo.

Em [22], Fiedler estudou a *conectividade algébrica absoluta* $\hat{a}(G)$ de um grafo G . Ela é definida como a máxima conectividade algébrica entre todas as atribuições de pesos não-negativos às arestas de G cuja soma é $|E|$. Uma cota precisa para a conectividade algébrica absoluta em termos da conectividade de vértices é

fornecida em [35]. Porém a conectividade algébrica absoluta ainda é um parâmetro não muito bem compreendido em Teoria Espectral de Grafos.

Com o intuito de compreender melhor esse parâmetro, resolvemos investigá-lo e, no capítulo 5, apresentamos novos resultados sobre a conectividade algébrica absoluta. No capítulo, exibimos uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta em uma classe de árvores específica. Além disso, exibimos expressões para os autovetores que geram o autoespaço associado à conectividade algébrica absoluta. A obtenção de uma fórmula para um autovalor de um grafo é de interesse pelo simples fato de que, em geral, é muito difícil exibir alguma expressão fechada para seu espectro. As fórmulas conhecidas para o espectro são em sua grande maioria obtidas para grafos com uma estrutura simples.

O interesse na obtenção de tal fórmula surge do estudo de uma técnica diferente na compreensão do espectro de grafos. A fim de computar as fórmulas, usaremos uma abordagem geométrica que não é muito bem conhecida e que gostaríamos de compartilhar com a comunidade de Teoria Espectral de Grafos. Essencialmente, a abordagem recorre a ferramentas de otimização semidefinida. Essa técnica, cuja utilização ficará clara no capítulo 5, se torna mais importante do que os resultados em si obtidos. A obtenção de fórmulas explícitas é a evidência de que essa técnica é promissora na compreensão do espectro de um grafo.

Ainda no capítulo 5 apresentamos um novo algoritmo simbólico que computa a conectividade algébrica absoluta para qualquer árvore em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Novamente, a obtenção de tal algoritmo é fruto das possibilidades geradas pela técnica utilizada.

Desse modo, como a conectividade algébrica e seu vetor de Fiedler levaram a muitas aplicações importantes, esperamos que a teoria apresentada aqui possa levar a importantes e talvez diferentes descobertas.

2 PRELIMINARES

Este capítulo fornece um compêndio de definições básicas e notações utilizada mais tarde nesta tese. Além disso, este capítulo reúne os resultados essenciais em Teoria de Matrizes necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Finalmente, introduziremos conectividade algébrica e falaremos um pouco sobre os resultados bem conhecidos sobre esta.

2.1 Definições

De agora em diante, consideramos apenas grafos que não contêm *laços* (arestas ligando um vértice a ele mesmo) e sem *arestas múltiplas* (mais de uma aresta incidente ao mesmo par de vértices). Tais grafos são ditos *simples*.

O *grau* de um vértice v em um grafo G é o número de arestas incidentes a v e é denotado por $d(v)$.

Se $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são dois grafos, diremos que G e G' são *isomorfos*, se existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices que preserva as arestas, ou seja, $\phi : V \rightarrow V'$, com $xy \in E$ se, e somente se, $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Se $V' \subset V$ e $E' \subset E$, diremos que G' é um *subgrafo* de G . Menos formalmente, diremos que G *contém* G' . Finalmente, $G' \subset G$ é um subgrafo *gerador* se $V' = V$.

Se U é um subconjunto de vértices, denotamos por $G - U$ o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices em U e de suas arestas incidentes.

Um *caminho* é um grafo não vazio isomorfo a um grafo $P = (V, E)$ da forma

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

O número de arestas no caminho é o seu *tamanho*, e um caminho com k vértices é denotado por P_k .

Se $P = (V, E)$ é um caminho com tamanho $n \geq 3$, então o grafo $C = (V, E \cup \{v_n, v_1\})$ é chamado de *ciclo* de tamanho $n + 1$.

Um grafo com n vértices em que cada vértice se liga a todos os demais é chamado de grafo *completo* e denotado por K_n .

Um grafo com $n + 1$ vértices em que existe um vértice ao qual todos os outros se ligam e nenhum outro vértice se liga a qualquer outro é chamado de *estrela* e denotado por S_n .

Um grafo não vazio G é dito *conexo* se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho em G . Caso contrário, isto é, se existem dois vértices que não são ligados por algum caminho, então G é dito *desconexo*. Um subgrafo conexo maximal de G é chamado de *componente* ou *componente conexa* de G .

Um grafo acíclico, isto é, um grafo que não contém ciclos, é chamado de *floresta*. Uma floresta conexa é chamada de *árvore*. (Assim, uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores.) Os vértices de grau 1 de uma árvore são suas *folhas*. Cada árvore tem no mínimo duas folhas - tome, por exemplo, os finais do maior caminho.

A *conectividade de vértices* de um grafo, denotada por $k(G)$, é o menor número de vértices que, ao serem retirados, tornam o grafo desconexo.

A *conectividade de arestas*, denotada por $k'(G)$, é o menor número de arestas que, ao serem retiradas, tornam o grafo desconexo.

Se G é um grafo conexo, um vértice v é um *ponto de articulação* ou *vértice de corte* se o grafo $G - v$ é desconexo.

Se G é um grafo conexo, um conjunto de vértices S é um *separador* se o grafo $G - S$ é desconexo.

Um grafo G é dito *k-conexo* ($k \in \mathbb{N}$), se $|V| > k$ e $G - X$ é conexo para cada conjunto $X \subset V$ com $|X| < k$. Em outras palavras, nenhum par de vértices pode ser separado por menos de k vértices removidos. Todo grafo (não vazio) é 0-conexo e os grafos 1-conexos são precisamente os grafos conexos não triviais. Além disso, se um grafo é k -conexo para $k \geq 2$, então a definição nos diz que esse grafo também é $(k - 1)$ -conexo.

Um subgrafo conexo maximal sem um ponto de articulação chama-se *bloco*. Dessa forma, cada bloco é um subgrafo 2-conexo maximal, uma aresta que não está em nenhum ciclo (com seus vértices) ou um vértice isolado. Reciprocamente, todo subgrafo dessa forma é um bloco. Pela sua maximalidade, dois blocos distintos de G se intersectam em apenas um vértice, que é então um ponto de articulação de G . Conseqüentemente, toda aresta encontra-se em um único bloco e G é a união de seus blocos. Para ilustrar as definições a Figura 2.1 exhibe um grafo com pontos de articulação e blocos.

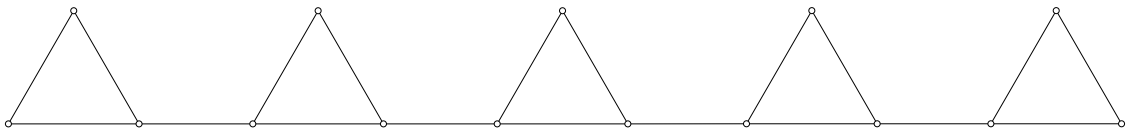


Figura 2.1: Grafo com 9 blocos (triângulos e arestas).

Os pontos de articulação estão nas interseções

2.2 Teoria de Matrizes

Para o desenvolvimento dos próximos capítulos necessitamos de alguns resultados em Teoria de Matrizes. Forneceremos aqui resultados bem conhecidos na

literatura. As demonstrações dos teoremas enunciados aqui podem ser encontradas nos livros [31] e [69].

2.2.1 Matrizes Não-negativas

Considere matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de mesmo tamanho. Escrevemos

$$B \geq 0 \text{ se todos } b_{ij} \geq 0$$

$$B > 0 \text{ se todos } b_{ij} > 0$$

$$A \geq B \text{ se } A - B \geq 0$$

$$A > B \text{ se } A - B > 0.$$

As relações inversas \leq e $<$ são definidas similarmente. Se $A \geq 0$, diremos que A é uma matriz *não-negativa* e se $A > 0$, diremos que A é uma matriz *positiva*.

O multiconjunto de autovalores de uma matriz A é chamado *espectro* de A e é denotado por $\sigma(A)$. O *raio espectral* de A é o número real não-negativo $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ou seja, ele é o raio do menor disco centrado na origem do plano complexo incluindo todos autovalores de A .

Diremos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é *irredutível* se não existe nenhuma decomposição da forma $N_1 \cup N_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_1 \neq \emptyset \neq N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i \in N_1$ e $j \in N_2$.

Teorema 2.1 *Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e $0 \leq A \leq B$, então $\rho(A) \leq \rho(B)$. Se A é irredutível, então $\rho(A) = \rho(B)$ se, e somente se, existe uma matriz de permutação P , tal que $A = PBP^T$.*

Uma matriz A_r de ordem r é uma *submatriz principal* de uma matriz A de ordem n , se A_r é obtida da matriz A pela remoção de $n - r$ linhas e das respectivas $n - r$ colunas.

Teorema 2.2 *Se A é uma matriz quadrada e $A \geq 0$ e A_r é uma submatriz principal de A , então $\rho(A_r) \leq \rho(A)$. Se A é irredutível, então $\rho(A_r) < \rho(A)$.*

A teoria de matrizes não-negativas assume sua forma mais simples e elegante para matrizes positivas e é para esse caso que Oskar Perron fez descobertas fundamentais em 1907 (apud Horn [31]). Agora, resumiremos seus principais resultados em um teorema que leva seu nome.

Teorema 2.3 (Teorema de Perron) *Se A é uma matriz quadrada e $A > 0$, então*

- (a) $\rho(A) > 0$.
- (b) $\rho(A)$ é um autovalor de A .
- (c) Existe um vetor x tal que $x > 0$ e $Ax = \rho(A)x$.
- (d) $\rho(A)$ é um autovalor algebricamente (e, dessa forma, geometricamente) simples.
- (e) $|\lambda| < \rho(A)$ para todo autovalor de A tal que $\lambda \neq \rho(A)$, ou seja, $\rho(A)$ é o único autovalor de maior módulo.
- (f) $[\rho(A)^{-1}A]^m \rightarrow H$ quando $m \rightarrow \infty$, onde $H = xy^T$, $Ax = \rho(A)x$, $A^T y = \rho(A)y$, $x > 0$, $y > 0$ e $x^T y = 1$.

O único autovetor normalizado caracterizado no item (c) do Teorema de Perron é frequentemente chamado de *vetor de Perron* de A e $\rho(A)$ é frequentemente chamado de *raiz de Perron* de A . Obviamente, A^T é uma matriz positiva se A é positiva. Assim, o Teorema de Perron se aplica à matriz A^T também. O vetor de Perron de A^T é chamado de *vetor de Perron à esquerda* de A .

O Teorema de Perron possui muitas aplicações em Teoria Espectral de Grafos. Nesse trabalho, utilizaremos esse teorema em diversos momentos, deixando evidente seu papel fundamental em nossas demonstrações.

Quando nos deparamos com matrizes não-negativas que não são positivas, é necessário considerar uma extensão do Teorema de Perron para o caso em que nem todas as entradas da matriz são estritamente positivas.

Teorema 2.4 *Se A é uma matriz quadrada e $A \geq 0$, então $\rho(A)$ é um autovalor de A e existe um autovetor não-negativo $x \geq 0$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \rho(A)x$.*

Entretanto, sem hipóteses adicionais, não podemos ir muito além do Teorema 2.4 na generalização do Teorema de Perron para matrizes não-negativas.

Quando $A \geq 0$, o autovalor não-negativo $\rho(A)$ é chamado *raiz de Perron* de A . Visto que um autovetor associado com a raiz de Perron de uma matriz não-negativa não é necessariamente unicamente determinado (a menos quando A é positiva), não existe uma noção bem determinada de "o vetor de Perron" para uma matriz não-negativa. Por exemplo, a matriz $A = I$ possui todo vetor não-negativo como um autovetor associado com a raiz de Perron $\rho(A) = 1$.

Agora, veremos como o Teorema de Perron se generaliza para matrizes não-negativas e irredutíveis. O nome de Frobenius é associado à generalização dos resultados de Perron sobre matrizes positivas para matrizes não-negativas segundo [31], pois os primeiros resultados para tais matrizes foram obtidas por Georg Frobenius em 1912.

Teorema 2.5 (Teorema de Perron-Frobenius) *Se A é uma matriz quadrada, não-negativa e irredutível, então,*

- (a) $\rho(A) > 0$
- (b) $\rho(A)$ é um autovalor de A
- (c) Existe um vetor x positivo tal que $Ax = \rho(A)x$
- (d) $\rho(A)$ é um autovalor algebricamente (e, dessa forma, geometricamente) simples

O teorema garante que o autoespaço de uma matriz não-negativa e irredutível associado com a raiz de Perron é unidimensional. Para uma matriz não-negativa e irredutível, o único autovetor positivo normalizado também é chamado de *vetor de Perron*.

2.2.2 Entrelaçamento de Autovalores

Denotamos por $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ os autovalores de uma matriz A de ordem n .

Para uma matriz quadrada A definimos A^* como sendo a transposta de matriz A com suas entradas conjugadas. Quando uma matriz satisfaz $A = A^*$ dizemos que A é uma matriz *Hermitiana*. Um resultado conhecido de Álgebra Linear estabelece que todos os autovalores de uma matriz Hermitiana são reais.

O resultado a seguir relaciona os autovalores de uma matriz Hermitiana e de uma submatriz principal na forma de um entrelaçamento de autovalores.

Teorema 2.6 *Considere A uma matriz Hermitiana de ordem n , r um inteiro com $1 \leq r \leq n$ e A_r uma submatriz principal de ordem r de A (obtida removendo $n - r$ linhas e suas colunas correspondentes de A). Para cada inteiro k tal que $1 \leq k \leq r$, obtemos*

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_r) \leq \lambda_{k+n-r}(A).$$

Esse resultado, também conhecido como *princípio da inclusão*, será utilizado em vários momentos em nossas demonstrações.

2.3 A conectividade algébrica

Lembramos que, dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, a *matriz Laplaciana* de G é a matriz de ordem n dada por $L(G) = [l_{ij}]$, onde $l_{ij} = -1$

se $v_i v_j \in E$, $l_{ii} = d(v_i)$ e $l_{ij} = 0$ nas entradas restantes. Quando conveniente, utilizaremos apenas L para denotar a matriz Laplaciana.

No *survey* sobre matriz Laplaciana [44], diversos resultados conhecidos sobre essa matriz são exibidos. Fiedler em [20], mostrou que um grafo é conexo se, e somente se, o seu segundo menor autovalor Laplaciano é positivo. Esse autovalor é denominado de *conectividade algébrica* e desempenha um papel fundamental em Teoria Espectral de Grafos. Denotamos a conectividade algébrica por $a(G)$. Em [2], é apresentado um resumo sobre alguns resultados em conectividade algébrica.

De acordo com [48], o estudo da conectividade algébrica é importante devido a sua estreita relação com a propriedade fundamental de expansão de um grafo. Expansão de grafos tem sido um importante tópico de estudo em ciência da computação desde o início da década de 1980 e, devido à isso, muitas versões dela foram investigadas sob vários nomes e de vários pontos de vista.

Apresentamos a seguir duas das melhores relações conhecidas entre a conectividade algébrica e expansão de um grafo. Seja G um grafo com conjunto de vértices V e seja X um subconjunto próprio de V . Escrevemos $e(X, V - X)$ para o número de arestas entre X e o seu complemento. Pode ser mostrado que

$$\frac{a(G)}{|V|} \leq \frac{e(X, V - X)}{|X||V - X|}.$$

Essa desigualdade nos diz que grafos com conectividade algébrica grande possuem muitas arestas saindo de cada conjunto de vértices do grafo.

Com o intuito de trabalhar com expansão em grafos, podemos definir a constante de Cheeger $h(G)$ de um grafo de G como sendo

$$h(G) = \min \left\{ \frac{e(X, V - X)}{|X|} : 1 \leq |X| \leq \frac{|V|}{2} \right\}.$$

A constante de Cheeger, também chamada de número isoperimétrico ou constante de expansão possui um papel fundamental no estudo de expansão de grafos.

Olhando para a definição, vemos que, a fim de calcular a constante, teríamos que considerar aproximadamente $2^{|V|-1}$ subconjuntos de vértices. Em particular, encontrar a constante Cheeger para um grafo em geral não é trivial, especialmente quando o número de vértices é grande. Logo, encontrar boas cotas e que sejam fáceis de calcular é de grande interesse. Uma cota bem conhecida para $h(G)$ em termos da conectividade algébrica é dada por

$$a(G) \leq 2h(G).$$

Por outro lado, pode-se apresentar desigualdades no sentido oposto. Uma das melhores cotas envolvendo $h(G)$ foi obtida por Mohar [45]. Se G é um grafo com grau máximo $\Delta > 0$ e conectividade algébrica $a(G)$, então

$$h(G) \leq \sqrt{a(G)(2\Delta - a(G))}.$$

Embora o grande interesse em conectividade algébrica venha de ciência da computação e suas aplicações, ao longo dos anos a conectividade algébrica apareceu em outras áreas da ciência. Dentre essas aplicações, particularmente o seguinte trabalho em biologia chama a atenção: *Algebraic connectivity may explain the evolution of gene regulatory networks* [49].

Lembramos que uma árvore é um grafo conexo e acíclico. O problema de ordenar árvores pela conectividade algébrica é uma área de pesquisa ativa. Durante algum tempo, pensou-se que seria possível provar que, comparando árvores com o mesmo número de vértices, a conectividade algébrica decresceria quando o diâmetro aumenta. Apenas em 1990, que Grone e Merris em [28] mostraram que essa afirmação era falsa, exibindo alguns contra-exemplos.

Importantes contribuições para esse problema com árvores de ordem n e diâmetro 4 foram feitas por Zhang [74]. Os autores Shao, Guo e Shan [60] determinaram as primeiras quatro árvores de ordem $n \geq 9$ com menor conectividade algébrica. Yuan, Shao e Zhang [71] introduziram seis classes de árvores com n

vértices e determinaram o ordenamento destas árvores por esse autovalor. Um dos mais importantes resultados sobre ordenamento de árvores é implicitamente dado por Fallat e Kirkland em [19]. Eles exibem a única árvore com n vértices e diâmetro d fixados que minimiza a conectividade algébrica. O problema de ordenar todas as árvores pela conectividade algébrica ainda está em aberto e tendo em vista a dificuldade para resolver esse problema recentemente o artigo [3] trouxe consigo um resumo sobre os principais resultados em ordenamento pela conectividade algébrica para árvores e grafos com poucos ciclos. Além disso, nesse artigo os autores sugerem certas questões que ao serem respondidas podem nos fornecer uma compreensão mais geral do problema.

Este trabalho trata da conectividade algébrica e de seus autovetores associados. Um dos mais notáveis resultados sobre a matriz Laplaciana é o Teorema da Monotonicidade de Fiedler [6]. Esse teorema relaciona a estrutura de vértices com qualquer autovetor associado à conectividade algébrica. Tal autovetor é comumente conhecido como *vetor de Fiedler*, assim chamado em homenagem ao matemático tcheco Miroslav Fiedler pelo seu trabalho [21] pioneiro no campo iniciado nos anos 70.

Mais recentemente, Kirkland, Fallat, Neumann e Shader em [32, 34] apresentaram resultados sobre o vetor de Fiedler que constituíram uma nova maneira de compreender como a conectividade algébrica se modifica quando modificamos um grafo. Esses resultados fornecem ferramentas de aplicação simples e diretas que, por si só, são interessantes. De fato, isso possibilitou que muitos resultados sobre conectividade algébrica fossem obtidos nos últimos anos [6, 19, 33, 57, 58].

Utilizando tais ferramentas, Rojo, Trevisan e o presente autor obtiveram em [59] uma ordem total pela conectividade algébrica para uma família de árvores chamadas de *caterpillars* (um *caterpillar* é uma árvore na qual a remoção de todos vértices pendentes a torna um caminho). Em [59], ainda é apresentada uma cota superior para a conectividade algébrica desses *caterpillars*, identificando

a única árvore que atinge essa cota. Esse trabalho de ordenamento constitui parte da dissertação de mestrado [52] do presente autor. Além disso, como trabalhos futuros pensou-se em estender certas ferramentas fundamentais de [34, 32] para grafos mais gerais. Nessa tese, apresentaremos algumas extensões que foram feitas desde então e discutiremos alguns exemplos. Na próxima seção introduziremos alguns conceitos que auxiliam nosso trabalho na direção de uma classe de grafos com maior generalidade.

3 CONECTIVIDADE ALGÉBRICA PARA GRAFOS K -CONEXOS

Nesse capítulo apresentamos novos resultados para a conectividade algébrica e o vetor de Fiedler de grafos sem pontos de articulação. Descrevemos como a estrutura do grafo se relaciona com o sinal das entradas de um vetor de Fiedler. Estes resultados estão publicados em [36].

3.1 Grafos sem pontos de articulação

Observamos que quando um grafo é 2-conexo existe apenas um bloco que é formado pelo grafo em si. Não é difícil de se convencer que um grafo é 2-conexo se, e somente se, o grafo não possui ponto de articulação algum. Desse modo, tais grafos possuem apenas um único bloco. Por outro lado, certos resultados fazem uso de pontos de articulação ou, equivalentemente, dois ou mais blocos. Sendo assim, esses resultados não se aplicam para grafos 2-conexos. Na Figura 2.1 podemos observar um grafo sem pontos de articulação, onde existe apenas um bloco.

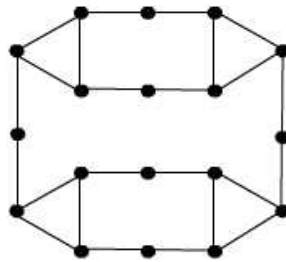


Figura 3.1: Grafo 2-conexo.

No contexto da conectividade algébrica e do vetor de Fiedler, investigamos grafos 2-conexos. No presente capítulo temos o intuito de estender resultados conhecidos que utilizam blocos e pontos de articulação para casos que ainda não foram abordados na literatura e, para isso, estenderemos tais definições.

Primeiro vamos generalizar a ideia de ponto de articulação. Dado um grafo k -conexo, chamamos de *dobradiça* um conjunto H com o menor número k de vértices tal que $G - H$ é desconexo. Usaremos a notação \widehat{H} para indicar que o conjunto de vértices é uma dobradiça.

Agora, é fácil ver que quando um grafo não é 2-conexo, então uma dobradiça \widehat{H} faz o papel de um ponto de articulação. Desse modo, para um grafo qualquer, a noção de dobradiça é mais apropriada para indicar um menor conjunto de vértices cuja remoção desconecta o grafo. As dobradiças serão cruciais nos novos resultados obtidos nesse capítulo.

Como vimos anteriormente, para estudar grafos que são k -conexos com $k > 1$, a noção anterior de blocos é insuficiente. Portanto, dado um grafo k -conexo chamaremos de *bloco* um subgrafo $(k + 1)$ -conexo maximal. Essa flexibilização nos permite estudar grafos mais gerais.

Notamos que, na interseção de blocos, estão as dobradiças do grafo e que as dobradiças definem onde os blocos se separam. Os conceitos de blocos e dobradiças estão ligados em muitos sentidos e neste trabalho terão papel fundamental no desenvolvimento de novos resultados.

3.2 Uma relação entre conectividade algébrica e a estrutura do grafo

Um autovetor associado à conectividade algébrica, chamado de *vetor de Fiedler* pelo seu trabalho [21], tem se mostrado útil em diversas áreas da ciência pura e aplicada. Fiedler percebeu que um autovetor associado a conectividade algébrica induz partições nos vértices do grafo que são agrupamentos conexos naturais. Seu trabalho relaciona um vetor de Fiedler com a estrutura do grafo e permitiu posteriormente o desenvolvimento de algoritmos de particionamento de grafos [50]

e o estudo da conectividade algébrica por meio dos autovetores [34, 32, 33], entre outros tantos resultados.

