Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

CONJUNTOS MINIMAIS PARA MÉTRICAS RIEMANNIANAS NO TORO BIDIMENSIONAL

por

JOANA MOHR

Porto Alegre, julho de 2003

Dissertação submetida por Joana Mohr* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha
Dr. Mário Jorge Dias Carneiro

Data de Defesa: 18 de julho de 2003.

---

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CNPq

para Rafael

Agradecimentos

Ao meu orientador Artur Lopes por todo o apoio que me prestou.

Aos professores do curso de pós graduação.

E à todas as pessoas que contribuiram para minha formação.

Resumo:

Neste trabalho estamos interessados em estudar o conjunto das geodésicas que minimizam comprimento de arco entre dois pontos quaisquer. Estas são chamadas de geodésicas minimais.

Mais precisamente, dada uma métrica riemanniana g sobre o toro bidimensional iremos considerar o seu levantamento ao plano $\mathbb{R}^2$. Uma geodésica $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é minimal se para todo intervalo $[a, b]$, temos que $c([a, b])$ é a curva de menor comprimento ligando $c(a)$ a $c(b)$.

Vamos considerar aqui um número de rotação α fixado e analisar o conjunto das geodésicas minimais que possuem este número de rotação.

Analisaremos questões que envolvem a recorrência e o comportamento assintótico de geodésicas. Por exemplo, uma geodésica minimal recorrente com número de rotação racional será uma geodésica periódica.

Abstract:

In this work we are interested in studying the set of geodesics that minimize the arc length between any two of its points. These are called minimizing geodesics.

More precisely, given a riemaniann metric g on the two-dimensional torus we will consider its lifting to the plane $\mathbb{R}^2$. A geodesic $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ is minimal if for any interval $[a, b]$, we have that $c([a, b])$ is the curve of smaller length connecting $c(a)$ and c(b).

We will consider here a fixed rotation number α and we will show several results about the set of minimal geodesics with such rotation number.

We will analyze questions like recurrence and the asymptotic behavior of such geodesics. For example, a recurrent minimal geodesic with rational rotation number will be a closed geodesic.

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar o conjunto das geodésicas que minimizam comprimento de arco entre dois pontos quaisquer. Estas são chamadas geodésicas minimais. Dada uma métrica riemanniana g sobre o toro bidimensional iremos considerar o seu levantamento ao plano $\mathbb{R}^2$.

Uma geodésica $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é minimal se para todo intervalo $[a, b]$, temos que $c([a, b])$ é a curva de menor comprimento ligando $c(a)$ a $c(b)$.

Geodésicas minimais foram primeiro investigadas por Morse e Hedlund ([1, pag 2]). Muitas das questões envolvendo a análise de tal problema necessitam o uso de ferramentas que são comuns às utilizadas em aplicações tipo twist (ver[1] para referências) . Neste sentido, os capítulos de 1 a 4 podem também serem utilizados na análise destas aplicações. Vamos aqui no entanto nos concentrar mais no problema geodésico que será analisado com detalhe no capítulo 5.

Em termos gerais, vamos considerar aqui um número de rotação α fixado e analisar o conjunto das geodésicas minimais que possuem este número de rotação.

Vamos analisar para cada número de rotação fixado a estrutura do conjunto das geodésicas minimais que possuem este número de rotação. Por exemplo, duas geodésicas minimizantes não podem se cortar se seu número de rotação for irracional ou se tais duas geodésicas forem periódicas com o mesmo número de rotação. Outras questões envolvem as recorrências e o comportamento assintótico de geodésicas. Uma geodésicas minimal recorrente com número de rotação racional deve ser uma geodésica periódica.

Estas questões estão diretamente relacionadas com a Teoria de Mather para Lagrangianos convexos superlineares (ver [3,5]) e que são objeto de intenso trabalho de pesquisa nos últimos anos. Mais precisamente, tal teoria analisa a dinâmica do fluxo associado à equação de Euler-Lagrange no fibrado tangente de uma variedade compacta; quando o Lagrangiano for $\frac{1}{2}||v||^2$ estaremos analisando o caso geodésico descrito aqui. No contexto lagrangiano geral normalmente se considera medidas minimizantes em vez de curvas (soluções da equação de Euler-Lagrange) minimizantes. No caso de se analisar superfícies de genus maior, o papel do número de rotação considerado aqui será desempenhado pela homologia de uma medida (ver [3, 5]). Questões envolvendo o comportamento assintótico das soluções e recorrência são de fundamental importância. Um dos grande sucessos de tal teoria geral são os resultados que envolvem as soluções das equações de Hamilton-Jacobi de hamiltonianos associados a lagrangianos (ver [3]).

No capítulo 1 vamos vamos introduzir uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Vamos definir o que são trajetórias minimais em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ com relação a H. E nos capítulos 2-4 descreveremos o conjunto $\mathcal{M}(H)$ destas trajetórias . Finalmente no capítulo 5 veremos que este conjunto $\mathcal{M}(H)$ corresponde ao conjunto de geodésicas minimais em $\mathbb{R}^2$.

Tal H aparece naturalmente em outros problemas matemáticos; no caso do modelo discreto de Frenkel-Kontorova (que não será considerado aqui) o H acima é dado por $H(\alpha, \eta) = \frac{1}{2}(C(\eta - \alpha)^2 - V(\eta) - V(\alpha))$, onde C é uma constante e V é uma função potencial periódica (conforme [1]). Tal H permite descrever as órbitas de aplicações tipo twist através de um princípio variacional de maneira análoga ao princípio de mínima ação da Mecânica Clássica.

O presente trabalho descreve com todos os detalhes a teoria apresentada em [1].

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 O problema variacional

Vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{x \mid x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$ das seqüências bi-infinitas de números reais com a topologia produto. Um elemento $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ é também denotado por $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e será chamado uma trajetória. Convergência de uma seqüência $x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ a uma seqüência $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ significa que $\lim_{n \to \infty} x_i^n = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Vamos usar freqüentemente uma versão simples do teorema de Tychonow que pode ser provado por um argumento de seqüência diagonal.

(1.1) Para todo $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}; |x_i| \leq a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}\}$ é compacto.

Sejam $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $j < k$, a extensão de H para um segmento finito $(x_j, ..., x_k)$ é dada por

$$H(x_j, ..., x_k) := \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_{i+1})$$

Dizemos que um segmento $(x_j, ..., x_k)$ é minimal com respeito a H se $H(x_j, ..., x_k) \leq H(x_j^*, ..., x_k^*)$ para todo $(x_j^*, ..., x_k^*)$ com $x_j = x_j^*$ e $x_k = x_k^*$.

Estamos interessados em objetos que satisfaçam à seguinte condição minimal global.

Definição 1.1 *$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ é (trajetória) minimal com respeito a H se todo segmento finito de x é minimal com respeito a H.*

O conjunto de trajetórias minimais $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ será denotado por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$. Nosso objetivo é dar uma descrição deste conjunto. Devemos impor algumas restrições a H a fim de obtermos bons resultados. Assumiremos que H é contínua e que satisfaz as seguintes propriedades (H_1)-(H_4):

(H_1) condição de periodicidade: para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ $H(\xi + 1, \eta + 1) = H(\xi, \eta)$.

(H_2) condição no infinito: $\lim_{|\eta| \to \infty} H(\xi, \xi + \eta) = \infty$ uniformemente em ξ.

(H_3) condição de ordem: se $\underline{\xi} < \overline{\xi}$, $\underline{\eta} < \overline{\eta}$ então
$$H(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + H(\overline{\xi}, \overline{\eta}) < H(\underline{\xi}, \overline{\eta}) + H(\overline{\xi}, \underline{\eta})$$

(H_4) condição de transversalidade: se $(x_{-1}, x_0, x_1) \neq (x^*_{-1}, x^*_0, x^*_1)$ são minimais e $x_0 = x^*_0$ então $(x_{-1} - x^*_{-1})(x_1 - x^*_1) < 0$.

Vamos introduzir uma ordenação parcial em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$x < x^* \text{ se e somente se } x_i < x^*_i \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Definição 1.2 *$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e $x^* \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ se cruzam*

(a) em $i \in \mathbb{Z}$ se $x_i = x^*_i$ e $(x_{i-1} - x^*_{i-1})(x_{i+1} - x^*_{i+1}) < 0$

(b) entre i e $i + 1$ se $(x_i - x^*_i)(x_{i+1} - x^*_{i+1}) < 0$.

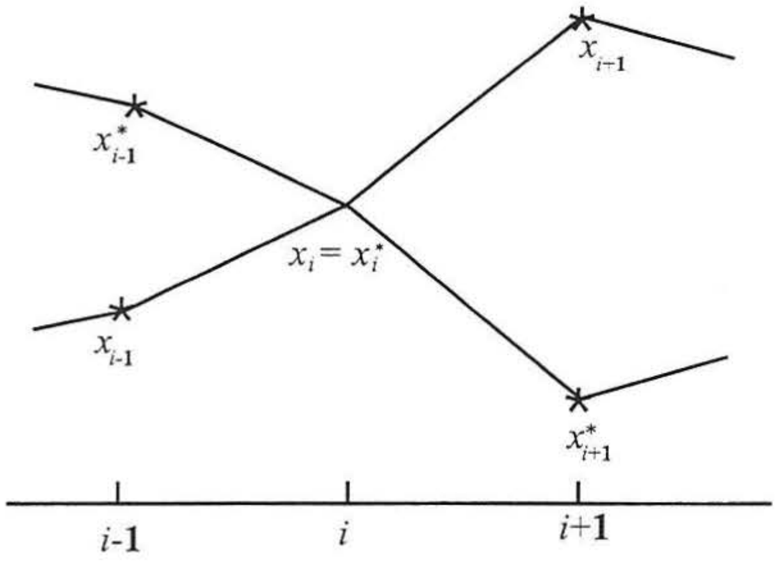

Figura 1.1: x e x^* se cruzam em $i \in \mathbb{Z}$

De acordo com a condição (H_4) trajetórias $x, x^* \in \mathcal{M}$ ou se cruzam ou são comparáveis, (i.e. $x < x^*$ ou $x = x^*$ ou $x > x^*$).

Definição 1.3 *$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e $x^* \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ são*

(i) *α-assintóticas se $lim_{i \to -\infty}|x_i - x_i^*| = 0$*

(ii) *ω-assintóticas se $lim_{i \to \infty}|x_i - x_i^*| = 0$*

(iii) *assintóticas se são α- e ω-assintóticas.*

Vamos introduzir uma ação T do grupo $\mathbb{Z}^2$em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ tal que se $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ e $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ então

$$T_{(a,b)}x = x^* \text{ onde } x_i^* = x_{i-a} + b$$

A ação de $T_{(a,b)}$ em x corresponde as translações de graf(x)$\subseteq \mathbb{R}^2$ por $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, onde graf$(x) = \{(i, x_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{Z}, x_i = x(i)\}$

Definição 1.4 *$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ é periódico com período $(q,p) \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbb{Z}$ se $T_{(q,p)}x = x$.*

Vamos estabelecer alguns fatos elementares que seguem das definições:

(i) Como conseqüência de (H_1) temos que $H(x) = H(T_{(a,b)}x)$ para todo segmento $x = (x_j, \ldots, x_k)$, $k > j$, e todo $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, no seguinte sentido: $H(x_j, ..., x_k) = H(x^*_{j+a}, ..., x^*_{k+a})$, onde $x^* = T_{(a,b)}x$. O que decorre de $H(x^*_{j+a}, ..., x^*_{k+a}) = H(x_j + b, ..., x_k + b) = H(x_j, ..., x_k)$, donde a última desigualdade segue de (H_1). Em particular, $T_{(a,b)}$ leva trajetórias minimais em trajetórias minimais.

De fato, seja $x \in \mathcal{M}$ então para todos $(x_j, ..., x_k)$ segmentos de x temos que $H(x_j, ..., x_k) \leq H(x'_j, ..., x'_k)$ onde $(x'_j, ..., x'_k)$ é tal que $x'_j = x_j$ e $x'_k = x_k$. Seja agora $x^* = T_{(a,b)}x$ e suponhamos por absurdo que $x^* \notin \mathcal{M}$, i.e., existem $(x^*_j, ..., x^*_k)$ segmento de x^* e $(\bar{x}_j, ..., \bar{x}_k)$ tais que $H(\bar{x}_j, ..., \bar{x}_k) < H(x^*_j, ..., x^*_k)$ com $\bar{x}_j = x^*_j, \bar{x}_k = x^*_k$.

Pela primeira afirmação de (i) temos que $H(x^*_j, ..., x^*_k) = H(x_{j-a}, ..., x_{k-a})$ e

$H(\bar{x}_j, ..., \bar{x}_k) = H(T_{(-a,-b)}(\bar{x}_j, ..., \bar{x}_k)) = H(x_{j-a}, \tilde{x}_{j+1}, ..., \tilde{x}_{k-1}, x_{k-a})$.

Logo $H(\bar{x}_j, ..., \bar{x}_k) < H(x^*_j, ..., x^*_k)$ contraria a minimalidade de x.

(ii) A continuidade de H implica que $\mathcal{M}$ é fechado em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Seja $x^n \to x$ onde $x^n \in \mathcal{M}$ e $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Suponhamos por absurdo que existem $(x_j, ..., x_k)$ e $(x'_j, ..., x'_k)$ tais que $x'_j = x_j$, $x'_k = x_k$ e

$$H(x'_j, ..., x'_k) < H(x_j, ..., x_k)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $(x^n_j, x'_{j+1}, ..., x'_{k+1}, x^n_k)$. Assim como x^n é minimal, $H(x^n_j, ..., x^n_k) \leq H(x^n_j, x'_{j+1}, ..., x'_{k+1}, x^n_k)$ fazendo $n \to \infty$ e como H é contínua, vemos que

$$H(x_j, ..., x_k) \leq H(x_j, x'_{j+1}, ..., x'_{k+1}, x_k) = H(x'_j, x'_{j+1}, ..., x'_{k+1}, x'_k)$$

absurdo.

(iii) Seja $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, e suponha que $(x_l, ..., x_m)$ é segmento minimal para H. Então para todos j, k tais que $l < j < k < m$, temos que $(x_j, ..., x_k)$ é segmento minimal, i.e., qualquer subsegmento de um segmento minimal é também minimal.

De fato, suponhamos por absurdo que $(x_l, ..., x_m)$ é segmento minimal, mas $(x_j, ..., x_k)$ não o é. Então existe outro segmento $(x_j^*, ..., x_k^*)$ tal que $x_j^* = x_j, x_k^* = x_k$ e $H(x_j^*, ..., x_k^*) < H(x_j, ..., x_k)$. Portanto

$$H(x_l, ..., x_j, ..., x_k, ..., x_m) = H(x_l, ..., x_j) + H(x_j, ..., x_k) + H(x_k, ..., x_m) >$$

$$> H(x_l, ..., x_j) + H(x_j^*, ..., x_k^*) + H(x_k, ..., x_m)$$

o que contraria a minimalidade de $(x_l, ..., x_m)$.

1.2 Fatos básicos sobre homeomorfimos do círculo

Nesta seção utilizaremos alguns fatos básicos da teoria de Denjoy. Que podem ser encontrados em [6, seção 2.4].

Considere o conjunto

$$\tilde{G}_+ = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ contínua, estritamente crescente, } f(x+1) = f(x) + 1\}$$

Em $\tilde{G}_+$ podemos definir uma função $\tilde{\alpha} : \tilde{G}_+ \to \mathbb{R}$ dada por:

(1.2)

$$\tilde{\alpha}(f) := \lim_{|i| \to \infty} \frac{f^i(x)}{i}$$

Para cada $f \in \tilde{G}_+$, este limite existe e é independente da escolha de $x \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\tilde{\alpha}(f)$ o número de rotação de f.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ a função periódica $r_i(x) := f^i(x) - x - i\tilde{\alpha}(f)$ satisfaz:

(1.3) $|r_i(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r_i(x_0) = 0$

Vamos provar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r_i(x_0) = 0$. De fato, por absurdo suponhamos que dado $i \in \mathbb{Z}$ $r_i(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; como r_i é contínua podemos supor, sem perda de generalidade, que $r_i(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e ainda $r_i|_{[x,x+1]}$ atinge mínimo neste intervalo e como ela é periódica de período 1 existe $\varepsilon > 0$ tal que $r_i(x) > \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere agora, para o i fixado e k positivo

$$\sum_{n=0}^{k-1} r_i(f^{ni}(x)) = f^{ki}(x) - f^{(k-1)i}(x) - i\tilde{\alpha} + f^{(k-1)i}(x) - f^{(k-2)i}(x) - i\tilde{\alpha} + \ldots$$

$$\ldots + f^{2i}(x) - f^{i}(x) - i\tilde{\alpha} + f^{i}(x) - x - i\tilde{\alpha} = f^{ki}(x) - x - ki\tilde{\alpha}$$

Note que $r_i(x) > \varepsilon$ implica $\sum_{n=0}^{k-1} r_i(f^{ni}(x)) > k\varepsilon$ e portanto

$$\frac{k\varepsilon}{ki} < \frac{\sum_{n=0}^{k-1} r_i(f^{ni}(x))}{ki} = \frac{f^{ki}(x) - x - ki\tilde{\alpha}}{ki}$$

Fazendo $k \to \infty$ obtemos que

$$\frac{\varepsilon}{i} < \tilde{\alpha} - 0 - \tilde{\alpha} = 0$$

o que é um absurdo pois $\varepsilon > 0$. Logo existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r_i(x_0) = 0$.

Vejamos que $|r_i(x)| < 1$:

Afirmação: se $|x - y| < 1 \Rightarrow |r_i(x) - r_i(y)| < 1$

Usando a afirmação, obtemos o resultado. De fato, como r_i é periódica, para $x \in \mathbb{R}$ tal que $r_i(x) \neq 0$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $r_i(y) = 0$ e $|x - y| < 1$, então pela afirmação $|r_i(x)| < 1$.

Prova da afirmação: Suponhamos que é falso, e sem perda de generalidade que $y > x$

Caso 1) $r_i(y) - r_i(x) > 1$: note que

$r_i(y) - r_i(x) = f^i(y) - y - (f^i(x) - x)$ logo

$$r_i(y) - r_i(x) > 1 \Rightarrow f^i(y) - f^i(x) - (y - x) > 1 \Rightarrow f^i(y) - f^i(x) > 1$$

absurdo, pois f^i é crescente e $f^i(x+1) = f^i(x) + 1$.

Caso 2) $r_i(x) - r_i(y) > 1$:

Como $\quad r_i(x) - r_i(y) = f^i(x) - f^i(y) - (x - y) \quad$ então

$$r_i(x) - r_i(y) > 1 \Rightarrow f^i(x) - f^i(y) > 0$$

o que é um absurdo, pois f^i é crescente. Logo, existe tal x_0 como afirma (1.3)

Em particular, (1.2) e (1.3) implicam que $\tilde{\alpha}(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ se e somente se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^q(x_0) = x_0 + p$. De fato, se $\tilde{\alpha} = \frac{p}{q}$ seja x_0 tal que $0 = r_i(x_0) = f^i(x_0) - x_0 - i\tilde{\alpha}$, daí $f^i(x_0) = x_0 + i\frac{p}{q}$ portanto para $i = q$ temos que $f^q(x_0) = x_0 + p$. Reciprocamente se existe x_0 tal que $f^q(x_0) = x_0 + p$, temos que $\tilde{\alpha} = \lim \frac{f^{iq}(x_0)}{iq} = \lim \frac{x_0 + ip}{iq} = \frac{p}{q}$

Se $\tilde{\alpha}(f) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ definimos

$$\operatorname{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, (i_j, k_j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } \lim_{j \to \infty} f^{i_j}(x_0) + k_j = y\}$$

$\operatorname{Rec}(f)$ não depende da escolha de $x_0 \in \mathbb{R}$ e obtemos o mesmo conjunto se restringirmos $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Seja G_+ o grupo dos homeomorfimos $\varphi : S^1 \to S^1$ que preservam orientação do círculo.

