Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Curso de Pós-Graduação em Matemática

FORMAS DIFERENCIAIS DE 1ª ESPÉCIE EM UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN COMPACTA *

ELIZABETH FERREIRA DA COSTA GOMES

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 22 de setembro de 1981.

---

* Este trabalho foi realizado com bolsas de estudos do CNPq e do CAPES.

ÍNDICE

RESUMO

Apresentamos uma prova elementar dos teoremas de De Rham e de Hodge. Como aplicação, provamos que a dimensão do espaço das formas diferenciais de 1ª espécie, numa superfície de Riemann compacta, é o genus da superfície.

ABSCTRACT

An elementary proof of the theorems of De Rham and Hodge is presented. As an application, we also prove that the dimension of the space of the first kind differential forms, on a compact Riemann surface, is the genus of the surface.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é a determinação da dimensão do espaço das diferenciais de 1ª espécie numa superfície de Riemann compacta, sem usar triangulações.

No primeiro capítulo, parte mais importante do trabalho, temos uma demonstração do teorema de De Rham para superfícies compactas (não necessariamente de Riemann) e formas de grau 1 usando sistematicamente como 1º grupo de cohomologia, o grupo dos homomorfismos do grupo fundamental no grupo dos números reais.

No segundo capítulo, vemos que se R é uma superfície de Riemann compacta, toda forma fechada em R pode ser decomposta de maneira única como soma de uma forma harmônica e uma forma exata em R (teorema de Hodge).

No terceiro capítulo definimos diferencial de 1ª espécie e mostramos que a dimensão complexa do espaço das diferenciais de 1ª espécie numa superfície de Riemann compacta é o genus da superfície.

Agradeço aos professores e colegas que tornaram possível a realização deste trabalho.

Em especial, agradeço ao Prof. Marcos Sebastiani pela orientação segura e constante, ao Prof. Jean-Paul Brasselet e ao Prof. Luiz Fernando Carvalho da Rocha pelas críticas e sugestões feitas ao trabalho e à Profa. Cármen Sílvia Salis Fagundes pelo permanente incentivo, desde o meu ingresso no Curso de Matemática.

Agradeço, também, aos meus pais e ao meu marido pelo estímulo ao estudo.

CAPÍTULO I

ISOMORFISMO DE DE RHAM

Seja M uma variedade conexa compacta de classe C^{∞} e dimensão dois. Sejam $H^1(M,\mathbb{R})$ o espaço dos homomorfismos do grupo fundamental de M no grupo dos números reais e $H^1_{DR}(M)$ o espaço quociente do espaço das formas fechadas em M módulo o subespaço das formas exatas.

Neste capítulo mostraremos que a função

$I: H^1_{DR}(M) \longrightarrow H^1(M,\mathbb{R})$ dada por

$I(\omega)(\gamma) = \int_{\gamma} \omega$ (onde ω é uma forma fechada e γ é uma curva fechada) é um isomorfismo.

Os três primeiros parágrafos serão destinados à apresentação de definições e algumas propriedades de superfícies, curvas na superfície e integração de formas numa superfície, que serão necessárias à demonstração de que I é um isomorfismo, o que será feito no quarto parágrafo:

No primeiro parágrafo apresentamos uma particular cobertura de uma superfície compacta M por discos paramétricos (Proposições 1 e 2).

No segundo parágrafo definimos curva poligonal em uma superfície e mostramos que toda curva fechada na superfície compacta M é homotópica a uma poligonal em M (Proposição 3).

No terceiro parágrafo, definimos a integração de formas exatas e fechadas ao longo de uma curva em uma superfície qualquer N e mostramos algumas propriedades (Proposições 5 e 6).

O leitor, estando familiarizado com estes resultados, poderá ler diretamente o quarto parágrafo.

I.1 - COBRIMENTO DE SUPERFÍCIE

Definiremos superfície como sendo uma variedade diferenciável de dimensão dois e classe C^∞, que seja conexa e com base enumerável.

Se a é um ponto do espaço métrico M, $D_M(a,r)$ (respectivamente, $\overline{D}_M(a,r)$) denotará a bola aberta (respectivamente fechada) de centro a e raio r. Se M é o espaço $\mathbb{R}^2$, escreveremos simplesmente $D(a,r)$.

OBSERVAÇÃO 1: Lembramos que a superfície acima definida admite uma métrica riemanniana.

<u>LEMA 1</u>:

Sejam, A,B abertos do $\mathbb{R}^2$ e r um número real positivo, tais que:

$$o \in A \subset B \subset \overline{B} \subset D(o,r).$$

Então, existe um difeomorfismo $\psi: D(o,r) \longrightarrow D(o,3)$ tal que:

(i) $\psi(o) = o$

(ii) $o \leq \| \psi(z) \| < 2$, se $z \in B$

(iii) $1 \leq \| \psi(z) \| < 2$, se $z \in B-A$

(iv) $1 \leq \| \psi(z) \| < 3$, se $z \in D(o,r)-A$.

Prova: Sejam $o < a < b < r$ tais que

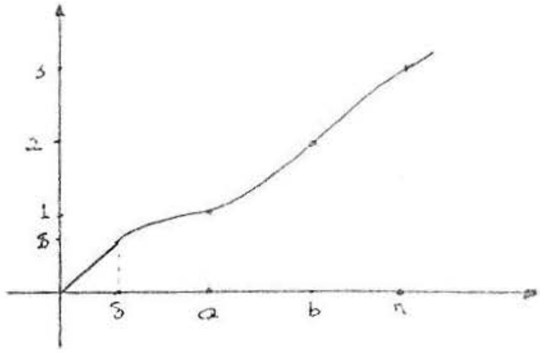
$$D(o,a) \subset A \subset B \subset \overline{B} \subset D(o,b)$$

Seja $\delta > o$ satisfazendo $\delta < a$ e $\delta < 1$.

Existe uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ estritamente crescente e de classe C^∞ tal que:

$$f(x) = x, \text{ se } x \in [o,\delta]$$

$$f(a) = 1,\ f(b) = 2 \text{ e } f(r) = 3$$



Definimos a função $\psi : D(o,r) \longrightarrow D(o,3)$, por

$$\psi(z) = f(\|z\|) \frac{z}{\|z\|} \tag{1}$$

Temos que ψ é de classe C^∞ fora da origem, pois f o é. Além disso, se $\|z\| < \delta$, temos que $f(\|z\|) = \|z\|$, e daí

$$\psi(z) = z, \quad \text{se } \|z\| < \delta.$$

Portanto, ψ é de classe C^∞.

Como a função f é estritamente crescente, f é inversível e f^{-1} é de classe C^∞.

Consideramos a função $\psi_1 : D(o,3) \longrightarrow D(o,r)$, dada por

$$\psi_1(u) = f^{-1}(\|u\|) \frac{u}{\|u\|} \tag{2}$$

Por argumento análogo ao usado para mostrar que ψ é de classe C^∞, temos que ψ_1 é de classe C^∞. Mais ainda, ψ_1 é a inversa da função ψ. Com efeito, de (1), (2) e do fato de que $f^{-1}(p) \geq o$, se $p \geq o$, temos que:

$$\psi(\psi_1(u)) = f(f^{-1}(\|u\|)) \frac{f^{-1}(\|u\|) \frac{u}{\|u\|}}{f^{-1}(\|u\|)} =$$

$$= \|u\| \frac{u}{\|u\|} = u.$$

Analogamente, $\psi_1(\psi(z)) = z$.

Resta mostrar que ψ satisfaz às condições (i), (ii), (iii) e (iv).

(i) $\psi(o) = o$, pois vimos que $\psi(z) = z$, se $\|z\| < \delta$.

(ii) Se $z \in B$, $o \leq \|z\| < b$, e portanto,

$o \leq \|\psi(z)\| < 2$, pois $o \leq f(\|z\|) < 2$.

(iii) Se $z \in B-A$, $a < \|z\| < b$, e portanto,

$1 \leq \|\psi(z)\| < 2$, pois $1 \leq f(\|z\|) < 2$.

(iv) Se $z \in D(o,r)-A$, $a < \|z\| < 3$, e portanto,

$1 \leq \|\psi(z)\| < 3$.

PROPOSIÇÃO 1:

Seja M uma superfície compacta. Existe uma cobertura aberta $U_1, \ldots, U_m$ de M e um sistema de parametrizações locais

$$\phi_i : D(o,3) \longrightarrow U_i,\ i = 1,2,\ldots,m, \text{ tal que:}$$

(i) $M = \bigcup_{i=1}^{m} \phi_i\,(D(o,1))$

(ii) Se $\phi_i(\overline{D}(o,1)) \cap \phi_j(\overline{D}(o,1)) \neq \phi$, então $\phi_j(\overline{D}(o,1)) \subset \phi_i(D(o,2))$

$i,j = 1,2,\ldots,m$

Prova:

Escolhemos em M uma métrica de Riemann e notamos d_M a distância em M.

Seja $\{h_i, V_i\}_{1 \leq i \leq k}$ sistema de parametrizações locais de M, onde $V_i \subset M$ é aberto e

$h_i : D(o,3) \longrightarrow V_i$, $i = 1,2,\ldots,k$. Existem abertos V_i' em M tais que $V_i' \subset \overline{V}_i' \subset V_i$, $i = 1,\ldots,k$ e

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} V_i', \text{ onde } \overline{V}_i' \text{ é o fecho do aberto } V_i'.$$

Seja $K_i = h_i^{-1}(\overline{V}_i')$. Como $K_i \subset D(o,3)$ é compacto, existe $\rho_i > o$ tal que

$d(K_i, \partial(D(o,3))) > \rho_i$, onde d é a métrica euclidiana em R^2 e $\partial(D(o,3))$ denota a fronteira do disco $D(o,3)$.

A restrição de h_i^{-1} a $\overline{V}_i'$ é uniformemente contínua. Daí, existe $\delta_i > 0$ tal que

$$d(h_i^{-1}(x),\ h_i^{-1}(y)) < \rho_i,\ \text{se } d_M(x,y) < \delta_i,\quad x,y \in \overline{V}_i \qquad (3)$$

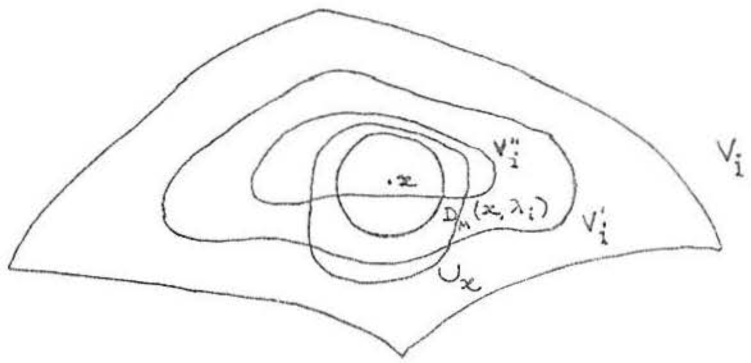
Seja, agora, $\{V_i''\}_{i=1,\dots,k}$ cobertura aberta de M tal que $V_i'' \subset \overline{V}_i'' \subset V_i'$,

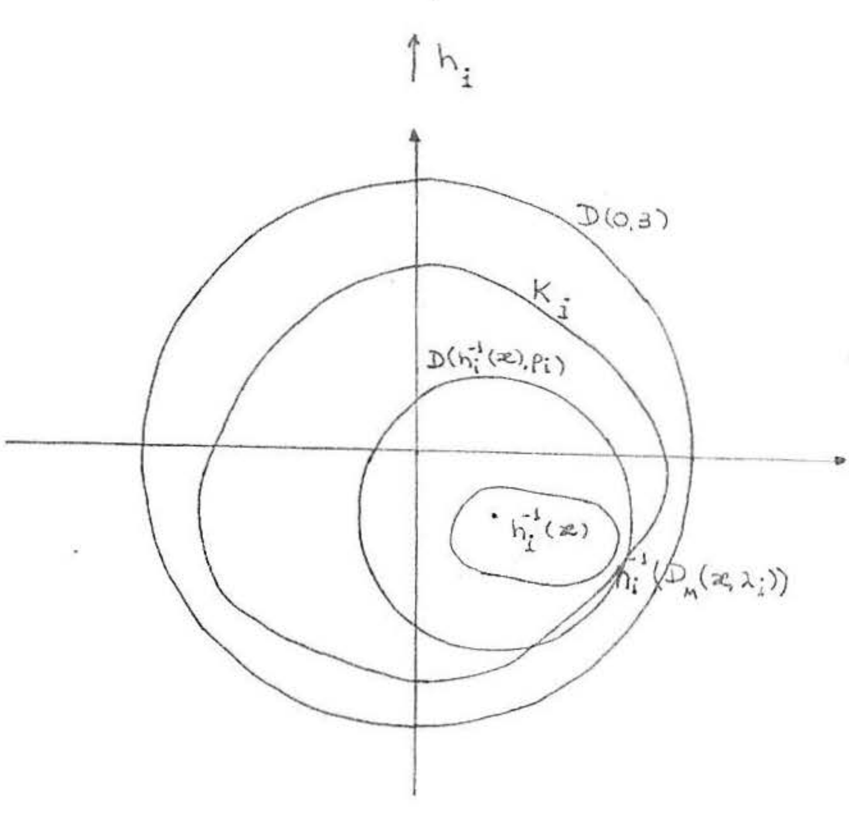
e seja $0 < \lambda_i < \min\{d(\overline{V}_i'', \partial V_i'),\ \delta_i\}$ (4).

