

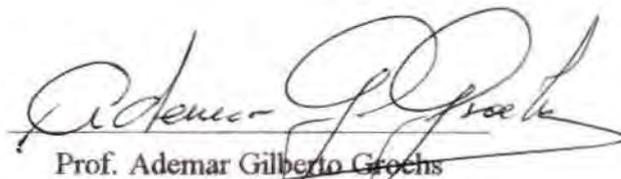
**IMPLEMENTAÇÃO DE ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO TIPO h, SEM
FORMAÇÃO DE NÓS IRREGULARES, NO SISTEMA GAELI**

JOSÉ LUÍS FARINATTI AYMONE

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA

Porto Alegre
Janeiro de 1996

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Ademar Gilberto Grochs
Orientador



Prof. Jorge Daniel Riera
Coordenador do CPGEC

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Armando Miguel Awruch
DSc. - COPPE/UFRJ
- Prof. Ronald José Ellwanger
Dsc. - COPPE/UFRJ
- Prof. Marco Tulio M. Barreto de Vilhena
Dr. pela UFRGS

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer aqui a todas as pessoas que colaboraram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, o Prof. Ademar Groehs, que sempre demonstrou interesse e dedicação a fim de que se pudesse fazer o melhor trabalho possível dentro do prazo de um ano. A sua presença constante e sua disponibilidade foram muito importantes para melhor escolher os caminhos que seriam seguidos e para a tomada de decisões.

Em segundo, não poderia deixar de lembrar que se aqui cheguei foi porque há quatro anos atrás, enquanto eu ainda era estudante de graduação em Engenharia Civil na UFRGS, a Profa. Maria Inês G. dos Santos me aceitou como seu auxiliar de pesquisa no CEMACOM. Foi lá que comecei a aprender e me interessar por essa área de pesquisas. Até hoje, as suas sugestões e disposição para ajudar a resolver problemas fizeram com que se encontrassem as soluções mais rapidamente.

Também quero agradecer a colaboração de vários colegas de Pós-Graduação. Agradeço Ernesto Alquati por permitir e explicar o uso de seu programa de regularização de malhas. A Inácio Morsch agradeço por fornecer exemplos que são utilizados nesta dissertação e por dar sugestões que ajudaram a superar dificuldades encontradas. Agradeço Luis Angel e Luiz Gonzales por darem sugestões que contribuíram para melhorar a apresentação da defesa da dissertação.

Às funcionárias do CPGEC Liliani, Carmen e Rita, agradeço por estarem sempre à disposição para darem esclarecimentos e ajudarem no que fosse preciso.

Ao CPGEC agradeço pela possibilidade de utilização sua infraestrutura, principalmente computadores, e aos seus professores agradeço pela formação de qualidade que me proporcionaram.

Aos colegas de pós-graduação agradeço pela boa convivência que tive ao longo desses dois anos.

Aos meus pais, José Antonio e Luicinda,
e ao meu irmão Rafael.

4 - PROCESSOS AUTO-ADAPTATIVOS DE REFINAMENTO.....	19
4.1 - Introdução	19
4.2 - Métodos auto-adaptativos.....	19
4.2.1 - Versão r.....	20
4.2.2 - Versão p.....	20
4.2.3 - Versão h.....	21
4.3 - Estratégias de refinamento por elemento para a versão h	21
4.3.1 - Estratégia 1	21
4.3.2 - Estratégia 2	22
4.3.3 - Estratégia 3	22
4.3.4 - Estratégia 4.....	24
4.3.5 - Observações a respeito do refinamento por elemento.....	24
4.4 - Refinamento auto-adaptativo tipo h por nó	25
4.4.1 - Controle do processo de subdivisão dos elementos.....	27
4.4.2 - Algoritmo de decisão da realização de refinamento.....	28
4.4.3 - Observações sobre os algoritmos de geração de nós e elementos	28
4.4.3.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós.....	28
4.4.3.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós.....	30
4.4.3.3 - Elementos hexaédricos de 8 nós	31
4.4.3.4 - Elementos hexaédricos de 20 nós	31
4.4.3.5 - Elementos triangulares de 3 nós.....	31
4.4.3.6 - Elementos triangulares de 6 nós.....	32
4.4.3.7 - Elementos pentaédricos de 6 nós	33
4.4.3.8 - Elementos pentaédricos de 15 nós	33
5 - RESULTADOS	34
5.1 - Estado plano de tensões.....	34
5.1.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós	34
5.1.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós	53
5.1.3 - Elementos triangulares de 3 e 6 nós.....	62
5.2 - Sólido tridimensional.....	65
5.2.1 - Elementos hexaédricos de 8 nós	65
5.2.2 - Elementos hexaédricos de 20 nós	69
5.3 - Placa	81
5.3.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós	81
5.4 - Casca poliédrica	95
5.4.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós	95
5.4.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós	101
6 - CONCLUSÕES	106
7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108

APÊNDICE A - Algoritmo de decisão da realização de refinamento.....	111
APÊNDICE B - Algoritmos de geração de nós e elementos.....	115
APÊNDICE C.....	131
C.1 Lista das subrotinas utilizadas no programa de refinamento.....	131
C.2 Funções das subrotinas utilizadas.....	132
APÊNDICE D.....	134
D.1 Rotação do sistema de referência para placas e cascas	134
D.2 Determinação dos planos de cascas poliédricas para suavização de tensões por planos	134
D.3 Integração da matriz de massa para triângulos	137
D.4 Integração nodal.....	137
APÊNDICE E - Tempos de execução de exemplos apresentados no capítulo 5	140

LISTA DE QUADROS

QUADRO		Pág.
3.1	Passos para o cálculo das tensões suavizadas e do erro.	13
4.1	Passos de um programa auto-adaptativo.	20
A.1	Algoritmo de decisão da realização de refinamento.	111
B.1	Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 4 nós.	115
B.2	Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 8 nós.	118
B.3	Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos hexaédricos de 8 nós.	123
B.4	Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.	129
B.5	Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 6 nós.	130
D.1	Algoritmo utilizado para a determinação de planos de casca poliédrica.	136

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	Pág.	
4.1	Subdivisão por elemento que cria nós irregulares.	24
4.2	Subdivisão por elemento sem criação de nós irregulares.	25
4.3	Subdivisão usada para elementos quadriláteros.	26
4.4	Subdivisão usada para elementos hexaédricos.	26
4.5	Subdivisão usada para elementos triangulares.	26
4.6	Subdivisão usada para elemento pentaédricos.	27
4.7	Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos quadriláteros.	29
4.8	Coordenadas normalizadas para elementos quadriláteros.	29
4.9	Posição e numeração dos novos nós para elementos quadriláteros de 8 nós.	30
4.10	Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos hexaédricos.	31
4.11	Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.	32
4.12	Posição e numeração dos novos nós para elementos triangulares de 6 nós.	32
4.13	Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos pentaédricos de 6 nós.	33
5.1	Viga engastada livre. a) Malha inicial, 69 nós, 16 elementos. b) 1º refinamento, 153 nós, 112 elementos. c) 2º refinamento, 766 nós, 652 elementos.	35
5.2	Viga engastada livre. Desenho esquemático.	36
5.3	Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Malha, 154 nós, 126 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	37
5.4	Viga engastada livre. 1º refinamento. a) Malha, 415 nós, 362 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	38
5.5	Viga engastada livre. 2º refinamento a) Malha, 853 nós, 778 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	39
5.6	Retângulo vazado. Desenho esquemático.	40
5.7	Região em L. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Malha, 65 nós, 48 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	41

5.8	Região em L. 1º refinamento. a) Malha, 165 nós, 132 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	42
5.9	Região em L. 2º refinamento. a) Malha, 275 nós, 232 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	43
5.10	Região em L. 5º refinamento. a) Malha, 406 nós, 362 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	44
5.11	Região em L. 6º refinamento. a) Malha, 622 nós, 508 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	45
5.12	Região em L. Malha fina. a) Malha, 1281 nós, 1200 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	46
5.13	Região em L. 1º refinamento. a) Malha regularizada, 165 nós, 132 elem. b) $\hat{\eta}$ (%).	47
5.14	Região em L. 2º refinamento. a) Malha regularizada, 285 nós, 240 elementos. b) $\hat{\eta}$ (%).	48
5.15	Região em L. 5º refino. Malha regularizada, 552 nós, 494 elementos.	48
5.16	Região em L. 5º refinamento. Malha regularizada. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}$ (%).	49
5.17	Região em L. 2º refinamento. Malha regularizada na etapa, 285 nós, 240 elementos.	50
5.18	Região em L. 2º refino. Malha regularizada na etapa. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}$ (%).	51
5.19	Região em L. 5º refinamento. Malha regularizada na etapa, 406 nós, 362 elementos.	51
5.20	Região em L. 5º refinamento. Malha regularizada na etapa. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}$ (%).	52
5.21	Viga simplesmente apoiada. Desenho esquemático.	53
5.22	Viga simplesmente apoiada. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 69 nós, 16 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	54
5.23	Viga simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Malha, 83 nós, 20 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	55
5.24	Viga simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Malha, 111 nós, 28 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	56
5.25	Retângulo vazado. Desenho esquemático.	57
5.26	Região em L. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 106 nós, 27 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	58
5.27	Região em L. 1º refinamento. a) Malha, 196 nós, 55 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	59
5.28	Região em L. 2º refinamento. a) Malha, 272 nós, 79 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	60

5.29	Região em L. Malha fina. a) Malha, 981 nós, 300 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).	61
5.30	Viga engastada livre. Desenho esquemático.	62
5.31	Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 3 nós. a) Malha, 27 nós, 32 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	63
5.32	Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 6 nós. a) Malha, 85 nós, 32 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	64
5.33	Viga engastada livre. Desenho esquemático.	65
5.34	Viga engastada livre. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 255 nós, 128 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	66
5.35	Viga engastada livre. 1º refinamento. a) Malha, 1085 nós, 620 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	67
5.36	Viga engastada livre. 2º refinamento. a) Malha, 2994 nós, 1928 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	68
5.37	Viga simplesmente apoiada. Desenho esquemático.	69
5.38	Viga simplesmente apoiada. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 20 nós. Malha inicial. a) Malha, 262 nós, 32 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	70
5.39	Viga simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Malha, 429 nós, 56 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	71
5.40	Viga simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Malha, 567 nós, 80 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	72
5.41	Viga simplesmente apoiada. 3º refinamento. a) Malha, 1119 nós, 176 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).	73
5.42	Gaiola de junta homocinética. Desenho esquemático.	74
5.43	Gaiola de junta homocinética. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 20 nós. Malha inicial. Malha, 816 nós, 72 elementos.	75
5.44	Gaiola de junta homocinética. Malha inicial. Tensão σ_{eq} .	76
5.45	Gaiola de junta homocinética. Malha inicial. $\hat{\eta}$ (%).	77
5.46	Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. Malha, 1728 nós, 216 elementos.	78
5.47	Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. Tensão σ_{eq} .	79
5.48	Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. $\hat{\eta}$ (%).	80
5.49	Placa simplesmente apoiada. Desenho esquemático.	81
5.50	Placa simplesmente apoiada. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial, 25 nós, 16 elementos.	82
5.51	Placa simplesmente apoiada. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}$ (%).	83

5.52	Placa simplesmente apoiada. 1º refinamento. Malha, 69 nós, 48 elementos.	83
5.53	Placa simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}$ (%).	84
5.54	Placa simplesmente apoiada. 2º refinamento. Malha, 109 nós, 80 elementos.	84
5.55	Placa simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}$ (%).	85
5.56	Placa simplesmente apoiada. Malha fina, 121 nós, 100 elementos.	85
5.57	Placa simplesmente apoiada. Malha fina. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}$ (%).	86
5.58	Pavimento de edifício. Desenho da malha da estrutura.	87
5.59	Pavimento de edifício. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial e restrições. 978 nós, 961 elementos.	88
5.60	Pavimento de edifício. Malha inicial. M_{eq} .	89
5.61	Pavimento de edifício. Malha inicial. $\hat{\eta}$ (%).	90
5.62	Pavimento de edifício. 1º refinamento. Malha, 1958 nós, 1847 elementos.	91
5.63	Pavimento de edifício. 1º refinamento. M_{eq} .	92
5.64	Pavimento de edifício. 1º refinamento. $\hat{\eta}$ (%).	93
5.65	Pavimento de edifício. 1º refinamento. a) Ampliação do M_{eq} . b) Ampliação de $\hat{\eta}$ (%).	94
5.66	Reservatório de água. Desenho da malha da estrutura.	95
5.67	Reservatório de água. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial, 138 nós, 134 elementos.	96
5.68	Reservatório de água. Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%).	97
5.69	Reservatório de água. 1º refinamento. Malha, 518 nós, 510 elementos.	98
5.70	Reservatório de água. 1º refinamento. $\hat{\eta}$ (%).	99
5.71	Reservatório de água. Malha inicial, M_{eq} na tampa.	100
5.72	Reservatório de água. 1º refinamento, M_{eq} na tampa.	100
5.73	Junção de dois perfis C. Desenho da malha da estrutura.	101
5.74	Junção de dois perfis C. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial, 517 nós, 146 elementos.	102
5.75	Junção de dois perfis C. Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%).	102
5.76	Junção de dois perfis C. 1º refinamento. Malha, 639 nós, 182 elementos.	104
5.77	Junção de dois perfis C. 1º refinamento, $\hat{\eta}$ (%).	105
D.1	Eixos de referência no sistema local para uma casca poliédrica de dois planos perpendiculares.	135

D.2	Planos de uma casca poliédrica.	135
D.3	Vetores de um elemento de casca poliédrica.	137
D.4	Pesos de integração para quadriláteros bilineares e biquadráticos.	138
D.5	Pesos de integração para hexaedros trilineares e triquadráticos.	138
D.6	Pontos de integração e projeção das tensões para triangulos lineares.	138

LISTA DE TABELAS

TABELA	Pág.	
4.1	Valores das coordenadas normalizadas para os novos nós.	30
5.1	Quantidade de nós e elementos ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.1a do exemplo 1.	34
5.2	Valores máximos de tensão σ_x ($\sigma_{x \max}$) e do erro de energia aproximado $\hat{\eta}$ ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 2, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.3a.	36
5.3	Tensão equivalente máxima ($\sigma_{\text{eq max}}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 3, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.7a. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo aproximado global ($\hat{\eta}_T$) obtidos no processo que cria nós irregulares (SILVA ²⁴).	40
5.4	Comparação dos resultados obtidos no exemplo 3 ao aplicar o programa de regularização ao longo das etapas de refinamento com os resultados quando o programa não é usado.	50
5.5	Comparação dos resultados obtidos no exemplo 3 ao aplicar o programa de regularização em uma determinada etapa de refinamento com os resultados quando o programa não é usado.	50
5.6	Tensão Sigma X máxima ($\sigma_{x \max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 4, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.22a.	53
5.7	Valores máximos de tensão equivalente ($\sigma_{\text{eq max}}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 5, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.26a.	57
5.8	Valores máximos de tensão sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 6.	62
5.9	Valores máximos de tensão Sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 7, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.34a. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo global $\hat{\eta}_T$ obtidos no processo que cria os nós irregulares (SILVA ²⁴).	65
5.10	Valores máximos de tensão Sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$), e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 8, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.38a.	69

5.11	Valores máximos de tensão equivalente ($\sigma_{eq\ max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 9, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.43.	74
5.12	Valores máximos de deslocamento (W_{max}), de momento ($M_{x\ max}$) e de cortante ($Q_{x\ max}$). Erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 10, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.50. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo global $\hat{\eta}_T$ do processo que cria nós irregulares (SILVA ²⁴).	82
5.13	Momento equivalente máximo ($M_{eq\ max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 11, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.59.	87
5.14	Momento equivalente máximo ($M_{eq\ max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 12, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.67.	95
5.15	Erro relativo máximo aproximado ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 13, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.74.	101
E.1	Comparativo dos tempos de execução dos diversos módulos do sistema GAELI.	140

LISTA DE SÍMBOLOS

r	Versão de refinamento r do Método dos Elementos Finitos
p	Versão de refinamento p do Método dos Elementos Finitos
h	Versão de refinamento h do Método dos Elementos Finitos
MEF	Método dos Elementos Finitos
CAE	Sistemas de Computação em Engenharia
CAD	Sistemas de Computação Gráfica
EWS	Estações de trabalho
e	Elemento
π^e	Energia potencial total do elemento e
n	Número total de elementos
δ	Variação
∂	Derivada parcial
Ω	Domínio total da estrutura
Ω^e	Domínio do e -ésimo elemento
U_0	Densidade de energia de deformação por unidade de volume
ϵ_{ij}	Deformações específicas
d	Derivada
b_i	Carga por unidade de volume
\bar{p}_i	Carga por unidade de superfície
\hat{u}	Vetor de deslocamentos aproximados de um ponto no interior do elemento
\hat{U}^e	Vetor de deslocamentos nodais aproximados do elemento
$\hat{\epsilon}$	Deformações aproximadas
B	Matriz das derivadas das funções de interpolação
ϕ	Funções de interpolação para cada grau de liberdade
$\bar{\phi}$	Funções de interpolação do elemento
D	Matriz constitutiva elástica
$\hat{\sigma}$	Tensões aproximadas
σ	Tensões exatas
K^e	Matriz de rigidez do elemento e
P^e	Vetor de cargas do elemento e
σ^*	Uma componente de tensão em um ponto qualquer no interior de um elemento

$\bar{\sigma}$	Componentes de tensão nos nós de um elemento
Φ	Funções de interpolação usadas para obter a matriz de rigidez do elemento
QL	Número de elementos constituintes da estrutura
NNE	Número de nós por elemento
χ	Funcional quadrático
M	Matriz de massa de um elemento
M^G	Matriz de massa global
R	Vetor de cargas de um elemento
R^G	Vetor de cargas global
PI	Pontos de integração
$\left(\hat{\epsilon}_\sigma\right)_{PI}$	Erro aproximado em função das tensões nos pontos de integração
W_{PI}	Peso no ponto de integração
$\det J_{PI}$	Determinante do Jacobiano nos pontos de integração
$\ E\ _{r\hat{\epsilon}_\sigma}$	Norma de energia do erro global
$\ E\ _{\hat{\epsilon}}$	Norma de energia de tensão
$\ E\ _{r\hat{\epsilon}}$	Norma de energia de tensão global
$\ \bar{E}\ _{\hat{\epsilon}}$	Norma de energia de tensão melhorada
$\ \bar{E}\ _{r\hat{\epsilon}}$	Norma de energia de tensão melhorada global
$\hat{\eta}$	Erro relativo aproximado em nível de elemento
$\hat{\eta}_T$	Erro relativo aproximado em nível global
GAELI	Gerador e Analisador de Estruturas Lineares
GAREOR	GAELI REORdenação nodal
GAPRE	GAELI Análise PRE-processamento
GASOLE	GAELI Análise SOLução
GATEN	GAELI Análise TENsões
$NLCN$	Número de elementos concorrentes no nó N
λ_{max}	Parâmetro de controle para o refinamento
λ_{min}	Parâmetro de controle para o refinamento
λ	Taxa de convergência do refinamento
$\bar{\eta}_T$	Erro relativo máximo permitido para a estrutura
ρ_i	Relação entre a norma de energia do erro de um elemento i e o limite superior de erro desejado nesse elemento
h_i	Tamanho médio do elemento i
p	Ordem do polinômio de interpolação empregado no estabelecimento da matriz de rigidez do elemento
V_i	Volume do elemento i
V_T	Volume total da estrutura

$\ E\ _{ik\hat{e}_o}$	Limite superior desejado da norma de energia no elemento i
$\ E\ _{N\hat{e}_o}$	Média do quadrado da norma de energia dos elementos concorrentes no nó N
$\ E\ _{Nk\hat{e}_o}$	Média do quadrado do limite superior desejado da norma de energia dos elementos concorrentes no nó N
<i>NON</i>	Arranjo que contém o nome dos nós
<i>NEN</i>	Arranjo que contém o número externo dos nós
<i>NOL</i>	Arranjo que contém o nome dos elementos
<i>NEL</i>	Arranjo que contém o número externo dos elementos
<i>QN</i>	Número de nós constituintes da estrutura
<i>NCONTR</i>	Arranjo que controla o processo de refinamento
<i>NIVEL</i>	Variável que indica o nível que está sendo refinado
<i>AREA</i>	Arranjo que contém o volume dos elementos
<i>NERL</i>	Arranjo que contém a norma de energia do erro do elemento
<i>NEERL</i>	Arranjo que contém a maior norma de energia do erro entre os carregamentos
<i>P</i>	Grau do polinômio de interpolação
<i>AREAT</i>	Volume global
<i>NERRO</i>	Arranjo que contém a norma de energia do erro global para todos os carregamentos
<i>NTENS</i>	Arranjo que contém a norma de energia de tensão global para todos os carregamentos
<i>NTENSM</i>	Maior norma de energia de tensão global entre os carregamentos ativos
<i>NERROM</i>	Maior norma de energia do erro global entre os carregamentos ativos
<i>ELMAX</i>	Arranjo que contém o limite superior de erro em cada elemento
<i>ETA</i>	Porcentagem de erro especificada
<i>QNC</i>	Número de nós de canto
<i>MERRO</i>	Arranjo que contém a média da norma de energia dos elementos que incidem em um nó
<i>MLIMER</i>	Arranjo que contém a média do limite superior de erro dos elementos que incidem em um nó
<i>IODNO</i>	Arranjo que contém o número externo dos nós de canto dos elementos em ordem crescente de erro
<i>NLREF</i>	Número de elementos refinados
<i>LQIN</i>	Número de elementos antes do refinamento
<i>NQIN</i>	Número de nós antes do refinamento
<i>NO</i>	Nó do arranjo <i>IODNO</i>
<i>RO</i>	Relação entre a norma de energia e o limite de erro de um elemento
<i>NREFI</i>	Número de refinamentos sucessivos em um nó
<i>NCEL</i>	Arranjo que contém os nós de canto dos elementos ligados ao nó refinado

<i>NOVONO</i>	Número de novos nós criados ao refinar um elemento
<i>NOVOEL</i>	Número de novos elementos criados ao refinar um elemento
<i>XYZ</i>	Arranjo de coordenadas nodais
<i>LC</i>	Arranjo de conectividades
<i>NNCEL</i>	Número de nós de canto do elemento
<i>NPOS</i>	Posição do nó que está sendo refinado no arranjo de conectividades
<i>NMNL</i>	Número máximo de nós por elemento
<i>NC</i>	Arranjo que contém o nome dos nós de canto do elemento
<i>XAUX</i>	Arranjo que contém a coordenada X dos nós de canto do elemento
<i>YAUX</i>	Arranjo que contém a coordenada Y dos nós de canto do elemento
<i>ZAUX</i>	Arranjo que contém a coordenada Z dos nós de canto do elemento
<i>IP</i>	Posição dos nós de canto no arranjo XYZ
<i>CN</i>	Número de coordenadas por nó (2 - plano, 3 - tridimensional)
<i>A1</i>	Coordenada normalizada Csi
<i>A2</i>	Coordenada normalizada Eta
<i>A3</i>	Coordenada normalizada Zeta
<i>NOLMAX</i>	Nome máximo de elemento existente
<i>NONMAX</i>	Nome máximo de nó existente
<i>CON1</i>	Arranjo que contém as conectividades do 1o. elemento filho
<i>CON2</i>	Arranjo que contém as conectividades do 2o. elemento filho
<i>CON3</i>	Arranjo que contém as conectividades do 3o. elemento filho
<i>CON4</i>	Arranjo que contém as conectividades do 4o. elemento filho
<i>NN</i>	Arranjo que contém o nome dos novos nós
<i>XNN</i>	Arranjo que contém a coordenada X dos novos nós
<i>YNN</i>	Arranjo que contém a coordenada Y dos novos nós
<i>ZNN</i>	Arranjo que contém a coordenada Z dos novos nós
<i>E</i>	Módulo de elasticidade longitudinal
<i>P</i>	Carga concentrada
<i>v</i>	Coefficiente de Poisson
<i>b</i>	Base da seção transversal
<i>h</i>	Altura da seção
<i>L</i>	Comprimento
<i>q</i>	Carga distribuída
M_{eq}	Momento equivalente
σ_{eq}	Tensão equivalente calculada pela teoria de Huber-von Mises
σ_x	Tensão normal na direção X

RESUMO

Este trabalho apresenta um processo de refinamento auto-adaptativo do tipo h . Para tal, utilizou-se como base o estimador de erros "a-posteriori" proposto por ZIENKIEWICZ e ZHU³⁰. Esse estimador foi adaptado para, ao invés de fornecer o nível de erro por elemento, indicar o mesmo por nó. Isto foi conseguido realizando, para cada nó, a média do nível de erro dos elementos nele incidentes. A partir dessa avaliação de erro, inicia-se a subdivisão dos elementos ao redor dos nós que apresentam um maior nível de erro, segundo regras que serão explicadas ao longo deste trabalho.

Como vantagem, o processo de refinamento usado evita a criação de nós irregulares. É importante salientar que a presença desses nós exige mudanças consideráveis nos programas já existentes e, dependendo do tipo de elemento utilizado, torna a formulação bastante complexa. Outra vantagem é que há a possibilidade de aplicar este processo aos elementos planos ou tridimensionais normalmente utilizados (lineares ou quadráticos), mesmo que a malha seja mista. A única restrição é que todos os elementos devem ser de mesma ordem.

A desvantagem existente é a introdução de elementos que apresentam uma distorção maior que aqueles gerados no processo que cria os nós irregulares. Além disso, é necessário usar uma malha inicial um pouco mais fina que aquela utilizada no processo onde esses nós aparecem. Note-se que o processo onde há nós irregulares também tem uma limitação natural, normalmente de cinco níveis sucessivos de refinamento, devido ao cálculo dos deslocamentos nesses nós.

O estimador de erros e o processo de refinamento estão implementados no sistema GAELI e são aplicados a problemas elásticos-estáticos lineares do tipo: estado plano de tensões e deformações, sólidos axissimétricos, sólidos tridimensionais, flexão de placas e cascas poliédricas.

Para possibilitar a verificação da eficiência dos algoritmos implementados, são apresentados exemplos. Compara-se os resultados obtidos nos exemplos com soluções teóricas ou com soluções aproximadas obtidas usando malhas finas uniformes.

ABSTRACT

This work presents an h type refinement process. The ZIENKIEWICZ - ZHU³⁰ error estimator was used as a basis to do that. This error estimator was adapted to give the error level by node instead of giving it by element as usual. To make it possible, an average error of the elements connected to each node of the mesh is made. Using this error distribution by node, a mesh subdivision around each node is done. The process begins with those nodes which have the highest error level, according to rules that will be explained in this work.

As an advantage, the refinement process used avoids the irregular nodes generation. It is important to mention that its presence demands considerable changes of the programs in use. Depending on the element type used, the irregular nodes make the formulation very complex. Another advantage is the possibility to apply this process to the plane and tridimensional elements usually used (linear or quadratic), even if the mesh is mixed. The only restriction is that all the elements should be of the same order.

The main disadvantage of the process used is the introduction of elements that have a greater distortion than the ones generated in the irregular nodes process. Besides, it is necessary to use an initial mesh that is thinner than the one used in the irregular nodes process. It should be noticed that this process has also a natural limitation, normally five levels of refinement as a maximum, due to the displacement calculation of the irregular nodes.

The error estimator and refinement process are implemented into the GAELI system and applied to the linear-elastic static problems which involve formulations of plane stress and strain, axisymmetric solids, tridimensional solids, plates and shells.

Some examples are presented to verify the efficiency of the implemented algorithms. The results are compared with theoretical results or results obtained by the use of very thin and uniform meshes.

1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O desenvolvimento dos processos adaptativos pode ser dividido em três fases.

Durante a primeira fase, que vai de 1968 à 1975, a otimização de malhas está baseada em princípios variacionais. O problema de otimização foi definido como sendo o de minimização de um funcional que leva em conta, além das variações dos deslocamentos generalizados, a variação das coordenadas nodais. A condição de otimização utilizada é, muitas vezes, não-linear o que dificultou a popularização dos métodos desenvolvidos. Os principais pesquisadores desta época foram OLIVEIRA²² e TURCKE e McNEICE²⁷.

O primeiro pesquisador a formular o problema de otimização de malha na forma matemática, em 1968, foi OLIVEIRA²². Ele definiu também, usando a idéia da distribuição isoenergética, o "quasi" ótimo.

TURCKE e McNEICE²⁷ se detiveram no estudo para estabelecer parâmetros a fim de obter uma malha "quasi" ótima. Eles propuseram que cada elemento finito possuiria uma igual quantidade de energia de deformação, no intuito de atingir a malha "quasi" ótima parecida com a de OLIVEIRA²².

PRAGER²³ provou que, para determinados problemas unidimensionais, uma distribuição uniforme do erro é a ótima. O objetivo da maioria desses estudos é procurar redefinir o posicionamento dos nós partindo, preferencialmente, de uma malha uniformemente dividida, FELIPPA¹³. Sob este prisma, a aproximação feita é similar ao método r.

Todas as idéias anteriores tentam obter uma malha "quasi" ótima em apenas uma tentativa, sem a utilização de soluções aproximadas na estimativa do erro "a-posteriori".

A segunda fase de desenvolvimento dos processos adaptativos, que vai de 1975 à 1984, é marcada pelos trabalhos de BABUSKA e RHEINOLDT^{7,8} e BABUSKA e SZABO⁹. Estes pesquisadores definiram uma teoria matemática baseada na análise do erro de aproximação. Ao usar os resíduos produzidos no interior dos elementos, devido à utilização da solução aproximada na equação que governa o problema, e as descontinuidades das forças normais na fronteira entre os elementos para calcular o erro de discretização, foi possível definir os métodos adaptativos. Eles estimam a quantidade de erro de aproximação existente e a maneira mais apropriada de realizar o refinamento. Foram introduzidas também as aproximações iterativas para obter melhores resultados.

Além dos trabalhos mencionados anteriormente, outro trabalho importante foi o de BABUSKA e RHEINBOLDT⁶ que baseia-se em uma discussão matemática precisa e utiliza elementos unidimensionais em problemas elípticos de segunda ordem.

Em 1978, SZABO e MEHTA²⁵ apresentaram novas idéias que serviram de base para o método p. Em 1983, ZIENKIEWICZ et al.²⁹ seguindo uma linha semelhante, introduziram os métodos adaptativos na comunidade de engenharia. Nos anos seguintes à publicação deste artigo, a importância dos métodos adaptativos aumentou consideravelmente devido a intensas pesquisas que estavam sendo feitas na área da matemática aplicada. Por isso, em 1984, foi realizada a Conferência Internacional dos Métodos Adaptativos em Portugal.

Na terceira e atual fase do desenvolvimento dos processos adaptativos é importante citar o aparecimento das estações de trabalho (EWS), que possibilitam o desenvolvimento de sofisticados sistemas de computação gráfica (CAD), e também o aparecimento de poderosos algoritmos de geração de malhas e modelamento geométrico em sistemas de computação gráfica em engenharia (CAE). Os métodos adaptativos, além de fornecer informações sobre a precisão dos resultados, dão indicações de como melhorar o modelamento para alcançar uma determinada precisão.

Apesar de todos esses avanços, os custos computacionais envolvidos ainda eram altos e havia uma grande dificuldade em implementar as estimativas de erros em programas de elementos finitos. Devido a isso, ZIENKIEWICZ e ZHU³⁰ apresentaram, em 1987, um estimador de erros que visava resolver estes problemas. Este estimador está baseado na determinação de uma aproximação mais precisa para as tensões nos problemas de elasticidade. Segundo os autores, o procedimento utilizado pode ser aplicado em quase todos os problemas de elasticidade e a extensão a problemas não-lineares está em desenvolvimento. O estimador de erros de Zienkiewicz-Zhu foi utilizado como base para a implementação, no sistema GAELI (GROEHS e SANTOS¹⁶), do processo de refinamento auto-adaptativo tipo h por nó proposto no presente trabalho.

O estado atual da arte é no sentido de combinar métodos r-h, r-p e h-p, bem como utilizar estimadores de erros para atuar diretamente em cima de geradores de malhas não estruturadas. Há problemas nos geradores de malhas tridimensionais, e mesmo para casos bidimensionais, eles se restringem a casos planos. Também se está utilizando o estimador de erros de Zienkiewicz e Zhu em análises dinâmicas, conjuntamente com um processo auto-adaptativo tipo h (WIBERG e LI²⁸). Desta forma, a malha pode variar tanto no espaço como no tempo, de acordo com as tensões e os erros existentes à medida em que os impulsos ou vibrações se propagam ao longo da estrutura.

A presente dissertação está baseada nos trabalhos publicados por AYMONE e GROEHS^{2,3,4} em 1995.

2 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo implementar, no sistema GAELI, uma estratégia de refinamento de malhas do tipo h por nó. A estratégia utilizada deve superar o problema da geração de nós irregulares ao se subdividir um elemento. Entende-se por nós irregulares, aqueles nós que são gerados ao refinar um elemento e que não têm correspondentes nos elementos vizinhos ao refinado. Eles normalmente aparecem ao se utilizar alguma estratégia de refinamento tipo h por elemento.

O sistema GAELI, que é um programa de análise de estruturas pelo método dos elementos finitos, já serviu de base para testar uma estratégia de refinamento por elemento em que existe o problema da formação de nós irregulares (SILVA²⁴). A existência desses nós faz com que mudanças na montagem e solução da matriz de rigidez da estrutura devam ser previstas. Devido a isso, é necessário introduzir modificações em todo o programa, o que torna essa estratégia pouco atraente para um sistema já em funcionamento.

A estratégia de refinamento por nó a ser implementada deve evitar a criação de nós irregulares e ser compatível com todos os tipos de elemento ou combinação deles, tanto bidimensionais como tridimensionais, existentes no sistema. Além disso, a estratégia deve ser implementada de forma eficiente, sem necessariamente exigir alterações no restante do sistema, e procurando causar o menor esforço computacional possível.

A fim de atingir os objetivos propostos, inicialmente apresentam-se as noções e os conceitos teóricos envolvidos no cálculo e suavização de tensões e na estimativa de erros. Quanto à correspondente parte computacional, procura-se utilizar a estrutura de dados já disponível no sistema GAELI. Para a análise estática linear, o sistema é composto de quatro módulos, são eles:

- 1) Módulo GAREOR (GAELI REORdenação nodal)
Faz a reordenação nodal para obter a banda máxima.
- 2) Módulo GAPRE (GAELI Análise PRE-processamento)
Monta as matrizes de rigidez locais e o vetor de cargas.
- 3) Módulo GASOLE (GAELI Análise SOLução)
Monta a matriz de rigidez global e resolve o sistema de equações.
- 4) Módulo GATEN (GAELI Análise TENsões)
Calcula as tensões e solicitações.

O estimador de erros está implementado no módulo GATEN, ou seja, após a obtenção dos deslocamentos e em conjunto com o cálculo de tensões.

Para a implementação do processo de refinamento, foi criado um módulo novo. O quinto módulo chama-se GPREF(GAELI Pós-REFino) e é ativado após o módulo GATEN.

2.1 - Descrição do trabalho

A seguir é apresentado o conteúdo do trabalho de acordo com o capítulo a que pertence.

O capítulo 1 apresenta a revisão bibliográfica deste trabalho.

O capítulo 2 traz a introdução e a descrição do trabalho.

No capítulo 3 é apresentada a formulação geral do método dos elementos finitos e o estimador de erros de Zienkiewicz e Zhu. Com relação ao estimador de erros, são mostrados também os passos utilizados para a sua implementação computacional e são feitas algumas observações à esse respeito.

No capítulo 4 são descritos os métodos adaptativos de refinamento, as estratégias de refinamento por elemento para a versão h e o processo de refinamento auto-adaptativo tipo h por nó utilizado neste trabalho. São feitas, também, observações sobre os algoritmos usados para a implementação computacional deste processo de refinamento. Esses algoritmos estão apresentados nos apêndices A e B.

O capítulo 5 apresenta exemplos utilizando malhas de elementos finitos a fim de ilustrar a aplicação e os resultados obtidos com o estimador de erros e com o processo de refinamento.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões deste trabalho.

As referências bibliográficas consultadas estão listadas no capítulo 7.

3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E A ANÁLISE DE ERROS

3.1 - Considerações iniciais

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica usada para obter soluções aproximadas em uma grande variedade de problemas. O método consiste na divisão do domínio do problema em um número finito de subdomínios, denominados elementos finitos, e no uso de conceitos variacionais para a obtenção de uma aproximação da solução sobre os mesmos.

Existem três tipos de erros introduzidos na aproximação numérica pelo MEF. O primeiro tipo é o erro decorrente da discretização, ou seja, da substituição do modelo físico real contínuo por um modelo discreto, com um número finito de graus de liberdade, que satisfaz de forma aproximada as equações que governam o problema e suas condições de contorno. O segundo tipo é o erro de truncamento, proveniente do fato de que o número de dígitos empregados para representar um número real é finito. Esse erro pode ser significativo se o número de equações for muito grande e daí a necessidade de utilizar precisão dupla nos cálculos das matrizes. O terceiro e último tipo é o erro decorrente das simplificações envolvidas na construção do modelo matemático para a representação do problema real. Neste trabalho, a análise de erros no MEF se limitará ao erro de discretização.

3.2 - O método dos elementos finitos

Está baseado no princípio da energia potencial total combinado com o método de Rayleigh-Ritz. Subdividindo a região onde se deseja determinar deslocamentos e tensões em subdomínios denominados elementos, pode-se calcular, para cada elemento e , a energia potencial total π^e . Somando as contribuições de todas as energias potenciais ter-se-á a energia potencial do domínio

$$\pi = \sum_{e=1}^n \pi^e . \quad (3.1)$$

A aplicação do princípio da energia potencial total leva a

$$\delta\pi = \sum_{e=1}^n \delta\pi^e = 0 \quad (3.2)$$

onde $\delta\pi$ é a primeira variação da energia potencial total. Em se tratando de elasticidade linear, o princípio da energia potencial total deve valer para o campo de deslocamentos exato. Sendo assim, pode-se aplicar o princípio da energia potencial total em um elemento e qualquer, de volume Ω , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta\pi^e &= \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \iiint_{\Omega^e} b_i \delta u_i d\Omega - \iint_{S_1^e} \bar{p}_i \delta u_i dS = 0 \\ &= \iiint_{\Omega^e} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} d\Omega - \iiint_{\Omega^e} \delta \underline{u}^T \underline{b} d\Omega - \iint_{S_1^e} \delta \underline{u}^T \bar{\underline{p}} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\sigma_{ij} = \partial U_0 / \partial \varepsilon_{ij}$. σ_{ij} representa o tensor das tensões em um ponto do corpo ou elemento, ε_{ij} o tensor das deformações específicas no mesmo ponto e u_i as componentes de deslocamento deste ponto. U_0 é uma função das deformações específicas que representa a densidade de energia de deformação por unidade de volume, b_i representa a carga por unidade de volume e \bar{p}_i a carga por unidade de superfície.

Introduzindo agora a expressão

$$\underline{\hat{u}} = \bar{\underline{\Phi}} \underline{\hat{U}}^e \quad (3.4)$$

onde $\underline{\hat{u}}$ representa o vetor de deslocamentos aproximados de um ponto no interior do elemento, $\underline{\hat{U}}^e$ representa o vetor de deslocamentos nodais aproximados do elemento e $\bar{\underline{\Phi}}$ é uma relação arbitrária entre $\underline{\hat{U}}^e$ e $\underline{\hat{u}}$. Pode-se escrever ainda que

$$\delta \underline{\hat{u}} = \bar{\underline{\Phi}} \delta \underline{\hat{U}}^e \quad (3.5)$$

Da teoria da elasticidade e da expressão (3.4) pode-se obter

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{B} \underline{\hat{U}}^e \quad (3.6)$$

de onde, sendo \underline{D} a matriz constitutiva elástica, tem-se

$$\underline{\hat{\sigma}} = \underline{D} \underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{D} \underline{B} \underline{\hat{U}}^e \quad (3.7)$$

A expressão (3.3) pode então ser escrita

$$\delta \left(\underline{\hat{U}}^e \right)^T \left\{ \left[\iiint_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \right] \underline{\hat{U}}^e - \iiint_{\Omega^e} \bar{\underline{\Phi}}^T b_i d\Omega - \iint_{S_1^e} \bar{\underline{\Phi}}^T \bar{\underline{p}}_i dS \right\} = 0 \quad (3.8)$$

onde, devido a arbitrariedade de $\delta(\hat{U}^e)^T$, obtém-se

$$\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{U}}^e = \underline{\underline{P}}^e \quad (3.9)$$

com

$$\underline{\underline{K}}^e = \iiint_{\Omega^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} d\Omega \quad (3.10)$$

$$\underline{\underline{P}}^e = \iiint_{\Omega^e} \underline{\underline{\phi}}^T b_i d\Omega + \iint_{S_i^e} \underline{\underline{\phi}}^T \bar{p}_i dS \quad (3.11)$$

onde $\underline{\underline{K}}^e$ representa a matriz de rigidez do elemento e . Se houverem cargas nodais, elas serão diretamente incorporadas ao vetor de cargas do elemento e , $\underline{\underline{P}}^e$, por soma.

Nota-se que na expressão (3.4) a matriz $\underline{\underline{\phi}}$ representa uma matriz que agrega funções ϕ repetidas para cada grau de liberdade. Assim, por exemplo, para o caso de elementos tridimensionais:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \\ - & - & - \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

3.3 - Análise de erros

3.3.1 - Estimativas de erros

Há dois tipos de estimativas de erros: a-priori e a-posteriori. As estimativas de erros a-priori são obtidas antes de se ter a solução. Elas são importantes do ponto de vista teórico dos métodos mas, no que diz respeito a sua utilidade prática, têm pouca importância devido a sua dificuldade de aplicação. Já as estimativas de erros a-posteriori, determinadas após a solução aproximada do problema, possuem grande interesse prático por fornecerem resultados confiáveis com um custo computacional aceitável.

3.3.2 - Estimativas de erros a-posteriori

Na literatura se observa que a maioria das estimativas é calculada em função de duas parcelas, sendo uma referente aos resíduos no interior dos elementos e outra às discontinuidades das tensões na fronteira entre os elementos.

Trabalhos como o de ZIENKIEWICZ et al.²⁹ mostram que a parcela que diz respeito às descontinuidades das tensões normalmente predomina. Por isso, ao avaliar esta parcela, deve-se obter uma estimativa razoável do erro. Vários estimadores foram desenvolvidos baseados nessa conclusão, sendo um dos mais conhecidos o apresentado por KELLY et al.¹⁸ e GAGO et al.¹⁵ em 1983.

O presente trabalho utiliza como base um estimador de erros proposto por ZIENKIEWICZ e ZHU³⁰ que atua através da projeção de tensões e da suavização das mesmas sobre todo o domínio da estrutura. Esse estimador foi escolhido por apresentar um custo computacional aceitável e por ser de implementação relativamente simples. As expressões utilizadas nesse estimador são um caso particular das expressões apresentadas nos trabalhos de KELLY et al.¹⁸ e GAGO et al.¹⁵.

3.4 - O estimador de erros de Zienkiewicz e Zhu

3.4.1 - Considerações gerais

A obtenção de uma solução aproximada pelo Método dos Elementos Finitos exige que haja continuidade apenas do campo de deslocamentos. Quando se deriva este campo, através da aplicação do operador diferencial B sobre os deslocamentos em cada elemento, as tensões obtidas são descontínuas na fronteira entre os elementos. Para garantir a continuidade do campo de tensões em todo o domínio (campo de tensões suavizado), a fim de obter uma melhor aproximação do campo de tensões real, deve-se, a partir da obtenção das tensões nos pontos de integração de Gauss (BARLOW¹⁰), projetá-las localmente para os nós, obtendo assim as tensões nodais projetadas. Após isso, realiza-se uma suavização global dessas tensões e obtém-se um estado único de tensões em cada nó (HINTON e CAMPBELL¹⁷).

3.4.2 - Projeção local das tensões

Com base na experiência de que os pontos de integração de Gauss-Legendre são os melhores pontos para o cálculo de tensões (BARLOW¹⁰), faz-se a projeção local de tensões. O cálculo das tensões nos nós, apesar de amplamente difundido, apresenta problemas de precisão nos resultados e, às vezes, esses se apresentam totalmente descaracterizados. Isso se deve ao fato de que as funções de interpolação têm um mau comportamento nas extremidades da região de interpolação.

Para fazer a projeção local de tensões, parte-se da expressão (3.13) onde uma componente de tensão σ^* , em um ponto qualquer no interior de um elemento, relaciona-se com as mesmas componentes de tensão nos diversos nós deste elemento, agrupadas em $\underline{\underline{\sigma}}^*$, como

$$\sigma^* = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\sigma}}^* \quad (3.13)$$

onde Φ são as mesmas funções de interpolação empregadas para obter a matriz de rigidez dos elementos. Elementos lineares utilizam funções lineares e elementos quadráticos utilizam funções quadráticas.

Para obter $\bar{\sigma}^*$, minimiza-se o funcional quadrático χ para cada componente de tensão $\hat{\sigma}$ e σ^*

$$\chi = \int_{\Omega} (\hat{\sigma} - \sigma^*)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{\sigma} - \Phi \bar{\sigma}^*)^2 d\Omega \quad (3.14)$$

onde $\hat{\sigma}$ é a distribuição de uma componente do tensor de tensões dada pela (3.7) e Ω é o domínio do problema. A minimização deste funcional implica na solução de i equações do tipo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\sigma}_i^*} = \int_{\Omega} (\hat{\sigma} - \sigma^*) \frac{\partial \sigma^*}{\partial \bar{\sigma}_i^*} d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

onde normalmente $i = 1$, número de nós por elemento (NNE) e $\partial \sigma^* / \partial \bar{\sigma}_i^* = \Phi_i$. Agrupando as i equações matricialmente e lembrando a (3.13) obtém-se

$$\int_{\Omega} \Phi^T (\hat{\sigma} - \sigma^*) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi^T (\hat{\sigma} - \Phi \bar{\sigma}^*) d\Omega = \underline{0} \quad (3.16)$$

Na equação (3.16) $\bar{\sigma}^*$ é o vetor incógnita do problema, o qual não depende do domínio Ω .

Então, rearranjando os termos, tem-se

$$\left[\int_{\Omega} \Phi^T \Phi d\Omega \right] \bar{\sigma}^* = \int_{\Omega} \Phi^T \hat{\sigma} d\Omega \quad (3.17)$$

onde as integrais da expressão (3.17) podem ser representadas por

$$\underline{M} = \int_{\Omega} \Phi^T \Phi d\Omega \quad (3.18)$$

e

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \Phi^T \hat{\sigma} d\Omega \quad (3.19)$$

Integrando as expressões (3.18) e (3.19) por Gauss, pode-se obter cada conjunto de componentes $\bar{\sigma}^*$ para os nós do elemento. Denomina-se $\bar{\sigma}^*$ de tensões projetadas, as quais dependem do elemento considerado. Para obter um único conjunto de tensões em cada nó realiza-se, em seguida, a suavização de tensões.

3.4.3 - Suavização das tensões em nível global

A origem do processo de suavização do campo de tensões global são os trabalhos de ODEN e BRAUCHLI²⁰ e ODEN e REDDY²¹.

Para proceder à suavização, as expressões (3.18) e (3.19) são integradas utilizando-se como pontos de integração os nós do elemento, o que faz com que a matriz \underline{M} resulte na matriz diagonal \underline{M}^D (SILVA²⁴) enquanto que \underline{R} dá origem à \underline{R}^D . As matrizes globais \underline{M}^G (diagonal) e \underline{R}^G podem então ser obtidas através dos somatórios

$$\underline{M}^G = \sum_{e=1}^{QL} \underline{M}^D \quad \text{e} \quad \underline{R}^G = \sum_{e=1}^{QL} \underline{R}^D \quad (3.20)$$

onde QL representa o número de elementos constituintes da estrutura. A solução do sistema de equações da expressão (3.21) fornece as tensões suavizadas globais $\underline{\sigma}^{**}$

$$\underline{M}^G \underline{\sigma}^{**} = \underline{R}^G \quad (3.21)$$

Note-se que para cada componente de tensão deve-se calcular um vetor \underline{R}^G e obter o correspondente vetor $\underline{\sigma}^{**}$. Normalmente inverte-se a matriz diagonal \underline{M}^G uma vez e calculam-se os vetores $\underline{\sigma}^{**}$ correspondentes às diversas componentes de tensão do problema.

A partir de $\underline{\sigma}^{**}$, pode-se obter para cada elemento os valores das componentes de tensão $\underline{\sigma}^{**}$ nos pontos de integração de Gauss através de funções de interpolação $\underline{\phi}$ utilizadas para calcular a matriz de rigidez do elemento. Assim, para cada componente em um certo ponto de integração,

$$\sigma^{**} = \sum_{i=1}^{NVE} \phi_i \bar{\sigma}_i^{**} \quad (3.22)$$

onde ϕ_i são os valores das funções de interpolação no ponto de integração e $\bar{\sigma}_i^{**}$ são as tensões suavizadas globais. Essas tensões são contínuas em todo o domínio, ou seja, cada nó possui valores únicos de tensão.

3.4.4 - A norma de energia do erro

Sendo \underline{u} a solução exata para deslocamentos e $\hat{\underline{u}}$ a solução aproximada obtida pelo método dos elementos finitos, o erro em função dos deslocamentos é definido como \underline{e}_u onde

$$\underline{e}_u = \underline{u} - \hat{\underline{u}} \quad (3.23)$$

da mesma forma para a solução exata de tensões $\underline{\sigma}$ e para a solução aproximada $\hat{\underline{\sigma}}$ tem-se

$$\underline{e}_{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} - \hat{\underline{\sigma}} \quad (3.24)$$

onde $\underline{e}_{\underline{\sigma}}$ é o erro em função das tensões.

Como a equação (3.24) é uma função de ponto, aparecem dois problemas. O primeiro é que essa equação é de difícil aplicação prática porque, na maioria das vezes, não se dispõe da solução exata. O segundo é que ela possui infinitas soluções. As normas do erro resolvem o problema da infinidade de soluções da expressão (3.24) porque permitem reduzir diversos resultados nas diversas direções a um único número que fica sendo característico do elemento. Será utilizada a norma de energia que toma como base a medida do trabalho virtual.

A norma de energia de uma função f é definida como

$$\|E\| = \sqrt{\int_{\Omega} f L f d\Omega} \quad (3.25)$$

onde f e L são tensores de ordem apropriada de forma que (fLf) é uma função escalar de ponto no interior de domínio Ω .

A norma de energia do erro, para o caso da elasticidade, é definida por

$$\|E\|_{e_{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\int_{\Omega} \underline{e}_{\underline{\sigma}}^T D^{-1} \underline{e}_{\underline{\sigma}} d\Omega} . \quad (3.26)$$

Na prática, o desconhecimento da função $\underline{\sigma}$ da expressão (3.24) é resolvido pelo uso dos valores das tensões suavizadas globais $\underline{\sigma}^{**}$ da expressão (3.22). Então, é possível fazer uma avaliação da expressão (3.24) nos pontos de integração (PI) como

$$\left(\hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}} \right)_{PI} = \left(\underline{\sigma}^{**} - \hat{\underline{\sigma}} \right)_{PI} \quad (3.27)$$

e uma avaliação da expressão (3.26) pode ser obtida pela expressão (3.28)

$$\|E\|_{e_{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\sum_{PI=1}^{NPI} \left(\hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}}^T \right)_{PI} D^{-1} \left(\hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}} \right)_{PI} W_{PI} \det J_{PI}} \quad (3.28)$$

onde NPI é o número de pontos de integração, W_{PI} é peso no PI e $\det J_{PI}$ é o determinante do Jacobiano nos PI . A norma de energia do erro, correspondente a toda a estrutura, pode ser avaliada como

$$\|E\|_{T \hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}}}^2 = \sum_{i=1}^{QL} \|E\|_{i \hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}}}^2 \quad (3.29)$$

onde $\|E\|_{i \hat{\underline{e}}_{\underline{\sigma}}}$ é calculado, para cada elemento i , pela (3.28).