Considere $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\pi(x) = \exp(2\pi i x)$, tal π é um aplicação de recobrimento. Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é levantamento de $\varphi : S^1 \to S^1$ se $\pi \circ f = \varphi \circ \pi$.

Dada $\varphi \in G_+$, se f é um levantamento de φ, é facil ver que f é contínua, estritamente crescente e $f(x+1) = f(x) + 1$, i.e., $f \in \tilde{G}_+$.

Logo, fixada $\varphi \in G_+$ podemos definir o número de rotação $\alpha(\varphi) \in S^1$ por $\alpha(\varphi) = \tilde{\alpha}(f)$ (mod 1), onde f é um levantamento de φ. $\alpha(\varphi)$ está bem definido pois, se f_1, f_2 são levantamentos distintos de φ temos que $\tilde{\alpha}(f_1)$ e $\tilde{\alpha}(f_2)$ diferem por um número inteiro.

O número de rotação de $\varphi \in G_+$ pode ser interpretado como o ângulo médio que φ roda cada ponto x em S^1.

Conforme [6] seção 2.4, temos que φ tem número de rotação racional, se e somente se, φ tem um ponto periódico.

Sejam $\omega(x_0) := \{x \in S^1 \mid \exists k_n \to \infty,\ \lim \varphi^{k_n}(x_0) = x\}$ e
$\tilde{\alpha}(x_0) := \{x \in S^1 \mid \exists k_n \to -\infty,\ \lim \varphi^{k_n}(x_0) = x\}$

Por [6] seção 1.11 temos que se $\alpha(\varphi)$ é irracional, então para quaisquer $x, y \in S^1$ vale que $\omega(x) = \omega(y) = \tilde{\alpha}(x) = \tilde{\alpha}(y)$. E ainda $\omega(x)$ é um conjunto de Cantor ou é todo S^1.

Defina $\mathrm{Rec}(\varphi) := \{x \in S^1 \mid$ para todo intervalo aberto J que contém x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^n(x) \in J\}$.

Daí, se φ tem número de rotação irracional temos que

$$\mathrm{Rec}(\varphi) = \omega(x) = \{x \in S^1 \mid \exists k_n \to \infty,\ \lim \varphi^{k_n}(x) = x\},$$

conforme [6].

Portanto, ou Rec(φ)=S^1, ou Rec(φ) é um conjunto de Cantor.

Pode-se mostrar que se $f \in \tilde{G}_+$ é levantamento de $\varphi \in G_+$, e $\tilde{\alpha}(f)$ é irracional, então, temos que Rec(f)=$\mathbb{R}$ ou Rec(f) é um conjunto de Cantor. E também, π projeta Rec(f) em Rec(φ).

Lema 1.5 *Suponha $f_0 \in \tilde{G}_+, f_1 \in \tilde{G}_+$ e $\tilde{\alpha}(f_0) = \tilde{\alpha}(f_1) = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Então ou Rec($f_0$)=Rec($f_1$) e $f_0|_{Rec(f_0)} = f_1|_{Rec(f_1)}$ ou existe $x_0 \in$Rec(f_0) e $x_1 \in$Rec(f_1) tal que as órbitas $(f_0^i(x_0))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e $(f_1^i(x_1))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ se cruzam infinitas vezes.*

Demonstração: Vamos utilizar a seguinte propriedade fundamental dos homeomorfismos $f \in \tilde{G}_+$, com número de rotação irracional α: para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ vamos definir um mapa do conjunto $\{j\alpha + k \mid (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ em $\mathbb{R}$:

$$j\alpha + k \to f^j(x_0) + k \qquad (j,k) \in \mathbb{Z}^2$$

Por [6], lema 2.4.1, o mapa definido acima é estritamente crescente, no seguinte sentido: se $j_1\alpha + k_1 < j_2\alpha + k_2 \Rightarrow f^{j_1}(x_0) + k_1 < f^{j_2}(x_0) + k_2$

Para x_0 fixado, definimos as funções $x^+(f, x_0) = x^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x^-(f, x_0) = x^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$x^+(t) = \inf\{f^j(x_0) + k \mid j\alpha + k > t\}$$

$$x^-(t) = \sup\{f^j(x_0) + k \mid j\alpha + k < t\}$$

As funções x^+ e x^- tem as seguintes propriedades:

(a) x^+ e x^- são estritamente crescentes

(b) x^+ é contínua à direita e x^- à esquerda

(c) x^+ e x^- são contínuas nos mesmos pontos e coincidem em tais pontos

(d) $x^\pm(t+1) = x^\pm(t) + 1$

(e) $f \circ x^\pm(t) = x^\pm(t+\alpha)$

(f) $\mathrm{Rec}(f) = x^+(\mathbb{R}) \cup x^-(\mathbb{R})$

Provaremos as afirmações acima no final da demostração.

Assumindo (a)-(f) temos que:

Se x^+ (respectivamente x^-) não é contínua, seja C o conjunto dos pontos de descontinuidade de x^+, então, por (a) , C é enumerável. E tal conjunto C é denso pois se temos que x^+ é descontínua em t_0, então por (e) é descontínua em $t_0 + n\alpha$ e como, por (d), $x^+(t_0+m+n\alpha) = x^+(t_0+n\alpha)+m$ temos que x^+ é descontínua em $t_0 + n\alpha + m$, e sabemos que $\{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$ se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Se $x^+ = x^- =: x$ é contínua então (a),(d) e (e) mostram que $x \in \tilde{G}_+$ e $(x^{-1} \circ f \circ x)(t) = t + \alpha$.

Escolhemos funções $x_0^\pm$ e $x_1^\pm$ como acima para respectivamente f_0 e f_1. Exitem duas possibilidades:

(1) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_0^-(t+c) - x_1^-(t)$ muda de sinal

(2) Para cada $c \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x_0^-(t+c) - x_1^-(t)$ não muda de sinal, i.e., se $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0^-(t_0+c) < x_1^-(t_0)$ então $x_0^-(t+c) \leq x_1^-(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

No caso (1) veremos que existem órbitas de f_0 e f_1 que se cruzam infinitas vezes. De fato, por (b) e (d) existem intervalos abertos $I_1 \neq \emptyset$ e $I_2 \neq \emptyset$ tais que $I_1, I_2 \subset [0,1)$ e

(*)

$$x_0^-(t+c) < x_1^-(t) \text{ se } t \in I_1 \text{ mod}\mathbb{Z}$$

$$x_0^-(t+c) > x_1^-(t) \text{ se } t \in I_2 \text{ mod}\mathbb{Z}$$

Definindo $x_0 = x_0^-(c)$ e $x_1 = x_1^-(0)$, por (f) temos que $x_0 \in \text{Rec}(f_0)$ e $x_1 \in \text{Rec}(f_1)$ e por (e) temos

$$f_0^j(x_0) = x_0^-(j\alpha + c)$$

$$f_1^j(x_1) = x_1^-(j\alpha)$$

Como $\{j\alpha + k \mid (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ é denso existem infinitos $j \in \mathbb{N}$ tais que $j\alpha \in I_1$ mod$\mathbb{Z}$ e infinitos $j \in \mathbb{N}$ tais que $j\alpha \in I_2$ mod$\mathbb{Z}$. Portanto para $j\alpha \in I_1$ mod$\mathbb{Z}$ temos que $f_0^j(x_0) < f_1^j(x_1)$ e para $j\alpha \in I_2$ mod$\mathbb{Z}$ temos que $f_0^j(x_0) > f_1^j(x_1)$,i.e., $(f_0^j(x_0))_{j\in\mathbb{Z}}$ e $(f_1^j(x_1))_{j\in\mathbb{Z}}$ se cruzam infinitas vezes.

Caso (2): Seja

$$c_0 = \sup\{c | x_0^-(t+c) \leq x_1^-(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

por (b) temos que $x_0^-(t+c_0) \leq x_1^-(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que x_0^- é contínua em $t_0 + c_0$ e suponha que $x_0^-(t_0+c_0) < x_1^-(t_0)$ então existe $c_1 > c_0$ tal que $x_0^-(t_0+c_1) < x_1^-(t_0)$, e por (2) isto contradiz a definição de c_0. Portanto $x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ sempre que x_0^-é contínua em $t + c_0$.

Por (a) as descontinuidades de x_0^- são enumeráveis, por (b) x_0^- é contínua à esquerda, logo $x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ nos pontos em que x_0^- é descontínua , daí, concluímos que $x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Fazendo demonstração análoga para x^+ obtemos finalmente que

$x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ e $x_0^+(t+c_0) = x_1^+(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por (f) $\text{Rec}(f_0) = x_0^+(\mathbb{R}) \cup x_0^-(\mathbb{R})$ e $\text{Rec}(f_1) = x_1^+(\mathbb{R}) \cup x_1^-(\mathbb{R})$ e como $x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ e $x_0^+(t+c_0) = x_1^+(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos Rec(f_0)=Rec(f_1).

Agora seja $x \in \mathrm{Rec}(f_0)$ então $x = x_0^+(t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$ (ou $x = x_0^-(t)$), por(e) temos que

$$f_0(x) = f_0(x_0^+((t-c_0)+c_0)) = x_0^+((t-c_0)+c_0+\alpha) =$$

$$= x_1^+((t-c_0)+\alpha) = f_1(x_1^+(t-c_0)) = f_1(x)$$

Logo $f_0|_{\mathrm{Rec}(f_0)} = f_1|_{\mathrm{Rec}(f_1)}$.

Vamos agora provar (a)-(f):

(a) Seja $t < s$, então existe $(j_0, k_0) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $t < j_0\alpha + k_0 < s$, portanto $x^+(t) < f^{j_0}(x_0) + k_0 < x^+(s)$, logo x^+ é estritamente crescente. Análogo para x^-.

(b) x^+ é contínua à direita, pois seja $t_n \to t$ tal que $t_n > t$, queremos provar que $x^+(t_n) \to x^+(t)$, por absurdo suponhamos que isso não acontece, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $x^+(t_n) > x^+(t) + \varepsilon$. Como $x^+(t) = \inf\{f^j(x_0) + k | j\alpha + k > t\}$ para o ε dado acima, existe $(\bar{j}, \bar{k})$ tal que $\bar{j}\alpha + \bar{k} > t$ e $x^+(t) < f^{\bar{j}}(x_0) + \bar{k} < x^+(t) + \varepsilon$. Agora, como $t_n \to t$ existe t_{n_0} tal que $t_{n_0} < \bar{j}\alpha + \bar{k}$, e portanto $x^+(t_{n_0}) < f^{\bar{j}}(x_0) + \bar{k} < x^+(t) + \varepsilon$, absurdo.

(c) Suponhamos que x^+ é contínua em t, sabemos que $x^-(t) \leq x^+(t)$, seja então $t_n \to t$ tal que $t_n < t$ então $x^+(t_n) \to x^+(t)$ e para cada n existe (j_n, k_n) tais que $t_n < j_n\alpha + k_n < t$, portanto $x^+(t_n) < f^{j_n}(x_0) + k_n < x^-(t)$, logo se $n \to \infty$ temos que $x^+(t) \leq x^-(t)$, logo x^+ e x^- coincidem nos pontos em que x^+ é contínua, vejamos que x^- também é contínua em tais pontos: de fato basta mostrar que x^- é contínua à direita. Seja $t_n \to t$ tal que x^+ é contínua em t e $t_n > t$ então $x^+(t) = x^-(t) < x^-(t_n) < x^+(t_n)$, como $x^+(t_n) \to x^+(t)$, obtemos que $x^-(t_n) \to x^-(t)$.

(d) Vamos denotar por $g : \{j\alpha + k | j, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ $g : j\alpha + k \mapsto f^j(x_0) + k$. É imediato que $g(j\alpha + k + 1) = g(j\alpha + k) + 1$. Note que

$$x^-(t) + 1 = \sup\{g(j\alpha + k + 1) \mid j\alpha + k < t\}$$

e

$$x^-(t+1) = \sup\{g(j\alpha + k) \mid j\alpha + k < t + 1\}$$

Vamos provar que $x^-(t) + 1 \leq x^-(t+1)$: Seja $\varepsilon > 0$ pela definição de supremo existe $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $j_0\alpha + k_0 < t$ e $g(j_0\alpha + k_0 + 1) > x^-(t) + 1 - \varepsilon$.

Por outro lado $j_0\alpha + k_0 + 1 < t + 1 \Rightarrow g(j_0\alpha + k_0 + 1) < x^-(t+1)$. Portanto

$$x^-(t) + 1 - \varepsilon < x^-(t+1)$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que

$$x^-(t) + 1 \leq x^-(t+1)$$

A demostração de que $x^-(t) + 1 \geq x^-(t+1)$ segue de raciocínio análogo. Portanto $x^-(t) + 1 = x^-(t+1)$. Para x^+ é análogo.

(e) Com a mesma notação de (d) temos que:

$$x^-(t+\alpha) = \sup\{g(j\alpha + k) \mid j\alpha + k < t + \alpha\}$$

e

$$f \circ x^-(t) = f\left(\sup\{g(j\alpha + k) \mid j\alpha + k < t\}\right)$$

Vejamos que $x^-(t+\alpha) \leq f \circ x^-(t)$: seja $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo existem $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $j_0\alpha + k_0 < t + \alpha$ e $g(j_0\alpha + k_0) > x^-(t+\alpha) - \varepsilon$. E como

$$(j_0 - 1)\alpha + k_0 < t \Rightarrow g((j_0-1)\alpha + k_0) < \sup\{g(j\alpha + k) \mid j\alpha + k < t\}$$

Daí

$$f(f^{j_0-1}(x_0) + k_0) < f(\sup\{g(j\alpha + k) \mid j\alpha + k < t\}) = f \circ x^-(t)$$

pois f é crescente. E como $f(f^{j_0-1}(x_0) + k_0) = g(j_0\alpha + k_0)$, temos que $x^-(t+\alpha) - \varepsilon < f \circ x^-(t)$, i.e.,

$$x^-(t+\alpha) \leq f \circ x^-(t)$$

E $x^-(t+\alpha) \geq f \circ x^-(t)$: de fato, seja $\varepsilon > 0$ existem $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $j_0\alpha + k_0 < t$ e que $g(j_0\alpha + k_0) > x^-(t) - \varepsilon$. Por outro lado, como

$$(j_0 + 1)\alpha + k_0 < t + \alpha \Rightarrow g((j_0+1)\alpha + k_0) < x^-(t+\alpha)$$

Note que $g((j_0+1)\alpha + k_0) = f(g(j_0\alpha + k_0))$ portanto

$$f(x^-(t) - \varepsilon) < f(g((j_0)\alpha + k_0)) < x^-(t+\alpha)$$

Daí, fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $f(x^-(t)) \leq x^-(t+\alpha)$. Para x^+ a demonstração é análoga.

(f) Vamos mostrar que $x^+(\mathbb{R}) \cup x^-(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Rec}(f)$: seja $y \in x^+(\mathbb{R}) \cup x^-(\mathbb{R})$, suponhamos que $y \in x^+(\mathbb{R})$, então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^+(t) = \inf\{f^j(x_0)+k \mid j\alpha+k < t\}$, portanto existe $\{(j_n, k_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f^{j_n}(x_0)+k_n \to y$ quando $n \to \infty$, i.e., $y \in \mathrm{Rec}(f)$. E vejamos que $\mathrm{Rec}(f) \subset x^+(\mathbb{R}) \cup x^-(\mathbb{R})$: seja $y \in \mathrm{Rec}(f)$ então existe $\{(j_n, k_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $y = \lim f^{j_n}(x_0)+k_n$, logo existe $\{(j_n^+, k_n^+)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ou $\{(j_n^-, k_n^-)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $y = \lim f^{j_n^+}(x_0) + k_n^+$ com $f^{j_n^+}(x_0) + k_n^+ > y$ ou $y = \lim f^{j_n^-}(x_0) + k_n^-$ com $f^{j_n^-}(x_0) + k_n^- < y$, no primeiro caso $y \in x^+(\mathbb{R})$ e no segundo caso $y \in x^-(\mathbb{R})$. $\square$

Capítulo 2

O número de rotação de uma trajetória minimal

Fixada $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, denotaremos por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$.

Neste capítulo veremos que para todo $(q,p) \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbb{Z}$ existe $x \in \mathcal{M}$ tal que x é periódico com período (q,p). Então mostraremos que toda $x \in \mathcal{M}$ é órbita de alguma $f \in \tilde{G}_+$ o que nos permite definir o número de rotação para cada $x \in \mathcal{M}$. Finalmente provaremos que todo número real é o número de rotação de algum $x \in \mathcal{M}$.

Lema 2.1 *Trajetórias minimais se cruzam no máximo uma vez. Se $x \in \mathcal{M}$ e $x^* \in \mathcal{M}$ coincidem em $i \in \mathbb{Z}$ então x e x^* se cruzam em $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: A segunda afirmação segue de (H_4). Para provar a primeira, por absurdo, suponhamos que x e x^* se cruzam entre j e $j+1$ e entre k e $k+1$, $j < k$ (ver figura 2.1). O caso em que um, ou ambos cruzamentos ocor-

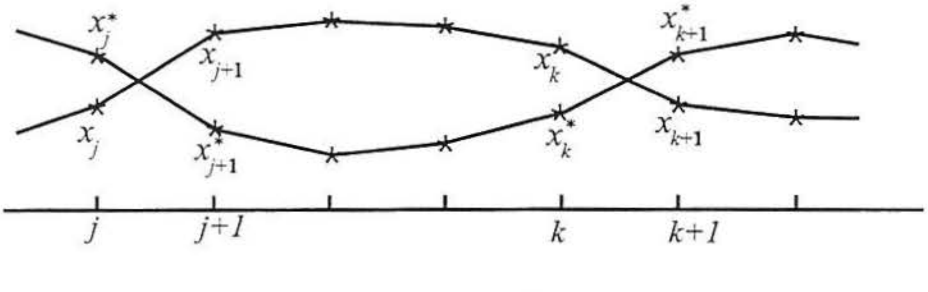

Figura 2.1: x e x^* se cruzam entre j e $j+1$ e entre k e $k+1$

rem em inteiros pode ser tratado similarmente. Consideremos os segmentos $(x_j, x^*_{j+1}, ..., x^*_k, x_{k+1})$ e $(x^*_j, x_{j+1}, ..., x_k, x^*_{k+1})$. Como por hipótese x e x^* se cruzam entre j e $j+1$ e entre k e $k+1$ temos que

$$(x_j - x^*_j)(x_{j+1} - x^*_{j+1}) < 0$$

e

$$(x_k - x^*_k)(x_{k+1} - x^*_{k+1}) < 0$$

i.e., se $x_j < x^*_j$ então $x_{j+1} > x^*_{j+1}$ e se $x_k > x^*_k$ então $x_{k+1} < x^*_{k+1}$, logo por (H_3)

$$H(x_j, x^*_{j+1}) + H(x^*_j, x_{j+1}) < H(x_j, x_{j+1}) + H(x^*_j, x^*_{j+1})$$

e

$$H(x^*_k, x_{k+1}) + H(x_k, x^*_{k+1}) < H(x_k, x_{k+1}) + H(x^*_k, x^*_{k+1})$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&H(x_j, x^*_{j+1}, ..., x^*_k, x_{k+1}) + H(x^*_j, x_{j+1}, ..., x_k, x^*_{k+1}) = \\
&= H(x_j, x^*_{j+1}) + H(x^*_{j+1}, ..., x^*_k) + H(x^*_k, x_{k+1}) + \\
&+ H(x^*_j, x_{j+1}) + H(x_{j+1}, ..., x_k) + H(x_k, x^*_{k+1}) < \\
&< H(x_k, x_{k+1}) + H(x^*_k, x^*_{k+1}) + H(x_j, x_{j+1}) + \\
&+ H(x^*_j, x^*_{j+1}) + H(x_{j+1}, ..., x_k) + H(x^*_{j+1}, ..., x^*_k) = \\
&= H(x_j, ..., x_{k+1}) + H(x^*_j, ..., x^*_{k+1}),
\end{aligned}$$

o que contraria a minimalidade de pelo menos um dos segmentos, $(x_j, ..., x_{k+1})$ ou $(x^*_j, ..., x^*_{k+1})$. $\square$

Seja $x \in \mathcal{M}$ (q, p)-periódico. Dizemos que x tem período minimal (q, p), se para todo (a, b) tal que $(q, p) = (na, nb)$ para algum $n > 1, n \in \mathbb{N}$, temos que $T_{(a,b)}x \neq x$.