Com o objetivo de trabalhar com propriedades que relacionam o vetor de Fiedler com a estrutura do grafo, rotulamos seus vértices por v_1, v_2, \dots, v_n e denotamos o vetor de Fiedler por $y = [y_i]$. As coordenadas de y podem ser atribuídas aos vértices de G da seguinte maneira: a coordenada y_i numera o vértice v_i . Observamos que essa numeração não depende da ordem em que escolhemos os vértices para serem rotulados. Se trocarmos os vértices v_i e v_j de lugar, estaremos trocando as respectivas linhas e colunas da matriz Laplaciana e, portanto, estaremos trocando de lugar as entradas y_i e y_j do autovetor. Assim, a numeração continua fornecendo os mesmos valores aos vértices reordenados.

No trabalho original, Fiedler chama essa atribuição de valores de *numeração característica*. A numeração característica é sempre não nula e é única a menos de um fator multiplicativo se $a(G)$ é um autovalor simples.

O vetor de Fiedler vem sendo adotado por cientistas da computação e utilizado em diversos tipos de aplicações com algoritmos de particionamento. Para exemplificar, seguem alguns trabalhos significativos na área:

Shi, Malick, *Normalized cuts and image segmentation* [61], com mais de 10100 citações;

Simon, *Partitioning of unstructured problems for parallel processing* [62], com mais de 900 citações;

Spielman and Teng, *Spectral partitioning works: planar graphs and finite element meshes* [63], com mais de 300 citações;

Ding, He, Zha, Gu and Simon, *A min-max cut algorithm for graph partitioning and data clustering* [18], com mais de 700 citações.

As informações sobre o número de citações foram obtidas no Google Scholar.

O Teorema da Monotonicidade de Fiedler nos diz, entre outras coisas, que a numeração característica se comporta monotonicamente nos pontos de articulação de um grafo, conforme apresentaremos a seguir. Para melhor formulação do enunciado, diremos que um caminho em um grafo é *puro* se, e somente se, ele é simples e não contém mais de dois pontos de articulação de cada bloco de G .

Teorema 3.1 (Teorema da Monotonicidade de Fiedler) *Considere um grafo conexo G e uma numeração característica y . Então exatamente um dos dois casos ocorre:*

Caso A: *Existe um único bloco B_0 em G que contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, cada bloco restante tem apenas vértices com numeração positiva, negativa ou zero. Além disso, cada caminho puro P iniciando em B_0 e contendo apenas um vértice $v_k \in B_0$ possui a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação em P forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho de acordo com $y_k > 0$, $y_k < 0$ ou $y_k = 0$; no último caso todos os vértices em P têm valor zero.*

Caso B: *Nenhum bloco de G contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, existe um único vértice v_z com numeração zero que possui um vizinho com numeração diferente de zero. Esse vértice é um ponto de articulação. Além disso, cada caminho puro P iniciando em v_z tem a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho. Todo caminho que contém vértices positivamente e negativamente numerados passa por v_z .*

Observamos que, no caso B, cada bloco contém (com exceção de v_z) apenas vértices com numeração positiva, apenas vértices com numeração negativa ou apenas vértices com numeração zero.

Para chegar a esse teorema, Fiedler demonstra outros resultados relativos à numeração característica. O teorema a seguir descreve uma maneira para a qual o vetor de Fiedler separa o grafo em dois subgrafos conexos.

Teorema 3.2 (Fiedler [21]) *Considere o grafo conexo G com vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e denote por $y = [y_i]$ um de seus vetores de Fiedler. Defina*

$$V_1 = \{v_i \in V | y_i \geq 0\} \quad V_2 = \{v_i \in V | y_i \leq 0\}.$$

Então ambos os subgrafos induzidos pelos conjuntos V_1 e V_2 são conexos.

O teorema anterior pode ser facilmente interpretado no exemplo a seguir, onde vemos o vetor de Fiedler e a numeração característica do grafo.

Exemplo 1 *O grafo representado na figura a seguir possui vetor de Fiedler aproximado por*

$$y = [-.28868, -.28868, -.28868, -.28868, -.28868, -.28868, \\ .28868, .28868, .28868, .28868, .28868, .28868, 0, 0, 0]^T$$

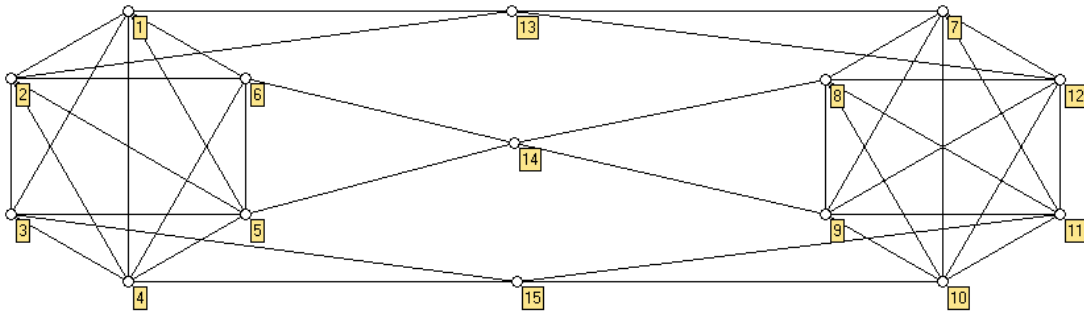


Figura 3.2: Grafo 3-conexo.

Observamos que os vértices com numeração negativa correspondem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os vértices positivos correspondem ao conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Além disso, esses conjuntos induzem subgrafos conexos, em concordância com o Teorema 3.2.

Faremos agora uma observação que sai do escopo da Teoria Espectral de Grafos e entra no contexto de equações diferenciais parciais de modo a estabelecer uma relação entre o trabalho de Fiedler com operadores contínuos. Tal relação é apresentada na forma do Teorema das Linhas Nodais de Courant [16].

Considere as autofunções $v(x)$ do Laplaciano

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

Uma linha nodal, ou nodo, de uma autofunção $v(x)$ denotado por \mathcal{N}_v é o conjunto em Ω tais que a autofunção $v(x)$ de (3.1) se anula. Assim,

$$\mathcal{N}_v = \{x \in \Omega : v(x) = 0\}.$$

Courant [14] (Capítulo 6, §6), enuncia o seguinte teorema sobre os nodos de uma autofunção.

Teorema 3.3 *Considere a equação (3.1) para um domínio Ω com condição de fronteira homogênea. Se os seus autovalores são ordenados em ordem crescente, então o nodo da n -ésima autofunção $v_n(x)$ divide o domínio em não mais do que n subdomínios.*

Os subdomínios aos quais Courant se refere vieram a ser conhecidos como domínios nodais. O análogo discreto desse problema de autofunções dá origem à matriz Laplaciana, que por sua vez se resume ao problema de autovalor/autovetor. O domínio estudado é dado por um grafo e quando consideramos o segundo menor autovalor a autofunção para esse domínio é o vetor de Fiedler para esse grafo. Desse ponto de vista, o Teorema 3.2 é um análogo discreto do Teorema 3.3 quando $n = 2$. O conjunto de vértices com numeração nula atua como as linhas nodais e os subgrafos conexos são os domínios nodais de Courant.

Entraremos agora em definições que distinguem dobradiças, blocos e componentes por meio da numeração característica de seus vértices. Dado

um grafo G com uma numeração característica $y = [y_i]$ denotamos por \widehat{H} uma dobradiça de G . Denotamos a numeração dos vértices em \widehat{H} por $y_{l_1}, y_{l_2}, \dots, y_{l_k}$, tal que $y_{l_1} \leq y_{l_2} \leq \dots \leq y_{l_k}$.

- Dizemos que a *dobradiça* \widehat{H} é *nula* se $y_{l_1} = y_{l_2} = \dots = y_{l_k} = 0$.
- Dizemos que a *dobradiça* \widehat{H} é *positiva* se $y_{l_1} > 0$, ou seja, todos os vértices de \widehat{H} possuem numeração positiva.
- Dizemos que a *dobradiça* \widehat{H} é *não negativa* se $y_{l_1} \geq 0$ e $y_{l_k} > 0$.
- Dizemos que a *dobradiça* \widehat{H} é *mista* quando ela possui vértices tais que $y_{l_1} < 0$ e $y_{l_k} > 0$, ou seja, \widehat{H} possui numeração positiva e negativa simultaneamente.

De maneira análoga definimos *dobradiça negativa* e *dobradiça não positiva*.

Desse modo, no exemplo anterior, para o vetor de Fiedler dado na Figura 3.2 os vértices 13, 14 e 15 formam uma dobradiça nula.

Agora, considere C uma componente do grafo $G - \widehat{H}$.

- Dizemos que C é uma *componente nula* quando a numeração característica de todos os seus vértices é zero.
- Dizemos que C é uma *componente positiva* quando a numeração característica de todos os seus vértices é positiva.
- Dizemos que C é uma *componente negativa* quando a numeração característica de todos os seus vértices é negativa.
- Dizemos que C é uma *componente mista* quando a numeração característica de seus vértices contém ao mesmo tempo vértices numerados positivamente e negativamente.

Da mesma forma trataremos a numeração característica dos vértices em um bloco de um grafo. Denote por B um bloco no grafo G .

- Dizemos que B é um *bloco nulo* quando a numeração característica de todos os seus vértices é zero.
- Dizemos que B é um *bloco positivo* quando a numeração característica de todos os seus vértices é positiva.
- Dizemos que B é um *bloco não negativo* quando a numeração característica de todos os seus vértices é não negativa.
- Dizemos que B é um *bloco não positivo* quando a numeração característica de todos os seus vértices é não positiva.
- Dizemos que B é um *bloco negativo* quando a numeração característica de todos os seus vértices é negativa.
- Dizemos que B é um *bloco misto* quando a numeração característica de seus vértices contém ao mesmo tempo vértices numerados positivamente e negativamente.

3.3 Lemas técnicos

Enunciaremos nessa seção alguns resultados que serão utilizados na demonstração de nossos principais resultados. Aqui, o número de autovalores negativos de uma matriz A será denotado por $\lambda_-(A)$. No artigo [4] os autores demonstram o seguinte corolário.

Lema 3.4 *Considere a matriz simétrica $n \times n$ particionada da forma*

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix},$$

onde B e D são matrizes quadradas. Seja u um vetor tal que

$$Bu = 0, \quad C^T u \neq 0.$$

Então

$$\lambda_-(A) \geq \lambda_-(B) + 1.$$

Os próximos resultados foram demonstrados por Fiedler e podem ser encontrados em [21].

Lema 3.5 (Fiedler [21]) *Considere uma matriz simétrica A com entradas fora da diagonal não positivas e com todos os autovalores não negativos (positiva semidefinida). Se A é irredutível e singular, então existe um vetor $y > 0$, único a menos de um fator multiplicativo, tal que $Ay = 0$.*

Corolário 3.6 (Fiedler [21]) *Se uma matriz A é simétrica, irredutível e com entradas fora da diagonal não positivas e existe um vetor $z \neq 0$ real tal que não é positivo nem negativo e $Az = 0$, então A não é positiva semidefinida.*

Lema 3.7 (Fiedler [21]) *Denote por A uma matriz real, quadrada e com entradas fora da diagonal não positivas. Se todos autovalores de A são positivos, então $A^{-1} \geq 0$.*

Lema 3.8 (Fiedler [21]) *Se A é simétrica com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, então nenhuma submatriz principal de $\lambda_s I - A$ possui mais do que $s - 1$ autovalores negativos.*

Teorema 3.9 (Fiedler [21]) *Considere o grafo G com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e denote por $y = [y_i]$ um vetor de Fiedler. Para $r \leq 0$, defina*

$$V_1 = \{v_i \in V | y_i \geq r\}.$$

Então o subgrafo induzido pelos vértices de V_1 é conexo.

Para $r \geq 0$, defina

$$V_2 = \{v_i \in V \mid y_i \leq r\}.$$

Então o subgrafo induzido pelos vértices de V_2 é conexo.

Corolário 3.10 (Fiedler [21]) Denote por $y = [y_i]$ uma numeração característica do grafo conexo $G = (V, E)$. Se $y_i > 0$, então existe um vértice v_j tal que $(v_i, v_j) \in E$ e $y_i > y_j$.

No artigo [5], a matriz Laplaciana perturbada de um grafo é definida como $\mathcal{L} = D - A$, onde D é qualquer matriz diagonal e A é a matriz de adjacência com pesos. O próximo lema segue de [5], onde os autores estudaram o vetor de Fiedler da matriz Laplaciana perturbada e nós reescrevemos aqui no contexto particular de matriz Laplaciana de modo a se encaixar no nosso contexto.

Lema 3.11 Seja G um grafo conexo. Seja y o vetor de Fiedler de L . Seja W um conjunto não vazio de G tal que $y(u) = 0$, para todo $u \in W$ e suponha que $G \setminus W$ é desconexo com $t \geq 2$ componentes C_1, C_2, \dots, C_t , tais que $y(C_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, t$. Então cada $y(C_i)$ é todo positivo ou todo negativo.

3.4 Resultados Estruturais

Agora vamos escrever a matriz Laplaciana de nossos grafos de maneira a facilitar a visualização e a representação das suas componentes pelas entradas da matriz. Considere um grafo G com uma dobradiça \widehat{H} e sejam C_0, C_1, \dots, C_r componentes de $G - \widehat{H}$. Por conveniência, vamos assumir que as últimas linhas e colunas da matriz Laplaciana do grafo representam os vértices de \widehat{H} . Agora podemos

escrever a matriz Laplaciana da forma

$$L = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 & c_0^1 & \cdots & c_0^k \\ 0 & A_1 & & 0 & c_1^1 & \cdots & c_1^k \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r & c_r^1 & \cdots & c_r^k \\ (c_0^1)^T & (c_1^1)^T & \cdots & (c_r^1)^T & d_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ (c_0^k)^T & (c_1^k)^T & \cdots & (c_r^k)^T & & & d_k \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde A_i corresponde aos vértices da componente conexa C_i , para $i = 0, 1, \dots, r$ e c_i^j é o vetor com entradas 0 e -1 que representa as arestas entre o vértice v_j de \widehat{H} e a componente conexa C_i . Daqui em diante, adotaremos esse formato durante nossas demonstrações.

Teorema 3.12 *Seja G um grafo e $y = [y_i]$ uma numeração característica de G . Seja \widehat{H} dobradiça de G e sejam C_0, C_1, \dots, C_r componentes de $G - \widehat{H}$. Denote a numeração dos vértices em \widehat{H} por l_1, \dots, l_k , onde $y_{l_1} \leq y_{l_2} \leq \dots \leq y_{l_k}$.*

(i) *Se \widehat{H} é nula e existe uma componente mista C_i , então essa é a única componente mista e todas as outras componentes são nulas.*

(ii) *Se \widehat{H} é nula e não existe componente mista, então cada componente é nula, positiva ou negativa.*

(iii) *Se \widehat{H} é não negativa, então apenas uma componente possui vértices numerados negativamente. Todos os outros vértices v_s fora da dobradiça e da componente com vértices negativos são tais que $y_{l_1} < y_s$.*

Demonstração Primeiro aplicamos o Lema 3.11 com $W = \widehat{H}$. Para provar (i) suponha que exista outra componente que não seja nula. Então pelo Lema 3.11 cada componente é positiva, negativa ou nula. Isso é uma contradição, pois existe uma

componente mista. Assim a única componente não nula é a componente mista. Isso mostra a parte (i).

Para provar (ii), como $\mathbf{1}$ é um autovetor de $L(G)$, então $\sum y_i = 0$. Como não existem componentes mistas, então existem no mínimo duas componentes não nulas, digamos C_0 e C_1 , tais que $y(C_0) \neq 0$ e $y(C_1) \neq 0$. Logo, o Lema 3.11 garante que cada componente C_0, C_1, \dots, C_r é positiva, negativa ou nula e isso prova a parte (ii).

Para demonstrar (iii), dividimos a prova em duas partes

Caso a $y_{l_1} > 0$ É fácil ver que y pode ser escrito como

$$y = [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}, y_{l_1}, \dots, y_{l_k}]^T,$$

onde $y_{l_k} > 0$. Do fato que

$$A_i y^{(i)} + \sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} = a y^{(i)}$$

para $i = 0, \dots, r$, podemos escrever

$$(A_i - aI)y^{(i)} = - \sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} \quad (3.3)$$

para $i = 0, \dots, r$.

Da mesma forma que na parte anterior, vemos que a matriz B possui no máximo um autovalor negativo. Assim, podemos supor que $A_i - aI$ para $i = 1, \dots, r$ são positivas semidefinidas.

Suponha que $A_i - aI$ é singular, então pela aplicação do Lema 3.5, existe um vetor $u > 0$ tal que $u^T(A_i - aI) = 0$. Logo $u^T(A_i - aI)y^{(j)} = 0$ implica que $\sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} = 0$. Observamos que c_i^j não pode ter todas entradas nulas (se tivesse, então o vértice v_j da dobradiça não estaria ligado a nenhum vértice da componente C_i). Agora como $c_i^j \leq 0$ e $y_m > 0$, temos que $c_i^j = 0$, uma contradição. Logo, $A_i - aI$ não é singular.

Desse modo, usando a equação (3.3), obtemos

$$y^{(i)} = -(A_i - aI)^{-1} \sum_{j=1}^k c_i^j y_l_j$$

para $i = 1, \dots, r$. Pela aplicação do Lema 3.7, obtemos $(A_i - aI)^{-1} \geq 0$. Como $c_i^j \leq 0$ e $y_l_j \geq 0$ temos que $y^{(i)} \geq 0$ para $i = 1, \dots, r$.

Resta mostrar que $y^{(i)} > 0$ para $i = 1, \dots, r$. Reescrevendo a equação (3.3), obtemos

$$\frac{1}{a(G)} y^{(i)} = A_i^{-1} y^{(i)} - \frac{1}{a(G)} A_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_l_j \right).$$

Agora, multiplicamos e dividimos por $1^T y^{(i)}$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(G)} y^{(i)} &= A_i^{-1} y^{(i)} - \frac{1}{a(G) 1^T y^{(i)}} A_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_l_j \right) 1^T y^{(i)} \\ &= \left[A_i^{-1} - \frac{1}{a(G) 1^T y^{(i)}} A_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_l_j \right) 1^T \right] y^{(i)}. \end{aligned}$$

Pela aplicação do Lema 3.7 para a matriz A_i , concluímos que $(A_i)^{-1} \geq 0$. Desse modo, é fácil ver que a matriz $M = A_i^{-1} - \frac{1}{a(G) 1^T y^{(i)}} A_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_l_j \right) 1^T$ é não negativa. Como a matriz A_i^{-1} é irredutível, então M é irredutível, pois estamos somando uma matriz não negativa. Além disso, $y^{(i)}$ é um autovetor de M .

Portanto, aplicando o Teorema de Perron-Frobenius para a matriz M , obtemos um autovetor $x > 0$ associado com $\rho(M)$. Assim, $\rho(M) x^T y^{(i)} = x^T M y^{(i)} = \frac{1}{a(G)} x^T y^{(i)}$. E como $x^T y^{(i)} > 0$, segue que $\frac{1}{a(G)} = \rho(M)$, ou seja, x é múltiplo de $y^{(i)}$. Assim, $y^{(i)} > 0$ e todos os vértices com numeração negativa estão na componente C_0 .

Caso b: $y_{l_1} = 0$

Como $[1, 1, \dots, 1]^T$ é autovetor de $L(G)$, então $\sum y_i = 0$. Assim, existe um vértice em G com numeração negativa. Suponha que C_0 contém tal vértice. Para provar o caso b, é suficiente mostrar que todo vértice v_t com $y_t \leq y_l$ está em C_0 ou \hat{H} .

Suponha primeiro que $y_t < y_{l_1}$ para algum v_t . Então existe $\epsilon > 0$ tal que $y_{l_1} - \epsilon > 0$ e $y_{l_1} - \epsilon \geq y_t$. Pelo Teorema 3.9, o subgrafo A induzido pelos vértices $M = \{v_s \in V | y_s \leq y_{l_1} - \epsilon\}$ é conexo. Como A contém no mínimo um vértice negativo e $H \notin A$, então $A \subset C_0$ e, portanto, $v_t \in C_0$. Por outro lado, suponha que $y_s = y_{l_1}$. Pelo Corolário 3.10, existe um vértice $v_t \in G$ adjacente a v_s com $y_t < y_s$. Sendo $v_t \neq v_{l_1}$, pela parte anterior tem-se $v_t \in C_0$ e como C_0 é uma componente conexa, então $v_s \in C_0$ ou \widehat{H} , concluindo o caso b.

Isso prova o teorema. \square

Observamos que para os casos de uma dobradiça negativa ou não positiva o teorema acima também se aplica, bastando aplicar o resultado para um múltiplo negativo do vetor de Fiedler em questão. Para o caso em que a dobradiça é mista, o exemplo abaixo mostra que podem existir mais de uma componente mista ou até mesmo nenhuma.

Exemplo 2 *O ciclo com 10 vértices da Figura 3.3 possui conectividade algébrica $2 - 2 \cos(\frac{\pi}{5})$ (com multiplicidade dois), e um vetor de Fiedler dado aproximadamente por*

$$y = [-.26287, -.42533, -.42533, -.26287, -.00000, \\ .26287, .42533, .42533, .26287, -.00000]^T$$

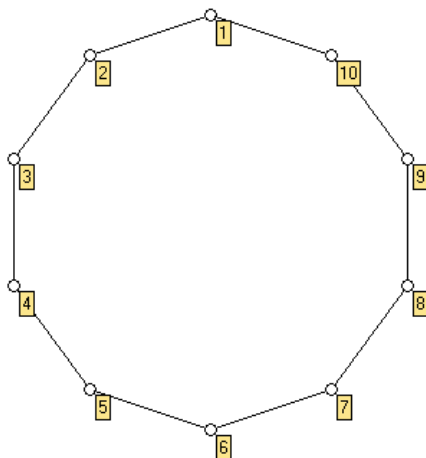


Figura 3.3: Ciclo com 10 vértices.

Considere as dobradiças $\hat{H} = \{v_1, v_6\}$ e $\hat{I} = \{v_3, v_8\}$. Na dobradiça \hat{H} temos duas componentes e nenhuma é mista, entretanto em \hat{I} existem duas componentes mistas.

O grafo do próximo exemplo ilustra os três casos do Teorema 3.12.

Exemplo 3 O grafo da Figura 3.4 possui conectividade algébrica $2 - \sqrt{2}$ (com multiplicidade um), e um autovetor de Fiedler é dado aproximadamente por

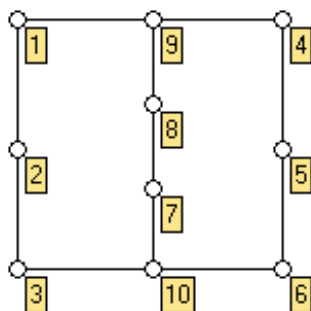
$$y = [-0.35355, -0.5, -0.35355, 0.35355, 0.5, 0.35355, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Esse grafo é 2-conexo e podemos escolher $\{v_7, v_9\}$ como uma dobradiça nula. Ele possui uma componente mista e uma componente nula de acordo com o caso (i) do Teorema 3.12.

Claramente, $\{v_9, v_{10}\}$ é uma dobradiça nula que satisfaz o caso (ii) do Teorema 3.12 com apenas uma componente positiva, negativa e nula.

Finalmente, o conjunto $\{v_4, v_6\}$ forma uma dobradiça não negativa (de fato positiva) e o caso (iii) do Teorema 3.12 garante que existe apenas uma com-

Figura 3.4: Um grafo 2-conexo.



ponente com numeração negativa. Além disso, a componente restante formada por um único vértice $\{v_5\}$ possui numeração característica maior que v_4 .