Dado $x \in M$, existe i tal que $x \in V_i''$.

De (3) e (4), temos que:

$$h_i^{-1}(\overline{D}_M(x,\ \lambda_i)) \subset D(h_i^{-1}(x),\ \rho_i) \subset D(0,3).$$





Definimos $U_x = h_i(D(h_i^{-1}(x), \rho_i))$. U_x é uma vizinhança aberta de x em M tal que

$$\overline{D}_M(x,\lambda_i) \subset U_x \subset V_i.$$

Seja $\lambda = \min\limits_{1\leq i\leq k} \lambda_i$ (observemos que λ independe de x)

Temos que:

$$D_M(x,\tfrac{\lambda}{4}) \subset \overline{D}_M(x,\lambda) \subset U_x \subset V_i$$

Portanto, $h_i^{-1}(D_M(x,\frac{\lambda}{4})) \subset \overline{h_i^{-1}(D_M(x,\lambda))} \subset h_i^{-1}(U_x) = D(h_i^{-1}(x),\rho_i)$

Pelo lema 1, existe um difeomorfismo C^∞

$$\psi_x\colon h_i^{-1}(U_x) = D(h_i^{-1}(x),\rho_i) \longrightarrow D(o,3) \text{ tal que:}$$

(i) $\psi_x(h_1^{-1}(x)) = o$
(ii) $o \leq \|\psi_x(z)\| < 2$, se $z \in h_i^{-1}(D_M(x,\lambda))$
(iii) $1 \leq \|\psi_x(z)\| < 2$, se $z \in h_1^{-1}(D_M(x,\lambda)) - h_i^{-1}(D_M(x,\frac{\lambda}{4}))$ (5)
(iv) $1 \leq \|\psi_x(z)\| < 3$, se $z \in h_i^{-1}(U_x) - h_i^{-1}(D_M(x, \frac{\lambda}{4}))$

Consideremos a aplicação $\phi_x\colon D(o,3) \longrightarrow U_x$ dada por

$$\phi_x = h_i \circ \psi_x^{-1}$$

Por (5) e pelo fato de h_i ser parametrização local de M segue que:

a) ϕ_x é parametrização local
b) $\phi_x(o) = h_i \circ \psi_x^{-1}(o) = x$
c) Se $\phi_x(\overline{D}(o,1)) \cap \phi_y(\overline{D}(o,1)) \neq \phi$, então $d_M(x,y) \leq \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$

(pois $\phi_x(D(o,1)) \subset D_M(x,\frac{\lambda}{4})$ e $\phi_y(D(o,1)) \subset D_M(x,\frac{\lambda}{4})$); e portanto $\phi_y(\overline{D}(o,1)) \subset D_M(x,\lambda) \subset \phi_x(D(o,2))$, pois $h_i(h_i^{-1}(D_M(x,\lambda))) \subset h_i(\psi_x^{-1}(D(o,2)))$.

d) $M = \bigcup_{x \in M} \Phi_x(D(o,1))$, e, pela compacidade de M, existem

$x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$ tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} \Phi_{x_i}(D(o,1)) \overset{\text{not.}}{=} \bigcup_{i=1}^{m} \Phi_i(D(o,1)). \blacksquare$$

<u>OBSERVAÇÃO 2</u>: Sejam N superfície qualquer e $\{\Phi_i, U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistema de parametrizações locais de N, onde

$$\Phi_i : D(o,3) \longrightarrow U_i, \ i \in \mathbb{N}.$$

As imagens em N de discos do $\mathbb{R}^2$, pelas parametrizações locais, serão denotados por

$B_i(\Phi_i(a), r) = \Phi_i(D(a,r))$ e, por abuso de linguagem, serão chamados <u>disco</u> centrado em $\Phi_i(a)$ e de raio r. O ponto $\Phi_i(a)$, será chamado <u>centro</u> do disco $B_i(\Phi_i(a), r)$, $i \in \mathbb{N}$. Se o ponto a for a origem, notaremos simplesmente $B_i(r) = \Phi_i(D(o,r))$.

<u>LEMA 2</u>:

Sejam X espaço métrico compacto; $A, B \subset X$ abertos e $K, L \subset X$ fechados tais que $K \subset A$ e $L \subset B$, e $U \subset X$ aberto tal que $K \cap L \subset U$. Então, existem abertos $A', B' \subset X$ tais que:

$$K \subset A' \subset A, \ L \subset B' \subset B \ \text{ e } \ K \cap L \subset A' \cap B' \subset U.$$

Prova: Sejam

$$A_n = \{x \in X;\ d_X(x,k) < \tfrac{1}{n}\}$$
$$B_n = \{x \in X;\ d_X(x,L) < \tfrac{1}{n}\} \tag{6}$$

$A_n, B_n \subset X$ são abertos, para todo $n \in \mathbb{N}$, e, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_o$,

$$K \subset A_n \subset A \quad \text{e} \quad L \subset B_n \subset B.$$

Suponhamos que para todo $n \geq n_o$, exista x_n, tal que

$$x_n \in A_n \cap B_n \quad \text{e} \quad x_n \notin U. \tag{7}$$

Como X é compacto, existe uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que x_{n_k} converge para um ponto a.
Por (6), temos que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d_X(x_{n_k}, K) < \frac{1}{n_k},$$

$$d_X(x_{n_k}, L) < \frac{1}{n_k}$$

Daí, $d_X(a,K) = d_X(a,L) = 0$, e portanto, $a \in K \cap L \subset U$
Como U é aberto, x_{n_k} está em U, para todo k suficientemente grande, o que contradiz (7).
Logo, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset A_s \subset A \quad , \quad L \subset B_s \subset B \quad \text{e} \quad A_s \cap B_s \subset U$$

Fixado tal s, definimos $A' = A_s$ e $B' = B_s$. ■

<u>PROPOSIÇÃO 2</u>:

Seja M superfície compacta. Usando a notação da observação 2, suponhamos que para todo par ordenado de números naturais $n,m = 1,2,\ldots,k$, tais que $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_m(1) \neq \phi$, se tenha um número $\zeta(n,m)$ de maneira que:

$$\zeta(m,n) + \zeta(n,r) + \zeta(r,m) = 0, \qquad (8)$$

sempre que $\overline{B}_m(1) \cap \overline{B}_r(1) \neq \phi$, $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_r(1) \neq \phi$ e $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_m(1) \neq \phi$
Então, existem funções $f_n : B_n(3) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, tais que

$$f_m(x) - f_n(x) = \zeta(n,m), \text{ para todo ponto } x \qquad (9)$$

em uma vizinhança aberta de $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_m(1)$, se $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_m(1) \neq \phi$.

Prova:

Existe $f_1 : B_1(3) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$f_1(x) = 1$, se $x \in \overline{B}_1(1)$

$f_1(x) = 0$, se $x \in B_1(3) - B_1(2)$

$f_1(B_1(3)) \subset [0,1]$.

Suponhamos que se tenha definido

$$f_i: B_i(3) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots, n, \text{ de classe } C^\infty,$$

satisfazendo (9).

Sejam $U_{i,j}$ as vizinhanças abertas de $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1)$, $i,j = 1, 2, \ldots, n$; que podemos tomar tais que

$$U_{i,j} \subset B_i(2) \cap B_j(2) \qquad (U_{i,j} = \phi, \text{ se } \overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1) = \phi).$$

Seja $\{V_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$ família de abertos em M, tais que:

$\overline{B}_i(1) \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset B_i(2)$ e $V_i \cap V_j \subset U_{i,j}$, $i,j = 1,2,\ldots, m$ (a existência de tal família de abertos decorre do lema 2 e da finitude).

Seja $\quad U_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{V_i;\ \overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_{n+1}(1) \neq \phi\}$.

Definimos a aplicação $g\colon U_n \cap B_{n+1}(3) \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$g(y) = f_i(y) + \zeta(i, n+1), \quad \text{se} \quad y \in V_i \cap B_{n+1}(3) \cap U_n.$$

g está bem definida, pois se $y \in V_i \cap V_j \cap U_n \cap B_{n+1}(3)$, então $U_{i,j} \neq \phi$. Logo $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1) \neq \phi$ e, por (8) e (9), temos que:

$$f_i(y) - f_j(y) = \zeta(j,i) =$$
$$= \zeta(n+1, i) + \zeta(j, n+1), \text{ e, conse-}$$

qüentemente,

$$f_i(y) + \zeta(i, n+1) = f_j(y) + \zeta(j, n+1).$$

A função g é de classe C^∞, porque é localmente de classe C^∞.

Consideremos o conjunto

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{\overline{B}_i(1);\ B_i(1) \cap B_{i,n+1}(1) \neq \phi\}.$$

$K_n \cap B_{n+1}(3) \subset U_n \cap B_{n+1}(3)$ é fechado em $B_{n+1}(3)$.

Existe uma função

$$f_{n+1}: B_{n+1}(3) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty \text{ tal que}$$

$$f_{n+1} = g \text{ em uma vizinhança aberta } W$$

de $K_n \cap \overline{B}_{n+1}(1)$, em $B_{n+1}(3)$, tal que $W \subset U_n \cap B_{n+1}(3)$.

Como $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_{n+1}(1) \subset V_i \cap K_n \cap \overline{B}_{n+1}(1) \subset V_i \cap W$.

$V_i \cap W$ é uma vizinhança aberta de $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_{n+1}(1)$ tal que

$f_{n+1}(x) - f_i(x) = g(x) - f_i(x) = \zeta(i, n+1)$ para todo ponto x em $V_i \cap W$. ∎

I.2 - CURVAS, POLIGONAIS E HOMOTOPIA ENTRE CURVAS

Seja N uma superfície qualquer.

DEFINIÇÃO 1:

(i) Uma aplicação contínua $\gamma: [a,b] \to N$ é chamada uma curva em N.

(ii) A curva $\gamma: [a,b] \to N$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ é chamada uma curva fechada em N.

(iii) A curva $\gamma: [a,b] \to N$ é dita diferenciável (seccionalmente diferenciável) se a função γ é diferenciável (respectivamente seccionalmente diferenciável) (por diferenciável se entende de classe C^∞).

DEFINIÇÃO 2: Sejam $\gamma, \delta: [a,b] \to N$ curvas tais que $\gamma(b) = \delta(a)$.

(i) o produto ou a composição das curvas γ e δ, é a curva $\gamma \cdot \delta: [a,b] \to N$ dada por:

$$\gamma \cdot \delta(t) = \gamma(2t-a), \quad \text{se } a \leqslant t \leqslant \frac{a+b}{2}$$

$$\gamma \cdot \delta(t) = \delta(2t-b), \quad \text{se } \frac{a+b}{2} \leqslant t \leqslant b.$$

(ii) a inversa da curva γ é a curva γ^{-1}: $[a,b] \to N$ dada por:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(b+a-t)$$

DEFINIÇÃO 3: Dadas duas curvas γ, λ: $[a,b] \to N$, tais que

$$\gamma(a) = \lambda(a)$$
$$\gamma(b) = \lambda(b),$$

dizemos que γ e λ são homotópicas em N,

se existe uma função contínua $F: [a,b] \times [o,1] \to N$ tal que:

(i) $F(a,s) = \gamma(a) = \lambda(a)$, $o \leqslant s \leqslant 1$

(ii) $F(b,s) = \gamma(b) = \lambda(b)$, $o \leqslant s \leqslant 1$

(iii) $F(t,o) = \gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$

(iv) $F(t,1) = \lambda(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$

LEMA 3: Sejam $V \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo e

γ, δ: $[a,b] \to V$

α, β $[o,1] \to V$, curvas tais que:

$$\alpha(o) = \delta(a) \quad \text{e} \quad \alpha(1) = \gamma(a)$$
$$\beta(o) = \delta(b) \quad \text{e} \quad \beta(1) = \gamma(b).$$

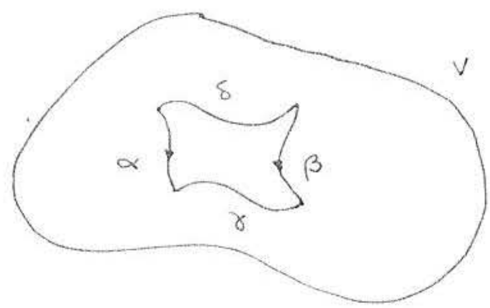
Existe uma função contínua G: $[a,b] \times [o,1] \to V$, tal que:

$$\begin{aligned} G(t,o) &= \delta(t), & a \leqslant t \leqslant b \\ G(t,1) &= \gamma(t), & a \leqslant t \leqslant b. \\ G(a,s) &= \alpha(t), & o \leqslant s \leqslant 1 \\ G(b,s) &= \beta(s), & o \leqslant s \leqslant 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Prova:

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o bordo do retângulo

$[a,b] \times [o,1]$ e seja



$G: A \longrightarrow V$ função dada por

$G(t,o) = \delta(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$

$G(t,1) = \gamma(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$

$G(a,s) = \alpha(s) \quad , \quad o \leq s \leq 1$

$G(b,s) = \beta(s) \quad , \quad o \leq s \leq 1$

A função G é contínua, pois α, β, γ e δ são contínuas e

$$G(a,o) = \delta(a) = \alpha(o)$$

$$G(b,o) = \delta(b) = \beta(o)$$

$$G(a,1) = \gamma(a) = \alpha(1)$$

$$G(b,1) = \gamma(b) = \beta(1)$$

Como V é simplesmente conexo, G pode ser extendido continuamente ao interior do retângulo, satisfazendo (10). ∎

Seja N superfície qualquer com sistema de parametrizações locais $\{\phi_i, B_i(3)\}_{i \in N}$; $\phi_i: D(o,3) \longrightarrow B_i(3)$, tal que $N = \bigcup_{i \in N} B_i(1)$.