Corolário 2.2 *Se $x \in \mathcal{M}$ e $x^* \in \mathcal{M}$ são periódicos com o mesmo período e $x = x^*$, então x e x^* não se cruzam. Se $x \in \mathcal{M}$ é periódico com período minimal (q,p) então q e p são relativamente primos.*

Demonstração: Se x e x^* têm o mesmo período e se cruzam uma vez então se cruzam infinitas vezes, o que contradiz o lema (2.1), pois x e x^* são ambas minimais. Se $x \in \mathcal{M}$ é periódico com período minimal (q,p) e suponhamos por absurdo que $(q,p) = (na, nb)$ com $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ e $n > 1$ então $T_{(a,b)}x \neq x$. Como x e $T_{(a,b)}x$ não se cruzam, por terem o mesmo período, temos que ou $T_{(a,b)}x < x$ ou $T_{(a,b)}x > x$. Sem perda de generalidade suponhamos que $T_{(a,b)}x < x$, i.e., para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$x_{i-a} + b < x_i \Rightarrow x_{i-2a} + b < x_i - 2 \Rightarrow x_{i-2a} + 2b < x_{i-a} + b < x_i$$

Portanto, $T_{(2a,2b)}x < x$. Fazendo este mesmo processo n vezes obteremos que $T_{(na,nb)}x < x$, o que contradiz a hipótese de que x é periódico de período $(na, nb) = (q,p)$. $\square$

Teorema 2.3 *Para todo $(q,p) \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbb{Z}$ existe $x \in \mathcal{M}$ que é (q,p)-periódico.*

Demonstração: Suponhamos que $q > 0$; considere o conjunto das trajetórias (q,p)-periódicas

$$P_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid T_{(q,p)}x = x\}$$

Vamos minimizar a função

$$H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbb{R}, \qquad H_{q,p}(x) = H(x_0, ..., x_q)$$

Provaremos que se x é mínimo de $H_{q,p}$ então $x \in \mathcal{M}$. Primeiramente vejamos que $H_{q,p}$ atinge seu ínfimo $H_{q,p}^{min}$ em $P_{q,p}$. Para tal, seja $\bar{x} \in P_{q,p}$ fixado, que por (H_1) podemos supor que $\bar{x}_0 \in [0,1)$, e seja $M = H_{q,p}(\overline{x}) = H(\bar{x}_0, ..., \bar{x}_q)$.

Escolhemos $K = |M|q$, por (H_2) existe $\eta_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $\eta > \eta_0$ então $H(\xi, \xi + \eta) > K$ e se $-\eta < -\eta_0$ então $H(\xi, \xi - \eta) > K$. Denotaremos por R a região compreendida entre as retas $y = \eta_0 x + 1$ e $y = -\eta_0 x$ com $x \in [0, q]$. Como R é compacta, $H|_{\mathrm{R}} : (\xi, \eta) \to H(\xi, \eta)$ tem mínimo. Seja $m = \min\{\min_{\mathrm{R}} H(\xi, \eta), M\}$.

Vamos provar que dado $x \in P_{q,p}$ tal que $x_0 \in [0,1)$ e que para algum i, $0 < i \leq q$ temos que $x_i > i\eta_0 + 1$ ou $x_i < -i\eta_0$ então $H_{q,p}(x) > |M|$. Sem perda de generalidade podemos supor que acontece para $i = 1$, i.e., $x_1 > \eta_0 + 1$ ou $x_1 < -\eta_0$. Suponhamos ainda, que $x_1 > \eta_0 + 1$, então $H(x_0, x_1) = H(x_0, x_0 + (x_1 - x_0)) > K$.

Note que existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $(1, x_1 - c) \in$ R, por (H_1) $H(x_1, x_2) = H(x_1 - c, x_2 - c)$, agora ou $(2, x_2 - c) \in$ R e então $H(x_1, x_2) \geq$m, ou $(2, x_2 - c) \notin$R e então $H(x_1, x_2) \geq K$, procedendo da mesma forma para cada $i \in \{2, ..., q\}$, teremos que $H(x_i, x_{i+1}) \geq$m, pois $K \geq$m, já que $|M| \geq$m. Daí

$$H(x_0, ..., x_q) = H(x_0, x_1) + H(x_1, x_2) + ... + H(x_{q-1}, x_q) \geq$$

$$\geq K + m(q-1) = |M|q + m(q-1) = |M| + (|M| + m)(q-1) \geq |M|$$

i.e., $H_{q,p}(x) \geq |M|$. Portanto o ínfimo de $H_{q,p}$ é atingido em R, e vamos denotá-lo por $H_{q,p}^{min}$.

Vejamos agora que dois mínimos de $H_{q,p}$ não se cruzam. Suponhamos por absurdo que dois mínimos x e x^* de $H_{q,p}$ se cruzam, para que isto aconteça devemos ter $q \geq 2$. Definindo $x^+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e $x^- \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ por $x_i^+ = max\{x_i, x_i^*\}$ e $x_i^- = min\{x_i, x_i^*\}$, então x^+ e x^- também são (q,p)-periódicos. Usando (H_3) vamos provar que

$$(2.1) \qquad H_{q,p}(x^-) + H_{q,p}(x^+) \leq H_{q,p}(x) + H_{q,p}(x^*) = 2H_{q,p}^{min}$$

De fato, por (H_3) temos que

$$H(x_i^-, x_{i+1}^-) + H(x_i^+, x_{i+1}^+) < H(x_i^-, x_{i+1}^+) + H(x_i^+, x_{i+1}^-)$$

Portanto se x e x^* se cruzam entre i e $i+1$ e supormos que $x_i < x_i^*$ então $x_i^- = x_i$ $x_{i+1}^+ = x_{i+1}$, e temos (2.1).

Se x e x^* se cruzam em i ou em $i+1$, e supormos que se cruzam em i e $x_{i+1} < x_{i+1}^*$ então, $x_i^- = x_i^*$ e $x_{i-1}^- = x_{i+1}^*$, daí vale (2.1).

Ou ainda, se x e x^* não se cruzam, podemos supor $x < x^*$ donde obtemos que $x^- = x$ e $x^+ = x^*$. Portanto em todos os casos vale:

$$H_{q,p}(x^-) + H_{q,p}(x^+) \leq H_{q,p}(x) + H_{q,p}(x^*)$$

E temos a desigualdade estrita se x e x^* se cruzam entre i e $i+1$ para algum $0 \leq i \leq q$. Mas como x^- e $x^+ \in P_{q,p}$ temos igualdade em (2.1), daí x e

x^* não se cruzam entre i e $i+1$ para todo $0 \leq i \leq q$. Pela periodicidade de x e x^* temos que x e x^* não se cruzam entre i e $i+1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então se as trajetórias se cruzam, isto acontece em algum $i \in \mathbb{Z}$. Podemos assumir que $i = 1$ pois $T_{(i-1,0)}x$ e $T_{(i-1,0)}x^*$ são também mínimos de $H_{q,p}$, agora por (H_1) como $(x_0^- - x_0^+)(x_2^- - x_2^+) > 0$ temos que (x_0^-, x_1^-, x_2^-) e (x_0^+, x_1^+, x_2^+) não podem ser ambos minimais. Vamos supor sem perda de generalidade que x^- não é minimal, portanto podemos encontrar $\tilde{x}_1^-$ tal que $H(x_0^-, \tilde{x}_1^-, x_2^-) < H(x_0^-, x_1^-, x_2^-)$. Como $q \geq 2$ podemos encontrar $\tilde{x}^-$ (ou $\tilde{x}^+$) em $P_{q,p}$ que coincida com x^- exceto em $i = nq+1, n \in \mathbb{Z}$ e tal que

$$H_{q,p}(\tilde{x}^-) < H_{q,p}(x^-) \tag{2.2}$$

Mas x^- é mínimo de $H_{q,p}$, o que contradiz (2.2). Logo x e x^* não se cruzam. Como $H_{q,p}(x) = H_{q,p}(T_{(j,k)}x)$ obtemos

(2.3) Se x é mínimo de $H_{q,p}$ então x não cruza nenhuma de suas translações $T_{(j,k)}x$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

Observe que se $(q^*, p^*) = n(q,p)$ e $\tilde{x} \in P_{q^*,p^*}$ é um mínimo de H_{q^*,p^*}, então $\tilde{x} \in P_{q,p}$. De fato, suponhamos que isto não valha, i.e., $T_{(q,p)}\tilde{x} \neq \tilde{x}$. Aplicando (2.3) para $\tilde{x}$ e (q^*, p^*), temos que $\tilde{x}$ e $T_{(q,p)}\tilde{x}$ não se cruzam, pois tem o mesmo período. Portanto, ou $\tilde{x} < T_{(q,p)}\tilde{x}$ ou $\tilde{x} > T_{(q,p)}\tilde{x}$ repetindo o processo n vezes, (assim como na demonstração do corolário 2.2), temos que $\tilde{x} < T_{(q^*,p^*)}\tilde{x}$ ou $\tilde{x} > T_{(q^*,p^*)}\tilde{x}$, o que é um absurdo. Logo temos que $\tilde{x} \in P_{q,p}$.

Agora como $H_{q^*,p^*}(\tilde{x}) = nH_{q,p}(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in P_{q,p}$ temos que:

(2.4) $H_{q^*,p^*}^{min} = nH_{q,p}^{min}$, ou seja, todo mínimo de $H_{q,p}$ é também mínimo de H_{q^*,p^*} para todo $(q^*, p^*) = n(q,p)$. Em particular, se $\tilde{x} \in P_{q,p}$ é um mínimo de $H_{q,p}$ obtemos

(2.5) $(\tilde{x}_0, ..., \tilde{x}_{nq})$ é um segmento minimal para todo $n \geq 1$.

Usando a periodicidade de $\tilde{x}$, também $(\tilde{x}_{-nq}, ..., \tilde{x}_0, ..., \tilde{x}_{nq})$ é segmento minimal para todo $n \geq 1$.

Finalmente vamos provar que se $x \in P_{q,p}$ é mínimo de $H_{q,p}$ então $x \in \mathcal{M}$. Fixamos $x \in P_{q,p}$ um mínimo de $H_{q,p}$. Pela afirmação acima temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $(x_{-nq}, ..., x_0, ..., x_{nq})$ é segmento minimal. Daí se

$(x_j, ..., x_k)$ é um segmento arbitrário de x. então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{-nq} < x_j$ e $x_k < x_{nq}$. Agora como vale que todo subsegmento de um segmento minimal é minimal (veja o item (iii) após a definição 1.4), temos que

$$(x_{-nq}, ..., x_0, ..., x_{nq}) \text{ é minimal } \Rightarrow (x_j, ..., x_k) \text{ é minimal}$$

Portanto $x \in \mathcal{M}$. □

Lema 2.4 *Suponha que $x \in \mathcal{M}$ e $x^* \in \mathcal{M}$ são ω-assintóticos (respectivamente α-assintóticos) e $|x_{i+1} - x_i|$ é limitado para $i \to \infty$, (respectivamente para $i \to -\infty$). Então x e x^* não se cruzam.*

Demonstração: Trataremos o caso em que x e x^* são ω-assintóticos e vamos supor que x e x^* se cruzam em $i \in \mathbb{Z}$ (ver figura 2.2). Os casos restantes são análogos. Por (H_4) como $(x_{i-1} - x^*_{i-1})(x_{i+1} - x^*_{i+1}) < 0$, $(x_{i-1}, x_i, x^*_{i+1})$ e $(x^*_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ não podem ser ambos minimais. Então existem $\bar{x}_i$ e $\tilde{x}_i$ tais que

$$H(x_{i-1}, \bar{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) < H(x_{i-1}, x_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

Usando $x_i = x^*_i$ temos que

$$H(x_{i-1}, x_i, x^*_{i+1}) = H(x_{i-1}, x_i) + H(x^*_i, x^*_{i+1})$$

e

$$H(x^*_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = H(x^*_{i-1}, x^*_i) + H(x_i, x_{i+1})$$

Portanto

$$(2.6) \quad H(x_{i-1}, \bar{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) < H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1})$$

Por outro lado a minimalidade de $(x_{i-1}, ..., x_j)$ e de $(x^*_{i-1}, ..., x^*_j)$ implica

(2.7)

$$H(x_{i-1}, \bar{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i+1}, ..., x^*_j) + H(x^*_j, x_{j+1}) \geq$$
$$\geq H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x_{i+1}, ..., x_j) + H(x_j, x_{j+1})$$

e

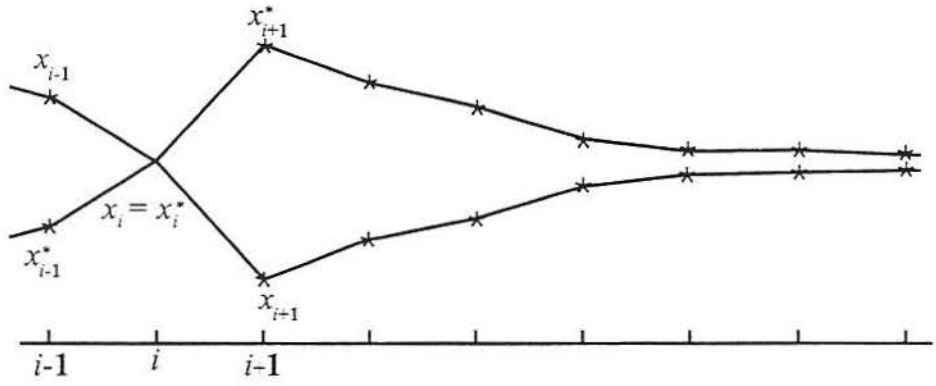

Figura 2.2: x e x^* são ω-assintóticos e se cruzam em $i \in \mathbb{Z}$

(2.8)

$$H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) + H(x_{i+1}, ..., x_j) + H(x_j, x^*_{j+1}) \geq$$
$$\geq H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i+1}, ..., x^*_j) + H(x^*_j, x^*_{j+1})$$

Somando (2.7) e (2.8) temos

$$H(x_{i-1}, \bar{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_j, x_{j+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) + H(x_j, x^*_{j+1}) \geq$$
$$H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x_j, x_{j+1}) + H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_j, x^*_{j+1})$$

i.e,

$$H(x_{i-1}, \bar{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) \geq H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}) +$$
$$+ H(x_j, x_{j+1}) - H(x_j, x^*_{j+1}) + H(x^*_j, x^*_{j+1}) - H(x^*_j, x_{j+1})$$

Portanto, se provarmos que

$$\lim_{j \to \infty} |H(x^*_j, x^*_{j+1}) - H(x^*_j, x_{j+1})| = \lim_{j \to \infty} |H(x_j, x_{j+1}) - H(x_j, x^*_{j+1})| = 0$$

teremos uma contradição com (2.6). Usando (H_1) podemos escrever

$$|H(x^*_j, x_{j+1}) - H(x^*_j, x^*_{j+1})| = |H(x^*_j - k_j, x_{j+1} - k_j) - H(x^*_j - k_j, x^*_{j+1} - k_j)|$$

com $k_j \in \mathbb{Z}$ e tal que $0 \leq x^*_j - k_j < 1$. Temos que $|x_{j+1} - k_j|$ e $|x^*_{j+1} - k_j|$ são limitados quando $j \to \infty$, de fato,

$$|x_{j+1} - k_j| \leq |x_{j+1} - x_j| + |x_j - k_j| \leq |x_{j+1} - x_j| + |x_j - x^*_j| + |x^*_j - k_j|$$

onde $|x_{j+1} - x_j|$ é limitado por hipótese,

$$|x_j - x_j^*| \to 0 \text{ quando } j \to \infty, |x_j^* - k_j| < 1$$

e

$$|x_{j+1}^* - k_j| \leq |x_{j+1}^* - x_j^*| + |x_j^* - k_j|$$

Agora

$$\lim_{j \to \infty} |H(x_j^*, x_{j+1}) - H(x_j^*, x_{j+1}^*)| = 0$$

segue de $\lim_{j\to\infty} |x_j - x_j^*| = 0$ e da continuidade uniforme em conjuntos compactos.

Segue de maneira análoga que $\lim_{j\to\infty} |H(x_j, x_{j+1}) - H(x_j, x_{j+1}^*)| = 0$. □

Teorema 2.5 *Suponha $x \in \mathcal{M}$. Então x e $T_{(a,b)}x$ não se cruzam para todo $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.*

Demonstração: Para $a = 0$ é trivial. Suponhamos que x e $x^* = T_{(a,b)}x$ se cruzam e, sem perda de generalidade, que isto acontece em 0 ou entre 0 e 1 (ver figura 2.3). Pelo lema (2.1) x e x^* não se cruzam outra vez. Trocando x por x^* se necessário podemos supor que $x_j^* < x_j$ para $j < 0$ e $x_j^* > x_j$ para $j > 0$. Vamos supor que $a > 0$, o caso $a < 0$ é análogo. Nossas hipóteses acima implicam que para todo $j < 0$ fixado a seqüência

$$v \in \mathbb{N} \to x_{j-va} + vb \text{ é decrescente}$$

De fato, seja $j < 0$ fixado, como por hipótese estamos supondo que $x_j^* < x_j$, temos que $x_j > x_{j-a} + b$ também vale que $x_{j-a} > x_{j-2a} + b$, pois $a > 0$, isto implica que $x_{j-a} + b > x_{j-2a} + 2b$ daí $x_j > x_{j-a} + b > x_{j-2a} + 2b$, procedendo por indução temos que a seqüência acima é decrescente.

Com argumento análogo, prova-se que, para todo $j > 0$ fixado, a seqüência

$$v \in \mathbb{N} \to x_{j+va} - vb \text{ é decrescente}$$

Vamos provar que x e x^* são ou α-assintóticas, ou ω-assintóticas.

Para isto, compararemos x a uma $\bar{x} \in \mathcal{M}$ (a, b)-periódica que satisfaz $\bar{x}_0 < x_0$. Para obter tal $\bar{x}$ usamos o teorema (2.3) e uma translação $T_{(0,j)}$ se necessário. Pelo lema (2.1) temos que $\bar{x}_j < x_j$ para $j \leq 0$ ou $\bar{x}_j < x_j$ para

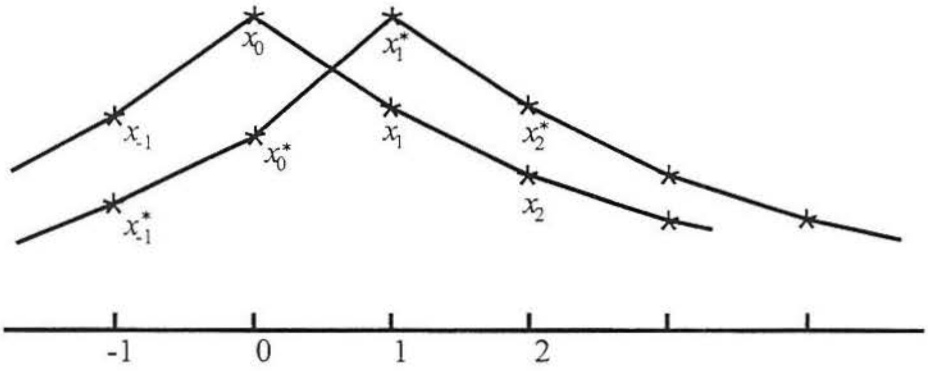

Figura 2.3: x e x^* se cruzam entre 0 e 1.