3.4.5 - A norma de energia de tensão

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na norma do erro, obtém-se uma avaliação da norma de energia de tensão substituindo na expressão (3.28) o termo $\hat{\underline{\epsilon}}_{\sigma}$ por $\hat{\underline{\sigma}}$ como

$$\|E\|_{\hat{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\sum_{PJ=1}^{NPI} \left(\hat{\underline{\sigma}}^T \right)_{PJ} D^{-1} \left(\hat{\underline{\sigma}} \right)_{PJ} W_{PJ} \det J_{PJ}}. \quad (3.30)$$

e uma avaliação da norma de tensão de toda a estrutura será

$$\|E\|_{T\hat{\underline{\sigma}}}^2 = \sum_{l=1}^{QL} \|E\|_{\hat{\underline{\sigma}}}^2. \quad (3.31)$$

3.4.6 - Avaliação melhorada da norma de tensão

Em nível de elemento, a expressão (3.30) pode ser melhor avaliada combinando-a com a expressão (3.28), conforme a (3.32)

$$\|\bar{E}\|_{\hat{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\|E\|_{\hat{\underline{\sigma}}}^2 + \|E\|_{\hat{\underline{\epsilon}}_{\sigma}}^2}. \quad (3.32)$$

Em nível global, uma melhor avaliação da expressão (3.31) é obtida combinando as expressões (3.31) e (3.29) conforme a expressão (3.33)

$$\|\bar{E}\|_{T\hat{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\|E\|_{T\hat{\underline{\sigma}}}^2 + \|E\|_{T\hat{\underline{\epsilon}}_{\sigma}}^2}. \quad (3.33)$$

3.4.7 - Cálculo do erro relativo

Pode-se calcular o erro relativo aproximado $\hat{\eta}$, em nível de elemento, referente às normas de energia do erro e de tensão melhorada, combinando as expressões (3.28) e (3.32).

Assim

$$\hat{\eta} = \frac{\|E\|_{\hat{\underline{\epsilon}}_{\sigma}}}{\|\bar{E}\|_{\hat{\underline{\sigma}}}} \times 100 \quad (3.34)$$

e o erro relativo aproximado de toda a estrutura será obtido combinando as expressões (3.29) e (3.33) como

$$\hat{\eta}_T = \frac{\|E\|_{T\hat{\underline{\epsilon}}_{\sigma}}}{\|\bar{E}\|_{T\hat{\underline{\sigma}}}} \times 100. \quad (3.35)$$

3.4.8 - Implementação do estimador de erros

Como já foi dito, o estimador de erros está implementado no módulo GATEN em conjunto com o cálculo de tensões. O quadro (3.1) mostra uma síntese dos passos utilizados para a sua implementação.

```

- Ler arquivos de dados (coordenadas, conectividades, tipo de elemento, constantes,
  propriedades, deslocamentos,...)
ISRS = 0
SE for problema de casca poliédrica: ISUAV=0
SE arquivo .SRS(ângulo de rotação para o sistema intermediário de placas e cascas) existe
ENTÃO
  ISRS = 1
  SE ângulo de rotação for igual a zero ENTÃO
    Vai calcular as tensões no sistema local
  SENÃO
    Vai calcular as tensões no sistema intermediário de referência indicado pelo
    ângulo dado
  FIM do SE
  SE for problema de casca poliédrica ENTÃO
    ISUAV=1 (fará a separação dos elementos em planos e a suavização global de
    tensões por planos)
  FIM do SE
FIM do SE
SE ISUAV=1 ENTÃO
  FAÇA J=1 a QL (número de elementos)
  - Separar os elementos em grupos, de acordo com os planos a que eles pertencem
    (ver item 3.4.8.2)
  CONTINUE
  - Obter NG (número de grupos)
FIM DO SE
SE não for problema de casca poliédrica OU ISUAV=0 ENTÃO
  NG=1
FIM do SE
FAÇA KG = 1 a NG
  - Zerar as matrizes  $\tilde{M}^G$  e  $\tilde{R}^G$ 

```

Quadro 3.1 - Passos para o cálculo das tensões suavizadas e do erro.

ETAPA 1 - Cálculo das tensões nos pontos de integração $\hat{\underline{\sigma}}$ e das tensões nodais projetadas $\underline{\underline{\sigma}}^*$.

SE $ISUAV=1$ ENTÃO

- Obter posição do Elemento Inicial e do Elemento Final do grupo em questão

SENÃO

- Colocar Elemento Inicial do grupo =1
- Colocar Elemento Final do grupo = QL

FIM do SE

FAÇA I = Elemento Inicial do Grupo ao Elemento Final do Grupo

- a) Cálculo das tensões nos pontos de integração $\hat{\underline{\sigma}}$ através da expressão (3.7)

SE for problema de casca poliédrica E $ISUAV=0$

- Grava essas tensões e termina a análise sem calcular as tensões projetadas, suavizadas e erros: pular itens b) à e) desta etapa e etapas 2 e 3 e ir para FIM

FIM do SE

- b) Montagem de \underline{M} e \underline{R} nos pontos de integração de Gauss através das expressões (3.18) e (3.19)
- c) Solução do sistema $\underline{M} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{R}$ e obtenção das tensões nodais projetadas $\underline{\underline{\sigma}}^*$
- d) Cálculo do volume do elemento (VOL)
- e) Montagem das matrizes \underline{M}^G e \underline{R}^G somando \underline{M} e \underline{R} de cada elemento através da expressão (3.20)

CONTINUE

Quadro 3.1 - Passos para o cálculo das tensões suavizadas e do erro (continuação).

ETAPA 2 - Cálculo das tensões suavizadas globais e normas de energia.

FAÇA $I =$ Elemento Inicial do Grupo ao Elemento Final do Grupo

- a) Solução do sistema $\underline{M}^G \underline{\sigma}^{**} = \underline{R}^G$ pela inversão dos termos da matriz \underline{M}^G correspondentes ao elemento considerado e obtenção das tensões nodais suavizadas $\underline{\sigma}^{**}$ para cada elemento
 - b) Cálculo das tensões suavizadas nos pontos de integração $\underline{\sigma}^{**}$ através da expressão (3.22)
 - c) Cálculo do erro de tensões \hat{e}_σ pela expressão (3.27)
 - d) Cálculo das normas de energia $\|E\|_{\hat{e}_\sigma}^2$, $\|E\|_{\hat{\sigma}}^2$ e $\|\bar{E}\|_{\hat{\sigma}}^2$ pelas expressões (3.28), (3.30) e (3.32)
 - e) Cálculo das normas máximas $EMAX = \|E\|_{\hat{e}_\sigma}^2_{\max}$ e mínimas $EMIN = \|E\|_{\hat{e}_\sigma}^2_{\min}$ para normalização do erro
 - f) FAÇA $J = 1, NNE$ (número de nós por elemento)
 - SE $ISRS=1$ ENTÃO
 - Faz a rotação de placas e cascas para o sistema intermediário FIM do SE
 - GRAVA as tensões $\underline{\sigma}^{**}$
 - GRAVA a norma de energia $\sqrt{\|E\|_{\hat{e}_\sigma}^2}$
- CONTINUE
- g) Somar a contribuição do elemento em questão para o cálculo das normas de energia globais $\|E\|_{T\hat{e}_\sigma}^2$ e $\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2$ através das expressões (3.29) e (3.31)
 - h) Calcular o erro relativo $\hat{\eta}$ pela expressão (3.34)
 - i) Gravar o volume do elemento(VOL)
 - j) Somar a contribuição do elemento para o cálculo do volume global (VOLG)

CONTINUE

- Cálculo do erro relativo global $\hat{\eta}_T$ pela expressão (3.35)

CONTINUE

Quadro 3.1 - Passos para o cálculo das tensões suavizadas e do erro (continuação).

ETAPA 3 - Normalização das normas de erro (cálculo do erro em porcentagem)

$DIF = \sqrt{EMAX} - \sqrt{EMIN}$ (diferença entre a norma máxima e a mínima)

$ERROG=0$ (somatório dos erros em %)

FAÇA $I=1, QN$

$CONTR(I)=0$ (arranjo que controla a soma do erro dos nós permitindo que o erro de cada nó seja somado apenas uma vez)

CONTINUE

$ISOMA=0$

FAÇA $J = 1$ a QL

FAÇA $J = 1$ a NNE

Obter o número externo do nó em questão a partir do nome que consta no arranjo de conectividades e pôr na variável NO
SE $CONTR(NO)=0$ ENTÃO (nó ainda não foi somado)

$ISOMA=1$

$CONTR(NO)=1$

FIM do SE

a) Ler a norma de energia do elemento $\|E\|_{\varepsilon_0}$

b) Fazer $ERRO(\%) = \frac{\|E\|_{\varepsilon_0} - \sqrt{EMIN}}{DIF} \times \hat{\eta}_T$

c) GRAVAR $ERRO(\%)$

d) SE $ISOMA=1$ ENTÃO (soma erro do nó)

Fazer $ERROG = ERROG + ERRO(\%)$

FIM do SE

$ISOMA=0$

CONTINUE

CONTINUE

$\hat{\eta}_{med}$ (erro médio em %) = $ERROG / QN$

FIM

Quadro 3.1 - Passos para o cálculo das tensões suavizadas e do erro (continuação).

Obs: O erro médio $\hat{\eta}_{med}$ indica a média das porcentagens de erro de todos os elementos da estrutura. Com esse valor, é possível avaliar se a porcentagem de erro existente ao longo de toda a estrutura diminui ao realizar o refinamento, mesmo se o erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ (valor máximo de erro após feita a normalização das normas de erro - Etapa 3) ou o erro relativo global $\hat{\eta}_T$ não baixarem.

3.4.8.1 - Rotação do sistema de referência para placas e cascas

Em placas e cascas as tensões e momentos são normalmente calculados no sistema local. Isso pode introduzir erros dependendo da ordem em que são dadas as conectividades dos elementos. Para evitar esse problema, é possível fazer a rotação das tensões e momentos para um sistema de referência independente da ordem das conectividades fornecidas. Mais informações sobre essa rotação podem ser encontrados no Apêndice D item 1.

3.4.8.2 - Determinação dos planos de cascas poliédricas para suavização de tensões por planos

Em problemas de casca poliédrica é necessário fazer a suavização global de tensões por planos. Isso acontece porque os eixos de referência e , conseqüentemente, as componentes de tensão podem ter direções diferentes conforme o plano que se estiver analisando. A forma de determinar os planos de cascas está apresentada no Apêndice D item 2.

3.4.8.3 - Integração da matriz de massa para triângulos

Ao realizar a integração da matriz de massa \underline{M} da expressão (3.18) para triângulos, utilizando ordens de integração linear e quadrática, obteve-se uma matriz singular. Devido a isso, foi-se aumentando a ordem de integração até se chegar aos resultados corretos. Mais detalhes a esse respeito podem ser vistos no Apêndice D item 3.

3.4.8.4 - Integração nodal

Para realizar o processo de suavização global de tensões, faz-se uma integração nodal onde obtém-se uma matriz de massa diagonal. Dessa forma, as tensões suavizadas globais serão obtidas através inversão da matriz de massa diagonal \underline{M}^a do sistema de equações (3.21). Os pesos de integração utilizados para cada tipo de elemento estão colocadas no Apêndice D item 4.

3.4.8.5 - Cálculo das tensões nos pontos de integração

Normalmente utiliza-se integração (2x2), tanto para elementos lineares como para elementos quadráticos, a fim de calcular as tensões nos pontos de integração. Este procedimento é utilizado em todos os tipos de elemento (placa, casca, sólido tridimensional,...). Calcula-se as tensões nos nós de canto do elemento e faz-se uma interpolação dessas tensões calculadas para os nós intermediários. Foi feito um teste para estado plano de tensões utilizando

integração (2x2) para elementos lineares e (3x3) para elementos quadráticos. Comparando os resultados obtidos com as duas integrações testadas para elementos quadráticos, observou-se que a utilização da integração (3x3) causa uma sensível melhora nos resultados. Devido aos bons resultados obtidos, essa modificação foi implementada no estimador de erros para esse tipo de problema.

4 - PROCESSOS AUTO-ADAPTATIVOS DE REFINAMENTO

4.1 - Introdução

A base da idéia de processos adaptativos está nos trabalhos de BABUSKA e RHEINBOLDT^{7,8}. Estes processos, além de realizarem a análise normal de elementos finitos, determinam a região do domínio onde o modelamento não é adequado e, após isso, melhoram o mesmo usando uma das estratégias (versão r , p ou h).

Geralmente, inicia-se a análise com uma malha o mais uniforme possível e calcula-se a solução. Após isso, estima-se o erro local, enriquecendo a malha onde o erro for grande. Os processos que fazem este ciclo são chamados de adaptativos. O ciclo é repetido até que se atinja a precisão desejada. Quando não há interação com o usuário para a reativação do processo, este é dito auto-adaptativo.

A malha ótima será atingida quando o erro for igual em todos os elementos, ou seja, quando houver uma distribuição uniforme do erro de aproximação tendo como limite superior a percentagem de erro especificada. Esta idéia é similar a da malha "quasi" ótima introduzida por TURCKE e McNEICE²⁷.

4.2 - Métodos auto-adaptativos

Os métodos de refinamento adaptativo diferem entre si pelo parâmetro a ser adaptado. Existem três tipos de adaptações muito utilizadas, são elas: r , p e h .

A seguir apresenta-se o quadro 4.1 que mostra os passos utilizados em um programa auto-adaptativo. Após isso, faz-se alguns comentários sobre as versões r , p e h dos métodos adaptativos.

(A) *Entrada de dados do problema*

Descrição do problema e especificação do erro relativo máximo permitido

(B) *Entrada de dados do 1o. modelo*

Geração da malha inicial e das suas características: restrições, propriedades, constantes, cargas,...

(C) *Geração de um novo modelo*

Se o passo anterior for (B), pular este passo; caso contrário executá-lo

(D) *Montagem da matriz de rigidez e solução do sistema de equações - cálculo dos deslocamentos*

(E) *Cálculo das tensões e das estimativas de erros "a-posteriori" baseadas nessas tensões*

Se o erro for maior do que o limite especificado em (A), vai para (C); senão, vai para (F)

(F) *Fim da análise*

Quadro 4.1 - Passos de um programa auto-adaptativo.

4.2.1 - Versão r

Esta versão realoca a posição dos nós e modifica a forma dos elementos sem incrementar o número de nós ou elementos. Sendo assim, é impossível reduzir o erro de aproximação a zero. Este método redistribui o erro de forma a diminuir os erros máximos e aumentar os erros mínimos. Em geral, a média dos erros de cada elemento diminui durante o processo.

Para problemas bidimensionais e tridimensionais, a estabilidade numérica deste procedimento pode ser comprometida em virtude das dificuldades de se garantir um bom condicionamento dos elementos.

4.2.2 - Versão p

A versão p aumenta o grau dos polinômios das funções de interpolação dos elementos cujo erro de aproximação for grande, mantendo a malha inicial durante todo o

processo de adaptação. Sendo relacionado com o grau do polinômio, este método é chamado de p .

A convergência da versão p é alta para malhas bem projetadas inicialmente. Se isso não acontecer, esta versão não apresenta uma boa performance.

4.2.3 - Versão h

É a versão utilizada neste trabalho. A versão h consiste na redução dos erros através da subdivisão dos elementos. Sabendo que o parâmetro a ser modificado é o tamanho do elemento, matematicamente expresso por h , esta versão é denominada de h . O algoritmo de refinamento implementado consiste na subdivisão dos elementos ao redor de um nó de forma a evitar a formação de nós irregulares (ver figura 4.1). As figuras 4.2 à 4.5 mostram o tipo de subdivisão adotado conforme o tipo de elemento que se está utilizando. Dessas figuras nota-se que, refinando elementos planos, aparecem elementos trapezoidais e, refinando elementos tridimensionais, são gerados elementos com forma similar a de troncos de pirâmide. Dessa maneira, consegue-se evitar a criação de nós irregulares. A seguir serão apresentadas as estratégias de refinamento por elemento mais comuns.

4.3 - Estratégias de refinamento por elemento para a versão h

De posse dos valores fornecidos pelo estimador de erros, é importante escolher corretamente a estratégia de refinamento a ser utilizada. É a conveniente combinação desses dois fatores que possibilitará a obtenção de resultados satisfatórios. Por isso, serão apresentadas a seguir quatro estratégias de refinamento e será escolhida a que se mostrar mais precisa e eficiente.

4.3.1 - Estratégia 1

É a estratégia mais simples, está baseada na comparação do erro de cada elemento com um padrão. Esta estratégia foi utilizada por DEVLOO¹². Primeiramente, determina-se o máximo erro

$$\|E\|_{max} = \max \|E\|_{\Omega_e} \quad (4.1)$$

com $1 \leq i \leq QL$ onde QL é o número de elementos constituintes da estrutura e $\|E\|_{\Omega_e}$ é obtido pela expressão (3.28). São definidos os parâmetros λ_{min} e λ_{max} entre 0 e 1.

Então se

$$\|E\|_{\hat{e}_i} \geq \lambda \max \|E\|_{\max} \quad (4.2)$$

o elemento i é refinado. Se, para um grupo de elementos ao redor de um nó j , ocorrer

$$\sqrt{\frac{1}{NLCN} \sum_{k=1}^{NLCN} \|E\|_{\hat{e}_k}^2} \leq \lambda \min \|E\|_{\max} \quad (4.3)$$

onde $NLCN$ é o número de elementos concorrentes no nó j , os elementos são condensados em um único elemento ocorrendo refinamento na ordem inversa. Esta estratégia leva a uma sequência de malhas que convergirão para a malha ótima.

4.3.2 - Estratégia 2

Este procedimento é similar ao anterior e introduz a chamada taxa de convergência que será, para cada elemento i , determinada por

$$\lambda_i = \frac{\|E\|_{\hat{e}_n}}{\|E\|_{\hat{e}_o}^P} \quad (4.4)$$

onde $\|E\|_{\hat{e}_o}$ é o erro de um elemento em uma determinada etapa e $\|E\|_{\hat{e}_n}^P$ é o erro do elemento "pai" que, tendo sido subdividido, deu origem ao elemento atual. Determina-se, também, $\|E\|_{\max}$ através da expressão (4.1) e se

$$\|E\|_{\hat{e}_i} \geq \lambda_i \|E\|_{\max} \quad (4.5)$$

refina-se o elemento.

Este processo tem a vantagem de não necessitar a especificação do parâmetro λ_i , que será característico do elemento e da etapa. Entretanto, tem como desvantagem a necessidade de um refinamento uniforme na malha original para dar partida ao processo e permitir avaliar os valores de λ_i iniciais.

4.3.3 - Estratégia 3

Nesta estratégia é estabelecido um critério de precisão. Normalmente, tem-se como objetivo atingir uma determinada porcentagem de erro relativo através da norma de energia. Admitindo que o erro esteja igualmente distribuído entre todos os elementos, que é a condição ótima segundo LYRA et al.¹⁹, tem-se

$$\|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma} = \|E\|_{j\hat{\epsilon}_\sigma} = \|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma} \quad (4.6)$$

tal que $1 \leq i, j \leq QL$ e onde i e j correspondem a dois elementos distintos quaisquer e k simboliza o valor constante do erro. Considerando que a expressão (4.6) seja válida, a expressão (3.29) pode ser reescrita como

$$\|E\|_{T\hat{\epsilon}_\sigma}^2 = QL \times \|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma}^2 \quad (4.7)$$

e o erro relativo aproximado global $\hat{\eta}_T$, da expressão (3.35), pode ser reescrito como

$$\hat{\eta}_T = \left[\frac{QL \times \|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma}^2}{\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{T\hat{\epsilon}_\sigma}^2} \right]^{1/2} \times 100 \quad (4.8)$$

Estabelecendo $\bar{\eta}_T$ como sendo o máximo erro relativo permitido para a estrutura, o critério a ser satisfeito será

$$\hat{\eta}_T \leq \bar{\eta}_T \quad (4.9)$$

e adotando a igualdade em (4.9), substituindo a expressão (4.8) em (4.9) e isolando $\|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma}$, tem-se

$$\|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \times \frac{\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{T\hat{\epsilon}_\sigma}^2}{QL}} \quad (4.10)$$

onde o valor $\|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma}$ pode ser adotado como limite superior desejado do erro em cada elemento, correspondente ao $\bar{\eta}_T$ especificado. Então, se

$$\|E\|_{i\hat{\epsilon}_\sigma} > \|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma} \quad (4.11)$$

com $1 \leq i \leq QL$, o elemento i deve sofrer refinamento.

Estabelecendo a relação

$$\rho_i = \frac{\|E\|_{i\hat{\epsilon}_\sigma}}{\|E\|_{k\hat{\epsilon}_\sigma}} \quad (4.12)$$

sendo h_i o tamanho médio do elemento, assumindo uma taxa de convergência do erro da ordem de h_i^p onde p é igual a ordem dos polinômios de interpolação empregados no

estabelecimento da matriz de rigidez do elemento, o tamanho de elemento necessário para satisfazer a equação (4.11) pode ser avaliado por

$$\bar{h}_i = \frac{h_i}{\rho_i^{1/p}} \quad (4.13)$$

Pode-se também interpretar o valor de $\rho_i^{1/p}$ como:

- $\rho_i^{1/p} \leq 1$ - não há necessidade de realizar refinamento
- $1 < \rho_i^{1/p} \leq 2$ - há necessidade de realizar um refinamento
- $2 < \rho_i^{1/p} \leq 4$ - há necessidade de realizar duplo refinamento
- $2^{r-1} < \rho_i^{1/p} \leq 2^r$ - há necessidade de realizar r refinamentos sucessivos no elemento.

4.3.4 - Estratégia 4

Em função da existência de elementos de dimensões variadas, torna-se interessante utilizar na expressão (4.10), em lugar de $(1/QL)$, a relação de volumes (V_i/V_T) onde V_i representa o volume do elemento considerado e V_T o volume de toda a estrutura. Então o valor limite $\|E\|_{k\hat{e}_0}$ passará a depender do elemento e, para um elemento i , será

$$\|E\|_{k\hat{e}_0} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot (\|E\|_{T\hat{e}_0}^2 + \|E\|_{T\hat{e}_0}^2)} \quad (4.14)$$

São válidas para esta estratégia todas as demais considerações e fórmulas vistas na estratégia 3, substituindo $\|E\|_{k\hat{e}_0}$ por $\|E\|_{ik\hat{e}_0}$ onde for o caso.

4.3.5 - Observações a respeito do refinamento por elemento

O refinamento por elemento normalmente apresenta problemas de implementação por criar, dependendo do tipo de subdivisão adotado, os chamados nós irregulares (ver figura 4.1).

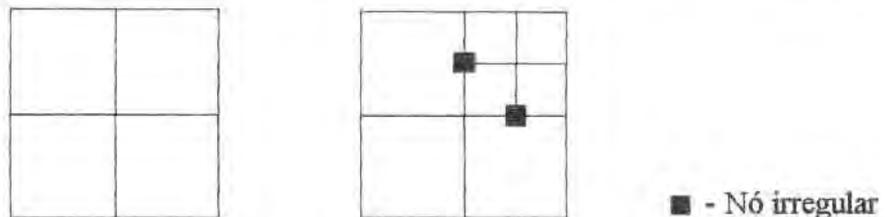


Figura 4.1 - Subdivisão por elemento que cria nós irregulares.

A vantagem das divisões que criam os nós irregulares é que elas conduzem a elementos com um mínimo de distorção, não importando o nível de refinamento. Nota-se que os nós irregulares não existem nos elementos vizinhos ao elemento refinado. Por isso, usam-se técnicas especiais que permitem acoplá-los ao restante da malha. Contudo, essas técnicas implicam modificações mais ou menos profundas no algoritmo de solução e apresentam dificuldades adicionais para o caso de elementos quadráticos ou cúbicos e em malhas constituídas de elementos de diversas formas ou tipos. Esses problemas podem ser verificados em SILVA²⁴.

Embora seja possível subdividir um elemento sem criar nós irregulares, refinamentos sucessivos, levados a cabo sobre elementos oriundos do primeiro refinamento, tendem a gerar elementos muito distorcidos com ângulos internos cada vez mais próximos de 180°, dando origem a erros cada vez mais acentuados (ver figura 4.2). Por isso, será adotada uma técnica intermediária que não cria nós irregulares e que tende a apresentar um menor índice de distorção nos elementos oriundos de refinamentos sucessivos. Esta técnica opera realizando o refinamento ao redor de um nó e não diretamente dentro de um elemento.

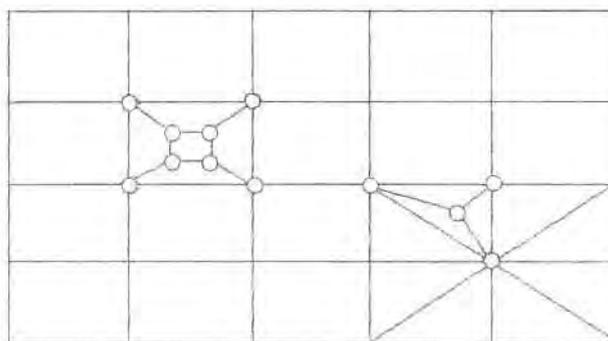


Figura 4.2 - Subdivisão por elemento sem criação de nós irregulares.

4.4 - Refinamento auto-adaptativo tipo h por nó

É a estratégia utilizada neste trabalho. Ela toma como base a estratégia 4 de refinamento por elemento vista no item 4.3.4. Para tal, procura-se caracterizar nós ao redor dos quais será realizado o refinamento. Inicialmente calcula-se, para cada elemento, a norma de energia e o valor limite de erro conforme as expressões (3.28) e (4.14) respectivamente. Em seguida, realizam-se, para cada nó N , as médias dos quadrados da norma de energia e do limite de erro dos elementos nele concorrentes. Sendo $NLCN$ o número de elementos concorrentes no nó N , tem-se da expressão (3.28)

$$\|E\|_{N\hat{\sigma}_0} = \sqrt{\frac{1}{NLCN} \sum_{i=1}^{NLCN} \|E\|_{\hat{\sigma}_0}^2} \quad (4.15)$$

e da expressão (4.14)

$$\|E\|_{N\hat{\epsilon}_\sigma} = \sqrt{\frac{1}{NLCN} \sum_{j=1}^{NLCN} \|E\|_{jk\hat{\epsilon}_\sigma}^2} \quad (4.16)$$

Compara-se, então, as expressões (4.15) e (4.16) e haverá refinamento dos elementos que circundam o nó N sempre que

$$\|E\|_{N\hat{\epsilon}_\sigma} > \|E\|_{N\hat{\epsilon}_\sigma} \quad (4.17)$$

As figuras 4.3 à 4.6 mostram o tipo de subdivisão adotado conforme o tipo de elemento utilizado. Para elementos quadriláteros, foi adotado o mesmo tipo de subdivisão utilizado por AZEVEDO⁵ em problemas de mecânica dos fluidos.

■ - Nó ao redor do qual é realizado o refinamento



Figura 4.3 - Subdivisão usada para elementos quadriláteros.

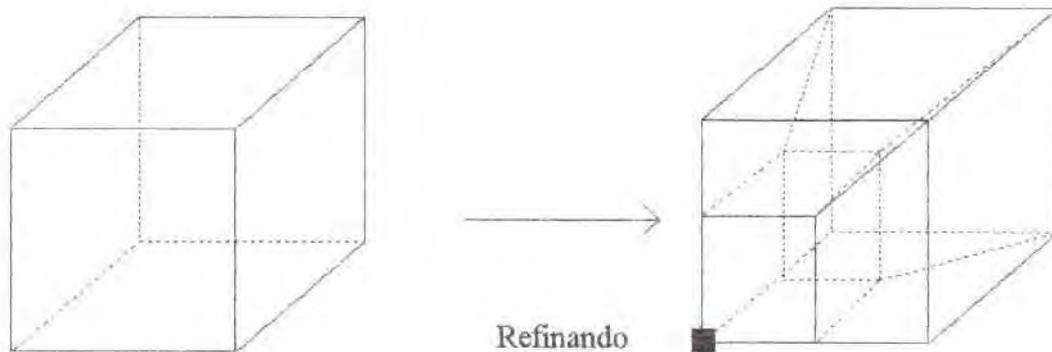


Figura 4.4 - Subdivisão usada para elementos hexaédricos.



Figura 4.5 - Subdivisão usada para elementos triangulares.

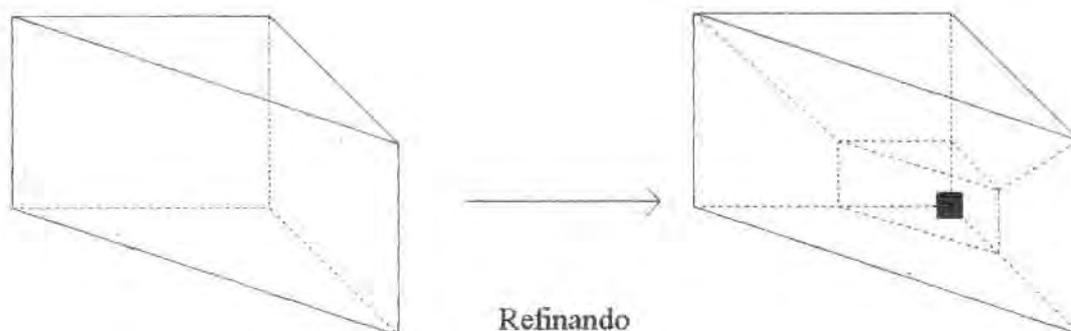


Figura 4.6 - Subdivisão usada para elementos pentaédricos.

As subdivisões anteriores valem para malhas mistas com elementos quadriláteros e triangulares ou elementos hexaédricos e pentaédricos, tanto lineares como quadráticos, contanto que cada elemento dê origem a elementos de mesma ordem e que não haja mistura de elementos de ordem diversa.

4.4.1 - Controle do processo de subdivisão dos elementos

O processo é controlado através do arranjo *NCONTR* que tem uma posição para cada nó de canto. Foram feitas duas tentativas até se encontrar uma forma de controle que fosse eficiente. A seguir serão apresentadas as duas formas de controle testadas.

1a. Forma de controle - *NCONTR*

Para a 1a. etapa de refinamento:

- a) Zera-se todas as posições de *NCONTR*; Será permitido o refinamento apenas ao redor dos nós onde ele for necessário e que tiverem $NCONTR(NO)=0$.
- b) Para cada nó que for refinado, marca-se com 1 em *NCONTR* as posições dos nós de canto dos elementos que incidem no nó refinado. Isso os impede de sofrer refinamento na etapa.

Para as etapas de refinamento seguintes :

- a) Monta-se *NCONTR* com os nós velhos e novos e repete-se o processo utilizado na 1a. etapa de refinamento;

Consequências: Malha mal distribuída (figura 5.1). Não se consegue atingir determinadas regiões que deveriam ser refinadas e, por outro lado, outras regiões são demasiadamente refinadas.

2a. Forma de controle - *NCONTR*

- *NCONTR* controla o processo ao longo das diversas etapas de refinamento
- Introduz-se a variável *NIVEL*.

Para a 1a. etapa:

- a) $NIVEL=1$, todos os nós de canto da malha original recebem $NCONTR=NIVEL$;
- b) Um nó de canto que tenha o valor em $NCONTR=NIVEL$ e que necessite de refinamento:
 - marca-se este nó com valor $-NIVEL$ em $NCONTR$ (não será refinado novamente)
 - marca-se os nós dos elementos vizinhos com $NCONTR=0$ (impedir refino na etapa);
- c) Fim da etapa: nós com $NCONTR=0$ são repostos com $NCONTR=NIVEL$.

Para as etapas seguintes:

- a) Atribui-se $NIVEL+1$ aos novos nós de canto;
- b) O processo continua, produzindo refinamento nos nós com $NCONTR=NIVEL$;
- c) Se, a partir de uma certa etapa, não existirem mais nós sem refino que satisfaçam a condição de refinamento da expressão (4.17), $NIVEL=NIVEL+1$ e o processo recomeça para os novos nós.

Obs: Nós intermediários de elementos quadráticos não são considerados no processo acima, visto que o arranjo $NCONTR$ é preenchido apenas com nós de canto. Por isso, não se pode realizar refinamento ao redor de nós intermediários.

4.4.2 - Algoritmo de decisão da realização de refinamento

O quadro A.1 do Apêndice A apresenta o algoritmo de refinamento utilizado. O significado das variáveis e arranjos utilizados está explicado na lista de símbolos.

4.4.3 - Observações sobre os algoritmos de geração de nós e elementos

Para que estes algoritmos funcionem independentemente da ordem em que é dada a sequência de conectividades dos nós de canto, é utilizada a função MOD. A função MOD é uma função do compilador FORTRAN que calcula o resto de uma divisão de números inteiros. A divisão é feita pelo número de nós de canto do elemento. Para elementos quadriláteros, a divisão será por 4 como no exemplo a seguir.

Ex:	$MOD((1),4) = 1$	$1/4 = 0$	Resto = 1
	$MOD((2),4) = 2$	$2/4 = 0$	Resto = 2
	$MOD((3),4) = 3$	$3/4 = 0$	Resto = 3
	$MOD((4),4) = 0$	$4/4 = 1$	Resto = 0

4.4.3.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós

Para um elemento quadrilátero de 4 nós, as posições e numeração dos nós e elementos gerados se apresentam como mostrado na figura 4.7.

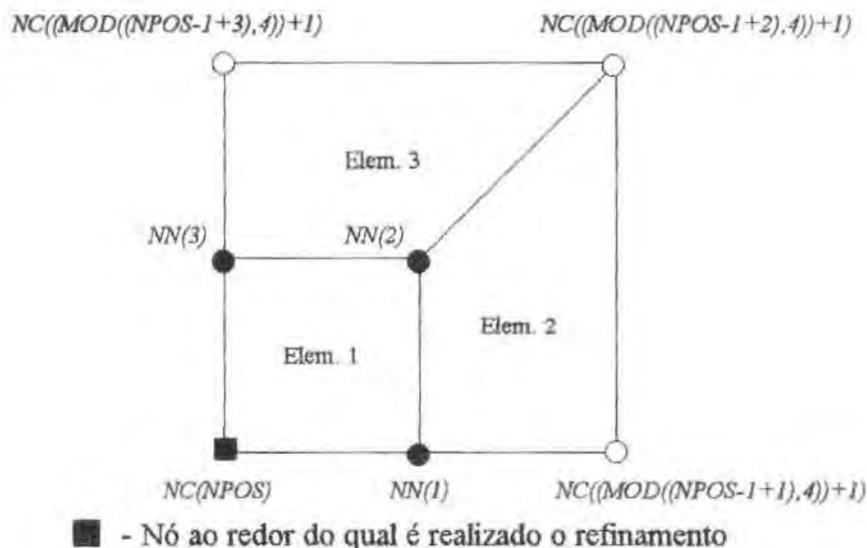


Figura 4.7 - Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos quadriláteros.

Na figura 4.7, as variáveis e arranjos utilizados significam:

$NPOS$ - Posição do nó que está sendo refinado no arranjo de conectividades

$NC(NPOS)$ - Nó de canto com norma de erro que excede o limite

$NN()$ - Novos nós

$NC()$ - Nós de canto do elemento pai

Obs.: Elemento pai é o elemento que vai ser refinado, dando origem aos elementos filhos.

Para gerar os novos nós nas posições correspondentes, são utilizadas as coordenadas normalizadas. A figura 4.8 mostra os valores das coordenadas normalizadas conforme a posição do nó.

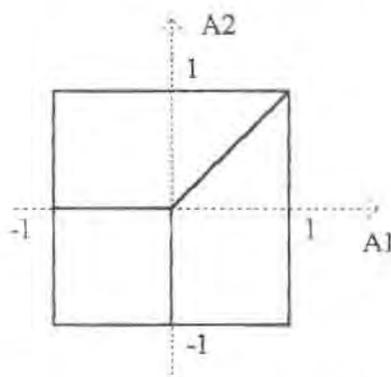


Figura 4.8 - Coordenadas normalizadas para elementos quadriláteros.

Comparando as figuras 4.7 e 4.8, vê-se quais são os valores das coordenadas normalizadas para os novos nós. A tabela 4.1 apresenta esses valores.

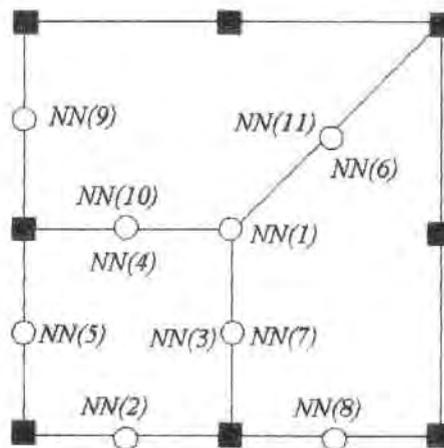
Tabela 4.1 - Valores das coordenadas normalizadas para os novos nós.

Nó	A1	A2	A3
NN(1)	0	-1	0
NN(2)	0	0	0
NN(3)	-1	0	0

O quadro B.1 do Apêndice B apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 4 nós.

4.4.3.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós

Este algoritmo é semelhante ao utilizado para elementos quadriláteros de 4 nós, mas deve-se inserir a parte correspondente à geração dos nós intermediários. A figura 4.9 mostra a posição dos nós gerados durante o processo de refinamento.



■ - Nós já existentes

○ - Novos nós

Figura 4.9 - Posição dos novos nós para elementos quadriláteros de 8 nós.

Como se pode ver figura 4.9, em alguns pontos são gerados dois nós na mesma posição. Isso não acarreta nenhum problema porque após a atualização das coordenadas, onde inclui-se os novos nós, todos os nós são unidos e renomeados.

O quadro B.2 do Apêndice B apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 8 nós.

4.4.3.3 - Elementos hexaédricos de 8 nós

Para um elemento hexaédrico de 8 nós, as posições e a numeração dos nós e elementos gerados se apresentam como mostrado na figura 4.10. O quadro B.3 do Apêndice B apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos hexaédricos de 8 nós. Nesse algoritmo pode-se observar que, conforme a posição do nó que está sendo refinado no arranjo de conectividades (*NPOS*), as coordenadas dos novos nós serão diferentes. Devido a isso são necessários vários testes (SE ou IF) para estabelecer a posição dos novos nós.



Figura 4.10 - Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos hexaédricos.

4.4.3.4 - Elementos hexaédricos de 20 nós

Para elementos hexaédricos de 20 nós, utiliza-se um algoritmo semelhante ao dos elementos hexaédricos de 8 nós. Deve-se tomar o cuidado de gerar os nós intermediários entre os nós de canto do elemento, de maneira similar à feita nos elementos quadriláteros de 8 nós.

4.4.3.5 - Elementos triangulares de 3 nós

Para elementos triangulares de 3 nós, a posição e numeração dos nós e elementos gerados se apresentam como mostrado na figura 4.11. O quadro B.4 do Apêndice B apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.

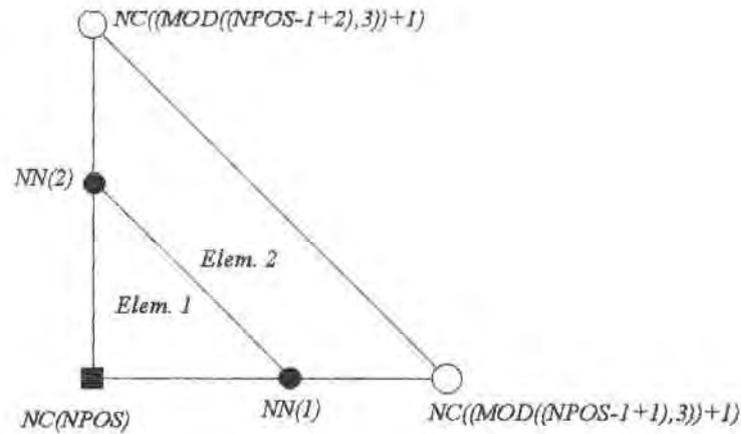


Figura 4.11 - Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.

4.4.3.6 - Elementos triangulares de 6 nós

O algoritmo deste elemento é semelhante ao utilizado para elementos triangulares de 3 nós, mas deve-se inserir a parte correspondente à geração dos nós intermediários. A figura 4.12 mostra a posição dos nós gerados durante o processo de refinamento. O quadro B.5 do Apêndice B apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 6 nós.

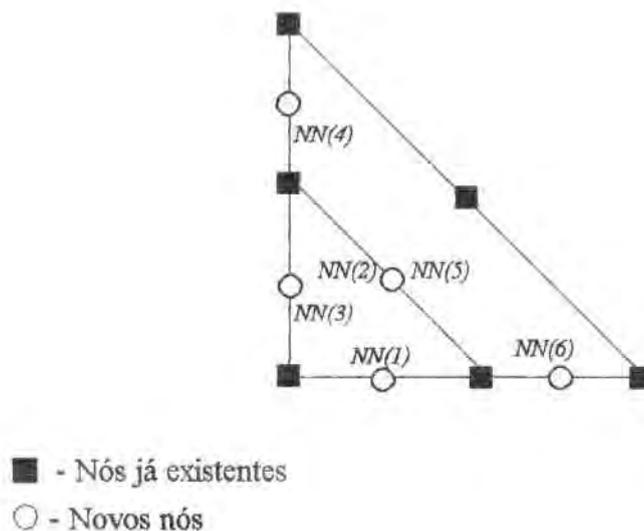


Figura 4.12 - Posição e numeração dos novos nós para elementos triangulares de 6 nós.

Da mesma forma que nos elementos quadriláteros de 8 nós (item 4.4.3.2), em alguns pontos são gerados dois nós na mesma posição. Já que é feita uma união de todos os nós e em seguida eles são renomeados, isso não traz nenhum problema.

4.4.3.7 - Elementos pentaédricos de 6 nós

Para elementos pentaédricos de 6 nós, a posição e numeração dos nós e elementos gerados se apresentam como mostrado na figura 4.13.

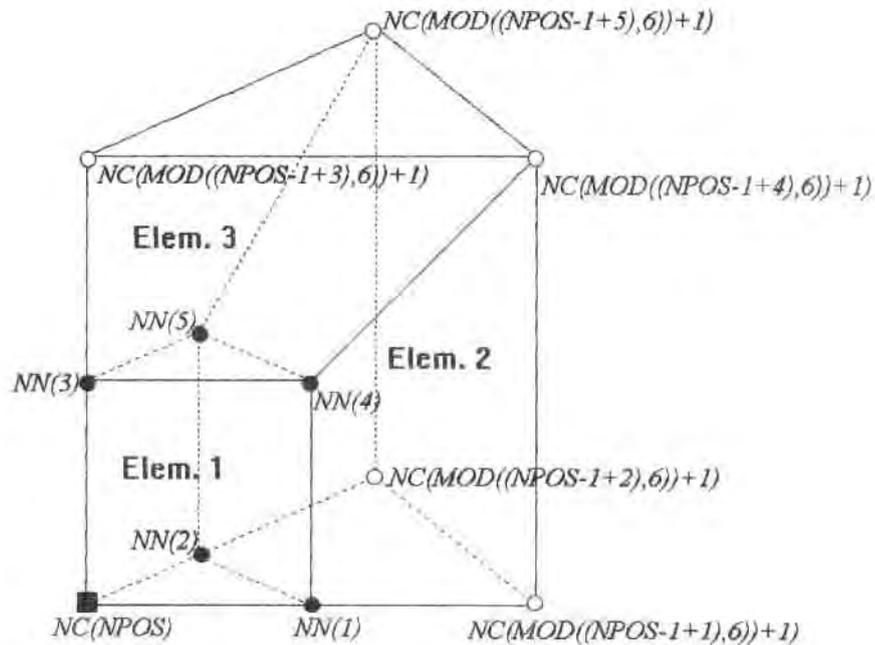


Figura 4.13 - Posição e numeração dos novos nós e elementos para elementos pentaédricos de 6 nós.

4.4.3.8 - Elementos pentaédricos de 15 nós

Para elementos pentaédricos de 15 nós, utiliza-se um algoritmo semelhante ao dos elementos pentaédricos de 6 nós. Deve-se tomar o cuidado de gerar os nós intermediários entre os nós de canto do elemento, de maneira similar à feita nos elementos triangulares de 6 nós.

Obs: Os algoritmos de geração de nós e elementos correspondentes aos elementos triangulares e pentaédricos dos itens 4.4.3.5 à 4.4.3.8 não foram implementados por falta de tempo.

5 - RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados exemplos que visam a mostrar as aplicações e resultados do trabalho desenvolvido. Para as análises numéricas, serão utilizados o estimador de erros "a-posteriori" proposto por ZIENKIEWICZ e ZHU³⁰ e o programa de refinamento auto-adaptativo do tipo h por nó descritos nos capítulos 3 e 4. Estes programas foram desenvolvidos em linguagem FORTRAN e implementados em computadores tipo IBM-PC 486 DX 40 com 8 Mbytes de memória RAM.

O presente capítulo está dividido em 4 itens conforme o tipo de problema abordado: estado plano de tensões, sólido tridimensional, placa e casca poliédrica.

Com o intuito de verificar a rapidez e eficiência dos processos de cálculo de tensões e erros e de refinamento implementados, é mostrado no Apêndice E uma tabela comparativa dos tempos gastos, ao longo dos diversos módulos de análise existentes no sistema GAELI, com alguns dos exemplos apresentados neste capítulo.

5.1 - Estado plano de tensões

5.1.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós

Exemplo 1: Viga engastada livre (figura 5.1) onde é utilizado o primeiro processo de controle e criação nós e elementos explicado no item 4.4.1. A figura 5.1a corresponde à malha inicial, a figura 5.1b corresponde ao 1º refinamento e a 5.1c ao 2º refinamento.

Tabela 5.1 - Quantidade de nós e elementos ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.1a do exemplo 1.

Malha	Nós	Elementos
Inicial	69	16
1º Refino	153	112
2º Refino	766	652

Observações: Da figura 5.1c, pode-se notar que a malha resultante é mal distribuída, ou seja, não se consegue refinar determinadas regiões onde deveria haver refinamento. Devido a isso, o critério utilizado para o controle do processo de refinamento foi modificado. Nos exemplos seguintes é utilizada a nova forma de controle do processo de refinamento.

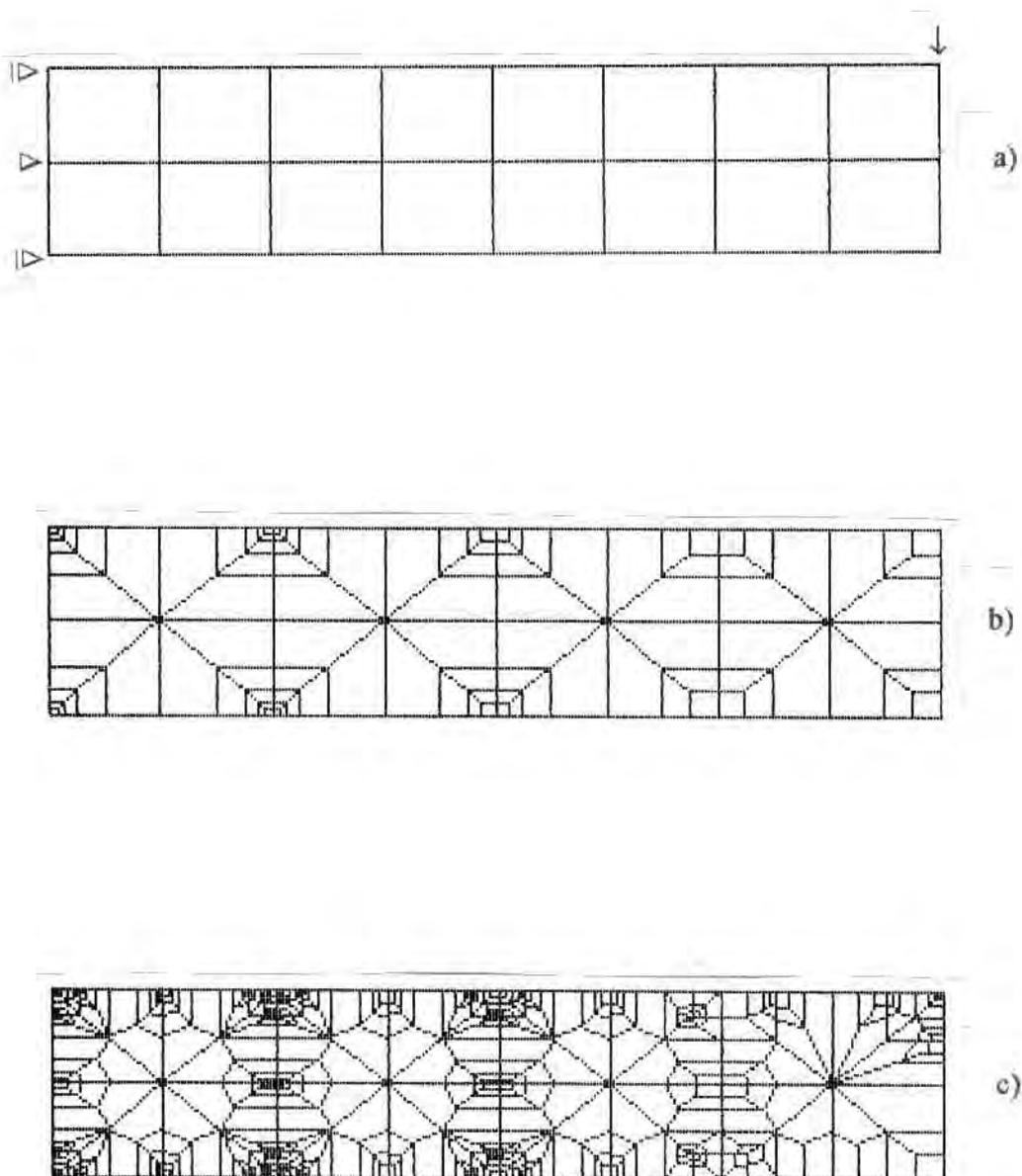


Figura 5.1 - Viga engastada livre. a) Malha inicial, 69 nós, 16 elementos. b) 1º refinamento, 153 nós, 112 elementos. c) 2º refinamento, 766 nós, 652 elementos.

Exemplo 2: Viga engastada livre onde foi estabelecido um erro relativo máximo $\bar{\eta}_T = 5\%$ (expressão 4.9). A figura 5.3 corresponde à malha inicial, sendo que a figura 5.3b mostra a tensão σ_x (expressão 3.22) e a figura 5.3c, o erro de energia $\hat{\eta}$ (expressão 3.34). A figura 5.4 mostra o 1º refinamento, sendo que a figura 5.4b mostra a tensão σ_x e a figura 5.4c, o erro de energia. A figura 5.5 corresponde ao 2º refinamento, sendo que a figura 5.5b mostra a tensão σ_x e a figura 5.5c o erro de energia.

Por questão de espaço, na legenda das figuras de distribuição de tensões e erros dos exemplos seguintes será escrito apenas a tensão e o erro que estão sendo mostrados e não distribuição.

Tabela 5.2 - Valores máximos de tensão σ_x ($\sigma_{x \max}$) e do erro de energia aproximado $\hat{\eta}$ ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 2, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.3a.

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{x \max}$ (kN/m ²)	$\hat{\eta}_{\max}$ (%)	$\hat{\eta}_{\text{med}}$ (%)
Inicial	154	126	$4,8 \times 10^5$	18	6,33
1º Refino	415	362	$4,9 \times 10^5$	16	2,55
2º Refino	853	778	$5,0 \times 10^5$	12	0,96
Sol. Teórica			$5,0 \times 10^5$		

Observações: Pode-se notar que, ao longo das etapas de refinamento, a tensão σ_x máxima se aproxima da tensão teórica correspondente de 5×10^5 kN/m² e o erros máximo e médio diminuem. No 2º refinamento é atingida a tensão máxima teórica e a porcentagem de erro só é maior que a porcentagem especificada $\bar{\eta}_T$ nos pontos de aplicação da carga concentrada e no ponto central de apoio. Isto acontece porque nesses pontos há uma tensão infinita devido à carga ser concentrada. Para efeito de comparação, o processo que cria nós irregulares (SILVA²⁴) obteve neste exemplo:

160 elementos: $\hat{\eta}_T$ (erro relativo aproximado global) = 17,2%

640 elementos: $\hat{\eta}_T = 8,8\%$

O erro relativo aproximado global $\hat{\eta}_T$ vem da expressão (3.35) enquanto que $\hat{\eta}_{\max}$ é o valor máximo de erro obtido após ser feita a normalização das normas de erro (Etapa 3 do Quadro 3.1). Por isso, a comparação desses dois valores deve ser feita de forma aproximada.