Seja S o conjunto dos centros dos discos $B_i(1)$, $i \in N$; isto é,

$$S = \{p_i ; p_i = \phi_i(o), i \in N\}$$

<u>DEFINIÇÃO 4</u>: Dois pontos $p_i, p_j \in S$ são ditos <u>vizinhos</u> se $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1) \neq \phi$.

Para cada dois pontos vizinhos p_i, p_j, <u>fixemos</u> uma curva $\gamma_{i,j}: [o,1] \longrightarrow N$ seccionalmente diferenciável tal que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \gamma_{i,j}(o) = p_i \text{ e } \gamma_{i,j}(1) = p_j , \\ \text{(ii)} & \gamma_{i,j}([o,1]) \subset \overline{B}_i(1) \cup \overline{B}_j(1) \\ \text{(iii)} & \gamma_{i,j} = \gamma_{j,i}^{-1} \\ \text{(iv)} & \gamma_{ii}([o,1]) = \{p_i\} \end{array} \qquad (11)$$

DEFINIÇÃO 5: Cada curva $\gamma_{i,j}$ definida em (11), será chamada segmento orientado em N com origem no ponto p_i e extremidade no ponto p_j, e também será denotado $[p_i, p_j]$

DEFINIÇÃO 6: Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que p_{n_j} e $p_{n_{j+1}}$ são vizinhos, $j = 1, 2, \ldots, k-1$. A curva

$$\gamma: [o,1] \longrightarrow N \text{ dada por } \gamma = \gamma_{n_1,n_2}\, \gamma_{n_2,n_3} \cdot \ldots \cdot \gamma_{n_{k-1},n_k}$$

será chamada poligonal em N com vértices $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_k}$.

Seja M uma superfície compacta. Fixemos um sistema de parametrizações locais de M $\{\phi_i, B_i(3)\}_{i=1,\ldots,m}$ que satisfaz a proposição 1.

OBSERVAÇÃO 3: Daqui em diante sempre que estivermos tratando de superfície compacta, usaremos um sistema de parametrizações locais do tipo do sistema da proposição 1.

PROPOSIÇÃO 3: Seja M superfície compacta. Toda curva fechada $\delta: [o,1] \longrightarrow M$ com origem em p_1, é homotópica em M a uma poligonal fechada com origem em p_1.

Prova:

Como $M = \bigcup_{i=1}^{m} B_i(1)$ (pela proposição 1 e observação 3), existe uma família de abertos $\{V_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$ tal que $V_i \subset \overline{V}_i \subset B_i(1)$ e $M = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$.

Seja $o < \varepsilon < d_M(\overline{V}_i, \partial B_i(1))$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (12)

Da continuidade uniforme de δ, segue que existe $\lambda > o$ tal que

$d_M(\delta(s), \delta(t)) < \varepsilon$, se $|t - s| < \lambda$, para todo

$s, t \in [o,1]$ (13)

Tomemos uma partição do intervalo $[o,1]$,

$o = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$, satisfazendo $t_{i+1} - t_i < \lambda$ (14)

$i = 1, 2, \ldots, k-1$

De (12) e (13), segue que:

$\delta([t_i, t_{i+1}]) \subset B_j(1)$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

Por simplicidade de notação, façamos

$\delta([t_i, t_{i+1}]) \subset B_i(1)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

Sejam $\delta(t_i) = q_i \in B_i(1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; onde $q_1 = q_k = p_1$

Consideremos a poligonal fechada $\gamma: [o,1] \longrightarrow M$, com vértices $p_1, p_2, \ldots, p_k = p_1$ (esta poligonal existe, pois como $q_i \in B_{i-1}(1) \cap B_i(1) \neq \phi$, $i = 2, \ldots, k$; p_i e p_{i+1} são vizinhos, $i = 1, 2, \ldots, k-1$).

Reparametrizamos a poligonal γ de maneira que

$\gamma(t_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; onde os t_i's são os da partição dada em (14).

Temos que:

$$\delta([t_i, t_{i+1}]) \cup \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \overline{B}_i(1) \cup \overline{B}_{i+1}(1) \subset B_i(2).$$

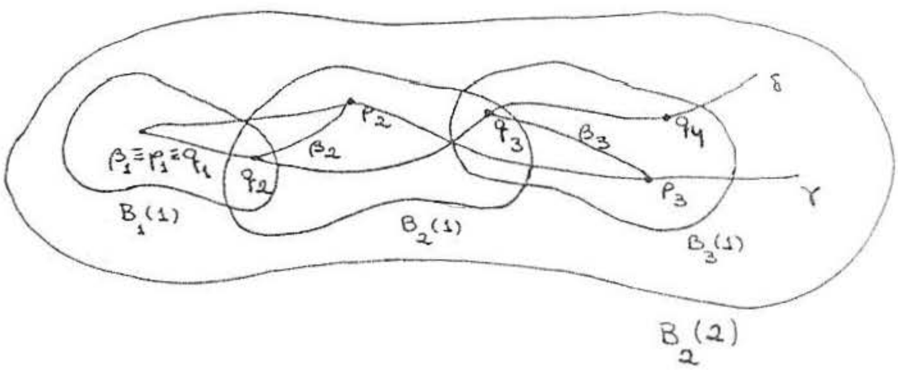
Sejam β_i caminhos em $B_i(2)$, unindo o ponto q_i ao ponto p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$; $\beta_k = \beta_1 = p_1 = q_1$.

Como $B_i(2)$ é homeomorfa a $D(o,2)$, para todo $i \in \{1,2,\dots,k\}$; pelo lema 3, existem funções contínuas

$$F_i: [t_i, t_{i+1}] \times [o,1] \longrightarrow B_i(2), \quad i = 1,2,\dots,k-1,$$

tais que:

$$\begin{aligned}
&(i)\ F_i(t,o) = \delta\big|_{[t_i,\, t_{i+1}]}(t) \\
&(ii)\ F_i(t,1) = \gamma\big|_{[t_i,\, t_{i+1}]}(t) \qquad\qquad (15) \\
&(iii)\ F_i(t_i,s) = \beta_i(s), \quad o \leq s \leq 1 \\
&(iv)\ F_i(t_{i+1}, s) = \beta_{i+1}(s), \quad o \leq s \leq 1
\end{aligned}$$



Consideremos a função $F: [o,1] \times [o,1] \longrightarrow M$ dada por:

$$F(t,s) = F_i(t,s), \text{ se } t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 1,2,\dots,k-1$$

F está bem definida e é contínua, pois cada F_i é contínua e, por (15),

$$F_i(t_{i+1}, s) = \beta_{i+1}(s) = F_{i+1}(t_{i+1}, s), \quad o \leq s \leq 1,\ i = 1,2,\dots,k-1.$$

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
&(i)\ F(o,s) = F_1(o,s) = \beta_1(s) = p_1, \quad o \leq s \leq 1 \\
&(ii)\ F(1,s) = F_{k-1}(1,s) = \beta_k(s) = p_1, \quad o \leq s \leq 1
\end{aligned}$$

(iii) $F(t,o) = \delta(t) \quad , o \leq t \leq 1$

(iv) $F(t,1) = \gamma(t) \quad , o \leq t \leq 1$

Logo, δ é homotópica à poligonal γ em M. ∎

I.3 - INTEGRAÇÃO DE FORMAS DIFERENCIÁVEIS

Neste parágrafo, vamos supor que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de formas diferenciáveis (classe C^∞), formas diferenciáveis exatas e fechadas em uma superfície; com a integração de formas diferenciáveis ao longo de uma curva seccionalmente diferenciável, e com o lema de Poincaré, que diz que toda forma fechada em uma superfície é localmente exata.

Vamos definir a integral de uma forma fechada ao longo de uma curva qualquer.

Sejam N superfície, ω uma forma diferenciável exata definida num aberto conexo $U \subset N$ e $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^∞ tal que

$$\omega = df$$

<u>DEFINIÇÃO 7</u>: Dada a curva $\gamma: [a,b] \longrightarrow U$, definimos a <u>integral</u> da <u>forma</u> diferenciável <u>exata ω</u> ao longo da curva γ, por

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Se ω definida em U, é uma forma diferenciável fechada, pelo lema de Poincaré; existe uma cobertura de U por abertos simplesmente conexos, $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, tal que $\omega|_{U_i}$ é exata.

Sejam $f_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ tais que:

$$\omega\Big|_{U_i} = df_i$$

Dada a curva γ: $[a,b] \longrightarrow U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma([a,b]) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \ , \quad \text{e uma partição}$$

$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{k+1} = b$, do intervalo $[a,b]$, satisfazendo,

$$\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subset U_i, \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

Sejam $\quad \gamma_i = \gamma\Big|_{[t_i,\ t_{i+1}]}$

Com as notações acima, definimos:

<u>DEFINIÇÃO 8</u>: A <u>integral da forma fechada ω</u> ao longo da curva γ, é definida por:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^{k} [f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i)].$$

<u>OBSERVAÇÃO 4</u>:

(i) Para cada $i = 1,2,\ldots,k$, f_i está determinada a menos de uma constante, porém, a diferença $f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i)$ está bem determinada.

(ii) Se adicionarmos à partição um ponto t', teremos $t_j < t' < t_{j+1}$, para um certo $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, e o arco γ_j, substituído pelos arcos

$$\gamma' = \gamma_j\Big|_{[t_j,t']} \quad \text{e} \quad \gamma'' = \gamma_j\Big|_{[t',t_{j+1}]}$$

Pela definição 8, teremos:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\gamma_i} df_i + \int_{\gamma'} df_j + \int_{\gamma''} df_j + \sum_{i=j+1}^{k} \int_{\gamma_i} df_i \qquad (16)$$

Ora,

$$\int_{\gamma'} df_j + \int_{\gamma''} df_j = f_j(t') - f_j(t_j) + f_j(t_{j+1}) - f_j(t') =$$

$$= f_j(t_{j+1}) - f_j\ (t_j) = \int_{\gamma_j} df_j$$

substituindo em (16),

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} df_i$$

Como os refinamentos das partições são feitos por adjunção de um número finito de pontos e duas quaisquer partições possuem um refinamento comum, temos que a integral independe da partição.

Pela observação 4, a integral da forma fechada ω ao longo da curva γ está bem definida.

As seguintes propriedades da integração de uma forma diferenciável ω ao longo de uma curva γ são de fácil verificação:

p_1: Se ω é exata e γ é fechada,

$$\int_\gamma \omega = o,$$

p_2: Se ω é fechada e $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$,

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

p_3: Se ω é fechada,

$$\int_{\gamma^{-1}} \omega = - \int_\gamma \omega$$

p_4: Se ω_1 e ω_2 são fechadas e $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_\gamma a\,\omega_1 + b\,\omega_2 = a \int_\gamma \omega_1 + b \int_\gamma \omega_2$$

<u>PROPOSIÇÃO 4</u>: Se $\gamma_o, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow N$ são homotópicas em N e ω é uma forma fechada em N, então $\int_{\gamma_o} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Prova:

Tomemos uma cobertura $N = \bigcup_{i \in N} U_i$, U_i aberto conexo em N, tal que $\omega|_{U_i}$ é exata

Seja $F: [a,b] \times [o,1] \longrightarrow N$ a função contínua que deforma γ_o em γ_1.

Definimos a função $\Phi: [o,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$\Phi(s) = \int_{\gamma_s} \omega \text{ , onde } \gamma_s : [a,b] \longrightarrow N \text{ é a curva}$$

dada por $\gamma_s(t) = F(t,s)$.

Devemos mostrar que a função Φ é constante.

Seja $s_o \in [o,1]$. Tomemos uma partição do intervalo $[a,b]$, $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{k+1} = b$, tal que, para cada $i = 1,2,\ldots,k$, se tenha

$$\gamma_{s_o}([t_i, t_{i+1}]) \subset U_j, \text{ para algum } j \in N.$$

Por simplicidade de notação, façamos

$$\gamma_{s_o}([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i, \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

Escolhemos uma métrica riemanniana em N, e denotamos por $d_N(p,q)$ a distância, em N, entre os pontos p e q, nesta métrica escolhida.