$j \geq 0$, já que x e $\bar{x}$ se cruzam no máximo uma vez e isto se dá à esquerda ou à direita de 0. Vamos tratar o caso $\bar{x}_j < x_j$ para $j \leq 0$, o outro caso é análogo. Para $j \leq 0$ a seqüência $v \to x_{j-va} + vb$ é decrescente e limitada por baixo por $\bar{x}_{j-va} + vb = \bar{x}_j$ pois $x_{j-va} + vb > \bar{x}_{j-va} + vb = \bar{x}_j$ para todo $v \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\tilde{x}_j := \lim_{v \to \infty} (x_{j-va} + vb) = \lim_{v \to \infty} (T_{(va,vb)} x)_j$$

existe para $j \leq 0$ e $\tilde{x}_{j-a} + b = \tilde{x}_j$. Pela periodicidade de $(\tilde{x}_j)_{j \leq 0}$ poderemos concluir que x e x^* são α-assintóticos a $(\tilde{x}_j)_{j \leq 0}$. De fato, provemos que x e $\tilde{x}$ são α-assintóticas. Para cada $j \in \{0, -1, ..., -(a-1)\}$ a seqüência

$$\{x_{j-a} + b, x_{j-2a} + 2b, ...\} \to \tilde{x}_j$$

i.e., dado $\varepsilon > 0$ existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que se $v \geq k_j$ então

$$|x_{j-va} - \tilde{x}_{j-va}| = |x_{j-va} + vb - (\tilde{x}_{j-va} + vb)| = |x_{j-va} + vb - \tilde{x}_j| < \varepsilon$$

Seja $k = \max_{j \in \{0,-1,...,-(a-1)\}} \{k_j a\}$. Se $i < 0$ então $i = j - va$, com $-(a-1) \leq j \leq 0$.

Agora $i < -k$ então $i < -k_j a$ para todo $j \in \{0, -1, ..., -(a-1)\}$, i.e.,

$$j - va < -k_j a \Rightarrow -va < -k_j a \Rightarrow v > k_j$$

para todo $j \in \{0, -1, ..., -(a-1)\}$ portanto,

$$|x_i - \tilde{x}_i| = |x_{j-va} - \tilde{x}_{j-va}| < \varepsilon$$

i.e., x e $\tilde{x}$ são α-assintóticas. Com um argumento análogo prova-se que x^* e $\tilde{x}$ são α-assintóticas. Agora para aplicar o lema (2.4) em x e x^* devemos ter que $|x_{i+1} - x_i|$ e $|x^*_{i+1} - x^*_i|$ são limitados quando $i \to -\infty$. Vamos provar que o primeiro é limitado.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $i < -k$ então $|\tilde{x}_i - x_i| < \varepsilon$. Podemos escrever

$$|x_{i+1} - x_i| \leq |x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}| + |\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i| + |\tilde{x}_i - x_i| < \varepsilon + M + \varepsilon$$

onde $M = \max\{|\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j|; j \in \{0, ..., a-1\}\}$. Daí, pelo lema (2.4) x e x^* não se cruzam. □

Seja $\bar{B}_x$ o fecho de $B_x = \{T_{(a,b)}x \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e para cada $i \in \mathbb{Z}$ seja $p_i : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ a projeção $x \to x_i$. Claramente p_i é contínua.

Lema 2.6 *Suponha $x \in \mathcal{M}$. Então $\bar{B}_x$ é totalmente ordenado, a projeção p_0 leva $\bar{B}_x$ homeomorficamente em um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Pelo teorema (2.5) vemos que B_x é totalmente ordenado. O mesmo acontece para $\bar{B}_x$, pois caso contrário, se supusermos por absurdo que $y, z \in \bar{B}_x$ e que y cruza com z em algum i ou entre i e $i+1$, como existem seqüências $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tais que $y_n, z_n \in B_x$ e $y_n \to y$ e $z_n \to z$ então, por continuidade, y_N e z_M se cruzam próximos a i para N, M suficientemente grandes, o que contradiz o teorema (2.5) . Portanto $p_0|_{\bar{B}_x}$ é injetiva, logo $p_0|_{\bar{B}_x} : \bar{B}_x \to p_0(\bar{B}_x)$ é bijeção. Ainda $p_0|_{\bar{B}_x}$ é homeomorfismo, pois claramente $p_0|_{\bar{B}_x}$ é contínua, resta provar que $(p_0|_{\bar{B}_x})^{-1}$ é contínua. Para isto suponhamos $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}, x^n \in \bar{B}_x$ e $y \in \bar{B}_x$ tais que $x^n_0 \to y_0$, vamos provar que $x^n_i \to y_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. $\bar{B}_x$ é totalmente ordenado , e podemos supor que $x^n_0 < y_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário separamos a seqüência $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em duas subseqüências, uma que satisfaz $x^n_0 < y_0$ e outra que satisfaz $x^n_0 > y_0$ e mostramos que para ambas o limite é y. Dado $\varepsilon = \frac{|x^1_0 - y_0|}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ $|x^n_0 - y_0| < \varepsilon$, portanto a seqüência $\{x^n\}_{n \geq n_0}$ é limitada por y e x^1, logo possui subseqüência convergente, digamos $\{x^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, e $x^{n_k} \to \bar{x}$. Ainda $\bar{x} = y$ pois $\bar{x}_0 = y_0$ e tais trajetórias não podem se cruzar, já que $\bar{B}_x$ é totalmente ordenado.

Provemos então que $x^n \to y$. Pela convergência da subseqüência $\{x^{n_k}\}$ temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ vale que $|x_i^{n_k} - y_i| < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Seja $\delta = |x_0^{n_{k_0}} - y_0|$, pela convergência de $\{x_0^n\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|x_0^n - y_0| < \delta$ portanto se $n \geq n_0$ x^n está contida entre y e $x^{n_{k_0}}$, logo $|x_i^n - y_i| < \varepsilon$, i.e., $x^n \to y$.

Para terminar a prova do lema vamos mostrar que $A := p_0(\bar{B}_x)$ é fechado. Suponha $x^n \in \bar{B}_x$ seqüência tal que $x_0^n = p_0(x^n)$ converge. Então para $x_0 = p_0(x)$, onde $x \in \mathcal{M}$ foi fixado no enunciado do teorema, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ $x_0 + a < x_0^n < x_0 + b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{B}_x$ é totalmente ordenado isto implica que $T_{(0,a)}x < x^n < T_{(0,b)}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, agora por (1.1) x^n tem subseqüência convergente cujo limite chamamos $x^* \in \bar{B}_x$, logo $p_0(x^*) = \lim_{n\to\infty} p_0(x^n) \in A$, o que prova que A é fechado. □

Teorema 2.7 *Para cada $x \in \mathcal{M}$ existe uma $f \in \tilde{G}_+$ tal que $x_{i+1} = f(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Defina f no conjunto $A = p_0(\bar{B}_x)$ por $p_1 \circ (p_0|_{\bar{B}_x})^{-1}$, ou equivalentemente, $f(x_0^*) = x_1^*$ se $x^* \in \bar{B}_x$. Pelo lema (2.6), f é estritamente crescente, pois seja $y_0 < z_0$, com $y_0, z_0 \in A$ então $y := (p_0|_{\bar{B}_x})^{-1}(y_0) < (p_0|_{\bar{B}_x})^{-1}(z_0) =: z$, logo $f(y_0) = y_1 < z_1 = f(z_0)$. Ainda, f é homeomorfismo de A em si mesmo. De fato, da mesma maneira como se prova que $p_0|_{\bar{B}_x}$, é homeo. se mostra que $p_1|_{\bar{B}_x}$ é homeo. Então $p_1 \circ (p_0|_{\bar{B}_x})^{-1}$ também o é. Vamos mostrar que $f(A) = A$, seja $a \in A$ então existe $y \in \bar{B}_x$ tal que $p_0(y) = a$ para que $a \in f(A)$ precisamos que exista $z \in \bar{B}_x$ tal que $p_1(z) = a$, no caso $y \in B_x$, temos $y = T_{(a,b)}x$ então tomando $z = T_{(a+1,b)}x$ temos que $y_0 = x_{-a} + b$ e $z_1 = x_{1-(a+1)} + b = y_0$. Agora no caso em que $y \in \bar{B}_x$ e tomando $y^n \to y$, $y^n \in B_x$ e fazendo $z^n = T_{(1,0)}y^n$ temos que $z = \lim_{n\to\infty} z^n$ é tal que $y_0 = z_1$, daí $A \subset f(A)$. Analogamente se prova que $f(A) \subset A$. Também temos que f satisfaz $f(t+1) = f(t) + 1$ para todo $t \in A$. De fato, seja $t \in A$ então existe $y \in \bar{B}_x$ tal que $p_0(y) = t$ no caso em que $y \in B_x$ então $y = T_{(a,b)}x$, seja $z = T_{(a,b+1)}x$, i.e., $y_i = z_i - 1$, daí $z_0 - 1 = y_0 = t$, ou seja, $z_0 = t + 1$, portanto $f(t+1) = f(z_0) = z_1 = y_1 + 1 = f(t) + 1$. Agora se $y \in \bar{B}_x$ tomamos $y^n \in B_x$ tal que $y^n \to y$ e $z^n = T_{(0,1)}y^n$ e obtemos $f(t+1) = f(t) + 1$.

Vamos estender f de A para $\mathbb{R}$ da seguinte forma: se $\mathbb{R}\backslash A = \cup(a_n, b_n)$ então definimos

$$f((1-t)a_n + tb_n) = (1-t)f(a_n) + tf(b_n)$$

para $t \in [0,1]$. Claramente f é contínua, estritamente crescente, portanto para que $f \in \tilde{G}_+$ precisamos mostrar que $f(x+1) = f(x)+1$. Para isto, seja $x \notin A$ então $x \in (a_n, b_n)$ para algum n e $x = (1-t)a_n + tb_n$ para algum $t \in (0,1)$ então $f(x) = (1-t)f(a_n) + tf(b_n)$ e $f(x)+1 = (1-t)(f(a_n)+1) + t(f(b_n)+1)$, como $a_n, b_n \in A$, $f(a_n+1) = f(a_n)+1$ e $f(b_n+1) = f(b_n)+1$ temos que $f(x+1) = (1-t)(f(a_n+1)) + t(f(b_n+1)) = f(x)+1$. Logo $f \in \tilde{G}_+$. Para terminar o teorema resta provar que $f(x_i) = f((T_{(-i,0)}x)_0) = x_{i+1}$. Seja $x^* = T_{(-i,0)}x$, logo $x_0^* = x_i$ portanto $f(x_i) = f(x_0^*) = x_1^* = x_{i+1}$. □

Combinando o teorema (2.7) com os resultados (1.2) e (1.3) de mapas de círculo obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.8 *Existe um mapa contínuo $\tilde{\alpha} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

a) *Para todo $x \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{Z}$ temos que $|x_i - x_0 - i\tilde{\alpha}(x)| < 1$ em particular $\tilde{\alpha}(x) = \lim_{|i|\to\infty} x_i/i$*

b) *Se $x \in \mathcal{M}$ é periódico com período (q,p) então $\tilde{\alpha}(x) = p/q$.*

c) *$\tilde{\alpha}$ é invariante por T, i.e., $\tilde{\alpha}(T_{(a,b)}x) = \tilde{\alpha}(x)$ para todo $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.*

Nota: Chamamos $\tilde{\alpha}(x)$ o número de rotação de $x \in \mathcal{M}$.
Demonstração: Para $x \in \mathcal{M}$ escolha $f \in \tilde{G}_+$ de acordo com o teorema (2.7) e defina $\tilde{\alpha}(x) := \tilde{\alpha}(f)$. Então $f^i(x_0) = x_i$, por (1.3) $|x_i - x_0 - i\tilde{\alpha}(x)| < 1$ e por (1.2) $\tilde{\alpha}(x) = \lim_{|i|\to\infty} x_i/i$. Em particular $\tilde{\alpha}(x)$ está bem definida e a continuidade de $\tilde{\alpha}$, assim como (b) e (c) são conseqüências imediatas de (a). □

Definimos por $\mathcal{M}_\alpha := \{x \in \mathcal{M} \mid \tilde{\alpha}(x) = \alpha\}$. Note que, como conseqüência do corolário (2.8)(a), vemos que todo $x \in \mathcal{M}_\alpha$ cresce quase linearmente com inclinação α. Em particular, se $x \in \mathcal{M}$ e $x^* \in \mathcal{M}$ e $\tilde{\alpha}(x) \neq \tilde{\alpha}(x^*)$ então x e x^* se cruzam exatamente uma vez.

Teorema 2.9 *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathcal{M}_\alpha$ é não vazio.*

Demonstração: Pelo teorema (2.3) e pelo corolário (2.8)(b) sabemos que $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ se $\alpha \in \mathbb{Q}$. Suponha então $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e escolha uma seqüência $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$ e $x^n \in \mathcal{M}_{\alpha_n}$ com $x_0^n \in [0, 1]$ o que é possivel pelo corolário (2.8)(c). Como α_n converge temos que $|\alpha_n| < C$ para algum $C > 0$. Agora pelo corolário (2.8)(a) obtemos que $|x_i^n| \leq 2 + |i|C$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $i \in \mathbb{Z}$. Por (1.1) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}; |x_i| \leq 2 + |i|C \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}$ é compacto, logo temos que x^n tem subseqüência convergente, i.e., existe $x^* \in \mathcal{M}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x^{nk} = x^*$, onde x^{nk} é a subseqüência referida acima. Agora pela continuidade $\tilde{\alpha}$ temos que $\tilde{\alpha}(x^*) = \alpha$. $\square$

Capítulo 3

Estrutura do conjunto das trajetórias minimais com número de rotação irracional

Seja $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid \text{existe } k_i \in \mathbb{Z}^2\backslash\{0\} \text{ tal que } x = \lim_{i\to\infty} T_{k_i}x\}$

Teorema 3.1 *Suponha que α é irracional. Então $\mathcal{M}_\alpha$ é totalmente ordenado.*

Demonstração: Escolha $x \in \mathcal{M}_\alpha$ e $f \in \tilde{G}_+$ de acordo com o teorema (2.7), i.e, $x_i = f^i(x_0)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Inicialmente vamos provar que toda órbita recorrente de f está em $\mathcal{M}_\alpha$, i.e., se $x_0^* \in \mathrm{Rec}(f)$ então $x_i^* = f^i(x_0^*)$ define um elemento de $\mathcal{M}_\alpha$.

De acordo com a seção 2 do capítulo 1,

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } (i_n, k_n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } y = \lim_{n\to\infty} f^{i_n}(x_0) + k_n\}$$

e note que como este conjunto não depende da escolha de $x_0 \in \mathbb{R}$ podemos tomar $x_0 = p_0(x)$, onde $x \in \mathcal{M}_\alpha$ foi fixado no início da demostração. Denotando $x_{i_n} = f^{i_n}(x_0)$, se $x_0^* \in \mathrm{Rec}(f)$ existe $(i_n, k_n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x_0^* = \lim_{n\to\infty} x_{i_n} + k_n$. Então, fixado $i \in \mathbb{N}$

$$x_i^* = f^i(x_0^*) = \lim_{n\to\infty} f^i(x_{i_n} + k_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{i_n - i} + k_n)$$

daí $x^* = \lim_{n\to\infty} T_{(-i_n,k_n)}x \in \mathcal{M}$. E segue da continuidade de $\tilde{\alpha}$ que $x^* \in \mathcal{M}_\alpha$.

Agora suponha $x^0, x^1 \in \mathcal{M}_\alpha$ e f_0, f_1 seus mapas correspondentes em $\tilde{G}_+$. Então dados $\bar{x}_0 \in \text{Rec}(f_0)$ e $\tilde{x}_0 \in \text{Rec}(f_1)$, pela primeira parte da demostração vemos que $(f_0^i(\bar{x}_0))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}_\alpha$ e $(f_1^i(\tilde{x}_0))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}_\alpha$, logo se cruzam no máximo uma vez. Portanto o lema (1.5) implica que f_0 e f_1 coincidem em $\text{Rec}(f_0)$=$\text{Rec}(f_1)$.

Considere $x_0^\pm, x_1^\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que denotam os mapas estritamente crescentes construídos no lema (1.5) e $x_j^0 = f_0^j(x_0^0)$ e $x_j^1 = f_1^j(x_0^1)$. De acordo com a prova do lema (1.5)

$(*)$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_0^\pm(t+c) = x_1^\pm(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pela definição de $x_0^\pm$ e $x_1^\pm$ temos que

$$(**) \qquad x_0^-(j\alpha) \le x_j^0 \le x_0^+(j\alpha) \quad \text{e} \quad x_1^-(j\alpha) \le x_j^1 \le x_1^+(j\alpha)$$

De fato, $x_0^-(j\alpha) = \sup\{x_i^0 + k \mid i\alpha + k < j\alpha\}$, como f é estritamente crescente, temos $i\alpha + k < j\alpha$ implica $x_i^0 + k < x_j^0$, portanto $x_0^-(j\alpha) \le x_j^0$, as outras desigualdades são análogas.

No caso em que $c > 0$ então existe $i, k \in \mathbb{Z}$ tais que $t < i\alpha + k < t + c$ portanto $x_0^+(t) < x_0^-(t+c)$, aplicando em $t = j\alpha$ temos que $x_0^+(j\alpha) < x_0^-(j\alpha + c) = x_1^-(j\alpha)$ e como $x_j^0 \le x_0^+(j\alpha)$ e $x_1^-(j\alpha) \le x_j^1$ concluímos que $x_j^0 < x_j^1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. O caso em que $c < 0$ é análogo. Portanto se $c \neq 0$ x^0 e x^1 não se cruzam.

Agora no caso em que $c = 0$, veremos que x^0 e x^1 são assintóticos.

Note que:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j^1 - x_j^0| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} (x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha))$$

já que $x_j^1 \le x_1^+(j\alpha) = x_0^+(j\alpha)$ (por $(**)$ e $(*)$) e $x_j^0 \ge x_0^-(j\alpha)$ (por $(**)$).