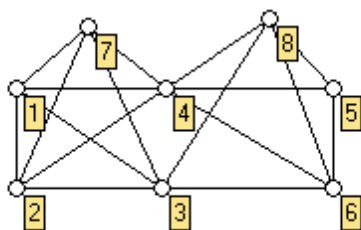
Nós também podemos exibir grafos que possuem apenas uma dobradiça que é mista. O próximo exemplo ilustra isso.

Exemplo 4 O grafo da Figura 3.5 possui conectividade algébrica igual a menor raiz da cúbica $z^3 - 15z^2 + 66z - 74$, que é aproximadamente 1.7101, e a conectividade algébrica é algebricamente simples. Um vetor de Fiedler é aproximadamente igual a

$$y = [-0.37945, -0.37945, -0.13567, 0.02565, 0.55636, 0.34601, -0.37945, 0.34601]^T.$$

Assim, essa numeração característica fornece uma dobradiça mista $\{v_3, v_4\}$. Além

Figura 3.5: Grafo com única dobradiça mista.



do mais, essa é a única dobradiça para esse grafo.

3.5 Caracterizando a conectividade algébrica

Nessa seção usamos nosso teorema estrutural para computar a conectividade algébrica. Os resultados são uma extensão natural de [34], onde pontos de articulação foram considerados.

Considere um grafo G e sua matriz Laplaciana L . Para uma dobradiça \widehat{H} do grafo, denote as componentes conexas de $G - \widehat{H}$ por C_0, C_1, \dots, C_r . Para cada componente, seja $L(C_i)$ a submatriz principal de L correspondendo aos vértices de C_i . O *valor de Perron* de C_i é o valor de Perron da matriz positiva $L^{-1}(C_i)$ e dizemos que C_j é uma *componente de Perron em \widehat{H}* se seu valor de Perron é máximo dentre todas as componentes C_0, C_1, \dots, C_r .

Teorema 3.13 *Seja G um grafo e $y = [y_i]$ uma numeração característica de G . Se existe uma dobradiça nula \widehat{H} , tal que $G - \widehat{H}$ não possui componente mista, então existem duas ou mais componentes de Perron em \widehat{H} . Nesse caso, $a(G) = \frac{1}{\rho(L(C)^{-1})}$ para toda componente de Perron C em \widehat{H} .*

Demonstração Sejam C_0, C_1, \dots, C_r componentes de $G - \widehat{H}$ e considere a matriz Laplaciana no formato (3.2). Claramente, $L(C_i) = A_i$. Particione o autovetor y de acordo com a numeração característica em cada componente C_i da forma

$$y = [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}, 0, \dots, 0]^T.$$

Da relação autovetor autovalor e pela forma de y , podemos escrever para cada bloco $L(C_i)$ a relação

$$L(C_i)y^{(i)} = a(G)y^{(i)}.$$

Do fato de que $\sum y^{(i)} = 0$ temos que existem entradas positivas e negativas em y . Então temos pela parte (ii) do Teorema 3.12 que existem ao menos dois vetores $y^{(r)} > 0$ e $y^{(s)} < 0$. Pelo Teorema de Perron-Frobenius, o único autovetor com todas as entradas de mesmo sinal é o vetor de Perron. Portanto, $y^{(r)}$ e $y^{(s)}$, são os vetores

de Perron para $L(C_r)^{-1}$ e $L(C_s)^{-1}$, respectivamente. Se $y^{(i)} = 0$ para alguma componente C_i , então ela não é a componente de Perron. Logo, para toda componente não nula temos a relação para o vetor de Perron $y^{(i)}$

$$L(C_i)^{-1}y^{(i)} = \frac{1}{a(G)}y^{(i)}.$$

Resta provar que C_r e C_s são componentes de Perron em \widehat{H} . Suponha, por contradição, que isso não seja verdade. Então existiria uma outra componente, digamos C_3 , cujo valor de Perron é maior que $1/a(G)$. Chamando de x o vetor de Perron de $L(C_3)^{-1}$, normalizado tal que $\mathbf{1}^T x = 1/\sqrt{2}$, e definindo $u = y^{(r)}/\sqrt{2}\mathbf{1}^T\|y^{(r)}\|$, considere o vetor

$$w = [u, 0, \dots, 0, -x, 0, \dots, 0]^T,$$

que evidentemente é ortogonal a

$$[1, 1, \dots, 1].$$

Do fato que

$$w^T Lw = au^T u + \frac{1}{\rho(L(C_3)^{-1})}x^T x < au^T u + ax^T x = aww^T \quad (3.4)$$

obtemos uma contradição com o fato de que a conectividade algébrica pode ser caracterizada da forma

$$a(G) = \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathbf{1}}} x^T Lx. \quad (3.5)$$

Dessa forma, obtemos que C_r e C_s são de fato as componentes de Perron em \widehat{H} . Isso conclui a demonstração. \square

Para o caso em que a dobradiça possui componentes mistas também podemos descrever a conectividade algébrica em termos de suas componentes.

Teorema 3.14 *Seja G um grafo e $y = [y_i]$ uma numeração característica de G . Se existe uma dobradiça nula \widehat{H} , tal que $G - \widehat{H}$ possui componente mista C , então $a(G) = \lambda_2(L(C))$.*

Demonstração Pela parte (i) do Teorema 3.12 todas as componentes são nulas, exceto a componente mista. Chamando de $A = L(C)$ e $B = L(G - C - \widehat{H})$, podemos escrever a matriz Laplaciana de G da forma

$$L = \begin{bmatrix} A & 0 & c_0^1 & \cdots & c_0^k \\ 0 & B & c_1^1 & \cdots & c_1^k \\ (c_0^1)^T & (c_1^1)^T & d_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ (c_0^k)^T & (c_1^k)^T & & & d_k \end{bmatrix},$$

onde $c_i^j < 0$. Desse modo, y pode ser escrito como

$$y = [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}, y_{l_1}, \dots, y_{l_k}]^T.$$

Do fato que \widehat{H} é nula, temos $y_i = 0$. Da relação $Ly = a(G)y$, obtemos

$$Ay^A = a(G)y^A \quad (3.6)$$

E portanto, $a(G)$ é autovalor da matriz A . Pelo Teorema de entrelaçamento de autovalores, vale que $a(G) \leq \lambda_2(A)$. Como $\lambda_1(A) = \frac{1}{\rho(L(C)^{-1})}$, então o autovetor associado à $\lambda_1(A)$ possui todas as entradas positivas e, portanto, utilizando a equação (3.6) $a(G)$ não pode ser o menor autovalor de A . Logo vale que $a(G) = \lambda_2(A)$, concluindo a demonstração. \square

Corolário 3.15 *Nas hipóteses do Teorema 3.14, C é a única componente de Perron em \widehat{H} .*

Demonstração Considere a submatriz de L

$$L^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema de entrelaçamento de autovalores, sabemos que $a(G) \leq \lambda_2(L^*)$. Como $\lambda_1(L(C)) = \frac{1}{\rho(L(C)^{-1})}$ é autovalor simples de $L(C)$, pelo Teorema temos $\lambda_1(L(C)) <$

$\lambda_2(L(C)) \leq \lambda_2(L^*)$. Suponha, por contradição que exista outra componente em \widehat{H} , digamos D , que seja componente de Perron. Obtemos $\rho(L(C)^{-1}) \leq \rho(L(D)^{-1})$ e, além disso, é fácil ver que $\lambda_1(L(C)) = \frac{1}{\rho(L(C)^{-1})}$ e $\lambda_1(L(D)) = \frac{1}{\rho(L(D)^{-1})}$ são autovalores de L^* . Desse modo, obtemos

$$\lambda_1(L(D)) \leq \lambda_1(L(C)) < \lambda_2(L(C)) \leq \lambda_2(L^*).$$

Isso é uma contradição, pois obtemos dois autovalores de L^* menores que $\lambda_2(L^*)$. \square

Os Teoremas 3.13 e 3.14 descrevem a conectividade algébrica de um grafo que possui dobradiça nula. Quando isso ocorre, a conectividade algébrica será sempre um autovalor de uma componente na dobradiça. Nesse caso, a única estrutura do grafo que determina a conectividade algébrica é essa componente e nada mais.

O próximo exemplo fornece um caso concreto onde o Teorema 3.14 se aplica.

Exemplo 5 *Relembre o grafo G da Figura 3.4, ele possui conectividade algébrica aproximadamente 0.58579. Também, $\{v_7, v_9\}$ é uma dobradiça nula com uma componente mista $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_{10}\}$. Sua matriz Laplaciana correspondente é dada por*

$$L(C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e $L(C)$ possui autovalores (aproximadamente) iguais a

$$0.32487, 0.58579, 1.46081, 2, 2, 3, 3.41421, 4.21431.$$

Logo, $a(G) = \lambda_2(L(C))$ de acordo com o Teorema 3.14.

Para dobradiças não negativas e não positivas também é possível descrever a conectividade algébrica utilizando o valor de Perron de certas matrizes. O teorema a seguir esclarece como isso pode ser feito.

Teorema 3.16 *Seja G um grafo e $y = [y_i]$ uma numeração característica de G . Seja \widehat{H} uma dobradiça não negativa (não positiva) de G . Para cada componente C positiva (ou negativa) em \widehat{H} , existe uma matriz positiva M e um escalar $\gamma \geq 0$ tais que*

$$\rho(L(C)^{-1} + \gamma M) = \frac{1}{a(G)}.$$

Além disso, $M = 0$ se, e somente se, \widehat{H} é nula.

Demonstração Chamando de $A = L(C)$ e $B = L(G - C - \widehat{H})$, podemos escrever a matriz Laplaciana de G da forma

$$L = \begin{bmatrix} A & 0 & c_0^1 & \cdots & c_0^k \\ 0 & B & c_1^1 & \cdots & c_1^k \\ (c_0^1)^T & (c_1^1)^T & d_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ (c_0^k)^T & (c_1^k)^T & & & d_k \end{bmatrix},$$

onde $c_i^j < 0$. Desse modo, y pode ser escrito como

$$y = [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}, y_{l_1}, \dots, y_{l_k}]^T.$$

Como C é positiva, então $y^A \geq 0$ (quando C é negativa a demonstração é análoga). Do fato que \widehat{H} é não negativa, temos $y_i \geq 0$. Da relação $Ly = a(G)y$, obtemos

$$Ay^A + \sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} = a(G)y^A$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{a(G)}y^A = A^{-1}y^A - \frac{1}{a(G)}A^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} \right).$$

Agora, multiplicando e dividindo por $1^T y^A$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(G)}y^A &= A^{-1}y^A - \frac{1}{a(G)1^T y^A}A^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} \right) 1^T y^A \\ &= (A^{-1} + \gamma M)y^A, \end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{1}{a(G)1^T y^A}$ e $M = -A^{-1} \left(\sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} \right) 1^T$. Como C é componente positiva, então $y^A > 0$ e, portanto, $\gamma \geq 0$. Pelo Lema 3.7, temos $A^{-1} \geq 0$ e do fato que $\sum_{j=1}^k c_i^j y_{l_j} \leq 0$, tem-se $M \geq 0$. Como $c_i^j \leq 0$, $M = 0$ se, e somente se, $y_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$, ou seja, quando \widehat{H} é nula. \square

Exemplo 6 A Figura 3.4, mostra um grafo G onde o conjunto $\{v_4, v_6\}$ forma uma dobradiça não-negativa com uma componente positiva formada por um vértice isolado $C = \{v_5\}$. A fim de caracterizar a conectividade algébrica usando o Teorema 3.16, a prova dada fornece uma descrição de γ e M .

O grafo G possui vetor de Fiedler

$$y = [-0.35355, -0.5, -0.35355, 0.35355, 0.5, 0.35355, 0, 0, 0, 0]^T$$

e $a(G) = 0.58579$. Usando a notação da prova do Teorema 3.16, nós temos $L(C) = [2]$ e $y^{(0)} = [0.5]$. Portanto, $\gamma = \frac{1}{a(G)y^0} = 3.41419$ e

$$M = -L(C)^{-1} \left(\sum_{j=1}^2 -y_{l_j} \right) = -[0.5] ([-0.35355] + [-0.35355]) = [0.35355].$$

Assim, $L(C)^{-1} + \gamma M = [1.707087864]$ que possui vetor de Perron $[0.5]$ e satisfaz $\rho(L(C)^{-1} + \gamma M) = \frac{1}{a(G)}$.

Uma questão que queremos abordar é quando ou não o conjunto de vetores de Fiedler identifica a mesma dobradiça nula. É possível descrever outros

vetores de Fiedler identificando a mesma dobradiça nula, sempre que se possui informação sobre algum vetor de Fiedler. Mais precisamente, o seguinte resultado constrói o conjunto de todos os vetores de Fiedler que identifica \widehat{H} como uma dobradiça nula.

Teorema 3.17 *Seja G um grafo e $y = [y_i]$ uma numeração característica de G . Suponha que existe uma dobradiça nula \widehat{H} , tal que $G \setminus \widehat{H}$ não possui componentes mistas, e para $t \geq 2$, seja C_1, C_2, \dots, C_t o conjunto de componentes de Perron de $G \setminus \widehat{H}$. Assuma que a matriz Laplaciana é da forma (3.2). Seja $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(t)}$ o conjunto de vetores de Perron para o conjunto de matrizes $L(C_1)^{-1}, L(C_2)^{-1}, \dots, L(C_t)^{-1}$ tais que $\mathbf{1}^T y^{(i)} = 1$. Defina, para $i = 2, \dots, t$, o vetor*

$$f_i = \begin{cases} y^{(1)}(v) & v \in C_1, \\ -y^{(i)}(v) & v \in C_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Então f_2, f_3, \dots, f_t é um conjunto de autovetores linearmente independentes associados com $a(G)$ e cada vetor de Fiedler que identifica \widehat{H} como uma dobradiça nula é uma combinação linear de f_i , portanto não possui componente mista.

Demonstração É fácil ver que $\mathbf{1}^T f_i = 0$ e que f_2, f_3, \dots, f_t é um conjunto linearmente independente de vetores. Além disso, $\frac{1}{\rho(L(C_1)^{-1})}$ é o autovetor de $L(C_1)$ associado com $y^{(1)}$, para $i = 2, \dots, t$. Pela construção de f_i , concluímos que $\frac{1}{\rho(L(C_1)^{-1})}$ é o autovetor associado com f_i . Então, obtemos

$$\frac{f_i^T L f_i}{f_i^T f_i} = \frac{1}{\rho(L(C_1)^{-1})}.$$

Usando o Teorema 3.13, obtemos

$$\frac{f_i^T L f_i}{f_i^T f_i} = a(G),$$

para $i = 2, \dots, t$, assim f_2, f_3, \dots, f_t é um conjunto de autovetores linearmente independentes associados com $a(G)$.

Agora seja z o vetor de Fiedler que identifica \widehat{H} como uma dobradiça nula. Da relação $Lz = a(G)z$, segue que para cada componente C_i em \widehat{H} que $L(C_i)z(C_i) = a(G)z(C_i)$. Como $L(C_i)y^{(i)} = a(G)y^{(i)}$, pelo Teorema de Perron-Frobenius $\frac{1}{\rho(L(C_i)^{-1})}$ é um autovalor simples de $L(C_i)^{-1}$. Assim, segue que $z(C_i)$ é um múltiplo escalar de $y^{(i)}$. Isso implica que z é uma combinação linear de f_i s.

Como construímos todo o conjunto de vetores de Fiedler que identifica a mesma dobradiça nula, é natural perguntar se possível ou não obter outros vetores de Fiedler que não identificam a mesma dobradiça nula. A resposta é positiva e o próximo exemplo mostra isso.

Exemplo 7 *Considere o grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Seus autovalores Laplacianos são conhecidos e dados por 0, 6 e 3, o último com multiplicidade quatro. Em particular, $K_{3,3}$ possui conectividade algébrica 3. Se rotularmos os vértices em uma partição como v_1, v_2 e v_3 , então o conjunto $\widehat{H} = \{v_4, v_5, v_6\}$ é uma dobradiça. Em \widehat{H} , temos três componentes de Perron, a saber $C_i = \{v_i\}, i = 1, 2, 3$, com $\rho(L(C_i)^{-1}) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$. É fácil ver que o conjunto de autovetores que gera o autoespaço associado a conectividade algébrica é dado por $w = [1, -1, 0, 0, 0, 0]^T$, $x = [1, 0, -1, 0, 0, 0]^T$, $y = [0, 0, 0, 0, -1, 1]^T$ e $z = [0, 0, 0, -1, 0, 1]^T$. Agora, podemos ver que w e x identificam \widehat{H} como nula, mas que \widehat{H} é não nula para y e z .*

3.6 Limitando a conectividade algébrica

Nesta seção serão introduzidos alguns conceitos que vão nos ajudar a entender melhor como limitar a conectividade algébrica. Mais especificamente, queremos relacionar a conectividade algébrica como uma função do número de arestas entre uma dobradiça e as suas componentes, como uma tentativa de generalizar o fato bem conhecido [20] que, para um grafo k -conexo, $a(G) \leq k$.

Seja \widehat{H} uma dobradiça de um grafo G e seja C uma componente em \widehat{H} . Sejam v_1, v_2, \dots, v_t os vértices na componente C . Vamos denotar por $d_{\widehat{H}}(v_i)$ o número de arestas conectando v_i para os vértices de \widehat{H} . Similarmente, para cada vértice u de \widehat{H} , denote por $d_C(u)$ o número de vértices em C que são adjacentes a u .

Além disso, nós introduzimos a quantidade

$$\mathcal{S}_C = \max_{v_i \in C} \{d_{\widehat{H}}(v_i)\} \quad (3.8)$$

que será chamada de *força* de uma componente C .

Denotando o conjunto de componentes em \widehat{H} por H , nós definimos a quantidade

$$\mathcal{S}_{\widehat{H}} = \max_{C \in H} \{\mathcal{S}_C\} \quad (3.9)$$

que será chamada de *força* de uma dobradiça \widehat{H} .

Teorema 3.18 *Seja G um grafo e seja \widehat{H} uma dobradiça de G . Para cada $j = 0, \dots, r$, chame de p_j o número de vértices na componente C_j . Então obtemos as seguintes conclusões.*

- a) $a(G) \leq \mathcal{S}_{\widehat{H}}$.
- b) Se $a(G) = \mathcal{S}_{\widehat{H}}$, então cada vértice de $G \setminus \widehat{H}$ é adjacente a $\mathcal{S}_{\widehat{H}}$ vértices da dobradiça \widehat{H} e para cada $i, j = 0, \dots, r$ e cada $u \in \widehat{H}$ nós temos $p_i d_{C_j}(u) = p_j d_{C_i}(u)$.
- c) Se cada vértice de $G \setminus \widehat{H}$ é adjacente a $\mathcal{S}_{\widehat{H}}$ vértices na dobradiça \widehat{H} e para cada $i, j = 0, \dots, r$ e cada $u \in \widehat{H}$ temos $p_i d_{C_j}(u) = p_j d_{C_i}(u)$, então $\mathcal{S}_{\widehat{H}}$ é um autovalor Laplaciano de G . Nesse caso, a multiplicidade de $\mathcal{S}_{\widehat{H}}$ como um autovalor é no mínimo r .

Demonstração Escrevemos a matriz Laplaciana L na forma (3.2). Seja x^T o vetor dado por

$$\left[p_1 \mathbf{1}^T \quad -p_0 \mathbf{1}^T \quad 0^T \quad \dots \quad 0^T \right]^T,$$

onde o particionamento de x está de acordo com L em (3.2). Claramente $\mathbf{1}^T x = 0$. Como $\mathbf{1}^T A_0 \mathbf{1} \leq p_0 \mathcal{S}_{\hat{H}}$ e $\mathbf{1}^T A_1 \mathbf{1} \leq p_1 \mathcal{S}_{\hat{H}}$, segue imediatamente que $x^T L x \leq x^T x \mathcal{S}_{\hat{H}}$. Assim, concluindo a) diretamente.

Para estabelecer b), suponha que $a(G) = \mathcal{S}_{\hat{H}}$. Assim necessariamente o vetor x acima precisa ser um autovetor de G . Nesse caso, encontramos que cada vértice de $C_0 \cup C_1$ é adjacente a $\mathcal{S}_{\hat{H}}$ vértices na dobradiça \hat{H} , e além disso, para cada vértice $u \in \hat{H}$ nós temos $p_1 d_{C_0}(u) = p_0 d_{C_1}(u)$. Evidentemente o argumento acima se aplica a qualquer par de componentes C_i, C_j , e b) segue.

Para estabelecer c), assumamos que cada vértice de $G \setminus \hat{H}$ é adjacente a $\mathcal{S}_{\hat{H}}$ vértices na dobradiça \hat{H} , e além disso se para cada $i, j = 0, \dots, r$ e para cada $u \in \hat{H}$ nós temos $p_i d_{C_j}(u) = p_j d_{C_i}(u)$. Assim $\mathbf{1}^T A_0 \mathbf{1} = p_0 \mathcal{S}_{\hat{H}}$ e $\mathbf{1}^T A_1 \mathbf{1} = p_1 \mathcal{S}_{\hat{H}}$, o que implica que x é um autovetor para o autovalor $\mathcal{S}_{\hat{H}}$. Como nós podemos associar um vetor adequado x ao par de componentes $C_0, C_j, j = 1, \dots, r$, nós podemos dessa forma construir r autovetores linearmente independentes para o autovalor $\mathcal{S}_{\hat{H}}$.

Exemplo 8 *Considere o grafo G_1 da Figura 3.6. A dobradiça $\hat{H} = \{9, 10\}$ possui duas componentes de Perron C e D , cada uma com $\mathcal{S}_C = \mathcal{S}_D = 1$. Desse modo, $\mathcal{S}_{\hat{H}} = 1$ e o Teorema 3.18 a) garante que $a(G_1) \leq 1$. Nesse exemplo temos que $a(G_1) = 1$; as condições do Teorema 3.18 b) podem ser verificadas por inspeção da Figura 3.6.*

Por outro lado, considere o grafo G_2 da Figura 3.7, que também possui $\{9, 10\}$ como uma dobradiça. Por uma aplicação similar do Teorema 3.18 a) segue que $a(G_2) \leq 1$. De fato, $a(G_2) = 3 - \sqrt{6} < 1$, enquanto o Teorema 3.18 c) garante que 1 é um autovalor de G_2 .

Esses exemplos mostram que as condições do Teorema 3.18 c) não são suficientes para ter $a(G) = \mathcal{S}_{\hat{H}}$ e que ela depende não apenas da força de uma

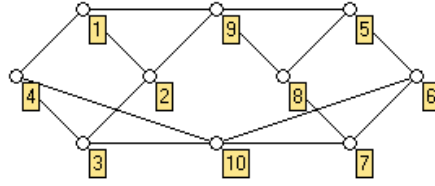


Figura 3.6: Exemplo 1

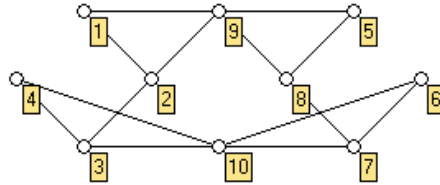


Figura 3.7: Exemplo 2

dobradiça, mas também da estrutura da componente. Desso modo, é um problema em aberto encontrar condições necessárias e suficientes para garantir que $a(G) = \mathcal{S}_{\hat{H}}$.