Sejam $\varepsilon_i = d_N(\gamma_{s_o}([t_i,t_{i+1}]), \partial U_i) > o$, $i = 1,2,\ldots,k$ (17)

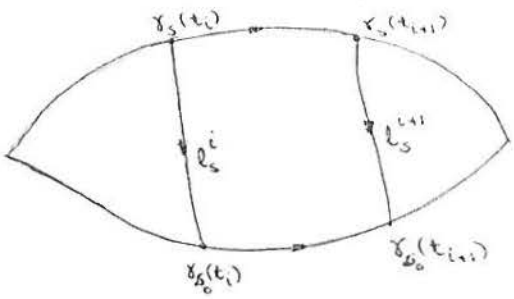
Pela continuidade da função F, existe em $\delta > o$ tal que:

$$d_N(F(t,s_o), F(t,s)) < \frac{\varepsilon_i}{2}, \text{ se } |s-s_o| < \delta \text{ e } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (18)$$
$$i = 1,2,\ldots,k$$

Denotando

$$\gamma_s^i = \gamma_s|_{[t_i,t_{i+1}]} \quad \text{e} \quad \ell_s^i = F|_{\{t_i\} \times [s,s_o]}, \quad i = 1,2,\ldots,k,$$

definimos as curvas $c_s^i = \ell_s^i \cdot \gamma_{s_o}^i \cdot (\ell_s^{i+1})^{-1} \cdot (\gamma_s^i)^{-1}$.



Para cada $i = 1,2,\ldots,k$ e $o \leq s \leq 1$, a curva c_s^i é fechada em N. Além disso, se $|s-s_o| < \delta$, c_s^i está inteiramente contida em U_i, por (18) e (17).

Pelas propriedades p_1 e p_3,

$$o = \int_{c_s^i} \omega = \int_{\ell_s^i} \omega + \int_{\gamma_{s_o}^i} \omega - \int_{\ell_s^{i+1}} \omega - \int_{\gamma_s^i} \omega; \text{ tomando}$$

a soma de 1 a k, temos:

$$o = \sum_{i=1}^{k} \int_{\ell_s^i} \omega + \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_s^i} \omega - \sum_{i=1}^{k} \int_{\ell_s^{i+1}} \omega - \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_s^i} \omega =$$

$$= \int_{\ell_s^1} \omega + \int_{\gamma_{s_o}} \omega - \int_{\ell_s^{k+1}} \omega - \int_{\gamma_s} \omega.$$

Daí, se $|s-s_o| < \delta$,

$$\Phi(s) = \int_{\gamma_s} \omega = \int_{\gamma_{s_o}} \omega = \Phi(s_o), \text{ pois}$$

$$\ell_s^1 = F\Big|_{\{a\} \times [s,s_o]} = \gamma_o(a) = \gamma_1(a) \text{ e } \ell_s^{k+1} = F\Big|_{\{b\} \times [s,s_o]} = \gamma_o(b) = \gamma_1(b).$$

Como $s_o \in [o,1]$ é arbitrário, Φ é localmente constante; e portanto constante, já que $[o,1]$ é conexo. ∎

<u>PROPOSIÇÃO 5</u>: Seja ω uma forma fechada definida num aberto conexo $U \subset N$. Se, para toda curva fechada γ em U, se tem

$$\int_{\gamma} \omega = o, \text{ então } \omega \text{ é exata.}$$

Prova:

Seja $p_o \in U$ um ponto fixo arbitrário.

Consideremos a função $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F(p) = \int_{\lambda_p} \omega \ , \text{ onde } \lambda_p \text{ é um caminho em } U \text{ unindo o ponto } p_o \text{ ao ponto } p.$$

F está bem definida, pois se δ_p é outro caminho unindo o ponto p_o ao ponto p, temos

$$\int_{\lambda_p} \omega - \int_{\delta_p} \omega = \int_{\lambda_p \delta_p^{-1}} \omega = o \quad \text{pois a curva } \lambda_p \delta_p^{-1} \text{ é fechada.}$$

Mostraremos que F é diferenciável e, para todo ponto p em U, $dF(p) = \omega(p)$.

Sejam $p \in U$, U_p aberto paramétrico que contem o ponto p e tal que $\omega\big|_{U_p}$ é exata, e

$$\Phi : D(o,1) \longrightarrow U_p \text{ parametrização local tal que } \Phi(o) = p.$$

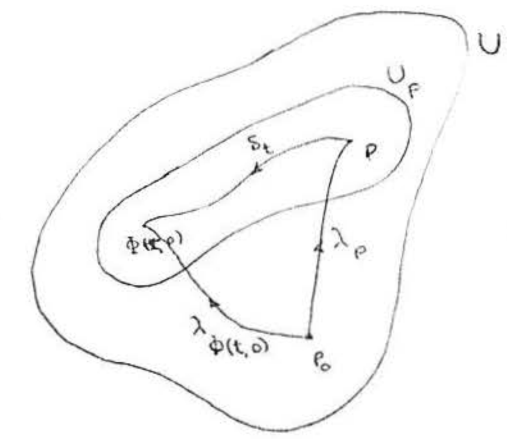
Consideremos em $D(o,1)$ as curvas $\begin{array}{l} x = x(t) = (t,o) \\ y = y(t) = (o,t) \end{array} \quad o \leq t \leq \frac{1}{2}$

e em U_p, as curvas $\begin{array}{l} \Phi \circ x(t) = \Phi(t,o) \\ \Phi \circ y(t) = \Phi(o,t) \end{array} \quad o \leq t \leq \frac{1}{2}$

Temos, para $o \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$F(\Phi(t,o)) - F(p) = \int_{\lambda_{\Phi(t,o)}} \omega - \int_{\lambda_p} \omega \tag{19}$$

Seja δ_t um caminho unindo os pontos p e $\Phi(t,o)$, inteiramente contido em U_p. A curva $\lambda_{\Phi(t,o)}^{-1} \cdot \delta_t \cdot \lambda_p$ é fechada em U; portanto, pela hipótese e por (19),



$$F(\Phi(t,o)) - F(p) = \int_{\delta_t} \omega \quad , \ o \leq t \leq \frac{1}{2} \qquad (20)$$

Seja $f: U_p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$\omega\Big|_{U_p} = df$$

Como o caminho δ_t está inteiramente contido em U_p, por (20), temos que:

$$F(\Phi(t,o)) - F(p) = \int_{\delta_t} df = f(\Phi(t,o)) - f(p), \ o \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Daí,

$$\lim_{t \to o} \frac{F(\Phi(t,o)) - F(p)}{t} = \lim_{t \to o} \frac{f(\Phi(t,o)) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(p), \text{ i.e.,}$$

existe $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$.

Analogamente, $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$.

Portanto, F é diferenciável em p (classe C^∞) e

$$dF(p) = df(p) = \omega(p).$$

Como $p \in U$ é arbitrário, F é diferenciável em U e $dF = \omega$. ∎

Consideremos na superfície N o sistema de parametrizações locais $\{\Phi_i, U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\Phi_i : D(o,3) \longrightarrow U_i \quad \text{e} \quad N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(D(o,1)) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i(1).$$

Suponhamos que existam funções de classe C^∞, $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$, e constantes c_{ji}, definidas para todo par ordenado (j,i) tais que $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1) \neq \phi$, satisfazendo

$$f_i(x) - f_j(x) = c_{j,i} \quad \text{para todo ponto x numa vizinhança aberta de } \overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1), \ i,j \in \mathbb{N}. \qquad (21)$$

Definimos a forma fechada ω, em N, por

$$\omega\Big|_{B_i(1)} = df_i \ , \ i \in \mathbb{N} \tag{22}$$

(ω está bem definida, por (21)).

PROPOSIÇÃO 6: Sejam γ poligonal fechada em N, com vértices p_{n_1}, p_{n_2}, ..., p_{n_k}, $n_k = n_1$; e ω forma fechada em N dada por (22). Então,

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k-1} c_{n_{i+1}, n_i}$$

Prova:

Usando a notação da definição 6 (em I.2),

$$\gamma = \gamma_{n_1,n_2} \cdot \gamma_{n_2,n_3} \cdots \gamma_{n_{k-1},n_k} \tag{23}$$

Para cada i = 1,2,...,k-1, tomemos um ponto z_i no segmento $\gamma_{n_i,n_{i+1}}$, tal que $z_i \in \overline{B}_{n_i}(1) \cap \overline{B}_{n_{i+1}}(1)$; e decomponhamos o segmento $\gamma_{n_i,n_{i+1}}$ em dois arcos $\gamma^1_{n_i,n_{i+1}}$ e $\gamma^2_{n_i,n_{i+1}}$, de p_{n_i} a z_i e de z_i a $p_{n_{i+1}}$, respectivamente.

Pela propriedade p_2, por (22) e (21), segue que:

$$\int_{\gamma_{n_i,n_{i+1}}} \omega = \int_{\gamma^1_{n_i,n_{i+1}}} df_{n_i} + \int_{\gamma^2_{n_i,n_{i+1}}} df_{n_{i+1}} =$$

$$= f_{n_i}(z_i) - f_{n_i}(p_{n_i}) + f_{n_{i+1}}(p_{n_{i+1}}) - f_{n_{i+1}}(z_i) =$$

$$= f_{n_{i+1}}(p_{n_{i+1}}) - f_{n_i}(p_{n_i}) + c_{n_{i+1},n_i} \tag{24}$$

Por (23), (24) e p_2:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\gamma_{n_i, n_{i+1}}} \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left[f_{n_{i+1}}(p_{n_{i+1}}) - f_{n_i}(p_{n_i}) + c_{n_{i+1}, n_i} \right] =$$

$$= f_{n_k}(p_{n_k}) - f_{n_1}(p_{n_1}) + \sum_{i=1}^{k-1} c_{n_{i+1}, n_i}$$

Como $n_k = n_1$,

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k-1} c_{n_{i+1}, n_i} . \blacksquare$$

I.4 - ISOMORFISMO DE DE RHAM

Sejam M superfície compacta, $\{\phi_i, B_i(3)\}_{i=1,2,\ldots,m}$ sistema de parametrizações locais de M, como na proposição 1, que será indexado de tal maneira que $B_i(1) \cap B_{i+1}(1) \neq \phi$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$; onde pode ocorrer $B_i(1) = B_{i+1}(1)$.

Seja G(S) o grupo livre abeliano que tem como base o conjunto dos segmentos orientados $[p,q]$ conforme definição 5 e seja H o subgrupo dos elementos das formas $[p,p]$ e $[p,q] + [q,p]$.

Chamaremos de $C_1(S)$ ao grupo quociente $G(S)_{/H}$ e denotaremos a classe $[p,q] + H$ por (p,q). Seja $C_o(S)$ o grupo livre abeliano que tem como base o conjunto S. Consideremos o homomorfismo

$$\partial : C_1(S) \longrightarrow C_o(S), \text{ induzido por}$$

$$\partial([p,q]) = q - p$$

Chamaremos de $Z_1(S)$ ao núcleo de ∂.

DEFINIÇÃO 9:

(i) Um elemento de G(S) é chamado uma <u>CADEIA</u>.

(ii) Um elemento de $Z_1(S)$ é chamado um <u>CICLO</u>.

<u>PROPOSIÇÃO 7</u>:

(i) $C_1(S)$ é grupo livre

(ii) Fixando p_1 como ponto base, todo ciclo é da forma

$(q_1,q_2) + (q_2,q_3) + \dots + (q_k,q_{k+1})$, onde $q_1 = q_{k+1} = p_1$ e

q_i é vizinho de q_{i+1}, $i = 1,2,\dots, k$.

Prova:

(i) Ordenamos o conjunto S e definimos o conjunto

$T = \{(p,q);$ precede q, $p \neq q$ e p e q são vizinhos$\}$

É fácil ver que T é uma base de $C_1(S)$.

(ii) Seja $\xi = (q_1,q_1') + (q_2,q_2') + \dots + (q_{s-1}, q_{s-1}') + (q_s,q_s')$ um ciclo.

Queremos mostrar que $q_i' = q_{i+1}$, $i = 1,2,\dots,s$, onde $q_{s+1} = q_1$.

Suponhamos que exista um inteiro ℓ, $o \leq \ell \leq s$ tal que $q_\ell' \neq q_{\ell+1}$. Seja $o \leq k \leq s$ o menor inteiro tal que $q_k' \neq q_{k+1}$. Como ξ é um ciclo,

$$\therefore\ o = \partial\xi = \sum_{i=1}^{s} (q_s' - q_s) =$$

$$= q_k' - q_1 + \sum_{i=k+1}^{s} (q_s' - q_s) \qquad (25)$$

Decorre daí que existe $j \in \{k+1, \dots, s+1\}$ tal que $q_k' = q_j$. Se $k = s$, está pronto, pois $j = k+1 = s+1$ e, por (25),

$$o = q_k' - q_1 = q_{s+1} - q_1.$$

Se $k \neq s$, reordenamos a "soma" e os índices, obtendo:

$$\xi = (q_1,q_2) + (q_2,q_3) + \ldots + (q_k,q_{k+1}) + (q_{k+1},q'_{k+1}) + \ldots + (q_s,q'_s)$$

Se existe um inteiro $k + 1 \leq \ell \leq s$ tal que $q'_\ell \neq q_{\ell+1}$, repetimos o processo.

Procedendo desta maneira sucessivamente, obtemos que o ciclo ξ é da forma

$$\xi = (q_1,q_2) + (q_2,q_3) + \ldots + (q_s,q_{s+1}),\ \text{onde } q_{s+1} = q_1.$$

Se $q_1 = p_1$, está pronto.