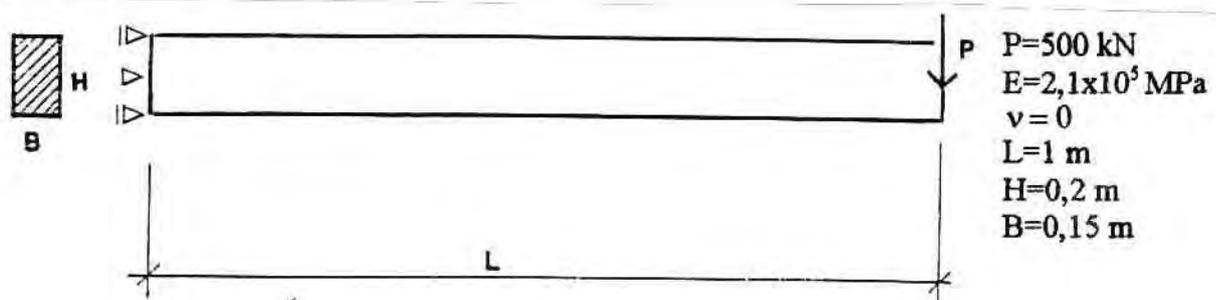


Figura 5.2 - Viga engastada livre. Desenho esquemático.

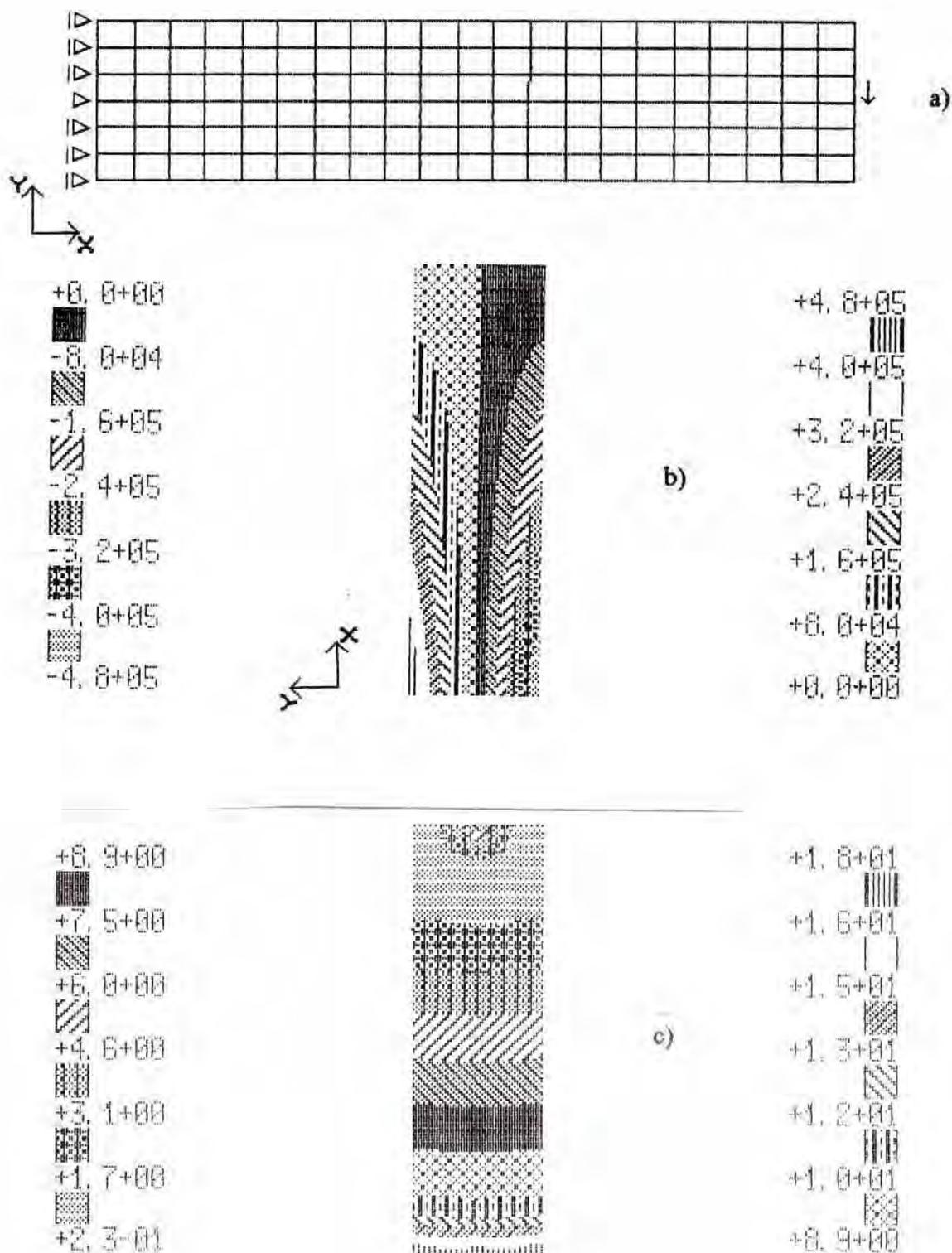


Figura 5.3 - Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Malha, 154 nós, 126 elementos. b) Tensão σ_x . c) η (%).

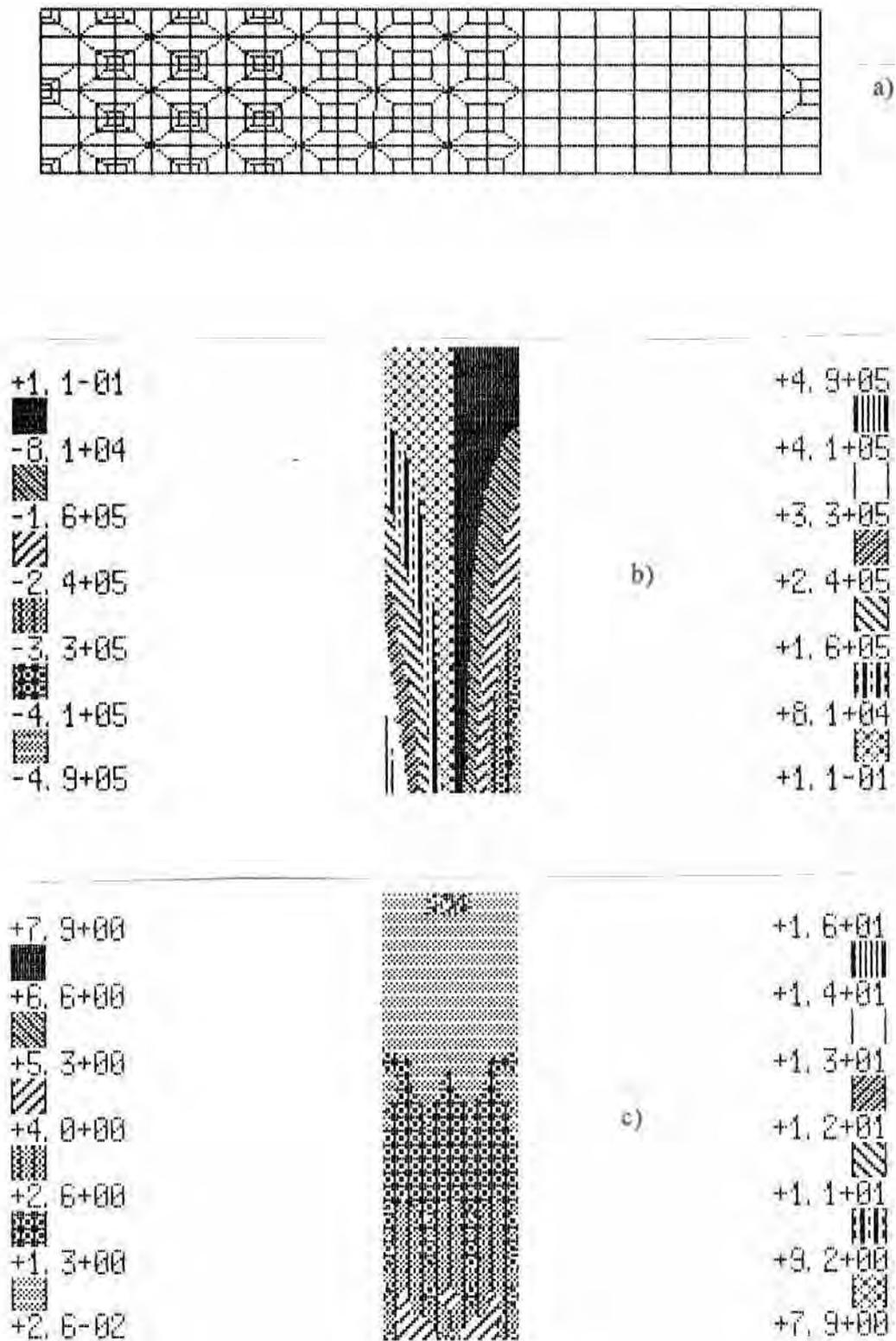


Figura 5.4 - Viga engastada livre. 1º refinamento. a) Malha, 415 nós, 362 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

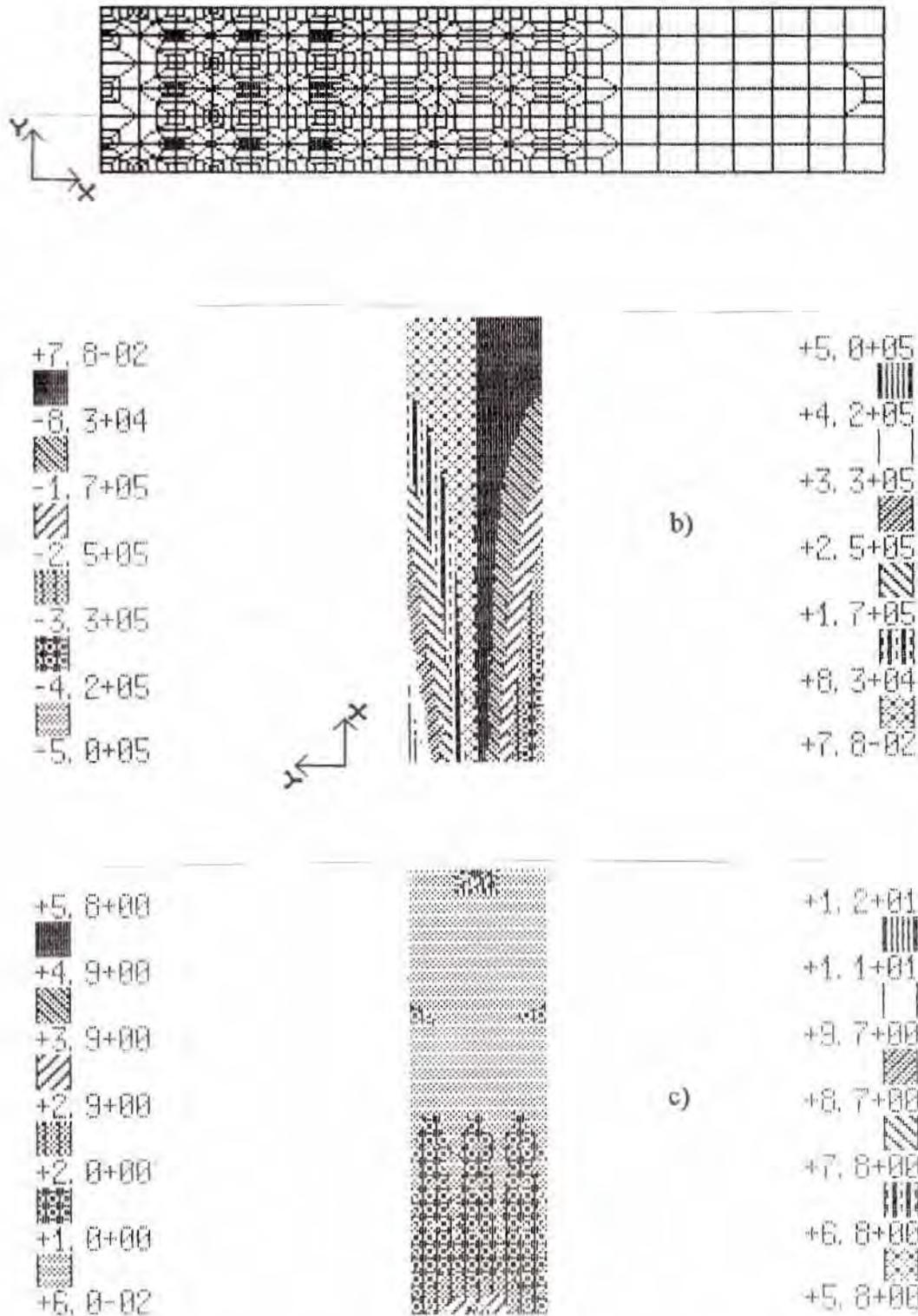


Figura 5.5 - Viga engastada livre. 2º refinamento. a) Malha, 853 nós, 778 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

Exemplo 3: Retângulo vazado (Figura 5.6) do qual se discretiza apenas um quarto (região em L hachurada) devido a dupla simetria geométrica e de carregamento. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.7 representa a malha inicial, a figura 5.8 o 1º refinamento, a figura 5.9 o 2º refinamento, a figura 5.10 o 5º refinamento, a figura 5.11 o 6º refinamento e a figura 5.12 mostra os resultados obtidos com uma malha uniforme mais fina para permitir a comparação de resultados.

Tabela 5.3 - Tensão equivalente máxima ($\sigma_{eq\ max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 3, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.7a. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo aproximado global ($\hat{\eta}_T$) obtidos no processo que cria nós irregulares (SILVA²⁴).

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{eq\ max}$ (Kg/cm ²)	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)	NGL	$\hat{\eta}_T$ (%)
Inicial	65	48	4,8	13	4,91	120	18,8
1º Refino	165	132	5,3	9,6	2,59	392	11,1
2º Refino	275	232	7,2	7,2	0,98	966	7,3
5º Refino	406	362	7,2	6,0	0,68	1380	6,1
6º Refino	622	508	8,6	5,4	0,47	1780	5,4
Malha fina	1281	1200	8,7	3,6			

Obs: A tensão equivalente σ_{eq} é calculada, para todos os exemplos em que ela é apresentada, pela teoria de Huber-von Mises.

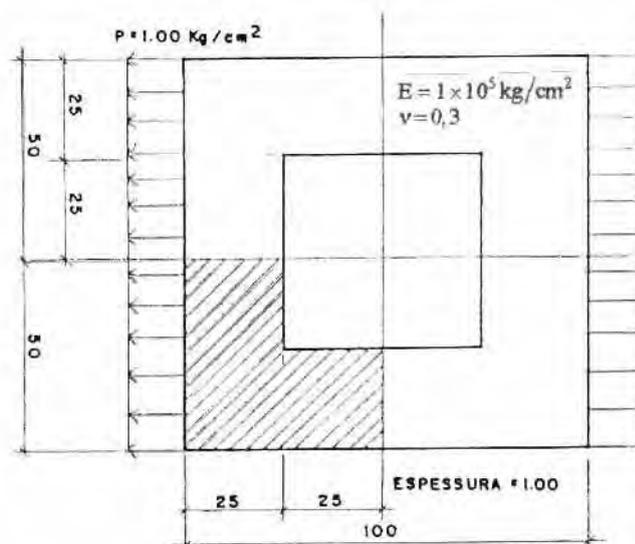


Figura 5.6 - Retângulo vazado. Desenho esquemático.

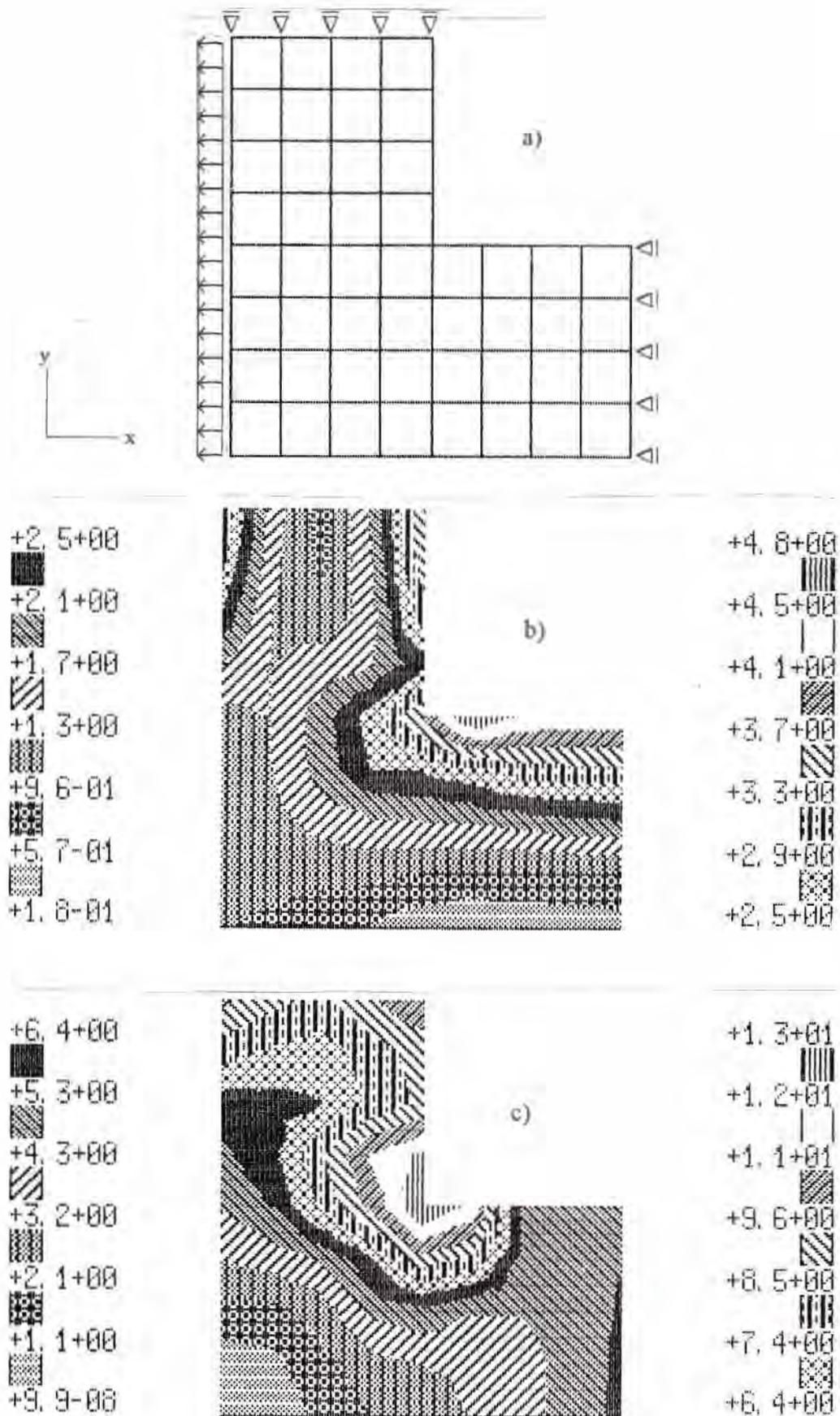


Figura 5.7 - Região em L. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Malha, 65 nós, 48 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).

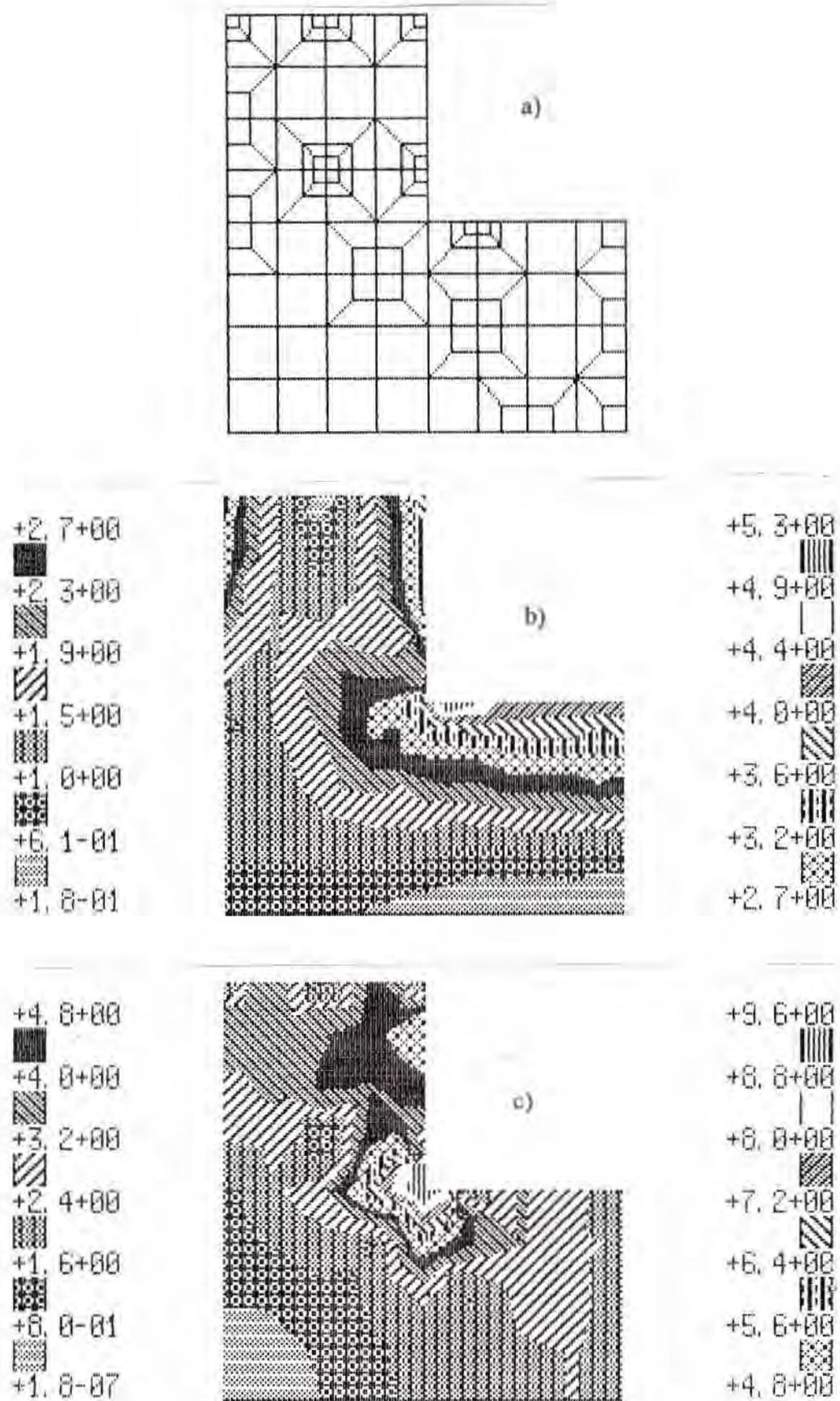


Figura 5.8 - Região em L. 1º refinamento. a) Malha, 165 nós, 132 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%)

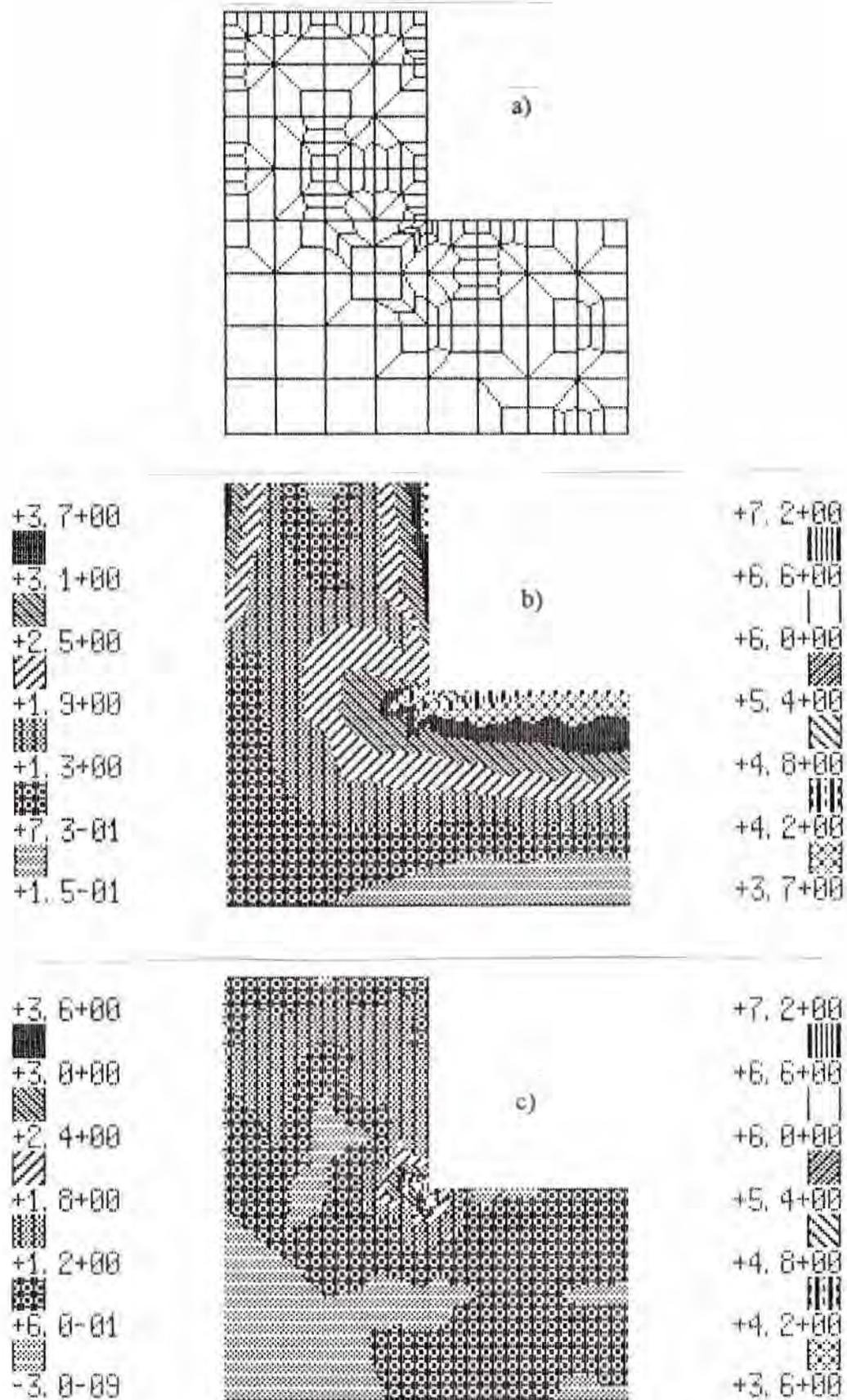


Figura 5.9 - Região em L. 2º refinamento. a) Malha, 275 nós, 232 elementos. b) σ_{nq} . c) $\hat{\eta}(\%)$.

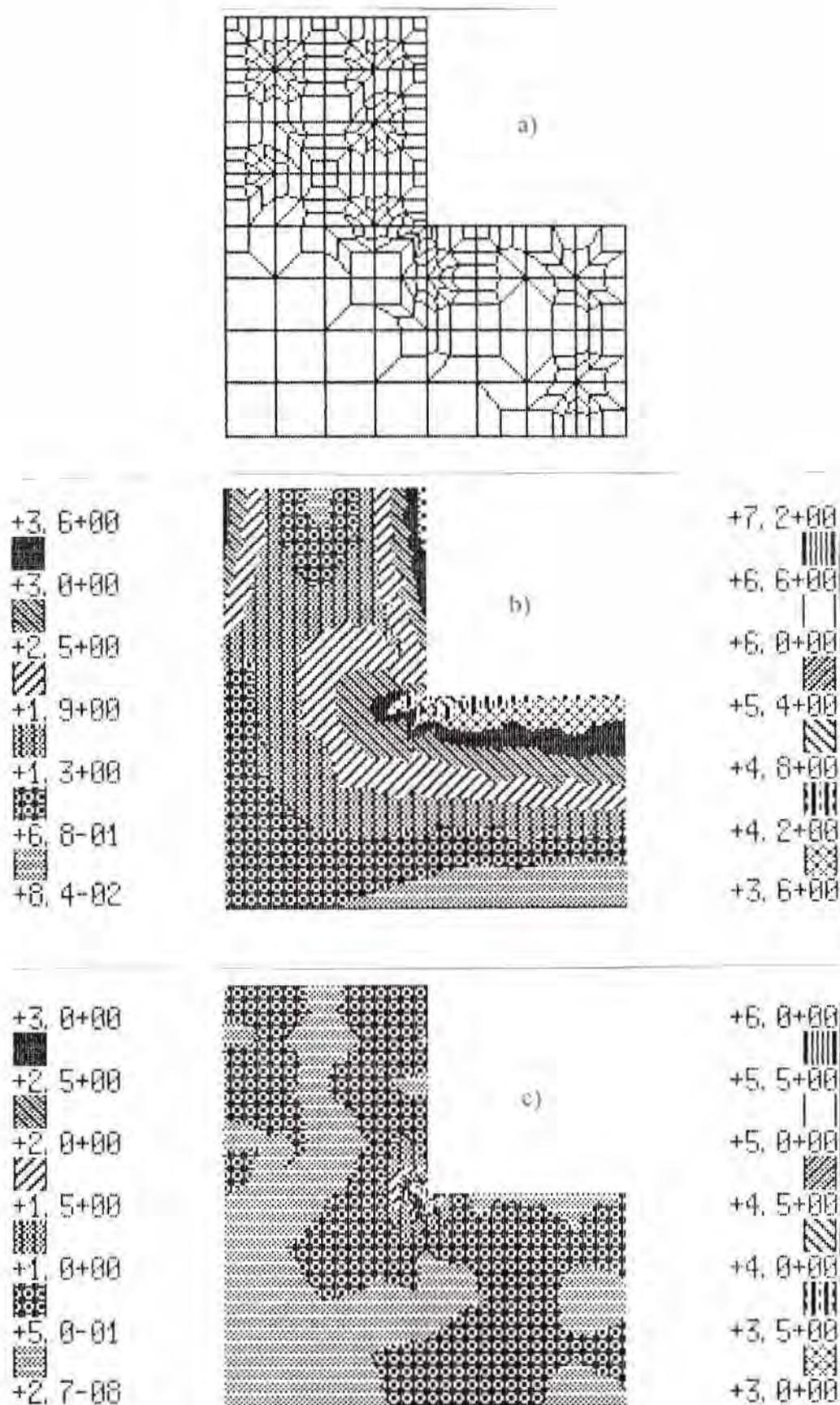


Figura 5.10 - Região em L. 5^o refinamento. a) Malha, 406 nós, 362 elementos. b) σ_{eq} . c) $\bar{\eta}$ (%).

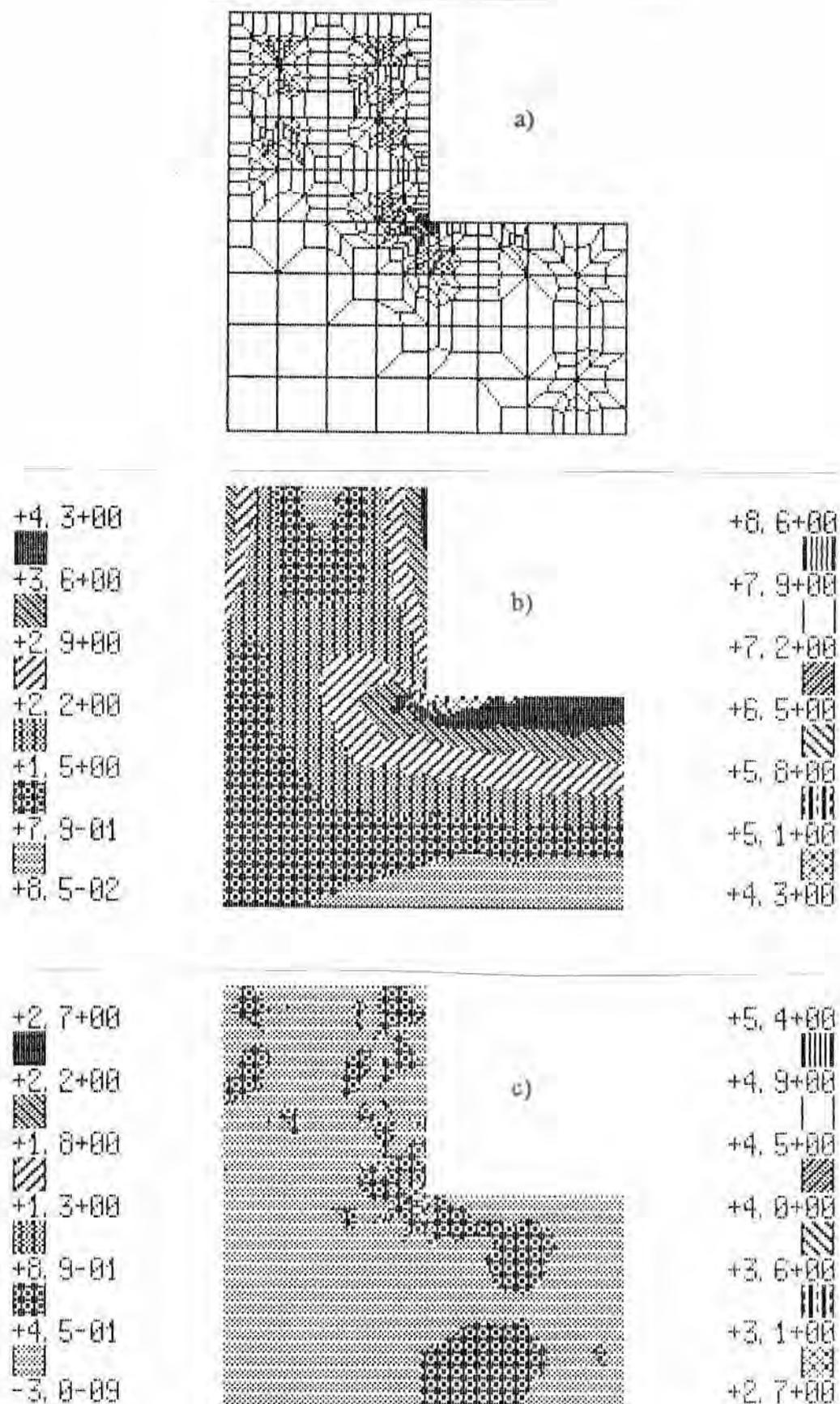


Figura 5.11 - Região em L. 6^o refinamento. a) Malha, 622 nós, 508 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).

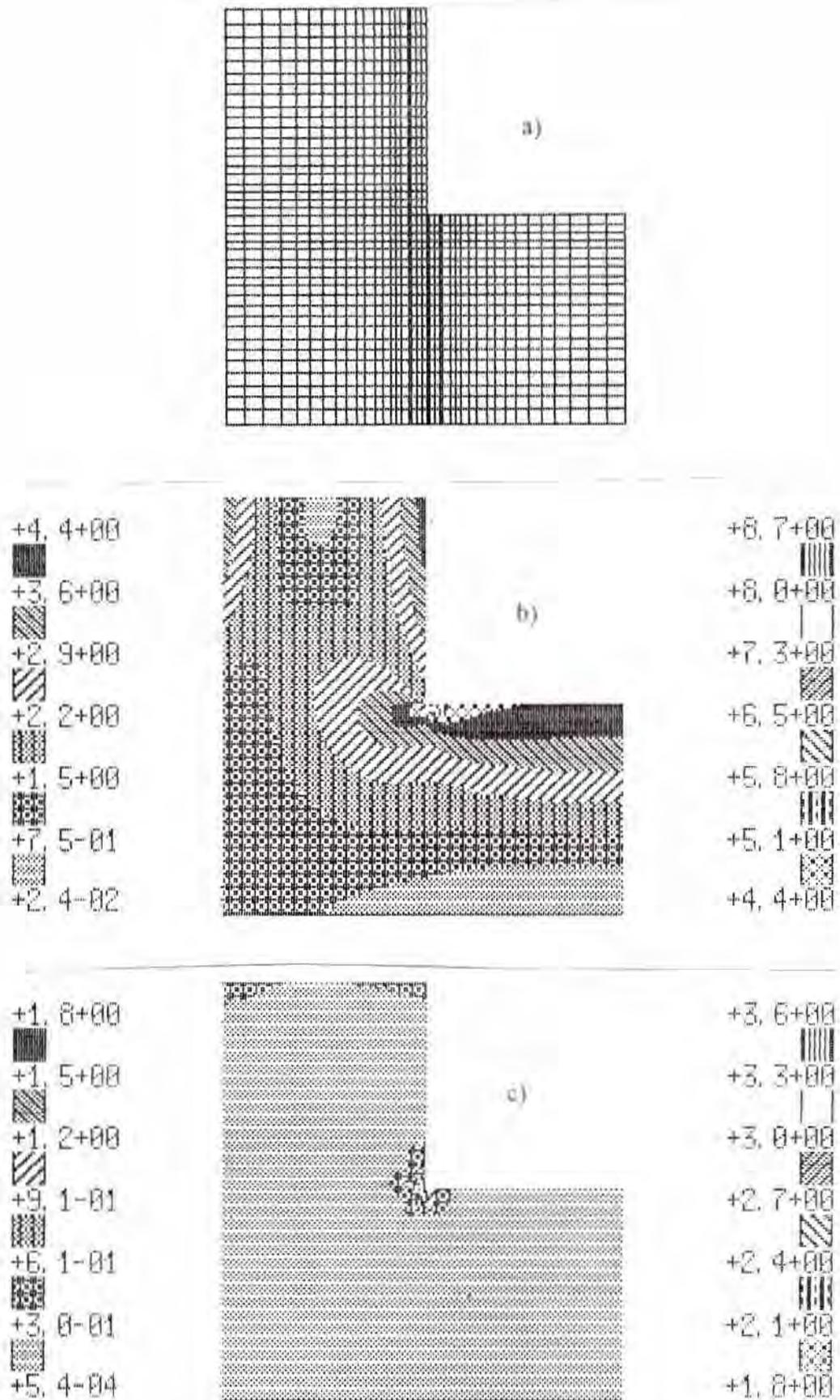


Figura 5.12 - Região em L. Malha fina. a) Malha, 1281 nós, 1200 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}(\%)$.

Observações: Comparando o 6º refino que tem $\hat{\eta}_{max} = 5,4\%$ com o erro obtido por SILVA²⁴ na malha 5 da Figura 5.18 da página 73 $\hat{\eta}_T = 5,5\%$ nota-se que eles são bem próximos. Deve-se mencionar que a quantidade de graus de liberdade (NGL) necessária para se atingir este grau de precisão no processo de SILVA²⁴ é NGL=1780 enquanto que este processo necessitou de NGL=1244. Observa-se também que $\sigma_{eq,max}$ e $\hat{\eta}_{max}$ se aproximam dos valores obtidos com a malha fina à medida em que vai se refinando a malha.

A seguir é feita a tentativa da utilização deste programa de refinamento por nó em conjunto com um programa que regulariza a malha (ALQUATI e GROEHS¹). O programa de regularização serve para diminuir, a partir de um índice, a distorção dos elementos. Ele modifica a posição dos nós a fim de obter um menor índice de distorção. Serão feitos dois testes. No primeiro, o programa de regularização será aplicado ao longo de todas as etapas de refinamento. Por isso, o número de nós e elementos de cada malha pode ser diferente daquele existente quando não se faz a regularização.

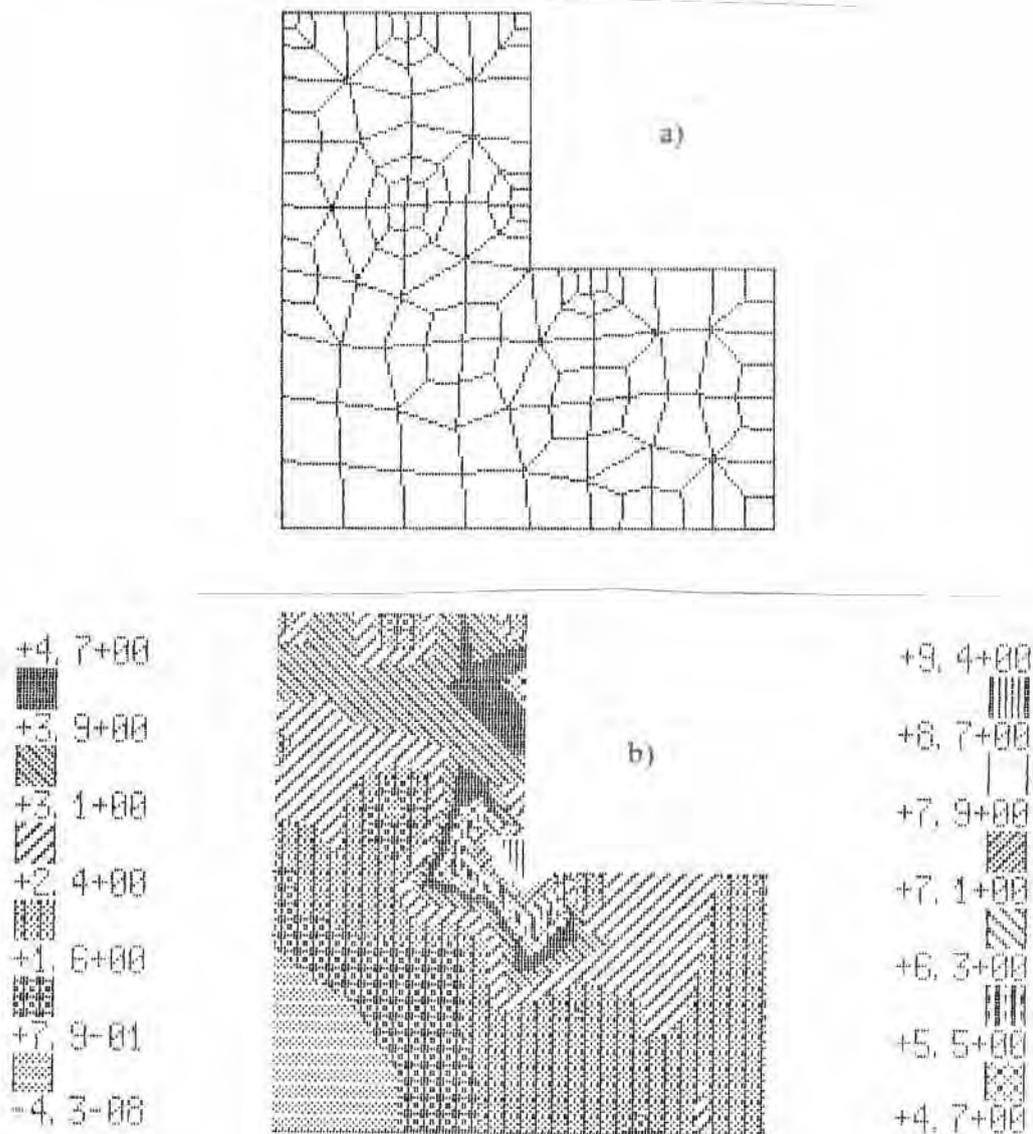


Figura 5.13 - Região em L. 1º refinamento. a) Malha regularizada, 165 nós, 132 elem. b) $\hat{\eta}$ (%).

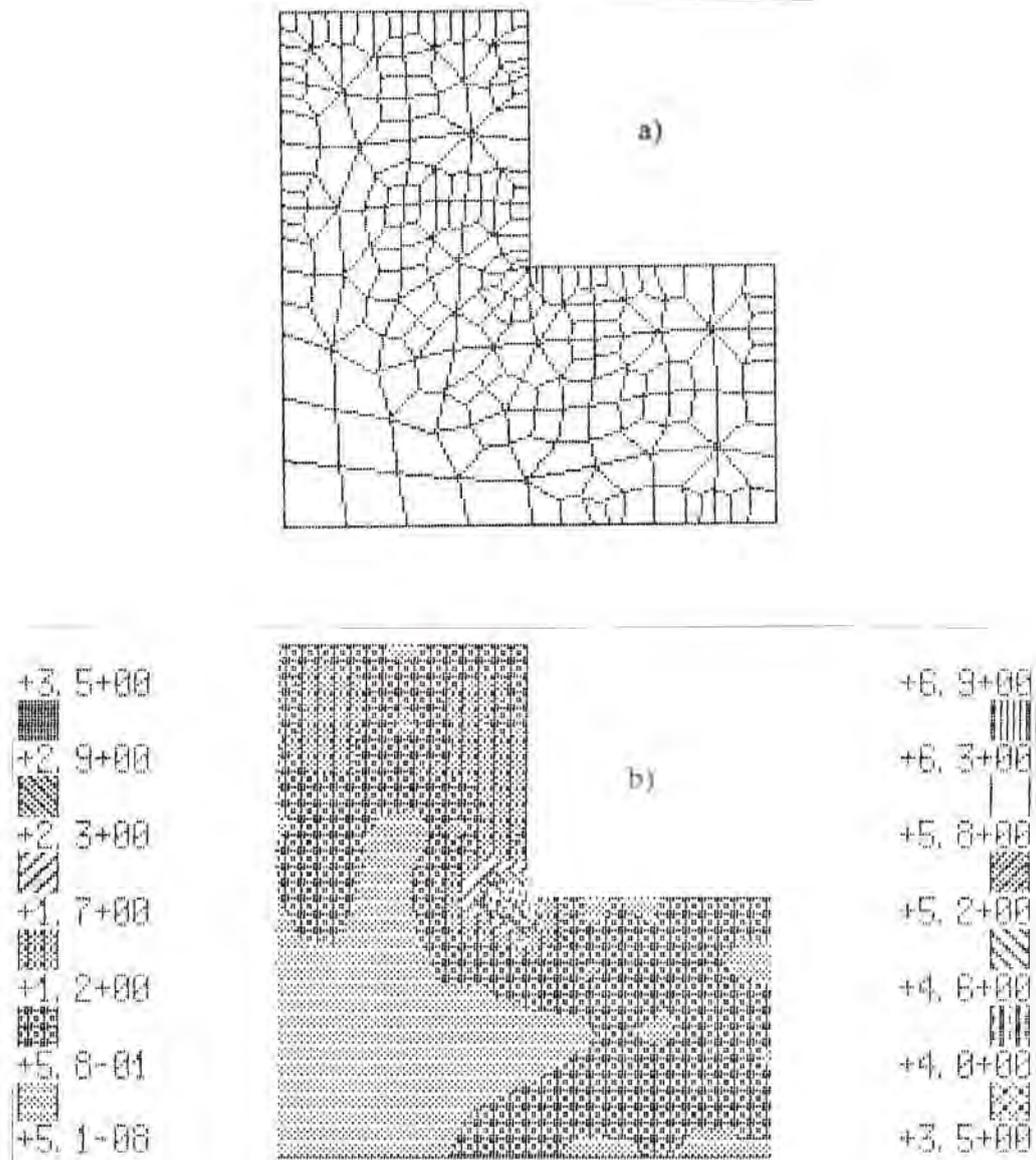


Figura 5.14 - Região em L. 2^o refinamento. a) Malha regularizada, 285 nós, 240 elem. b) $\hat{\eta}(\%)$.

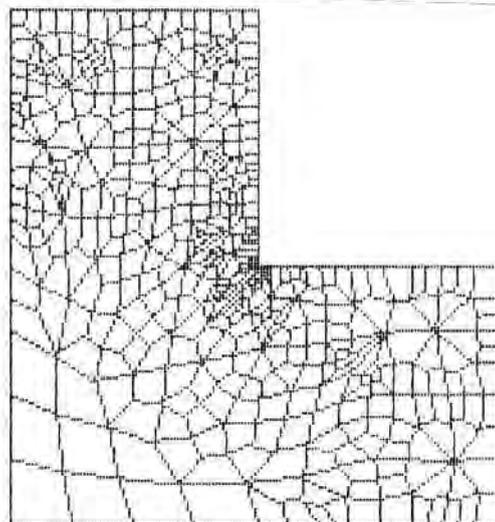


Figura 5.15 - Região em L. 5^o refinamento. Malha regularizada, 552 nós, 494 elementos.

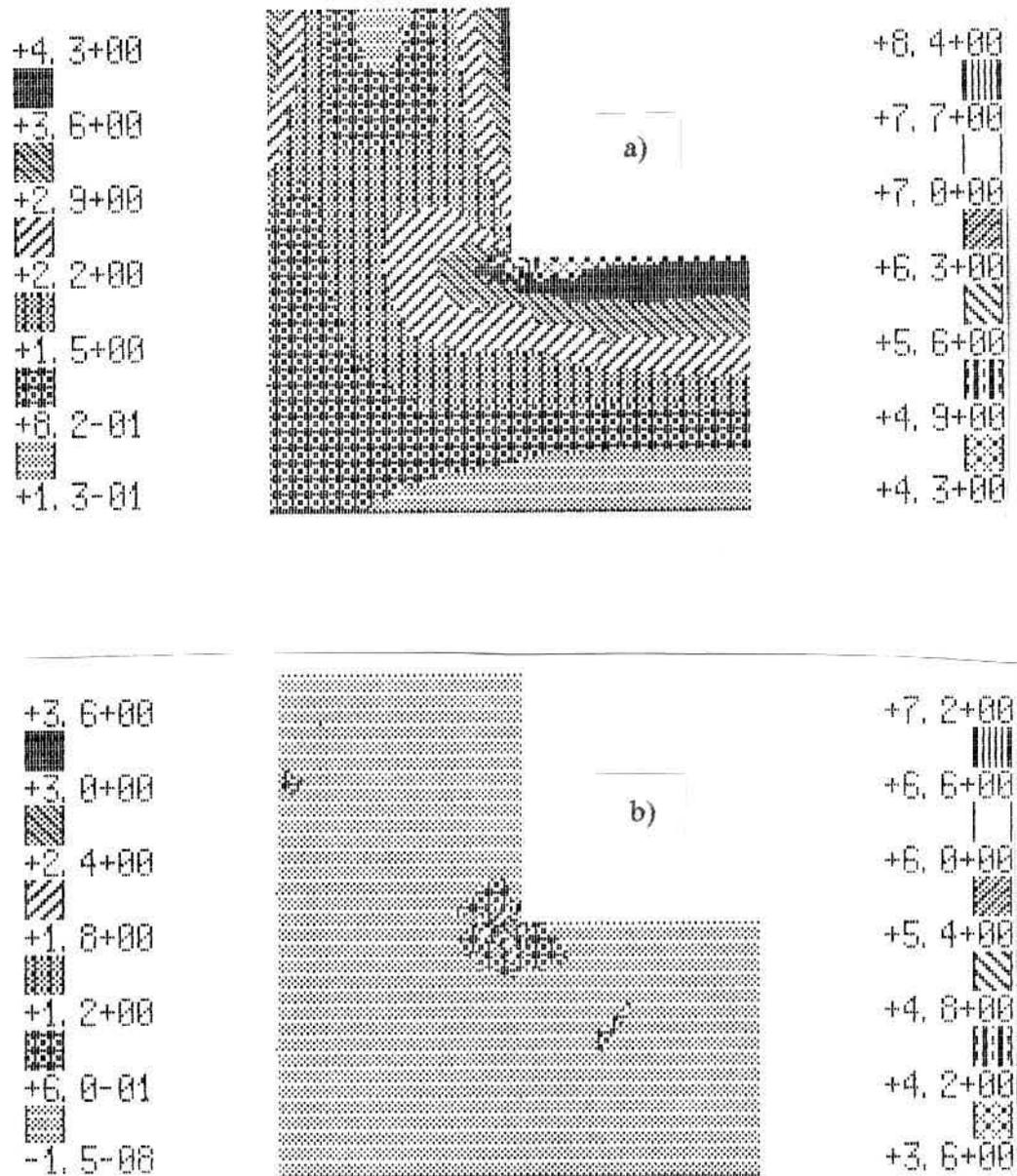


Figura 5.16 - Região em L. 5º refinamento. Malha regularizada. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}(\%)$.