3.7 Observações sobre expansão em grafos

A definição de força para uma dobradiça ou uma componente pode se relacionar com o conceito de expansão de grafos. Por exemplo, observe a constante de Cheeger

$$h(G) = \min \left\{ \frac{e(X, V - X)}{|X|} : 1 \leq |X| \leq \frac{|V|}{2} \right\}.$$

e a força de uma componente

$$\mathcal{S}_C = \max_{v_i \in C} \{d_{\hat{H}}(v_i)\}. \quad (3.10)$$

Primeiramente, é fácil ver que vale a relação

$$\mathcal{S}_C \leq e(C, V - C).$$

Portanto, obtemos a relação

$$\frac{\mathcal{S}_C}{|C|} \leq \frac{e(C, V - C)}{|C|}.$$

Assim, sempre que a componente C é um minimizante de

$$\left\{ \frac{e(X, V - X)}{|X|} : 1 \leq |X| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

vale a relação

$$\mathcal{S}_C \leq |C|h(G).$$

Visto que que a constante de Cheeger e força estão relacionados com a conectividade algébrica, nessa seção faremos algumas considerações sobre ambas as relações. Temos por um lado a relação $a(G) \leq 2h(G)$. Por outro lado, o Teorema 3.18 relaciona força com conectividade algébrica.

Sabemos que $a(G) \leq k$, conforme demonstrado em [20]. Uma pergunta que poderia ser feita é: quando um grafo k -conexo, para $k > 1$, satisfaz $a(G) \leq 1$? Apresentaremos um exemplo em que por meio do Teorema 3.18 podemos garantir $a(G) \leq 1$. Além disso, nesse caso a desigualdade $a(G) \leq 2h(G)$ não seria suficiente para responder a essa pergunta e o conceito de força fornece uma desigualdade melhor.

Exemplo 9 A Figura 3.8 a seguir, apresenta um exemplo onde o conceito de força da dobradiça aproxima melhor a conectividade algébrica do que a constante de Cheeger. O grafo apresentado é 3-conexo e $a(G) \leq 1$.

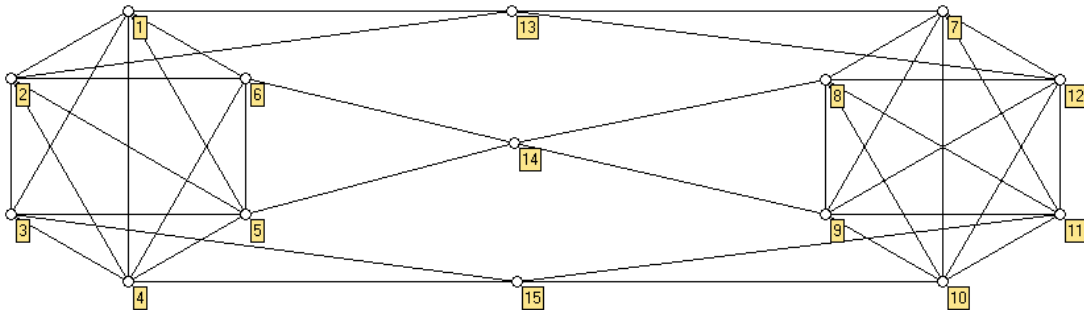


Figura 3.8: Grafo 3-conexo.

Para o grafo G da figura, se considerarmos o conjunto de vértices X da constante de Cheeger como sendo $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então teremos $e(X, V - X) = 6$ e, dessa forma,

$$h(G) = \min \left\{ \frac{e(X, V - X)}{|X|} : 1 \leq X \leq \frac{|V|}{2} \right\} = \frac{6}{|X|} = 1.$$

Para esse caso, a desigualdade $a(G) \leq 2h(G)$ nos fornece que $a(G) \leq 2$.

Por outro lado, utilizaremos o Teorema 3.18. A dobradiça $\widehat{H} = \{13, 14, 15\}$ apresenta duas componentes de Perron C e D , cada uma com $\mathcal{S}_C = \mathcal{S}_D = 1$. Agora o Teorema 3.18 garante que $a(G) \leq 1$. Desse modo, apresentamos um grafo 3-conexo com $a(G) \leq 1$ e observamos que essa mesma ideia pode ser utilizada para construir uma classe de grafos mais geral com $a(G) \leq 1$.

4 UMA TEORIA DE FIEDLER PARA A LAPLACIANA PERTURBADA

Neste capítulo demonstramos um novo teorema de monotonicidade para a autofunção harmônica correspondendo ao segundo menor autovalor da matriz Laplaciana perturbada sobre os pontos de articulação de um grafo. Usamos a noção de componentes de Perron para a matriz Laplaciana perturbada de um grafo e mostramos como o segundo menor autovalor pode ser caracterizado usando essa definição. Além disso, exploramos propriedades de particionamento fornecidas pelas autofunções harmônicas e relacionamos com as propriedades de particionamento fornecidas por um vetor de Fiedler. Os novos resultados apresentados nesse capítulo foram submetidos para publicação em [56].

4.1 Motivação

O objetivo da Teoria Espectral de Grafos é determinar propriedades estruturais de um grafo através do espectro de uma matriz associada a esse grafo. As matrizes que são bem conhecidas e que existem muitos resultados, são as matrizes de adjacência A e a matriz Laplaciana (combinatória) $L = d - A$, onde d é a matriz diagonal com os graus dos vértices.

A matriz Laplaciana normalizada $\mathcal{L} = d^{-1/2} L d^{-1/2}$, popularizada por Chung [11] nos anos 90 tem um registro mais recente e poucos resultados são conhecidos. Em particular, dado um grafo G , poderíamos perguntar se a matriz \mathcal{L} fornece informação adicional ou distinta da que L fornece. Bapat, Kirkland e Pati [5] definiram a *matriz Laplaciana perturbada* de um grafo G como $\tilde{\mathcal{L}} = D - A$, onde D é qualquer matriz diagonal e A é a matriz de adjacência com pesos de G . Observamos que \mathcal{L} é uma matriz Laplacian perturbada também.

Como em [5], o objetivo desse trabalho também é estudar o segundo menor autovalor de \mathcal{L} e seus autovetores. Nesse capítulo desenvolvemos uma teoria como a de Fiedler para essa matriz, levando a resultados que são do mesmo tipo dos obtidos para a conectividade algébrica de um grafo G .

Nós exibiremos uma propriedade da autofunção harmônica do segundo menor autovalor de \mathcal{L} (veja a próxima seção para as definições) sobre os pontos de articulação que, como no trabalho de Fiedler, nos permite classificar cada grafo em duas famílias distintas de grafos. Esse resultado de Fiedler foi enunciado anteriormente como o Teorema 3.1.

No final dos anos 90 Kirkland, Neumann, Shader e Fallat usaram a teoria de Fiedler e os valores de Perron de matrizes associadas com as componentes $G \setminus \{v\}$ (v um ponto de articulação) a fim de caracterizar a conectividade algébrica de árvores [32] e para grafos com ponto de articulação [34].

Nesse capítulo, usando a noção de componente de Perron para a matriz Laplaciana perturbada de um grafo, forneceremos uma caracterização para o segundo menor autovalor em termos dessa definição. Além disso, introduzimos a noção de *matriz bottleneck perturbada* de um ramo de uma árvore, o que nos permite descrever o segundo menor autovalor e os vértices característicos de árvores como uma função dos seus valores de Perron.

Como um resultado geral desse trabalho, nós mostramos que um autovetor do segundo menor autovalor da matriz Laplaciana perturbada fornece propriedades de particionamento que são similares as propriedades que um vetor de Fiedler fornece para um grafo. A caracterização que nós exibimos também é do mesmo tipo que a caracterização fornecida por Kirkland et al. Destacamos, porém, que ambos autovetores não fornecem a *mesma* informação. A seguir indicamos um exemplo de um grafo cuja partição de sinais (fornecida pelos sinais das entradas dos autovetores) é distinta.

Exemplo 10 *Considere um caminho com 7 vértices P_7 . Sua matriz Laplaciana possui um autovetor associado a conectividade algébrica (aproximadamente)*

$$\left[-1 \quad -0.8 \quad -0.44 \quad 0 \quad 0.44 \quad 0.8 \quad 1 \right]^T.$$

Por outro lado, se considerarmos uma matriz Laplaciana perturbada dada por

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos uma autofunção de um segundo menor autovalor dada por (aproximadamente)

$$\left[-0.71 \quad -0.64 \quad -0.5 \quad -0.64 \quad -0.02 \quad 0.6 \quad 1 \right]^T.$$

Claramente a partição de sinais não induz o mesmo conjunto de vértices para P_7 .

Dito isso, é razoável perguntar quando, para um dado grafo, a partição de sinais (fornecida pelos sinais das entradas dos autovetores) fornecida pelos autovetores da conectividade algébrica e o segundo menor autovalor de \mathcal{L} são sempre as mesmas. Uma pergunta mais precisa é a seguinte

Seja G um grafo com matriz Laplaciana L e a partição de sinais obtida por um vetor de Fiedler. Existe um autovetor associado ao segundo menor autovalor de \mathcal{L} que fornece a mesma partição de sinais?

Nesse capítulo, exibimos condições suficientes para responder positivamente a essa pergunta. Na última seção desse capítulo fornecemos resultados para grafos satisfazendo ambos os casos A e B do Teorema da monotonicidade de Fiedler (Teorema 3.1).

Observamos que não é sempre o caso em que as matrizes L e \mathcal{L} (em particular a matriz Laplaciana normalizada \mathcal{L}) fornecem o mesmo tipo de informação para um dado grafo. Como exemplo, indicamos que a energia Laplaciana e a energia Laplaciana normalizada possuem comportamentos distintos. Também, em vista do último exemplo, a partição de sinais possui comportamento distinto. Nesse trabalho, apresentamos as provas matemáticas do fato de que o autovetor associado ao segundo menor autovalor de L e \mathcal{L} fornecem tipo de informações similares. De qualquer forma, como a conectividade algébrica e seu vetor de Fiedler levaram a muitas aplicações importantes, esperamos que a teoria apresentada aqui possa levar a importantes e talvez diferentes achados.

4.2 Notação e resultados conhecidos

Nesse capítulo $G = G(V, E)$ é um grafo conexo com pesos. Isto é um grafo com um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E , onde cada aresta recebe um número positivo (o peso da aresta).

Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, a matriz de adjacência de G é a matriz de ordem n definida por

$$A(v_i, v_j) = \begin{cases} w_{ij}, & \text{o peso da aresta } v_i v_j \\ 0, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ não são adjacentes.} \end{cases}$$

Para qualquer matriz diagonal real D , como definido em [5], a *matriz Laplaciana perturbada* de G , denotada por \mathcal{L} , é dada por $\mathcal{L} = D - A$.

Observamos que se $D(i, i) = \sum_{i \neq j} w_{ij} := w_i$, para cada $1 \leq i \leq n$, então \mathcal{L} é simplesmente $L = D - A$, a matriz Laplaciana combinatória para G , enquanto que se $D(i, i) = -w_i$, para cada $1 \leq i \leq n$, obtemos $\mathcal{L} = -Q = -(D + A)$, onde Q é a matriz Laplaciana sem sinal. Quando D é a matriz nula, $\mathcal{L} = -A$, obtemos menos a matriz de adjacência. Uma outra instância importante da matriz Laplaciana perturbada que vale mencionar é a *matriz laplaciana normalizada* com pesos $\mathcal{L}(G)$ definida por Chung [12]

$$\mathcal{L}(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & v_i = v_j \text{ e } w_i \neq 0; \\ \frac{-w_{ij}}{\sqrt{w_i w_j}}, & \text{quando } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como G é conexo, ele não possui vértices isolados e nesse caso, a matriz diagonal dos graus d é invertível. Nesse caso \mathcal{L} e L estão relacionadas pela fórmula

$$\mathcal{L} = d^{-\frac{1}{2}} L d^{-\frac{1}{2}},$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = d^{-1/2} L d^{-1/2} = d^{-1/2} (d - A) d^{-1/2} = I - d^{-1/2} A d^{-1/2},$$

uma matriz Laplaciana perturbada.

Os autovalores da matriz Laplaciana normalizada foram estudados primeiramente por Chung em [11]. Mais recentemente, Butler [9] e Cavers [10] forneceram diversas propriedades espectrais de \mathcal{L} , e dentre elas o fato que, como a conectividade algébrica, o segundo menor autovalor de \mathcal{L} é não nulo se, e somente se, o grafo é conexo.

Chung também definiu a noção de autofunção como segue. Seja g a função que atribui a cada vértice v de G o valor real $g(v)$. Podemos visualizar g como um vetor coluna e sempre que $\mathcal{L}g = \lambda g$ chamamos g uma autofunção de \mathcal{L} . Além disso, a autofunção harmônica de λ para \mathcal{L} é definida como $f = d^{-\frac{1}{2}}g$.

Indicamos que a partição de sinais induzida pela autofunção harmônica para a matriz Laplaciana normalizada foi estudada por Li, Li e Fan em [37].

Nós estamos considerando a matriz Laplaciana perturbada \mathcal{L} de um grafo conexo com pesos G e denotando os autovalores de \mathcal{L} por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Observamos que, como G é conexo, \mathcal{L} é irredutível e pela teoria de Perron-Frobenius, segue que o menor autovalor de \mathcal{L} é simples e possui um autovetor com todas as suas entradas de mesmo sinal.

Para ser consistente com a notação introduzida por Chung, chamamos g uma autofunção de \mathcal{L} para o autovalor λ sempre que $\mathcal{L}g = \lambda g$. Denotamos por z uma autofunção associada ao menor autovalor de \mathcal{L} e então definimos a autofunção harmônica associada a λ_i , para $i \geq 2$, como

$$f = \frac{g}{z} = \left[\frac{g(v_1)}{z(v_1)}, \dots, \frac{g(v_n)}{z(v_n)} \right].$$

Os vetores f e g para λ_2 foram estudados em [5] e dessa forma, no contexto de Laplaciana normalizada, a definição é compatível com a definição de autofunção e autofunção harmônica estabelecida por Chung em [11].

Nesse capítulo, nós investigamos as autofunções harmônicas, estabelecendo um teorema de monotonicidade para essa função na próxima seção. Esse resultado acaba por ser uma ferramenta fundamental para a nossa abordagem de caracterizar e computar λ_2 . Como a definição de matriz Laplaciana perturbada engloba as matrizes Laplaciana, Laplaciana normalizada e matriz de adjacência, a teoria apresentada aqui pode ser útil em muitas situações particulares.

4.3 Teorema de monotonicidade

Nessa seção mostramos uma propriedade da autofunção harmônica de λ_2 sobre os pontos de articulação de um grafo. Nós forneceremos um teorema de

monotonicidade para a tal autofunção harmônica. Isso nos permite classificar todos os grafos em duas famílias distintas.

Relembramos que um bloco de um grafo é um subgrafo induzido conexo que não contém um ponto de articulação. Assim, um bloco é um subgrafo 2-conexo maximal, uma aresta (com seus vértices) ou um vértice isolado. Dizemos que um bloco é positivo, negativo ou nulo se, sobre esse bloco, f é positiva, negativa ou nula, respectivamente. Se sobre um bloco f assume valores positivos e negativos, então chamamos esse bloco de misto.

Seja g uma autofunção de \mathbb{L} correspondendo a λ_2 . Um vértice v é chamado de *vértice característico* de G se $g(v) = 0$ e se existe um vértice w adjacente à v tal que $g(w) \neq 0$. Uma aresta $\{u, v\}$ é chamada de *aresta característica* de G se $g(u)g(v) < 0$. Chamamos de *conjunto característico* a coleção de todos os vértices característicos e arestas características de G . Aqui denotamos por $\rho(M)$ o valor de Perron da matriz M .

Observação 4.1 *Seja g uma autofunção de \mathbb{L} correspondendo a λ_2 e f sua autofunção harmônica. Então $\text{sign}(f(v)) = \text{sign}(g(v))$ para cada vértice v de G .*

O próximo Lema segue do Lema 3 de [5] adaptado para a nossa notação.

Lema 4.2 *Seja G um grafo conexo com pesos e g uma autofunção de \mathbb{L} correspondendo a λ_2 . Seja W um conjunto não vazio de vértices de G tais que $g(u) = 0$, para todo $u \in W$ e suponha que $G \setminus W$ é desconexo com $t \geq 2$ componentes C_1, C_2, \dots, C_t tais que $g(C_i) \neq 0$. Seja $\mathbb{L}(C_i)$ a submatriz principal de \mathbb{L} correspondendo a componente C_i . Então cada C_i ou satisfaz $g(C_i) > 0$ ou $g(C_i) < 0$ com $\lambda_2 = \frac{1}{\rho(\mathbb{L}(C_i)-1)}$ em qualquer caso.*

O próximo Lema segue do Lema 4 em [5].

Lema 4.3 *Seja G um grafo conexo com pesos. Seja g uma autofunção de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 . Suponha que o conjunto característico contenha uma aresta. Então os vértices v tais que $g(v) > 0$ induzem um subgrafo conexo.*

O próximo Lema segue da parte (ii) do Lema 5 de [5].

Lema 4.4 *Seja G um grafo conexo com pesos e seja g uma autofunção de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 . Seja S seu conjunto característico. Então ou S contém um único vértice ou S está contido em um bloco de G .*

O próximo Lema segue da Observação 4.1 e do Corolário 16 em [5]. Vale mencionar que esse resultado foi provado sob a hipótese de que o menor autovalor de \mathbb{P} é zero, apesar de não estar escrito no enunciado original.

Lema 4.5 *Seja v um ponto de articulação de G e C uma componente pendente em v . Assuma que $f(C) > 0$ para alguma autofunção harmônica f de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 e assumo que o menor autovalor de \mathbb{P} é zero. Seja u um vértice em C . Então $f(v) < f(u)$.*

Relembrando, um caminho é dito puro se ele contém no máximo dois pontos de articulação pertencentes a cada bloco que cruza.

Teorema 4.1 *Seja G um grafo conexo com pesos e seja g uma autofunção de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 . Seja f a autofunção harmônica correspondente. Então apenas um dos casos pode ocorrer*

Caso 1 *G não possui um bloco misto. Nesse caso, existe um único ponto de articulação de z com $f(z) = 0$ e um vizinho não nulo. Cada bloco (com exceção do vértice z) é positivo, negativo, ou nulo. Seja P um caminho puro começando em z . Se o menor autovalor de \mathbb{P} é zero,*

então sobre os pontos de articulação de G em P (com exceção de z) f forma uma sequência crescente, decrescente ou nula. Cada caminho contendo vértices positivos e negativos passa por z .

Caso 2 G possui um único bloco B_0 que é misto. Nesse caso, cada bloco restante é positivo, negativo ou nulo. Se o menor autovalor de \mathbb{L} é zero, então cada caminho puro P iniciando em B_0 e contendo apenas um vértice $v \in B_0$ possui a propriedade de que, sobre os pontos de articulação contidos em P , f forma uma sequência crescente, decrescente ou nula dependendo se $f(v) > 0$, $f(v) < 0$ or $f(v) = 0$. No último caso $f \equiv 0$ ao longo do caminho.

Demonstração Primeiramente, para o caso 1, se nenhum bloco é misto, então existe um bloco com um vértice positivo e um bloco com um vértice negativo. Além disso, a intersecção de blocos tem apenas um ponto de articulação e nenhum bloco é misto, logo segue que existe um ponto de articulação z com $f(z) = 0$. Agora, aplicando o Lema 4.2 com $W = \{z\}$, obtemos que cada componente é nula, positiva ou negativa. Logo, não existe outro vértice $v \neq z$ com $f(v) = 0$ e um vizinho não nulo. Isso mostra a primeira parte do caso 1.

Da mesma forma, se P contém outro vértice v com $f(v) = 0$, pelo mesmo argumento anterior podemos ver que $f \equiv 0$ sobre os vértices de P . Por outro lado, se P tem um vértice v com $f(v) \neq 0$ então denotamos por $z = v_0, v_1, \dots, v_s$ os pontos de articulação em P usando a ordem em que eles aparecem. Se $f(v) > 0$, então pelo Lema 4.5 obtemos $f(v_i) < f(v_{i+1})$, $i = 0, \dots, s - 1$. Se $f(v) < 0$, então o mesmo argumento aplicado para a autofunção $-f$ prova que essa forma uma função decrescente.

Agora nós provaremos o caso 2. Se G possui apenas um bloco, então estamos prontos. Se o conjunto característico contém uma aresta, então o Lema 4.3 garante que os blocos restantes são positivos ou negativos. Do contrário, o Lema 4.4

implica que apenas um bloco contém o conjunto característico. Agora pelo Lema 4.2 e Lema 4.3 os blocos restantes são nulos, positivos ou negativos. Isso completa a primeira parte do caso 2.

Finalmente, denotamos por $v = v_0, v_1, \dots, v_s$ os pontos de articulação em P na ordem em que aparece. Se $f(v) > 0$, então pelo Lema 4.5 obtemos $f(v_i) < f(v_{i+1})$, $i = 0, \dots, s - 1$. Se $f(v) < 0$, então o mesmo argumento aplicado a autofunção $-f$, mostra que ela forma uma sequencia decrescente. Se $f(v) = 0$, então apenas a componente em v que contém vértices não nulos é a componente contendo o bloco misto, caso contrário isso seria uma contradição com o Lema 4.2. Portanto, obtemos que $f \equiv 0$ sobre os vértices de P . Isso conclui a demonstração. \square

A Observação 4.1 e o Teorema 4.1 mostram o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Seja G um grafo conexo e seja g uma autofunção de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 . Então apenas um dos seguintes casos pode ocorrer:*

Caso 1 *Não existe bloco misto. Nesse caso, existe um único ponto de articulação z com $g(z) = 0$ e um vizinho não nulo. Cada bloco (removendo o vértice z) é positivo, negativo ou nulo.*

Caso 2 *Existe um único bloco B_0 que é misto. Nesse caso, cada bloco restante é positivo, negativo ou nulo.*

O Teorema 4.2 não diz nada a respeito da propriedade de monotonicidade para a autofunção como o Teorema 4.1 afirma para a autofunção harmônica. De fato, não é sempre o caso que a autofunção tem essa propriedade. O próximo exemplo mostra um grafo para qual essa propriedade falha.

Exemplo 11 Para o grafo da Figura 4.1 o espectro de sua matriz Laplaciana normalizada tem (aproximadamente) $\lambda_2 = 0.1408518684$ e sua autofunção g dada por

$$\begin{bmatrix} 0.3321468380 & 0.4035628601 & 0.3537169961 & -0.3537170033 \\ -0.4035628574 & -0.3321468341 & -0.1841193327 & -0.1841193327 \\ -0.1841193327 & 0.1841193327 & 0.1841193327 & 0.1841193327 \end{bmatrix}^T.$$

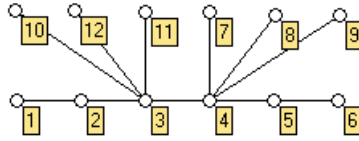


Figura 4.1: Grafo cuja monotonicidade não vale para a autofunção.

Como o grafo é uma árvore, cada vértice é um ponto de articulação e cada aresta com seus vértices forma um bloco. Observamos que o caso 2 do Teorema 4.1 vale para esse grafo. Considere o caminho puro $P = \{1, 2, 3\}$. É fácil de computar a autofunção harmônica f e ela satisfaz $f(1) > f(2) > f(3)$ de acordo com o Teorema 4.1. Por outro lado, a autofunção g satisfaz $g(3) < g(2)$ e $g(2) > g(1)$. Assim a propriedade de monotonicidade não vale para essa autofunção.

4.4 Caracterizando o segundo menor autovalor

Apesar dos Teoremas 4.1 e 4.2 fornecerem uma classificação para grafos e dar uma boa ideia do comportamento da autofunção harmônica, ainda não sabemos nenhuma informação sobre λ_2 em si. Entretanto, é possível fornecer uma caracterização diferente para os casos 1 e 2 tais que informações sobre λ_2 surgem. Mais precisamente, nessa seção estamos interessados em descrever λ_2 em termos dos valores de Perron de matrizes especiais. Esse resultados se baseiam em [32].