Afirmação:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha)) \le x_0^+(1) - x_0^+(0)$$

Demonstração da afirmação:

1° passo: Podemos escrever $j\alpha = a_j + b_j$, onde $a_j \in [0, 1)$ e $b_j \in \mathbb{Z}$. Daí $x_0^+(j\alpha) = x_0^+(a_j + b_j) = x_0^+(a_j) + b_j$ (na última igualdade foi usada a propriedade (d) de x_0^+, conforme visto no lema 1.5). Analogamente, temos que $x_0^-(j\alpha) = x_0^-(a_j + b_j) = x_0^-(a_j) + b_j$. Logo obtemos a seguinte igualdade:

$$x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha) = x_0^+(a_j) - x_0^-(a_j) \quad \text{com} \quad a_j \in [0, 1)$$

2^o passo: Se $j \neq k$ então $a_j \neq a_k$, pois α é irracional. Portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_j < a_k$. Lembrando que $x_0^+(a_j) = \inf\{x_i^0 + k \mid i\alpha + k > a_j\}$ e $x_0^-(a_k) = \sup\{x_i^0 + k \mid i\alpha + k < a_k\}$, é imediato que $x_0^+(a_j) < x_0^-(a_k)$ se $a_j < a_k$. Daí seque que

$$[x_0^-(a_j), x_0^+(a_j)] \cap [x_0^-(a_k), x_0^+(a_k)] = \emptyset \quad \text{sempre que} \quad j \neq k.$$

E ainda $x_0^+(0) < x_0^-(a_j)$ e $x_0^+(a_j) < x_0^+(1)$. Portanto $[x_0^-(a_j), x_0^+(a_j)] \subset [x_0^+(0), x_0^+(1)]$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

3^o passo: do 1^o passo temos que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha)) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}(x_0^+(a_j) - x_0^-(a_j))$$

Do 2^o passo obtemos que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}([x_0^-(a_j), x_0^+(a_j)]) \subset [x_0^+(0), x_0^+(1)]$$

e ainda que a união é disjunta. Portanto

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(x_0^+(a_j) - x_0^-(a_j)) \leq x_0^+(1) - x_0^+(0)$$

Logo

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha)) \leq x_0^+(1) - x_0^+(0) = 1$$

Portanto x^0 e x^1 são assintóticas, daí não podem se cruzar. $\square$

Vejamos algumas conseqüências do teorema (3.1)

Corolário 3.2 *Existe um mapa contínuo de círculo $f \in \tilde{G}_+$ com $\tilde{\alpha}(f) = \alpha$ e um conjunto fechado f-invariante $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{M}_\alpha$ consiste nas órbitas de f contidas em A_α, i.e., $x \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow x_0 \in A_\alpha$ e $x_i = f^i(x_0)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. A projeção p_0 leva $\mathcal{M}_\alpha$ homeomorficamente em A_α.*

Demonstração: Como $\mathcal{M}_\alpha$ é totalmente ordenado, e seja $A_\alpha = p_0(\mathcal{M}_\alpha)$, fazendo a mesma demostração do lema (2.6) com $\mathcal{M}_\alpha$ no lugar de $\bar{B}_x$. Obtemos que p_0 é homeomorfismo entre $\mathcal{M}_\alpha$ e A_α e ainda A_α é fechado. Vamos definir f em A_α por $p_1 \circ (p_0|_{\mathcal{M}_\alpha})^{-1}$. Então A_α é f-invariante. De fato, seja $a \in A_\alpha$ então existe $y \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $y_0 = a$, seja $z = T_{(0,1)}y$ sabemos que $z \in \mathcal{M}_\alpha$ pelo corolário 2.8 (c), e note que $z_1 = y_0$ e $z_1 = f(z_0)$ logo $a = f(z_0)$ onde $z_0 \in A_\alpha$, i.e., $A_\alpha \subset f(A_\alpha)$, a outra contenção é análoga. Ainda $f(t+1) = f(t)+1$, para $t \in A_\alpha$, pois seja $t \in A_\alpha$ então existe $y \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $y_0 = t$, e note que $z = T_{(0,1)}y$ é tal que $z_1 = y_1 + 1$, daí $f(t+1) = f(y_0+1) = f(z_0) = z_1 = y_1 + 1 = f(y_0) + 1 = f(t) + 1$. Podemos extender esta f para $\mathbb{R}$, da mesma forma que foi feito no teorema (2.7), e também obtemos que $f \in \tilde{G}_+$. Resta provar que $x \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow x_0 \in A_\alpha$ e $x_i = f^i(x_0)$. Suponhamos $x \in \mathcal{M}_\alpha$ então $x^* = T_{(-i,0)}x \in \mathcal{M}_\alpha$ e $x_0^* = x_i$ daí, $f(x_i) = f(x_0^*) = x_1^* = x_{i+1}$, ou seja $x_i = f^i(x_0)$. Por outro lado se $x_0 \in A_\alpha$ então $x \in \mathcal{M}_\alpha$ pois p_0 é bijeção entre A_α e $\mathcal{M}_\alpha$. □

Corolário 3.3 *Uma trajetória minimal $x \in \mathcal{M}_\alpha$ é recorrente $\Leftrightarrow$ x_0 é recorrente para f, i.e., $p_0(\mathcal{M}_\alpha^{rec})$=Rec($f$).*

Demonstração: Se $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ então existe $(i_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T(i_n, b_n)x = x$$

daí,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}(T(i_n, b_n)x)_0 = \lim_{n\to\infty} x_{-i_n} + b_n = \lim_{n\to\infty} f^{-i_n}(x_0) + b_n$$

Agora se $x \in \mathcal{M}_\alpha$ é tal que $x_0 \in$Rec(f), i.e., existe $(i_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ tal que $x_0 = \lim_{n\to\infty} f^{i_n}(x_0) + b_n$ então

$$x_j = f^j(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^j(f^{i_n}(x_0) + b_n) = \lim_{n\to\infty} x_{j+i_n} + b_n = T_{(-i_n, b_n)}x_j$$

□

Conforme seção 1.2, para o conjunto Rec(f) temos as seguintes alternativas:

Rec(f) $= \mathbb{R}$. Então para todo $\xi \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ tal que $x_0 = \xi$. Ou Rec(f) é um conjunto de Cantor.

Teorema 3.4 *Todo $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ pode ser aproximado por trajetórias periódicas minimais.*

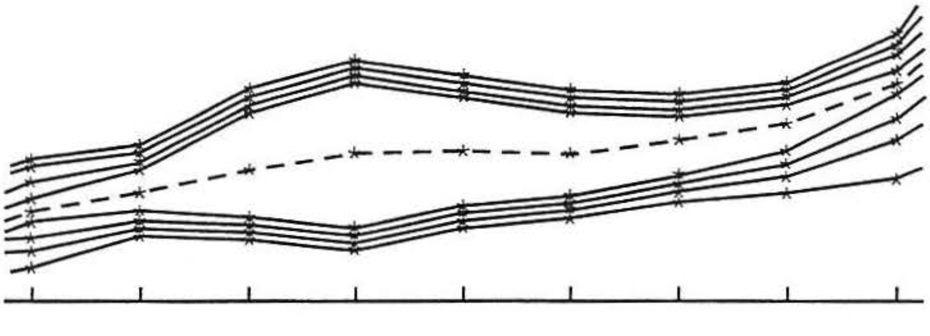

Figura 3.1: $\mathcal{M}_\alpha$ para α irracional

Demonstração: Seja $\widetilde{\mathcal{M}_\alpha} \subset \mathcal{M}_\alpha$ o conjunto dos $x \in \mathcal{M}_\alpha$ que podem ser aproximados desta forma. Então $\widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$ é fechado, pois seja (x^n) tal que $x^n \in \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$ e $x^n \to x$, para cada x^n existe (z^{n_k}), periódica minimal, tal que $z^{n_k} \to x^n$, basta tomar (z^{n_n}) e vemos que $z^{n_n} \to x$. Também $\widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$ é T-invariante, já que se tomarmos $x \in \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$ e $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, por hipótese temos que existe (x^n), x^n periódicas minimais tais que $x^n \to x$, como $T_{(a,b)}x^n$ também é periódica minimal temos que $T_{(a,b)}x^n \to T_{(a,b)}x$, i.e. $T_{(a,b)}x \in \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$. Ainda, $\widetilde{\mathcal{M}_\alpha} \neq \emptyset$ como foi visto na prova do teorema (2.9).

Vamos definir $\tilde{A}_\alpha = p_0(\widetilde{\mathcal{M}_\alpha})$ vemos que este é f-invariante, pois seja $x \in \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$, $x = (..., x_0, x_1, ...) = (..., x_0, f(x_0), ..., f^i(x_0), ...)$ pelo corolário (3.2), $p_0(x) = x_0 \in \tilde{A}_\alpha \Rightarrow f(x_0) \in \tilde{A}_\alpha$ já que $T_{(-1,0)}x \in \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$. Logo, $\tilde{A}_\alpha$ é f-invariante. Ainda é não vazio e fechado, pois p_0 é bijetora, já que $\mathcal{M}_\alpha$ é totalmente ordenado para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Vamos mostrar que $\mathrm{Rec}(f) \subset \tilde{A}_\alpha$. Considere $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, como na seção 1.2. E $\varphi : S^1 \to S^1$ tal que $\pi \circ f = \varphi \circ \pi$. Então $\tilde{A}_\alpha$ f-invariante e fechado, implica que $\pi(\tilde{A}_\alpha)$ é φ-invariante e fechado. Como φ não tem pontos periódicos, por ter número de rotação irracional, temos que (como foi visto na seção 1.2) $\omega(y) = \mathrm{Rec}(\varphi)$. Agora se $y \in \pi(\tilde{A}_\alpha)$, como $\pi(\tilde{A}_\alpha)$ é φ invariante e fechado, temos que $\omega(y) \subset \pi(\tilde{A}_\alpha)$, ou seja, $\mathrm{Rec}(\varphi) \subset \pi(\tilde{A}_\alpha)$. Daí $\mathrm{Rec}(f) \subset \tilde{A}_\alpha$. Agora pelo teorema anterior, temos que $\mathrm{Rec}(f) = p_0(\mathcal{M}_\alpha^{rec})$. Logo $\mathcal{M}_\alpha^{rec} \subset \widetilde{\mathcal{M}_\alpha}$.

□

Lema 3.5 *Se Rec(f) é um conjunto de Cantor. Sejam* $x_0, \tilde{x}_0 \in$*Rec(f) extremidades de uma mesma componente de* $\mathbb{R}\backslash$*Rec(f) e* $x = (..., x_0, f(x_0), ...$

$..., f^i(x_0), ...)$ $\tilde{x} = (..., \tilde{x}_0, f(\tilde{x}_0), ..., f^i(\tilde{x}_0), ...)$. *Então x e $\tilde{x}$ são assintóticos.*

Demonstração: Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, crescente e $f(z+1) = f(z)+1$, sabemos que f é levantamento de alguma função $\varphi : S^1 \to S^1$ e que se $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ é dada por $\pi(z) = exp(2\pi(z))$, vale que $\pi \circ f = \varphi \circ \pi$. Afirmamos que se Rec$(f)$ é conjunto de Cantor então Rec(φ) também é um conjunto de Cantor. De fato sabemos que Rec$(\varphi) = S^1$ ou Rec(φ) é Cantor, suponhamos por absurdo que Rec$(\varphi) = S^1$, i.e., dado $z \in S^1$ existe $i_j \to \infty$ tal que $\varphi^{i_j}(z) \to z$. Seja $y \in \mathbb{R}\backslash$Rec$(f)$, $\pi(y) \in S^1$, logo existe $i_j \to \infty$ tal que $\varphi^{i_j}(\pi(y)) \to \pi(y)$, e por definição $\varphi^{i_j}(\pi(y)) = \pi(f^{i_j}(y))$, portanto para cada $j \in \mathbb{Z}$ existe $k_j \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{i_j}(y) + k_j \to y$, ou seja, $y \in$Rec(f), absurdo. Logo Rec(φ) é Cantor e portanto $S^1\backslash$Rec(φ) é aberto. Então $S^1\backslash$Rec$(\varphi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ onde os I_n são intervalos abertos de S^1. Da mesma forma $\mathbb{R}\backslash$Rec$(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ onde os J_n são intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Por hipótese $(x_0, \tilde{x}_0) = J$ com $J = J_n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ portanto existe $I \in S^1\backslash$Rec(φ) tal que $\pi(J) = I$. Note que , $S^1\backslash$Rec(φ) é φ-invariante e φ não tem pontos periódicos, já que o número de rotação de φ é irracional. Seja $\varphi^k(I) = I_{m_k}$ para algum $m_k \in \mathbb{Z}$, então os I_{m_k} são disjuntos. De fato, se $k_1 \neq k_2$ são tais que $\varphi^{k_1}(I) = \varphi^{k_2}(I)$ e se $k_2 > k_1$ $\varphi^{k_2-k_1}(I_{m_{k_1}}) = I_{m_{k_1}}$ logo $\varphi^{k_2-k_1}$ tem ponto fixo, absurdo. Note que $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{m_k}| \leq 1$ então $|I_{m_k}| \to 0$. Vamos denotar por a_0 e b_0 os extremos de I, daí $\varphi^k(a_0)$ e $\varphi^k(b_0)$ são extremos de I_{m_k}, portanto $|\varphi^k(a_0) - \varphi^k(b_0)| \to 0$. Como $\pi(J) = I$ temos que $\pi(x_0) = a_0$ e $\pi(\tilde{x}_0) = b_0$, portanto $|\varphi^k(\pi x_0) - \varphi^k(\pi \tilde{x}_0)| \to 0$, ou seja, $|\pi f^k(x_0) - \pi f^k(\tilde{x}_0)| \to 0$. Então existe $j_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(*) \qquad |f^k(x_0) - f^k(\tilde{x}_0) - j_k| \to 0$$

Queremos mostrar que j_k=0 para k suficientemente grande.

Note que $(x_0, \tilde{x}_0) = J \in \mathbb{R}\backslash$Rec$(f)$, portanto se $|J| > 1$ ao projetarmos J em S^1 teremos que $\pi(J) = I$, daí I cobre todo S^1, ou seja, φ não tem pontos recorrentes, absurdo. Então temos que $|x_0 - \tilde{x}_0| < 1$. Isto implica que

$$(**) \qquad |f^k(x_0) - f^k(\tilde{x}_0)| < 1$$

já que f é crescente e $f(x_0 + 1) = f(x_0) + 1$, daí $f(x_0) - f(\tilde{x}_0) < f(x_0) - f(x_0 + 1) = 1$. Portanto $(*)$ e $(**)$ implicam que $\{j_k\}$ pode se acumular em 1, 0 ou -1. Vejamos que $\{j_k\}$ não pode se acumular em 1, para -1

é análogo. Suponhamos por absurdo que existe $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\{j_{k_i}\} \to 1$ quando $i \to \infty$, mas como $j_k \in \mathbb{Z}$ isto implica que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i > i_0$ $j_{k_i} = 1$.

Por $(*)$ temos que

$$(f^{k_i}(\tilde{x}_0) - f^{k_i}(x_0)) - 1 \to 0$$

Como estamos supondo que $(x_0, \tilde{x}_0) = J$, temos que $\tilde{x}_0 > x_0$, e portanto $f^{k_i}(\tilde{x}_0) - f^{k_i}(x_0) > 0$. Daí

$$(f^{k_i}(\tilde{x}_0) - f^{k_i}(x_0)) \to 1 = f^{k_i}(x_0 + 1) - f^{k_i}(x_0)$$

Logo segue que

$$|f^{k_i}(\tilde{x}_0) - f^{k_i}(x_0 + 1)| \to 0$$

Se denotarmos $J_{k_i} = f^{k_i}(J)$, veremos que a última afirmação implica que $|J_{k_i}| \to 1$, mas isto não pode acontecer, pois se projetarmos J_{k_i}, teremos que se $\pi(J^{k_i}) = I_{j_i}$ então $|I_{j_i}| \to 1$. Contudo já vimos que $|I_j| \to 0$ quando $j \to \infty$. Logo $j_k \to 0$ se $k \to \infty$, i.e., $j_k = 0$ para k suficientemente grande. $\square$

Teorema 3.6 *Para todo $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ existe $\underline{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ e $\bar{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ tais que $\underline{x} < x < \bar{x}$ e que $\underline{x}$ e $\bar{x}$ são assintóticos.*

Demonstração: Note que se $\mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec} \neq \emptyset$, então pelo corolário (3.3), $\text{Rec}(f) \neq \mathbb{R}$, pois se $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ temos que $p_0(x) \in \mathbb{R}$ e não pertence a $\text{Rec}(f)$. Portanto $\text{Rec}(f)$ é um conjunto de Cantor. Seja $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ e considere $p_0(x) = x_0$, então existe $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}$ tal que:

(i) $x_0 \in (y_0, y_1)$,

(ii) para todo $y \in (y_0, y_1)$ $y \notin \text{Rec}(f)$ e

(iii) $y_0, y_1 \in \text{Rec}(f)$.

Sejam $\underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ tais que $p_0(\underline{x}) = y_0$ e $p_0(\bar{x}) = y_1$. Pelo lema anterior $\underline{x}$ e $\bar{x}$ são assintóticos. $\square$

Capítulo 4

Estrutura do conjunto das trajetórias minimais com número de rotação racional

Seja $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = p/q$ com p e q relativamente primos.

Definimos $\mathcal{M}_\alpha^{per} = \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x \text{ é } (q,p)\text{-periódico}\}$

Teorema 4.1 *$\mathcal{M}_\alpha^{per}$ é não vazio, fechado e totalmente ordenado. Todo $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ tem período minimal (q,p). Se $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ então x é um mínimo de $H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbb{R}$, em particular $H_{q,p}(x) = H_{q,p}^{min}$ para todo $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$.*

$(P_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid T_{(q,p)}x = x\}, \quad H_{q,p}(x) = H(x_0, \ldots, x_q))$

Demonstração: Pelo teorema (2.3) temos que $\mathcal{M}_\alpha^{per} \neq \emptyset$. Do corolário (2.2) temos que todo $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ tem período minimal (q,p), e que $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ é totalmente ordenado. Vamos provar a última afirmação.

Seja $x \in P_{q,p}$ tal que $H_{q,p}(x) = H_{q,p}^{min}$, e suponhamos por absurdo que existe $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ tal que $\varepsilon := H(x_0^*, \ldots, x_q^*) - H(x_0, \ldots, x_q) > 0$.

Escolhemos $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que satisfaça:

$$n\varepsilon > H(x_0^*, x_1) - H(x_0, x_1) + H(x_{q-1}, x_q^*) - H(x_{q-1}, x_q)$$

isto implica que

$$(*) \qquad H(x_0^*, x_1) + H(x_{q-1}, x_q^*) < H(x_0, x_1) + H(x_{q-1}, x_q) + n\varepsilon$$

Note que $H(x_{q-1}, x_q^*) = H(x_{nq-1}, x_{nq}^*)$ e também que $H(x_{q-1}, x_q) = H(x_{nq-1}, x_{nq})$.

E como temos que

$$H(x_0^*, x_1, ..., x_{nq-1}, x_{nq}^*) = H(x_0^*, x_1) + H(x_1, ..., x_{nq-1}) + H(x_{nq-1}, x_{nq}^*)$$

Por $(*)$ e pela observação acima. obtemos que

$$H(x_0^*, x_1, ..., x_{nq-1}, x_{nq}^*) < H(x_0, x_1, ..., x_{nq-1}, x_{nq}) + n\varepsilon = H(x_0^*, ..., x_{nq}^*)$$

o que contradiz a minimalidade de x^*. □

Definição 4.2 *Dois elementos de $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ são chamados vizinhos se não existe elemento de $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ entre eles.*

Definição 4.3 *Suponha que $x^- < x^+$ são elementos vizinhos de $\mathcal{M}_\alpha^{per}$. Então:*

$\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x$ *é α-assintótico a x^- e ω-assintótico a x^+*$\}$

$\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x$ *é ω-assintótico a x^- e α-assintótico a x^+*$\}$

Denotaremos por $\mathcal{M}_\alpha^-$ (respectivamente $\mathcal{M}_\alpha^-$) a união dos conjuntos $\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ (respectivamente $\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$) extendidos a todos os pares de elementos vizinhos (x^-, x^+).

Note que pelo lema (2.4) todo $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) \cup \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$ satisfaz $x^- < x < x^+$.

Teorema 4.4 *Se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, então $\mathcal{M}_\alpha$ é união disjunta de $\mathcal{M}_\alpha^{per}$, $\mathcal{M}_\alpha^+$, $\mathcal{M}_\alpha^-$.*

Demonstração: Suponha que $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{per}$. De acordo com o teorema (2.7) existe $f \in \tilde{G}_+$ tal que $f(x_i) = x_{i+1}$. E $\tilde{\alpha}(f) = \alpha = p/q$.

Assim como na seção 1.2. vamos considerar a função periódica

$$r_q(t) = f^q(t) - t - p$$

Vimos que se $x \notin \mathcal{M}_\alpha^{per}$ então $r_q(x_0) \neq 0$, onde $x_0 = p_0(x)$. Suponhamos sem perda de generalidade que $r_q(x_0) > 0$.

Por (1.3) existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r_q(y_0) = 0$ e pela periodicidade de r_q, (i.e., $r_q(t+1) = r_q(t)$) temos que existem $x_0^-, x_0^+ \in \mathbb{R}$ tais que $r_q(x_0^-) = r_q(x_0^+) = 0$

e $x_0 \in (x_0^-, x_0^+)$. Como r_q é contínua e $r_q(x_0) > 0$, podemos ainda supor que $r_q|_{(x_0^-, x_0^+)} > 0$.