Comparando a figura 5.16a com as figuras 5.10b e 5.11b nota-se que a distribuição de tensões melhorou sensivelmente ao aplicar o programa de regularização, apesar do erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ ter aumentado no 5º refinamento (ver tabela 5.4). O erro médio $\hat{\eta}_{med}$ tem valores mais baixos quando se faz a regularização, mostrando que esse processo é eficiente.

Tabela 5.4 - Comparação dos resultados obtidos no exemplo 3 ao aplicar o programa de regularização ao longo das etapas de refinamento com os resultados quando o programa não é usado.

Malha	Com regularização					Sem regularização				
	Nós	Elem.	$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)	Nós	Elem.	$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)
1º Refino	165	132	5,2	9,4	2,25	165	132	5,3	9,6	2,59
2º Refino	285	240	6,7	6,9	0,83	275	232	7,2	7,2	0,98
5º Refino	552	494	8,4	7,2	0,47	406	362	7,2	6,0	0,68

Agora será feito um teste aplicando o programa de regularização diretamente sobre a malha de uma determinada etapa de refinamento e não ao longo das etapas de refinamento como foi feito anteriormente. O número de nós e elementos de cada malha será o mesmo que existe quando não é feita a regularização. A tabela 5.5 traz os resultados obtidos com este procedimento. Os resultados do 1º refinamento são os mesmos da tabela 5.4.

Tabela 5.5 - Comparação dos resultados obtidos no exemplo 3 ao aplicar o programa de regularização em uma determinada etapa de refinamento com os resultados quando o programa não é usado.

Malha	Nós	Elem.	Com regularização			Sem regularização		
			$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)	$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)
2º Refino	275	232	6,8	7,0	0,86	7,2	7,2	0,98
5º Refino	406	362	6,9	5,6	0,55	7,2	6,0	0,68

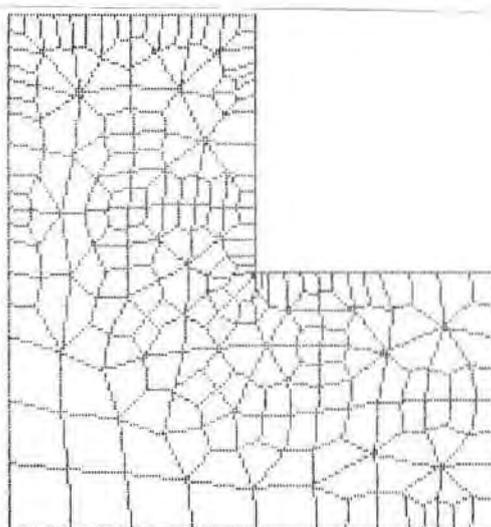


Figura 5.17 - Região em L. 2º refinamento. Malha regularizada na etapa, 275 nós, 232 elementos.

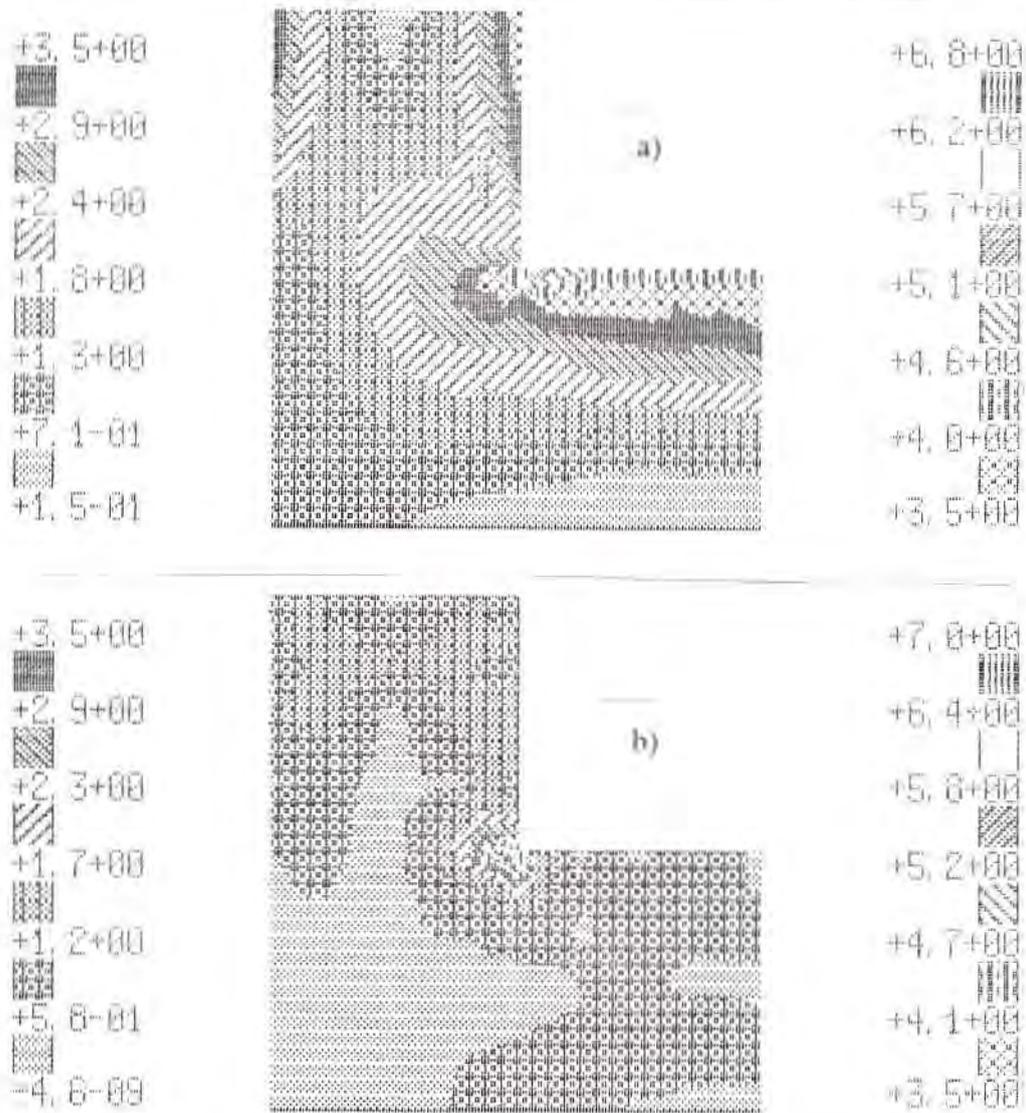


Figura 5.18 - Região em L. 2º refinamento. Malha regularizada na etapa. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}(\%)$.

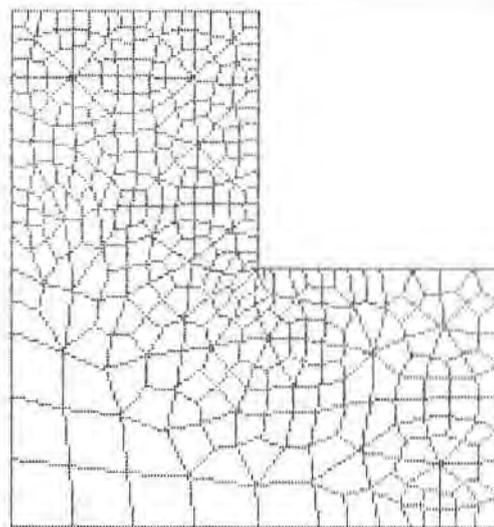


Figura 5.19 - Região em L. 5º refinamento. Malha regularizada na etapa, 406 nós, 362 elementos.

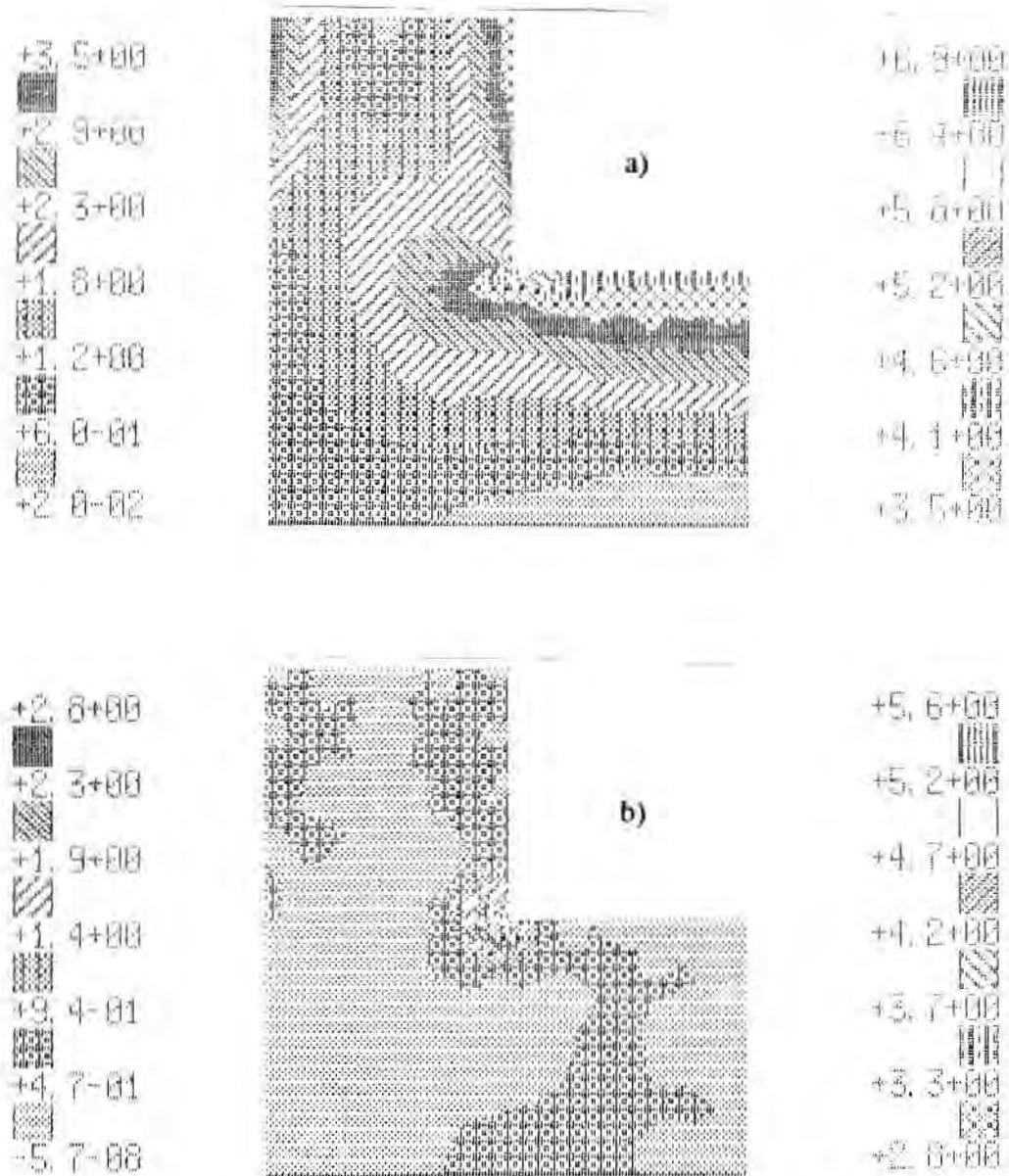


Figura 5.20 - Região em L. 5^o refinamento. Malha regularizada na etapa. a) σ_{eq} . b) $\hat{\eta}(\%)$.

Comparando os resultados de erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ e médio $\hat{\eta}_{med}$ da tabela 5.5, nota-se que a regularização na etapa trouxe uma melhora nos resultados. O mesmo acontece ao comparar a distribuição de tensões da figura 5.20a com a da figura 5.10b. Em relação às duas formas de se realizar a regularização, ao longo de todas as etapas ou em uma determinada etapa de refinamento, pode-se dizer que o tanto o erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ como o médio $\hat{\eta}_{med}$ são mais baixos quando se regulariza a malha em uma determinada etapa. Por outro lado, a distribuição da tensões da figura 5.16a, correspondente à regularização em todas as etapas, parece melhor que a da figura 5.20a. Em compensação o erro máximo aumentou do 2^o para o 5^o refinamento.

5.1.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós

Exemplo 4: Viga simplesmente apoiada. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.21 mostra um desenho esquemático da estrutura, a figura 5.22 mostra a malha inicial, a figura 5.23 o 1º refinamento e a figura 5.24 o 2º refinamento.

Tabela 5.6 - Tensão Sigma X máxima ($\sigma_{x \max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 4, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.22a.

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{x \max}$ (kN/m ²)	$\hat{\eta}_{\max}$ (%)	$\hat{\eta}_{\text{med}}$ (%)
Inicial	69	16	$1,2 \times 10^5$	12,1	3,36
1º Refino	83	20	$1,2 \times 10^5$	12,3	3,20
2º Refino	111	28	$1,2 \times 10^5$	11,3	1,96
Sol. Teórica			$1,25 \times 10^5$		

Observando a tabela acima, vê-se que os valores de tensão $\sigma_{x \max}$ estão próximos da solução teórica. Como se pode notar nas figuras seguintes, os valores de erro ao longo da estrutura diminuem à medida que a malha vai sendo refinada, exceto nos apoios e no ponto de aplicação da carga concentrada onde o erro se concentra. Segundo TEZUKA²⁶, isso acontece devido ao chamado Paradoxo de Babuska. A existência da carga concentrada no meio da viga faz com que o problema não fique bem definido no seu domínio e o contexto matemático do problema seja incompatível.

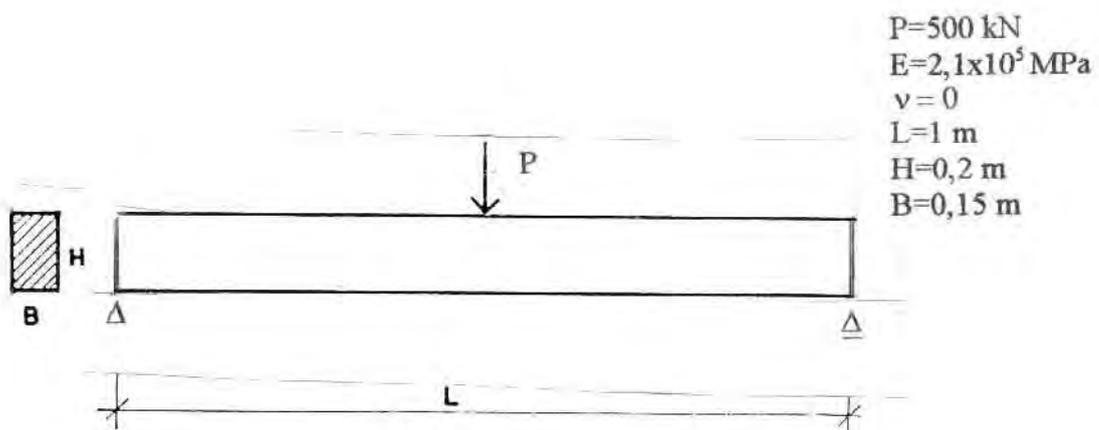


Figura 5.21 - Viga simplesmente apoiada. Desenho esquemático.

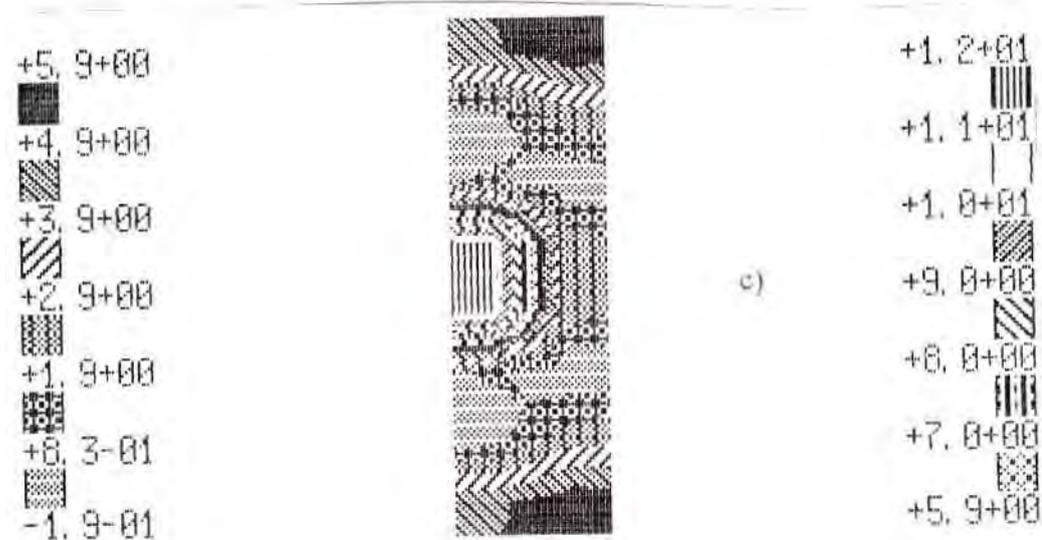
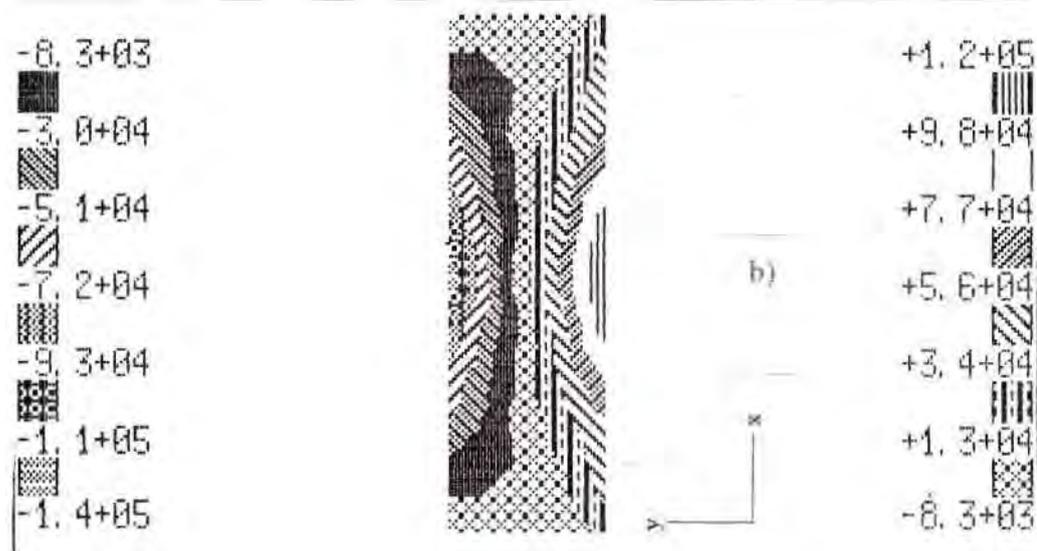
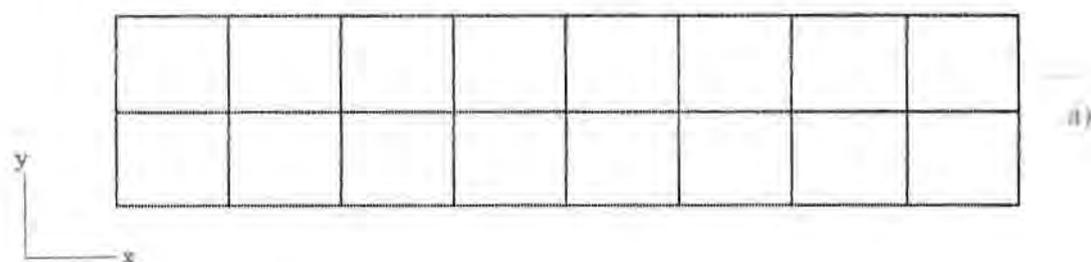


Figura 5.22 - Viga simplesmente apoiada. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 69 nós, 16 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

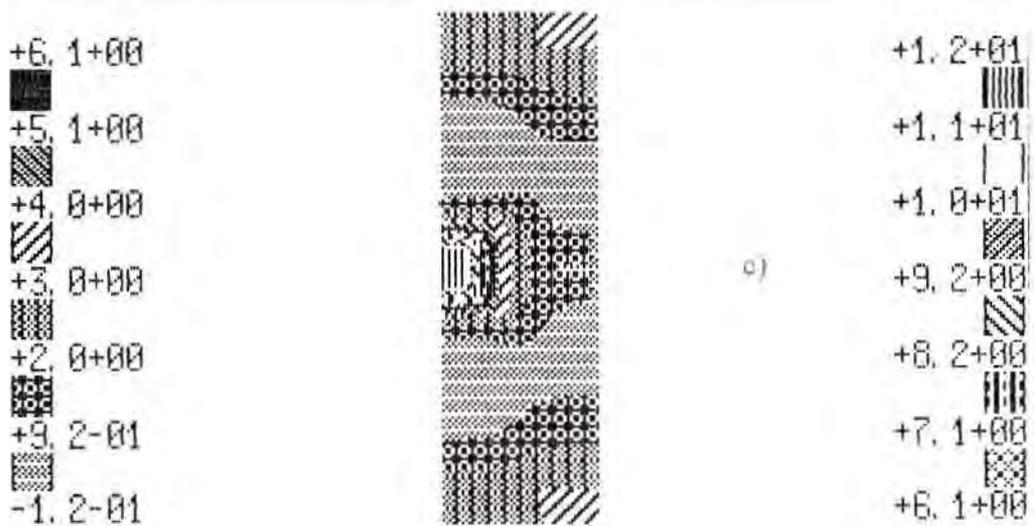
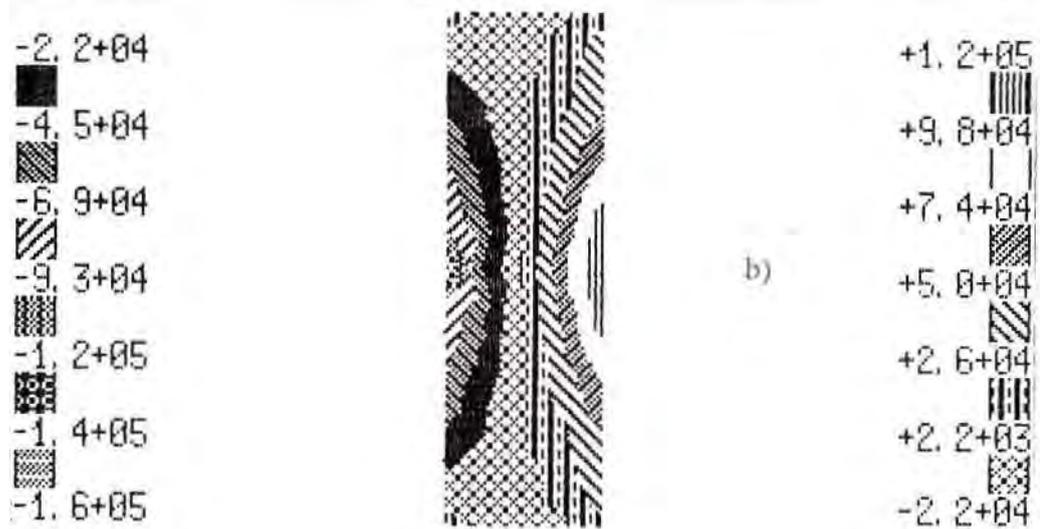
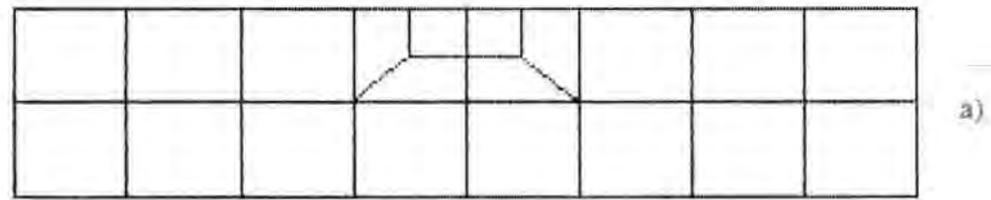


Figura 5.23 - Viga simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Malha, 83 nós, 20 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

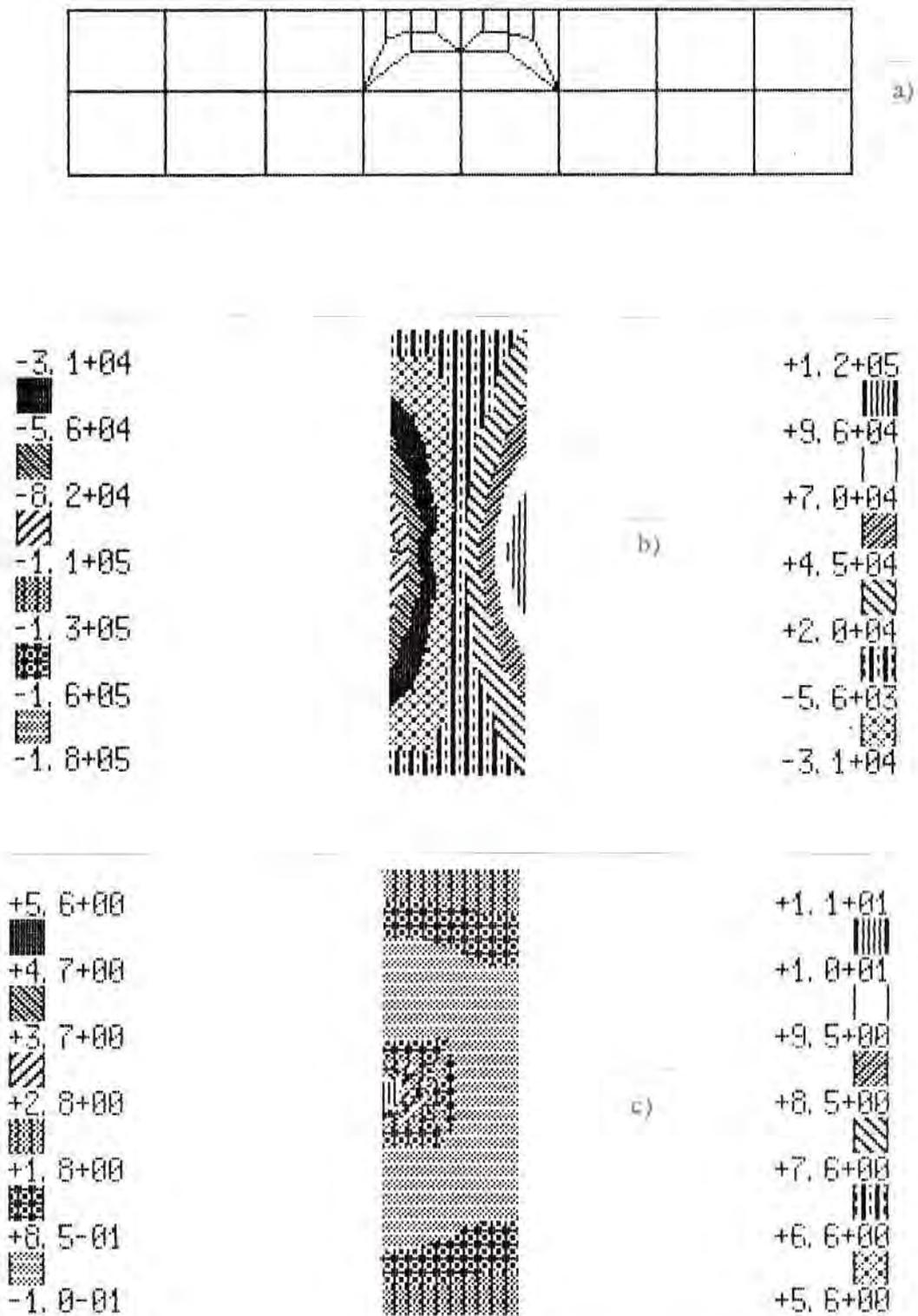


Figura 5.24 - Viga simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Malha, 111 nós, 28 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}(\%)$.

Exemplo 5: Mesma região L do exemplo 3 só que agora utilizando elementos quadriláteros de 8 nós. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 1\%$. A figura 5.25 mostra um desenho esquemático da estrutura, a figura 5.26 representa a malha inicial, a figura 5.27 o 1º refinamento, a figura 5.28 o 2º refinamento e a figura 5.29 mostra os resultados obtidos com uma malha uniforme mais fina para permitir a comparação de resultados.

Tabela 5.7 - Valores máximos de tensão equivalente ($\sigma_{eq\ max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 5, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.26a.

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)
Inicial	106	27	5,5	7,2	1,1
1º Refino	196	55	6,3	5,6	0,8
2º Refino	272	79	9,3	3,1	0,3
Malha fina	981	300	9,5	2,5	0,044

Observações: Observando a tabela acima, vê-se que os valores de tensão $\sigma_{eq\ max}$ (Kg/cm^2) se aproximam da solução obtida com a malha fina à medida em que vai se refinando a estrutura. Ao mesmo tempo, tanto o erro máximo como o erro médio vão diminuindo, este chegando a valores extremamente baixos.

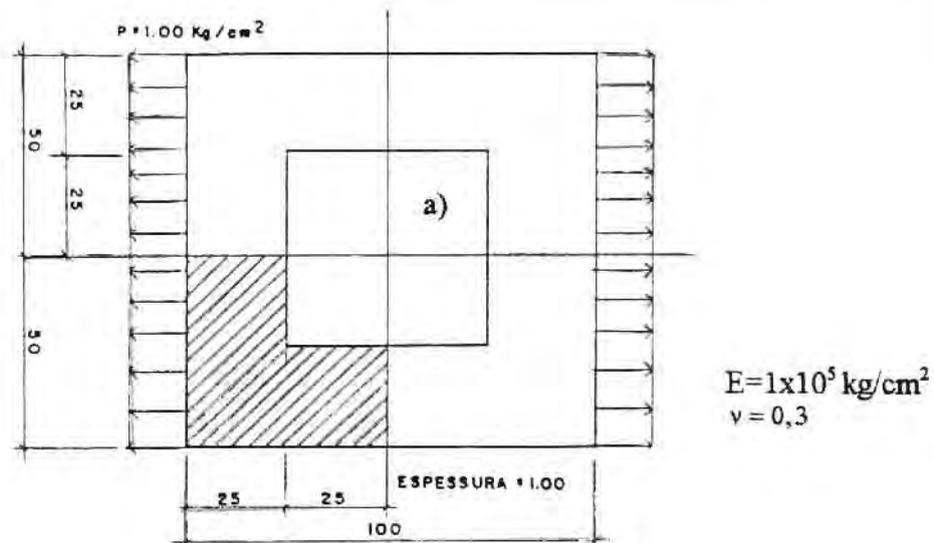


Figura 5.25 - Retângulo vazado. Desenho esquemático.

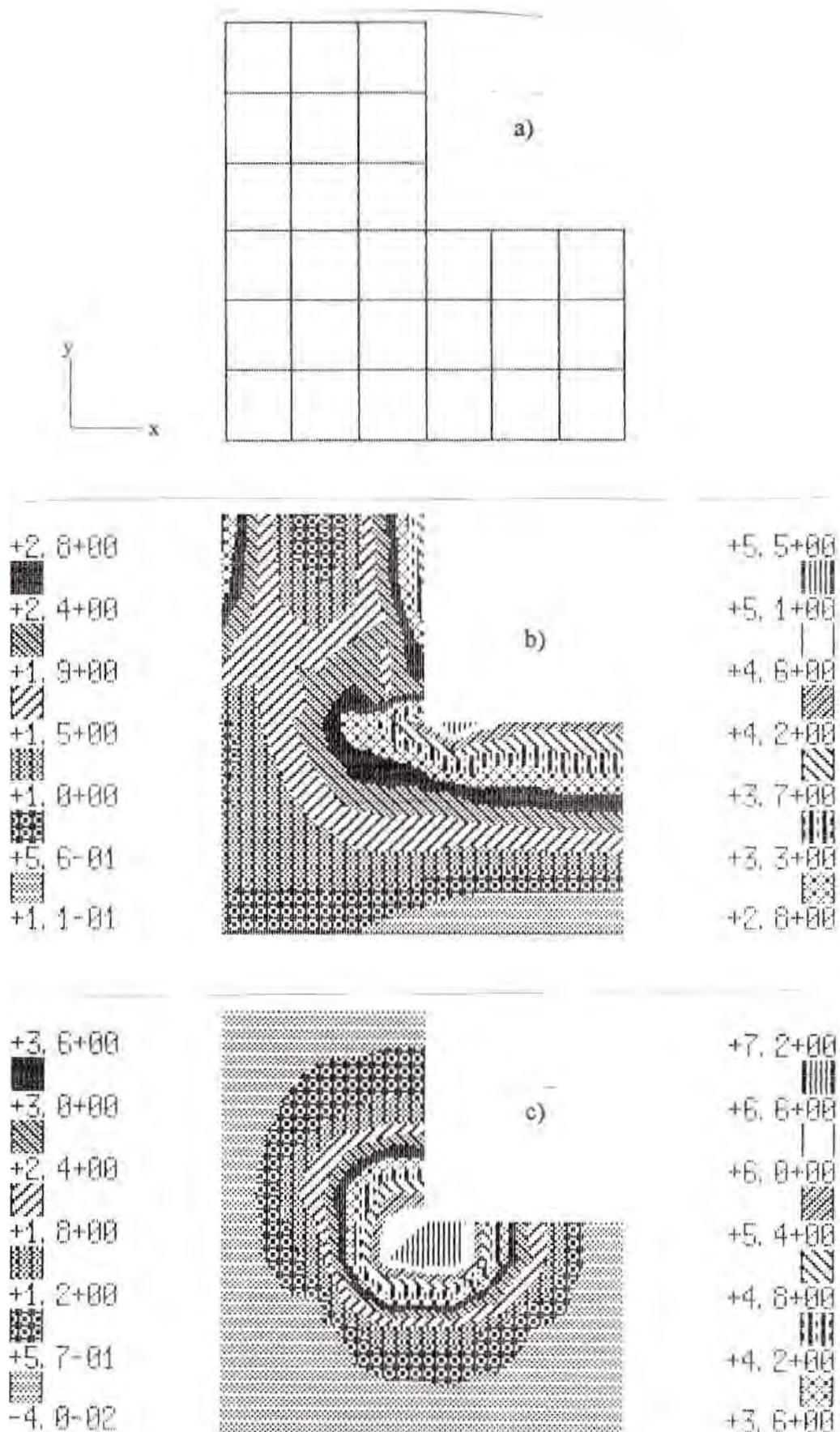


Figura 5.26 - Região em L. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 106 nós, 27 elementos. b) σ_{eq} - c) $\hat{\eta}$ (%).

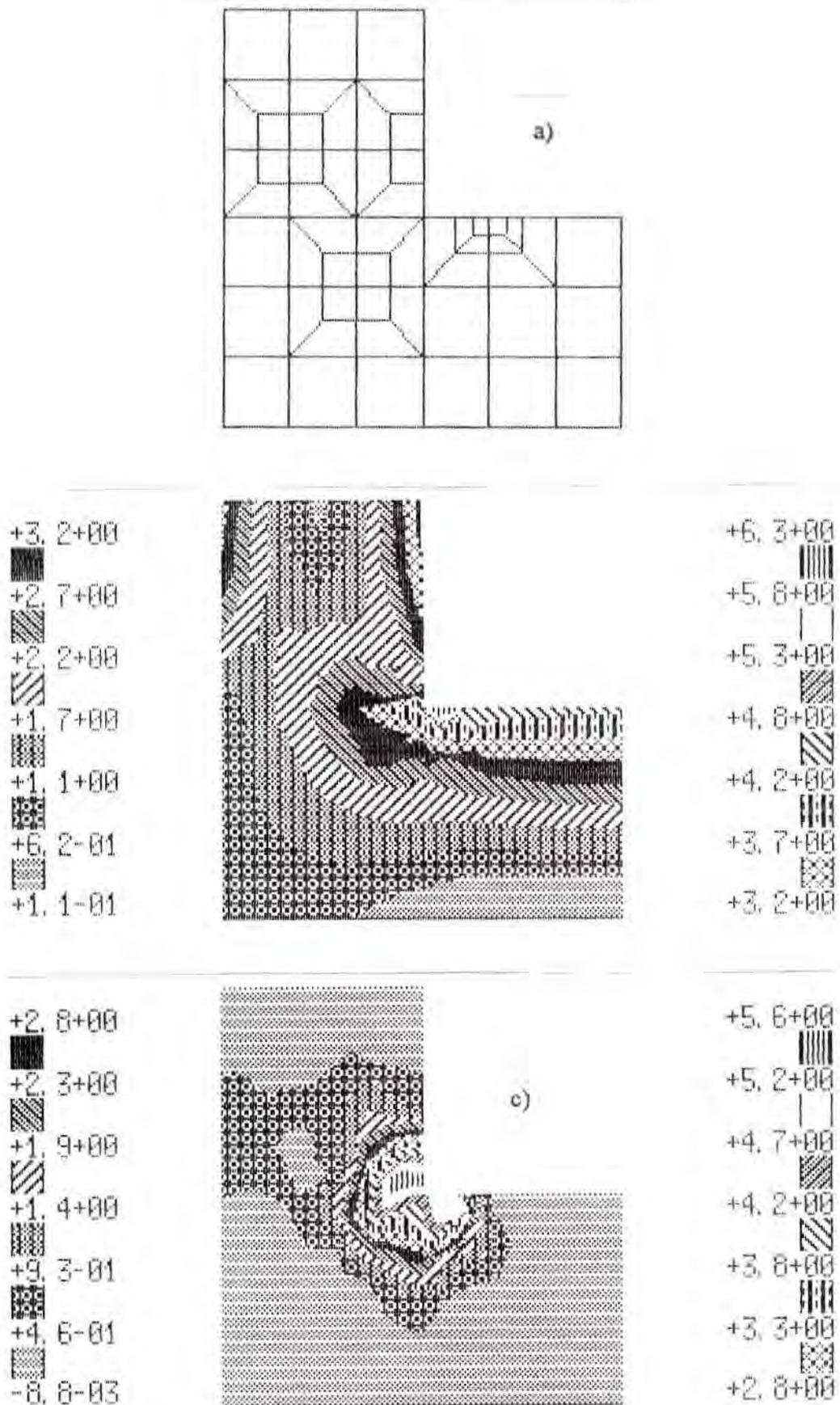


Figura 5.27 - Região em L. 1º refinamento. a) Malha, 196 nós, 55 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).

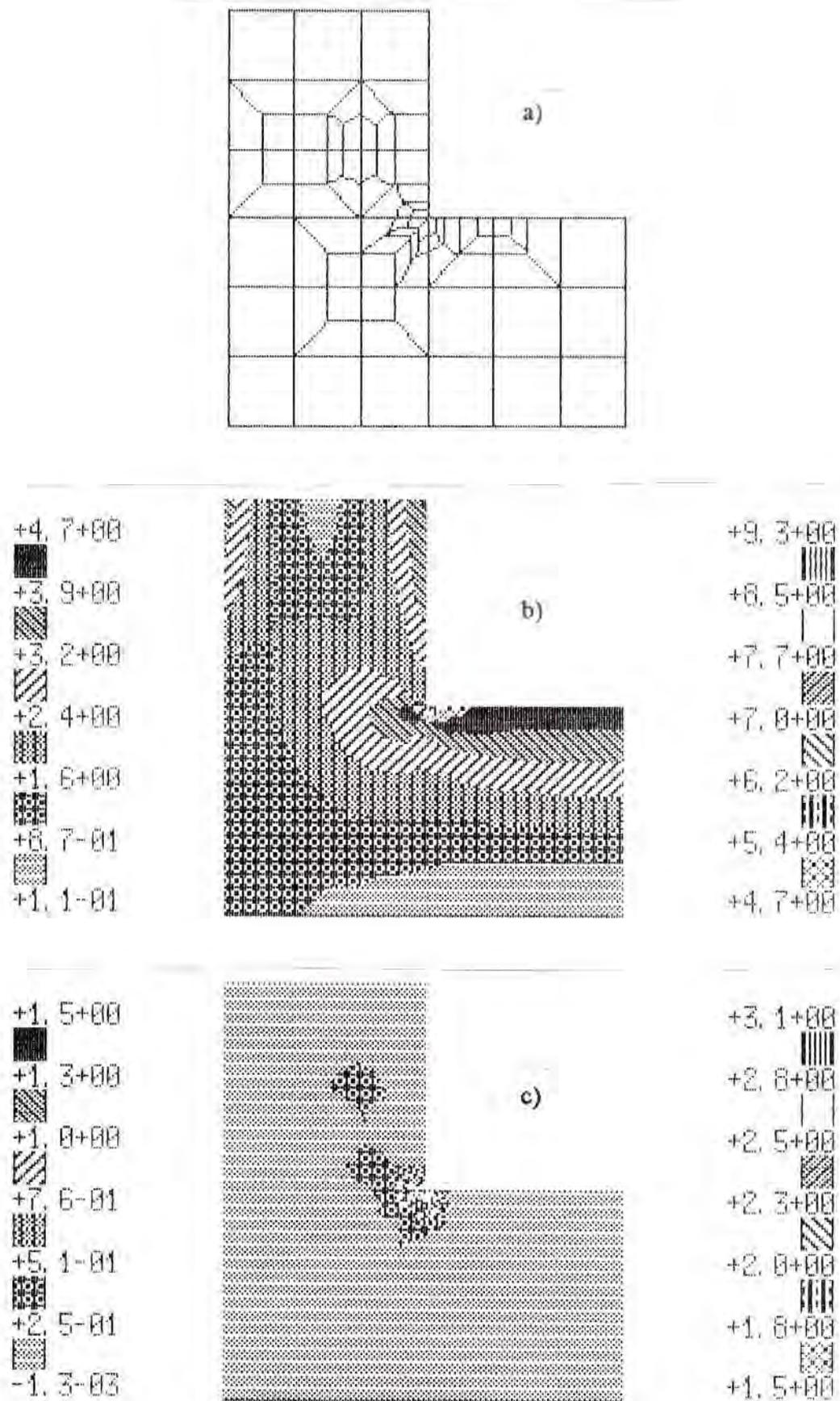


Figura 5.28 - Região em L. 2^o refinamento. a) Malha, 272 nós, 79 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}$ (%).

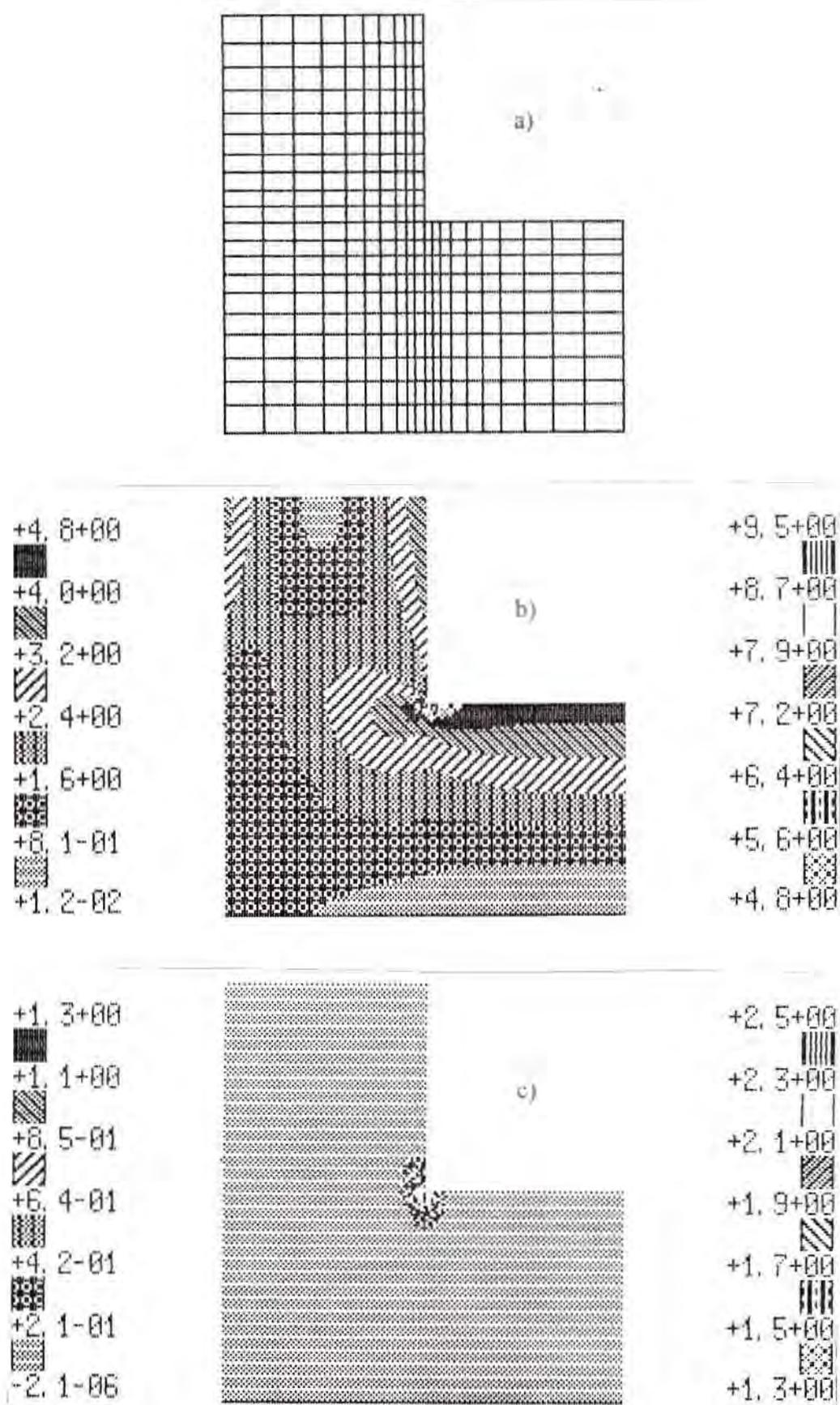


Figura 5.29 - Região em L. Malha fina. a) Malha, 981 nós, 300 elementos. b) σ_{eq} . c) $\hat{\eta}(\%)$.

5.1.3 - Elementos triangulares de 3 e 6 nós

Exemplo 6: Viga engastada livre utilizando elementos triangulares de 3 e 6 nós. Este exemplo tem a finalidade de mostrar os resultados obtidos com a implementação do estimador de erros em elementos triangulares. A figura 5.30 mostra um desenho esquemático da estrutura, a figura 5.31 mostra a malha utilizada para elementos triangulares de 3 nós e a figura 5.32 a malha utilizada para elementos de 6 nós.

Tabela 5.8 - Valores máximos de tensão sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 6.

Triângulo	Nós	Elementos	$\sigma_{x \max}$	$\hat{\eta}_{\max}(\%)$	$\hat{\eta}_{\text{med}}(\%)$
3 nós/elem	27	32	26	43	22,09
6 nós/elem	85	32	78	4,4	1,11
Sol. Teórica			80		

Observações: Ao utilizar a mesma malha para os dois tipos de elemento, nota-se que a precisão obtida com o elemento quadrático é bem mais alta. Para este elemento, a tensão σ_x máxima está próxima da tensão σ_x máxima teórica e os erros máximo e médio estão abaixo de 5%. Já para o elemento linear, a tensão σ_x máxima está muito longe da teórica e tanto o erro máximo como o médio são muito altos. Sendo assim, os valores obtidos pelo estimador de erros estão coerentes.

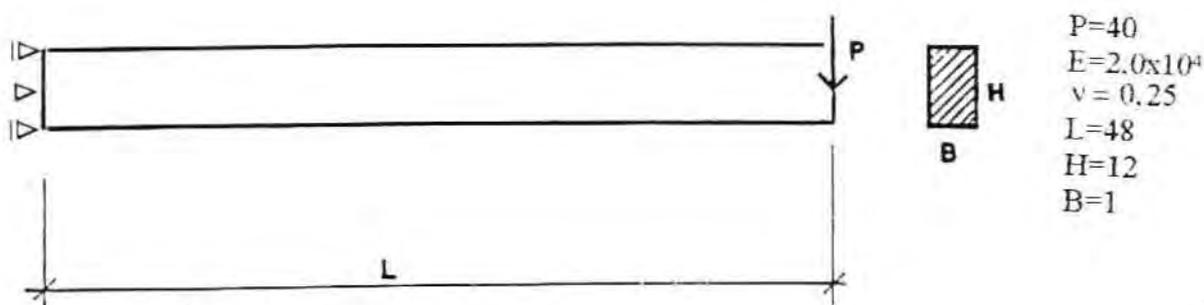


Figura 5.30 - Viga engastada livre. Desenho esquemático.