Seja G um grafo conexo, \mathcal{L} sua matriz Laplaciana e v um vértice de corte de G , com C_0, C_1, \dots, C_r as componentes conexas do grafo $G \setminus v$. Para cada

componente, C_i , seja $\mathcal{L}(C_i)$ a submatriz principal \mathcal{L} correspondendo aos vértices de C_i . Nessa seção trabalharemos com hipóteses sobre a matriz Laplaciana perturbada que garantem que todas $\mathcal{L}(C_i)$ são não singulares. Com isso é possível seguir com novas definições. Quando essas matrizes são não singulares com inversas $M_i = \mathcal{L}^{-1}(C_i)$ chamamos de *matriz Laplaciana perturbada de C_i em v* . Cada uma dessas inversas possui entradas positivas, e então pelo Teorema de Perron, ela possui um autovalor dominante positivo simples, chamado de valor de Perron, e um autovetor correspondente com todas as entradas positivas, chamado de vetor de Perron e um autovetor associado com todas as entradas de mesmo sinal, chamado de vetor de Perron. Uma componente C_j é dita ser uma *componente de Perron em v* se o seu valor de Perron é maximal dentre C_0, C_1, \dots, C_r .

Se G satisfaz caso 1 do Teorema 4.2 então dizemos que G é um grafo do Tipo 1. Se G satisfaz o caso 2 do Teorema 4.2 então dizemos que G é um grafo do Tipo 2.

Se G é um grafo do Tipo 1, então o único vértice nulo adjacente a um vértice não nulo (veja Teorema 4.2) é chamado de *vértice característico de G* . No contexto de matriz Laplaciana combinatória, foi mostrado em [43] que os vértices característicos de uma árvore são independentes do autovetor associado com a conectividade algébrica.

Para grafos do Tipo 1 é fácil de caracterizar $\lambda_2(\mathcal{L})$, como vemos no próximo enunciado. O seguinte teorema é a uma reformulação dos resultados enunciados em [5] usando o nosso framework.

Teorema 4.3 *Seja G um grafo e g uma autofunção de λ_2 . Então G é um grafo do Tipo 1 com vértice característico v se, e somente se, existem no mínimo duas componentes de Perron em v . Nesse caso, $\lambda_2 = \frac{1}{\rho(\mathcal{L}(C)^{-1})}$ para cada componente de Perron C em v .*

Demonstração A primeira parte segue da parte (i) e (iv) do Teorema 7 em [5] e $\lambda_2 = \frac{1}{\rho(\mathbb{P}(C)^{-1})}$ segue de Lema 4.2 tomando $W = \{v\}$. \square

O teorema anterior pode ser visto como uma generalização natural dos resultados em [34], onde no contexto da matriz Laplaciana os autores caracterizaram a conectividade algébrica de grafos do Tipo I.

Um grafo do Tipo 1 (respectivamente grafo do Tipo 2) que é uma árvore será chamada de árvore do Tipo 1 (respectivamente árvore do Tipo 2). Agora, queremos encontrar uma caracterização para λ_2 de árvores do Tipo 2 usando a matriz Laplaciana perturbada. Entretanto, um método diferente precisa ser usado. Como o próximo teorema nos mostra, essas matrizes são mais complicadas que aquelas em [34].

Primeiramente, precisamos de algumas definições. Seja T uma árvore. Chamamos de ramo de T em v cada componente conexa de $T \setminus v$ obtida de T deletando o vértice v e suas arestas. Se T é uma árvore do Tipo 2, pelo Teorema 4.2 o único bloco misto é formado por dois vértices adjacentes. Para árvores do Tipo 2, dizemos que esses dois vértices i e j são vértices característicos se, e somente se, eles são adjacentes e satisfazem $\text{sign}(g(i)) \neq \text{sign}(g(j))$.

Considere a matriz $\Delta L \Delta$, onde L é a matriz Laplaciana combinatória e Δ é uma matriz diagonal positiva. Como $\Delta L \Delta = \Delta D \Delta - \Delta A \Delta$, é claro que esse é um caso especial da matriz Laplaciana perturbada. De agora em diante, assumiremos que a matriz Laplaciana perturbada é da forma $\Delta L \Delta$.

Teorema 4.4 *Seja T uma árvore do Tipo 2 com n vértices com matriz Laplaciana perturbada $\mathbb{P} = \Delta L \Delta$ e sejam i e j os vértices adjacentes de T e sua aresta com peso w . Então i e j são vértices característicos de T se, e somente se, existe um número $\gamma \in (0, 1)$ tal que*

$$\rho(M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}) = \rho(M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}) = \frac{1}{\lambda_2},$$

onde M_1 é a matriz bottleneck perturbada para um ramo em j contendo i e D_1 é a submatriz de Δ correspondendo a esse ramo; M_2 é uma matriz bottleneck perturbada para o ramo em i contendo j e D_2 é uma submatriz de Δ correspondendo a esse ramo.

Para provar o Teorema 4.4 precisamos de mais informação a respeito das matrizes M_1 e M_2 . Por esse motivo as provas serão fornecidas na próxima seção.

4.5 Matrizes bottleneck perturbadas de uma árvore

Na seção anterior foi mencionado que para caracterizar λ_2 de árvores, é necessário estudar as matrizes bottleneck. Aqui nessa seção faremos uma análise mais cuidadosa da estrutura dessas matrizes na expectativa de caracterizar λ_2 e provar o Teorema 4.4. Ao longo do caminho também forneceremos uma forma de caracterizar árvores do Tipo 1 e 2 em termos de componentes de Perron.

Primeiramente, definimos o conjunto $P_{i,j,k}$ como o conjunto de arestas de T que estão em ambos os caminhos do vértice i ao vértice k e do caminho j ao vértice k . O seguinte Lema foi obtido por Kirkland em [34], onde são investigadas as componentes de Perron de uma árvore usando a matriz Laplaciana combinatória.

Lema 4.6 *Considere uma árvore T com n vértices. Denote por L_k a submatriz principal da matriz Laplaciana $L(T)$ obtida removendo a k -ésima coluna e a k -ésima linha de $L(T)$. Então a entrada (i, j) de L_k^{-1} é igual a soma $\sum_{e \in P_{i,j,k}} 1/w(e)$, onde $w(e)$ é o peso da aresta e .*

Da mesma forma, para a matriz Laplaciana perturbada \mathcal{P} , podemos descrever as entradas de \mathcal{P}_k^{-1} em termos de $P_{i,j,k}$ como o próximo resultado mostra.

Lema 4.7 *Considere uma árvore T com n vértices e matriz Laplaciana perturbada $\mathcal{P} = \Delta L \Delta$. Então a entrada (i, j) de \mathcal{P}_k^{-1} é igual a $(1/d_i d_j) \sum_{e \in P_{i,j,k}} 1/w(e)$, onde d_i é a entrada diagonal de Δ correspondendo ao vértice v_i .*

Demonstração Observe que, como Δ é uma matriz diagonal, então

$$\mathcal{P}_k = (\Delta L \Delta)_k = \Delta_k L_k \Delta_k.$$

Assim, obtemos diretamente que $\mathcal{P}_k^{-1} = \Delta_k^{-1} L_k^{-1} \Delta_k^{-1}$. Aplicando o Lema 4.6, obtemos que a entrada (i, j) de \mathcal{P}_k^{-1} é igual a

$$(\Delta_k^{-1} L_k^{-1} \Delta_k^{-1})_{i,j} = (\Delta_k^{-1})_{i,i} \sum_{e \in P_{i,j,k}} 1/w(e) (\Delta_k^{-1})_{j,j} = 1/d_i d_j \sum_{e \in P_{i,j,k}} 1/w(e). \square$$

Agora que temos uma boa descrição da matriz bottleneck perturbada de uma componente, estamos prontos para provar o Teorema 4.4.

Demonstração (Teorema 4.4) Denotamos por e_i o vetor canônico com entrada não nula na i -ésima posição.

Podemos escrever a matriz Laplaciana perturbada de T no seguinte formato

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & -d_i d_j w e_k e_1^T \\ -d_i d_j w e_1 e_k^T & M_2^{-1} \end{bmatrix},$$

onde a última linha de M_1^{-1} representa o vértice i e a primeira linha de M_2^{-1} representa o vértice j .

Primeiramente, assuma que i e j são vértices característicos de T . Assim o bloco formado por eles e sua aresta incidente é o único bloco misto. Pelo Teorema 4.2 nós temos que o vértice no ramo em i contendo j tem o sinal do vértice j , enquanto que o ramo em j contendo i tem o sinal do vértice i . Assim, esses dois ramos possuem sinais opostos. Além disso, o teorema garante que podemos escrever o autovetor associado com λ_2 como $v = [-v_1^T | v_2^T]^T$, onde v_1 e v_2 são ambos

vetores positivos. Aqui $\mathbf{1}$ denota o vetor de uns. Como $\mathbf{1}^T \Delta^{-1} v = 0$, nós temos $\mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 = \mathbf{1}^T D_2^{-1} v_2$.

Da equação $\mathcal{L}v = \lambda_2 v$, se colocarmos $\alpha = w e_1^T v_2$ e $\beta = w e_k^T v_1$, encontramos que

$$-M_1^{-1} v_1 - \alpha d_i d_j e_k = -\lambda_2 v_1,$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{v_1}{\lambda_2} = M_1 v_1 - \frac{\alpha}{\lambda_2} d_i d_j M_1 e_k.$$

Usando o Lema 4.7, concluimos que $M_1 e_k = \frac{1}{d_i w} D_1^{-1} \mathbf{1}$, porque $\sum_{e \in P_{a,i,j}} 1/w(e) = 1/w$ para cada vértice a no ramo em j contendo i . Assim, temos

$$\frac{v_1}{\lambda_2} = M_1 v_1 - \frac{\alpha d_j}{\lambda_2 w} D_1^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.1)$$

Agora multiplicamos (4.1) por e_k^T , para obter

$$\frac{e_k^T v_1}{\lambda_2} = e_k^T \left(M_1 v_1 - \frac{\alpha d_j}{\lambda_2 w} D_1^{-1} \mathbf{1} \right) = \frac{1}{d_i w} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 - \frac{\alpha d_j}{\lambda_2 w d_i}.$$

Logo,

$$\frac{\beta}{\lambda_2} = \frac{1}{d_i} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 - \frac{\alpha d_j}{\lambda_2 d_i}.$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{1}{\beta d_i + \alpha d_j} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Agora, substituímos $\frac{1}{\lambda_2}$ em (4.1), para obter

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{\lambda_2} &= M_1 v_1 - \frac{\alpha d_j}{w(\beta d_i + \alpha d_j)} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 D_1^{-1} \mathbf{1} \\ &= M_1 v_1 - \frac{\alpha d_j}{w(\beta d_i + \alpha d_j)} D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\frac{v_1}{\lambda_2} = \left(M_1 - \frac{\alpha d_j}{w(\beta d_i + \alpha d_j)} D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1} \right) v_1.$$

O mesmo cálculo para a matriz M_2 , nós fornece a relação

$$\frac{v_2}{\lambda_2} = \left(M_2 - \frac{\beta d_i}{w(\beta d_i + \alpha d_i)} D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1} \right) v_2.$$

Agora, do Lema 4.7, concluímos que

$$\sum_{e \in P_{a,b,j}} 1/w(e) \geq 1/w \text{ e } \sum_{e \in P_{a,b,i}} 1/w(e) \geq 1/w.$$

Assim, nós temos $M_1 \geq \frac{1}{w} D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}$ e $M_2 \geq \frac{1}{w} D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}$. Se definirmos $\gamma = \frac{\alpha d_j}{\beta d_i + \alpha d_j}$ e observarmos que $\gamma \in (0, 1)$, concluímos que v_1 é um autovetor positivo da matriz positiva $M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}$ e que v_2 é um autovetor positivo da matriz $M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}$. Assim, pela teoria de Perron-Frobenius, temos

$$\rho(M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}) = \rho(M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}) = \frac{1}{\lambda_2},$$

como queríamos.

Reciprocamente, assuma que existe um $\gamma \in (0, 1)$ que satisfaz

$$\rho(M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}) = \rho(M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}) = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Sejam v_1 e v_2 os vetores de Perron de $M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1}$ e $M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1}$, respectivamente. Então podemos computar

$$\begin{aligned} \frac{e_k^T v_1}{\lambda_2} &= e_k^T \left(M_1 - \frac{1}{w} \gamma D_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_1^{-1} \right) v_1 \\ &= \left(\frac{1}{d_i w} \mathbf{1}^T D_1^{-1} - \gamma \frac{1}{d_i w} \mathbf{1}^T D_1^{-1} \right) v_1 \\ &= (1 - \gamma) \frac{1}{d_i w} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1. \end{aligned}$$

Além disso, podemos escolher autovetores normalizados v_1 e v_2 tais que $\mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1 = \mathbf{1}^T D_2^{-1} v_2$, e então podemos escrever

$$\frac{e_k^T v_1}{\lambda_2} = (1 - \gamma) \frac{1}{d_i w} \mathbf{1}^T D_2^{-1} v_2. \quad (4.2)$$

Similarmente, usando o mesmo procedimento, podemos computar

$$e_1^T \left(M_2 - \frac{1}{w} (1 - \gamma) D_2^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T D_2^{-1} \right) v_2$$

e obter a relação

$$\frac{e_1^T v_2}{\lambda_2} = \gamma \frac{1}{d_j w} \mathbf{1}^T D_1^{-1} v_1. \quad (4.3)$$

Usando a relação (4.2) na equação $(M_2 - \frac{1}{w}(1-\gamma)D_2^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T D_2^{-1})v_2 = \frac{1}{\lambda_2}v_2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_2}v_2 &= M_2v_2 - \frac{1}{w}(1-\gamma)D_2^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T D_2^{-1}v_2 \\ &= M_2v_2 - \frac{d_i}{\lambda_2}D_2^{-1}\mathbf{1}e_k^T v_1. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.7, obtemos a relação $M_2e_1 = \frac{1}{d_jw}D_2^{-1}\mathbf{1}$ e

$$\frac{1}{\lambda_2}v_2 = M_2v_2 - \frac{wd_id_j}{\lambda_2}M_2e_1e_k^T v_1,$$

que é equivalente a

$$\lambda_2v_2 = M_2^{-1}v_2 + wd_id_je_1e_k^T v_1. \quad (4.4)$$

Da mesma forma, podemos usar a relação (4.3) e então reescrever a equação

$$\left(M_1 - \frac{1}{w}\gamma D_1^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T D_1^{-1}\right)v_1 = \frac{1}{\lambda_2}v_1$$

como segue

$$\lambda_2v_1 = M_1^{-1}v_1 + wd_id_je_1e_k^T v_2. \quad (4.5)$$

Desse modo, as equações (4.4) e (4.5) mostram que o vetor $v = [-v_1|v_2]^T$ satisfaz $\mathcal{P}v = \lambda_2v$. Isso prova o resultado. \square

4.6 Vértices característicos via valores de Perron

Os resultados dessa seção descrevem os vértices característicos de árvores, assim caracterizando o seu tipo, de forma similar a [34], em termos de ramos de Perron de árvores.

Lema 4.8 *Se T é uma árvore de Tipo 2 com vértices característicos i e j , então i e j são adjacentes e o ramo em i contendo o vértice j é o único ramo de Perron em i , enquanto que o ramo em j contendo i é o único ramo de Perron em j .*

A prova é similar aquela do Corolário 1.1 em [34].

Para matrizes quadradas não negativas A e B (não necessariamente da mesma ordem), usamos a notação $A \leq B$ (ou $B \geq A$) para dizer que existem matrizes de permutação P e Q tais que PAP^T é dominada entrada por entrada por uma submatriz principal de QBQ^T , com a igualdade estrita em ao menos uma posição quando A e B tem a mesma ordem. Vale lembrar que da teoria de Perron-Frobenius sempre que uma matriz não negativa C tal que $A - C$ e $B - C$ são positivas, então $\rho(A - C) < \rho(B - C)$.

O seguinte resultado fornece uma maneira simples de caracterizar árvores de Tipo 1 e 2 como uma alternativa ao Teorema 4.2.

Teorema 4.5 *Seja T uma árvore. T é uma árvore de Tipo 1 se, e somente se, existe um único vértice ao qual existe pelo menos dois ramos de Perron. T é uma árvore de Tipo 2 se, e somente se, em cada vértice existe um único ramo de Perron.*

Demonstração Primeiramente, assuma que existe apenas um vértice no que existem dois ou mais ramos de Perron. Então pelo Teorema 4.3, T é uma árvore do Tipo 1.

Reciprocamente, assuma que T é uma árvore do Tipo 1 com vértice característico v . Considere os ramos em qualquer $u \neq v$. Seja P o ramo em u contendo v e Q qualquer outro ramo em u . Seja C a componente em v que contém u . Em vista do Lema 4.7, podemos ver que $L(Q)^{-1} \leq L(C)^{-1} \leq L(P)^{-1}$ com a desigualdade estrita em pelo menos uma entrada. Assim concluímos que $\rho(L(Q)^{-1}) < \rho(L(P)^{-1})$ e existe apenas um ramo de Perron em u .

Se T é uma árvore do Tipo 2, então pelo Lema 4.8 existe um par de vértices adjacentes i e j tais que existe um único ramo de Perron em cada um. Se considerarmos um vértice diferente de i e j , então podemos usar o mesmo argumento da parte anterior para concluir que existe apenas um ramo de Perron em cada vértice.

Finalmente, assumamos que em cada vértice existe um único ramo de Perron. Se T não é uma árvore do Tipo 2, então temos uma contradição com o Teorema 4.3. Isso completa a prova. \square

Corolário 4.9 *Seja T uma árvore e u um vértice que não é um vértice característico. Então o único ramo de Perron em u é o ramo contendo o conjunto característico de T .*

4.7 Partição de sinais de grafos

No contexto da matriz Laplaciana combinatória, o artigo [34] descreve árvores do Tipo I e II. Para o caso da matriz Laplaciana perturbada, esse trabalho introduz o análogo como árvores do Tipo 1 e 2. Nessa seção, gostaríamos de fazer algumas considerações sobre essa analogia de modo a entender se a informação fornecida por ambos os autovetores (de λ_2 e $a(G)$) são realmente a mesma.

Para fins de clareza, nessa seção nos referimos a componentes de Perron Laplacianas no sentido de [34], onde sua definição vem da matriz Laplaciana combinatória (anteriormente chamadas apenas de componentes de Perron). Além disso, nos referimos a componentes de Perron perturbada para a definição no sentido de matriz Laplaciana perturbada.

Relembramos que se G satisfaz o caso B do Teorema da monotonicidade de Fiedler, então dizemos que o grafo é do Tipo I. Da mesma forma, se G satisfaz o caso A do Teorema da monotonicidade de Fiedler, então dizemos que o grafo é do Tipo II.

Relacionando esses conceitos de componentes de Perron (Laplaciana e perturbada) é possível descrever situações onde os autoespaços de λ_2 e $a(G)$ fornecem a mesma partição de sinais para um dado grafo. Os próximos resultados explicam como isso pode ocorrer e fornece uma descrição explícita de tais autoespaços.

Teorema 4.6 *Seja $G = (V, E)$ um grafo do Tipo 1 e seja v seu vértice característico com C_0, C_1, \dots, C_r sendo as componentes de Perron perturbadas. Se C_0, C_1, \dots, C_r são também componentes de Perron Laplacianas, então G é um grafo de Tipo I e existe uma base de autovetores de λ_2 e uma base de autovetores de $a(G)$ com os mesmos sinais sobre o conjunto de vértices V .*

Demonstração Primeiramente, assuma que a matriz Laplaciana perturbada é da forma

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(C_0) & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & \mathcal{L}(C_1) & & 0 & c_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{L}(C_r) & c_r \\ (c_0)^T & (c_1)^T & \cdots & (c_r)^T & d_v \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

Seja $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}$ um conjunto de vetores de Perron para o conjunto de matrizes $\mathcal{L}(C_0)^{-1}, \mathcal{L}(C_1)^{-1}, \dots, \mathcal{L}(C_r)^{-1}$ tal que $\mathbf{1}^T y^{(i)} = 1$. Defina, para $i = 1, \dots, r$, o vetor

$$Y_i = \begin{cases} y^{(0)}(v) & v \in C_0, \\ -y^{(i)}(v) & v \in C_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.7)$$

É fácil ver que $\mathbf{1}^T Y_i = 0$, e cada Y_1, Y_2, \dots, Y_r é um conjunto de vetores linearmente independentes. Assim, $\frac{1}{\rho(\mathcal{L}(C_0)^{-1})}$ é um autovalor associado com $y^{(i)}$, para $i = 1, \dots, r$.

Então temos

$$\frac{Y_i^T \mathcal{L} Y_i}{Y_i^T Y_i} = \frac{1}{\rho(\mathcal{L}(C_0)^{-1})}.$$

Usando o Teorema 4.3, obtemos

$$\frac{Y_i^T \mathcal{L} Y_i}{Y_i^T Y_i} = \lambda_2,$$

para $i = 1, \dots, r$, assim Y_1, Y_2, \dots, Y_r é um conjunto de autovetores linearmente independentes associados com λ_2 .

Agora seja Z um autovetor de \mathbb{P} correspondendo a λ_2 tal que G é um grafo de Tipo 1 com vértice característico v . Da relação $\mathbb{P}Z = \lambda_2 Z$, segue para cada componente C_i que $\mathbb{P}(C_i)Z(C_i) = \lambda_2 Z(C_i)$. Além disso $\mathbb{P}(C_i)y^{(i)} = \lambda_2 y^{(i)}$, e pelo Teorema de Perron-Frobenius $\frac{1}{\rho(\mathbb{P}(C_0)^{-1})}$ é um autovalor simples de $\mathbb{P}(C_i)^{-1}$. Assim, segue que $Z(C_i)$ é um múltiplo escalar de $y^{(i)}$. Isso implica que Z é uma combinação linear de Y_i . Assim, Y_1, Y_2, \dots, Y_r é uma base do autoespaço associado com λ_2 se, e somente se, G é um grafo de Tipo 1 com vértice v como vértice característico.

Por outro lado, sejam $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ o conjunto de vetores de Perron para as matrizes $L(C_0)^{-1}, L(C_1)^{-1}, \dots, L(C_r)^{-1}$ tais que $\mathbf{1}^T f^{(i)} = 1$. Defina, para $i = 1, \dots, r$, o vetor

$$F_i = \begin{cases} f^{(0)}(v) & v \in C_0, \\ -f^{(i)}(v) & v \in C_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.8)$$

É fácil ver que $\mathbf{1}^T F_i = 0$, e cada F_0, F_1, \dots, F_r é um conjunto de de vetores linearmente independentes. Agora, usando as mesmas considerações anteriores e a caracterização fornecida em [34], concluímos que F_1, F_2, \dots, F_r é uma base para o autoespaço associado com $a(G)$ se, e somente se, G é um grafo de Tipo I com vértice característico v . Desse modo, ambas as bases de autovetores Y_1, Y_2, \dots, Y_r e F_1, F_2, \dots, F_r fornecem o mesmo sinal sobre os vértices de G e o resultado segue. \square

Corolário 4.10 *Seja G um grafo de Tipo 1 e seja v um vértice característico com C_0, C_1, \dots, C_r como componentes de Perron perturbadas. Seja $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}$ o conjunto de vetores de Perron para o conjunto de matrizes $\mathbb{P}(C_0)^{-1}, \mathbb{P}(C_1)^{-1}, \dots, \mathbb{P}(C_r)^{-1}$ tais que $\mathbf{1}^T y^{(i)} = 1$. Defina, para $i = 1, \dots, r$, o vetor*

$$Y_i = \begin{cases} y^{(0)}(v) & v \in C_0, \\ -y^{(i)}(v) & v \in C_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Então Y_1, Y_2, \dots, Y_r é uma base para o autoespaço associado com λ_2 .