Isto implica que a seqüência $\{f^{nq}(x_0) - np\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é estritamente crescente. De fato,

$$(*) \qquad r_q(x_0) = f^q(x_0) - x_0 - p > 0 \Rightarrow x_0 < f^q(x_0) - p$$

agora $x_0 < x_0^+$ implica $f^q(x_0) < f^q(x_0^+)$, pois f é crescente. E como

$$(**) \qquad f^q(x_0^+) = x_0^+ + p \Rightarrow f^q(x_0) < x_0^+ + p \Rightarrow f^q(x_0) - p < x_0^+$$

e portanto, por $(*)$ e $(**)$ temos que

$$x_0^- < x_0 < f^q(x_0) - p < x_0^+$$

Já que $r_q|_{(x_0^-, x_0^+)} > 0$ temos que

$$r_q(f^q(x_0) - p) > 0 \text{ ou seja } f^q(f^q(x_0) - p) - f^q(x_0) + p - p > 0$$

daí,

$$f^{2q} - f^q(x_0) - p > 0 \text{ e então } f^{2q}(x_0) - 2p > f^q(x_0) - p$$

Aplicando sucessivamente este argumento vemos que $\{f^{nq}(x_0) - np\}$ é estritamente crescente e também que $x_0^- < f^{nq}(x_0) - np < x_0^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que

$$\lim_{n\to\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^+ \text{ e } \lim_{n\to-\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^-$$

De fato, suponhamos por absurdo que $\lim_{n\to\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = \bar{x} < x_0^+$ então

$$\lim_{n\to\infty}(f^{(n+1)q}(x_0) - (n+1)p) = f^q(\bar{x}) - p < \bar{x}$$

pois $r_q|_{(x_0, x_0^+)} > 0$, o que contradiz a definição de $\bar{x}$. Analogamente mostra-se que $\lim_{n\to-\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^-$.

Vamos definirm x^+ e x^- por $x_i^+ := f^i(x_0^+)$ e $x_i^- := f^i(x_0^-)$ então, pelo fato que $r_q(x_0^+) = r_q(x_0^-) = 0$ temos que

$$T_{(q,p)}x^+ = x^+ \text{ e } T_{(q,p)}x^- = x^-$$

E é fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^+ \text{ e } \lim_{n\to-\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^-$$

Portanto $x^-, x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ e $x^- < x < x^+$. Mais ainda, para todo $0 \leq j \leq q$

$$\lim_{n\to\infty} |x_{j+nq} - x^+_{j+nq}| = \lim_{n\to\infty} |x_{j+nq} - (x_j^+ + np)| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} |x_{j+nq} - np - x_j^+| = \lim_{n\to\infty} |(T_{(-nq,-np)}x)_j - x_j^+| = 0$$

Portanto x é ω-assintótico a x^+ e analogamente x é α-assintótico a x^-.

Falta provar que x^- e x^+ são vizinhos. Por absurdo, assuma que existe $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ tal que $x^- < x^* < x^+$. Então x e x^* se cruzam, digamos entre $i-1$ e i (o caso em que x e x^* se cruzam em algum i é análogo).

Seja $j \in \mathbb{Z}$ fixado e tal que $j > i$, vamos definir um segmento $(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q})$, por:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{i-1} = x_{i-1}, & \\ \tilde{x}_m = x^*_m & \text{se} \quad i \leq m \leq i+q-1, \\ \tilde{x}_m = x_{m-q} + p & \text{se} \quad i+q \leq m \leq j+q-1, \\ \tilde{x}_{j+q} = x_{j+q} & \end{cases}$$

Queremos mostrar que para j grande temos (ver figura)

$$H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q}) < H(x_{i-1}, ..., x_{j+q}) \tag{4.1}$$

De acordo com a definição feita acima

$$H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q}) = H(x_{i-1}, x_i^*) + H(x_i^*, ..., x^*_{i+q}) - H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q}) +$$
$$+ H(x^*_{i+q-1}, x_i + p) + H(x_i + p, ..., x_{j-1} + p) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q}) =$$

$$= H(x_{i-1}, x_i^*) + H(x_i^*, ..., x^*_{i+q}) - H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q}) +$$
$$+ H(x^*_{i+q-1}, x_i + p) + H(x_i, ..., x_{j-1}) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q})$$

Na última igualdade foi usado (H_1), para substituirmos $H(x_l + p, x_{l+1} + p)$ por $H(x_l, x_{l+1})$, para $i \leq l \leq j-1$.

Usando que x^* é (q,p)-periódico e (H_1), temos que

$$x^*_{i+q-1} = x^*_{i-1} + p, \quad x^*_{i+q} = x^*_i + p \Rightarrow H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q}) = H(x^*_{i-1}, x^*_i)$$

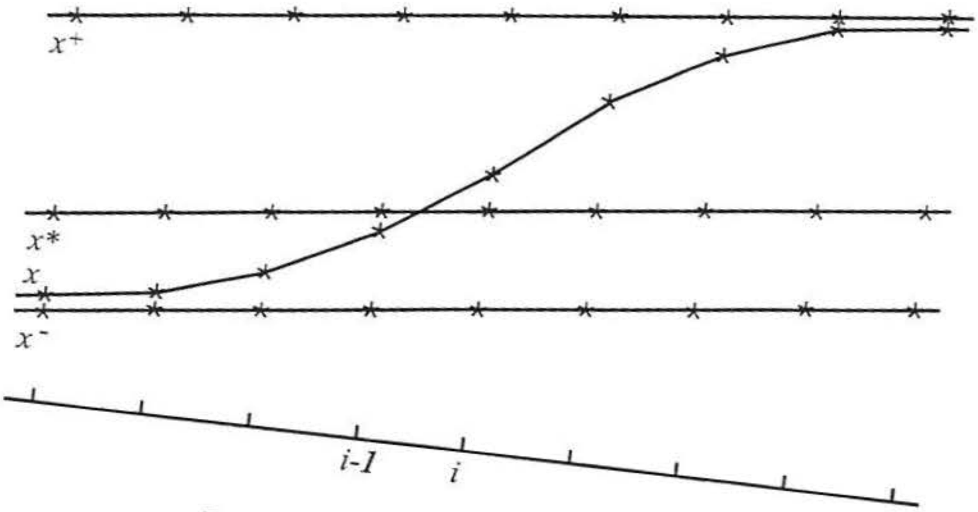

Figura 4.1: $x^- < x^* < x^+$ em $\mathcal{M}_\alpha^{per}$

Como x e x^* se cruzam entre $i-1$ e i, podemos supor, sem perda de generalidade que $x_{i-1} < x^*_{i-1}$ e $x_i > x^*_i$, logo aplicando (H_3), temos que

$$H(x_{i-1}, x_i) + H(x^*_{i-1}, x^*_i) > H(x_{i-1}, x^*_i) + H(x^*_{i-1}, x_i)$$

Logo

$$H(x_{i-1}, x_i) > H(x_{i-1}, x^*_i) + H(x^*_{i-1}, x_i) - H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q})$$

Como foi notado acima $x^*_{i-1} = x^*_{i+q-1} - p$, portanto

$$H(x^*_{i-1}, x_i) = H(x^*_{i+q-1} - p, x_i) = H(x^*_{i+q-1}, x_i + p)$$

donde a última igualdade é valida por (H_1). Daí

$$H(x_{i-1}, x^*_i) + H(x^*_{i+q-1}, x_i + p) - H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q}) < H(x_{i-1}, x_i)$$

Agora, mudando a ordem das parcelas de $H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q})$ e fazendo as substituições acima justificadas, obtemos que

$$H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q}) = H(x_{i-1}, x^*_i) + H(x^*_{i+q-1}, x_i + p) - H(x^*_{i+q-1}, x^*_{i+q}) +$$
$$+ H(x^*_i, ..., x^*_{i+q}) + H(x_i, ..., x_{j-1}) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q})$$

Usando a última desigualdade, segue que

$$H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q}) < H(x_{i-1}, x_i) + H(x^*_i, ..., x^*_{i+q}) +$$

$$+H(x_i, ..., x_{j-1}) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q})$$

Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

(4.2) $H(\tilde{x}_{i-1}, ..., \tilde{x}_{j+q}) = H(x_{i-1}, ..., x_{j-1}) + H(x_i^*, ..., x_{i+q}^*) +$

$+H(x_{j-1} + p, x_{j+q}) - \varepsilon$

Já que x é ω-assintótico a $x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$, i.e., $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_k^+| = 0$

$$|H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1}+p, x_{j+q})| = |H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1}^+, x_j^+) + H(x_{j-1}^+, x_j^+) -$$

$$-H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+) + H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+) - H(x_{j-1} + p, x_{j+q})| \leq$$

$$\leq |H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1}^+, x_j^+)| + |H(x_{j-1}^+, x_j^+) - H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+)| +$$

$$+|H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+) - H(x_{j-1} + p, x_{j+q})|$$

Pela continuidade da H temos que

$$\lim_{j\to\infty} |H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1}^+, x_j^+)| = 0 = \lim_{j\to\infty} |H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+) - H(x_{j-1} + p, x_{j+q})|$$

e pela periodicidade de x^+ temos que

$$|H(x_{j-1}^+, x_j^+) - H(x_{j-1}^+ + p, x_{j+q}^+)| = |H(x_{j-1}^+, x_j^+) - H(x_{j-1}^+ + p, x_j^+ + p)| = 0$$

logo

(4.3) $$\lim_{j\to\infty} |H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1} + p, x_{j+q})| = 0$$

também pela continuidade de H e por x ser ω-assintótico a x^+

$$\lim_{j\to\infty} |H(x_j, ..., x_{j+q}) - H(x_0^+, ..., x_q^+)| = \lim_{j\to\infty} |H(x_j, ..., x_{j+q}) - H(x_j^+, ..., x_{j+q}^+)| = 0$$

Agora pela última afirmação do teorema (4.1) $(H(x_0^+, ..., x_q^+) = H(x_0^*, ..., x_q^*))$, e pela periodicidade de x^* temos que

$$H(x_0^+, ..., x_q^+) = H(x_0^*, ..., x_q^*) = H(x_i^*, ..., x_{i+q}^*)$$

daí

(4.4) $$\lim_{j\to\infty} |H(x_j, ..., x_{j+q}) - H(x_i^*, ..., x_{i+q}^*)| =$$

$$\lim_{j\to\infty} |H(x_j, ..., x_{j+q}) - H(x_0^+, ..., x_q^+)| = 0$$

Agora (4.2) implica

$$\lim_{j\to\infty} H(\tilde{x}_{i-1},...,\tilde{x}_{j+q}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(H(x_{i-1},...,x_{j-1}) + H(x_i^*,...,x_{i+q}^*) + H(x_{j-1}+p, x_{j+q}) - \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(H(x_{i-1},...,x_{j-1}) + H(x_i^*,...,x_{i+q}^*) - H(x_j,...,x_{j+q}) + H(x_j,...,x_{j+q}) + \right.$$

$$\left. + H(x_{j-1}+p, x_{j+q}) - H(x_{j-1},x_j) + H(x_{j-1},x_j) - \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} (H(x_{i-1},...,x_{j-1}) + H(x_{j-1},x_j) + H(x_j,...,x_{j+q}) - \varepsilon) +$$

$$+ \lim_{j\to\infty} \left(H(x_i^*,...,x_{i+q}^*) - H(x_j,...,x_{j+q}) + H(x_{j-1}+p, x_{j+q}) - H(x_{j-1},x_j)\right)$$

Usando (4.3) e (4.4) obtemos

$$\lim_{j\to\infty} H(\tilde{x}_{i-1},...,\tilde{x}_{j+q}) = \lim_{j\to\infty} (H(x_{i-1},...,x_{j+q}) - \varepsilon)$$

daí para j suficientemente grande temos

$$H(\tilde{x}_{i-1},...,\tilde{x}_{j+q}) < H(x_{i-1},...,x_{j+q})$$

o que contradiz a minimalidade de x. Portanto não pode existir $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ tal que $x^- < x^* < x^+$, i.e., x^- e x^+ são vizinhos. □

Note que $x \in \mathcal{M}_\alpha$, com α racional, é recorrente, se e somente se, x é periódico.

Teorema 4.5 *Suponha que $x^- < x^+$ são vizinhos e $x^-, x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$. Então $\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ e $\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$ são não vazios.*

Demonstração: Escolha $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n > \alpha, \lim \alpha_n = \alpha$ e $x^n \in \mathcal{M}_{\alpha_n}$. Queremos encontrar translações apropriadas de x^n que convirjam para um $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$.

Seja $\varepsilon = \min_{i\in\mathbb{Z}}(x_i^+ - x_i^-)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha $i(n) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(*) = \begin{cases} x_i^n \leq x_i^- + \varepsilon/2 & \text{se} \quad i < i(n), \\ x_{i(n)}^n > x_{i(n)}^- + \varepsilon/2 \end{cases}$$

De fato, podemos encontrar tal $i(n)$, pois $\alpha_n > \alpha$ então x^n e x^- se cruzam exatamente uma vez, digamos entre j e $j+1$. Ainda pelo fato de $\alpha_n > \alpha$ temos que para $i \leq j$ vale $x_i^n < x_i^-$ e para $i \geq j+1$ vale $x_i^n > x_i^-$. Logo $x_i^n < x_i^- + \varepsilon/2$ para $i \leq j$.

Seja $i(n)$ o primeiro inteiro maior que j que satisfaz $(*)$

Definindo $k(n) \in \mathbb{Z}$ como sendo o inteiro tal que

$$i(n) + k(n)q =: j(n) \in \{0, ..., q-1\}$$

Note que, por $(*)$ temos que

$$x_{i-k(n)q}^n \leq x_{i-k(n)q}^- + \varepsilon/2 \qquad \text{se} \qquad i - k(n)q < i(n) = j_n - k(n)q$$

i.e.,

$$x_{i-k(n)q}^n \leq x_{i-k(n)q}^- + \varepsilon/2 \qquad \text{se} \qquad i < j_n$$

e do fato de que x^- é (q,p)-periódica temos que

$$x_{i-k(n)q}^- = x_i^- - k(n)p$$

Seja $\tilde{x}^n := T_{(k(n)q, k(n)p)}x^n$, pelas duas últimas equações, vemos que

$$\tilde{x}_i^n = x_{i-k(n)q} + k(n)p \leq x_i^- + \varepsilon/2 \qquad \text{para } i < j(n)$$

e por $(*)$, como $i(n) = j(n) - k(n)q$

$$\tilde{x}_i^n - k(n)p = x_{i-k(n)q} > x_i^- - k(n)p + \varepsilon/2 \qquad \text{para } i = j(n)$$

daí

$$\tilde{x}_i^n > x_i^- + \varepsilon/2 \qquad \text{para } i = j(n)$$

Em particular obtemos que

$$\tilde{x}_{j(n)-1}^n \leq x_{j(n)-1}^- + \varepsilon/2 \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_{j(n)}^n > x_{j(n)}^- + \varepsilon/2$$

Como $j(n) \in \{0, ..., q-1\}$, existe subseqüência infinita de $(\tilde{x}^n)$, que denotaremos por (x^l) tal que $j(l) = j_0 \in \{0, ..., q-1\}$.

Afirmação: Para cada $C > 0$ o conjunto $\{x \in \mathcal{M} \mid |x_{j_0}| \leq C$ e $|\alpha(x)| \leq C\}$ é compacto.

Vejamos que $|x_{j_0}|$ é limitado. Sabemos que

$$|x^l_{j_0} - x^l_0 - j_0\alpha| < 1 \Rightarrow |x^l_{j_0} - x^l_{j_0-1}| < 2 + \alpha_l$$

daí

$$|x^l_{j_0}| < |x^l_{j_0-1}| + 2 + \alpha_l$$

Pela definição de j_0 temos que

$$x^l_{j_0-1} \leq x^-_{j_0-1} + \varepsilon/2$$

Logo

$$|x^l_{j_0}| < |x^-_{j_0-1} + \varepsilon/2| + 2 + \alpha_l$$

Agora para l suficientemente grande temos que $\alpha_l < \alpha + \varepsilon$, portanto existe α_0 tal que $\alpha_l < \alpha_0$. Então existe $C > \alpha_0$ tal que

$$|x^l_{j_0}| < C$$

Pela afirmação, concluímos que existe uma subseqüência de (x^l) convergente a um $x \in \mathcal{M}_\alpha$.

$$x_i \leq x^-_i + \varepsilon/2 < x^+_i \text{ para } i < j_0.$$
$$x_{j_0} \geq x^-_{j_0} + \varepsilon/2 > x^-_{j_0}$$

De acordo com o teorema (4.4) isto implica que $x \in \mathcal{M}^+_\alpha(x^-, x^+)$. Começando com $\alpha_n < \alpha, \lim \alpha_n = \alpha$ obtemos $x \in \mathcal{M}^-_\alpha(x^-, x^+)$. $\square$

Capítulo 5

Aplicações às geodésicas do Toro

Vamos agora interpretar os resultados dos capítulos 2-4 para geodésicas em $\mathbb{R}^2$ com uma métrica riemanniana $\mathbb{Z}^2$-periódica. Via aplicação de recobrimento podemos obter resultados para geodésicas no toro bi-dimensional.

Definição 5.1 *Uma métrica Riemmaniana num aberto A em $\mathbb{R}^2$ fica definida por uma família de matrizes dois por dois simétricas positivas definidas $M(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}^2$. Assumimos também que os coeficientes da matriz M dependem C^∞ em x.*

Para cada vetor v no plano tangente passando por $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $||v|| = ||(v_1, v_2)|| = ||v||_x = \sqrt{< v, M(x)v >}$ a norma do vetor v.

Definição 5.2 *Uma métrica riemanniana numa superfície X de classe C^∞ contida em $\mathbb{R}^3$ é uma escolha de uma norma $||.||$ em cada plano tangente a $x \in X$ de tal forma que quando for fixada uma parametrização $g(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, a expressão desta norma em coordenadas $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ for da forma acima.*

Definição 5.3 *Uma métrica riemanniana periódica em $\mathbb{R}^2$ é uma escolha de $M(x), x \in \mathbb{R}^2$ de tal forma que $M(x_1, x_2) = M(x_1 + m, x_2 + n)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 5.4 *Dado $L(x, v) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, o conjunto de equações*

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_2} = 0,$$

se denomina de equações de Euler-Lagrange.

A equação acima é de segunda ordem. A maioria dos resultados que enunciaremos a seguir são válidos para lagrangianos convexos e superlineares e referimos o leitor para [3] (Lagrangianos autônomos) e [5] (Lagrangianos periódicos) como referências gerais sobre o assunto. Aplicações tipo twist podem ser analisadas através de princípios variacionais a partir de um H como nos capítulos anteriores (ver [5]). Aplicações tipo twist podem ser caracterizadas (se, e só se) como a aplicação de primeiro retorno no tempo um do fluxo obtido a partir de um Lagrangiano periódico $L(x, v, t)$ (conforme [5, Theorem 6.1]). Para métricas riemannianas no toro bidimensional (lagrangiano autônomo $L(x, v) = ||v||_x^2$) podemos no entanto, como será descrito a seguir, obter resultados interessantes a partir da análise de uma H como descrita nos capítulos anteriores.

Vamos considerar a seguir (a menos que se diga ao contrário) uma estrutura riemanniana periódica definida por $M(x)$ fixada em $\mathbb{R}^2$.

Definição 5.5 *Por definição uma geodésica é uma solução da equação de Euler-Lagrange quando $L(x, v) = ||v||_x^2$.*

Como $L(x, v) = ||v||_x^2$ é convexo em v, então dado posição x e velocidade v existe apenas uma solução $(x(t), v(t)) = (x(t), x'(t))$ da equação de Euler-Lagrange. A solução está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ pois o fluxo geodésico é completo (ver [2] para definições): uma métrica riemanniana periódica em $\mathbb{R}^2$ é de fato uma métrica no toro, que por sua vez é compacto. As soluções $x(t)$ neste caso são de classe C^∞ pois $M(x)$ é de classe C^∞.

Vamos denominar de geodésica indistintamente $x(t)$ ou $(x(t), v(t)) = (x(t), x'(t))$.