Se $q_1 \neq p_1$, existe $i \in \{2,3,\ldots,m\}$ tal que $q_1 = p_1$, e o ciclo ξ é igual ao ciclo

$$\xi' = (p_1,p_2) + (p_2,p_3) + \ldots + (p_{i-1}, p_i) + (q_1,q_2) + \ldots + (q_s,q_1) +$$
$$+ (p_i,p_{i-1}) + (p_{i-1},p_{i-2}) + \ldots + (p_2,p_1). \blacksquare$$

PROPOSIÇÃO 8:

A seqüência,

$$0 \longrightarrow Z_1(S) \longrightarrow C_1(S) \xrightarrow{\partial} C_0(S) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \text{ onde}$$

$\delta: C_0(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é dada por $\delta(\Sigma n_i s_i) = \Sigma n_i$, é exata.

Prova:

Pela definição de $Z_1(S)$, resta mostrar que δ é sobrejetora e $\partial(C_1(S)) = \ker \delta$.

Que ∂ é sobrejetora é óbvio. Mostremos, então, que $\partial(C_1(S)) = \ker \delta$.

Seja $\sum_{i=1}^{n} n_i (p_i,q_i) \in C_1(S)$.

$$\delta \circ \partial\Big(\sum_{i=1}^{n} n_i(p_i,q_i)\Big) = \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} n_i\ (q_i - p_i)\Big) =$$
$$= \delta\Big(\sum_{i=1}^{n} n_i q_i - \sum_{i=1}^{n} n_i p_i\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \eta_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i = o$$

Por outro lado, seja $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i$ em $C_o(S)$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = o$ (26)

Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, tomemos a cadeia

$(p_1, p_2) + (p_2, p_3) + \ldots + (p_{n_{i-1}}, p_{n_i})$, onde $p_{n_i} = s_i$.

As somas formais

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i((p_1,p_2) + (p_2,p_3) + \ldots + (p_{n_{i-1}}, s_i))$ são elementos de $C_1(S)$, tais que:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i((p_1,p_2) + \ldots + (p_{n_{i-1}}, s_i))\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\partial((p_1,p_2) + \ldots + (p_{n_{i-1}}, s_i))\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (s_i - p_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) p_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i, \text{ por } (26).$$

Logo, a seqüência é exata.∎

Para cada ponto p_1 pertencente a S, fixamos uma poligonal Λ_{p_i} em M, unindo o ponto p_1 ao ponto p_i, $i = 1,2,\ldots,m$ tal que:

(i) Λ_{p_1} é identicamente constante.

(ii) Se $p_i = p_j$, $\Lambda_{p_i} = \Lambda_{p_j}$

Sejam $\Pi_1(M)$ o grupo fundamental de M e $\Pi_1'(M)$ o grupo $\Pi_1(M)$ abelianizado.

Lembramos que G(S) é o grupo libre abeliano gerado pelos segmentos orientados $[p,q]$ e definimos o homomorfismo:

h_1: $G(S) \to \Pi_1'(M,p_1)$, dado por

$$h_1(|p_i,p|) = \overline{\Lambda_i \cdot \gamma_{p_i,p_j} \cdot \Lambda_j^{-1}}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m,$$

onde γ_{p_i,p_j} denota o segmento orientado em M de origem p_i e extremidade p_j (para diferenciar do elemento $[p_i,p_j] \in G(S)$) e $\overline{\Lambda_{p_i} \cdot \gamma_{p_i,p_j} \cdot \Lambda_{p_j}^{-1}}$ denota a classe de equivalência homotópica, em M, da poligonal $\Lambda_{p_i} \cdot \gamma_{p_i,p_j} \cdot \Lambda_{p_j}$.

O núcleo H da aplicação natural $G(S) \longrightarrow C_1(S)$ está contido no núcleo do homomorfismo h_1. Com efeito: Dados p, q $\in$ S, temos

$$h_1([p,p]) = \overline{\Lambda_p \cdot \gamma_{p,p} \cdot \Lambda_p^{-1}} = \overline{o}$$

$$h_1([p,q] + [q,p]) = \overline{\Lambda_p \cdot \gamma_{p,q} \cdot \gamma_{q,p} \cdot \Lambda_p^{-1}} = \overline{o}$$

Conseqüentemente, podemos passar ao quociente obtendo o homomorfismo induzido:

$$h_2 \colon C_1(S) \longrightarrow \Pi_1' \, (M, p_1). \qquad (27)$$

PROPOSIÇÃO 9: A restrição h do homomorfismo h_2 ao conjunto $Z_1(S)$ $\quad (h = h_2|_{Z_1(S)} \colon Z_1(S) \longrightarrow \Pi_1'(M,p_1))$ é sobrejetor.

Prova:

Seja δ uma curva fechada em M com origem no ponto p_1. Pela proposição 3 (em I.2), existe uma poligonal fechada γ em M, com vértices $q_1, \ldots, q_n$, onde $q_1 = q_n = p_1$, tal que $\overline{\delta} = \overline{\gamma}$.

Seja $\xi \in Z_1(S)$ o ciclo representado por

$\xi = (q_1,q_2) + (q_2,q_3) + \ldots + (q_{n-1}, q_n)$.

Aplicando o homomorfismo h, temos:

$$h(\xi) = \overline{\Lambda_{p_1} \cdot \gamma_{q_1,q_2} \cdot \Lambda_{q_2}^{-1} \cdot \Lambda_{q_2} \cdot \gamma_{q_2,q_3} \cdot \Lambda_{q_3}^{-1} \cdot \ldots \cdot \Lambda_{q_{n-1}} \cdot \gamma_{q_{n-1},q_n} \cdot \Lambda_{p_1}^{-1}} =$$

$$= \overline{\gamma_{q_1,q_2} \cdot \gamma_{q_2,q_3} \cdot \ldots \cdot \gamma_{q_{n-1},\, q_n}} = \overline{\gamma} = \overline{\delta}. \blacksquare$$

Como corolário desta proposição, temos o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 1</u>: A dimensão sobre R do espaço dos homomorfismos de $\Pi_1(M,p_1)$ em R $(H^1(M,R))$ é finita.

Prova:

Sendo M uma superfície compacta, o grupo livre G(S) é obviamente finitamente gerado. Daí, $C_1(S)$ também é finitamente gerado. Por um teorema de álgebra, como $Z_1(S) \subset C_1(S)$ como subgrupo e $C_1(S)$ é finitamente gerado, $Z_1(S)$ é finitamente gerado. Sendo $h\colon Z_1(S) \to \Pi_1'(M,p_1)$ um homomorfismo sobrejetor, decorre daí que $\Pi_1'(M,p_1)$ é finitamente gerado. Finalmente, observemos que $H^1(M,\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}\,(\Pi_1(M,p_1),\ \mathbb{R}) \approx \mathrm{Hom}\,(\Pi_1'(M,p_1),\ \mathbb{R})$.

<u>PROPOSIÇÃO 10</u>: Seja $\alpha\colon \Pi_1(M\ p_1) \to \mathbb{R}$ homomorfismo. Existe um sistema de números reais $\{\zeta(n,j)\}_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ satisfazendo (8) (proposição 2), tal que, para toda poligonal fechada γ de vértices $p_{n_o}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_k}$, onde $p_{n_o} = p_{n_k} = p_1$, se tem

$$\alpha_\gamma = \sum_{j=o}^{k-1} \zeta(n_{j+1},\ n_j), \text{ sendo } \alpha_\gamma = \alpha(\overline{\gamma}).$$

Prova:

Consideremos o homomorfismo

$$\phi = \alpha' \circ h_2\colon C_1(S) \to \mathbb{R};\ \text{com } h_2\colon C_1(S) \to \Pi_1'(M,p_1),$$

definido em (27), onde α' é o homorfismo módulo os comutadores.

Se $\overline{B}_i(1) \cap \overline{B}_j(1) \neq \phi$, definimos

$$\zeta(i,j) = \phi((p_j,p_i)), \qquad i,j \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Mostremos que o sistema $\{\zeta(i,j)\}_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ satisfaz (8):

Suponhamos que $\overline{B}_r(1) \cap \overline{B}_n(1) \neq \phi$, $\overline{B}_n(1) \cap \overline{B}_s(1) \neq \phi$ e

$\overline{B}_r(1) \cap \overline{B}_s(1) \neq \phi$. (28)

$$\zeta(r,n) + \zeta(n,s) + \zeta(s,r) = \Phi((p_n,p_r)) + \Phi((p_s,p_n)) + \Phi((p_r,p_s)) =$$

$$= \Phi((p_n,p_r) + (p_r,p_s) + (p_s,p_n)) \qquad (29),$$

pois Φ homomorfismo e $C_1(S)$ é grupo livre abeliano.

Pela escolha do sistema de parametrizações locais, de (28) segue que

$$\overline{B}_r(1) \cup \overline{B}_n(1) \cup \overline{B}_s(1) \subset B_i(2), \qquad i = r,n,s.$$

Como $B_r(2)$ é simplesmente conexo, e a poligonal fechada λ de vértices p_n, p_r, p_s está inteiramente contida em $B_r(2)$, temos λ é homotópica a um ponto em $B_r(2)$. Daí e de (29),

$$\zeta(r,n) + \zeta(n,s) + \zeta(s,r) = \Phi((p_n,p_r) + (p_r,p_s) + (p_s,p_n)) =$$

$$= \alpha(\overline{\Lambda_{p_n} \cdot \lambda \cdot \Lambda_{p_n}^{-1}}) = \alpha(\overline{\Lambda_{p_n} \cdot \Lambda_{p_n}^{-1}}) =$$

$$= \alpha(\overline{o}) = o.$$

Assim, o sistema $\{\zeta(i,j)\}_{1\leq i,j\leq m}$ satisfaz (8). Além disso, este sistema é tal que, dada a poligonal fechada γ em M de vértices $p_{n_o}, p_{n_1}, \dots, p_{n_k}$, onde $p_{n_o} = p_{n_k} = p_1$, pela proposição 9, temos que:

$$\alpha_\gamma = \Phi\,((p_{n_o}, p_{n_1}) + (p_{n_1}, p_{n_2}) + \dots + (p_{n_{k-1}}, p_{n_k})) =$$

$$= \sum_{j=o}^{k-1} \Phi(p_{n_j}, p_{n_{j+1}})$$

$$= \sum_{j=o}^{k-1} \zeta(n_{j+1}, n_j). \blacksquare$$

Denotaremos o espaço dos homomorfismos do grupo fundamental de $M(\Pi_1(M,p_1))$ no grupo dos números reais por $H^1(M,\mathbb{R})$ e o espaço quociente do espaço das formas fechadas em M, módulo o subespaço das formas exatas por $H^1_{DR}(M)$.

Com estas notações, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} I: H^1_{DR}(M) &\longrightarrow H^1(M,\mathbb{R}), \quad \text{por} \\ I(\overline{\omega})(\overline{\gamma}) &= \int_\gamma \omega, \quad \text{onde} \end{aligned} \tag{30}$$

$\overline{\omega} \in H^1_{DR}(M)$ e ω é um representante da classe $\overline{\omega}$,

$\overline{\gamma} \in \Pi_1(M,p_1)$ e γ é um representante da classe $\overline{\gamma}$.

Pela proposição 4, para cada forma fechada ω em M, e para cada $\overline{\gamma} \in \Pi_1(M,p_1)$, a aplicação

$$\overline{\gamma} \longmapsto \int_\gamma \omega,$$ onde γ é um representante de $\overline{\gamma}$, está bem definida. Para mostrar que I está, portanto, bem definida, lembramos que se ω_1 e ω_2 são representantes da classe $\overline{\omega}$, a diferença $\omega_1 - \omega_2$ é uma forma exata em M. Daí, pelas propriedades p_1 e p_4, para toda curva fechada γ em M, temos:

$$\int_\gamma \omega_1 - \int_\gamma \omega_2 \overset{p_4}{=} \int_\gamma \omega_1 - \omega_2 \overset{p_1}{=} 0.$$

<u>TEOREMA DE DE RHAM:</u>

A aplicação $I: H^1_{DR}(M) \longrightarrow H^1(M,\mathbb{R})$ dada em (30) é um isomorfismo.

Prova:

Pelas propriedades da integração de formas fechadas ao longo de uma curva em M, é fácil ver que I é um homomorfismo.

Da proposição 5 segue que o homomorfismo I é injetor.

Resta mostrar a sobrejetividade de I.

Se $\alpha \in H^1(M,\mathbb{R})$, pela proposição 10, existe um sistema de números reais $\{\zeta(i,j)\}_{1 \le i,j \le m}$, satisfazendo (8) (proposição 2), tal que, para toda poligonal fechada γ em M de vértices $p_1 = p_{n_o}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_k} = p_1$, tem-se:

$$\alpha(\bar{\gamma}) = \alpha_\gamma = \sum_{j=o}^{k-1} \zeta(n_{j+1}, n_j).$$

Dado tal sistema $\{\zeta\ (i,j)\}_{1\le i,j\le m}$, pela proposição 2 existe uma família de funções $f_i\colon B_i(3) \longrightarrow R$ de classe C^∞, satisfazendo:

$$f_i(x) - f_j(x) = \zeta(j,i)\ ,$$ para todo ponto x numa vizinhança aberta de $\bar{B}_i(1) \cap \bar{B}_j(1)$.