O último corolário garante que o vértice característico de um *grafo* de Tipo 1 é independente da escolha do autovetor que define a autofunção. No contexto de matriz Laplaciana combinatória, isso é similar aos resultados de [43] onde se mostra que o vértice característico de uma *árvore* é independente do autovetor associado com a conectividade algébrica.

Nesse sentido, com o nosso trabalho foi possível descobrir tal propriedade não apenas para uma classe de matrizes mais geral, mas também para grafos mais gerais.

Além disso, é possível mostrar um resultado similar para árvores de Tipo 2.

Teorema 4.7 *Seja $G = (V, E)$ uma árvore de Tipo 2 e $\{u, v\}$ uma aresta característica. Seja C_1 a componente em u contendo v e C_2 a componente em v contendo u com a propriedade de serem as componentes de Perron perturbadas. Se C_1 e C_2 são também componentes de Perron Laplacianas, então G é um grafo de Tipo II com um autovetor de λ_2 e um autovetor de $a(G)$ que possuem os mesmos sinais sobre o conjunto de vértices V .*

Demonstração Segue diretamente do Teorema 4.4 e o caso 2 do Teorema 4.2.

Em vista do Teorema 4.5 e Corolário 4.9, árvores que satisfazem os Teoremas 4.6 e 4.7, precisam ter as mesmas componentes de Perron Laplacianas e componentes de Perron perturbadas em cada vértice. De qualquer modo, sempre que as componentes de Perron para L e \mathcal{L} são as mesmas vemos que a partição de sinais fornecida pelo autovetor do seu segundo menor autovalor é o mesmo. Portanto, terminamos esse capítulo reformulando a questão colocada no início.

Seja G um grafo com matriz Laplaciana L e matriz Laplaciana perturbada \mathcal{L} . Seja v um ponto de articulação de G . As componentes de Perron em v para ambas as matrizes L e \mathcal{L} são as mesmas?

5 CONECTIVIDADE ALGÉBRICA ABSOLUTA DE ÁRVORES

Neste capítulo apresentamos novos resultados sobre a *conectividade algébrica absoluta* $\hat{a}(G)$. Nós exibimos uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta de uma classe de grafos conhecida pelo nome de árvores double brooms. Além disso, exibimos expressões para os autovetores que geram o autoespaço associado a sua conectividade algébrica absoluta. A fim de computar as fórmulas, usaremos uma abordagem geométrica que não é muito bem conhecida e que gostaríamos de compartilhar com a comunidade de Teoria Espectral de Grafos. Ainda nesse capítulo apresentamos um novo algoritmo simbólico que computa a conectividade algébrica absoluta para qualquer árvore em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Os novos resultados apresentados aqui estão submetidos para publicação em [51].

5.1 Preliminares

Ordenar grafos é um problema clássico em combinatória que muitos autores tem estudado ao longo dos anos. Uma abordagem comum é o uso de parâmetros espectrais de grafos. Existe um grande número de artigos usando diferentes tipos de parâmetros espectrais, por exemplo os maiores autovalores [41, 26, 38], índice [73], índice Laplaciano [70, 30, 39], energia de grafos [66, 29, 67], energia Laplaciana [64, 24, 25] e a conectividade algébrica [28, 72, 40, 68].

Apesar dos esforços, uma ordem completa em toda a classe de grafos pela conectividade algébrica não é conhecida e parece ser um problema muito difícil. Entretanto, existem esforços para fornecer ordens parciais em classes específicas de grafos. Uma delas, chamada de *árvores double brooms* é o principal assunto desse capítulo.

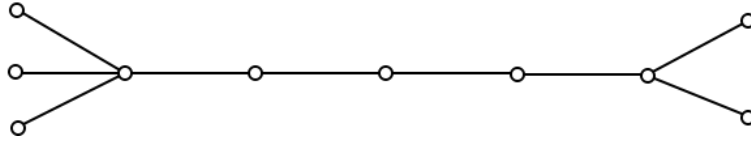


Figura 5.1: Uma double broom $T(10, 6, 0)$.

Primeiro, consideramos um grafo $G = (V, E)$ com conjunto de vértices V e arestas E . Aqui, P_n denota o caminho com n vértices. Uma *árvore double broom* com n vértices é definida como segue: considere o caminho P_{d-1} e rotule seus vértices como s_1, \dots, s_{d-1} , então para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - 1$ conecte $\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor + k$ folhas em s_1 e $\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k$ folhas em s_{d-1} . Claramente o diâmetro de tais double brooms é d . Denotamos a double broom com n vértices, diâmetro d e parâmetro k por $T(n, d, k)$. Veja a Figura 5.1.

O primeiro estudo ordenando double brooms pela conectividade algébrica foi feito por Grone e Merris [28]. Eles ordenaram completamente a classe de double brooms com diâmetro 3. Em seguida, Fallat e Kirkland [19] generalizaram esses resultados para todo o conjunto de double brooms. Os autores provaram que fixando n e d a conectividade algébrica $a(T(n, d, k))$ é uma função estritamente crescente em k . Para provar isso, os autores usaram técnicas algébricas juntamente com aplicações da teoria de Perron-Frobenius. Observamos que tais técnicas não fornecem o valor de $a(G)$, que é um problema complicado de resolver. Indicamos ao leitor o resumo de resultados sobre ordenamento de grafos pela conectividade algébrica [3].

Lembramos que, dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, e um conjunto de pesos não-negativos $w = [w_{ij}]$ nas arestas, a *matriz Laplaciana com pesos* de G é a matriz de ordem n dada por $L_w = [l_{ij}]$, onde $l_{ij} = -w_{ij}$ se $v_i v_j \in E$, $l_{ii} = \sum_{ij \in E} w_{ij}$ e $l_{ij} = 0$ nas entradas restantes.

Em [22], Fiedler estudou a *conectividade algébrica absoluta* $\hat{a}(G)$ de um grafo G . Ela é definida como a máxima conectividade algébrica entre todas as atribuições de pesos não-negativos às arestas de G cuja soma é $|E|$. Uma cota precisa para a conectividade algébrica absoluta em termos da conectividade de vértices é fornecida em [35]. Como a conectividade algébrica absoluta é um parâmetro não muito bem conhecido, faremos o seu estudo utilizando uma abordagem diferente. Nesse capítulo, forneceremos uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta de double brooms. Assim, uma ordem para a conectividade algébrica absoluta nessa classe é uma consequência direta. A fim de computar as fórmulas, usaremos uma técnica geométrica que não é muito bem conhecida. Observamos que até agora não existe ordem parcial para grafos pela conectividade algébrica absoluta.

Nossa abordagem se baseia nos resultados de [27], onde os autores usam técnicas de programação semidefinida para descrever a conectividade algébrica absoluta como um problema de encontrar uma *imersão* para os vértices de um grafo no espaço n -dimensional. Entende-se por *imersão* uma atribuição de um vetor n -dimensional para cada vértice do grafo.

$$\begin{aligned} \frac{|E|}{\hat{a}(G)} &= \max \sum_{i \in V} \|v_i\|^2 \\ \text{tal que} \quad &\sum_{i \in V} v_i = \mathbf{0} \\ &\|v_i - v_j\| \leq 1, ij \in E, \\ &v_i \in \mathbb{R}^n \text{ para } i \in V \end{aligned} \tag{5.1}$$

A seguir fornecemos um exemplo concreto para um grafo fixado, onde a solução do problema (5.1) em forma de embedding é representada no espaço 3-dimensional.

Exemplo 12 *Considere o grafo completo com 4 vértices K_4 exibido na Figura 5.2.*

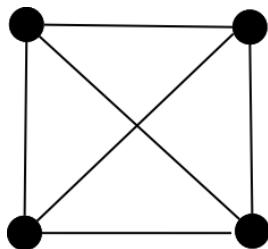


Figura 5.2: Um grafo completo com 4 vértices.

Chamando as coordenadas atribuídas para cada vértice de v_1, v_2, v_3 e $v_4 \in \mathbb{R}^3$, podemos resolver o problema (5.1) para o grafo dado.

Para esse grafo específico o programa semidefinido a resolver é da forma

$$\begin{aligned} \frac{|6|}{\hat{\alpha}(K_4)} &= \max \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 + \|v_4\|^2 \\ \text{s.t.} \quad &v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \mathbf{0} \\ &\|v_1 - v_2\| \leq 1, \\ &\|v_1 - v_3\| \leq 1, \\ &\|v_1 - v_4\| \leq 1, \\ &\|v_2 - v_3\| \leq 1, \\ &\|v_2 - v_4\| \leq 1, \\ &\|v_3 - v_4\| \leq 1, \\ &v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Observamos que para esse grafo podemos simplificar o problema em \mathbb{R}^4 e projetar a imersão em \mathbb{R}^3 . Em geral, resolver esse problema analiticamente pode ser bem complicado para um grafo arbitrário. Entretanto, pode-se verificar que uma

solução ótima para o grafo K_4 é dada por

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right); v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right);$$

$$v_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} \right); v_4 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} \right).$$

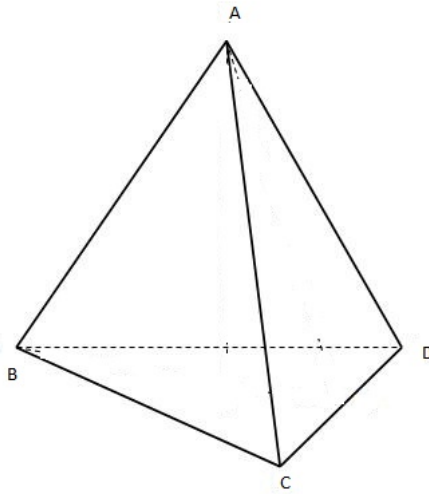


Figura 5.3: Imersão do grafo K_4 .

Essas são as coordenadas da imersão em \mathbb{R}^3 que estão desenhadas na Figura 5.3. Nesse caso, a imersão são as coordenadas dos vértices de um simplex regular 3-dimensional.

O baricentro da imersão é precisamente o baricentro geométrico do simplex, o que corresponde à restrição $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \mathbf{0}$ que força o baricentro da imersão a ficar na origem. O tamanho de cada aresta do simplex é 1, ou seja, $\|v_i - v_j\| = 1$ para todos as arestas $ij \in E$ e as restrições $\|v_i - v_j\| \leq 1$ são satisfeitas com igualdade.

Com a solução do problema (5.1) para a classe de double brooms conseguimos calcular expressões para a conectividade algébrica absoluta. Com isso é possível compreender melhor o comportamento da conectividade algébrica absoluta nessa classe. Por exemplo, para um n e d fixos, a conectividade algébrica absoluta $\hat{a}(T(n, d, k))$ como uma função de k é crescente, mas com uma função diferente a partir de um certo valor de k . Esse fenômeno pode ser resumido no seguinte Teorema.

Teorema 5.1 *Para a double broom $T(n, d, k)$, defina $p = -d$ quando $T(n, d, k)$ tem um número ímpar de folhas e $p = 0$ caso contrário. Defina*

$$M = \begin{cases} n(\frac{1}{2}d^2 - d + 1) - d(\frac{1}{6}d^2 + \frac{1}{2}d - \frac{7}{6}) - k(d^2 - 2d) & k \geq \frac{n(d-2)+p}{2d} \text{ e } p \neq 0 \\ n(\frac{1}{2}d^2 - d + 1) - \frac{1}{6}d(d^2 - 1) - k(d^2 - 2d) & k \geq \frac{n(d-2)+p}{2d} \text{ e } p = 0 \\ \frac{1}{4}nd^2 - \frac{1}{6}d(d^2 - 1) - \frac{d^2}{n}(k^2 + k + \frac{1}{4}) & k < \frac{n(d-2)+p}{2d} \text{ e } p \neq 0 \\ \frac{1}{4}nd^2 - \frac{1}{6}d(d^2 - 1) - \frac{k^2d^2}{n} & k < \frac{n(d-2)+p}{2d} \text{ e } p = 0. \end{cases}$$

$$\text{Vale a expressão } \hat{a}(T(n, d, k)) = \frac{n-1}{M}.$$

Além disso, é possível fornecer uma descrição completa do autoespaço associado com $\hat{a}(T(n, d, k))$. Para isso usamos um resultado de [27] que resumimos a seguir.

Lema 5.1 *Seja v_1, \dots, v_n uma solução ótima de (5.1) e seja a matriz $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e defina o vetor $u = V^T z$. Então u é um autovetor correspondente a $\hat{a}(G)$.*

Como fornecemos uma descrição completa do autoespaço associado com $\hat{a}(T(n, d, k))$, podemos calcular a os pesos ótimos sobre as arestas resolvendo $L_w x = \hat{a}(T(n, d, k))x$ para w , onde w é o vetor com o peso nas arestas. Observe que existem $n-1$ variáveis e n equações. Nós utilizamos projeções da imersão para obter o seguinte resultado.

Teorema 5.2 *Seja $T(n, d, k)$ uma double broom e defina $p = -d$ quando $T(n, d, k)$ tem um número ímpar de folhas e $p = 0$ caso contrário. Sejam $m = (\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k) d^2 + \frac{2d^3 - 3d^2 + d}{6} - 1$ e $q = \lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor + k$ (o número de folhas no lado esquerdo). Seja $f = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ um autovetor correspondendo a $\hat{a}(T(n, d, k))$.*

Se $k < \frac{n(d-2)+p}{2d}$, então $\hat{a}(T(n, d, k))$ possui um autovetor dado por

$$u_i = \begin{cases} -(\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k + \frac{d-1}{2}) \frac{d}{n} & i = 1, \dots, q \\ u_1 + i - q & i = q + 1, \dots, q + d \\ u_1 + q + d + 1 & i = q + d + 1, \dots, n \end{cases}$$

Caso contrário $\hat{a}(T(n, d, k))$ possui dois autovetores: o primeiro é dado por

$$u_i = \begin{cases} i & i = q + 1, \dots, q + d \\ q + d + 1 & i = q + d + 1, \dots, n \\ -\frac{m}{q} & i = 1, \dots, q \text{ e } q \text{ par} \\ -\frac{m+1}{q-1} & i = 1, \dots, q - 1 \text{ e } q \text{ ímpar} \\ -1 & i = q \text{ e } q \text{ ímpar.} \end{cases}$$

O segundo para q par é dado por

$$u_i = \begin{cases} \sqrt{1 - (\frac{m}{q})^2} & i = 1, \dots, \frac{q}{2} \\ -\sqrt{1 - (\frac{m}{q})^2} & i = \frac{q}{2} + 1, \dots, q \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se q é ímpar então tem-se

$$u_i = \begin{cases} \sqrt{1 - (\frac{m-1}{q-1})^2} & i = 1, \dots, \frac{q-1}{2} \\ -\sqrt{1 - (\frac{m-1}{q-1})^2} & i = \frac{q+1}{2}, \dots, q - 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No conjunto de double brooms, a técnica que utilizamos descarta muitas soluções viáveis para (5.1) que não são ótimas, tornando possível fornecer uma fórmula para qualquer double broom. Para um grafo genérico, o número de soluções que pode ser descartada depende de sua estrutura, tornando difícil fornecer uma descrição completa da imersão ótima. Felizmente, para árvores é possível descartar algumas soluções viáveis de (5.1) que não são ótimas e então computar a solução ótima eficientemente através de um algoritmo combinatório. Para árvores com estruturas complicadas podem existir diversas possíveis imersões. Portanto, para computar uma fórmula seria necessário analisar todos eles. Em geral isso pode ser uma tarefa difícil e talvez impossível.

Esse capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 5.2 introduzimos resultados conhecidos que ajudam a compreender a estrutura da imersão de um grafo dado. Na seção ?? nós provamos que existem duas possíveis estruturas para uma imersão ótima na classe de double brooms. Na seção 5.4, onde são provamos os resultados enunciados, nós computamos os valores dessas duas imersões e fornecemos condições para decidir qual deles é ótimo. Na seção 5.5 apresentamos um algoritmo combinatório que computa o valor ótimo para o problema (5.1) para qualquer árvore em tempo $\mathcal{O}(n^3)$.

5.2 Teorema Separator-Shadow

Em geral, resolver o problema (5.1) é difícil. Entretanto, os autores de [27] exibiram uma propriedade para uma imersão ótima que é descrita no chamado Teorema Separator-Shadow, o primeiro resultado que fornece alguma propriedade de uma imersão ótima. Esse teorema pode ser visto como um critério necessário de otimização. Ele mostra que as propriedades estruturais de tais imersões estão fortemente ligadas à estrutura de conjunto de vértices que desconectam o grafo.

Assumimos que o grafo G é conexo nesse capítulo. Seja S um conjunto de pontos em \mathbb{R}^n . Definimos *envoltória convexa de S* como o conjunto de todas as combinações convexas de S . Isto é

$$\text{conv} \{v_s : s \in S\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1\}$$

Chamamos de *separador* um conjunto S de vértices tais que $G - S$ é desconexo. Ou seja, $G - S$ consiste em $k \geq 2$ componentes não vazias C_1, \dots, C_k . Seja $v_i, i \in V$ uma imersão ótima de (5.1) e suponha que a envoltória convexa $\mathcal{S} = \text{conv} \{v_s : s \in S\}$ dos pontos contidos em S não contém a origem. Então todas exceto uma das componentes de $G - S$ satisfazem a seguinte propriedade: o segmento de linha reta entre a origem e cada vértice da componente intersecta \mathcal{S} .

Podemos imaginar a envoltória convexa do separador como sendo feita de um material que bloqueia a luz. Ela bloqueia os raios de luz que passam, se imaginarmos a origem como sendo uma fonte de luz. Desse ponto de vista, o resultado indica que os vértices de todas exceto uma componente estão posicionados na sombra do separador. Daí o nome Teorema Separator-Shadow que foi publicado no artigo de nome *Embedded in the Shadow of the Separator*, fazendo referência aos vértices que ficam nas sombras de separadores.

Uma observação interessante é que, se todos os separadores minimais possuem dimensão pequena, o Teorema Separator-Shadow sugere que as imersões podem possuir dimensão pequena, ou, pelo menos, que pode existir alguma imersão de dimensão pequena.

A seguir, o teorema enunciado formalmente.

Teorema 5.3 (*Separator-Shadow*) *Seja $v_i \in \mathbb{R}^n$ ($i \in V$) uma solução ótima de (5.1) para um grafo conexo $G = (V, E)$ e seja S um separador de G dando origem a dois conjuntos desconexos C_1 e C_2 . Para ao menos um C_j ,*

$$\text{conv} \{0, v_i\} \cap \text{conv} \{v_s : s \in S\} \neq \emptyset, \forall i \in C_j.$$

Vejamos um exemplo onde podemos visualizar a propriedade descrita no Teorema Separator-Shadow.

Exemplo 13 *O grafo H com 30 vértices na Figura 5.4 está representado no plano cartesiano de modo arbitrário. Nessa figura, as coordenadas dos vértices não estão relacionadas com uma imersão ótima ainda.*

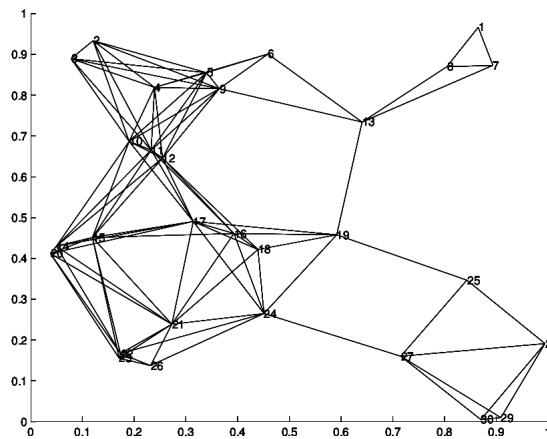


Figura 5.4: Um H grafo com 30 vértices.

Resolvendo o problema (5.1) para H encontramos uma imersão de dimensão 2. O grafo H pode ser desenhado no plano cartesiano atribuindo as coordenadas da imersão ótima para cada vértice como na Figura 5.5.

Observe que alguns vértices receberam as mesmas coordenadas e estão desenhados "um sobre o outro", como os vértices 29 e 30 posicionados à direita da figura.

Vejamos uma ilustração gráfica do que o Teorema Separator-Shadow diz. Acompanhe na ilustração da Figura 5.6. Escolhemos os vértices 19 e 24 para

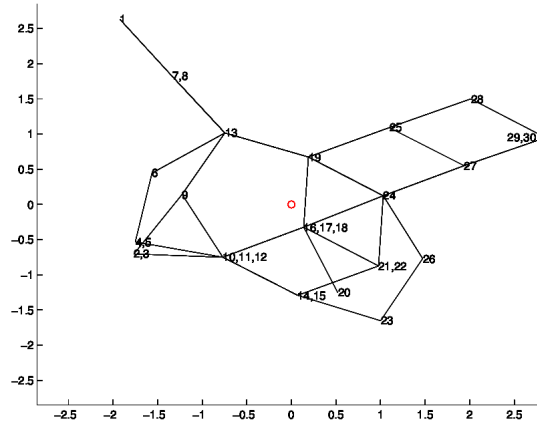


Figura 5.5: Imersão do grafo H .

o separador S . O local geométrico da envoltória convexa $\text{conv} \{v_s : s \in S\}$ é o segmento de linha que liga os vértices 19 e 24. A origem está representada por um círculo no centro da figura. Agora, se imaginarmos que a origem é uma fonte de luz e que a envoltória convexa do separador bloqueia a luz, podemos perceber que alguns vértices estão na sombra do separador. Esses vértices formam uma das duas componentes de $H - S$ e é precisamente essa componente que está debaixo da sombra do separador.

Esse mesmo princípio pode ser utilizado para qualquer outro conjunto separador do grafo H . Na Figura 5.7 escolhemos como separador o conjunto de vértices 10, 11, 12, 16, 17, 18 e 24.

Resumiremos adicionalmente algumas propriedades adicionais de uma imersão ótima que seguem dos resultados provados em [27].

Observação 5.2 *Imersões ótimas de uma árvore satisfazem $\|v_i - v_j\| = 1$ para todas as arestas $ij \in E$.*

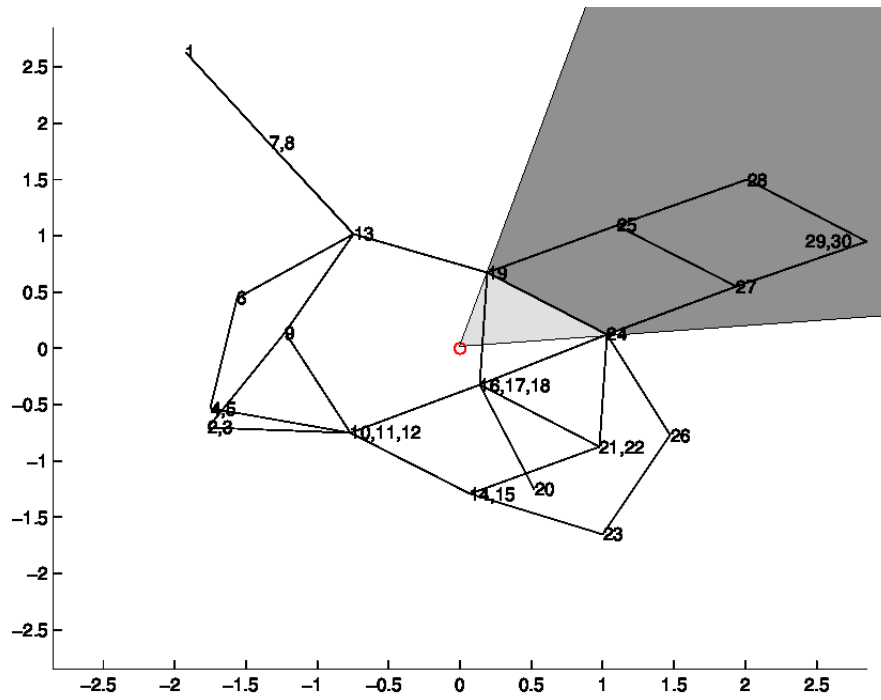


Figura 5.6: Representação gráfica do Teorema Separator-Shadow.