As soluções da equação de Euler-Lagrange $x(t)$ no caso do $L = ||v||^2$ correspondem as trajetórias de um problema mecânico em que não existem forças externas ([4, seções 5 e 6 Cap II]).

É fácil ver que para $L(x, v) = ||v||^2$, se $x(t)$ é solução da equação de Euler-Lagrange, então para cada $\lambda \neq 0$ a curva $y(t) = x(\lambda t)$ também é solução (e possui o mesmo traço).

Pelo Teorema da conservação de Energia Total ([4, teorema 9 cap II]) aplicado ao presente caso (sem energia potencial) temos que toda solução $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange satisfaz a propriedade $||x'(t)||^2_{x(t)} = L(x(t), x'(t))$ é constante.

Sendo assim, as propriedades geométricas de tais soluções $x(t)$ podem ser analisadas apenas considerando um $x(t)$ que satisfaça $||x'(t)|| = 1$ para todo t. A partir de agora só consideraremos geodésicas $x(t)$ tal que $||x'(t)|| = 1$ para todo t.

Algumas vezes falaremos na geodésica como o traço (conjunto de pontos) e outras como uma parametrização $x(t)$.

Sempre que falarmos que uma curva $x(t), a \leq t \leq b$, é diferenciável por partes num intervalo fechado $[a, b]$ é por que assumimos que ela possui uma extensão à um intervalo $(a - \varepsilon, b + \varepsilon), \varepsilon > 0$ no qual é diferenciável por partes.

Teorema 5.6 *Considere o lagrangiano $L = ||v||^2$ associado a M periódica como descrito acima. $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Fixados x_1 e x_2 em $\mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{a,b,x_1,x_2}$ o espaco das curvas diferenciáveis $x(t)$, de classe C^1 por partes em $a \leq t \leq b$ tal que $x(a) = x_1$ e $x(b) = x_2$. Os elementos $x(t)$ de $\mathcal{F}$ devem satisfazer ainda a seguinte propriedade: existem limites de $x'(t)$ a esquerda e a direita em cada valor t onde a derivada $x'(t)$ eventualmente não existe. Seja $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, definida por $\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(x(t), x'(t))dt$. As curvas diferenciáveis (não por partes) $x(t)$ que são críticas para as variações $\mathcal{L}(y), y \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(x)$ (ver [4, seção 2, 3 e 6 cap II]) são exatamente as soluções da equação de Euler-Lagrange (que por sua vez são de classe C^∞) descritas acima. Ainda, se $x(t) \in \mathcal{F}$, curva C^1 por partes, é crítica para $\mathcal{L}$, então ela possui uma extensão a uma curva C^∞ em todo intervalo $[a, b]$ que também é crítica (e satisfaz a equação de Euler-Lagrange).*

Como $L(x, v) = ||v||^2$, temos portanto $\mathcal{L}(x) = \int_a^b ||x'(t)||^2_{x(t)}dt$ e os caminhos $x(t)$ críticos para $\mathcal{L}$ são exatamente as soluções da equação de Euler-Lagrange (portanto de classe C^∞ para $a \leq t \leq b$), ou seja são geodésicas.

Em particular, se $x(t)$ é diferenciável e mínimo de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{F}$ então x satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Note ainda que um mínimo $x(t)$ para $\mathcal{L}$ vai ter que ser de classe C^∞.

O valor real $\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(x(t), x'(t))dt$ é denominado ação do caminho $x(t)$ ligando x_1 a x_2 pelo Lagrangiano L.

Definições análogas e resultados semelhantes podem ser considerados numa superfície riemannania X qualquer.

O comprimento de uma curva diferenciável por partes qualquer (não necessariamente geodésica) $x(t), a \leq t \leq b$, por sua vez é dado por

$$\int_a^b ||x'(t))||_{x(t)}dt = l(x, a, b).$$

Note que duas parametrizações que definem a mesmo conjunto de pontos (traço) determinam o mesmo valor de comprimento. Logo, $l(x, a, b)$ não depende da parametrização.

O valor $l(x, a, b)$ não depende também dos valores escolhidos a, b. Sendo assim $l(x) = l(x, a, b)$ vai denotar o comprimento da curva x (vista como conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$).

Observe que se $x(t)$ for geodésica, então $||x'(t)||$ é constante, digamos igual a c_0, logo $l(x, a, b) = c_0(b-a)$. Se considerarmos, como estamos fazendo aqui, apenas as geodésicas $x(t)$ tais que $||x'(t)|| = 1 = c_0$, teremos $l(x, a, b) = (b - a) = \int_a^b ||x'(t))||_{x(t)}dt = \int_a^b ||x'(t))||^2_{x(t)}dt$, onde $x(t)$ é geodésica minimizante que existe pelo teorema abaixo.

Definição 5.7 *Fixada uma estrutura riemanniana a partir de $M(x)$ como acima podemos tornar $\mathbb{R}^2$ um espaço métrico definindo a métrica $d(x_1, x_2)$, onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, do seguinte modo: fixe valores $a < b \in \mathbb{R}$ e denote*

$$d(x_1, x_2) = \inf\{l(\gamma, a, b) \mid \gamma \in \mathcal{F}\}.$$

Teorema 5.8 *Qualquer dois pontos x_1, x_2 em X variedade riemaniana completa (compacta ou não) podem ser ligados por uma geodésica diferenciável γ que é mínimo para $\mathcal{L}$ em $\mathcal{F}$.*

Este é o teorema de Hopf-Rinow estudado em geometria diferencial. (veja prova em [2]).

Note que a curva solução $\gamma(t)$ acima é diferenciável em t mas nem sempre é única. Por exemplo, no toro canônico em $\mathbb{R}^3$ com a métrica induzida pela métrica euclidiana do $\mathbb{R}^3$ podemos obter dois pontos x_1 e x_2 antípodas que podem ser unidos por curvas geodésicas distintas γ_1 e γ_2 de mesmo comprimento que juntas formam um círculo contido no toro em $\mathbb{R}^3$.

Segue do último resultado acima (ver [4, Proposição 14 e 15 seção 6 cap II]) que o valor $d(x_1, x_2)$ definido anteriormente é assumido por uma geodésica minimizante γ tal que $||\gamma'(t)|| = 1$, $a \leq t \leq b$ e $d(x_1, x_2) = (b - a)$.

No que segue sempre que falarmos no caminho $\gamma(t)$ realizando a distância $d(x_1, x_2)$, onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, estaremos considerando $\gamma(t)$ a geodésica de comprimento minimal e parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $||\gamma'(t)|| = 1$. Se falarmos em $\mathcal{F}$ estaremos supondo neste caso que $a < b$ foram escolhidos de modo que $b - a = l(\gamma, a, b) = d(\gamma(a), \gamma(b)) = \int_a^b ||\gamma'(t)||^2 dt = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt = \int_a^b 1 dt$.

Vamos utilizar nesta seção algumas propriedades básicas de geodésicas:

(G) dados três pontos x_1, x_2 e x_3, considere as geodésicas minimizantes

a) γ_1 para x_1 e x_2

b) γ_2 para x_2 e x_3

e

c) γ_3 para x_1 e x_3.

Pelo fato de d ser métrica vale que $l(\gamma_3) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Em outras palavras, se considerarmos um triângulo (na geometria definida pela métrica dada por $M(x)$) constituído pelos lados (geodésicas) γ_1, γ_2, γ_3, então um lado é sempre menor que a soma dos outros dois lados.

Ainda, se o ângulo entre γ_1' e γ_2' no ponto de interseção x_2 não for nulo, então $l(\gamma_3) < l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Isto segue do fato que $l(\gamma_3) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ implica que a união dos caminhos $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$ é mínimo para a ação ligando x_1 a x_3. Logo γ é crítico e assim satisfaz a equação de Euler-Lagrange, o que é absurdo pois as soluções γ de tal equação são de classe C^∞.

Definição 5.9 *Dada uma superfície riemanniana X, denominaremos de segmento geodésico minimal ligando x_1 a x_2 uma curva (geodésica) γ que realiza a menor distância entre dois pontos x_1 e x_2, onde $\gamma(t)$ está definida em (a, b) e $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$.*

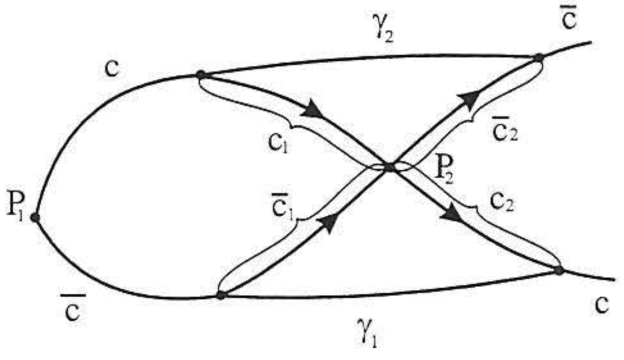

Figura 5.1:

Note que dado dois pontos z_1 e z_2 nesta mesma curva γ, a restrição de γ ligando estes dois pontos também realiza a distância mínima entre z_1 e z_2.

Definição 5.10 *Dada uma superfície riemanniana X, denominaremos de geodésica minimal $\gamma(t)$, $-\infty < t < \infty$ uma curva (geodésica) γ que para todo $t_1 < t_2$ realiza a menor distância entre os pontos $x_1 = \gamma(t_1)$ e $x_2 = \gamma(t_2)$.*

Geodésicas minimais só ocorrem em superfícies não compactas.

Estaremos neste texto basicamente interessados em analisar geodésicas minimais $\gamma(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Lema 5.11 *Suponha que $\gamma : [d, b] \to \mathbb{R}^2, \bar{\gamma} : [d, \bar{b}] \to \mathbb{R}^2$ são segmentos geodésicos minimais γ (ligando x_1 a x_2) e $\bar{\gamma}$ (ligando x_3 a x_4) satisfazendo $\gamma(a) = \bar{\gamma}(a) = p_1$ e $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s) = p_2$ para algum $d \leq a < s \leq \min\{b, \bar{b}\}$. Então ou sua interseção é um segmento geodésico minimal (ou seja $\gamma = \bar{\gamma}$) ou p_1 e p_2 são extremos de ambos segmentos (e $s = b = \bar{b}$).*

Demonstração:

Suponha que $\gamma : [d, b] \to \mathbb{R}^2, \bar{\gamma} : [d, \bar{b}] \to \mathbb{R}^2$ são segmentos geodésicos minimais γ (ligando x_1 a x_2) e $\bar{\gamma}$ (ligando x_3 a x_4) satisfazendo $\gamma(a) = \bar{\gamma}(a) = p_1$ e $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s) = p_2$ para algum $d \leq a < s \leq \min\{b, \bar{b}\}$. Suponha que não vale que $s = b = \bar{b}$, digamos $s < \bar{b}$. Seja $p_1 = \gamma(a) = \bar{\gamma}(a)$ e seja $p_2 = \gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$ o outro ponto de interseção como mostra a figura 5.1.

Note que o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\bar{\gamma}'(s)$ em p_2 é não nulo (pois ambos satisfazem $||\gamma'((s)|| = 1 = ||\bar{\gamma}'(s)||$ e $\gamma \neq \bar{\gamma}$).

Fixe $\varepsilon > 0$ pequeno e considere os segmentos geodésicos minimais γ_1, γ_2, $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ definidos do seguinte modo:

a) $\gamma_1(t)$ é a restrição de γ ao intervalo $(s-\varepsilon, s)$,

b) $\gamma_2(t)$ é a restrição de γ ao intervalo $(s, s+\varepsilon)$,

c) $\bar{\gamma}_1(t)$ é a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $(s-\varepsilon, s)$,

d) $\bar{\gamma}_2(t)$ é a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $(s, s+\varepsilon)$.

Seja agora $\beta_1(t)$ o segmento geodésico minimal ligando $\gamma_1(s-\varepsilon)$ à $\bar{\gamma}_2(s+\varepsilon)$ e $\beta_2(t)$ o segmento geodésico minimal ligando $\bar{\gamma}_1(s-\varepsilon)$ à $\gamma_2(s+\varepsilon)$.

Segue de (G) acima (e do fato que o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\bar{\gamma}'(s)$ em p_2 é não nulo) que $l(\beta_1) < l(\gamma_1) + l(\bar{\gamma}_2)$ e $l(\beta_2) < l(\bar{\gamma}_1) + l(\gamma_2)$.

Portanto,

$$l(\beta_1) + l(\beta_2) < l(\gamma_1) + l(\bar{\gamma}_2) + l(\bar{\gamma}_1) + l(\gamma_2).$$

Considere os caminhos $\tilde{\beta}_2 = \gamma(a, s-\varepsilon) \cup \beta_2 \cup \bar{\gamma}(s+\varepsilon, \bar{b})$ e $\tilde{\beta}_1 = \bar{\gamma}(a, s-\varepsilon) \cup \beta_1 \cup c(s+\varepsilon, b)$.

Obtemos assim uma contradição pois

$$l(\beta_1) + l(\beta_2) < l(\gamma_1) + l(\bar{\gamma}_2) + l(\bar{\gamma}_1) + l(\gamma_2)$$

implica que

$$l(\tilde{\beta}_1) + l(\tilde{\beta}_2) < l(\gamma) + l(\bar{\gamma}).$$

A última expressão não pode ser verdadeira porque γ e $\bar{\gamma}$ são segmentos geodésicos minimizantes e $\tilde{\beta}_2$ e γ tem os mesmos extremos, assim como $\tilde{\beta}_1$ e $\bar{\gamma}$. $\square$

Vamos considerar a seguir no $\mathbb{R}^2$ uma métrica riemanniana $\mathbb{Z}^2$-períodica, definida pela família de matrizes M como definida acima. Queremos descrever o conjunto das geodésicas minimais em $\mathbb{R}^2$.

Vamos construir uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaça $(H_1) - (H_4)$.

Primeiramente, vamos assumir que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ foram escolhidas de forma que a linha coordenada $s \to (0, s)$ é uma geodésica minimal. Isto pode ser feito da seguinte maneira: considere no toro T^2 a métrica projetada do $\mathbb{R}^2$ e encontre a curva fechada γ em T^2 de menor comprimento na classe de homotopia $(1, 0)$ do toro bidimensional. Note que $n\gamma$ também minimiza comprimento na classe de homotopia $(n, 0)$.

Esta γ será, naturalmente, uma geodésica periódica diferenciável minimal em T^2. Podemos considerar uma parametrização tal que o domínio de definição seja $[a, b] = [0, 1]$. Considere agora uma parametrização do toro com domínio no quadrado $[0, 1) \times [0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ tal que o segmento $(0, s), 0 \leq s \leq 1$ parametriza a curva γ. O levantamento da métrica riemanniana no toro ao recobrimento universal $\mathbb{R}^2$ via esta parametrização do toro é que vai ser o objeto de nosso estudo.

Desde que $T_k, k \in \mathbb{Z}^2$ são isometrias, todas as linhas $s \to (i, s), i \in \mathbb{Z}$ são geodésicas minimais. Por simetria, o mesmo vale para $s \to (i, -s)$.

Definimos então $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por:

$$H(\xi, \eta) := d((0, \xi), (1, \eta))$$

Tal H é contínua mas, em geral, não diferenciável. A existência de pontos conjugados em uma geodésica unindo pontos de $\{0\} \times \mathbb{R}$ com $\{1\} \times \mathbb{R}$ induz uma descontinuidade na primeira derivada de H (ver [1]).

Note que

$$H(x_j, ..., x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} d((i, x_i), (i+1, x_{i+1}))$$

pois

$$d((i, x_i), (i+1, x_{i+1})) = d((0, x_i), (1, x_{i+1})$$

pela invariância de M por $\mathbb{Z}^2$.

No que segue, quando falarmos na curva geodésica $\gamma(t)$ cujo comprimento realiza o valor $d((0, \xi), (1, \eta))$ estaremos supondo que $||\gamma'(t)|| = 1$ para todo valor $a \leq t \leq b$ e $l(\gamma, a, b) = b - a = d((0, \xi), (1, \eta))$.

(V) Destacamos o seguinte fato muito importante: uma geodésica minimizante γ, que não é parte de nenhuma linha $\{i\} \times \mathbb{R}$ não pode interceptar um eixo $\{i\} \times \mathbb{R}$ mais de um vez. Isto porque $\{i\} \times \mathbb{R}$ descreve uma geodésica minimizante e o lema 5.11 impede isto.

Antes de provarmos que H satisfaz $(H_1) - (H_4)$ vejamos o seguinte resultado que nos permitirá aplicar os resultados dos capítulos 2-4 para o caso das geodésicas minimais em $\mathbb{R}^2$

Lema 5.12 *Seja $(x_j, ..., x_k)$ um segmento minimal com respeito a H e que faz parte de uma configuração minimal (infinita) x (para H) e $k - j > 2$. Então existe um única geodésica minimal $\gamma : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}^2$ que une (j, x_j) a (k, x_k) (e ainda passa por $(i, x_i), j < i < k$). Reciprocamente. todo geodésica minimal que não é parte de nenhuma linha $\{i\} \times \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, intercepta cada linha $\{i\} \times \mathbb{R}$ no máximo uma vez. Se a projeção $\pi(x_1, x_2) = x_1$ for tal que para a geodésica minimal γ vale $\pi(\gamma) = \mathbb{R}$, então os pontos de interseção de gamma com as linhas $\{i\} \times \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, formam o gráfico de uma configuração infinita minimal com respeito a H .*

Demonstração: Se $x = (..x_j, ..., x_k...)$ é configuração minimal para a H (acima definido) no sentido do capítulo 1, e se γ_i é o segmento minimizante ligando $(i - 1, x_{i-1})$ a (i, x_i), então a colagem infinita destes segmentos γ_i define uma geodésica minimizante γ (diferencivel). Isto porque em cada intervalo $(i - 1, i), (i, i + 1)$ as curvas γ_i e γ_{i+1} devem fazer ângulo zero em (i, x_i), pois $\gamma_i \cup \gamma_{i+1}$ é mínima, logo, crítica, logo satisfaz as equações de Euler-Lagrange, sendo assim a curva $\gamma(t)$ é de classe C^∞.

Suponha que exista outra geodésica minimal $\beta(t)$, $\beta : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}^2$ que une (j, x_j) a (k, x_k). Note que $\gamma'(t)$ e $\beta'(t)$ fazem ângulo não nulo em (j, x_j) a (k, x_k). Podemos considerar segmentos geodésicos minimizantes $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\beta}$, (pedaços de geodésicas correspondentes respectivamente a γ e β) contendo estritamente dentro de si os pontos (j, x_j) a (k, x_k). Aplicando o lema (5.11) a $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\beta}$ com $p_1 = (j, x_j)$ e $p_2 = (k, x_k)$ temos uma contradição.

Logo os dois segmentos $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\beta}$ são iguais, o que demostra a unicidade de γ.

Reciprocamente sejam $\gamma : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}^2$ um geodésica minimal que não é parte de nenhuma linha $\{i\} \times \mathbb{R}$. Então a imagem de γ intercepta cada linha $\{i\} \times \mathbb{R}$ no máximo uma vez.

Note primeiro que para cada i fixo, cada linha $\{i\} \times \mathbb{R}$ é uma geodésica minimizante em $\mathbb{R}^2$. De fato, se houvesse uma curva η ligando dois pontos (i, z) a (i, y), com $z < y$, então seja $k < z$ e $y < m$ com $k, m \in \mathbb{Z}$. Considere $\beta = \{(i, s), k \leq s \leq z\} \cup \eta \cup \{(i, t), y \leq t \leq m\}$. Denote por $\bar{\beta}$ a curva de menor comprimento em T^2 com homotopia $(1, 0)$ como descrito anteriormente. A curva β projetada em T^2 determinaria um segmento homotópico a $(m - k)\bar{\beta}$

com com comprimento menor do que $(m-k)\bar{\beta}$, e isto não é possivel.

Logo, γ e $\{i\}\times\mathbb{R}$ só podem se interceptar uma vez.

Suponha que projeção $\pi(x_1, x_2) = x_1$ da geodésica minimal γ sobre o eixo dos x_1 seja $\mathbb{R}$.