Seja ω forma fechada em M, dada por

$$\omega\Big|_{B_i(1)} = df_i.$$

Pela proposição 6, dada a poligonal fechada γ em M de vértices $p_1 = p_{n_o}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_k} = p_1$, temos que

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=o}^{k-1} \zeta(n_{j+1}, n_j) = \alpha_\gamma.$$

A tese segue, portanto, da proposição 3, que diz que toda curva fechada em M com origem no ponto p_1 é homotópica a uma poligonal fechada em M com origem no ponto p_1. ∎

CAPÍTULO II

DECOMPOSIÇÃO DE 1-FORMAS DIFERENCIÁVEIS FECHADAS EM UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN COMPACTA

Seja S uma superfície de Riemann. Então, S possui uma estrutura de superfície conexa, isto é, estrutura de variedade diferenciável de dimensão dois e classe C^∞. Se z é coordenada local de S, tomaremos x e y coordenadas locais tais que x é a parte real e y a parte imaginária da coordenada complexa z. Temos, então, em S todos os conceitos de formas (reais) diferenciais, formas diferenciáveis, formas de classe C^∞, a diferencial exterior, etc., que suporei conhecidos. Chamo atenção que, neste capítulo, forma não significa forma de classe C^∞. Aqui, uma forma diferencial não necessita, sequer, ser diferenciável.

O objetivo deste capítulo é mostrar que toda 1-forma diferenciável C^∞ fechada ω, numa superfície de Riemann compacta R, pode ser decomposta de maneira única como $\omega = \omega_h + df$, onde ω_h é harmônica e $f \in C^\infty(R)$. Iniciaremos tomando uma superfície de Riemann não necessariamente compacta S e mostraremos a existência da decomposição (não necessariamente única) para 1-formas diferenciáveis fechadas ω pertencentes ao espaço de Hilbert $L^2(S)$ e daí, deduziremos o teorema para 1-formas diferenciáveis fechadas numa superfície de Riemann compacta, onde teremos a unicidade.

II.1 - FORMAS HARMONICAS

Seja S superfície de Riemann não necessariamente compacta. Dado um ponto $p \in S$, consideremos o plano $T_p(S)$, tangente a S no ponto p. Sejam $z = x + iy$ coordenada local de S em p, D o disco $|z| < 1$ e $\phi : D \to S$ parametrização local definida por z, tal que $\phi(o) = p$.

Para todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$d\phi(o)(v) \overset{\text{not.}}{=} d\phi_o(v), \text{ pertence a } T_p(S).$$

Daí, considerando a base canônica $\{(1,0),(o,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, temos

$$d\phi_o(1,o) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,o)\Big|_{x = o} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$d\phi_o(o,1) = \frac{\partial}{\partial y} \phi(o,y)\Big|_{y = o} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial}{\partial y}$$

É fácil ver que $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ é uma base de $T_p(S)$ relativa à parametrização local ϕ.

Para todo ponto $p \in S$, considerando-se a coordenada local $z = x + iy$ em p e fazendo

$$i\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad i\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad T_p(S) \text{ tem estrutura de}$$

espaço vetorial complexo. Com efeito, tomando-se em p a coordenada local $\zeta = \xi + i\eta$, a mudança de coordenadas $z(\zeta) = x(\xi,\eta) + iy(\xi,\eta)$ é uma função analítica, e, portanto, satisfaz às equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}$.

Daí, $$i\frac{\partial}{\partial\xi} = i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} \quad , \quad e$$

$$i\frac{\partial}{\partial\eta} = i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} = -\frac{\partial}{\partial\xi}$$

Seja ω uma 1-forma diferencial em S. Dado um ponto $p \in S$, ω_p denotará a 1-forma diferencial ω aplicada ao ponto p.

DEFINIÇÃO 1: Dada a 1-forma diferencial ω em S, definimos a estrela (de Hodge) da forma ω, como a 1-forma diferencial $*\omega$ dada por

$$*\omega_p(u) = -\omega_p(i\,u), \forall p \in S, \forall u \in T_p(S).$$

O operador $\omega \mapsto *\omega$ é chamado operador estrela de Hodge.

As seguintes propriedades do operador estrela de Hodge são de fácil verificação:

E1: O operador estrela é linear, isto é,

$*(\omega_1+\omega_2) = *\omega_1 + *\omega_2$

$*(\alpha\omega) = \alpha\, *\omega$, para todo $\alpha \in R$.

E2: $**\omega = *(*\omega) = -\omega$.

E3: Se, em coordenadas locais, $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$

$*\omega = -q\ (x,y)\ dx + p\ (x,y)\ dy$.

DEFINIÇÃO 2:

(i) Se $f \in C^\infty(S)$, a forma diferenciável $\omega = *df$ é dita forma coexata.

(ii) Se ω é uma forma diferenciável (de classe C^∞) tal que $d\,{*\omega} = 0$, ω é dita forma <u>cofechada</u>.

OBSERVAÇÃO 1: Se ω é uma forma diferenciável cofechada, $*\omega$ é fechada e portanto, localmente exata. Daí, localmente, $*\omega = df$, onde $f \in C^\infty(S)$. Pelas propriedades E2 e E1 do operador estrela, temos

$\omega = -{**\omega} = -{*df} = *d(-f)$, isto é, ω é localmente coexata.

<u>DEFINIÇÃO 3</u>: Uma 1-forma diferenciável (de classe C^∞) ω é dita <u>harmônica</u> se e somente se ω é fechada e cofechada, isto é, $d\omega = 0$ e $d{*\omega} = 0$.

OBSERVAÇÃO 2: Se ω é uma forma diferenciável harmônica dada localmente por $\omega = p\,dx + q\,dy$, então, localmente, temos

$$0 = d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy \quad \text{e}$$
$$0 = d{*\omega} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Portanto, $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}$, ou seja, a função $q + ip$ é uma função holomorfa da variável $z = x + iy$. Reciprocamente, se em cada disco paramétrico temos $\omega = p\,dx + q\,dy$, onde p e q são funções harmônicas conjugadas, então ω é uma forma diferenciável harmônica.

II.2 - O ESPAÇO $L^2(S)$:

Conforme havia dito na introdução deste capítulo, antes de provar o teorema da decomposição de formas diferenciáveis fechadas numa superfície de Riemann compacta, provarei um teorema de decomposição de formas fechadas numa superfície de Riemann qualquer S. Porém, na superfície S, não basta que a 1-forma diferenciável seja fechada, é preciso que ela pertença ao espaço de Hilbert $L^2(S)$, cuja definição é o objetivo deste parágrafo.

DEFINIÇÃO 4: Uma 1-forma diferencial ω em S será dita mensurável se, localmente, $\omega = p\,dx + q\,dy$, onde p e q são funções mensuráveis.

Sejam $\{U_n\}_{n \in N}$ cobertura paramétrica de S localmente finita e $\{e_n\}_{n \in N}$ partição da unidade de S de classe C^∞ relativa à cobertura $\{U_n\}_{n \in N}$. Consideremos $x = x(n)$ e $y = y(n)$ coordenadas locais em U_n.

Seja ω forma diferencial mensurável em S dada, em U_n, por $\omega = p_n\,dx + q_n\,dy$. Então, em U_n, $\omega{*}\omega = (p_n^2 + q_n^2)\,dx\,dy$.

Consideremos as seguintes condições:

(i) $\forall n \in N$, p_n e q_n pertencem ao espaço das funções de quadrado integrável (à Lebesque) em U_n, $L^2(U_n)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} (p_n^2 + q_n^2)\, e_n\, dxdy < +\infty$.

Dada uma 1-forma diferencial mensurável ω em S, é imediato que a condição (i) e a soma em (ii) independem da cobertura $\{U_n\}_{n \in N}$.

Portanto, com estas notações, podemos definir:

DEFINIÇÃO 5: $\omega{*}\omega$ é integrável (à Lebesque) em S se e somente se as condições (i) e (ii) se verificam, e a integral de $\omega{*}\omega$ em S é denotada e definida por

$$\int_S \omega{*}\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} (p_n^2 + q_n^2)\, e_n\, dxdy.$$

É fácil ver que o conjunto das formas diferenciais ω, em S, mensuráveis e tais que $\omega * \omega$ é integrável, é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, com as operações usuais de adição e multiplicação por uma constante. Neste espaço, consideremos a relação $\sim$ definida por: $\omega_1 \sim \omega_2$ se e somente se $\omega_1 = \omega_2$ a menos de um conjunto de medida nula (um conjunto $A \subset S$ tem medida nula se sua imagem, em $\mathbb{R}^2$, por cada parametrização local tem medida nula); em outras palavras, $\omega_1 \sim \omega_2$ se e somente se $\omega_1 = \omega_2$ em quase todo ponto.

É claro que a relação $\sim$ é de equivalência.

<u>DEFINIÇÃO 6</u>: O espaço $L^2(S)$ é o espaço quociente das formas diferenciais mensuráveis ω em S tais que $\omega * \omega$ é integrável, módulo a relação de equivalência $\sim$; ou seja, é o espaço obtido daquele identificando-se as formas que coincidem em quase todo ponto.

Denotaremos a classe da 1-forma ω em $L^2(S)$ por $[\omega]$. Consideremos a operação (,) em $L^2(S)$, definida por:

$$([\omega_1], [\omega_2]) = \int_S \omega_1 * \omega_2. \qquad (1)$$

Como as integrais sobre S de duas formas que coincidem em quase todo ponto são iguais, a operação (,) está bem definida. Além disso, pelas propriedades da integração à Lebesque, é fácil ver que (,) define um produto interno em $L^2(S)$.

Por simplicidade de notação, ω representará daqui em diante a 1-forma ou sua classe em $L^2(S)$, ficando claro no contexto se se trata da forma ou de sua classe em $L^2(S)$. Além disso, nas definições dadas em termos de representantes das classes, omitirei as verificações de que independem do representante escolhido, por serem imediatas.

TEOREMA 1: O espaço $L^2(S)$ com as operações usuais de adição de 1-formas diferenciais, multiplicação de uma 1-forma por uma constante e o produto interno (1), é um espaço de Hilbert.

Prova:

Resta mostrar que $L^2(S)$ é completo com relação à norma proveniente do produto interno.

Seja $\{\omega_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ seqüência de Cauchy em $L^2(S)$. Portanto, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| \omega_m - \omega_k \| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad m, k \geq n_o.$$

Daí, para toda região V com fecho $\overline{V}$ compacto em S, se $m, k \geq n_o$, temos:

$$\| \omega_m - \omega_k \|_V \leq \| \omega_m - \omega_k \| < \varepsilon, \text{ onde} \tag{2}$$

$\| \quad \|_V$ denota a norma restrita à região V.

Seja $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ família localmente finita de abertos paramétricos que cobre S, tal que o fecho de cada U_i, $\overline{U}_i$ é compacto em S.

Se $\omega_m = p_m^{(i)}\, dx + q_m^{(i)}\, dy$ em U_i, por (2), temos que:

$$\| \omega_m - \omega_k \|_{U_i} = \left\{ \int_{U_i} \{ |p_m^{(i)} - p_k^{(i)}|^2 + |q_m^{(i)} - q_k^{(i)}|^2 \}\, dx\, dy \right\}^{1/2} < \varepsilon, \quad \text{se } m, k \geq n_o.$$

Em particular,

$$\int_{U_i} |p_m^{(i)} - p_k^{(i)}|^2\, dxdy < \varepsilon^2 < \varepsilon, \quad \text{se} \quad m, k \geq n_o.$$

Como o espaço das funções de quadrado integrável em U_i, $L^2(U_i)$, é completo, existe $p^{(i)}$ tal que $p_m^{(i)} \to p^{(i)}$ em $L^2(U_i)$. Analogamente, existe $q^{(i)}$ tal que $q_m^{(i)} \to q^{(i)}$ em $L^2(U_i)$.

Sejam $V_n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. A família $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família crescente de regiões com fecho compacto em S, tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Definimos em V_n a 1-forma diferencial ω^n dada por $\omega^n = p^{(i)}dx + q^{(i)}dy$ em U_i. ω^n está bem definida. Com efeito, suponhamos que $U_i \cap U_j \neq \phi$ e $\omega^n = p^{(j)}dx' + q^{(j)}dy'$ em U_j.