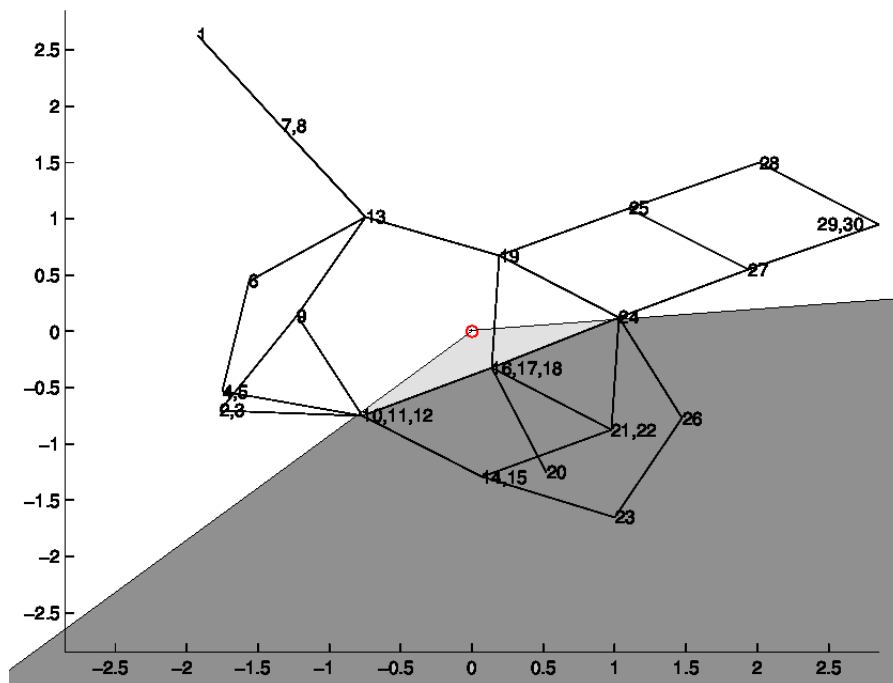


Figura 5.7: Representação gráfica do Teorema Separator-Shadow.

Observação 5.3 *O baricentro de um embedding ótimo de uma árvore está ou sobre uma aresta ou sobre um vértice.*

5.3 Descrição das imersões

Nessa seção descartaremos imersões que não podem ser uma solução ótima de (5.1) para uma double broom. Claramente a primeira restrição do problema (5.1) exige que o baricentro da imersão esteja na origem, o que chamaremos de restrição de equilíbrio. Enquanto isso, a segunda restrição, exige que a distância entre vértices adjacentes seja limitada por 1, o que chamaremos de restrição de distância.

Depois de aplicar o Teorema Separator-Shadow, podemos descartar muitas configurações de imersões como candidatos a imersões ótimas de uma double broom.

Além disso, é possível descartar imersões de dimensão maior que 2. Em [27] os autores mostraram o seguinte resultado.

Teorema 5.4 *Para cada árvore existe uma solução ótima de (5.1) com dimensão no máximo 2.*

Para seguir com a análise, nos referimos às folhas no lado esquerdo e no lado direito como sendo as folhas anexadas aos vértices s_1 e s_{d-1} , respectivamente. Por definição, o número de folhas no lado esquerdo é maior ou igual do que do lado direito.

Proposição 5.4 *Existe uma imersão ótima de uma double broom com respeito à (5.1) com uma das seguintes formas:*

1. 1-dimensional: todos os vértices estão sobre uma reta e as folhas estão esticadas (no sentido de estarem afastadas da extremidade oposta). O baricentro está em uma aresta que não contém uma folha ou um vértice diferente de s_1 ;
2. 2-dimensional: o baricentro está sobre s_1 e todos os vértices estão sobre uma reta, com exceção das folhas anexadas em s_1 . As folhas anexadas em s_1 estão dispostas sobre o círculo unitário com centro em s_1 .

Demonstração Em vista do Teorema 5.4 podemos considerar apenas imersões de dimensão no máximo 2.

Com referência a Observação 5.3, podemos supor que o baricentro está sobre uma aresta ou um vértice.

Primeiro, considere uma imersão ótima com o baricentro em uma aresta $s_k s_{k+1} \in \{s_1 s_2, \dots, s_{d-2} s_{d-1}\}$. Aplicando o Teorema Separator-Shadow para $v_s = s_k, s_{k+1} \in C_1$, obtemos $\text{conv}\{0, s_i\} \cap s_k = \emptyset, \forall s_i \in C_1$. Logo, $\text{conv}\{0, s_i\} \cap s_k \neq \emptyset$ vale para todo $s_i \in C_2$. Assim, todo $v \in C_2$ está sobre uma reta contendo $\text{conv}\{0, v_i\}$, $v_i \in C_2$. Novamente, pelo Teorema Separator-Shadow, para a mesma imersão, escolhendo agora $v_s = s_{k+1}$, onde supomos que $s_k \in C_1$, concluimos que todos os vértices estão dispostos sobre uma reta contendo o baricentro. Pela maximalidade da solução e pela Observação 5.2, todo vértice precisa estar disposto o mais distante possível do baricentro. Portanto, todas as folhas estão esticadas sobre essa reta, ou seja, essa é uma imersão da forma (1).

Agora suponha que a imersão ótima possui o baricentro no vértice $v \in \{s_2, \dots, s_{d-2}\}$. Novamente, pela maximalidade da solução e pela Observação 5.2 todas as folhas estão esticadas sobre uma reta e, portanto, essa é uma imersão da forma (1).

Se o baricentro estivesse sobre uma folha, então a solução não poderia ser maximal e satisfazer a restrição de equilíbrio ao mesmo tempo. Observe que como o lado esquerdo possui mais folhas do que o lado direito, o baricentro não poderia estar sobre s_{d-1} nem mesmo sobre uma aresta do lado direito.

Agora, assuma por contradição que o baricentro está sobre uma aresta contendo s_1 e uma folha do lado esquerdo, digamos uma aresta v_1s_1 . Desse modo, podemos escolher $v_s = s_1$ como um separador para o Teorema Separator-Shadow, e definir $C_1 = v_1$ e $C_2 = V \setminus C_1$. Como $\text{conv}\{0, v_1\} \cap s_1 = \emptyset$, todos os vértices em C_2 precisam estar sobre a reta contendo o baricentro. Pela maximalidade da solução e pela Observação 5.2, todos os vértices em C_2 precisam estar dispostos o mais distante possível do baricentro. Essa imersão não é viável, visto que o baricentro está em v_1s_1 e a solução de equilíbrio não é satisfeita.

Finalmente, resta considerar uma imersão onde o baricentro está sobre s_1 . Nesse caso, obtemos uma imersão da forma (2). Aplicando o Teorema Separator-Shadow para $v_s = s_1$ é fácil ver que toda a componente precisa estar sobre o segmento de reta contendo a origem. Além disso, os vértices precisam estar dispostos o mais distante possível da origem para que ser maximal. Pela Observação 5.2, podemos colocar as folhas do lado esquerdo sobre o círculo unitário com centro s_1 , e com uma escolha adequada de coordenadas é possível satisfazer a restrição de equilíbrio. \square

5.4 Cálculo das imersões

Nessa seção calcularemos a quantidade $\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$ para as duas formas possíveis de imersões de double brooms. Iniciaremos com imersões da forma (2).

Lema 5.5 *Seja u_1, \dots, u_n uma imersão de $T(n, d, k)$ da forma (2). Se $T(n, d, k)$ tem um número par de folhas, então $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = n + \frac{1}{6}d - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd$. Do contrário, $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = n + \frac{7}{6}d - \frac{1}{6}d^3 - \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd$.*

Demonstração Suponha que $T(n, d, k)$ tenha um número par de folhas. Essa imersão possui $\frac{n-d+1}{2} + k$ e $\frac{n-d+1}{2} - k$ folhas no lado esquerdo e direito, respectivamente. Como cada aresta possui tamanho 1, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 &= \frac{n-d+1}{2} + k + \sum_{i=1}^{d-2} i^2 + \left(\frac{n-d+1}{2} - k \right) (d-1)^2 \\ &= n + \frac{1}{6}d - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd. \end{aligned}$$

Agora, suponha que $T(n, d, k)$ possua um número ímpar de folhas. Para essa imersão, existem $\frac{n-d+2}{2} + k$ e $\frac{n-d}{2} - k$ folhas no lado esquerdo e direito, respectivamente. Similarmente, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 &= \frac{n-d+2}{2} + k + \sum_{i=1}^{d-2} i^2 + \left(\frac{n-d}{2} - k \right) (d-1)^2 \\ &= n + \frac{7}{6}d - \frac{1}{6}d^3 - \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd. \end{aligned}$$

Isso prova o Lema. \square

Da mesma forma, podemos calcular expressões simples para as imersões da forma (1). Como as coordenadas para os vértices não são tão óbvias como antes, iniciaremos fornecendo expressões para elas. Para simplificar os cálculos vamos coletar as folhas no lado esquerdo e direito em um vértice com peso, respectivamente. Os pesos desses vértices são atribuídos de modo a representar o número de folhas. Os pesos de todos os outros vértices são 1. Desse modo, $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i$ e $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i^2$ com $\bar{n} = d+1$. Aqui $\bar{u}_1, \bar{u}_{\bar{n}}$ representam as coordenadas das folhas do lado esquerdo e direito, respectivamente, $w_1 = \lceil \frac{n-d+1}{2} \rceil + k$, $w_{\bar{n}} = \lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k$ e $w_i = 1$ para $i = 2, \dots, \bar{n} - 1$.

Proposição 5.6 *Sejam $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\bar{n}}$ as coordenadas de uma imersão ótima de $T(n, d, k)$ da forma (1). Então $\bar{u}_1 = -(\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k + \frac{d-1}{2}) \frac{d}{n}$ e $\bar{u}_i = u_1 + i - 1$ para $i = 2, \dots, \bar{n}$.*

Demonstração Sejam $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\bar{n}}$ as coordenadas de uma imersão ótima de $T(n, d, k)$.

Para satisfazer a restrição de equilíbrio é necessário $0 = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i &= \left(\left\lfloor \frac{n-d+1}{2} \right\rfloor + k \right) \bar{u}_1 + \left(\left\lfloor \frac{n-d+1}{2} \right\rfloor - k \right) (\bar{u}_1 + d) \\ &\quad + (d+1)\bar{u}_1 + \sum_{i=1}^{d-1} i \\ &= n\bar{u}_1 + d \left(\left\lfloor \frac{n-d+1}{2} \right\rfloor - k + \frac{d-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Logo, $\bar{u}_1 = -\frac{d}{n} \left(\left\lfloor \frac{n-d+1}{2} \right\rfloor - k + \frac{d-1}{2} \right)$ e $\bar{u}_i = \bar{u}_1 + i - 1$, porque cada aresta tem tamanho 1. \square

Lema 5.7 *Sejam u_1, \dots, u_n as coordenadas da imersão de $T(n, d, k)$ da forma (1).*

Se $T(n, d, k)$ possui um número par de folhas, então $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \frac{1}{4}d^2n - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{6}d - \frac{k^2d^2}{n}$ e $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \frac{1}{4}d^2n - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{6}d - \frac{k^2d^2}{n} - \frac{kd^2}{n} - \frac{1}{4}\frac{d^2}{n}$ caso contrário.

Demonstração Sejam $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\bar{n}}$ as coordenadas da imersão de $T(n, d, k)$ como

descrito acima. Primeiramente, consideramos double brooms com um número par

de folhas. Pela Proposição 5.6 temos $\bar{u}_1 = -\frac{d}{n} \left(\frac{n}{2} - k \right)$ e $rlineu_i = \bar{u}_1 + i - 1$ para

$i = 2, \dots, d+1$ e portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i^2 \\ &= \left(\frac{n-d+1}{2} + k \right) \left(\frac{d}{n} \left(\frac{n}{2} - k \right) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{n-d+1}{2} - k \right) \left(-\frac{d}{n} \left(\frac{n}{2} - k \right) + d \right)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(-\frac{d}{n} \left(\frac{n}{2} - k \right) + i \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}d^2n - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{6}d - \frac{k^2d^2}{n}. \end{aligned}$$

Finalmente, seja $T(n, d, k)$ uma double broom com um número ímpar de folhas. Novamente pela Proposição 5.6 obtemos $\bar{u}_1 = -\frac{d}{n} \left(\frac{n-1}{2} - k \right)$ e $\bar{u}_i = \bar{u}_1 + i - 1$ para $i = 2, \dots, d+1$, logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \bar{u}_i^2 \\ &= \left(\frac{n-d+2}{2} + k \right) \left(\frac{d}{n} \left(\frac{n-1}{2} - k \right) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{n-d}{2} - k \right) \left(-\frac{d}{n} \left(\frac{n-1}{2} - k \right) + d \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d-1} \left(-\frac{d}{n} \left(\frac{n-1}{2} - k \right) + i \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} d^2 n - \frac{1}{6} d^3 + \frac{1}{6} d - \frac{k^2 d^2}{n} - \frac{k d^2}{n} - \frac{1}{4} \frac{d^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Por fim, compararemos os embeddings da forma (1) e (2) e descreveremos qual possui maior valor.

Proposição 5.8 *Seja $T(n, d, k)$ uma double broom, u_1, \dots, u_n as coordenadas da sua imersão da forma (1) e v_1, \dots, v_n as coordenadas da sua imersão da forma (2). Defina $p = -d$ quando $T(n, d, k)$ possui um número ímpar de folhas e $p = 0$ caso contrário. Se $k \geq \frac{n(d-2)+p}{2d}$, então $\sum_{i=1}^n u_i^2 < \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$, do contrário $\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 < \sum_{i=1}^n u_i^2$.*

Demonstração Suponha que $T(n, d, k)$ possui um número ímpar de folhas. Primeiramente, afirmamos que uma imersão da forma (2) ocorre apenas se $k \geq \frac{n(d-2)-d}{2d}$. Como descrito na Proposição 5.6 as coordenadas dos vértices de uma imersão 1-dimensional são $\bar{u}_1 = -\frac{d}{n} \left(\lfloor \frac{n-d+1}{2} \rfloor - k + \frac{d-1}{2} \right)$ e $\bar{u}_i = \bar{u}_1 + i - 1$ para $i = 2, \dots, d+1$. Pela Proposição 5.4 concluímos $\bar{u}_2 = 0$ como uma condição necessária para uma imersão da forma (2), logo, $-\frac{d}{n} \left(\frac{n-1}{2} - k \right) + 1 = 0$ e assim $k = \frac{n(d-2)-d}{2d}$. Agora, é fácil ver que para uma imersão da forma (2) precisamos que $k \geq \frac{n(d-2)-d}{2d}$ para que a restrição de equilíbrio seja satisfeita.

Usado os Lemas 5.5 e 5.7, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum u_i^2 - \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 &= \frac{d^2}{4}(n - 2d + 2) + \frac{1}{6}d(d - 1)(2d - 1) \\
&\quad - d^2 \frac{(2k + 1)^2}{2n} + \frac{d^2}{4n} + \frac{d^2}{n}(k^2 + k) \\
&\quad - \left(n + \frac{7}{6}d - \frac{1}{6}d^3 - \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd \right) \\
&= -\frac{d^2}{n}k^2 + \left(\frac{(4n - 4)d^2}{4n} - 2d \right) k \\
&\quad - \frac{(n^2 - 2n + 1)d - 4n^2 + 4n}{4n}d - n.
\end{aligned}$$

Agora considere essa diferença como uma função quadrática em k . Como as raízes dessa função são ambas $k_0 = \frac{dn-d-2n}{2d}$, a diferença é negativa para todo $k \neq k_0$. Portanto, o resultado é válido para um número ímpar de folhas.

Suponha que $T(n, d, k)$ tem um número par de folhas. Usando o mesmo procedimento anterior, vemos que para uma imersão da forma (2) precisamos $k \geq \frac{n(d-2)}{2d}$ para que a restrição de equilíbrio seja satisfeita.

Usando os Lemas 5.5 e 5.7, temos

$$\begin{aligned}
\sum u_i^2 - \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 &= \frac{1}{4}d^2n - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{6}d - \frac{k^2d^2}{n} \\
&\quad - \left(n + \frac{1}{6}d - \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{2}d^2n - dn - kd^2 + 2kd \right) \\
&= -\frac{k^2d^2}{n} + (d^2 - 2d)k - \frac{1}{12} \frac{d(2d^2n - 2n - 3dn^2)}{n} \\
&\quad - \frac{1}{2}d^2n - n - \frac{1}{6}d + \frac{1}{6}d^3 + dn.
\end{aligned}$$

Calculando as raízes dessa função quadrática novamente, obtemos que ambas são $k_0 = \frac{dn-2n}{2d}$. Assim, a diferença é negativa para todo $k \neq k_0$. Logo, o resultado segue para o caso par e a prova está completa. \square

Agora estamos prontos para provar o principal resultado dessa seção.

Teorema 5.5 *Seja $T(n, d, k)$ uma double broom e defina $p = -d$ se $T(n, d, k)$ possui um número ímpar de folhas e $p = 0$ do contrário. Se $k \geq \frac{n(d-2)+p}{2d}$, então uma solução ótima do problema (5.1) é dada pela imersão da forma form (2) e por uma imersão da forma (1), caso contrário.*

Demonstração Como podemos restringir a nossa atenção apenas a imersões da forma (1) e (2), a afirmação é apenas uma consequência da Proposição 5.8. \square

Agora em vista do Problema (5.1), Teorema 5.5, Lema 5.5 e Lema 5.7 a prova do Teorema 5.1 segue.

Finalmente, provaremos o Teorema 5.2.

Demonstração (Teorema 5.2) Aplicaremos o Teorema 5.1 e a Proposição 5.6 usando as coordenadas 1-dimensionais como uma projeção para o autovetor. Assim, pelo Teorema 5.5 a prova está concluída se $k < \frac{n(d-2)+p}{2d}$.

Observe que, para $k \geq \frac{n(d-2)+p}{2d}$, nós temos dois autovetores que são projeções das seguintes imersões 2-dimensionais sobre os eixos x e y

Se q é par então

$$v_i = \begin{cases} \left(-\frac{m}{q}, \sqrt{1 - \left(\frac{m}{q}\right)^2}\right) & i = 1, \dots, \frac{q}{2} \\ \left(-\frac{m}{1}, -\sqrt{1 - \left(\frac{m}{q}\right)^2}\right) & i = \frac{q}{2} + 1, \dots, q \\ (i, 0) & i = q + 1, \dots, q + d \\ (q + d + 1, 0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se q é ímpar nós temos

$$v_i = \begin{cases} \left(-\frac{m+1}{q-1}, \sqrt{1 - \left(\frac{m-1}{q-1}\right)^2}\right) & i = 1, \dots, \frac{q-1}{2} \\ \left(-\frac{m+1}{q-1}, -\sqrt{1 - \left(\frac{m-1}{q-1}\right)^2}\right) & i = \frac{q+1}{2}, \dots, q-1 \\ (-1, 0) & i = q \\ (i, 0) & i = q+1, \dots, q+d \\ (q+d+1, 0) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \square$$

5.5 Cálculo da conectividade algébrica absoluta de árvores

Em [22] Fiedler investigou a conectividade algébrica absoluta de árvores introduzindo um espaço métrico sobre seu conjunto de arestas e vértices. Ocorre que essa abordagem está fortemente relacionada com a formulação em termos de imersões para a conectividade algébrica absoluta. Primeiramente relembramos algumas definições de [22]. Dada uma árvore $T = (N, E)$ um espaço métrico (\mathcal{X}_T, d) pode ser atribuído a árvore como segue: os pontos de \mathcal{X}_T consistem de todos os vértices de T bem como de todos os pontos métricos sobre as arestas. Cada ponto x sobre a aresta ij é unicamente determinado pelas distâncias $d(i, x) \geq 0$ e $d(j, x) \geq 0$ dos vértices incidentes, eles satisfazem $d(i, x) + d(j, x) = 1$. Aqui, as distâncias entre dois pontos $x, y \in \mathcal{X}_T$ é a distância canônica do único caminho na árvore que os conecta.

Além disso, definimos o *centro de gravidade absoluto* de T como cada ponto x em T para o qual a função

$$S(x) = \sum_{k \in N} d(x, k)^2$$

atinge o seu mínimo.

Como observado em [65], o único centro de gravidade absoluto coincide com a origem em relação a imersão de uma solução ótima do Problema (5.1). Usaremos esse fato como uma forma de identificar o baricentro e juntamente com o

Teorema Separator-Shadow forneceremos um algoritmo capaz de computar o valor ótimo do Problema (5.1) de uma árvore especificada. Sendo assim, descrever a imersão ótima se torna uma tarefa simples quando conseguimos identificar o centro de gravidade absoluto. Felizmente, o seguinte resultado de [22] descreve uma forma de fazer isso.

Teorema 5.6 *Seja $T = (N, E)$ uma árvore, $|N| = n$. Então existe um único centro de gravidade absoluta M em T , e uma das seguintes situações é válida:*

(i) *Existe um vértice $u \in N$ para o qual*

$$S(u) \leq S(k) - n$$

para todo $k \neq u$ e $M = u$.

(ii) *Existe uma aresta $(p, q) \in E$ para a qual*

$$|S(p) - S(q)| < n,$$

e então M é aquele ponto de (p, q) tal que

$$d(M, p) = \frac{1}{2n}(n + S(p) - S(q)),$$

$$d(M, q) = \frac{1}{2n}(n + S(q) - S(p)).$$

Com esse resultado podemos definir o seguinte algoritmo.

Algoritmo 5.9 **Input:** Tree $T = (N, E)$, **Output:** Optimal value of (5.1)

Initialisation: Compute $S(v)$ for every node $v \in N$

Iteration (i):

For every node u do

If for every node $k \neq u$ it holds that $S(u) \leq S(k) - |N|$ **then**

For every node $i \in N$ set $v_i = d(u, i)$

Go to Last step

end if

end for

Iteration (ii):

For every edge (p, q) do

If $|S(p) - S(q)| < |N|$ **then**

For every node i in the branch at p not containing q

set $v_i = d(p, i) + \frac{1}{2n}(n + S(p) - S(q))$

For every node i in the branch at q not containing p

set $v_i = d(q, i) + \frac{1}{2n}(n + S(q) - S(p))$

Go to Last step

end if

end for

Last step:

Return $\sum_{i \in N} v_i^2$.

Demonstração (Corretude do Algoritmo 5.9).

O custo do algoritmo é dado por Iteration (i) que consiste de três laços sobre o conjunto de vértices. Assim, o tempo de execução é $\mathcal{O}(n^3)$.