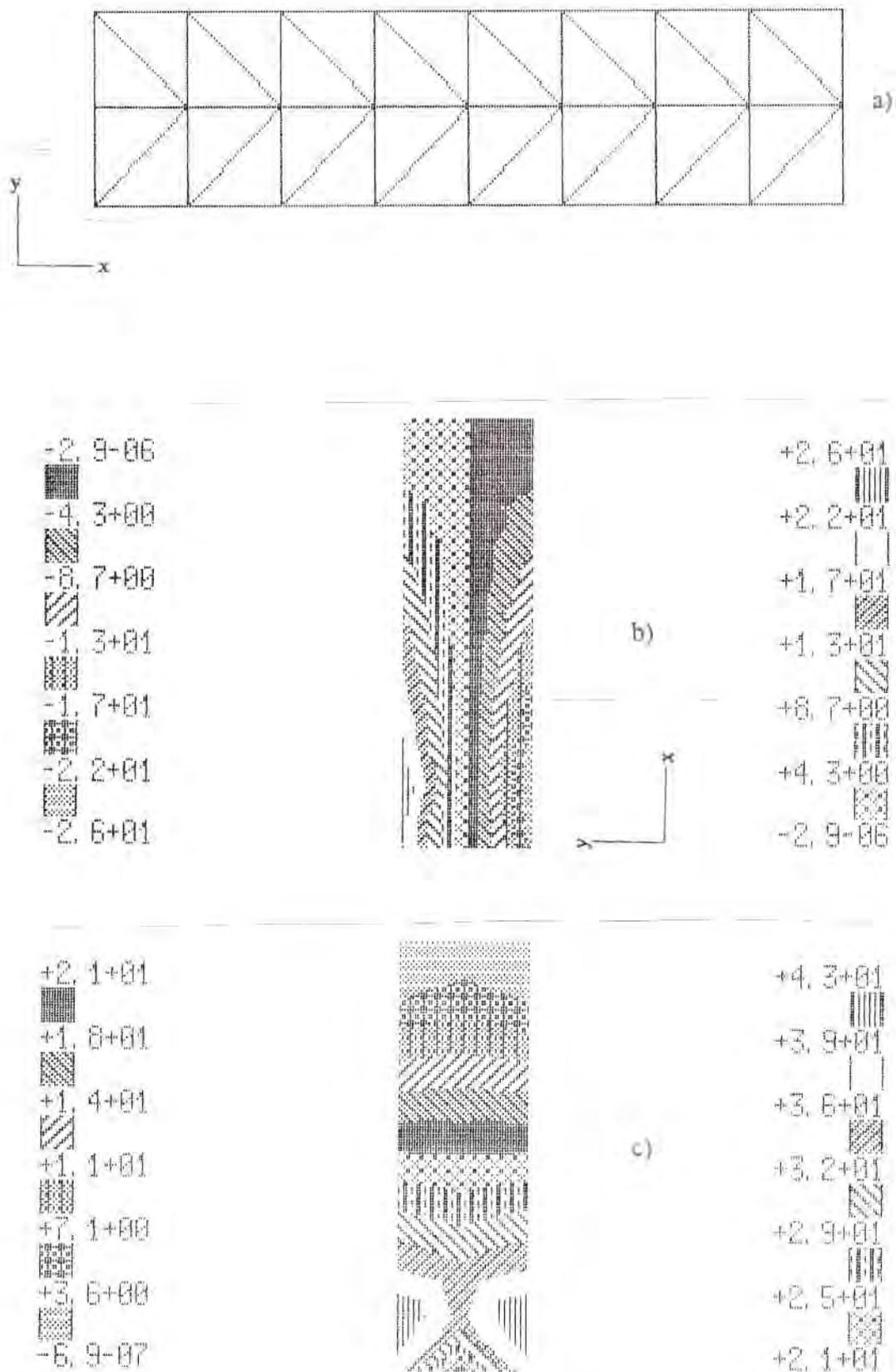


Figura 5.31 - Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 3 nós.
a) Malha, 27 nós, 32 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

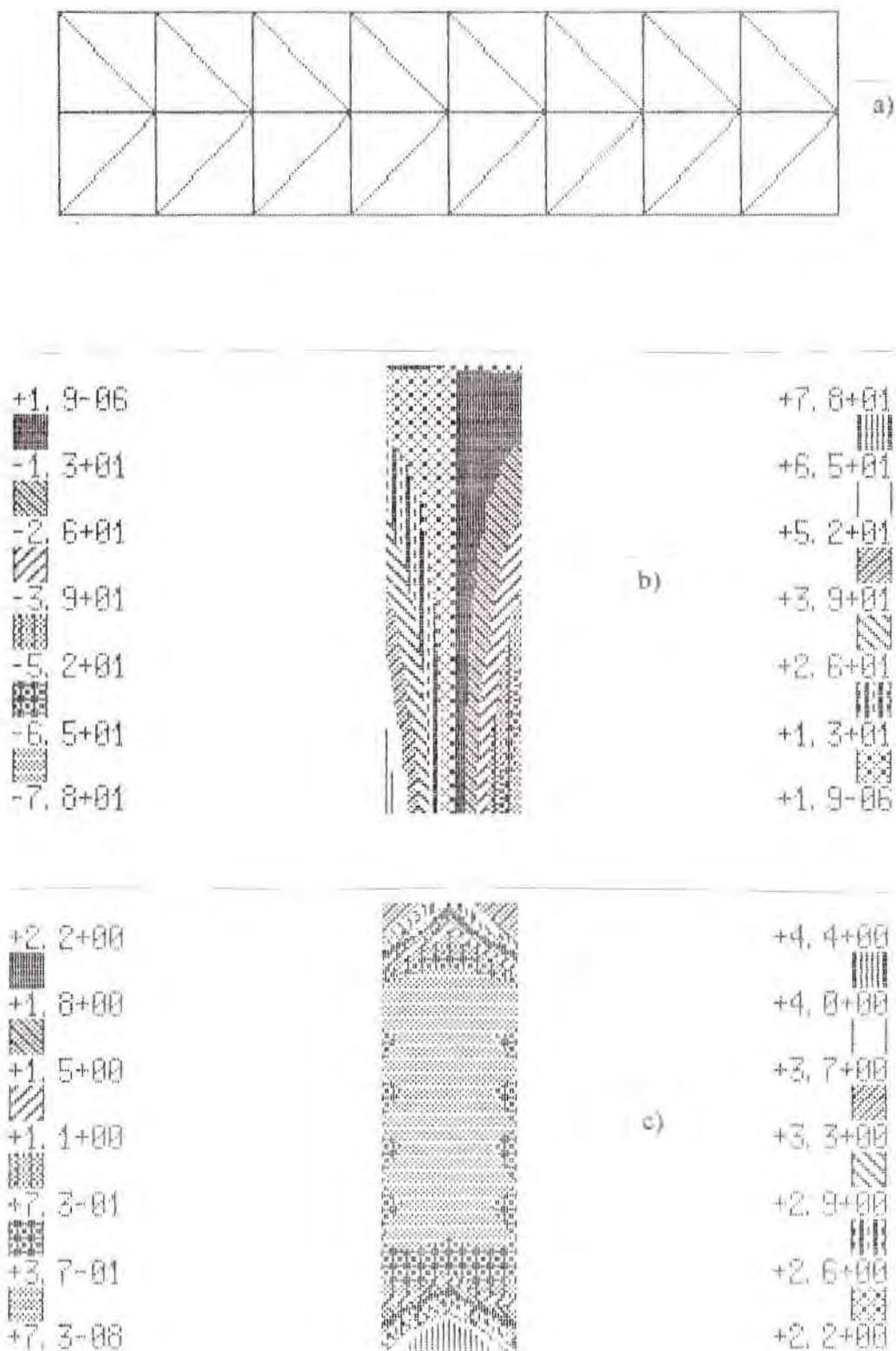


Figura 5.32 - Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 6 nós.
a) Malha, 85 nós, 32 elementos. b) σ_x . c) $\hat{\gamma}$ (%).

5.2 - Sólido tridimensional

5.2.1 - Elementos hexaédricos de 8 nós

Exemplo 7: Mesma viga engastada livre do exemplo 2, só que agora são utilizados elementos hexaédricos de 8 nós em um sólido tridimensional. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.33 mostra um desenho esquemático da estrutura, a figura 5.34 representa a malha inicial, a figura 5.35 o 1º refinamento e a figura 5.36 o 2º refinamento.

Tabela 5.9 - Valores máximos de tensão Sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 7, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.34a. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo global $\hat{\eta}_T$ obtidos no processo que cria os nós irregulares (SILVA²⁴).

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{x \max}$ (kN/m ²)	$\hat{\eta}_{\max}$ (%)	$\hat{\eta}_{\text{med}}$ (%)	NGL	$\hat{\eta}_T$ (%)
Inicial	255	128	$4,7 \times 10^5$	23	8,68	554	31,6
1º Refino	1085	620	$5,2 \times 10^5$	20	4,12	3044	17,2
2º Refino	2994	1928	$5,1 \times 10^5$	15	2,00		
Sol. Fechada			$5,0 \times 10^5$				

Observações: Como acontece no exemplo 2, à medida em que a estrutura vai sendo refinada, os valores de tensão se aproximam do valor teórico e o erro máximo diminui até o nível desejado, com exceção dos pontos de apoio e de carga. Os valores de erro médio obtidos vêm a comprovar isso. Comparando os resultados obtidos com os do processo que cria os nós irregulares observa-se que o processo de refinamento utilizado tem eficiência e precisão.

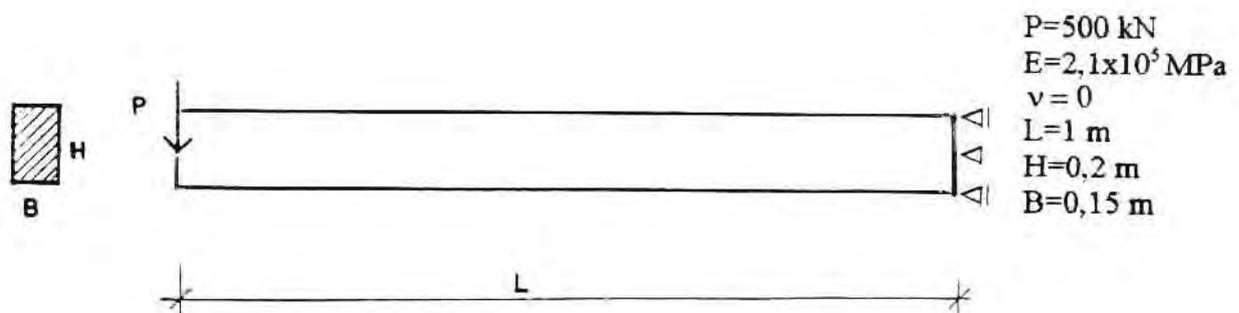


Figura 5.33 - Viga engastada livre. Desenho esquemático.

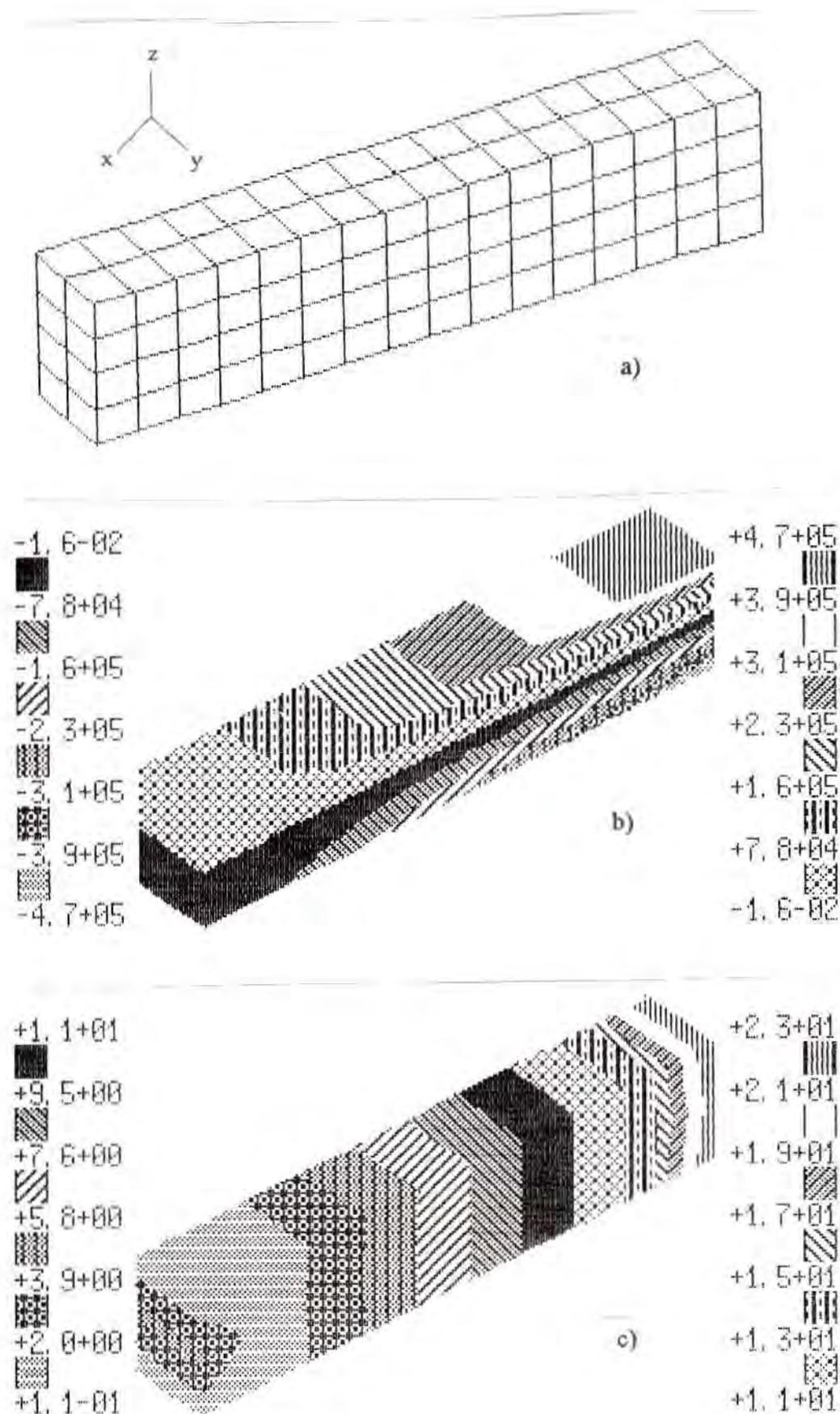


Figura 5.34 - Viga engastada livre. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 8 nós. Malha inicial. a) Malha, 255 nós, 128 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\gamma}$ (%).

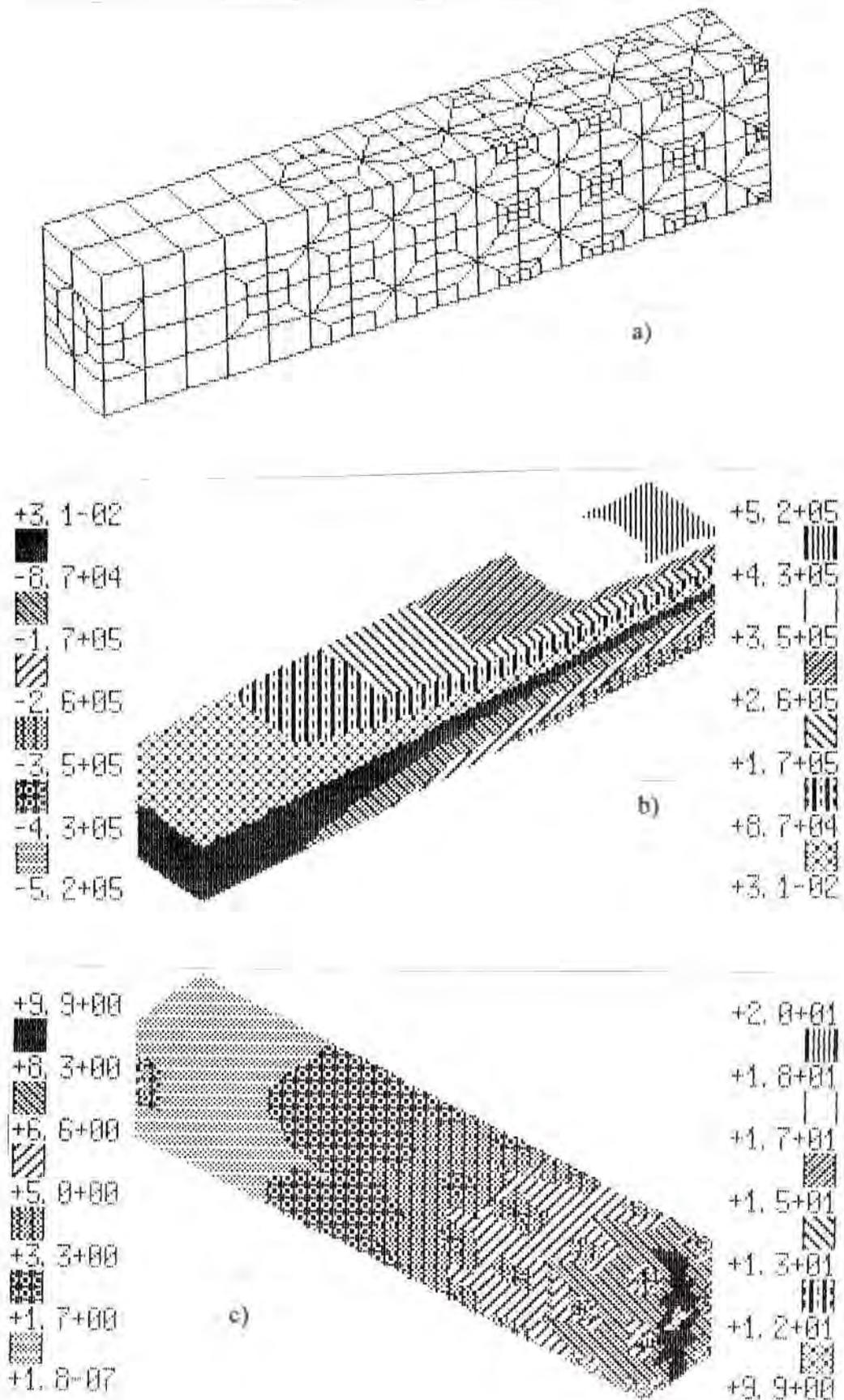


Figura 5.35 - Viga engastada livre. 1º refinamento. a) Malha, 1085 nós, 620 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

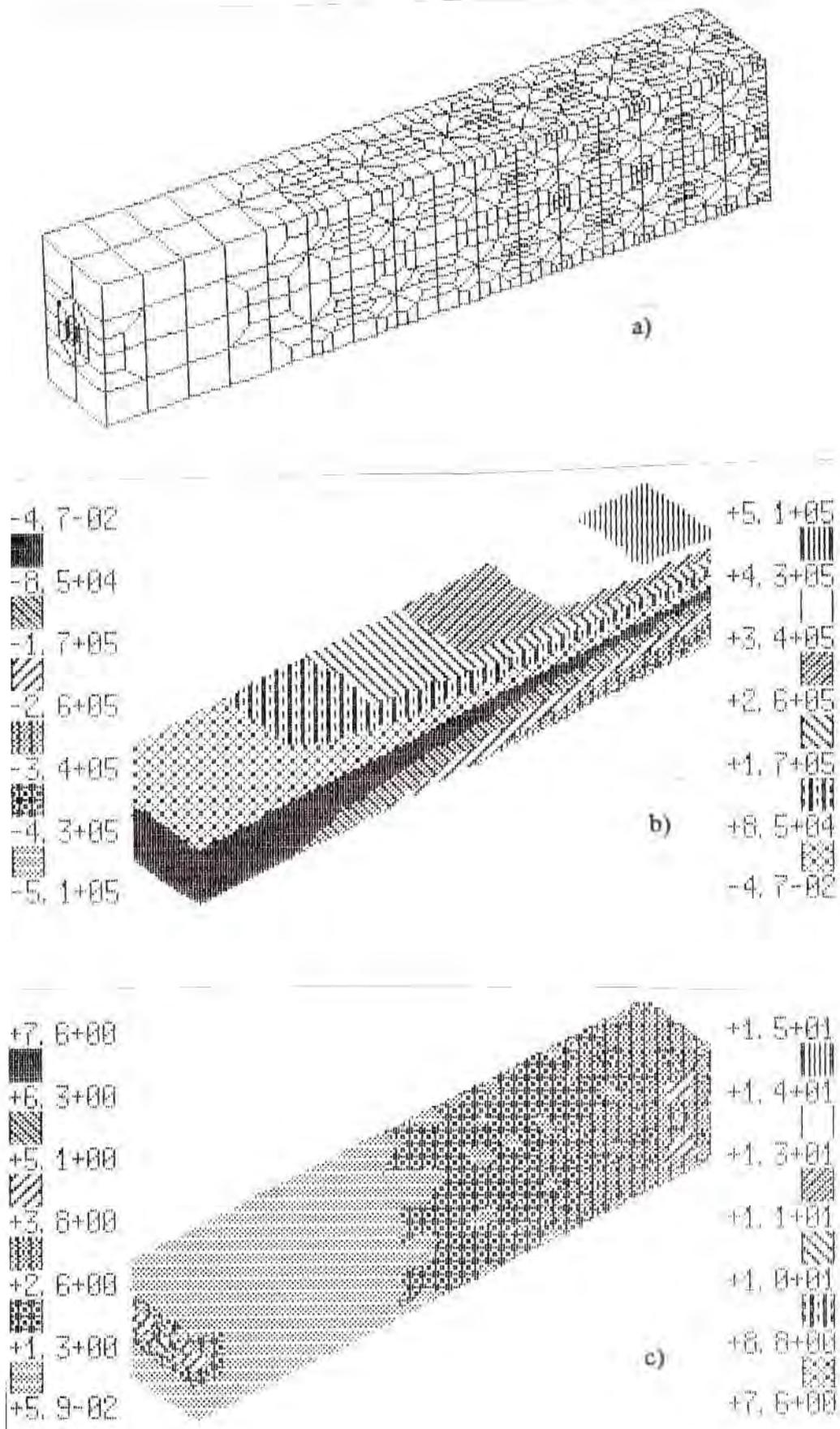


Figura 5.36 - Viga engastada livre. 2º refinamento. a) Malha, 2994 nós, 1928 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

5.2.2 - Elementos hexaédricos de 20 nós

Exemplo 8: Mesma viga simplesmente apoiada do exemplo 4, agora modelada com elementos hexaédricos de 20 nós em um sólido tridimensional. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.37 mostra um desenho esquemático da estrutura, a figura 5.38 representa a malha inicial, as figuras 5.39, 5.40 e 5.41 representam o 1º, o 2º e o 3º refinamento respectivamente.

Tabela 5.10 - Valores máximos de tensão Sigma X ($\sigma_{x \max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{\max}$), e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{\text{med}}$) do exemplo 8, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.38a.

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{x \max}$ (kN/m ²)	$\hat{\eta}_{\max}$ (%)	$\hat{\eta}_{\text{med}}$ (%)
Inicial	262	32	$1,2 \times 10^5$	14	4,28
1º Refino	429	56	$1,2 \times 10^5$	13	4,31
2º Refino	567	80	$1,2 \times 10^5$	13	5,6
3º Refino	1119	176	$1,2 \times 10^5$	12	3,26
Sol. Fechada			$1,25 \times 10^5$		

Observações: Como acontece no exemplo 4, os valores de $\sigma_{x \max}$ estão próximos do valor teórico em todas as etapas de refinamento. Neste exemplo nota-se que, apesar da tensão $\sigma_{x \max}$ estar sempre próxima da tensão máxima teórica e do erro máximo $\hat{\eta}_{\max}$ baixar, o erro médio $\hat{\eta}_{\text{med}}$ inicialmente aumenta e no 3º refinamento chega ao seu valor mais baixo. Também aqui ocorre o Paradoxo de Babuska (TEZUKA²⁶).

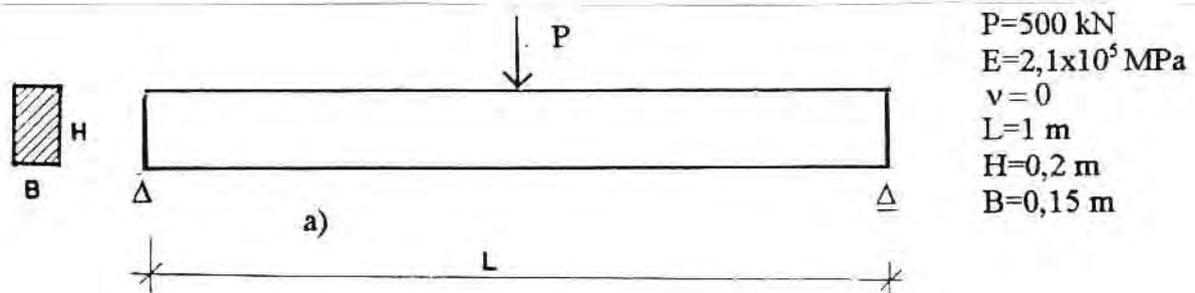


Figura 5.37 - Viga simplesmente apoiada. Desenho esquemático.

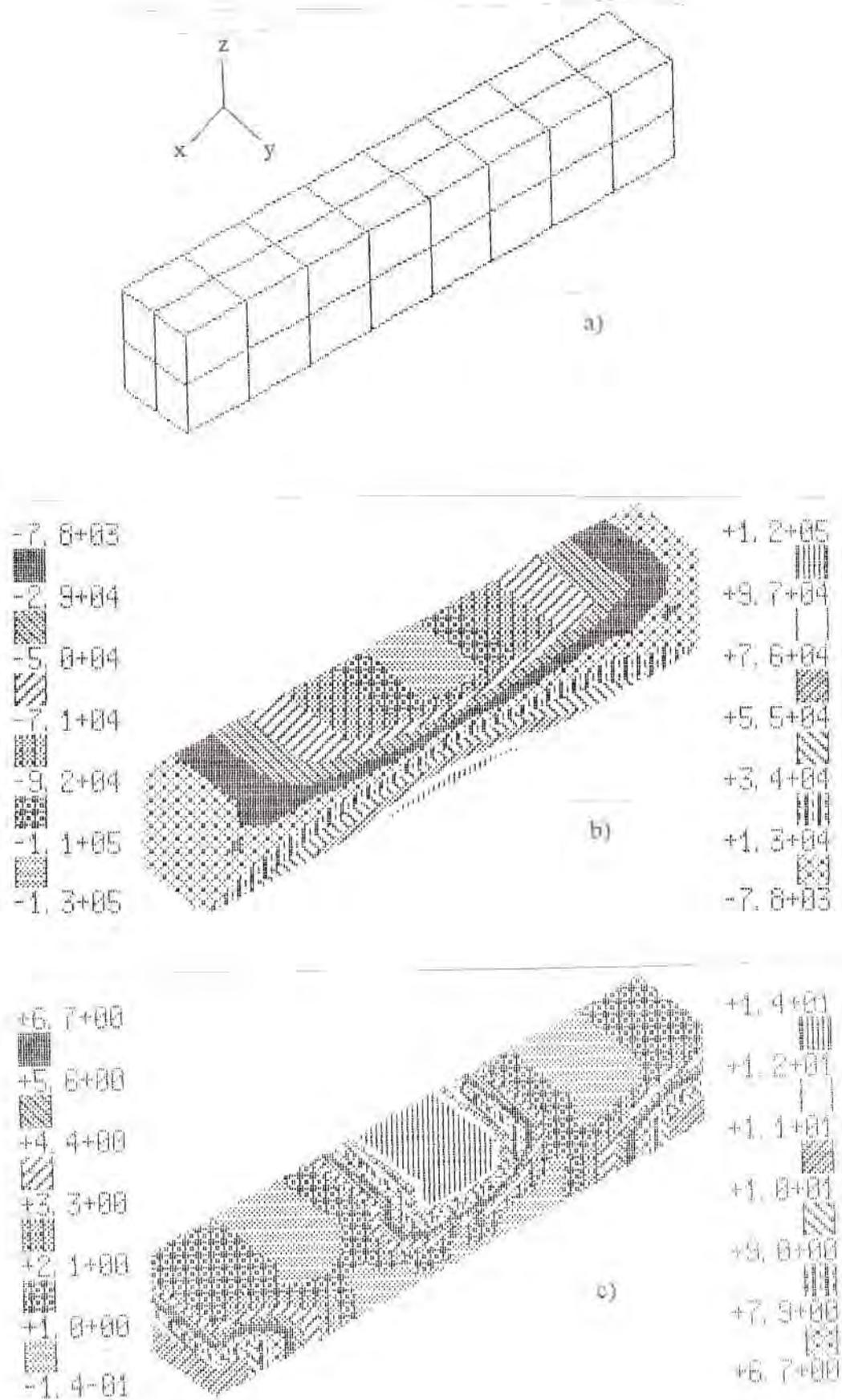


Figura 5.38 - Viga simplesmente apoiada. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 20 nós. Malha inicial. a) Malha, 262 nós, 32 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\gamma}$ (%).

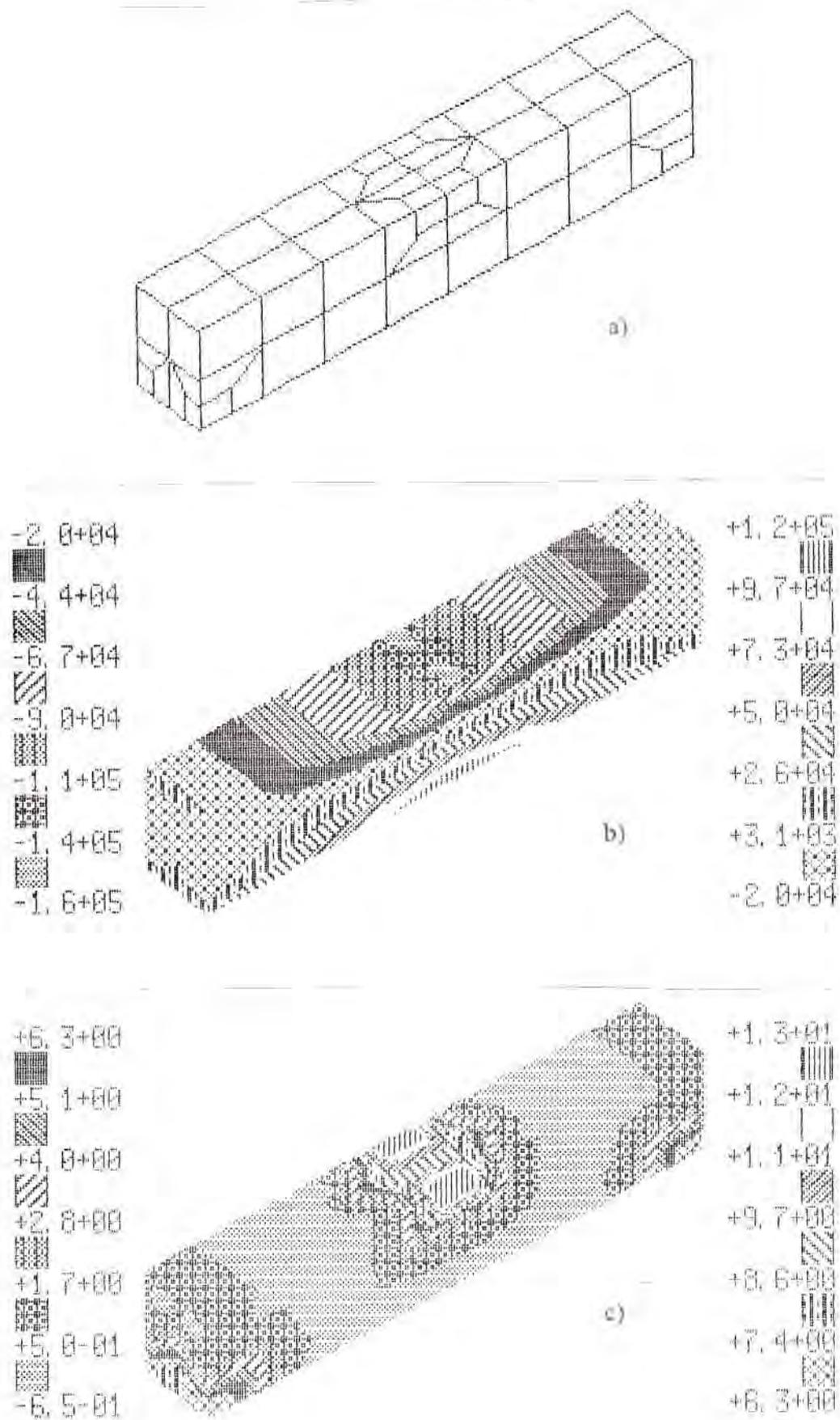


Figura 5.39 - Viga simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Malha, 429 nós, 56 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

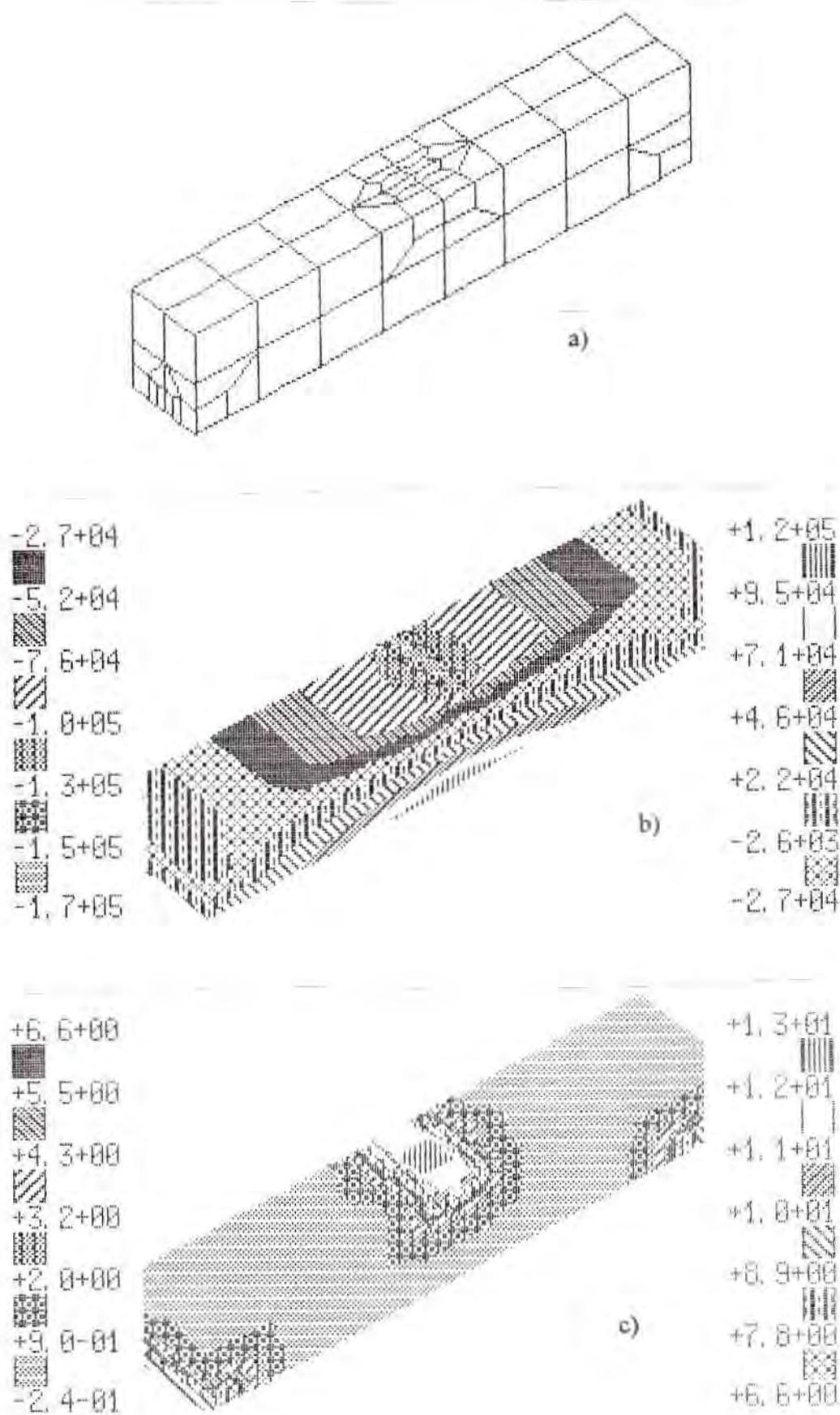


Figura 5.40 - Viga simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Malha, 567 nós, 80 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

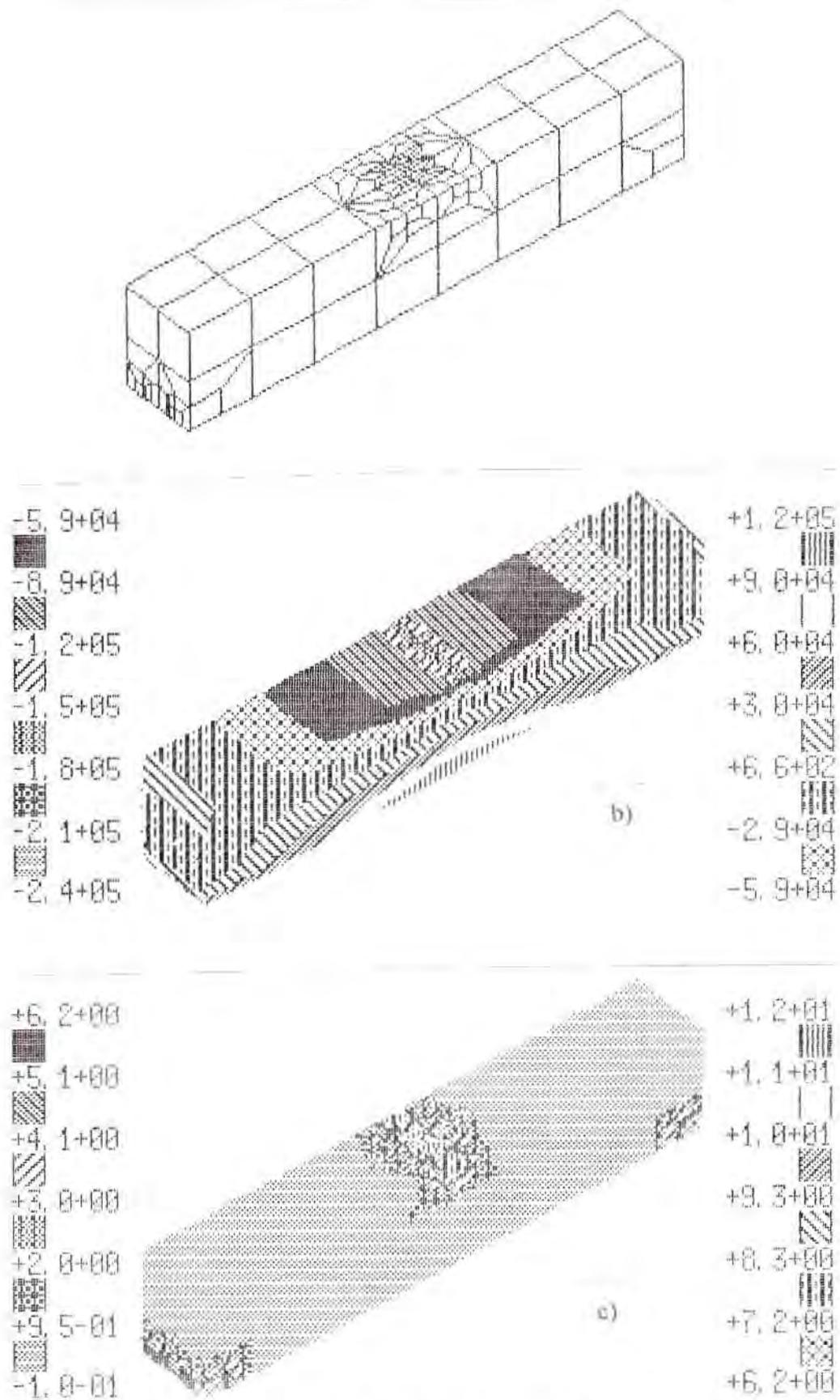


Figura 5.41 - Viga simplesmente apoiada. 3^o refinamento. a) Malha, 1119 nós, 176 elementos. b) Tensão σ_x . c) $\hat{\eta}$ (%).

Exemplo 9: Gaiola de junta homocinética usada para transmissão de potência em veículos. Sólido tridimensional utilizando elementos hexaédricos de 20 nós. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.42 mostra um desenho da malha da estrutura, a figura 5.43 mostra a malha inicial e as figuras 5.44 e 5.45 mostram σ_{eq} e $\hat{\eta}$ correspondentes à malha inicial. A figura 5.46 mostra a malha do 1º refinamento e as figuras 5.47 e 5.48 mostram σ_{eq} e $\hat{\eta}$ correspondentes ao 1º refinamento.

Tabela 5.11 - Valores máximos de tensão equivalente ($\sigma_{eq\ max}$) e do erro relativo aproximado ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 9, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.43.

Malha	Nós	Elementos	$\sigma_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}(\%)$	$\hat{\eta}_{med}(\%)$
Inicial	816	72	1.900	30	12,98
1º Refino	1728	216	2.000	30	7,47

Observações: Observando as figuras 5.45 e 5.48 nota-se que, apesar do erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ não diminuir ao realizar o refinamento, os valores do erro ao longo da peça nitidamente baixaram. Isto pode verificado pelos valores de erro médio $\hat{\eta}_{med}$ obtidos.

$P=1 \times 10^4$
 $E=2,8 \times 10^5$
 $\nu=0,3$
 Peso Esp. = $7,5 \times 10^{-9}$
 $L_1 = 60$
 $L_2 = 30$

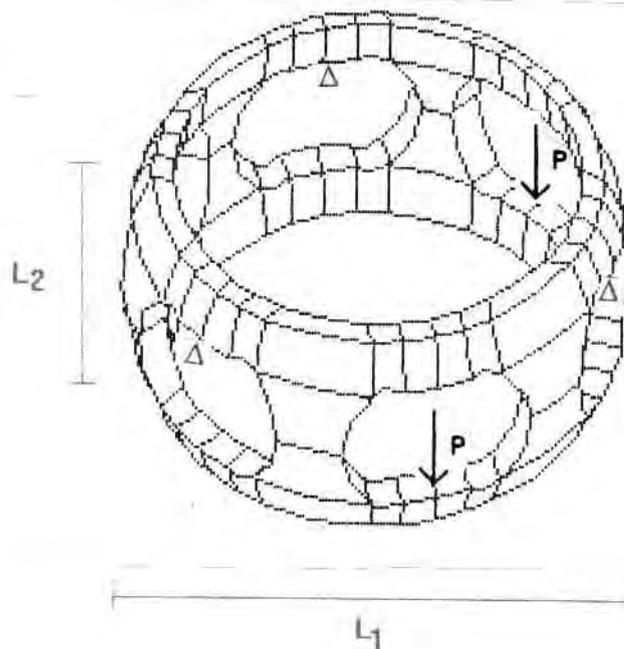


Figura 5.42 - Gaiola de junta homocinética. Desenho da malha da estrutura.

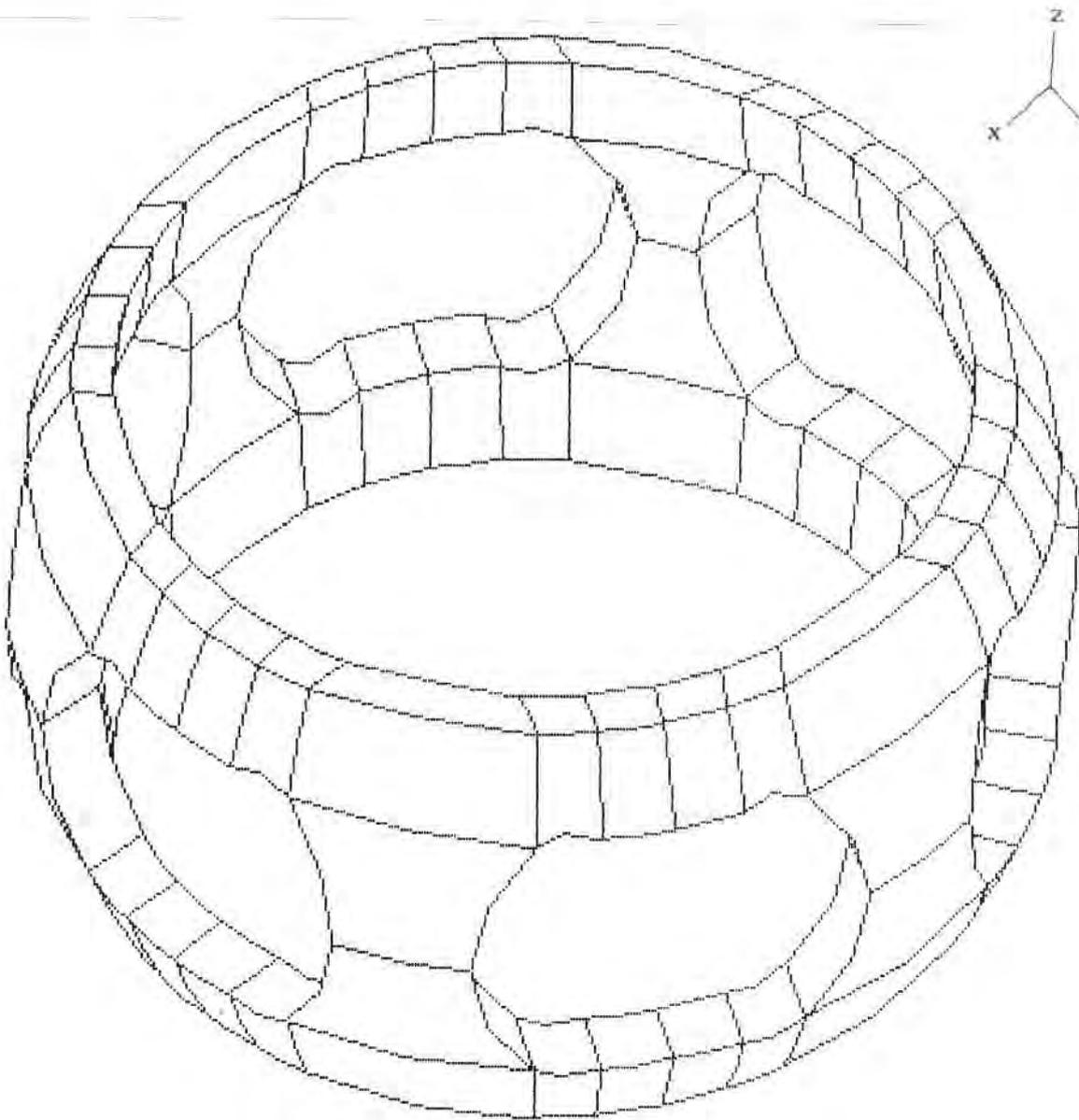


Figura 5.43 - Gaiola de junta homocinética. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 20 nós. Malha inicial. Malha, 816 nós, 72 elementos.

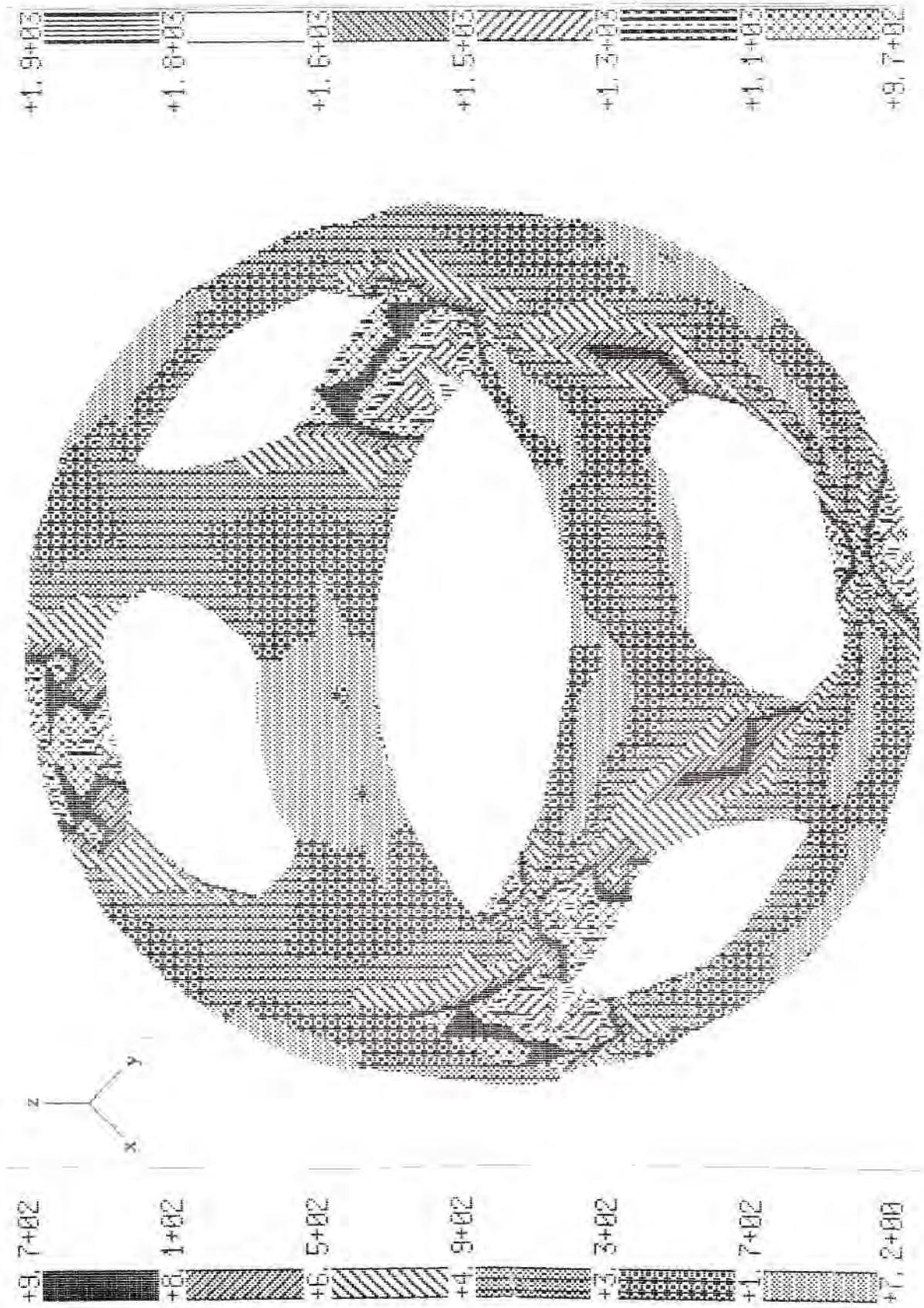


Figura 5.44 - Gaiola de junta homocinética. Malha inicial. Tensão σ_{eq} .

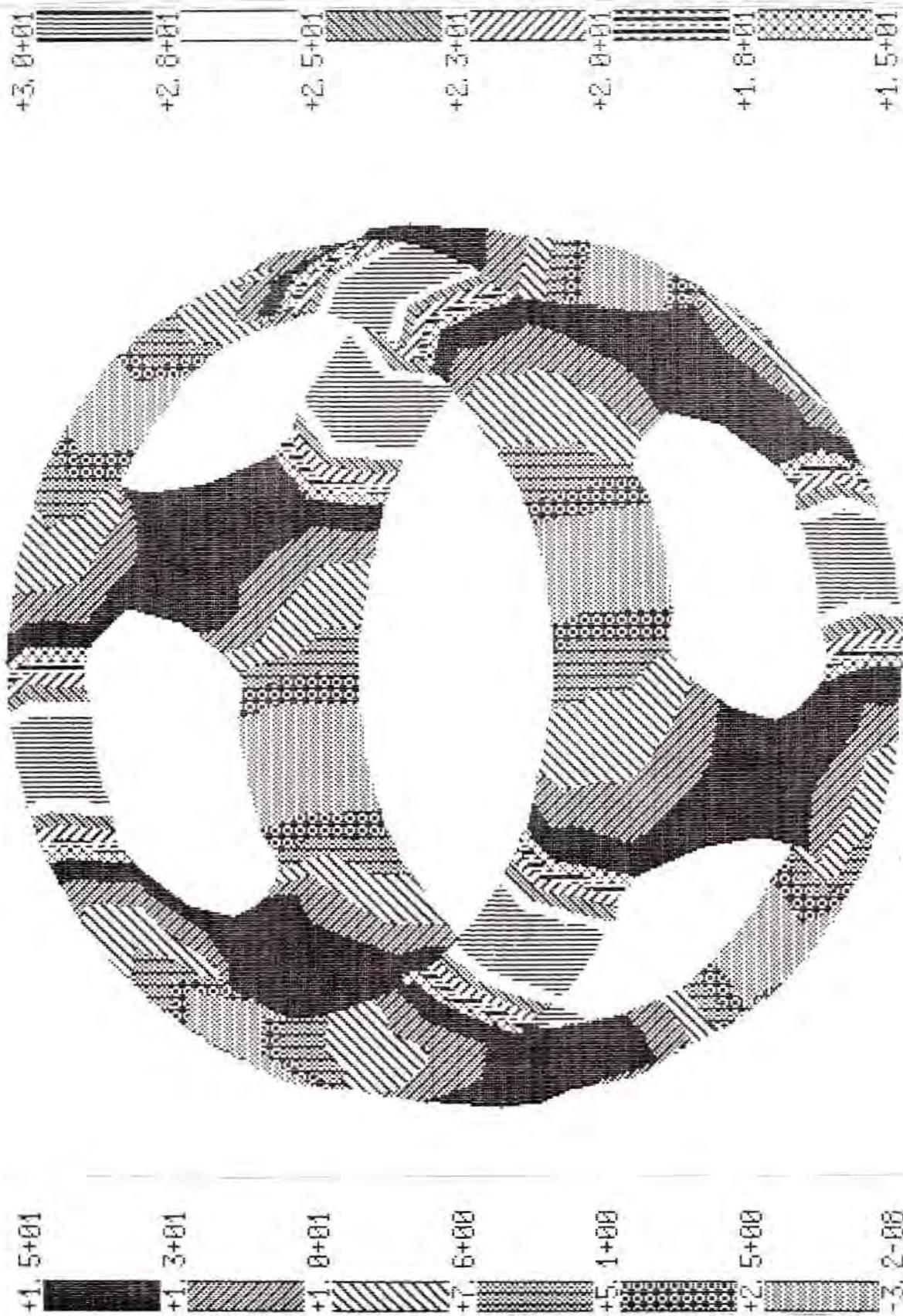


Figura 5.45 - Gaiola de junta homocinética. Malha inicial. $\hat{\eta}$ (%).