Por definição, $p^{(j)} = \lim_m p_m^{(j)}$ e $q^{(j)} = \lim_m q_m^{(j)}$, com $\omega_m = p_m^{(j)}\, dx' + q_m^{(j)}\, dy'$, em U_j. Como para cada m, ω_m está bem definida, em $U_i \cap U_j$, as funções $p_m^{(j)}$ e $q_m^{(j)}$ satisfazem às seguintes equações:

$$p_m^{(j)}(x',y') = p_m^{(i)}\,(x(x',y'),\, y(x',y'))\,\frac{\partial x}{\partial x'} + q_m^{(i)}\,(x(x',y'),\, y(x',y'))\,\frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$q_m^{(j)}(x',y') = p_m^{(i)}\,(x(x',y'),\, y(x',y'))\,\frac{\partial x}{\partial y'} + q_m^{(i)}\,(x(x',y'),\, y(x',y'))\,\frac{\partial y}{\partial y'}.$$

Tomando os limites quando m tende a infinito, temos

$$p^{(j)} = \lim_{\to m} p_m^{(j)} = p^{(i)}\,\frac{\partial x}{\partial x'} + q^{(i)}\,\frac{\partial y}{\partial y'}$$

$$q^{(j)} = \lim_m q_m^{(j)} = p^{(i)}\,\frac{\partial x}{\partial y'} + q^{(i)}\,\frac{\partial y}{\partial y'}, \text{ e portanto,}$$

$$\omega^n = p^{(i)}\, dx + q^{(i)}dy = p^{(j)}\, dx' + q^{(j)}dy' \text{ em } U_i \cap U_j.$$

Seja $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ partição da unidade de V_n, de classe C^∞, relativa à cobertura $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$. Temos que,

$$\int_{V_n} (\omega^n)^*(\omega^n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} (|p^{(i)}|^2 + |q^{(i)}|^2)\, e_i \, dxdy < +\infty,$$

pois $p^{(i)}, q^{(i)} \in L^2(U_i)$, para cada $i = 1,2,\ldots,n$. Portanto, $\omega^n \in L^2(V_n)$. Mostremos que $\omega_m \to \omega^n$ em $L^2(V_n)$.

$$\|\omega_m - \omega^n\|^2_{V_n} = \int_{V_n} (\omega_m - \omega^n)^*(\omega_m - \omega^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} \{|p_m^{(i)} - p^{(i)}|^2 + |q_m^{(i)} - q^{(i)}|^2\}\, e_i \, dxdy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \int_{U_i} \{|p_m^{(i)} - p_k^{(i)}|^2 + |q_m^{(i)} - q_k^{(i)}|^2\}\, e_i \, dxdy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|\omega_m - \omega_k\|^2_{V_n}.$$

Por (2), daí segue que $\|\omega_m - \omega^n\|_{V_n} < \varepsilon$, se $m \geq n_0$. (3).
(Observe que a desigualdade em (3) independe de V_n).

Definimos ω em S por $\omega = \omega^n$ em V_n. ω está bem definida pela unicidade do limite em $L^2(V_n)$. Além disso, ω é mensurável pois, para cada i, a restrição $\omega|_{U_i} = \omega^n|_{U_i} = p^{(i)}dx + q^{(i)}dy$ e $p^{(i)}$ e $q^{(i)}$ são funções mensuráveis em U_i.

Resta mostrar que $\omega \in L^2(S)$ e $\omega_m \to \omega$ em $L^2(S)$. Pela definição da família $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\int_S \omega^*\omega = \sup_n \int_{V_n} \omega^*\omega = \sup_n \|\omega\|_{V_n}.$$

Ora, para todo $n \in \mathbb{N}$, por (3), $\|\omega - \omega_m\|_{V_n} < \varepsilon$, se $m \geq n_0$.

Em particular,

$$\|\omega\|_{V_n} \leq \varepsilon + \|\omega_{n_0}\|_{V_n} < \varepsilon + \|\omega_{n_0}\|_S < +\infty, \text{ para todo } n.$$

Portanto, $\int_S \omega * \omega = \sup_n \|\omega\|_{V_n} < +\infty$.

Além disso, $\|\omega - \omega_m\|_S = \sup_n \|\omega - \omega_m\|_{V_n} \leq \varepsilon$, se $m \geq n_0$.

Logo, $\omega_m \to \omega$ em $L^2(S)$, isto é, $L^2(S)$ é completo.∎

II.3 - DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO $L^2(S)$

Seja $C^\infty = C^\infty(S)$ o espaço das funções de classe C^∞ na variedade S. Denotando por $C_o^\infty = C_o^\infty(S)$ o subespaço de $C^\infty(S)$ das funções que têm suporte compacto em S, definimos os seguintes subespaços de $L^2(S)$:

(a) $E = E(S)$ é o fecho em $L^2(S)$ do espaço das formas diferenciáveis exatas df, com $f \in C_o^\infty(S)$.

(b) $E^* = E^*(S)$ é o fecho em $L^2(S)$ do espaço das formas coexatas $*df$, com $f \in C_o^\infty(S)$.

(c) $H = E^\perp \cap (E^*)^\perp$, onde $E^\perp$ e $(E^*)^\perp$ denotam os complementos ortogonais de E e E*, respectivamente, em $L^2(S)$.

<u>LEMA 1</u>: Sejam $f \in C^\infty(S)$ e ω 1-forma diferenciável de classe C^∞ em S. Se f ou ω tem suporte compacto K em S, então,

$$\int_S d(f\omega) = \int_S f\, d\omega - \int_S \omega\, df = o.$$

Prova:

Seja $\{D_i\}_{i=1,2,\ldots,k}$ cobertura de K por discos paramétricos tal que a fronteira de cada D_i é uma curva analítica. Seja $G = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. G é uma região em S com fecho compacto, cuja fronteira ∂G é constituída por um número finito de curvas analíticas por partes.

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_G d(f\omega) = \int_{\partial G} f\omega = o, \text{ pois } f \text{ ou } \omega \text{ se anula em } \partial G,$$
$$\text{pois } \partial G \cap K = \phi$$

Por outro lado,

$$\int_G d(f\omega) = \int_G (df)\omega + \int_G fd\omega = \int_G fd\omega - \int_G \omega df.$$

Portanto, como f ou ω se anula fora de G, temos:

$$o = \int_S d(f\omega) = \int_S fd\omega - \int_S \omega\, df. ■$$

<u>TEOREMA 2</u>: O espaço $L^2(S)$ tem decomposição ortogonal $L^2(S) =$ $= E \oplus E^* \oplus H$.

Prova:

Pela definição de H, H é ortogonal a E e a E*.

Mostremos que E é ortogonal a E*:

Sejam ω pertencente a E e α pertencente a E*. Existem seqüências de funções $\{f_n\}_{n \in N}$ e $\{g_n\}_{n \in N}$ em $C_o^\infty(S)$ tais que $df_n \to \omega$ e $*dg_n \to \alpha$ em $L^2(S)$. Como $L^2(S)$ é espaço de Hilbert, daí segue que

$$(df_n, *dg_n) \to (\omega, \alpha) \qquad (4)$$

Fixando-se $n \in \mathbb{N}$, pela propriedade E2 do operador estrela,

$$(df_n, *dg_n) = \int_S (df_n)^*(*dg_n) = -\int_S (df_n)\,(dg_n).$$

As funções f_n e g_n tem suportes compactos; portanto, pelo lema 1,

$$(df_n, *dg_n) = -\int_S (df_n)\,(dg_n) = -\int_S g_n\, d(df_n) = o.$$

Como n foi tomado arbitrariamente, daí e de (4), $(\omega, \alpha) =$ $= \lim_{n\to\infty} (df_n, *dg_n) = o.$

Portanto, E e E^* são subespaços fechados de $L^2(S)$ tais que E é ortogonal a E^*. Então, como $L^2(S)$ é completo, a soma direta $E \oplus E^*$ também é um subespaço fechado de $L^2(S)$; conseqüentemente temos que $L^2(S) = (E\oplus E^*)\oplus(E\oplus E^*)^{\perp}$.

Resta mostrar que $H = (E\oplus E^*)^{\perp}$.

Sejam $h \in H$, $\gamma_1 \in E$ e $\gamma_2 \in E^*$. Pela bilinearidade do produto interno e pela definição de H,

$$(h, \gamma_1 + \gamma_2) = (h, \gamma_1) + (h, \gamma_2) = o.$$

Ou seja, H está contido em $(E\oplus E^*)^{\perp}$.

Por outro lado, se ω pertence a $(E\oplus E^*)^{\perp}$, quaisquer que sejam $\gamma_1 \in E$ e $\gamma_2 \in E^*$, $(\omega, \gamma_1 + \gamma_2) = o$. Em particular, $(\omega, \gamma_1) = o$ e $(\omega, \gamma_2) = o$. Daí, ω pertence a $E^{\perp}\cap(E^*)^{\perp} = H$, completando a demonstração. ∎

Resulta do teorema 2 que uma forma diferencial qualquer ω pertencente a $L^2(S)$ pode ser decomposta de maneira única como $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + h$, onde $\gamma_1 \in E$, $\gamma_2 \in E^*$ e $h \in H$. Estamos querendo mostrar que H é o subespaço de $L^2(S)$ das formas harmônicas em S. Isto será conseqüência de alguns lemas que veremos a seguir.

<u>LEMA 2</u>: Seja ω 1-forma diferenciável de classe C^{∞} em S.

(i) ω é fechada se e somente se $\omega \in (E^*)^{\perp}$.

(ii) ω é cofechada se e somente se $\omega \in E^{\perp}$.

Prova:

Seja ω uma forma diferenciável fechada em S, isto é, $d\omega = o$. Pelo lema 1, para toda função $f \in C_o^{\infty}(S)$,

$$(\omega, {*df}) = \int_S (\omega)*({*df}) = -\int_S \omega\, df = -\int_S f d\omega = o \qquad (5)$$

Se $\gamma \in E^*$, existe uma seqüência de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_o^\infty(S)$, tal que $\gamma = \lim_{n\to\infty} {*}df_n$. Por (5),

$$(\omega, \gamma) = \lim_{n\to\infty} (\omega, {*}df_n) = o; \quad \text{ou seja, } \omega \in (E^*)^\perp.$$

Reciprocamente, dada $\omega \in (E^*)^\perp$, mostremos que $d\omega = o$. Suponhamos que $d\omega = A(x,y)\,dxdy$, localmente, e que existe um ponto p_o em S tal que $A(p_o) \neq o$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A(p_o) > o$. Como A é contínua, existe uma vizinhança U de p_o em S, tal que $A > o$ em U. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ função de classe C^∞ tal que

$$f > o, \; f(p_o) = 1 \quad e \quad f = o \text{ fora de } U.$$

Temos que $f \in C_o^\infty(S)$ e portanto, pelo lema 1,

$$o = (\omega, {*}df) = -\int_S \omega\, df = -\int_S f d\omega = -\int_U f\, A\, dxdy < o;$$

o que é um absurdo.

(ii) prova análoga. ∎

<u>LEMA 3</u>: Seja ω 1-forma diferenciável de classe C^∞ em S. Então, ω pertence a H se e somente se ω é harmônica.

Prova:

Pelo lema 2, $\omega \in H = E^\perp \cap (E^*)^\perp$ se e somente se $d\omega = o = d{*}\omega$, isto é, se e somente se ω é harmônica.

Denotemos por $C^\infty = C^\infty(S)$ o espaço das 1-formas diferenciáveis em S de classe C^∞. Embora esta notação também esteja sendo usada para denotar o espaço das funções de classe C^∞ em S, ficará claro no contexto se se trata do espaço de funções ou de 1-formas diferenciáveis.

Pelo lema 3, o subespaço das formas harmônicas de $L^2(S)$ é o subespaço $C^\infty \cap H(S)$. Portanto, para mostrar que o subespaço das formas harmônicas é exatamente $H = H(S)$, resta mostrar que $H \subset C^\infty(S)$. Este resultado será mostrado num lema devido a H. Weyl. Antes de enunciá-lo, introduziremos o operador regularizante, cujas propriedades serão utilizadas em sua demonstração.

II.4 - OPERADORES REGULARIZANTES E LEMA DE WEYL

Vamos definir um operador que transforma formas diferenciais de $L^2(S)$ em formas diferenciáveis de classe C^∞ em S. Iniciaremos tomando o disco D centrado em o e de raio 1, no plano euclidiano, e definindo o operador regularizante para funções f pertencentes ao espaço $\mathcal{L}^2(D)$ das funções mensuráveis de quadrado integrável em D.

Seja s função pertencente a $C_o^\infty(\mathbb{R}^2)$. Definiremos o operador regularizante M_s que transforma funções pertencentes a $\mathcal{L}^2(D)$ em funções de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$, da seguinte maneira:

Dada uma função f pertencente a $\mathcal{L}^2(D)$, podemos estender f a todo $\mathbb{R}^2$, fazendo f = o em $\mathbb{R}^2 - D$, e definir

$$M_s f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x+\xi,\, y+\eta)\, s(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{6}$$

$M_s f$ está bem definida, pois f e s pertencem a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Mostremos que $M_s f$ é de classe C^∞.

Fazendo no segundo membro de (6) a mudança de variáveis $x + \xi = u$ e $y + \eta = v$, temos:

$$M_s\, f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\; s(u-x,\; v-y)\; du\, dv \qquad (7)$$

De (7) vê-se claramente que $M_s f$ é contínua pela continuidade uniforme da função s e pelo fato da função f ser integrável. Vejamos a existência e continuidade das derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x} M_s f$ e $\frac{\partial}{\partial y} M_s f$.