Agora para ver que o algoritmo retorna o valor ótimo do Problema (5.1) aplicaremos o Teorema 5.6. Então ou a condição dentro de Iteration (i) é satisfeita, ou a condição dentro de Iteration (ii) é satisfeita. Para Iteration (i),

considere as componentes adjacentes ao vértice que está sobre o baricentro. Para a Iteration (ii) considere a componente em p não contendo o vértice q e a componente em q não contendo p . Pelo Teorema Separator-Shadow, concluímos que todos os vértices dentro de uma componente precisam estar distribuídos sobre um segmento de reta. Pela maximalidade da solução e pela Observação 5.2 todo o vértice precisa estar localizado o mais distante possível do baricentro. Assim, todos os vértices estão esticados sobre esse segmento de reta. Com isso, é claro que as variáveis v_i representam as distâncias do vértice i ao baricentro, que é dado pelo Teorema 5.6. Portanto, o algoritmo retorna o valor ótimo. \square

Do ponto de vista do algoritmo, os cálculos feitos para double brooms são bem diferentes. Para as double brooms foi possível encontrar o baricentro por meio de cálculos, diferentemente do algoritmo para árvores gerais que aplica o Teorema 5.6 para localizar o baricentro. Isso se deve ao fato de que exploramos a estrutura das double brooms para simplificar o procedimento. Se aplicássemos o algoritmo para as double brooms, seria necessário testar cada aresta e vértice para encontrar o baricentro. Em qualquer situação, utilizamos a formulação por meio de imersões do problema juntamente com a descrição de uma solução ótima dada pelo Teorema Separator-Shadow. Isso mostra o potencial da técnica para compreender a conectividade algébrica absoluta.

De qualquer modo, localizar o baricentro é uma etapa fundamental no procedimento. Com isso, finalizamos o capítulo levantando a questão de como localizar eficientemente o baricentro de uma imersão ótima para qualquer grafo. Também seria interessante encontrar classes de grafos para as quais uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta pode ser exibida.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Uma matriz de um grafo que tem recebido bastante atenção recentemente é a matriz Laplaciana normalizada. Mencionada no capítulo 4 como um caso particular da matriz Laplaciana perturbada, a matriz Laplaciana normalizada foi denotada por \mathcal{L} .

Na literatura, encontramos muito mais trabalhos sobre a matriz de adjacência e a matriz Laplaciana do que para a matriz Laplaciana normalizada. Uma razão para isto é porque a Laplaciana normalizada é uma ferramenta relativamente nova, que começou a ser difundida em meados de 1990 através do trabalho de Fan Chung [11].

A matriz Laplaciana normalizada é uma matriz positiva semidefinida cujos autovalores estão contidos no intervalo $[0, 2]$. Essa matriz possui uma relação direta com o estudo de passeios aleatórios de modo que seu espectro pode ser usado para obter uma estimativa da taxa de convergência de um passeio aleatório.

Recentemente alguns esforços têm sido feitos para estudar o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana normalizada, denotado por $\lambda_1(\mathcal{L})$. Esse autovalor, da mesma forma que a conectividade algébrica, tem apresentado interessantes relações com o número isoperimétrico, como por exemplo

$$\frac{h(G)^2}{2} \leq \lambda_1(\mathcal{L}) \leq 2h(G). \quad (6.1)$$

Por outro lado, no que diz respeito à conectividade algébrica, nesse trabalho fizemos uma abordagem para grafos mais gerais do que se tinha anteriormente. De fato, como discutido no texto, existem várias pesquisas com grafos com ponto de articulação, particularmente existem diversos trabalhos considerando árvores.

A generalização feita nesse trabalho tem origem em ferramentas que se aplicam muito bem para árvores, permitindo estabelecer uma ordem em certas famílias pela conectividade algébrica, além de permitir extremizar a conectividade algébrica dentro de certas classes. Um resultado notório obtido por meio dessas ferramentas é dado por Fallat e Kirkland em [19]. Eles exibem a única árvore com n vértices e diâmetro d fixados que minimiza a conectividade algébrica. Utilizando as mesmas ferramentas, eles também exibem a única árvore com n vértices e diâmetro d fixados que maximiza a conectividade algébrica.

Em vista disso, uma pergunta que deu origem a boa parte das generalizações feitas no capítulo 4 foi: quais são as árvores com número de vértices e diâmetro fixos que extremizam $\lambda_1(\mathcal{L})$?

Para responder a essa pergunta, procedemos com o estudo do autovetor associado à $\lambda_1(\mathcal{L})$. Estudos preliminares nos permitiram estabelecer uma propriedade de monotonicidade nas entradas desse autovetor, semelhante à que é dada pelo Teorema da Monotonicidade de Fiedler. Além disso, introduzimos o conceito de componente de Perron para a matriz Laplaciana normalizada e, através desse, conseguimos estabelecer uma relação entre a estrutura de uma componente e o autovetor associado à $\lambda_1(\mathcal{L})$. Alguns desses resultados estão disponíveis em uma versão preliminar no repositório do arXiv [53].

Ainda temos um longo caminho a seguir para compreender melhor o autovalor $\lambda_1(\mathcal{L})$ sobre classes de grafos específicas. Ainda precisamos estabelecer diversos resultados semelhantes aos que foram feitos por Fiedler em 1970 e que vieram a ter um desdobramento significativo com os estudos de Kirkland na década de 1990 e 2000.

Entretanto, é importante dizer que a investigação de $\lambda_1(\mathcal{L})$ abriu caminho para muitas generalizações dessa tese. Para compreender $\lambda_1(\mathcal{L})$, descobrimos ferramentas que eram mais gerais do que esperávamos. Na verdade, foi possível esta-

belecer esses resultados para a matriz Laplaciana perturbada e com isso encontramos as ferramentas que compõem o capítulo 4. Em particular, também descrevemos propriedades de $\lambda_1(\mathcal{L})$ e seus autovetores. Tal investigação foi mais produtiva do que podíamos imaginar inicialmente.

Essencialmente, mostramos um teorema de monotonicidade para a autofunção harmônica correspondendo ao segundo menor autovalor da matriz Laplaciana perturbada sobre os pontos de articulação de um grafo. Além disso, introduzindo a noção de componentes de Perron para a matriz Laplaciana perturbada, mostramos como o segundo menor autovalor dessa matriz pode ser caracterizado utilizando essa definição.

Em particular, a matriz Laplaciana perturbada engloba também a matriz Laplaciana com pesos. O segundo menor autovalor dessas matrizes é o foco do capítulo 5, especificamente a conectividade algébrica absoluta, que é definida como a máxima conectividade algébrica entre todas as atribuições de pesos não-negativos nas arestas de G cuja soma é $|E|$.

Usando uma técnica geométrica baseada na imersão de grafos, fornecemos uma fórmula explícita para a conectividade algébrica absoluta de double brooms. Além disso, fornecemos um algoritmo de tempo polinomial que computa a conectividade algébrica absoluta de qualquer árvore fornecida. Ainda conseguimos encontrar a distribuição de pesos ótimos que leva a conectividade algébrica absoluta e juntamente com isso encontramos o autovetor para a matriz Laplaciana com pesos que fornece a conectividade algébrica absoluta.

É importante notar que o autovetor associado à conectividade algébrica absoluta de qualquer grafo satisfaz a propriedade de monotonicidade da autofunção harmônica descrita no capítulo 4. Na verdade, a autofunção harmônica para a matriz Laplaciana com pesos é igual à autofunção. Isso vem do fato de que, para essa matriz, o autovetor associado com o menor autovalor é o vetor de uns. Disso se con-

clui rapidamente que o autovetor associado com a conectividade algébrica absoluta também satisfaz a propriedade de monotonicidade sobre os pontos de articulação.

Por um lado o capítulo 3 estende a teoria de Fiedler para grafos sem ponto de articulação. Por outro lado, o capítulo 4 estende a teoria de Fiedler para uma nova classe de matrizes ainda considerando grafos com pontos de articulação. Desse fato, surge o interesse em uma teoria que utilize as autofunções da matriz Laplaciana perturbada para compreender grafos sem pontos de articulação. Além disso, é natural investigar novas classes de matrizes a fim de descobrir se também existem outras estruturas matriciais que fornecem propriedades de monotonicidade ou particionamento para grafos.

Fornecemos aqui uma extensão da teoria de Fiedler para novos grafos e matrizes. Porém, finalizamos a tese esperando que no futuro seja possível traçar uma unificação de resultados através de uma teoria mais geral e descobrir como essas propriedades ajudam a compreender a estrutura do grafo.

6.1 Outros Trabalhos

Por um lado, essa tese generaliza resultados no contexto de conectividade algébrica e produz generalizações para outras classes de matrizes. Entretanto, paralelamente também fizemos investigações em outras áreas de Teoria Espectral de Grafos, obtendo resultados relativos à soma dos autovalores Laplacianos, energia Laplaciana de árvores, conjectura de Brouwer e o índice Laplaciano. Deixamos aqui as referências e uma breve descrição.

Em uma das investigações feitas, trabalhamos com o problema de ordenamento de árvores pela energia Laplaciana. Encontramos uma classe com cardinalidade aproximadamente \sqrt{n} cujos elementos são as árvores com n vértices com maior energia Laplaciana. Para isso fornecemos uma cota para a soma dos k maiores

autovalores de uma árvore com diâmetro pelo menos 4. Esses resultados estão publicados em [25] e uma versão resumida desse trabalho pode ser encontrada em [54].

Outra investigação feita foi relacionada a conjectura de Brouwer para a soma dos autovalores Laplacianos. Provamos que esta vale para certas classes de grafos. Também fornecemos cotas para a soma dos maiores autovalores Laplacianos para grafos satisfazendo certas propriedades: contendo um caminho ou um ciclo de tamanho dados, grafos com um número de emparelhamento fornecido e grafos com um dado grau máximo. Além disso, mostramos sob quais condições essas cotas são melhores das que já existiam. Esses resultados estão publicados em [55].

Além disso, conduzimos pesquisas em conjunto com o grupo de pesquisa de algoritmos e matemática discreta em Technische Universität Chemnitz na Alemanha. Dando continuação ao trabalho iniciado no Brasil com o grupo alemão utilizando o Teorema Separator-Shadow, seguimos utilizando outras ferramentas provenientes de programação semidefinida. Com isso foi feita uma investigação sobre o maior autovalor Laplaciano utilizando técnicas de programação semidefinida semelhantes às utilizadas no capítulo 5. Em nossa pesquisa produzimos um algoritmo combinatório que minimiza o maior autovalor Laplaciano tomando como variáveis os pesos. Esse algoritmo resolve o problema para um dado grafo bipartido e termina em tempo polinomial. No momento da elaboração dessa tese esse trabalho estava sendo preparado para submissão.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, A. M. M., Del-Vecchio, R., Vinagre, C. e Stevanovic, D. **Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações**, SBMAC, (2007).
- [2] ABREU, A. M. M. **Old and new results on algebraic connectivity of graphs**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 423, (2007), 53-73.
- [3] ABREU, A. M. M., Justel, C. M., Rojo, O., Trevisan, V. **Ordering trees and graphs with few cycles by algebraic connectivity**, Linear Algebra and its Applications, to appear, 2013.
- [4] BAPAT, R. B. e Pati S. **Algebraic connectivity and the characteristic set of a graph**, Linear and Multilinear Algebra, vol. 45, (1998), 247-273.
- [5] BAPAT, R. B., Kirkland, S. J., e Pati, S. **The perturbed laplacian matrix of a graph**, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 49 (2001), pp. 219-242.
- [6] BAPAT, R. B., Lal, K. e Pati S. **On algebraic connectivity of graphs with at most two points of articulation in each block**, Linear and Multilinear Algebra, Aceito (2011).
- [7] BELHAIZA, S., Abreu, N. M. M., Hansen, P. e Oliveira C. S. **VNS for extremal graphs 11. Bounds on algebraic connectivity**, in: Avis, Herzt, Marcotte (Eds.), Graph Theory and Combinatorial Optimization, vol. 8, Springer, (2005).
- [8] BERMAN, A., e Zhang, X-D. **Lower bounds for the eigenvalues of Laplacian matrices**, Linear Algebra Appl. 316 (2000)

- [9] BUTLER, S. **Eigenvalues and Structures of Graphs**, PhD Dissertation, University of California, San Diego, 2008.
- [10] CAVERS, M. **The normalized Laplacian matrix and general Randić index of graphs**. PhD Dissertation, University of Regina, 2010.
- [11] CHUNG, Fan R.K. **Spectral graph theory**, American Mathematical Society, Issue 92, Providence, (1997).
- [12] CHUNG, Fan R.K., Richardson, R. **Weighted Laplacians and the Sigma function of a graph**, Quantum Graphs and their Applications (B. Berkolaiko et al. eds), Contemporary Math., AMS, Providence, RI, 93-107, (2006).
- [13] COLLATZ, L. e U. Sinogowitz, **Spektren endlicher Grafen**, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957), 63-77.
- [14] COURANT, R. e Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics**, Vol.1., Interscience, New York, 1953.
- [15] CVETKOVIC, D., Cangalovic, V. and Kovacevic-Vujcic V. **Optimization and highly informative graph invariants**, Tech. Report University Belgrade, 2002.
- [16] DAVIES, E. B., Leydold, J. e Stadler P. F., **Discrete Nodal Domain Theorems**, Linear Algebra Appl., 336 (2001), pp. 51-60.
- [17] DIESTEL, R. **Graph theory**, Springer-Verlag, 2006.
- [18] DING, C. H. Q., He, X., Zha H., Gu, M. e Simon, H. **A Min-max Cut Algorithm for Graph Partitioning and Data Clustering**, Proceedings 2001 IEEE International Conference on Data Mining, 107-114.

- [19] FALLAT, S. e Kirkland, S. **Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints**, The Electronic Journal of Linear Algebra, Vol 3, 1998, pp. 48-74.
- [20] FIEDLER, M. **Algebraic connectivity of graphs**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), 298-305.
- [21] FIEDLER, M. **A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 4, 619-633
- [22] FIEDLER, M. **Eigenvectors of Acyclic Matrices**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 4, 607-618
- [23] FIEDLER, M. **On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 382-400
- [24] FRITSCHER, E., Hoppen, C. , Rocha, I. e Trevisan, V. **On the sum of the Laplacian eigenvalues of a tree**, Linear Algebra and its Applications 435 (2011) 371-399.
- [25] FRITSCHER, E., Hoppen, C. , Rocha, I. e Trevisan, V. **Characterizing Trees with large Laplacian energy**. Linear Algebra and its Applications 442, (2014), 20-49.
- [26] GHANG, A. e Huang, Q. **Ordering trees by largest eigenvalues**, Linear Algebra and its Applications, 370 (2003) 175-184.
- [27] GÖRING, F., Helmberg, C. e Wappler, W. **Embedded in the Shadow of the Separator**. SIAM Journal on Optimization 01/2008; 19:472-501.

- [28] GRONE, R. e Merris, R. **Ordering trees by algebraic connectivity.**, Graphs and Combinatorics, Vol. 6, (1990), 229-237.
- [29] GUO, J-M. **On the minimal energy ordering of trees with perfect matchings.** Discrete Applied Mathematics 156:14(2008) 2598-2605.
- [30] GUO, S-G. **Ordering of trees with n vertices and matching number q by their largest Laplacian eigenvalues,** Discrete Mathematics 308:20 (2008) 4608-4615.
- [31] HORN, R. A. e Johnson, C. R. **Matrix Analysis**, Cambridge University Press, (1985).
- [32] KIRKLAND, S., Neumann, M. e Shader, B. **Characteristic vertices of weighted trees via Perron values,** Linear and Multilinear Algebra, Vol. 40, (1996), pp. 187-203.
- [33] KIRKLAND, S. e Neumann, M, **Algebraic connectivity of weighted trees under perturbation,** Linear and Multilinear Algebra 42:187-203 (1997).
- [34] KIRKLAND, S. e Fallat, S. **Perron Components and Algebraic Connectivity for Weighted Graphs,** Linear and Multilinear Algebra, Vol. 44, (1998), pp. 131-148.
- [35] KIRKLAND, S. e Pati, S. **On Vertex Connectivity and Absolute Algebraic Connectivity for Graphs.** Linear and Multilinear Algebra. 50:3 (2002) 253-284.
- [36] KIRKLAND, S., Rocha, I. e Trevisan, V. **Algebraic connectivity of k -connected graphs.** Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 65, No. 1, (2015) pp. 219-236.

- [37] LI, H-H., Li, J-S. e Fan, Y-Z. **The effect on the second smallest eigenvalue of the normalized Laplacian of a graph by grafting edges**, Linear and Multilinear Algebra 56:6 (2008), 627-638.
- [38] LI, J., Guo, Shiu, J. W.C. e Chan, W.H. **Some results on the Laplacian eigenvalues of unicyclic graphs**, Linear Algebra and its Applications 430 (2009) 2080-2093.
- [39] LI, S., Simić, S.K., Tosić, D.V., e Shao, Q. **On ordering bicyclic graphs with respect to the Laplacian spectral radius**, Applied Mathematics Letters 24 (2011) 2186-2192.
- [40] LI, J., Guo, J. e Shiu, W.C. **The smallest values of algebraic connectivity for trees**, Acta Mathematica Sinica, English Series, 28(10) (2012) 2021-2032.
- [41] LIN, W., e Guo, X. **Ordering trees by their largest eigenvalues**, Linear Algebra and its Applications 418 (2006) 450-456.
- [42] MAAS, C. **Transportation in graphs and the admittance spectrum**, Discrete Appl. Math. 16 (1987) 31.
- [43] MERRIS, R. **Characteristic vertices of trees**, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 22, (1987), pp. 115-131.
- [44] MERRIS, R. **Laplacian Matrices of Graphs: A Survey**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 197 (1994), 198:143-176.
- [45] MOHAR, B. **Isoperimetric numbers of graphs**, J. Combin. Theory, Ser. B 47 (1989) 274-291.
- [46] MOHAR, B. **The Laplacian spectrum of graphs**, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Vol. 2, Ed. Y. Alavi, G.

- Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk, Wiley, (1991), pp. 871-898.
- [47] MOHAR, B. **Eigenvalues, diameter and mean distance in graphs**, Graphs Combinatorics, vol. 7, (1991).
- [48] NIKIFOROV, V., **The influence of Miroslav Fiedler on spectral graph theory**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 439 (2013), pp. 818-821.
- [49] NIKOLOSKI, Z., P. May e J. Selbig, **Algebraic connectivity may explain the evolution of gene regulatory networks**, J. Theor. Biol. 267 (2010) 7-14.
- [50] POTHEN, A., Simon, H. D. e Liou, K-P **Partitioning Sparse Matrices with Eigenvectors of Graphs**, SIAM. J. Matrix Anal. and Appl. 11, (1990), pp. 430-452.
- [51] RICHTER, S. e Rocha, I. **Absolute algebraic connectivity of double brooms**, submetido (2014).
- [52] ROCHA, I., **Sobre o vetor de Fiedler e as componentes de Perron de um grafo**, Janeiro de 2012. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. <http://hdl.handle.net/10183/49605>.
- [53] ROCHA, I., **Characterizing the second smallest eigenvalue of the normalized Laplacian of a tree**, Eprint arXiv:1306.2374, 2013.
- [54] ROCHA, I. , FRITSCHER, E., HOPPEN, C. **Consequences of a new Upper Bound on the Sum of the Largest Laplacian Eigenvalues of Trees**. Latin Ibero-American Spectral

Graph Theory Workshop, 2012, Rio de Janeiro. XVI Latin-Ibero-American Conference on Operations Research, 2012.

- [55] ROCHA, I. e Trevisan, V. **Bounding the sum of the largest Laplacian Eigenvalues of graphs**, Discrete Applied Mathematics, Vol 170, (2014), 95-103.
- [56] ROCHA, I. e Trevisan, V. **A Fiedler-like theory for the perturbed Laplacian**, submetido (2015).
- [57] ROJO, O., Medina, L., Abreu, N. M. M. e Justel, C. **On the algebraic connectivity of some of caterpillars: a sharp upper bound and a total ordering**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 432, (2010), 586-605.
- [58] ROJO, O., Medina, L., Abreu, N. M. M. e Justel, C. **Extremal algebraic connectivities of certain caterpillar classes and symmetric caterpillars**, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 20, (2010), pp. 136-157.
- [59] ROJO, O., Rocha, I. e Trevisan, V. **Algebraic connectivity on a subclass of caterpillars**, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. 37, (2011), pp. 153-158.
- [60] SHAO, J-Y., Guo, J-M. e Shan, H-Y. **The ordering of trees and connected graphs by algebraic connectivity**, Linear Algebra Appl. 428 (2008) 1421-1438.
- [61] SHI, J. e Malick, J. **Normalized Cuts and Image Segmentation**, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 22 (2000) 888-905.

- [62] SIMON, H. D. **Partitioning of Unstructured Problems for Parallel Processing**, Computing Systems in Engineering, Vol. 2 (1991), pp. 135-148.
- [63] SPIELMAN, S. e Teng, S-H. **Spectral partitioning works: Planar graphs and finite element meshes**, Linear Algebra and Its Applications 421 (2-3) (2007) 284-305.
- [64] TREVISAN, V., Carvalho, J.B., Del Vecchio, R.R e Vinagre, C.T.M. **Laplacian energy of diameter 3 trees**, Applied Mathematics Letters 24 (2011) 918-923.
- [65] WAPPLER. M. **On Graph Embeddings and a new Minor Monotone Graph Parameter associated with the Algebraic Connectivity of a Graph**. Maio de 2013. Tese de Doutorado. Chemnitz University of Technology. Chemnitz. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:ch1-qucosa-115518>
- [66] WANG, W-H. **Ordering of Huckel trees according minimal energies**, Linear Algebra and its Applications 431 (5-7) (2009) 946-961.
- [67] WANG, W-H. e Kang, L-Y. **Ordering of the trees with a perfect matching by minimal energies**. Linear Algebra and its Applications 431 (5-7) (2009) 946-961.
- [68] WANG, X-K. e Tan, S-W. **Ordering trees by algebraic connectivity**, Linear Algebra and its Applications 436 (2012), 3684-3691.
- [69] VARGA, R. S. **Matrix Iterative Analysis**, Prentice-Hall, Inc., (1965).

- [70] YU, A., Lu, M., e Tian, F. **Ordering trees by their Laplacian spectral radii**, Linear Algebra and its Applications. 405 (2005) 45-59.
- [71] YUAN, X-Y., Shao, J-Y. e Zhang, L. **The six classes of trees with the largest algebraic connectivity**, Discrete Appl. Math. 156 (2008) 757-769.
- [72] ZHANG, L. e Liu, Y. **Ordering trees with nearly perfect matchings by algebraic connectivity**, Chinese Annals Mathematics, 29B(1), 2008, 71-84.
- [73] ZHANG, F. e Chen, Z. **Ordering graphs with small index**, Linear Algebra and its Applications 121 (2002) 295-306.
- [74] ZHANG, X-D. **Ordering trees with algebraic connectivity and diameter**, Linear Algebra and its Applications 427 (2007) 301-312.

Índice Remissivo

- árvore, 14
- aresta, 1
- bloco, 7
- caminho, 5
 - puro, 19
- ciclo, 6
- componente
 - conexa, 6
 - de Perron, 32
 - mista, 22, 23
 - não negativa, 23
 - não positiva, 23
 - negativa, 22, 23
 - nula, 22, 23
 - positiva, 22, 23
- Conectividade
 - algébrica
 - absoluta, 70
- conectividade
 - algébrica, 12
 - de arestas, 6
 - de vértices, 6
- constante
 - de Cheeger, 12
 - de expansão, 12
- dobradiça, 17
- mista, 21
- não negativa, 21
- não positiva, 21
- negativa, 21
- nula, 21
- positiva, 21
- espectro, 8
- estrela, 6
- floresta, 6
- folha, 6
- grafo, 1
 - acíclico, 6
 - completo, 6
 - conexo, 6
 - desconexo, 6
 - isomorfo, 5
 - k-conexo, 7
 - simples, 5
- grau, 5
- Imersão, 71
- laço, 5
- matriz
 - irredutível, 8
 - Laplaciana, 11
 - não-negativa, 8

positiva, 8

número isoperimétrico, 12

numeração característica, 18

ponto de articulação, 6

raio espectral, 8

raiz de Perron, 9

separador, 7

Separator-Shadow Theorem, 77

subgrafo, 5

submatriz principal, 8

vértice, 1

- de corte, 6

valor de Perron, 32

vetor de Fiedler, 14, 17

vetor de Perron, 9