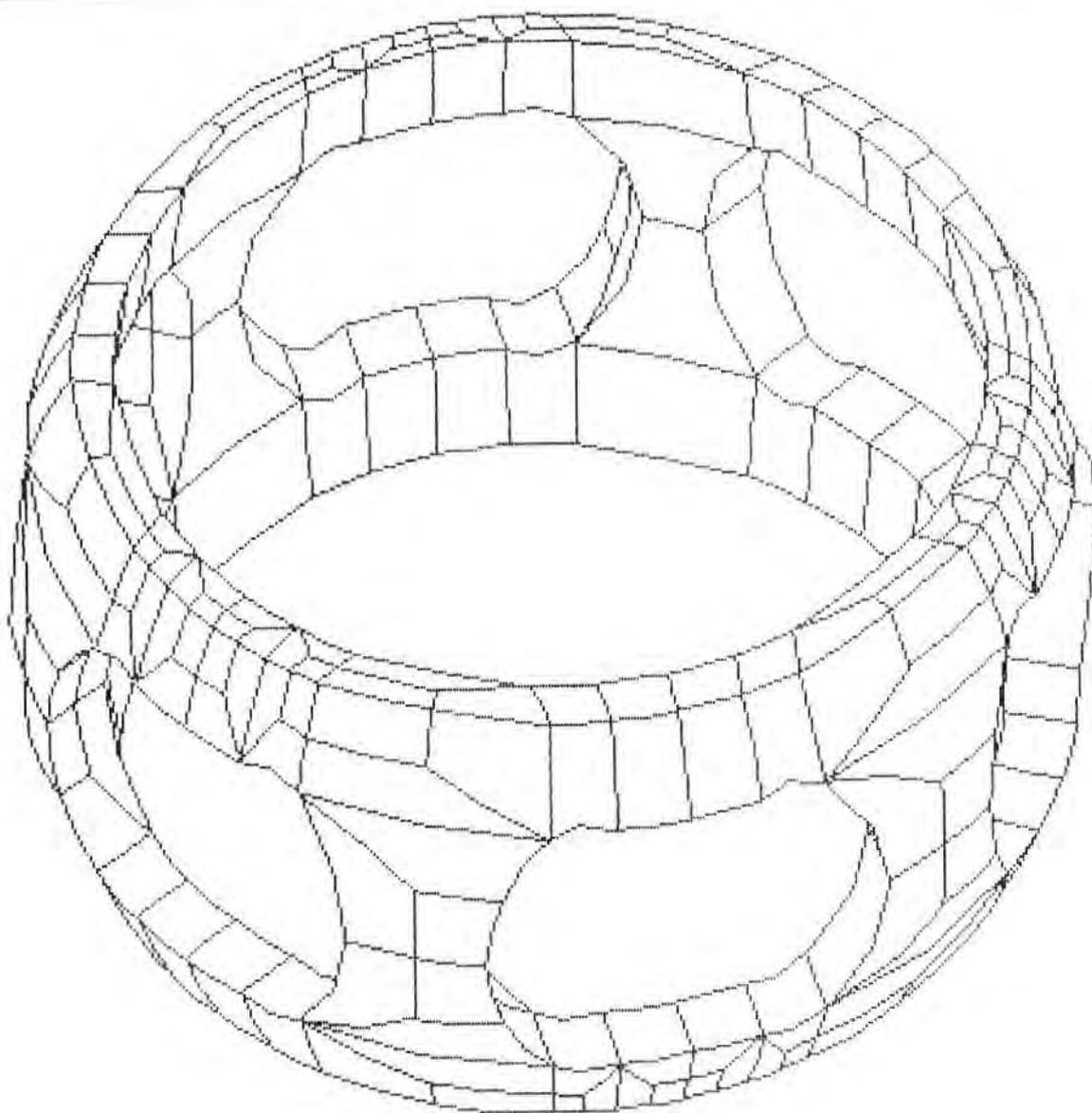


Figura 5.46 - Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. Malha, 1728 nós, 216 elementos.

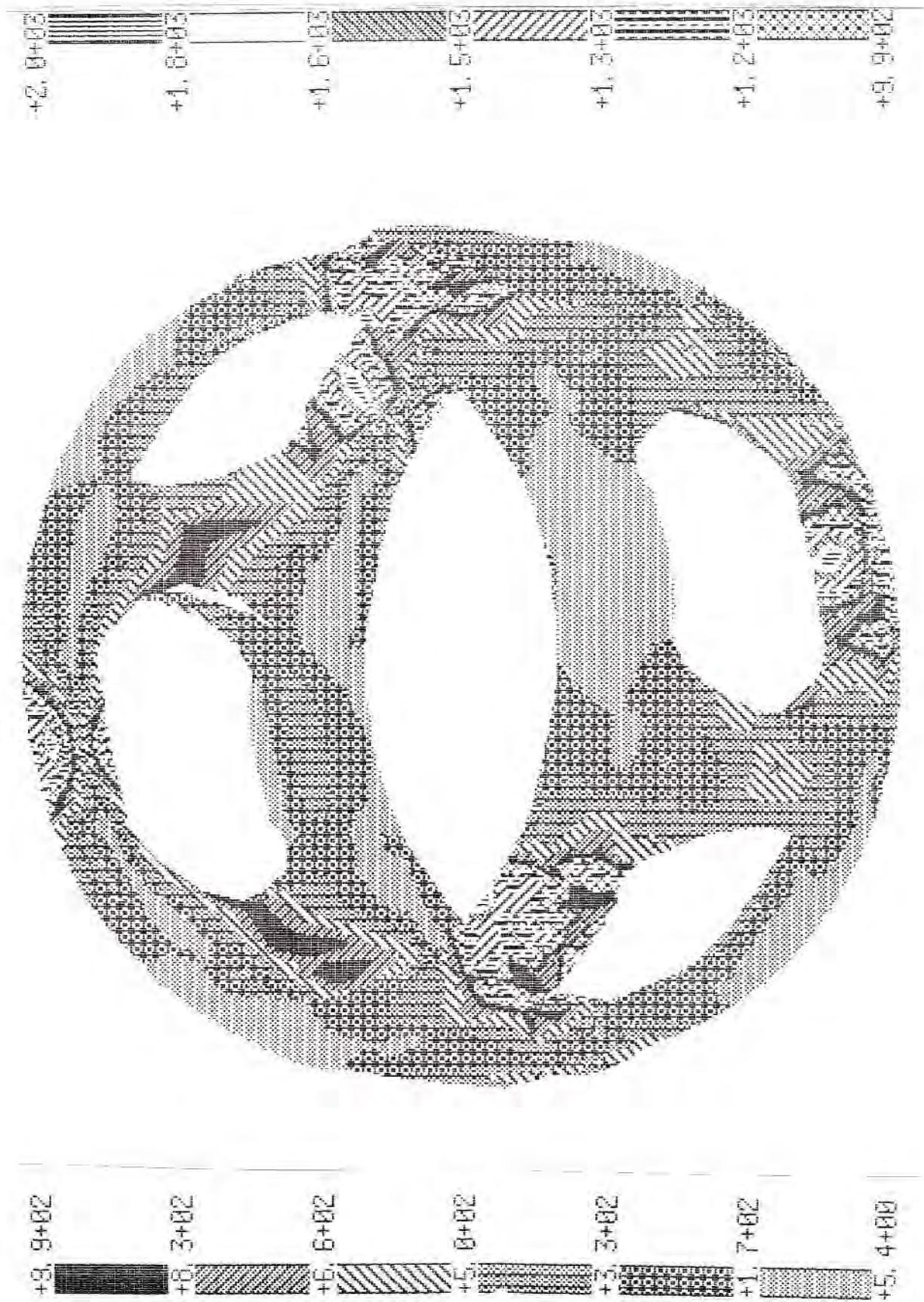


Figura 5.47 - Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. Tensão σ_{eq} :

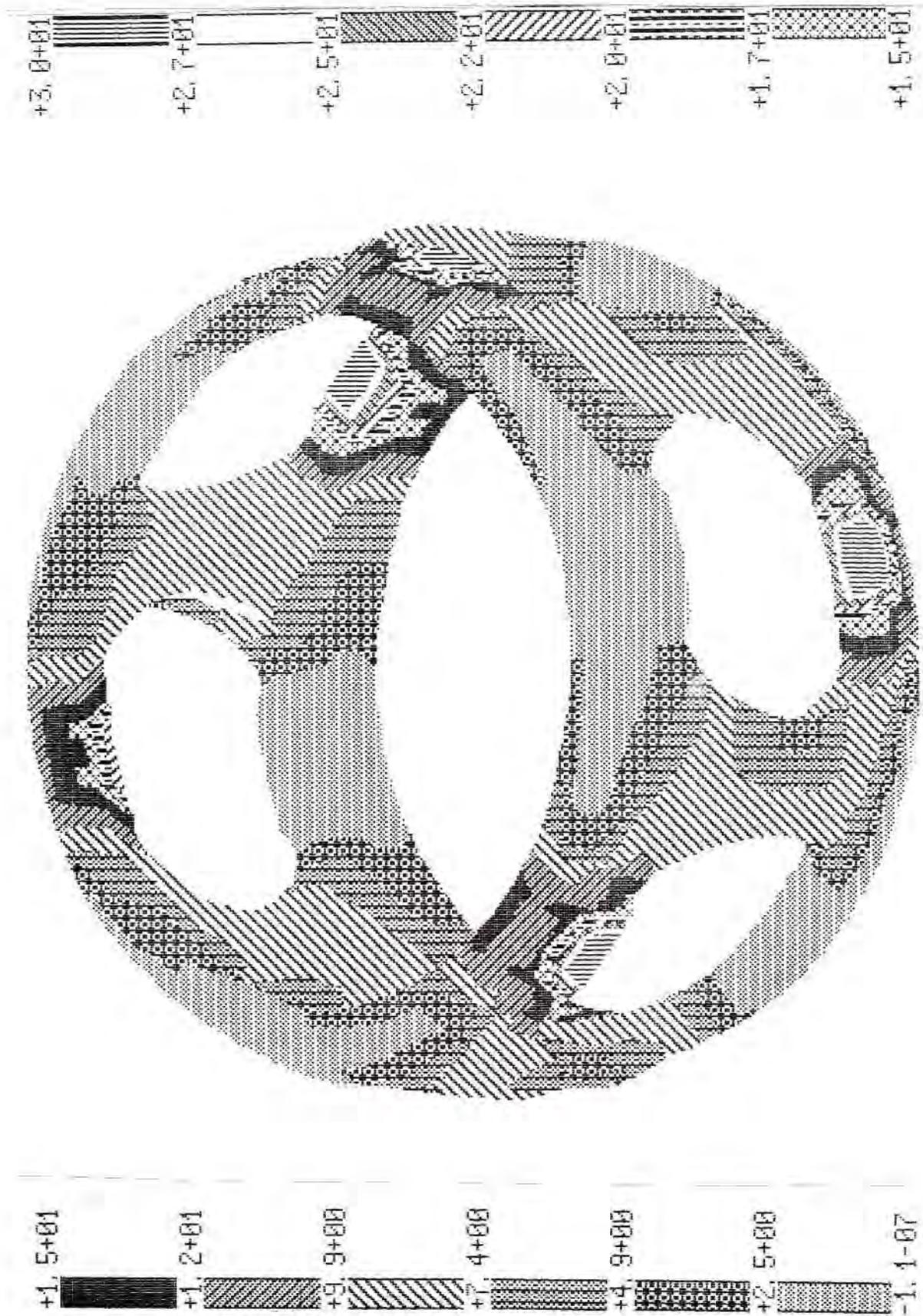


Figura 5.48 - Gaiola de junta homocinética. 1º refinamento. $\hat{\eta}$ (%).

5.3 - Placa

5.3.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós

Foi utilizado o elemento DKQ, que possui doze graus de liberdade e cuja formulação é baseada na teoria de de Kirchoff.

Exemplo 10: Placa simplesmente apoiada em todas as bordas sujeita à uma carga distribuída uniforme. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.49 mostra um desenho esquemático da estrutura. A figura 5.50 mostra a malha inicial e a figura 5.51 representa a distribuição de momentos M_x e de $\hat{\eta}(\%)$ da malha inicial. A figura 5.52 mostra a malha do 1º refinamento e a figura 5.53 a distribuição de momentos M_x e de $\hat{\eta}(\%)$ do 1º refinamento. A figura 5.54 mostra a malha do 2º refinamento e a figura 5.55 a distribuição de momentos M_x e de $\hat{\eta}(\%)$ do 2º refinamento. A figura 5.56 mostra uma malha fina para comparação de resultados e a figura 5.57 a distribuição de momentos M_x e de $\hat{\eta}(\%)$ dessa malha fina.

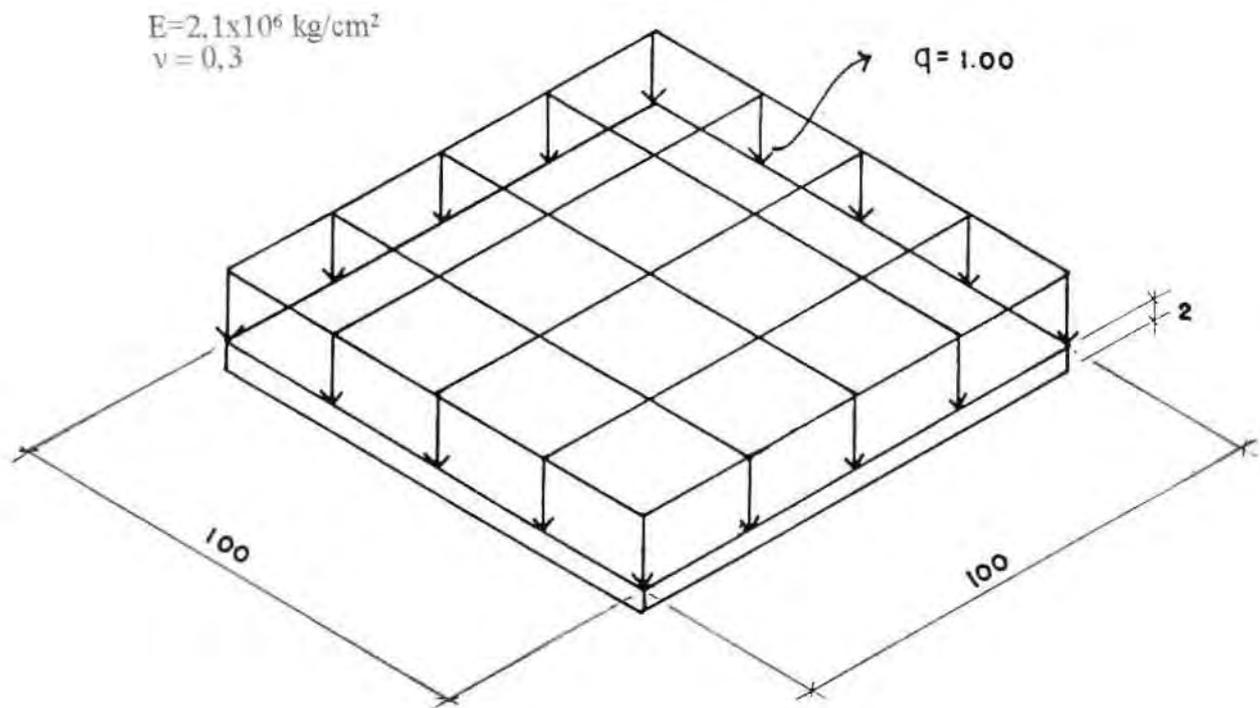


Figura 5.49 - Placa simplesmente apoiada. Desenho esquemático.

Tabela 5.12 - Valores máximos de deslocamento (W_{max}), de momento ($M_{x max}$) e de cortante ($Q_{x max}$). Erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 10, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.50. Número de graus de liberdade (NGL) e erro relativo global $\hat{\eta}_T$ do processo que cria nós irregulares (SILVA²⁴).

Malha	Nós	Elem.	W_{max} (cm)	$M_{x max}$ (kg.cm)	$Q_{x max}$ (kg/cm)	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)	NGL	$\hat{\eta}_T$ (%)
Inicial	25	16	-0,26	501,0	12,7	13,4	3,35	39	13,4
1º Refino	69	48	-0,26	483,0	17,4	9,3	5,74	95	7,7
2º Refino	109	80	-0,26	475,0	19,6	6,5	2,06	175	5,4
Malha fina	121	100	-0,264	482,0	17,0	4,2	2,54	279	4,2
Sol. Fechada			-0,2639	479,0	33,8				

Observações: Ao realizar o refinamento, nota-se que os valores de W_{max} , $M_{x max}$ e $Q_{x max}$ se aproximam dos seus correspondentes valores teóricos e dos valores obtidos por SILVA²⁴ na página 88. Observa-se que os valores de erro são maiores ao longo do contorno. Isto acontece porque o centro da placa desloca-se como um corpo rígido, apenas no contorno existe uma deformação significativa na geometria. Então, para diminuir o erro é necessário concentrar a malha ao longo das bordas da placa. O erro médio $\hat{\eta}_{med}$ aumenta no 1º refinamento e depois diminui, chegando ao seu valor mais baixo. Comparando os resultados obtidos pelos dois processos, conclui-se que os dois convergem para a solução teórica. Os resultados do processo que cria nós irregulares são um pouco melhores.

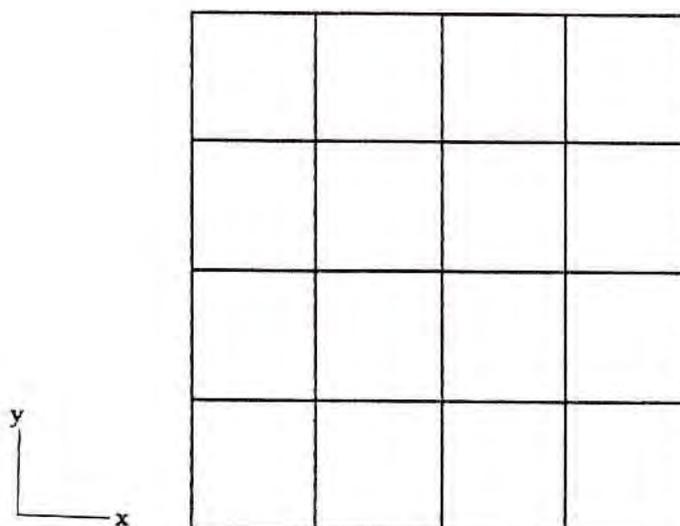


Figura 5.50 - Placa simplesmente apoiada. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial, 25 nós, 16 elementos.

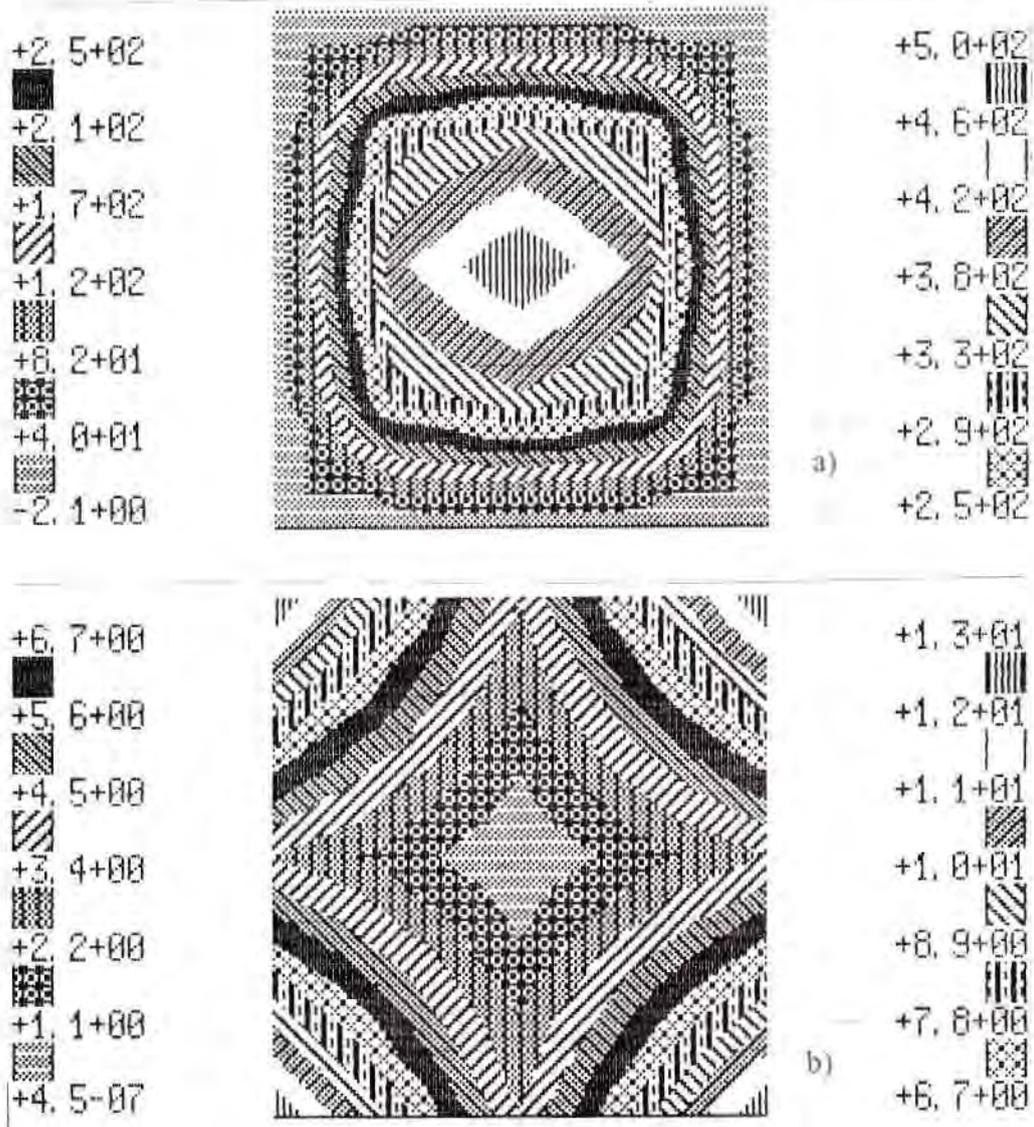


Figura 5.51 - Placa simplesmente apoiada. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}(\%)$.

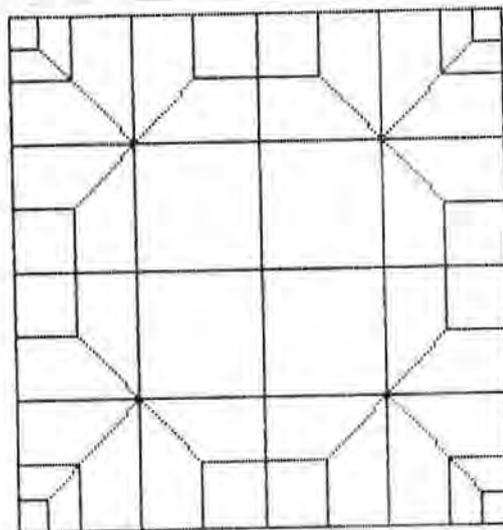


Figura 5.52 - Placa simplesmente apoiada. 1º refinamento. Malha, 69 nós, 48 elementos.

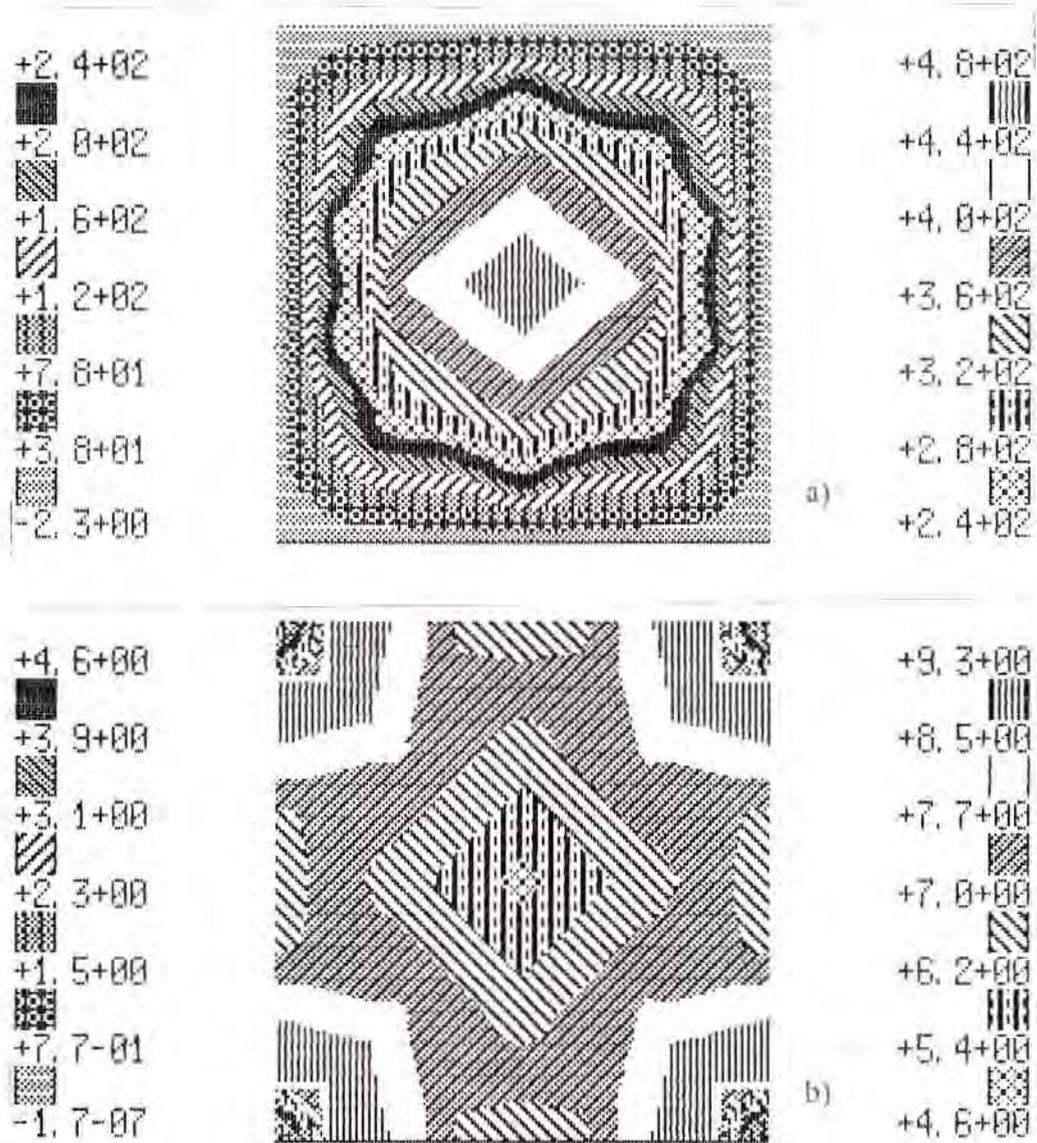


Figura 5.53 - Placa simplesmente apoiada. 1º refinamento. a) Momento M_x . b) $\bar{\eta}(\%)$.

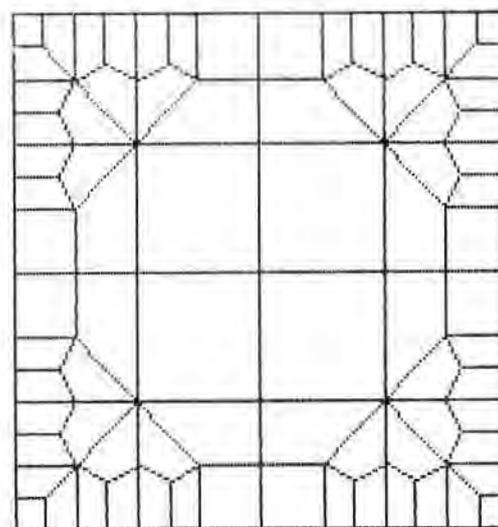


Figura 5.54 - Placa simplesmente apoiada. 2º refinamento. Malha, 109 nós, 80 elementos.

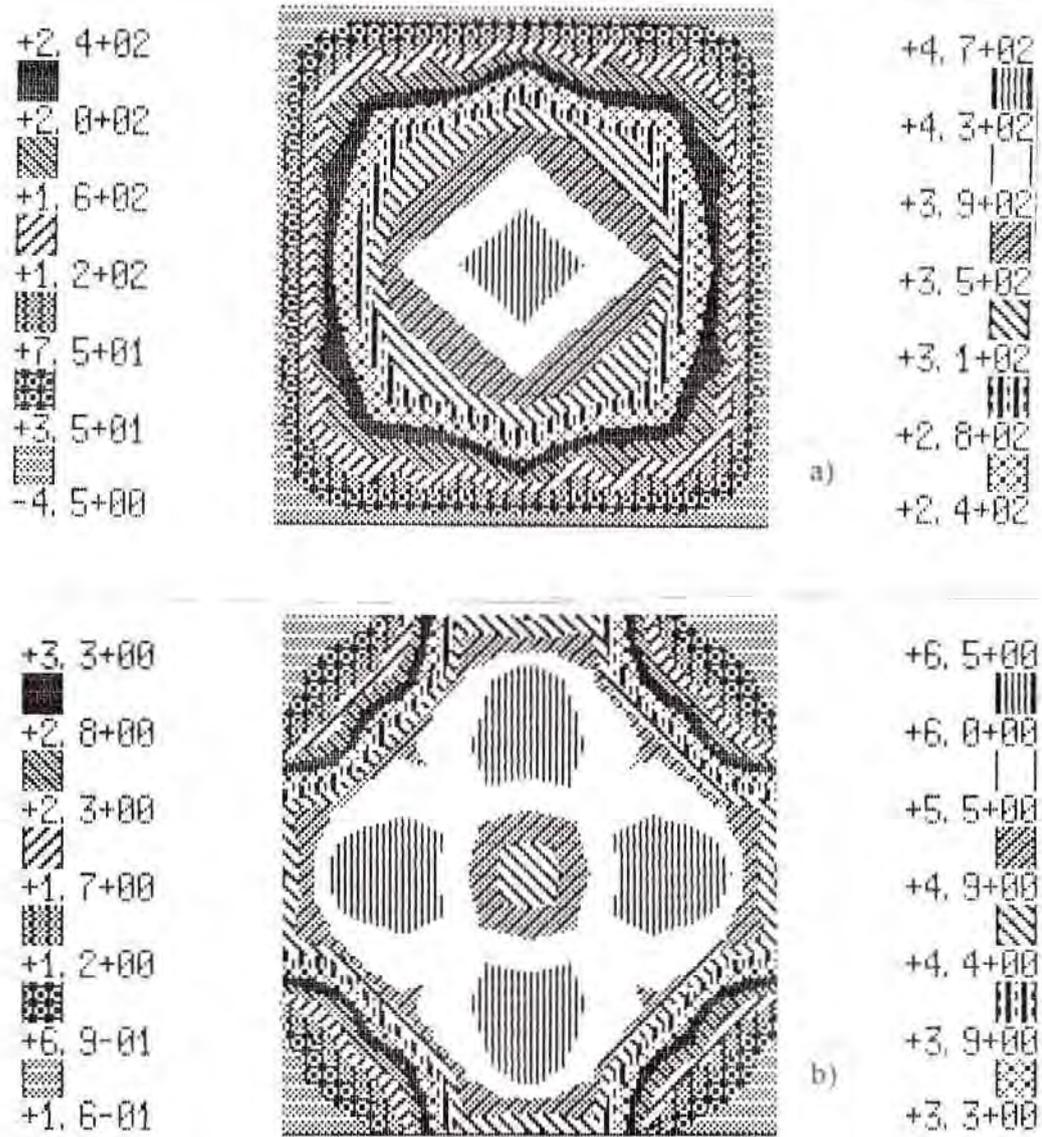


Figura 5.55 - Placa simplesmente apoiada. 2º refinamento. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}(\%)$.

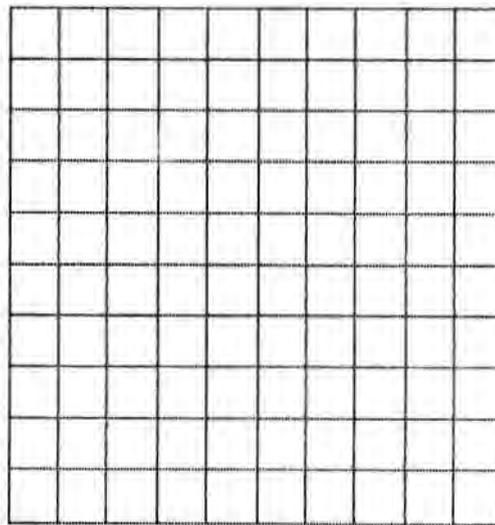


Figura 5.56 - Placa simplesmente apoiada. Malha fina, 121 nós, 100 elementos.

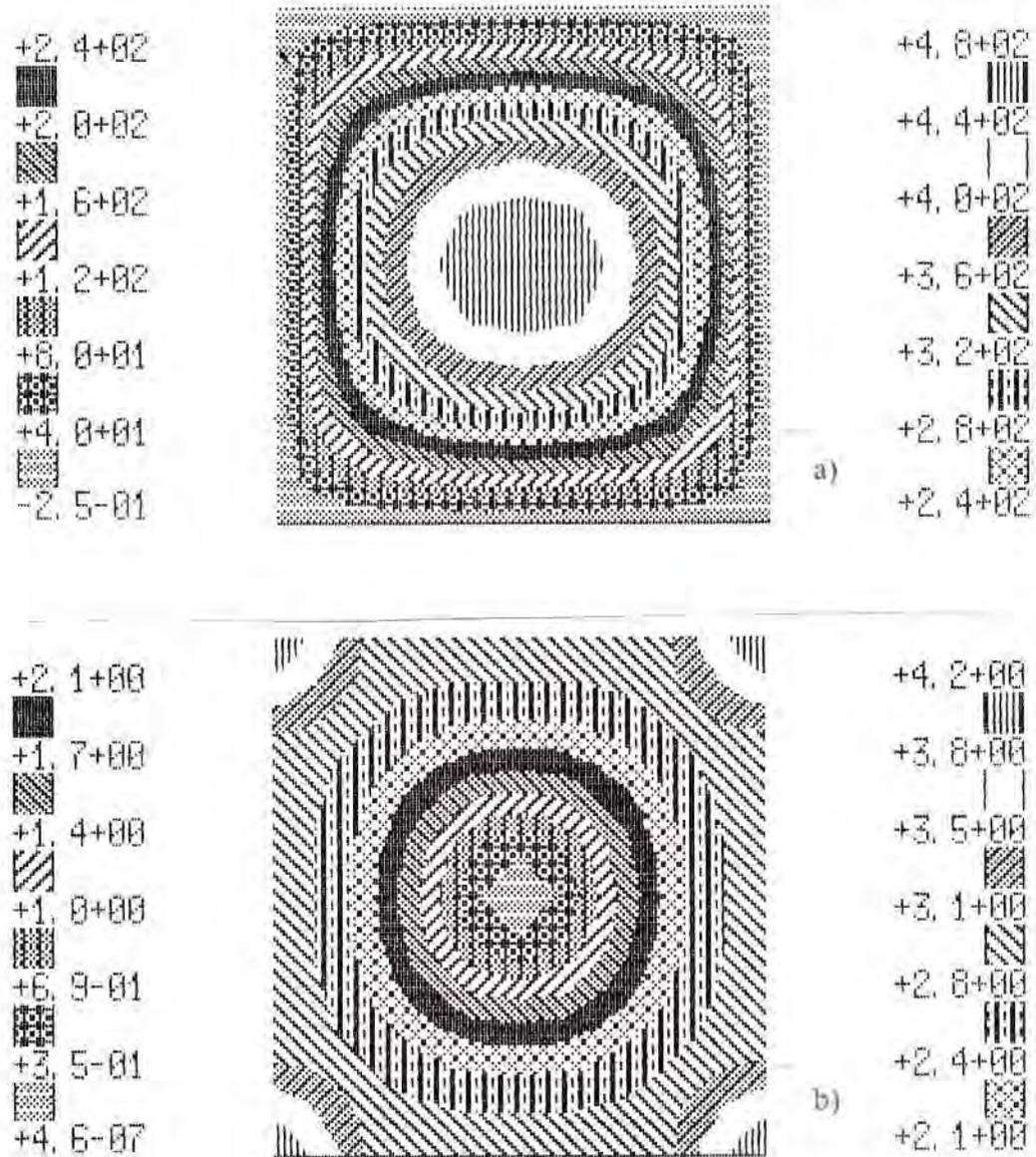


Figura 5.57 - Placa simplesmente apoiada. Malha fina. a) Momento M_x . b) $\hat{\eta}(\%)$.

Exemplo 11: Discretização de um pavimento de edifício, com laje tipo "cogumelo", sujeito à uma carga de peso próprio igual em todos os elementos. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. São utilizados elementos de placa de 4 nós DKQ e de grelha de 2 nós. A figura 5.58 mostra um desenho da malha da estrutura. A figura 5.59 mostra a malha inicial e as figuras 5.60 e 5.61 mostram σ_{eq} e $\hat{\eta}$ correspondentes à malha inicial. A figura 5.62 mostra a malha do 1º refino e as figuras 5.63 e 5.64 mostram σ_{eq} e $\hat{\eta}$ correspondentes ao 1º refino. A figura 5.65 mostra uma ampliação das figuras 5.63 e 5.64.

Tabela 5.13 -Momento equivalente máximo ($M_{eq\ max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 11, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.59.

Malha	Nós	Elementos	$M_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}$ (%)	$\hat{\eta}_{med}$ (%)
Inicial	978	961	2×10^4	29	1,01
1º Refino	1958	1847	$1,2 \times 10^7$	27	0,25

Observações: Vendo a distribuição do erro no 1º refino (figura 5.64), nota-se que o erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ está abaixo de 2,3%, exceto em dois pontos de apoio que foram ampliados na figura 5.65b. Os momentos equivalentes se mantêm dentro da mesma faixa da malha inicial ao realizar refinamento, com exceção desses mesmos dois pontos onde o momento equivalente está tendendo a infinito ($1,2 \times 10^7$). O erro médio $\hat{\eta}_{med}$ diminui ao se fazer o refinamento, chegando a um valor bastante baixo 0,25%.

C. Distrib. em $Z = -1,4 \times 10^2$
 $E = 2,57068 \times 10^9$
 $\nu = 0,2$
 Peso Esp. = $2,5 \times 10^3$
 Carga Peso Próprio em $Z = -1$
 $L_1 = 19,45$
 $L_2 = 20,6$

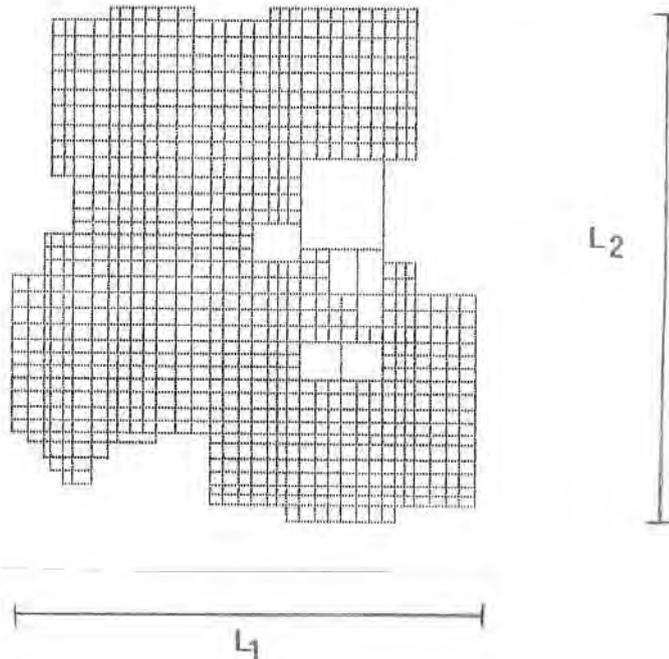


Figura 5.58 - Pavimento de edifício. Desenho da malha da estrutura.

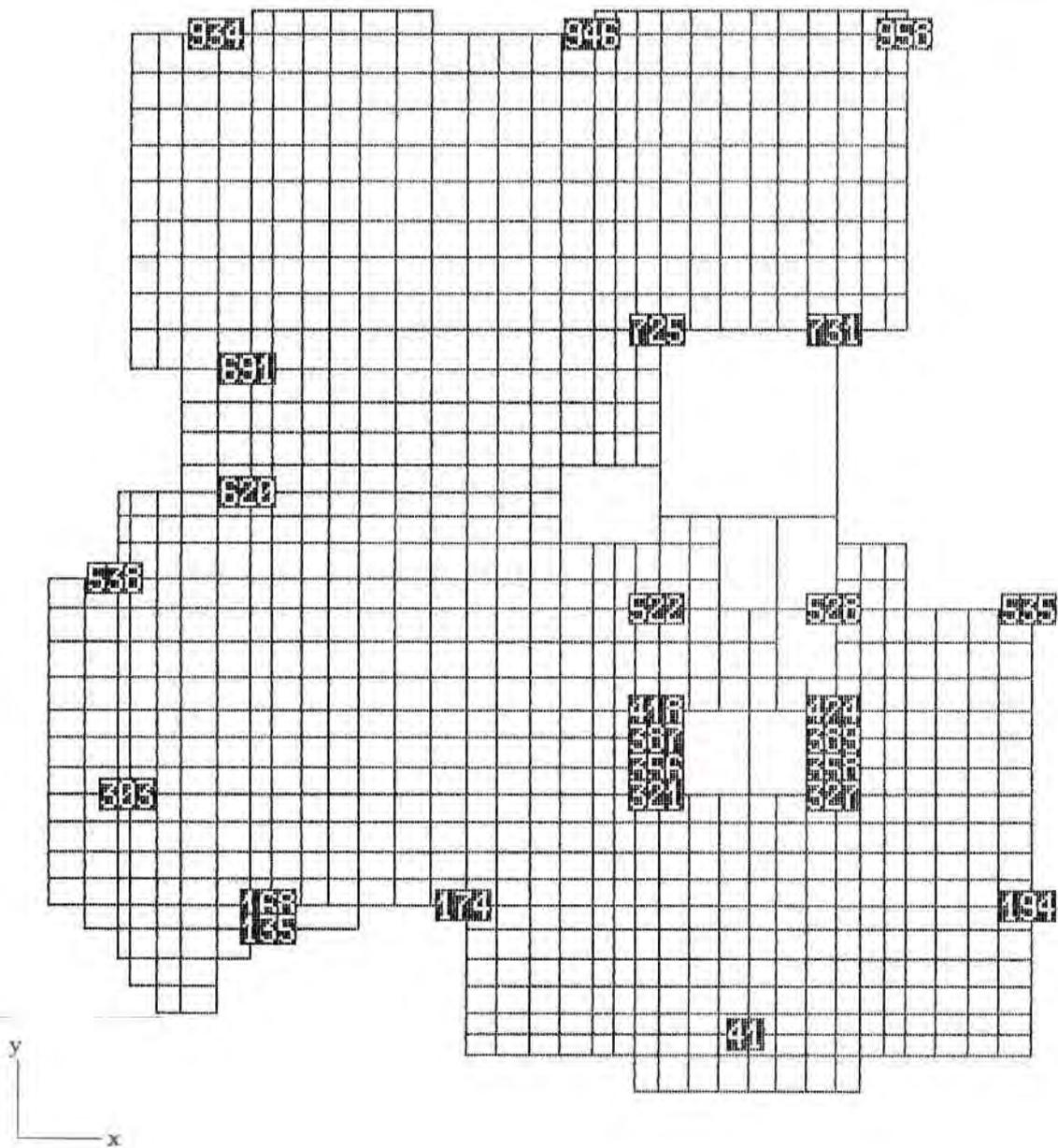
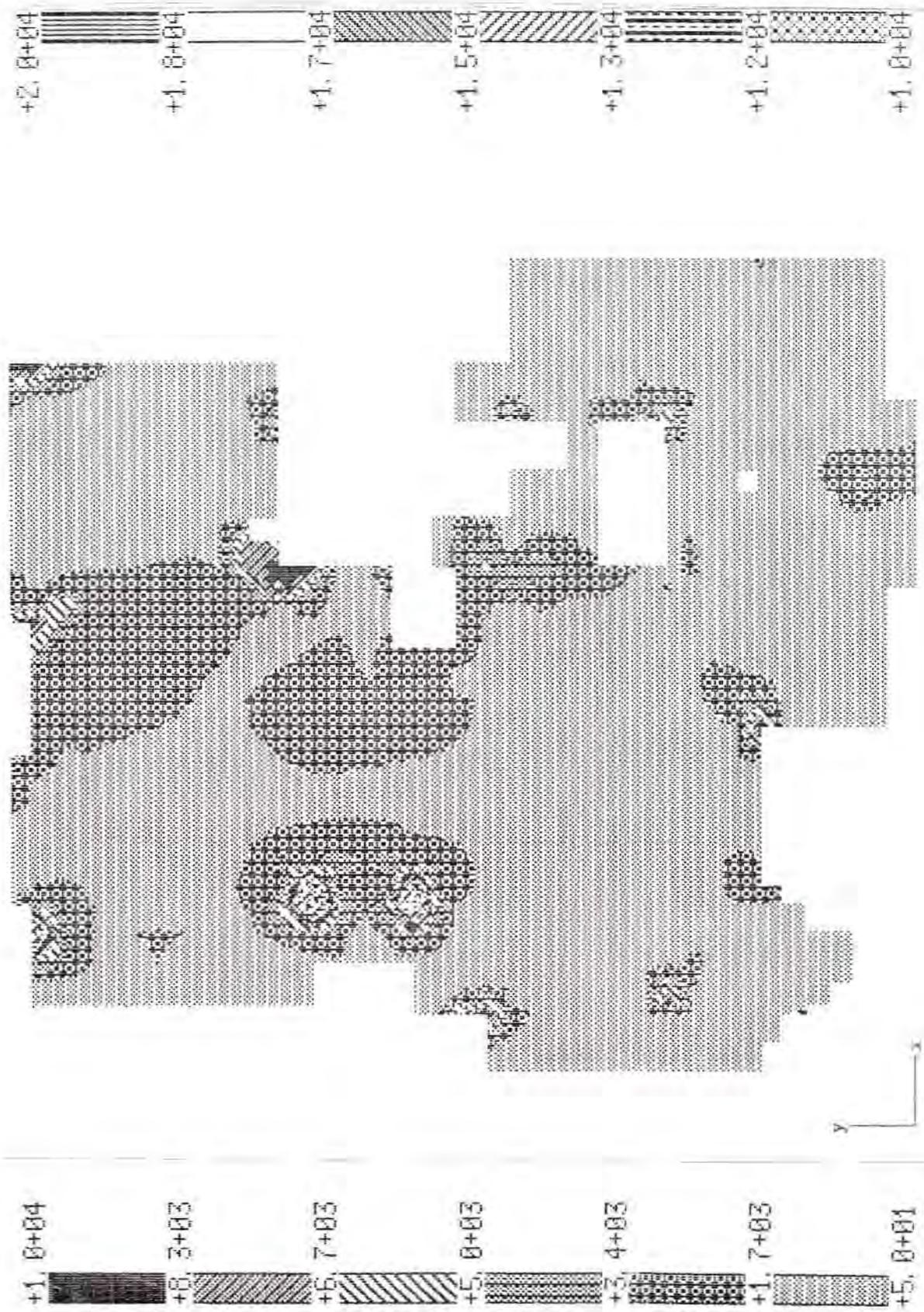


Figura 5.59 - Pavimento de edifício. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial e restrições. 978 nós, 961 elementos.



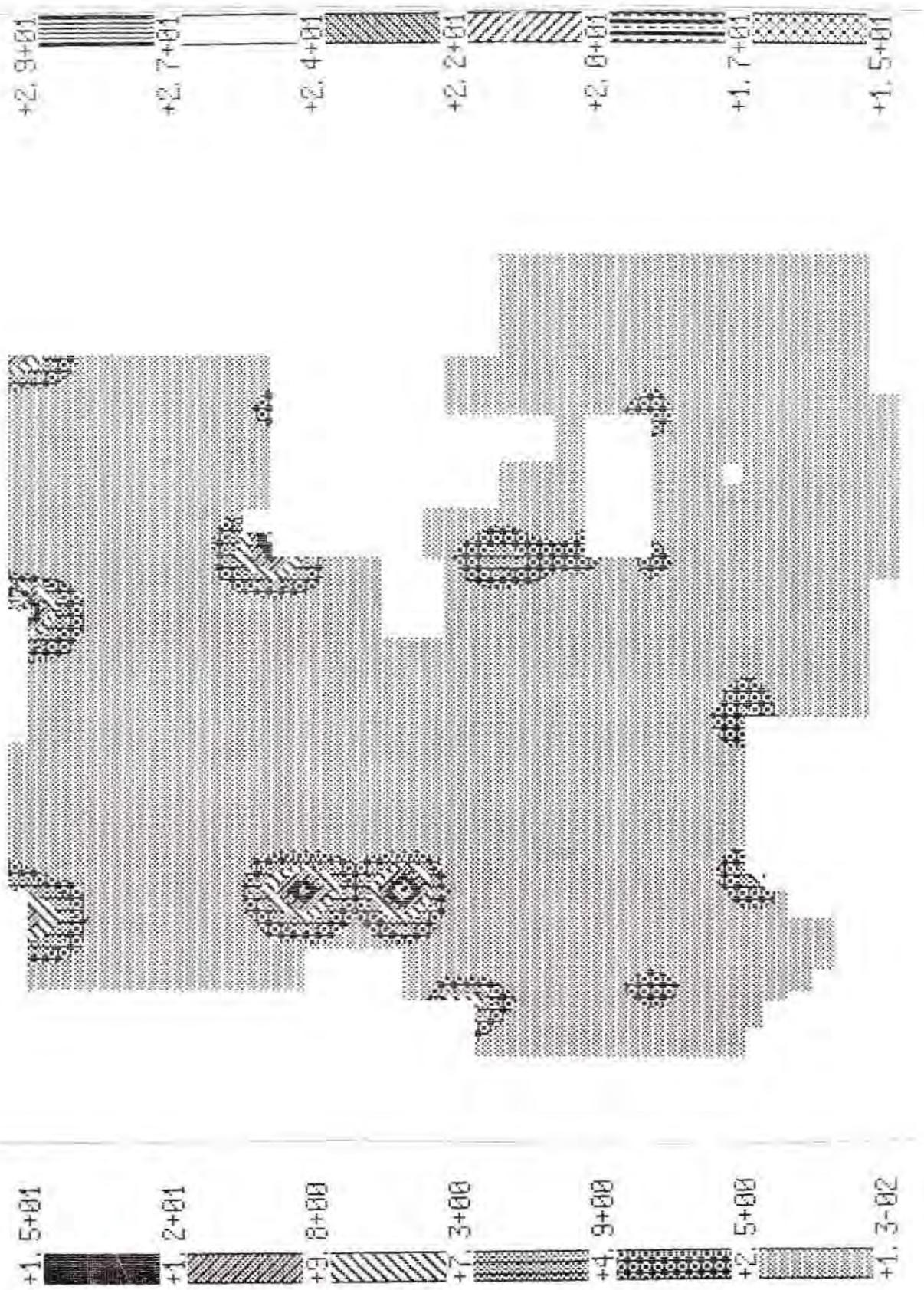


Figura 5.61 - Pavimento de edifício. Malha inicial. $\hat{\eta}$ (%).