Sejam $(i, x_i), i \in \mathbb{Z}$, os pontos de interseção de γ com os eixos respectivamente $\{i\}\times\mathbb{R}$ que determinam assim um $x = (..., x_j, ..., x_k, ...)$.

Segue da definição de geodésica minimal que $x = (..., x_j, ..., x_k, ...)$ é tal que para j, k fixados e $(x'_j, x'_{j+1}, ..., x'_{k-1}, x'_k)$ satisfazendo $x'_j = x_j$ e $x'_k = x_k$, vale que

$$H(x_j, ..., x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=j}^{k-1} H(x'_i, x'_{i+1}) = H(x'_j, ..., x'_k)$$

i.e., $(x_j, ..., x_k)$ é segmento minimal para H. □

Dado uma geodésica minimal γ, a condição "a projeção $\pi(x_1, x_2) = x_1$ da geodésica minimal γ sobre o eixo dos x_1 é $\mathbb{R}$"pode ser alcançada mediante uma mudança de coordenadas, segundo afirma a página 8 de [1].

Lema 5.13 *H satisfaz* $(H_1) - (H_4)$

Demonstração: Como $T_{(0,1)}$ é uma d-isometria temos (H_1):

$$H(\xi + 1, \eta + 1) = H(\xi, \eta)$$

A condição no infinito (H_2) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$H(\xi, \xi + \eta) \geq d((1, \xi), (1, \xi + \eta)) - d((1, \xi), (0, \eta))$$

Como $s \to (1, s)$ é geodésica minimal temos que

$$d((1, \xi), (1, \xi + \eta)) = |\eta|$$

Ainda, $\xi \to d((1, \xi), (0, \xi)) = H(\xi, \xi)$ é função contínua e periódica, logo limitada. Então temos (H_2):

$$\lim_{|\eta|\to\infty} H(\xi, \xi + \eta) = \infty \quad \text{uniformemente em } \xi$$

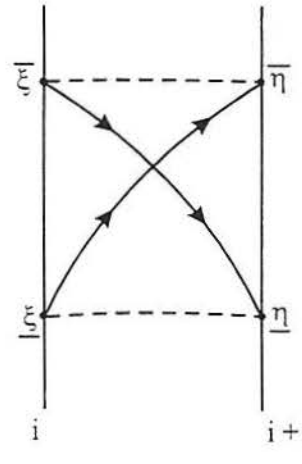

Figura 5.2:

A prova de (H_3) é semelhante ao desenvolvimento que foi feito no lema 5.11.

Para obtermos (H_3) precisamos provar que: se $\underline{\xi} < \bar{\xi}$ e $\underline{\eta} < \bar{\eta}$ então

$$H(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + H(\bar{\xi}, \bar{\eta}) < H(\underline{\xi}, \bar{\eta}) + H(\bar{\xi}, \underline{\eta})$$

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \bar{\gamma} : [a, \bar{b}] \to \mathbb{R}^2$ segmentos geodésicos minimais (γ ligando $(i, \bar{\xi})$ a $(i+1, \underline{\eta})$ e $\bar{\gamma}$ ligando $(i, \underline{\xi})$ a $(1+i, \bar{\eta})$) satisfazendo $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s) = p_1$ para algum $a < s < \min\{b, \bar{b}\}$, conforme a figura 5.2.

Note que o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\bar{\gamma}'(s)$ em p_1 é não nulo (pois ambos satisfazem $||\gamma'(s)|| = 1 = ||\bar{\gamma}'(s)||$ e $\gamma \neq \bar{\gamma}$).

Fixe $\varepsilon > 0$ pequeno e considere os segmentos geodésicos minimais γ_1, γ_2, $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ definidos do seguinte modo:

a) $\gamma_1(t)$ é a restrição de γ ao intervalo (a, s),

b) $\gamma_2(t)$ é a restrição de γ ao intervalo (s, b),

2) $\bar{\gamma}_1(t)$ é a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo (a, s),

b) $\bar{\gamma}_2(t)$ é a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $(s, \bar{b})$.

Seja agora $\beta_1(t)$ o segmento geodésico minimal ligando $(i, \bar{\xi})$ a $(i+1, \bar{\eta})$ e $\beta_2(t)$ o segmento geodésico minimal ligando $(i, \underline{\xi})$ a $(i+1, \underline{\eta})$.

Segue de (G) acima (e do fato que o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\bar{\gamma}'(s)$ em p_1 é não nulo) que $l(\beta_1) < l(\gamma_1) + l(\bar{\gamma}_2)$ e $l(\beta_2) < l(\bar{\gamma}_1) + l(\gamma_2)$.

Portanto,

$$H(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + H(\bar{\xi}, \bar{\eta}) < H(\underline{\xi}, \bar{\eta}) + H(\bar{\xi}, \underline{\eta}).$$

Assuma que $(x^*_{-1}, x^*_0, x^*_1) \neq (x_{-1}, x_0, x_1)$. Para mostrar (H_4) note que se denotamos por γ_1 o segmento minimal definido pelos pontos (x_{-1}, x_0, x_1) e por γ_2 o segmento minimal definido pelos pontos (x^*_{-1}, x^*_0, x^*_1), então γ_1 e γ_2 são geodésicas diferenciáveis C^∞. Isto segue do fato que mínimos para a ação satisfazem a equação de Euler-Lagrange.

A curva γ_1 (respectivamente γ_2) liga os pontos $(-1, x_{-1})$ e $(1, x_1)$ (respectivamente $(-1, x^*_{-1})$ e $(1, x^*_1)$) passando pelo ponto $(0, x_0)$. Com γ_1 e γ_2 não podem se interceptar duas vezes pelo lema 5.11, elas se tocam apenas em $(0, x_0)$.

Ora, se $x_1 > x^*_1$ e $x_{-1} > x^*_{-1}$ então γ_1 e γ_2 são tangentes em $(0, x_0)$ (logo $\gamma_1 = \gamma_2$) o que é absurdo pois assumimos que $(x^*_{-1}, x^*_0, x^*_1) \neq (x_{-1}, x_0, x_1)$. $\square$

Note que, nenhum segmento geodésico minimal de uma geodésica minimal γ está contido em alguma linha $\{i\} \times \mathbb{R}$ pois isto contraria a unicidade das soluções. Ainda, por (V) acima, não pode haver mais de uma interseção de γ geodésica minimal com um eixo $\{i\} \times \mathbb{R}$. Seja γ dada por $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s))$. Nem sempre ξ é sobre $\mathbb{R}$. No entanto, estaremos prioritariamente interessados no caso em que ξ é sobre $\mathbb{R}$.

Sendo assim, dada uma geodésica minimal γ tal que $\xi(s)$ é sobrejetiva em $\mathbb{R}$, podemos obter a partir dela uma configuração $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ através de $\gamma \cap \{\{i\} \times \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{Z}\} = x$, onde $x = (..., x_j, ..., x_k, ...)$ (estamos usando (V) para nos assegurar que está bem definido tal x). Note que x é minimizante para H no sentido dos capítulos anteriores em função da definição de geodésica minimal.

Diremos que tal x é a configuração minimal associada a γ. Veja figura 5.3.

Se uma geodésica minimal γ é tal que $\xi(s)$ não é sobre $\mathbb{R}$ é possível obter uma nova aplicação de recobrimento do toro que faz $\xi(s)$ sobre $\mathbb{R}$ (ver [1, página 32]). Vamos assumir a partir de agora, para simplificar as nossas provas, que todas as geodésicas minimais γ que vamos considerar são tais que $\xi(s)$ é sobre $\mathbb{R}$. Caso γ não fosse sobre, mudaríamos a aplicação de recobrimento e seguiríamos o argumento análogo ao que iremos utilizar a seguir.

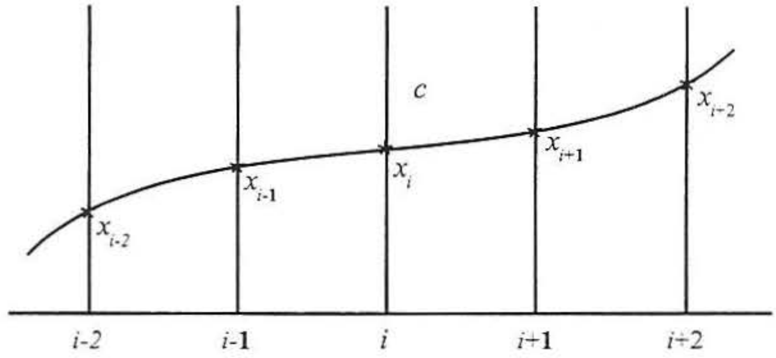

Figura 5.3: A configuração x associada à geodésica c

Teorema 5.14 *Duas geodésicas minimais se cruzam no máximo uma vez.*

Demonstração: Seja γ_1, γ_2 geodésicas minimais. Suponhamos por absurdo que elas se cruzem duas vezes, digamos em p_1 e em p_2. Então existem $s_1 \neq s_2$ tais que $\gamma_1(s_1) = p_1 = \gamma_2(s_1)$ e $\gamma_1(s_2) = p_2 = \gamma_2(s_2)$, podemos supor $s_1 < s_2$. Considere agora x^1 e x^2 as configurações minimais associadas a γ_1 e a γ_2 respectivamente. Podemos escolher $t_1 < s_1$ e $t_2 > s_2$ tais que $\gamma_1(t_1) = (i, x_i^1), \gamma_1(t_2) = (j, x_j^1)$ e $\gamma_2(t_1) = (i, x_i^2), \gamma_2(t_2) = (j, x_j^2)$. Seguindo o mesmo raciocínio usado na prova do lema 5.11 vemos que $\gamma_1|_{[t_1, t_2]} = \gamma_2|_{[t_1, t_2]}$ ou seja, $(i, x_i^1) = (i, x_i^2)$ e $(j, x_j^1) = (j, x_j^2)$ o que não pode acontecer, já que vale o lema 2.1. □

Uma outra demonstração alternativa do resultado acima seria utilizar diretamente o lema 5.11

Definição 5.15 *Seja γ uma geodésica minimal e $(q, p) \in \mathbb{Z}^2$. Se $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s))$, definimos $T_{(q,p)}\gamma$ por $T_{(q,p)}\gamma(s) := (\xi(s) + q, \eta(s) + p)$. E dizemos que γ é (q, p)-periódica se $T_{(q,p)}\gamma = \gamma$.*

Teorema 5.16 *Seja $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s))$ uma geodésica minimal em $\mathbb{R}^2$. Se γ e uma de suas translações $T_k\gamma$, $k = (q, p) \in \mathbb{Z}^2$, têm um ponto em comum então γ e $T_k\gamma$ coincidem a menos de parametrização. Se ξ é sobrejetiva então a inclinação média $\tilde{\alpha}(\gamma) := \lim_{|s| \to \infty} \eta(s)/\xi(s)$ existe e é finita. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe geodésica minimal γ com $\tilde{\alpha}(\gamma) = \alpha$.*

Demonstração: Sejam x e x^* configurações minimais associadas a γ e a $T_k\gamma$ respectivamente. Suponhamos por absurdo que $\gamma \neq T_k\gamma$. Por hipótese γ e

$T_k\gamma$ tem um ponto em comum e como não podem se cruzar mais uma vez, pelo teorema (5.14), temos que x e x^* se cruzam. Note que como γ e $T_k\gamma$ são periódicas de mesmo período, o mesmo acontece para x e x^*. Portanto pelo teorema (2.5) isto somente pode acontecer se $x = x^*$, o que é um absurdo, pois γ e $T_k\gamma$ só se cruzam uma vez. Portanto γ coincide com $T_k\gamma$ a menos de parametrização. Suponhamos agora que ξ é sobrejetiva então $x = (..., x_j, ..., x_k, ...)$ e defina

$$\tilde{\alpha}(\gamma) := \lim_{|i| \to \infty} \frac{x_i}{i}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $\tilde{\alpha}(\gamma) = \lim_{|s| \to \infty} \eta(s)/\xi(s)$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ denotamos $a_i < b_i \in \mathbb{R}$ como os valores tais que $\gamma(a_i) \in \{i\} \times \mathbb{R}$ e $\gamma(b_i) \in \{i+1\} \times \mathbb{R}$. Em princípio, $\xi(s)$ não é necessariamente injetiva em (a_i, b_i).

Pelo corolário 2.8 temos que $|x_i - x_0 - i\alpha(\gamma)| < 1$, logo existe uma constante uniforme K tal que para todo i temos $|x_i - x_{i+1}| < K$. Logo $H(x_i, x_{i+1})$ também é limitado. Pela continuidade do fluxo de Euler-Lagrange e usando o fato que $||\gamma'(t)|| = 1$ concluímos que existe K_1 tal que para todo $s \in (a_i, b_i), i \in \mathbb{Z}$ vale que $|\eta(s) - \eta(a_i)| = |\eta(s) - x_i| < K_1$ e $|\eta(s) - \eta(b_i)| = |\eta(s) - x_{i+1}| < K_1$.

Sabemos que para todo $s \in (a_i, b_i), i \in \mathbb{Z}$, vale que $|\xi(s) - i| < 1$.

Destes dois fatos segue que $\tilde{\alpha}(\gamma) := \lim_{|s| \to \infty} \eta(s)/\xi(s)$.

Seja agora $\alpha \in \mathbb{R}$, pelo teorema (2.9) existe $x \in \mathcal{M}_\alpha$.

Seja γ_i o segmento minimizante ligando $(i-1, x_i)$ a (i, x_{i+1}), então a colagem infinita destes segmentos γ_i define uma geodésica minimizante γ (diferenciável). Isto porque em cada intervalo $(i-1, i), (i, i+1)$ as curvas γ_i e γ_{i+1} devem fazer ângulo zero em (i, x_i), pois $\gamma_i \cup \gamma_{i+1}$ é mínima, logo, crítica, logo satisfaz as equações de Euler-Lagrange, sendo assim a curva $\gamma(t)$ é de classe C^∞.

A configuração associada a γ será x e assim segue pelo que foi explicado acima que γ satisfaz $\tilde{\alpha}(\gamma) = \alpha$. $\square$

Segue da primeira afirmação do teorema acima que a projeção em T^2 de uma geodésica minimizante em $\mathbb{R}^2$ não possui autointerseções.

Ainda, note que o valor do número de rotação de uma geodésica minimizante γ pode mudar se mudarmos a aplicação de recobrimento de T^2. No entanto, se este valor $\tilde{\alpha}(\gamma)$ é racional ou irracional, é uma propriedade que independe do recobrimento.

Teorema 5.17 *Geodésicas periódicas minimais são exatamente levantamentos de geodésicas fechadas em T^2 que tem comprimento minimal na sua classe de homotopia. Duas geodésicas periódicas minimais com mesmo período não se interceptam.*

Demonstração: Seja γ geodésica periódica minimal, i.e. existe $(q,p) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\gamma = T_{(q,p)}\gamma$. Considere x configuração minimal associada a γ, temos que $x = T_{(q,p)}x$, i.e., $x_{i-q} + p = x_i$. Portanto se $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ é recobrimento de T^2, os pontos (i, x_i) e $(i-q, x_{i-q}) = (i-q, x_i - p)$ são tais que $\pi((i,x_i)) = \pi((i-q, x_i - p))$, o mesmo acontecendo para os pontos $(i+1, x_{i+1})$ e$(i+1-q, x_{i+1-q}) = (i+1-q, x_{i+1}-p)$. Logo obtemos que $\pi(\gamma)$ é geodésica fechada em T^2. E pelo teorema (4.1) x é mínimo da função $H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbb{R}$, onde $P_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid T_{(q,p)}x = x\}$. $H_{q,p}(x) = H(x_0, ..., x_q)$, portanto $\pi(\gamma)$ tem comprimento minimal na sua classe de homotopia. A última afirmação do teorema é conseqüência do corolário (2.2). $\square$

Teorema 5.18 *Uma geodésica minimal γ, com $\tilde{\alpha}(\gamma) \in \mathbb{Q}$, que não é periódica está contida em uma faixa entre duas geodésicas minimais γ^- e γ^+. γ^- e γ^+ são tais que não existe geodésica minimal periódica entre elas e $\tilde{\alpha}(\gamma^-) = \tilde{\alpha}(\gamma^-) = \tilde{\alpha}(\gamma)$. Ainda, ou γ é α-assintótica a γ^- e ω-assintótica a γ^+, ou vice-versa.*

Demonstração: Seja x configuração minimal associada a γ, pelo teorema (4.4) sabemos que $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per} \cup \mathcal{M}_\alpha^+ \cup \mathcal{M}_\alpha^-$. Se $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ então γ é periódica. Se $x \in \mathcal{M}_\alpha^+$ então $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$, onde $x^-, x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ e $x^- < x^+$ e ainda x^- e x^+ são vizinhos. Pela definição de $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ temos que x é α-assintótico a x^- e ω-assintótico a x^+. Sejam então γ^- e γ^+ as geodésicas minimais que são extensões de x^- e de x^+ respectivamente. Sabemos que $\tilde{\alpha}(\gamma^-) = \tilde{\alpha}(\gamma^+) = \alpha$. Ainda $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$ pois pelo lema 5.11 duas geodésicas se cruzam no máximo uma vez, e se elas se cruzam as suas configurações minimais associadas também devem se cruzar. Mas como foi visto no lema 2.4 se duas configurações são assintóticas elas não se cruzam. Portanto x e x^- não se cruzam e o mesmo vale para x e x^+, logo $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$. □

Teorema 5.19 *Em cada faixa entre duas geodésicas periódicas minimais γ^- e γ^+ que não contem outra geodésica periódica minimal, existem geodésicas minimais γ e γ^*, tais que γ é $\alpha-$assintótico a γ^- e ω-assintótico a γ^+, e vice-versa para γ^*.*

Demonstração: Sejam x^+, x^- as configurações minimais associadas às geodésicas γ^+ e γ^-. Pelas hipóteses x^+ e x^- são periódicas e vizinhas. Portanto podemos usar o teorema 4.5, donde concluímos que existem $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ e $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$, i.e., x é α-assintótico à x^- e ω-assintótico à x^+, e o contrário ocorre para x^*. □

Teorema 5.20 *Duas geodésicas minimais γ, γ^* tais que $\tilde{\alpha}(\gamma) = \tilde{\alpha}(\gamma^*) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não se cruzam.*

Demonstração: Sejam γ, γ^* tais geodésicas minimais, e x, x^* suas configurações associadas. Pelo teorema 3.1 x e x^* não se cruzam. Portanto decorre do teorema 5.14 que as geodésica γ e γ^* também não se cruzam. □

Definição 5.21 *Dizemos que uma geodésica γ é recorrente se existe $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $k_i \in \mathbb{Z}^2$ e $\gamma = \lim_{i\to\infty} T_{k_i}\gamma$.*

Teorema 5.22 *Suponha $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Seja γ geodésica minimal não recorrente, então γ está contida em uma faixa limitada por duas geodésicas recorrentes assintóticas. Ainda cada γ geodésica minimal recorrente pode ser aproximada por geodésicas periódicas minimais.*

Demonstração: O teorema segue facilmente dos teoremas 3.6 e 3.4. □

Referências Bibliográficas

[1] Bangert, V. *"Mather sets for twist maps and geodesics on tori"*, Dynamics Reported, vol 1 (1988) 1-56.

[2] Carmo, M.P. *"Differential geometry of curves and surfaces"*, Prentice-Hall (1976).

[3] Contreras, G. e Iturriaga, R. *"Global minimizers of Autonomous Lagrangians"*, 22 Colóquio Bras. Mat.,IMPA, (1999).

[4] Lopes, A.O. *"Introdução à Mecânica Clássica"*, Monografias de Matemática, IMPA (2000).

[5] Mañé, R. *"Global Variational Methods in Conservative Dynamics"*, 18 Colóquio Bras. Mat.,IMPA, (1991). .

[6] Szlenk, W. *"An introduction to the theory of smooth dynamical systems"*, Pwn-Polish .