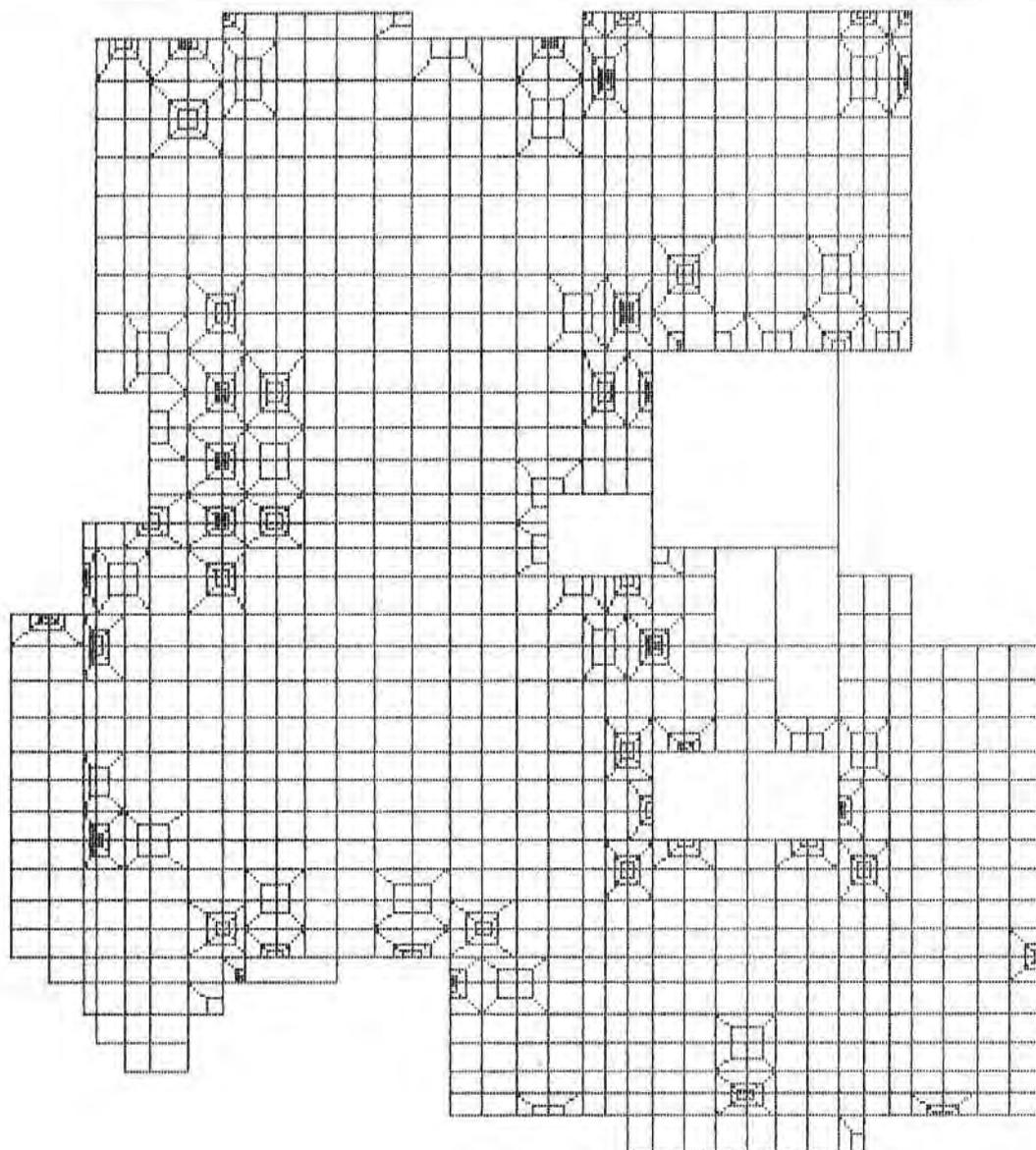


Figura 5.62 - Pavimento de edifício. 1º refinamento. Malha, 1958 nós, 1847 elementos.

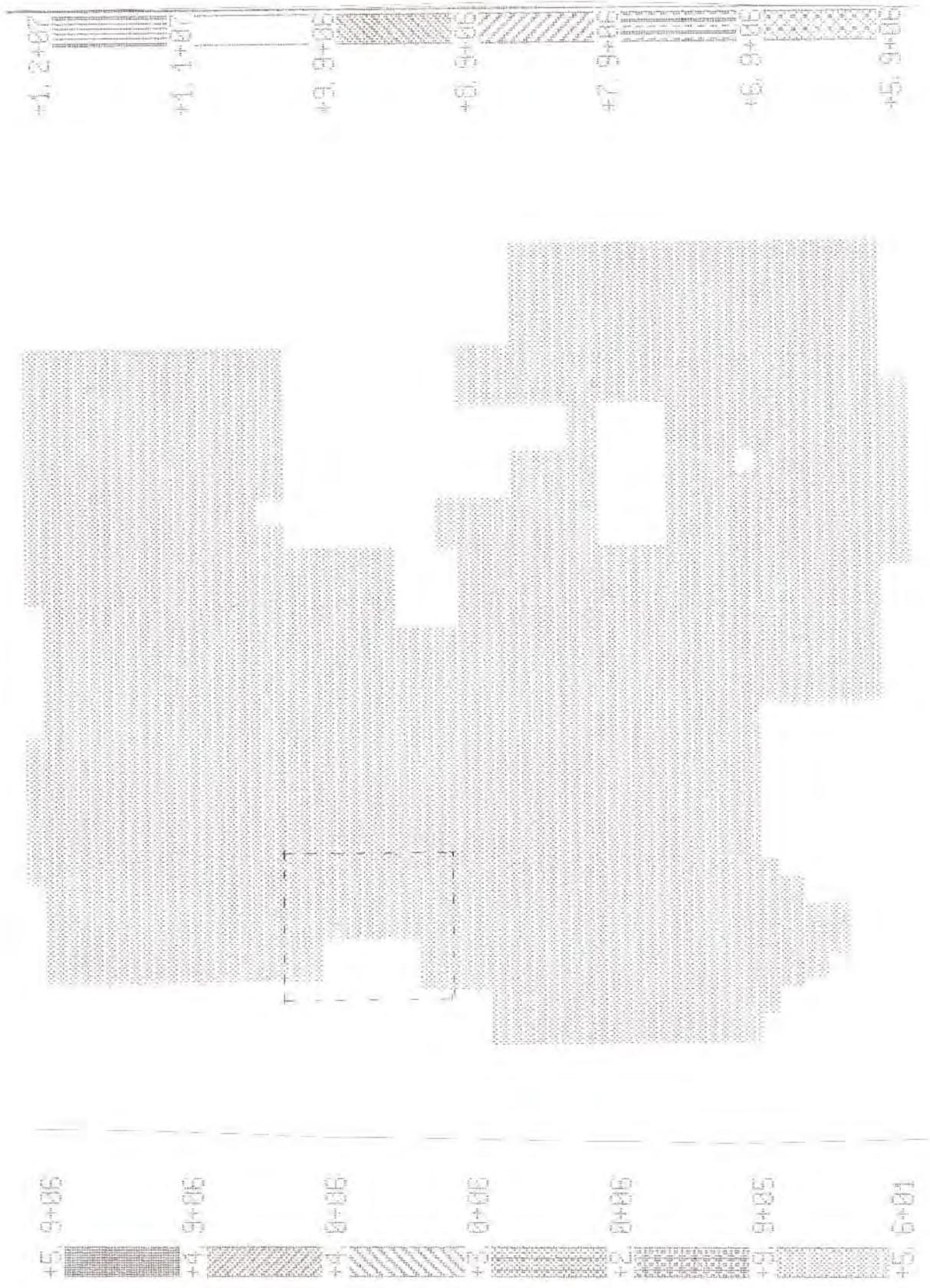


Figura 5.63 - Pavimento de edificio. 1º refinamento. M_{eq} .

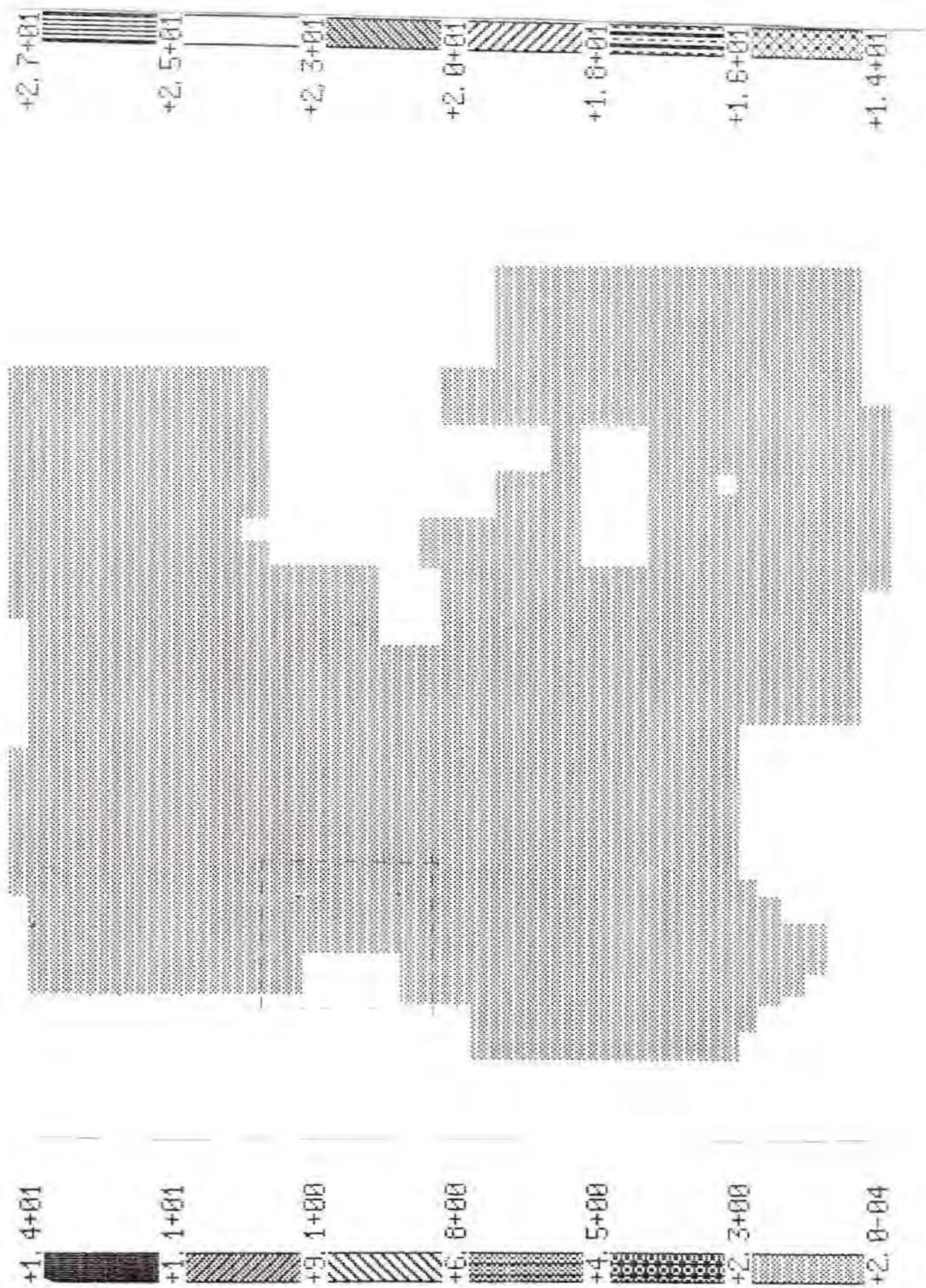


Figura 5.64 - Pavimento de edifício. 1º refinamento. $\hat{\eta}$ (%).

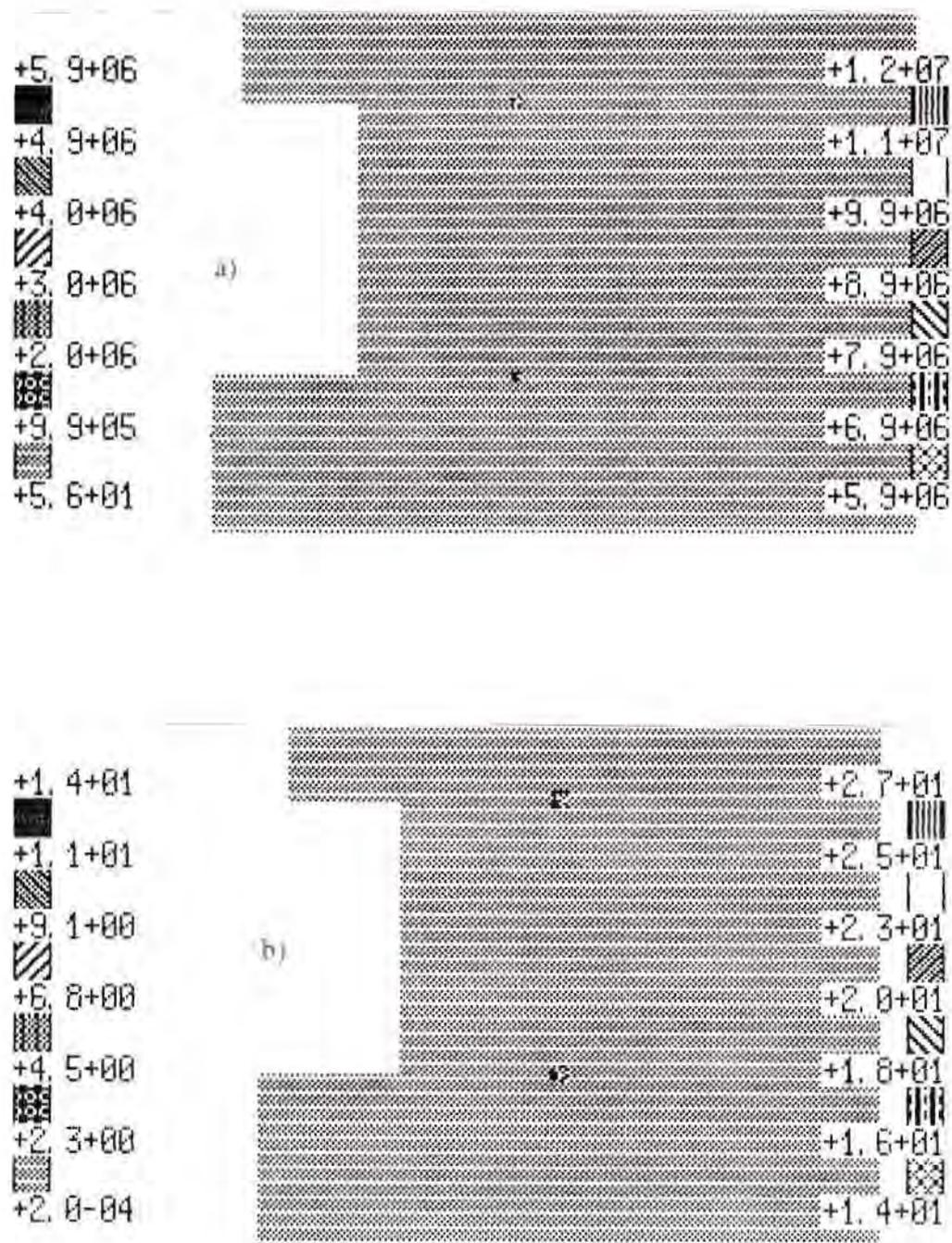


Figura 5.65 - Pavimento de edifício. 1º refinamento. a) Ampliação do M_{eq} . b) Ampliação de $\hat{\eta}$ (%).

5.4 - Casca poliédrica

5.4.1 - Elementos quadriláteros de 4 nós

Exemplo 12: Reservatório de água sujeito à uma carga de peso próprio. Casca poliédrica utilizando elementos quadriláteros de 4 nós. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.66 mostra um desenho da malha da estrutura. A figura 5.67 mostra a malha inicial e as figuras 5.71 e 5.68 mostram o momento equivalente na tampa e o $\hat{\eta}$ correspondentes à malha inicial. A figura 5.69 mostra a malha do 1º refinamento e as figuras 5.72 e 5.70 mostram o momento equivalente na tampa e o $\hat{\eta}$ correspondentes ao 1º refinamento.

Tabela 5.14 Momento equivalente máximo ($M_{eq\ max}$), erro relativo aproximado máximo ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 12, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.67.

Malha	Nós	Elementos	$M_{eq\ max}$	$\hat{\eta}_{max}(\%)$	$\hat{\eta}_{med}(\%)$
Inicial	138	134	30	26	8,42
1º Refino	518	510	43	19	4,99

Observações: Devido a fato de haver um número ímpar de faixas de elementos (3) na tampa, não haverá simetria da malha ao realizar o seu refinamento. Isto vai acarretar uma distribuição não-simétrica de tensões e de erro que pode ser verificada nas figuras 5.72 e 5.70. Mesmo assim, se consegue um abaixamento do nível de erro máximo e médio.

$$E=3,987 \times 10^9$$

$$\nu = 0,2$$

$$\text{Peso Esp.} = 2,5 \times 10^3$$

$$\text{Carga Peso Próprio em } Z=-1$$

$$L_1=1,8$$

$$L_2=4,0$$

$$L_3=2,0$$

$$T(\text{espess.})=7 \times 10^{-2}$$

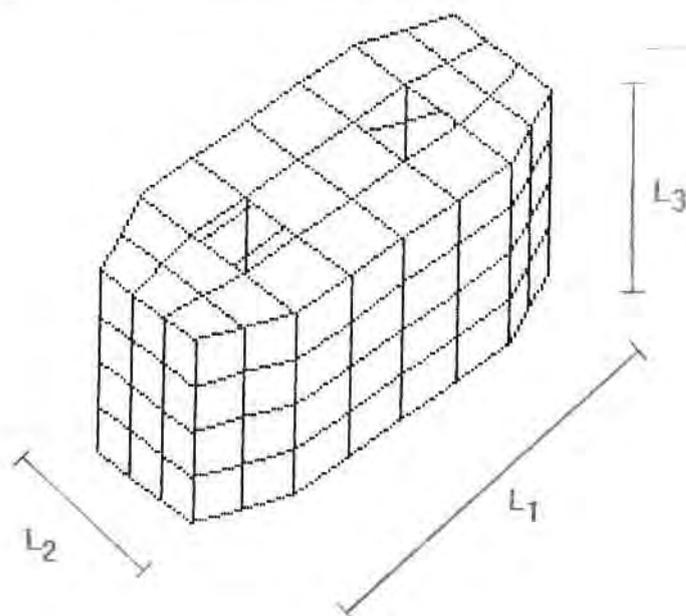


Figura 5.66 - Reservatório de água. Desenho da malha da estrutura.

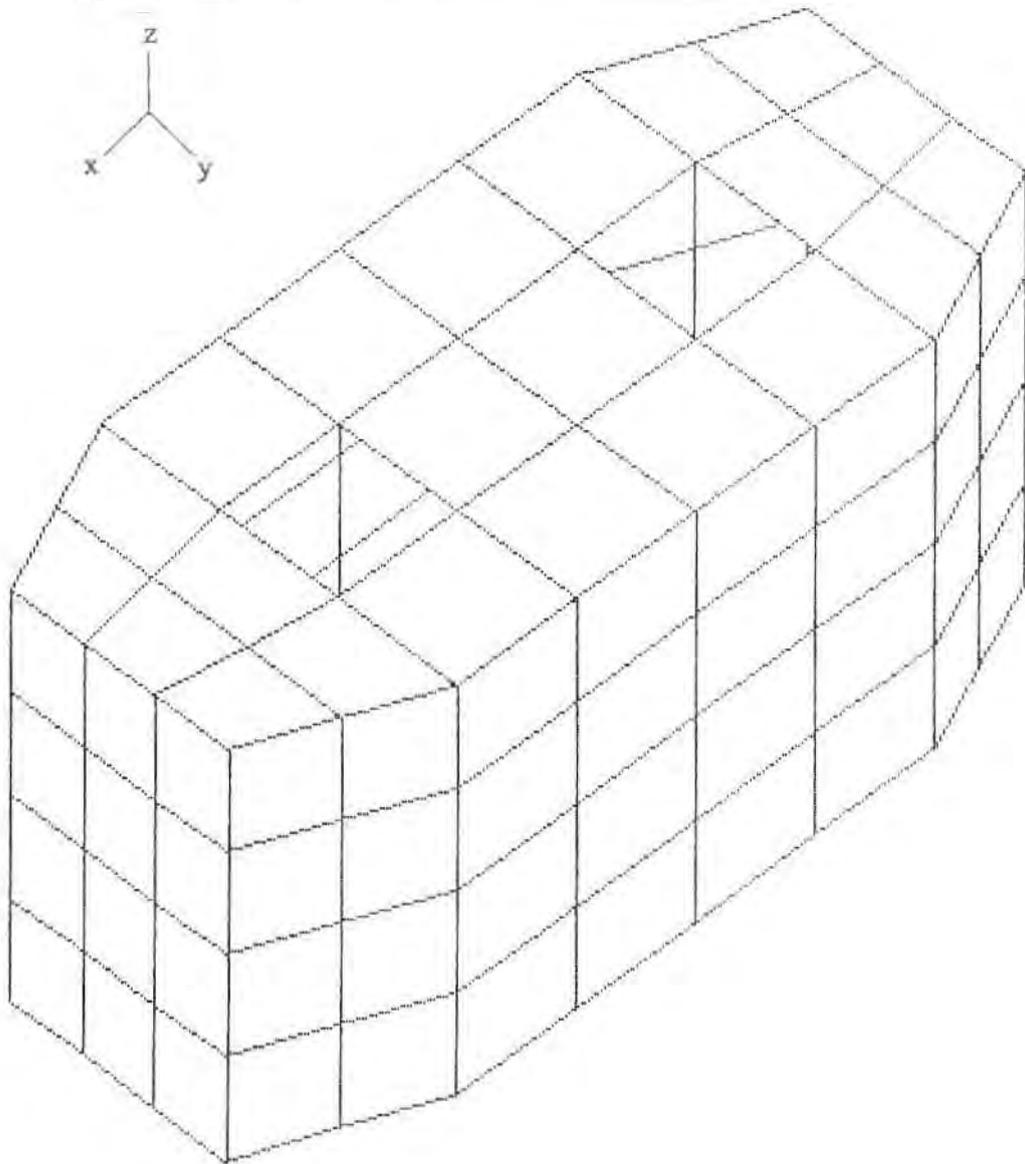


Figura 5.67 - Reservatório de água. Elementos quadriláteros de 4 nós. Malha inicial, 138 nós, 134 elementos.

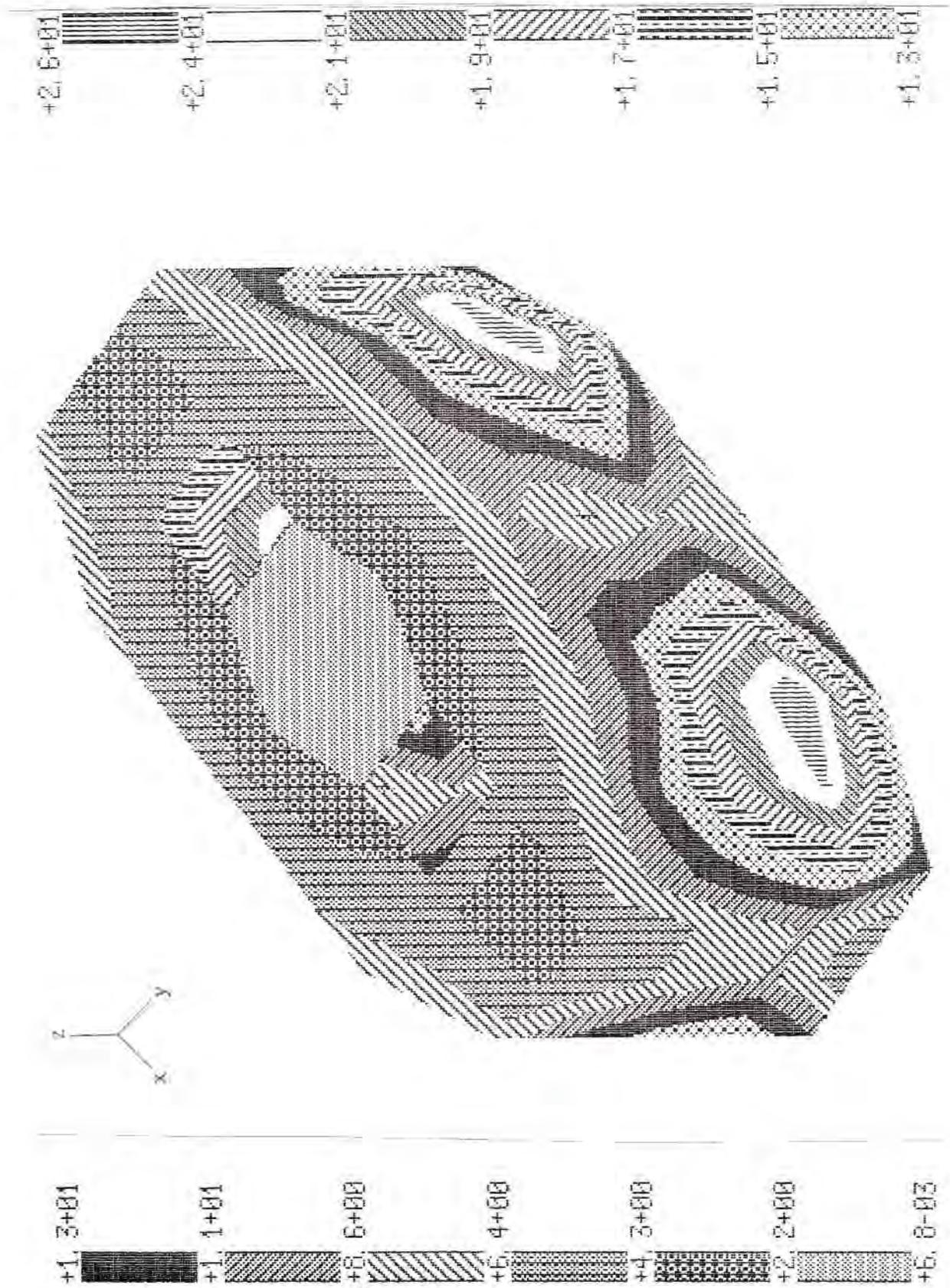


Figura 5.68 - Reservatório de água. Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%).

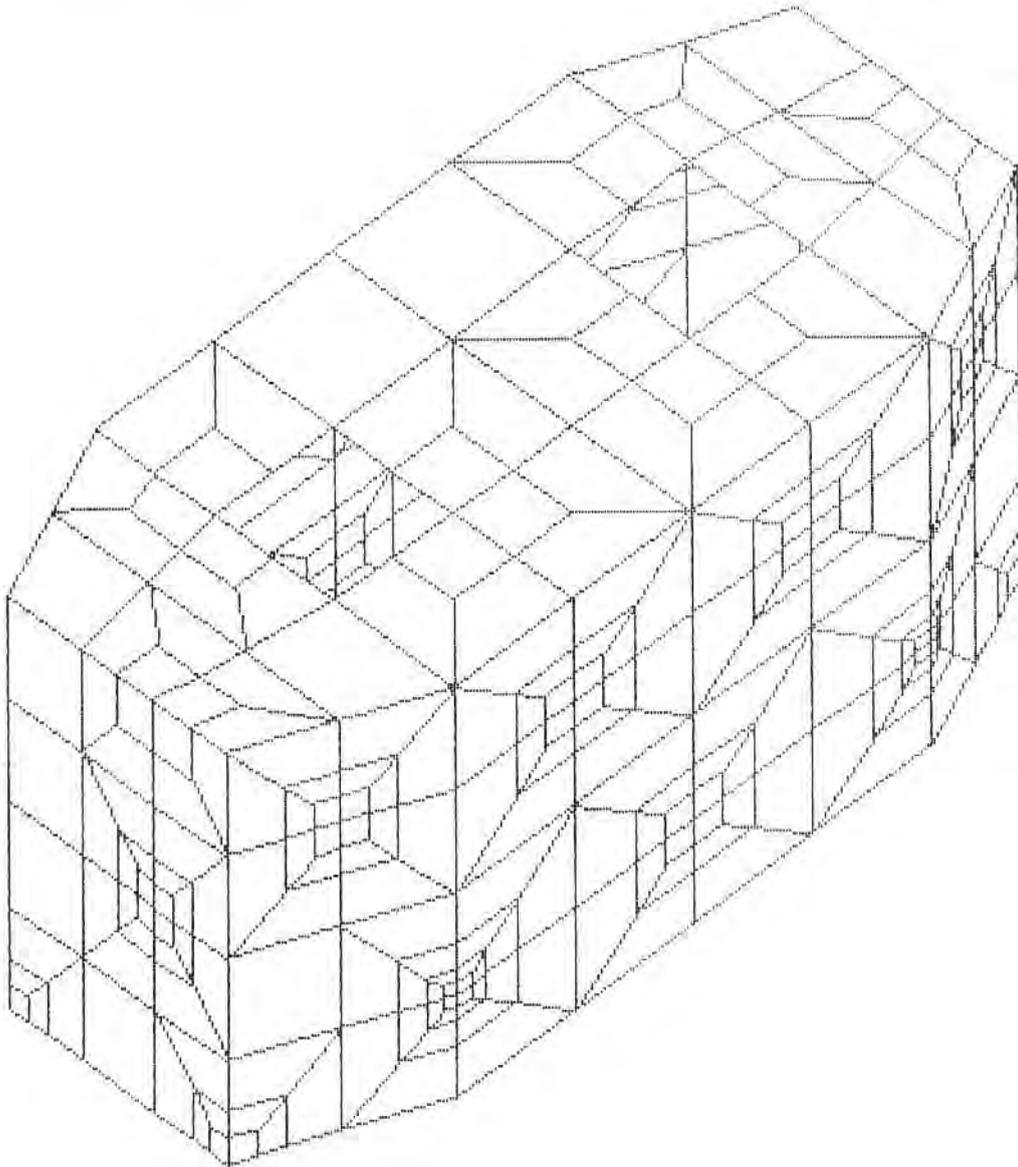


Figura 5.69 - Reservatório de água. 1º refinamento. Malha, 518 nós, 510 elementos.

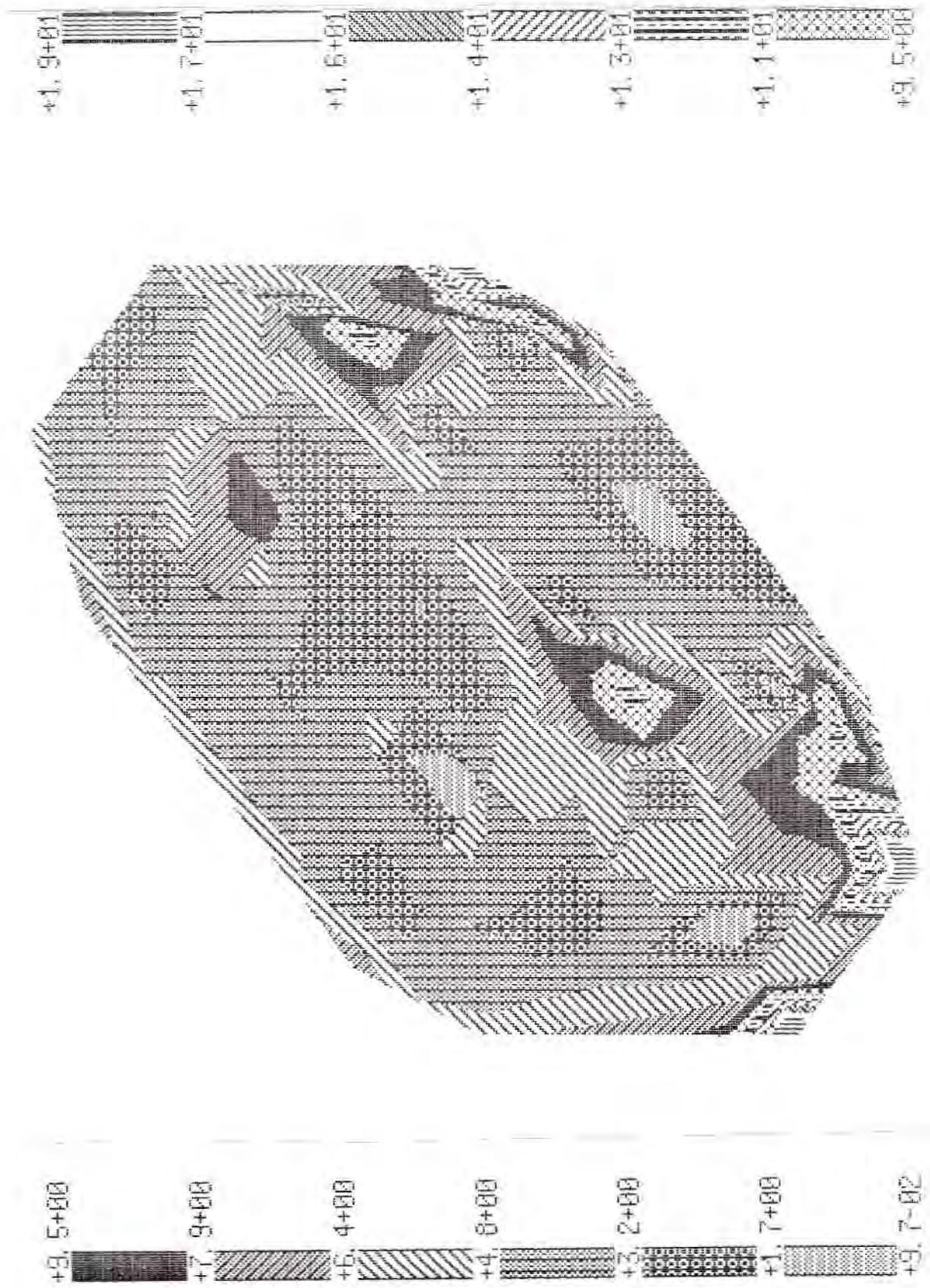


Figura 5.70 - Reservatório de água. 1^o refinamento. $\hat{\eta}(\%)$.

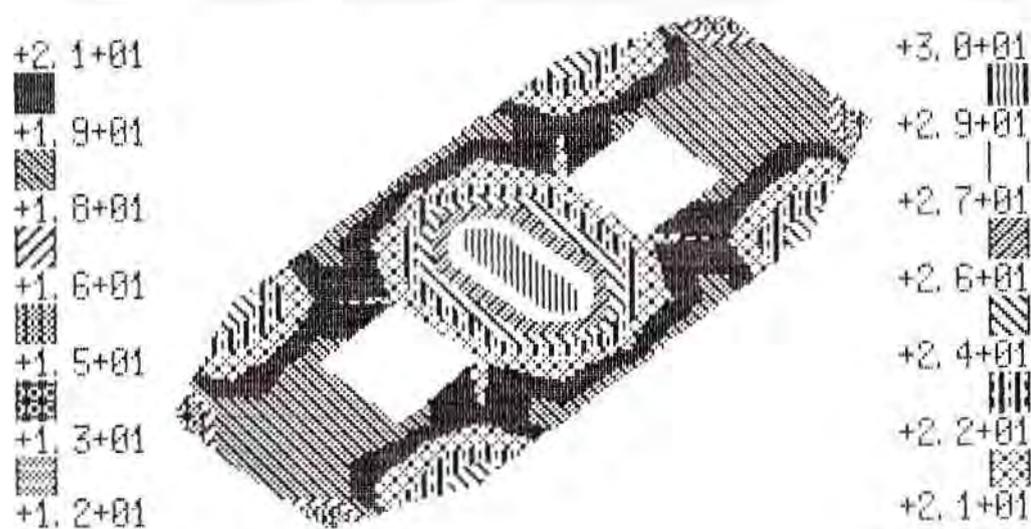


Figura 5.71 - Reservatório de água. Malha inicial, M_{sq} na tampa.

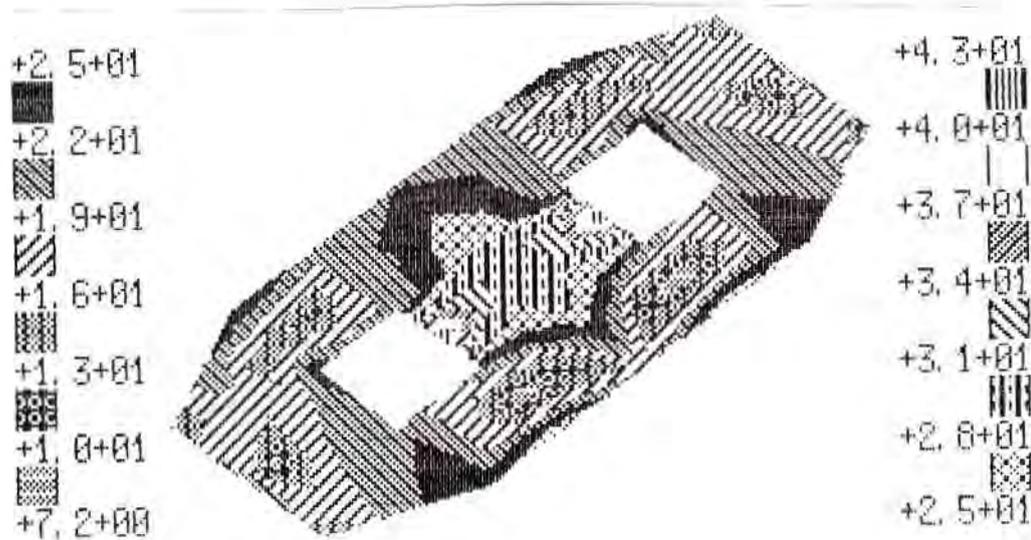


Figura 5.72 - Reservatório de água. 1º refinamento, M_{eq} na tampa.

5.4.2 - Elementos quadriláteros de 8 nós

Exemplo 13: Junção de dois perfis C para análise de torção em perfis de seção semi-aberta. Casca poliédrica utilizando elementos quadriláteros de 8 nós. Erro relativo máximo permitido $\bar{\eta}_T = 5\%$. A figura 5.73 mostra um desenho da malha da estrutura. A figura 5.74 mostra a malha inicial e a figura 5.75 mostra $\hat{\eta}$ correspondente à malha inicial. A figura 5.76 mostra a malha do 1º refinamento e a figura 5.77 mostra $\hat{\eta}$ correspondente ao 1º refinamento.

Tabela 5.15 - Erro relativo máximo aproximado ($\hat{\eta}_{max}$) e erro médio aproximado ($\hat{\eta}_{med}$) do exemplo 13, ao longo das etapas de refinamento da malha da figura 5.74.

Malha	Nós	Elementos	$\hat{\eta}_{max}(\%)$	$\hat{\eta}_{med}(\%)$
Inicial	517	146	5,5	0,55
1º Refino	557	158	4,8	0,54

Observações: Da tabela acima, nota-se que há um certo abaixamento do nível de erro máximo e um pequeno abaixamento do erro médio ao aplicar o processo de refinamento, atingindo assim a porcentagem de erro especificada $\bar{\eta}_T = 5\%$.

$P=6,1 \times 10^2$
 $E=2,1 \times 10^5$
 $\nu=0,3$
 $G=8,0769 \times 10^4$
 $T(\text{espess.})=4$
 $L_1=2,0 \times 10^3$
 $L_2=1,5 \times 10^3$
 $L_3=48$
 $L_4=106$

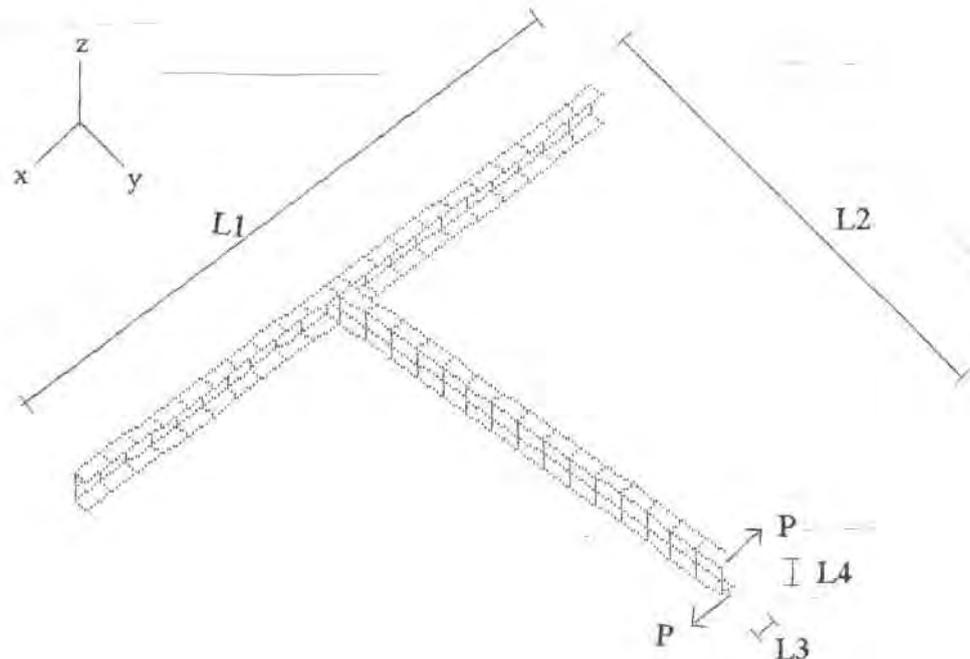


Figura 5.73 - Junção de dois perfis C. Desenho da malha da estrutura.

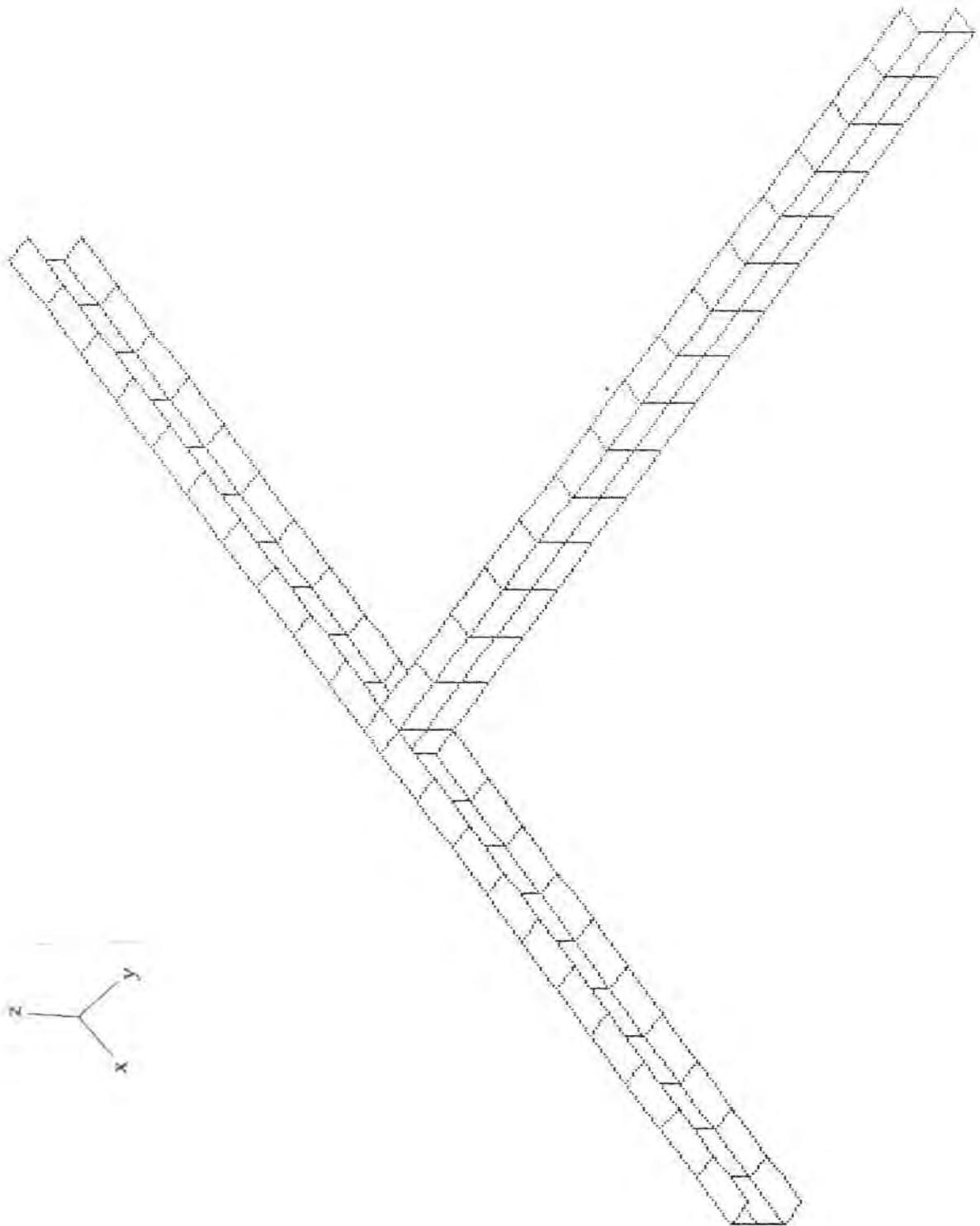


Figura 5.74 - Junção de dois perfis C. Elementos quadriláteros de 8 nós. Malha inicial, 517 nós, 146 elementos.

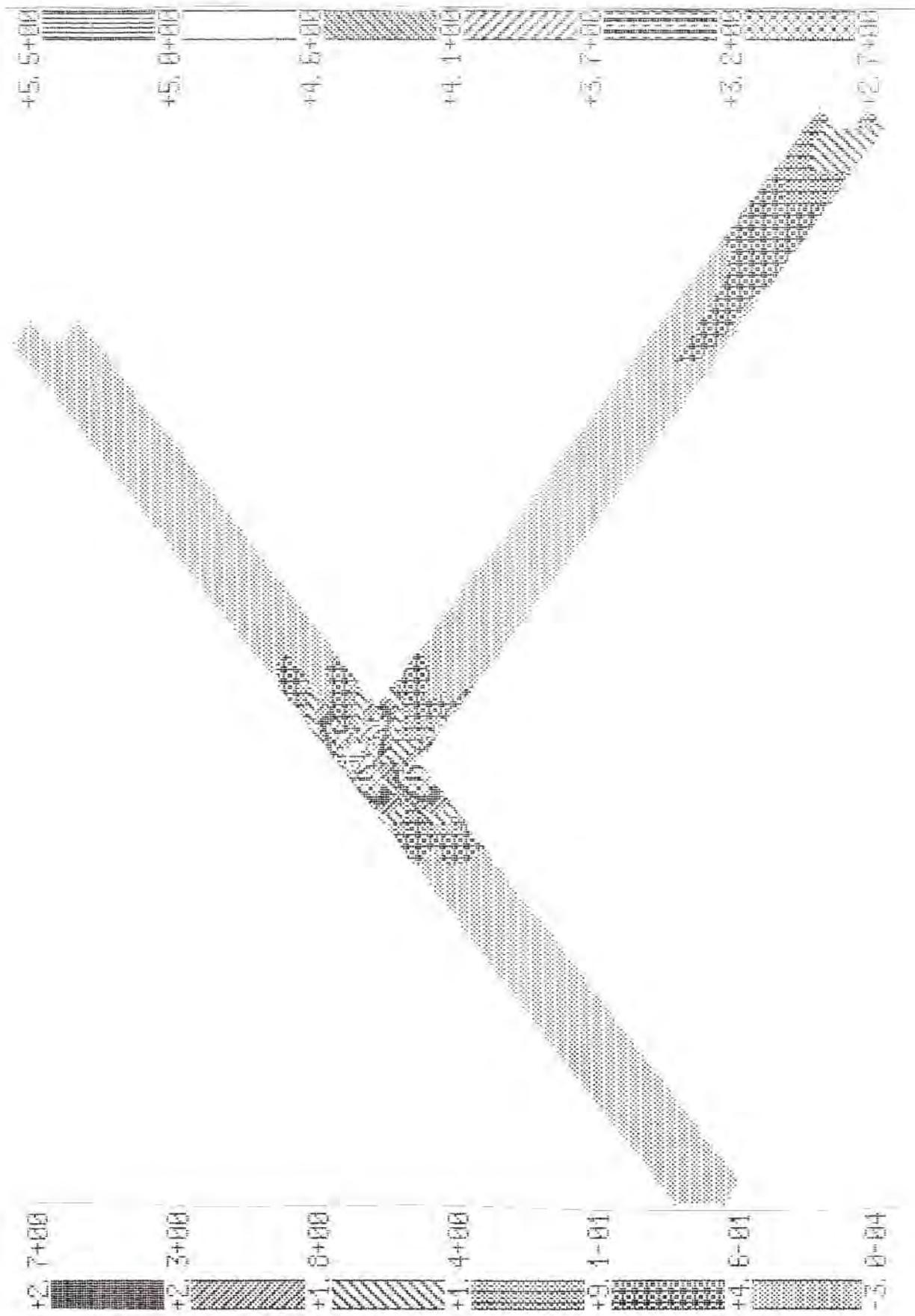


Figura 5.75 - Junção de dois perfis C. Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%).

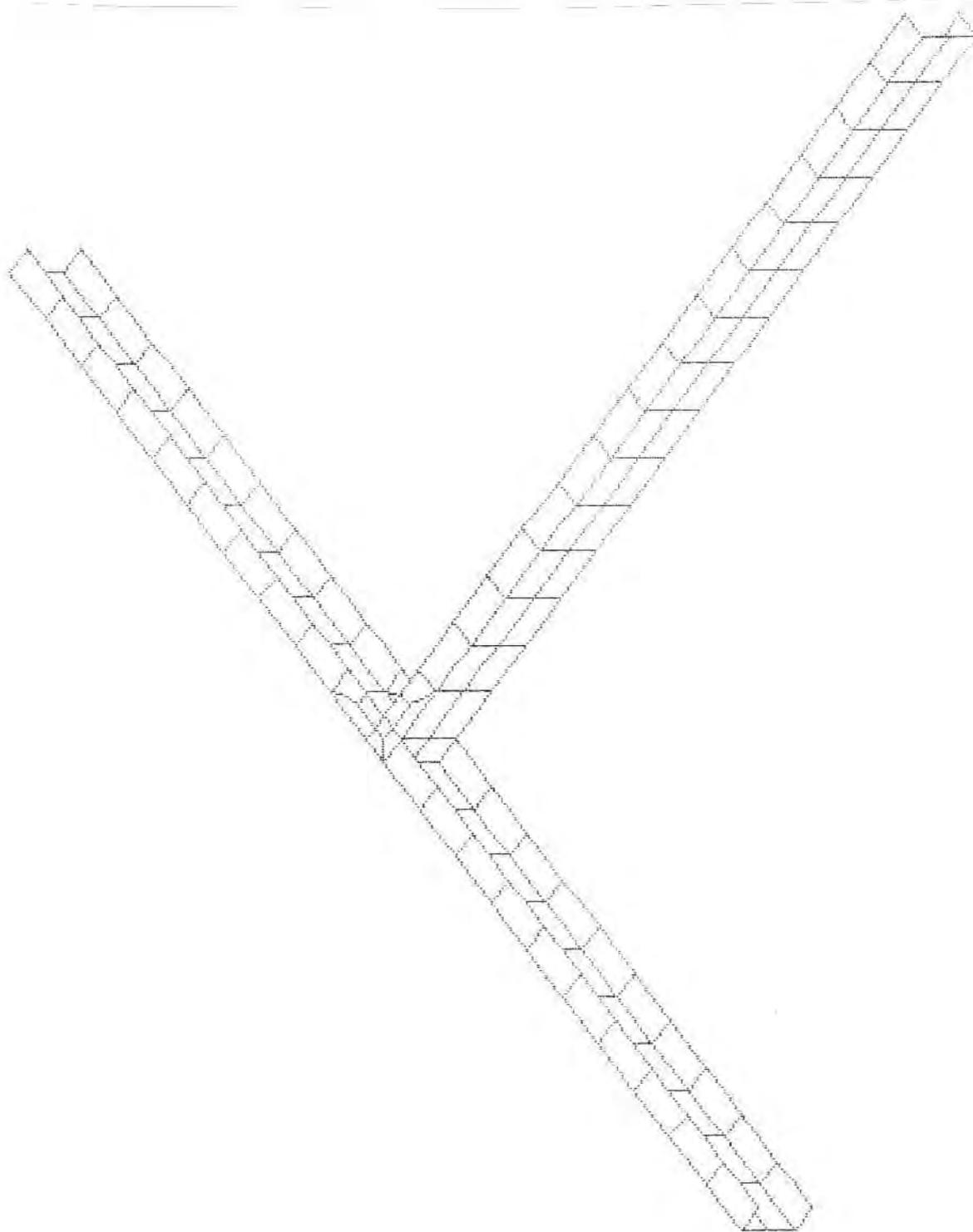


Figura 5.76 - Junção de dois perfis C. 1º refinamento. Malha, 639 nós, 182 elementos.

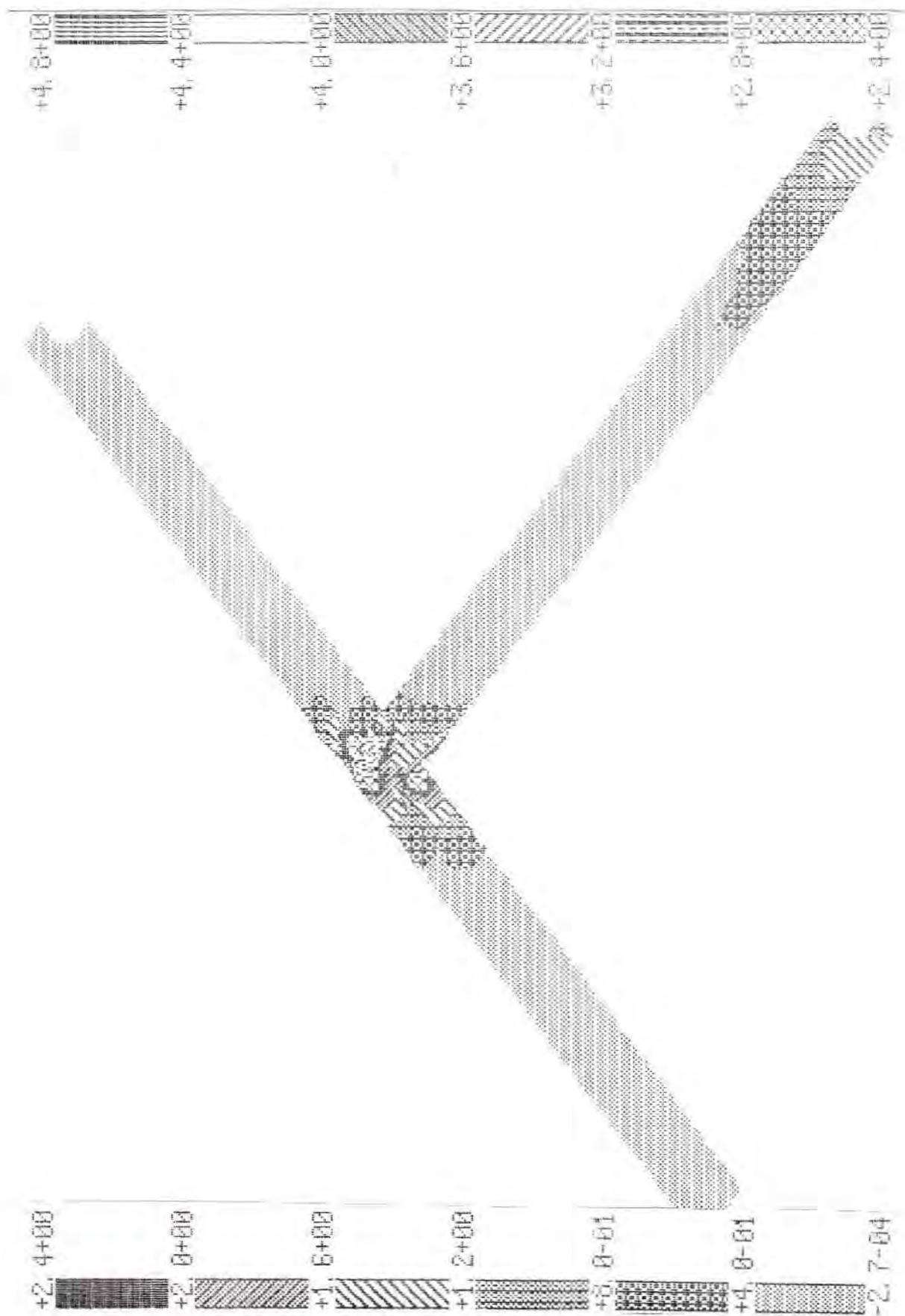


Figura 5.77 - Junção de dois perfis C. 1º refinamento, $\hat{\eta}$ (%).

6 - CONCLUSÕES

A estratégia de refinamento por nó, pelo fato de não criar nós irregulares, é de implementação relativamente fácil em sistemas convencionais de elementos finitos. A presença dos nós irregulares exige mudanças consideráveis na montagem e solução da matriz de rigidez, o que dificulta a implementação computacional de processos de refinamento onde eles aparecem. A limitação do processo utilizado neste trabalho é a distorção que aparece nos elementos gerados ao se refinar a malha. Ela aparece devido ao tipo de subdivisão adotado. Por outro lado, o processo que cria nós irregulares também tem uma limitação, normalmente de cinco etapas sucessivas de refinamento, devido ao cálculo dos deslocamentos nesses nós.

A estratégia implementada é de caráter geral, podendo ser aplicada em elementos bi e tridimensionais, tanto lineares como quadráticos, do tipo triângulo, quadrilátero, pentaedro ou hexaedro.

Com relação aos resultados obtidos nos exemplos analisados, pode-se fazer várias observações. Nota-se que, ao realizar refinamentos sucessivos dentro de uma mesma etapa, se consegue atingir baixos índices de erro mais rapidamente. Apesar da distorção dos elementos, que aumenta nas consecutivas etapas de refinamento, o processo permite que se obtenha um abaixamento do nível de erro até valores da ordem de 5%, exceto para pontos de aplicação de carga ou apoio. Para níveis de erro menores, corre-se o risco da distorção exagerada em alguns elementos não permitir o abaixamento do erro, embora isso não seja uma regra geral. Normalmente, o número de nós e elementos utilizado é, para um mesmo grau de precisão, igual ou menor do que o do processo que cria os nós irregulares. Em alguns exemplos observa-se que o erro máximo $\hat{\eta}_{max}$ não baixa ao se realizar o refinamento. Mesmo assim, a média dos valores da distribuição do erro ao longo da estrutura, dada pelo erro médio $\hat{\eta}_{med}$, diminui. Isso indica que, para verificar a eficiência do processo de refinamento, é importante analisar o erro máximo em conjunto com o erro médio.

O erro médio pode ser adotado como critério para verificar a necessidade da realização de refinamento. Se o erro médio for menor que o erro relativo máximo permitido, que é dado pelo usuário, a malha não precisa ser refinada.

O acoplamento do processo de refinamento por nó com o programa de regularização de malhas traz bons resultados, visto que a distribuição de tensões e erros melhora sensivelmente ao se fazer a regularização. Os resultados são ainda melhores quando se aplica o

programa de regularização em uma determinada etapa e não ao longo das diversas etapas sucessivas de refinamento.

Deve-se tomar cuidado ao integrar, para elementos triangulares, a matriz de massa nos pontos de integração porque, dependendo do número de pontos de integração escolhido, a matriz pode ser singular ou os seus termos podem ter valores diferentes dos esperados. Isto também pode introduzir erros quando se estiver analisando problemas dinâmicos.

De modo geral, o estimador de erros e o processo de refinamento utilizados mostram-se bastante eficientes. Observando os resultados dos exemplos, vê-se que os valores de tensão se aproximam dos valores teóricos esperados e o erro diminui até níveis razoáveis do ponto de vista de engenharia à medida em que a malha vai sendo refinada. Caso se desejar erros ainda menores, pode-se iniciar o processo com uma malha mais fina. Sob o aspecto computacional, ambos também demonstram eficiência visto que o tempo que o estimador de erros gasta não passa de 29% do tempo total e o tempo utilizado pelo processo de refinamento não excede 19% do mesmo.

Para trabalhos futuros, dá-se como sugestões fazer a implementação do algoritmo de refinamento de malhas para elementos triangulares e pentaédricos. Além disso, pode-se implementar também algoritmos de atualização automática das planilhas de tipo de elemento, propriedades, constantes e cargas. Esses algoritmos não foram implementados por falta de tempo. Outra possibilidade é aproveitar os resultados fornecidos pelo estimador de erros para atuar diretamente em cima da geração de malhas, utilizando um processo de refinamento que evite ao mesmo tempo a formação de nós irregulares e a geração de elementos muito distorcidos.

7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ALQUATI, E. L. G.; GROEHS, A. G. Transformação triângulos/quadriláteros em malhas não estruturadas para elementos finitos. Em: XVI CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, Curitiba, Brasil, 1995. Anais. v. 1, p. 478-87.
- 2 AYMONE, J. L. F.; GROEHS, A. G. Proposta de refinamento unificado automático para um sistema de elementos finitos. Nas: XXVII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, Tucuman, Argentina, 1995. Memorias. V. 4, p. 59-70.
- 3 AYMONE, J. L. F.; GROEHS, A. G. Refinamento automático múltiplo de malhas bi e tridimensionais em sistemas de elementos finitos. No: 9º CONGRESSO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS Y SUS APLICACIONES (ENIEF '95), Bariloche, Argentina, 1995. Anais. V. único, p. 139-148.
- 4 AYMONE, J. L. F.; GROEHS, A. G. Refinamento automático múltiplo de malhas bi e tridimensionais sem criação de nós irregulares. No: XVI CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, Curitiba, UFPR, 1995. Anais. V. 1, p. 197-206.
- 5 AZEVEDO, R. L. Geração e adaptação automática de malhas de elementos finitos na simulação de escoamentos. Porto Alegre, 1994. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 6 BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 1597-615, 1978.
- 7 BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, v. 15, p. 736-54, 1978.
- 8 BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 18, p. 519- 40, 1979.
- 9 BABUSKA, I.; SZABO, B. On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 18, p. 323-41, 1982.
- 10 BARLOW, J. Optimal stress location in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p. 243-51, 1976.

- 11 BREBBIA, C. A.; CONNOR, J. J. **Fundamentals of finite element techniques for structural engineers**. London, Butterworth & Co. (Publishers) Ltd, 1973.
- 12 DEVLOO, P. R. A three-dimensional adaptive finite element strategy. **Computer and Structures**, v. 38, p. 121-30, 1991.
- 13 FELIPPA, C. A. Optimization of finite element grids by direct energy search. **Applied Mathematical Modelling**, v. 1, p. 93-6, 1976.
- 14 FERRANTE, A. J.; SANTOS, M. I. G.; FILHO, E. C.; FRANCO, J. S. G. **A linguagem Lorane Linear para análise estrutural por computador**. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, 1977.
- 15 GAGO, J. P. de S. R.; KELLY, D. W.; ZIENKIEWICZ, O. C.; BABUSKA, I. A-posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part II - adaptive mesh refinement. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 1621-56, 1983.
- 16 GROEHS, A. G.; SANTOS, M. I. G. GAELI - Gerador e analisador de estruturas lineares. Porto Alegre, Grupo de Análise Numérica Aplicada, UFRGS, 1990.
- 17 HINTON, E.; CAMPBELL, J. S. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, p. 461-480, 1974.
- 18 KELLY, D. W.; GAGO, J. P. de S. R.; ZIENKIEWICZ, O. C.; BABUSKA, I. A-posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part I - error analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 1593-619, 1983.
- 19 LYRA, P. R. M.; ALVES, L. D.; COUTINHO, A. L. G. A.; LANDAU, L. Comparison of mesh refinement strategies for the h -version of the finite element method. In: X CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, Porto, Portugal, 1989. **Anais**. v. 2, p. A595-A610.
- 20 ODEN, J. T.; BRAUCHLL, H. J. On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 3, p. 317-25, 1971.
- 21 ODEN, J. T.; REDDY, J. N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 6, p. 55-61, 1973.
- 22 OLIVEIRA, E. R. de A. Theoretical foundation of the finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 4, p. 929-52, 1968.
- 23 PRAGER, W. A note on the optimal choice of finite element grids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 6, p. 363-66, 1975.
- 24 SILVA, L. C. P. **Um processo de refinamento auto-adaptativo tipo h para o método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 1991. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- 25 SZABO, B. A.; MEHTA, A. K. P-convergent finite element approximations in fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 551-60, 1978.
- 26 TEZUKA, A. Adaptive remeshing process with quadrangular finite elements. *Advances in Engineering Software*, v. 15, p. 185-201, 1992.
- 27 TURCKE, D. J.; McNEICE, G. M. Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study. *Computer and Structures*, v. 4, p. 499-519, 1974.
- 28 WIBERG, N. E.; LI, X. D. A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semidiscrete finite element method in dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 3585-603, 1994.
- 29 ZIENKIEWICZ, O. C.; GAGO, J. P. de S. R.; KELLY, D. W. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computer and Structures*, v. 16, p.53-65, 1983.
- 30 ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p. 337-57, 1987.

APÊNDICE A

A. ALGORITMO DE DECISÃO DA REALIZAÇÃO DE REFINAMENTO

- Ler arranjos *XYZ* (coordenadas) e *LC* (conetividades)

- Ler *NON*, *NEN*, *NOL*, *NEL*, *QN* e *QL*

SE o arquivo que controla o processo de refinamento não existe ENTÃO

NIVEL=1

- Marcar todos os nós com *NCONTR*=*NIVEL*

SENÃO

- Ler *NIVEL*

- Ler o arranjo *NCONTR* para todos os nós

FIM do SE

FAÇA *I* = 1 a *QL*

- Ler, do arquivo de erros, o arranjo *AREA*

- Ler, do arquivo de erros, o arranjo *NERL* para todos os carregamentos

- Selecionar, dentre os carregamentos ativos, o maior erro e colocá-lo no arranjo *NEERL*

CONTINUE

P = 1

- Ler a variável *AREAT* e os arranjos *NTENS* e *NERRO* para todos os carregamentos

- Selecionar, dentre os carregamentos ativos, os maiores *NTENS* e *NERRO* colocando na variáveis *NTENSM* e *NERROM*

Quadro A.1 - Algoritmo de decisão da realização de refinamento.

FAÇA $I = 1$ a QL

- Determinar $ELMAX$ em cada elemento em função de ETA

SE o elemento for quadrático ENTÃO

- Marcar com sinal negativo os nós intermediários em NON

$P = 2$

FIM do SE

CONTINUE

$QNC = 0$

FAÇA $I = 1$ a QN

SE o nó tiver sinal positivo em NON ENTÃO

- Para cada nó, estabelecer $MERRO$ utilizando $NERL$ e $MLIMER$ utilizando $ELMAX$

$QNC = QNC + 1$

SENÃO

- Zerar a posição correspondente de $MERRO$ e $MLIMER$

FIM do SE

CONTINUE

- Utilizar um algoritmo do tipo "Bucket-Sort" para classificar os nós de canto colocando, por ordem crescente de erro, o número externo dos nós (NEN) de canto no arranjo $IORDNO$.
Obs.: Se todos os nós tiverem o mesmo erro, $IORDNO$ é preenchido na ordem crescente do NEN de canto

- Inverter o arranjo $IORDNO$, colocando os nós em ordem decrescente de erro (do maior erro para o menor)

$NLREF = 0$

$LQIN = QL$

$NQIN = QN$

- Voltar o valor positivo para os nós intermediários em NON

FAÇA $I = 1$ a QNC

$NO = IORDNO(I)$

SE $MERRO(NO) > MLIMER(NO)$ e $NCONTR(NO) = NIVEL$ ENTÃO

$NCONTR(NO) = -NIVEL$ (nó não poderá ser refinado novamente)

```

NLREF=NLREF+1
RO=MERRO(NO) / MLIMER(NO)
NREFI = INT  $\left[ \frac{1}{P} \times \frac{\text{LOG}(RO)}{\text{LOG}(2)} \right]$ 
SE  $2^{NREFI-1} \geq RO^{1/P}$  ENTÃO
    NREFI=NREFI-1          (O algoritmo falha ao ter 1 refinamento a mais
    SE NREFI=0 ENTÃO      que o necessário quando RO é um número
        NREFI=1          inteiro)
    FIM do SE
FIM do SE
NQAR = QN
LQAR = QL
FAÇA J = 1 a NREFI
    VARRER os elementos ao redor do nó que está sendo refinado
        - Realizar o refinamento de cada elemento conforme o seu tipo
          (ver algoritmos de geração de nós e elementos no Apêndice B)
    SE J=1 ENTÃO
        VARRER NCEL (nós de canto dos elementos ligados ao
            nó refinado)
            SE NCONTR(NCEL)>0 e NCONTR(NCEL)=NIVEL
                ENTÃO
                    NCONTR(NCEL)=0 (impedir refino na etapa)
            FIM do SE
        CONTINUE
    FIM do SE

    VARRER IK=1 a NOVONO
        - Atualizar NON e NEN
        - Atualizar coordenadas (XYZ)
    CONTINUE
    - Atualizar conectividades para incluir os novos elementos

```

Quadro A.1 - Algoritmo de decisão da realização de refinamento (continuação).

```

VARRER  $IK = 1$  a  $NOVOEL$ 
    - Atualizar  $NOL$  e  $NEL$ 
CONTINUE
 $QN = QN + NOVONO$ 
 $QL = QL + NOVOEL$ 
    - Fazer o MERGE (união de nós) para os nós entre  $NQAR$  e  $QN$ 
    - Renomear os nós
CONTINUE
CONTINUE
FIM do SE
CONTINUE
FAÇA  $I = 1$  a  $NQIN$ 
    SE  $NCONTR(I)=0$  ENTÃO
         $NCONTR(I)=NIVEL$  (voltar ao valor anterior de  $NCONTR$  para os nós de canto
        dos elementos ligados ao nó refinado)
    FIM do SE
CONTINUE
FAÇA  $I = NQIN+1$  a  $QN$ 
     $NCONTR(I)=NIVEL+1$  (atribuir aos novos nós)
CONTINUE
SE  $QN=NQIN$  ENTÃO
    - "Foram refinados os nós do nível= $NIVEL$  onde houve necessidade"
     $NIVEL=NIVEL+1$ 
FIM do SE
- Gravar coordenadas ( $XYZ$ ) e conectividades ( $LC$ ) da nova malha
- Gravar  $NON$ ,  $NEN$ ,  $NOL$ ,  $NEL$ ,  $QN$ ,  $QL$  e  $NCONTR$ 
FIM

```

Quadro A.1 - Algoritmo de decisão da realização de refinamento (continuação).

- Usando as funções de interpolação, calcular as coordenadas reais dos novos nós:

FAÇA $J = 1$ a *NOVONO*

VÁ PARA (50,60,70), J

50 $A1=0.0$

$A2=-1.0$

VÁ PARA 100

60 $A1=0.0$

$A2=0.0$

VÁ PARA 100

70 $A1=-1.0$

$A2=0.0$

VÁ PARA 100

100 CONTINUE

$A3=0.0$

CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (N) conforme o tipo de elemento e as coordenadas $A1$, $A2$ e $A3$

- Preencher arranjos com as coordenadas dos novos nós:

FAÇA $K = 1$ a 4

$XNN(J)=XNN(J)+XAUX(K)*N(K)$

$YNN(J)=YNN(J)+YAUX(K)*N(K)$

CONTINUE

CONTINUE

- Calcular o máximo nome de nó (*NONMAX*) e de elemento (*NOLMAX*)

- Obter o nome dos novos nós:

$NN(1)=NONMAX+1$

$NN(2)=NN(1)+1$

$NN(3)=NN(2)+1$

Quadro B.1 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

- Estabelecer conectividades dos elementos filhos:

Elemento 1 (similar ao pai)

$CON1(NPOS)=NC(NPOS)$

FAÇA $I = 1$ a 3

$CON1(MOD((NPOS-1+I),4)+1)=NN(I)$

CONTINUE

Elemento 2

FAÇA $I = 1$ a 2

$CON2(MOD((NPOS-1+I),4)+1)=NC(MOD((NPOS-1+I),4)+1)$

CONTINUE

$J=2$

FAÇA $I = 3$ a 4

$CON2(MOD((NPOS-1+I),4)+1)=NN(J)$

$J=J-1$

CONTINUE

Elemento 3

FAÇA $I = 2$ a 3

$CON3(MOD((NPOS-1+I),4)+1)=NC(MOD((NPOS-1+I),4)+1)$

CONTINUE

$J=3$

FAÇA $I = 4$ a 5

$CON3(MOD((NPOS-1+I),4)+1)=NN(J)$

$J=J-1$

CONTINUE

FIM

Quadro B.1 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

O quadro B.2 apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 8 nós.

NOVOEL=2

NOVONO=11

NNCEL=4

- Calcular *NPOS* da mesma forma feita para os elementos quadriláteros de 4 nós.
- Estabelecer *NC()* da mesma maneira feita nos elementos quadriláteros de 4 nós.
- Colocar nos arranjos *XAUX* e *YAUX* as coordenadas *X* e *Y* dos nós do elemento:

FAÇA *J=1,4* (nós de canto)

*IP=NEN(LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS-2+J),4))+1))*

*XAUX(J)=XYZ((IP-1)*CN+1)*

*YAUX(J)=XYZ((IP-1)*CN+2)*

CONTINUE

FAÇA *J=1 a 4* (nós intermediários)

*IP=NEN(LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS-2+J),4))+5))*

*XAUX(J+4)=XYZ((IP-1)*CN+1)*

*YAUX(J+4)=XYZ((IP-1)*CN+2)*

CONTINUE

- Preencher *NN(1)* com a posição abaixo da sequência de conectividades do elemento pai

*NN(1)=LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS-1),4))+5)*

NCONTR(NEN(NN(1)))=NIVEL+1 (este será um nó de canto para os elementos filhos, portanto deve-se somar 1 na variável *NIVEL* para a sua posição)

- Criar nó central

A1=0.0

A2=0.0

A3=0.0

CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (*N*) conforme o tipo de elemento e as coordenadas *A1*, *A2* e *A3*

Quadro B.2 - Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos quadriláteros de 8 nós.

- Preencher arranjos com as coordenadas dos novos nós:

FAÇA K=1 a 8

$$XNN(2)=XNN(2)+XAUX(K)*N(K)$$

$$YNN(2)=YNN(2)+YAUX(K)*N(K)$$

CONTINUE

- Calcular o máximo nome de nó (*NONMAX*), de elemento (*NOLMAX*) e o máximo número externo de nó (*NENMAX*)

- Estabelecer o nome dos nós para os novos nós:

$$NN(2)=NONMAX+1$$

- Este será um nó de canto para os elementos filhos, portanto deve-se somar 1 na variável *NIVEL* para a sua posição:

$$NCONTR(NENMAX+1)=NIVEL+1$$

- Preencher *NN(3)* com a posição abaixo da sequência de conectividades do elemento pai:

$$NN(3)=LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS-1+3),4))+5)$$

$$NCONTR(NEN(NN(3)))=NIVEL+1$$

- Estabelecer conectividades dos nós de canto dos elementos filhos 1, 2 e 3 adotando o mesmo procedimento dos elementos quadriláteros de 4 nós.

- Passar a posição do nó central nos arranjos *NN*, *XNN* e *YNN* para a 1a. posição zerando a 2a.:

$$NN(1)=NN(2)$$

$$NN(2)=0$$

$$XNN(1)=XNN(2)$$

$$YNN(1)=YNN(2)$$

$$XNN(2)=0.0$$

$$YNN(2)=0.0$$

- Estabelecer as conectividades intermediárias dos elementos filhos:

Elemento 1

FAÇA J=1 a 4

$$VÁ PARA(180,190,200,205), J$$

```

180  A1=-0.5
      A2=-1.0
      VÁ PARA 210
190  A1=0.0
      A2=-0.5
      VÁ PARA 210
200  A1=-0.5
      A2=0.0
      VÁ PARA 210
205  A1=-1.0
      A2=-0.5
      VÁ PARA 210
210  CONTINUE
      A3=0.0
      - CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (N) conforme o tipo de
        elemento e as coordenadas A1, A2 e A3
      FAÇA K=1 a 8
          XNN(J+1)=XNN(J+1)+XAUX(K)*N(K)
          YNN(J+1)=YNN(J+1)+YAUX(K)*N(K)
      CONTINUE
      NN(J+1)=NN(J)+1
      CON1(MOD((NPOS-2+J),4)+5)=NN(J+1)

CONTINUE

Elemento 2
CON2(MOD((NPOS),4)+5)=LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS),4))+5)

FAÇA J=2,4
    J1=J-1
    VÁ PARA (240,250,260), J1
240  A1=0.5
      A2=0.5

```

Quadro B.2 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

```

VÁ PARA 270
250  A1=0.0
      A2=-0.5
      VÁ PARA 270
260  A1=0.5
      A2=-1.0
270  CONTINUE
      A3=0.0

```

- CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (N) conforme o tipo de elemento e as coordenadas $A1$, $A2$ e $A3$

FAÇA $K=1$ a 8

$$XNN(J+4)=XNN(J+4)+XAUX(K)*N(K)$$

$$YNN(J+4)=YNN(J+4)+YAUX(K)*N(K)$$

CONTINUE

$$NN(J+4)=NN(J+3)+1$$

$$CON2(MOD((NPOS-1+J),4)+5)=NN(J+4)$$

CONTINUE

Elemento 3

$$CON3(MOD((NPOS+1),4)+5)=LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS+1),4))+5)$$

FAÇA $J=3,5$

$$J1=J-2$$

VÁ PARA(310,320,330), J1

310 A1=-1.0

$$A2=0.5$$

VÁ PARA 340

320 A1=-0.5

$$A2=0.0$$

VÁ PARA 340

```
330  A1=0.5
      A2=0.5
      VÁ PARA 340
340  CONTINUE
      A3=0.0
      - CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (N) conforme o tipo de
        elemento e as coordenadas A1, A2 e A3
      FAÇA K=1 a 8
          XNN(J+6)=XNN(J+6)+XAUX(K)*N(K)
          YNN(J+6)=YNN(J+6)+YAUX(K)*N(K)
      CONTINUE
      NN(J+6)=NN(J+5)+1
      CON3(MOD((NPOS-1+J),4)+5)=NN(J+6)

CONTINUE

FIM
```

Quadro B.2 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

O quadro B.3 apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos hexaédricos de 8 nós.

NOVOEL=3

NOVONO=7

NNCEL=8

- Calcular *NPOS*

FAÇA *J= 1 a 8*

*IAUX=(I-1)*NMNL+J*

 SE *LC(IAUX)=NON(NO)* ENTÃO

NPOS=J

 ENDIF

CONTINUE

- Estabelecer arranjo com os nós de canto do elemento pai

FAÇA *J= 1 a 8*

*NC((MOD((NPOS-2+J),8))+1)=LC((I-1)*NMNL+(MOD((NPOS-2+J),8))+1)*

CONTINUE

- Calcular o número da face perpendicular a *Zlocal* onde está *NPOS*

*NFZ=4*INT((NPOS-1)/4)*

- Estabelecer *NFZO* (número da face perpendicular a *Zlocal* que não contém *NPOS*)

SE *NFZ = 4* ENTÃO

NFZO=0

SENÃO

NFZO=4

FIM do SE

Quadro B.3 - Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos hexaédricos de 8 nós.

- Colocar nos arranjos *XAUX*, *YAUX* e *ZAUX* as coordenadas *X*, *Y* e *Z* dos nós do elemento:

FAÇA *J* = 1 a 8

$IP = NEN(LC((I-1)*NMNL+J))$

$XAUX(J) = XYZ((IP-1)*CN+1)$

$YAUX(J) = XYZ((IP-1)*CN+2)$

$ZAUX(J) = XYZ((IP-1)*CN+3)$

CONTINUE

FAÇA *J* = 1 a *NOVONO*

VÁ PARA (50,60,70,80,90,100,110), *J*

- Criar *NN(1)*

50 $A1 = 0.0$

SE *NPOS* = 2 OU *NPOS* = 6: $A1 = 1.0$

SE *NPOS* = 4 OU *NPOS* = 8: $A1 = -1.0$

$A2 = 0.0$

SE *NPOS* = 1 OU *NPOS* = 5 : $A2 = -1.0$

SE *NPOS* = 3 OU *NPOS* = 7 : $A2 = 1.0$

$A3 = 1.0$

SE *NPOS* = 1 OU *NPOS* = 2 OU *NPOS* = 3 OU *NPOS* = 4: $A3 = -1.0$

VÁ PARA 120

- Criar *NN(2)*

60 $A1 = 0.0$

$A2 = 0.0$

$A3 = -1.0$

SE *NPOS* = 5 OU *NPOS* = 6 OU *NPOS* = 7 OU *NPOS* = 8 : $A3 = 1.0$

VÁ PARA 120

Quadro B.3 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

- Criar NN(3)

70 $A1=0.0$

SE $NPOS = 1$ OU $NPOS = 5$: $A1=-1.0$

SE $NPOS = 3$ OU $NPOS = 7$: $A1=1.0$

$A2=0.0$

SE $NPOS = 2$ OU $NPOS = 6$: $A2=-1.0$

SE $NPOS = 4$ OU $NPOS = 8$: $A2=1.0$

$A3=-1.0$

SE $NPOS = 5$ OU $NPOS = 6$ OU $NPOS = 7$ OU $NPOS = 8$: $A3=1.0$

VÁ PARA 120

- Criar NN(4)

80 $A1=-1.0$

SE $NPOS = 2$ OU $NPOS = 3$ OU $NPOS = 6$ OU $NPOS = 7$: $A1=1.0$

$A2=-1.0$

SE $NPOS = 3$ OU $NPOS = 4$ OU $NPOS = 7$ OU $NPOS = 8$: $A2=1.0$

$A3=0.0$

VÁ PARA 120

- Criar NN(5)

90 $A1=0.0$

SE $NPOS = 2$ OU $NPOS = 6$: $A1=1.0$

SE $NPOS = 4$ OU $NPOS = 8$: $A1=-1.0$

$A2=0.0$

SE $NPOS = 1$ OU $NPOS = 5$: $A2=-1.0$

SE $NPOS = 3$ OU $NPOS = 7$: $A2=1.0$

$A3=0.0$

VÁ PARA 120

- Criar NN(6)

100 $A1=0.0$

$A2=0.0$

$A3=0.0$

VÁ PARA 120

- Criar NN(7)

110 $A1=0.0$

SE $NPOS = 1$ OU $NPOS = 5$: $A1=-1.0$

SE $NPOS = 3$ OU $NPOS = 7$: $A1=1.0$

$A2=0.0$

SE $NPOS = 2$ OU $NPOS = 6$: $A2=-1.0$

SE $NPOS = 4$ OU $NPOS = 8$: $A2=1.0$

$A3=0.0$

VÁ PARA 120

120 CONTINUE

- CHAMA a subrotina que calcula as funções de interpolação (N) conforme o tipo de elemento e as coordenadas $A1$, $A2$ e $A3$

FAÇA $K = 1$ a 8

$XNN(J)=XNN(J)+XAUX(K)*N(K)$

$YNN(J)=YNN(J)+YAUX(K)*N(K)$

$ZNN(J)=ZNN(J)+ZAUX(K)*N(K)$

CONTINUE

CONTINUE

-
- Calcular o máximo nome de nó (*NONMAX*), de elemento (*NOLMAX*) e o máximo número externo de nó (*NENMAX*)

- Estabelecer o nome dos nós para os novos nós:

$NN(1)=NONMAX+1$

FAÇA $J = 1$ a 6

$NN(J+1)=NN(J)+1$

CONTINUE

- Estabelecer conectividades dos elementos filhos:

Elemento 1 (similar ao pai)

$CON1(NPOS)=NC(NPOS)$

FAÇA $J = 1$ a 3

$CON1(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)=NN(J)$

CONTINUE

FAÇA $J = 4$ a 7

$CON1(MOD((NPOS-1+(J-4)),4)+1+NFZO)=NN(J)$

CONTINUE

Elemento 2

FAÇA $J=1$ a 2

$CON2(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)=NC(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)$

$CON2(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)=NC(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)$

CONTINUE

$K=2$

FAÇA $J = 3$ a 4

$CON2(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)=NN(K)$

$CON2(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)=NN(K+4)$

$K=K-1$

CONTINUE

Quadro B.3 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

Elemento 3FAÇA $J = 2$ a 3

$$CON3(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)=NC(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)$$

$$CON3(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)=NC(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)$$

CONTINUE

 $K=3$ FAÇA $J = 4$ a 5

$$CON3(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZ)=NN(K)$$

$$CON3(MOD((NPOS-1+J),4)+1+NFZO)=NN(K+4)$$

$$K=K-1$$

CONTINUE

Elemento 4FAÇA $J = 4$ a 7

$$CON4(MOD((NPOS-1+(J-4)),4)+1+NFZ)=NN(J)$$

$$CON4(MOD((NPOS-1+(J-4)),4)+1+NFZO)=$$

$$NC(MOD((NPOS-1+(J-4)),4)+1+NFZO)$$

CONTINUE

FIM

Quadro B.3 - Algoritmo de geração de nós e elementos (continuação).

O quadro B.4 apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.

-
- Tomar o nó cujo erro excede o limite e verificar a sua posição na sequência de conectividades. Seja esta posição dada por $NPOS$, então:
 - Criar o arranjo NC com os nós de canto do elemento pai
 - Criar $NN(1)$ entre $NC((MOD((NPOS-1),3))+1)$ e $NC((MOD(NPOS,3))+1)$
 - Criar $NN(2)$ entre $NC((MOD((NPOS-1+2),3))+1)$ e $NC((MOD(NPOS-1+3),3))+1)$
 - Estabelecer as conectividades dos elementos filhos:

Elemento 1 (similar ao pai)

$CON1(NPOS)=NC(NPOS)$

FAÇA $I=1,2$

$CON1((MOD((NPOS-1+I),3))+1)=NN(I)$

CONTINUE

Elemento 2 (A regra de conectividade será $NN(1)=$ primeiro nó e $NN(2)=$ último nó)

$CON2(1)=NN(1)$

$CON2(2)=NC((MOD((NPOS-1+1),3))+1)$

$CON2(3)=NC((MOD((NPOS-1+2),3))+1)$

$CON2(4)=NN(2)$

FIM

Quadro B.4 - Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 3 nós.

O quadro B.5 apresenta o algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 6 nós.

-
- Preencher $NN(1)$ com o nome do nó da posição $((MOD((NPOS-1),3))+4)$ da sequência de conectividades do elemento pai
 - Preencher $NN(2)$ com o nome do nó da posição $((MOD((NPOS-1+2),3))+4)$ da sequência de conectividades do elemento pai
 - Estabelecer as conectividades de canto dos elementos filhos. Tanto para o elemento 1 quanto para o elemento 2 utiliza-se o mesmo procedimento dos elementos lineares (quadro B.4)
 - Estabelecer as conectividades intermediárias dos elementos filhos:

Elemento 1

- Usando as funções de interpolação do elemento:

FAÇA $J=1,2$

- Criar o nó intermediário entre $CON1(I)$ e $CON1(I+1)$ colocando-o na posição $CON1(I+3)$

CONTINUE

- Criar o nó intermediário entre $CON1(4)$ e $CON1(1)$ colocando-o na posição $CON1(8)$

Elemento 2

- Preencher $CON2(6)$ com o nome do nó da posição $((MOD((NPOS)),3))+4)$

- Usando as funções de interpolação do elemento:

FAÇA $J=1,3$

- Criar o nó intermediário entre $CON2((MOD((2-I+I),4))+1)$ e $CON2((MOD((2-I+I+1),4))+1)$ na posição $CON2((MOD((2-I+I),4))+5)$

CONTINUE

FIM

Quadro B.5 - Algoritmo de geração de nós e elementos para elementos triangulares de 6 nós.

APÊNDICE C

C.1 LISTA DAS SUBROTINAS UTILIZADAS NO PROGRAMA DE REFINAMENTO

Abaixo estão listadas, em ordem alfabética, as subrotinas utilizadas no programa de refinamento, de acordo com o local onde elas são chamadas.

PROGRAMA

PRINCIPAL:

ERRONO		
GRAVA		
IZERO		
LENCONTR		
LER		
LIMEL		
NOME		
NORMEL		
OPENAR		
ORDINV		
ORDNO		
PROCST		
QLNLIN		
REFIN :	HEXA8:	FUNINTER, NLMAX
	HEXA20:	FUNINTER, NLMAX
	NOMCOR:	ELEM TI, NLMAX, NOME, NPLOT
	NPLOT:	ELEM TI
	QUAD4:	FUNINTER, NLMAX
	QUAD8:	FUNINTER, NLMAX
	RZERO	
	UNICOR:	NLMAX
RZERO		

C.2 FUNÇÕES DAS SUBROTINAS UTILIZADAS

A seguir estão listadas, em ordem alfabética, as subrotinas utilizadas no programa de refinamento com suas respectivas funções.

ELEMTI:	Define o tipo básico de elemento NTE.
ERRONO:	Destina-se a calcular, para os nós de canto, a média da norma de energia do erro dos elementos incidentes no nó e a média da norma de erro limite dos elementos incidentes no nó considerado.
FUNINTER:	Destina-se a obter as funções de interpolação em função do tipo de elemento básico NTE.
GRAVA:	Grava os arquivos de dados.
HEXA8:	Destina-se a gerar novos nós e elementos ao redor de um nó onde é necessário realizar refinamento. É usada para elementos hexaédricos de 8 nós.
HEXA20:	Destina-se a gerar novos nós e elementos ao redor de um nó onde é necessário realizar refinamento. É usada para elementos hexaédricos de 20 nós.
IZERO:	Zera os elementos de um vetor inteiro.
LENCONTR:	Lê o arranjo NCONTR que contém informações sobre o controle do processo de refinamento.
LER:	Lê os arquivos de dados.
LIMEL:	Calcula a norma limite de erro para cada elemento em função da percentagem de erro especificada. Também marca com sinal negativo os nós intermediários na lista de nós se o elemento for quadrático.
NLMAX:	Determina o máximo valor absoluto contido em um arranjo inteiro.
NOMCOR:	Controla a etapa de renomear nomes de nós e elementos.
NOME:	Define a lista de números externos de nós ou elementos a partir do nome de nós ou elementos.
NORMEL:	Lê a norma de energia do erro de cada elemento para cada carregamento. Grava no arranjo NEERL a maior norma de cada elemento, entre todos os carregamentos ativos, por número externo do elemento.
NPLOT:	Calcula o número de nós de um elemento.
OPENAR:	Faz a abertura dos arquivos.
ORDINV:	Monta o arranjo inverso de IORDNO, colocando os nós em ordem decrescente de erro.
ORDNO:	Destina-se a classificar os nós de canto em função da sua norma de erro, montando o arranjo IORDNO onde são colocados, por ordem crescente de norma de erro, os números externos dos nós de canto.
PROCST:	Lê arquivos de dados.

- QLNLIN: Monta o arranjo LIN que contém o número externo dos elementos incidentes em um nó e o seu apontador QLN.
- QUAD4: Destina-se a gerar novos nós e elementos ao redor de um nó onde é necessário realizar refinamento. É usada para elementos quadriláteros de 4 nós.
- QUAD8: Destina-se a gerar novos nós e elementos ao redor de um nó onde é necessário realizar refinamento. É usada para elementos quadriláteros de 8 nós.
- REFIN: Realizar o refinamento dos elementos ao redor de um nó.
- RZERO: Zera os elementos de um vetor real.
- UNICOR: Controla a etapa de união de nós e elementos.

APÊNDICE D

D.1 ROTAÇÃO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA PLACAS E CASCAS

Normalmente, o sistema GAELI calcula as tensões e momentos de cascas e placas no sistema local. Sendo assim, o sistema de referência pode variar conforme a ordem em que são dadas as conectividades dos elementos. Por isso, existe a possibilidade de se fazer a rotação do sistema de referência local para um sistema, chamado de intermediário, que independe da ordem das conectividades fornecidas. Para fazer isso, basta fornecer um ângulo de rotação na planilha Sist.Ref.Solic. Cs/Pl na entrada de dados do sistema GAELI. Essa operação gera um arquivo .SRS com as informações dadas. Maiores detalhes sobre como se determina o sistema intermediário podem ser encontradas em FERRANTE et al¹⁴.

D.2 DETERMINAÇÃO DOS PLANOS DE CASCAS POLIÉDRICAS PARA SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES POR PLANOS

Quando se estiver analisando estruturas que possuam elementos de casca poliédrica, é necessário que a suavização de tensões seja feita por planos. A razão disso é que não se pode somar ou fazer média de tensões que não estejam no mesmo plano. Como se pode ver na figura D.1, uma determinada componente de tensão de um elemento poderá não corresponder à mesma componente de tensão de outro elemento, caso eles não pertençam ao mesmo plano ou a planos paralelos. Isso ocorre porque os eixos locais de referência têm direções diferentes nos dois planos.

Para fazer a suavização de tensões por planos deve-se preencher a planilha Sist.Ref.Solic. Cs/Pl. Essa operação gera um arquivo .SRS que contém um ângulo de rotação que pode ser:

- a) 0 graus - para fazer a suavização de tensões no sistema de referência local;
- b) outro ângulo qualquer - para fazer a suavização de tensões no sistema intermediário (ver item D.1).

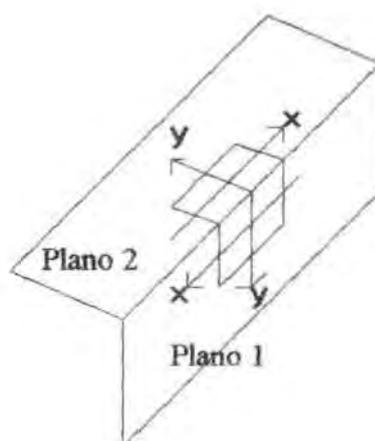


Figura D.1 - Eixos de referência no sistema local para uma casca poliédrica de dois planos perpendiculares.

A separação em planos utilizada classifica os elementos que estão em um mesmo plano ou em planos paralelos. Isto significa que elementos que não estão ligados entre si, como no caso das abas inferior (plano 1) e superior (plano 3) da figura D.2, serão considerados como se estivessem no mesmo plano. Esse fato não causa problemas porque o sistema local ou intermediário de dois planos paralelos têm a mesma direção de eixos.

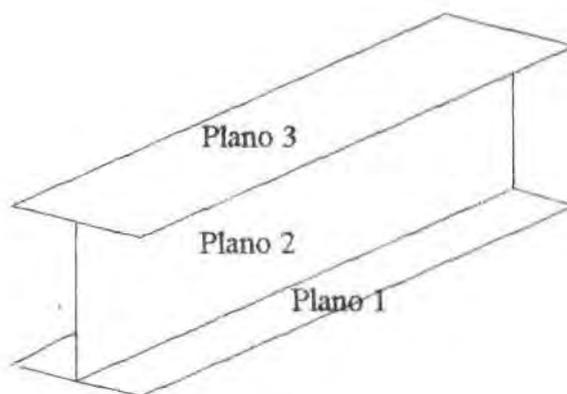


Figura D.2 - Planos de uma casca poliédrica.

O quadro D.1 mostra o algoritmo utilizado para a determinação dos planos de cascas poliédricas.

- Criar o arranjo NN e preenchê-lo com o número externo dos elementos

FAÇA $I = 1$ a QL (varrer todos os elementos)

SE for elemento de casca poliédrica e $NN(I) > 0$ ENTÃO

- CHAMA a SUBROTINA que determina os vetores A_i , B_i e C_i do elemento

FAÇA $J = I + 1$ a QL (varrer os elementos seguintes)

SE for elemento de casca poliédrica e $NN(J) > 0$ ENTÃO

- CHAMA a SUBROTINA que determina os vetores A_j , B_j e C_j do elemento

$$T = (A_i \times A_j) + (B_i \times B_j) + (C_i \times C_j)$$

$$T = ABS(T)$$

SE $1 - T < 1 \times 10^{-6}$ ENTÃO $SINAL = 0$ (elementos estão no mesmo plano)

SE $SINAL = 0$ ENTÃO

- Agrupar os elementos pertencentes ao mesmo plano em um arranjo. Marcar $NN(I)$ com sinal negativo (não será feito o teste de separação em grupos com este elemento porque ele já está separado)

FIM do SE

FIM do SE

CONTINUE

FIM do SE

CONTINUE

- SUBROTINA que determina os vetores A_i , B_i e C_i do elemento i

- Determinar os vetores A_i , B_i e C_i do elemento i de acordo com as coordenadas dos seus nós (ver figura D.3)

- Calcular o módulo:

$$|M| = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}$$

- Calcular os vetores normalizados:

$$A_i = \frac{A_i}{|M|} \quad B_i = \frac{B_i}{|M|} \quad C_i = \frac{C_i}{|M|}$$

Quadro D.1 - Algoritmo utilizado para a determinação de planos de casca poliédrica.

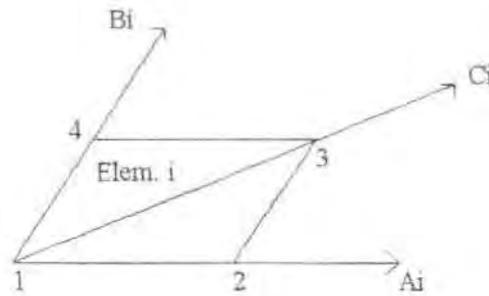


Figura D.3 - Vetores de um elemento de casca poliédrica.

D.3 INTEGRAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA TRIÂNGULOS

Para implementar o processo de suavização de tensões e cálculo de erros em elementos triangulares, nos problemas de estado plano de tensão, é necessário saber quais os pontos de integração que serão utilizados para integrar a matriz de massa \underline{M} da expressão (3.18). Os pontos de integração, para cada tipo de integração, podem ser encontrados em BREBBIA e CONNOR¹¹.

Em triângulos lineares, tentou-se utilizar a integração linear e a quadrática. Em ambos os casos, a matriz de massa resultante era singular e não foi possível utilizar integração numérica. Está sendo utilizada, então, a integração direta que possibilita a obtenção dos resultados corretos.

Para triângulos quadráticos, foram testadas as integrações cúbica e quártica. Na integração cúbica, a matriz de massa também era singular. Utilizando a integração quártica foi possível obter os valores corretos dos termos da matriz de massa.

Analisando o que aconteceu ao utilizar cada uma das integrações anteriores, chega-se à conclusão de que é necessário usar um grau (n) a mais do que o utilizado na matriz de rigidez. O mesmo teste foi feito para elementos quadriláteros, mas os resultados obtidos foram os corretos. Sendo assim, o problema aparentemente só acontece em elementos triangulares.

D.4 INTEGRAÇÃO NODAL

Sabendo que o comportamento das funções de interpolação é $\phi_i = 1$ no nó i e $\phi_i = 0$ nos demais nós, é possível montar uma matriz de massa discreta (diagonal) \underline{M}^D se as integrais das expressões (3.18) e (3.19) utilizarem os nós do elemento como pontos de integração. Para isso, é necessário determinar o peso de integração de cada nó através da resolução de um sistema de equações algébricas que pode ser encontrado em SILVA²⁴.

Para elementos bilineares e biquadráticos Serendipity (figura D.4), os pesos de integração serão:

- a) para elemento bilineares (4 nós): $W_1 = 1$;
 b) para elementos biquadráticos (8 nós): $W_1 = -1/3$ e $W_2 = 4/3$.

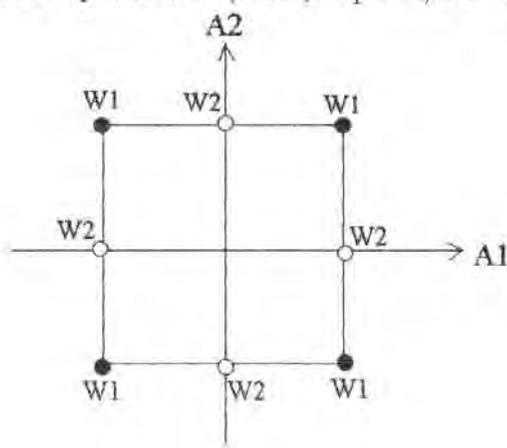


Figura D.4 - Pesos de integração para quadriláteros bilineares e biquadráticos.

Para elementos trilineares e triquadráticos Serendipity (figura D.5), os pesos de integração serão:

- a) para elementos trilineares (8 nós): $W_1 = 1$;
 b) para elementos triquadráticos (20 nós): $W_1 = -1$ e $W_2 = 4/3$.

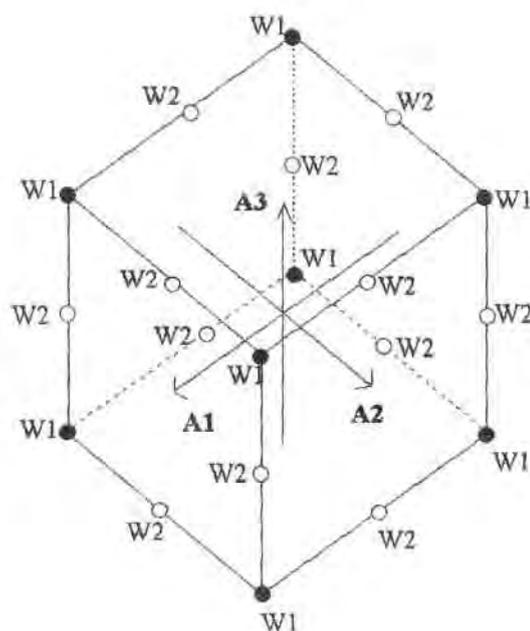
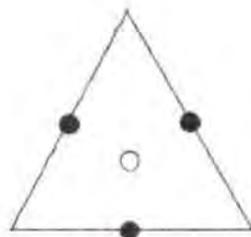


Figura D.5 - Pesos de integração para hexaedros trilineares e triquadráticos.

Para elementos triangulares lineares não se utiliza pesos de integração porque faz-se uma integração direta em um ponto no centro do elemento. Após isso, projeta-se a tensão

calculada nesse ponto para pontos nos centros dos lados como mostra a figura D.6. Não se usa os nós como pontos para a projeção de tensões porque, nesses pontos, elas são iguais à zero.



- - Ponto onde se calcula a tensão
- - Pontos onde a tensão calculada é projetada

Figura D.6 - Pontos de integração e projeção das tensões para triângulos lineares.

Para elementos triangulares quadráticos o peso utilizado é $W = 1/6$ para todos os nós. Este procedimento funciona porque os pesos se cancelam quando não há mistura deste tipo de elemento com qualquer outro, exceto barras. No caso de haver mistura de elementos, deve-se fazer a média das tensões nodais sem utilizar o peso.

APÊNDICE E

E. TEMPOS DE EXECUÇÃO DE EXEMPLOS APRESENTADOS NO CAPÍTULO 5

A seguir são apresentados os tempos de execução de alguns exemplos utilizados neste trabalho. Este item tem a finalidade de mostrar o tempo gasto com os módulos de cálculo de tensões e erros (GATEN) e de refinamento (GPREF) implementados em relação ao tempo total. Assim, pode-se fazer uma análise da rapidez e eficiência dos códigos implementados. Todos os tempos mostrados se referem à análise da malha inicial do exemplo em questão. A função dos módulos do sistema GAELI está explicada no capítulo 2. Os tempos são dados em segundos (s).

Tabela E.1 - Comparativo dos tempos de execução dos diversos módulos do sistema GAELI.

Exemplo	Banda Máxima	T_{GAREOR} (s)	T_{GAPRE} (s)	T_{GASOLE} (s)	T_{GATEN} (s)	T_{GPREF} (s)	T_{TOTAL} (s)	$\frac{T_{GATEN}}{T_{TOTAL}}$ (%)	$\frac{T_{GPREF}}{T_{TOTAL}}$ (%)
2	18	1	6	26	9	7	49	18,4	14,3
7	60	2	13	38	26	26	105	24,8	5,2
8	123	1	18	32	22	4	77	28,6	5,2
9	216	3	40	228	39	26	336	11,6	7,7
11	111	30	77	146	103	79	435	23,7	18,2

Da tabela E.1, nota-se que o módulo GATEN gasta no máximo 28,6% do tempo total e o módulo GPREF, 18,2%.

O tempo gasto pelo módulo GPREF depende, principalmente, de dois fatores: tipo de elemento utilizado e diferença entre o erro relativo máximo permitido e o erro máximo existente. A explicação para o primeiro fator é que gerar elementos tridimensionais é mais demorado do que gerar elementos planos (ver quadros B.1 e B.3). Com relação ao segundo fator pode-se dizer que quanto maior for a diferença entre os erros acima citados, maior será o número de nós e elementos a serem gerados e, conseqüentemente, mais tempo o processo levará.

Conclui-se, pelos valores apresentados na tabela E.1, que tanto o estimador de erros como o processo de refinamento são computacionalmente eficientes.