Por (7), para todo h > o,

$$\frac{1}{h}\,(M_s\, f(x+h,y) - M_s\, f(x,y)) = \int_{R^2} f(u,v) \left[\frac{s(u-x-h, v-y) - s(u-x,\; v-y)}{h}\right] du\, dv.$$

Como s pertence a $C_o^\infty(R^2)$, passando ao limite quando h tende a o, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} M_s\; f(x,y) = -\int_{R^2} f(u,v)\; \frac{\partial}{\partial x}\, s(u-x,\; v-y)\; du\; dv,$$

pelo teorema da convergência dominada de Lebesque. Usando as notações $s_x = \frac{\partial s}{\partial x}$ e $s_y = \frac{\partial s}{\partial y}$, temos

$\frac{\partial}{\partial x} M_s f = - M_{s_x} f$ e, por analogia, $\frac{\partial}{\partial y} M_s f = - M_{s_y} f$, e portanto, pelo mesmo raciocínio anterior (usando a continuidade uniforme de s_x e s_y), $\frac{\partial}{\partial x} M_s f$ e $\frac{\partial}{\partial y} M_s f$ são contínuas.

Como a função s pertencente a $C_o^\infty(R^2)$ foi tomada arbitrariamente, para toda função s pertencente a $C_o^\infty(R^2)$, a função $M_s f$ é contínua e possui derivadas primeiras contínuas. Em particular, $M_{s_x} f$ e $M_{s_y} f$ são contínuas e possuem derivadas primeiras contínuas. Daí, por recorrência, $M_s f$ é de classe C^∞, pois s é de classe C^∞.

Sejam D contido em C o disco $|z| < 1$ e $\omega = p(x,y)\, dx + q(x,y) dy$ forma diferencial pertencente a $L^2(D)$. Dada a função s pertencente a $C_o^\infty(R^2)$, definimos a 1-forma $M_s\, \omega$

por

$$M_s\,\omega = M_s\, p(x,y)\, dx + M_s\, q(x,y)\, dy, \text{ no disco } D.$$

É imediato que a 1-forma $M_s\omega$ está bem definida e é de classe C^∞ no disco D.

Dado ρ real, $o < \rho < 1$, definimos

$$s_\rho(x,y) = \rho^{-2}\, \Phi\left(\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\right) \qquad (8),$$

onde $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\Phi \geq o$, $\Phi(x) = o$ se $|x| > 1$ e $\int_o^{+\infty} \Phi(x)\, dx = \frac{1}{\pi}$. Temos que $s_\rho \in C_o(\mathbb{R}^2)$, $s_\rho \geq o$, $s_\rho(x,y) = o$ se $x^2+y^2 > \rho^2$ e $\int_{\mathbb{R}^2} s_\rho(x,y)\, dxdy = 1$. Com efeito, usando as coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} s_\rho(x,y)\, dxdy = \int_o^{+\infty}\int_o^{2\pi} s_\rho(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta) r\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_o^{+\infty}\int_o^{2\pi} \Phi\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right) \frac{r}{\rho^2}\, d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_o^{+\infty} \Phi\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right) \frac{r}{\rho}\, \frac{dr}{\rho} = 1.$$

Observemos que s_ρ só depende de $\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>DEFINIÇÃO 7</u>: Para todo ρ real, $o < \rho < 1$, considerando a função s_ρ dada em (8), definimos:

(i) $M_\rho f = M_{s_\rho} f$, para toda função $f \in L^2(D)$;

(ii) $M_\rho\omega = M_{s_\rho}\omega$, para toda 1-forma $\omega \in L^2(D)$.

<u>LEMA 4</u>: Se $\omega \in L^2(D)$, para todo ρ, $o < \rho < 1$, temos:

(i) $(M_\rho\omega, df)_D = (\omega, M_\rho\, df)_D = (\omega, d\, M_\rho f)_D$, para toda função $f \in C_o^\infty(D)$.

(ii) Se ω é harmônica em D, $M_\rho \omega = \omega$ em D.

(iii) $\lim\limits_{\rho \to o} \| M_\rho \omega - \omega \|_D = o$

Prova:

(i) Se $f \in C_o^\infty(D)$, podemos estender f a todo o plano $\mathbb{R}^2$, fazendo $f = o$ em $\mathbb{R}^2 - D$ e obtemos $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^2)$. $M_\rho f$ está definida em $\mathbb{R}^2$ e pertence a $C_o^\infty(D)$, pois $M_\rho f = o$ fora do disco $|z| < 1 - \delta$, para $\delta > o$ suficientemente pequeno. Analogamente, $M_\rho df$ pertence a $C_o^\infty(D)$. Portanto, $d\, M_\rho f$ e $M_\rho df$ pertencem a $L^2(D)$ e daí, $(\omega, d\, M_\rho f)_D$ e $(\omega, M_\rho df)_D$ estão definidos.

Seja $\omega = p\, dx + q\, dy$ no disco D.

$$(M_\rho \omega,\ df)_D = \int_D M_\rho \omega {*}df =$$

$$= \int_D (M_\rho\ p(x,y)\ dx + M_\rho\ q(x,y)\ dy)\ (- \frac{\partial f}{\partial y}\ (x,y)\ dx + \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y)\ dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (M_\rho\ p(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y) + M_\rho\ q(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial y}\ (x,y))\ dx\ dy \qquad (9),$$

pois $M_\rho\ p$, $M_\rho\ q$ e f pertencem a $C_o^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $f = o$ fora do disco D.

Pelo teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} M_\rho\ p(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y)\ dxdy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y)\ \left[\int_{\mathbb{R}^2} p(\xi,\eta)\ s_\rho\ (\xi - x, \eta - y)\ d\xi\ d\eta \right] dx\ dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} p(\xi,\eta)\ \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y)\ s_\rho (x-\xi,\ y-\eta)\ dx\ dy \right]\ d\xi\ d\eta =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} p(\xi,\eta)\ \ M_\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\ (\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta \quad , \text{ pois } s_\rho \text{ é uma função par.}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} M_\rho\, q(x,y) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} q(\xi,\eta)\, M_\rho \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Substituindo em (9),

$$(M_\rho\, \omega,\, df)_D = \int_{\mathbb{R}^2} (p(\xi,\eta)\, d\xi + q(\xi,\eta)\, d\eta)\, (-M_\rho \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\, d\xi + M_\rho \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\, d\eta) =$$

$$= \int_D \omega * M_\rho\, df = (\omega,\, M_\rho\, df)_D\ , \quad \text{pois } p,q = o \text{ em } \mathbb{R}^2\text{-}D.$$

Para mostrar que $(\omega,\ M_\rho\ df)_D = (\omega,\ d\ M_\rho f)_D$, basta mostrar que $M_\rho\ df = d\ M_\rho\ f$.

$$\frac{\partial}{\partial x} M_\rho\, f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^2} f(x+\xi,\, y+\eta)\, s_\rho(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x+\xi,\, y+\eta)\, s_\rho(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= M_\rho \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),$$ pelo teorema da convergência dominada de Lebesque, pois $f \in C_o^\infty(R^2)$. Analogamente, $\frac{\partial}{\partial y} M_\rho\ f = M_\rho \frac{\partial f}{\partial y}$. Portanto, $d\ M_\rho\ f = M_\rho\ df$.

(ii) Seja ω 1-forma harmônica em D. Como $d\omega = o$ em D, existe uma função f pertencente a $C^\infty(D)$ tal que $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Pela observação 2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$ ou seja, f é uma função harmônica em D.

Na demonstração de (i), vimos que $M_\rho\ df = d\ M_\rho f$. Portanto, para mostrar que $M_\rho \omega = \omega$, basta mostrar que para toda função f harmônica em D, $M_\rho\ f = f$.

Usando em (6) as coordenadas polares $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \operatorname{sen} \theta$, temos:

$$M_\rho f(x,y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\Pi} f(x + r\cos\theta,\ y + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, s_\rho(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{+\infty} r\, s_\rho(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta) \int_0^{2\Pi} f(x + r\cos\theta,\ y + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta\, dr \quad (10),$$

pois s_ρ só depende de r.

Sendo f uma função harmônica,

$$\int_0^{2\Pi} f(x + r\cos\theta,\ y + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 2\Pi\, f(x,y).$$

Portanto, substituindo em (10),

$$M_\rho f(x,y) = 2\Pi\, f(x,y) \int_0^{+\infty} s_\rho(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr =$$

$$= f(x,y) \int_0^{+\infty}\int_0^{2\Pi} s_\rho(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= f(x,y), \quad \text{pois} \int_{\mathbb{R}^2} s_\rho(x,y)\, dx\, dy = 1.$$

(iii) Seja $\omega = p\,dx + q\,dy$ no disco D. Queremos mostrar que $\lim_{\rho\to o} \|M_\rho\omega - \omega\|_D = o$. Como

$$\|M_\rho\,\omega - \omega\|_D^2 = \int_D (|M_\rho\, p-p|^2 + |M_\rho\, q-q|^2)\, dxdy, \text{ basta}$$

mostrar que para toda função f pertencente a $L^2(D)$, $\lim_{\rho\to o} \|M_\rho\, f-f\|_D^2 = o$. Faremos a demonstração em duas etapas, primeiro considerando f restrição de uma função contínua em $\overline{D}$ e depois considerando f qualquer pertencente a $L^2(D)$.

1) Seja f restrição de uma função contínua em $\overline{D}$. Pela continuidade uniforme de f, dado $\varepsilon > o$, existe $\delta > o$ tal que $|f(x',y') - f(x,y)| < \varepsilon$, se $|(x',y') - (x,y)| < \delta$. Portanto, dado $\varepsilon > o$, existe $\delta > o$ tal que, se $\rho < \delta$,

$$|M_\rho f(x,y) - f(x,y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y)| \; s_\rho(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \leqslant \varepsilon,$$

pois $s_\rho(\xi,\eta) = o$ se $|(\xi,\eta)| > \rho$. Conseqüentemente,

$$\| M_\rho f-f\|_D^2 = \int_D |M_\rho f-f|^2 \, dxdy \leqslant \Pi \, \varepsilon^2.$$

2) Seja f pertencente a $L^2(D)$. Dado $\varepsilon > o$ mostremos que existe $\delta > o$ tal que $\| M_\rho f-f\|_D < \varepsilon$, se $\rho < \delta$.

Como o espaço das funções contínuas em $\overline{D}$ é denso em $L^2(D)$ (conforme KOLMOGOROV AND FOMIN, Functional Analysis, vol. II, p. 85), dado $\varepsilon > o$, existe uma função g contínua em $\overline{D}$ tal que $\| f-g\|_D < \varepsilon$. Fizemos uma tal função g.

Em $L^2(D)$, temos que:

$$\| M_\rho f-f\|_D \leqslant \| M_\rho f - M_\rho g\|_D + \| M_\rho g-g\|_D + \| f-g\|_D .$$

Daí, pela escolha da função g e por 1), existe $\delta > o$ tal que,

$$\| M_\rho f-f\|_D \leqslant \| M_\rho f - M_\rho g\|_D + (1 + \sqrt{\Pi})\varepsilon, \quad \text{se } \rho < \delta.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder,

$$|M_\rho f(x,y) - M_\rho g(x,y)|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}^2} [f(u,v) - g(u,v)] \; s_\rho(u-x, v-y) \, du \, dv\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |f(u,v) - g(u,v)|^2 \; s_\rho(u-x, v-y) \, du \, dv \times \int_{\mathbb{R}^2} s_\rho(u-x, v-y) \, du \, dv =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |f(u,v) - g(u,v)|^2 \; s_\rho(u-x, v-y) \, du \, dv.$$

Portanto, pelo teorema de Fubini e pela escolha da função g,

$$\| M_\rho f - M_\rho g\|_D^2 = \int_D |M_\rho f(x,y) - M_\rho g(x,y)|^2 \, dxdy \leqslant$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} s_\rho(\alpha,\beta) \int_{\mathbb{R}^2} g(x+\xi+\alpha,\ y+\eta+\beta)\ s_\sigma(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta\ d\alpha\ d\beta =$$

$$= M_\rho\ (M_\sigma\ g(x,y)).$$

Como $M_\rho \omega$ independe de ρ e pelo lema 4(iii), $\lim_{\rho \to 0} \|M_\rho \omega - \omega\|_D = 0$, temos que para $\rho < 1$, $M_\rho \omega = \omega$ em $L^2(D)$, Logo, ω pertence a $C^\infty(D)$, pois $M_\rho \omega$ pertence a $C^\infty(D)$. ∎

Queremos mostrar que toda 1-forma ω pertencente a H(S) é de classe C^∞ em S. Para isto, devemos mostrar que ω pertence a $C^\infty(U)$, para todo aberto paramétrico U de S.

Seja D disco paramétrico de S, dado por $|z|<1$. Denotando por $L^2(D)$ o espaço de Hilbert das 1-formas diferenciais mensuráveis ω em D tais $\|\omega\|_D^2 = \int_D \omega{*}\omega < \infty$, com produto interno $(\omega_1,\omega_2)_D = \int_D \omega_1{*}\omega_2$, temos que toda 1-forma ω pertencente a $L^2(S)$, pertence a $L^2(D)$. Além disso, se ω pertence a H(S), para toda função f pertencente a $C_0^\infty(D)$,
$(\omega,df)_D = (\omega,df) = 0$ e $(\omega,{*}df)_D = (\omega,{*}df) = 0$.
Portanto, pelo lema de Weyl, se ω pertence a H(S), ω pertence a $C^\infty(D)$, para todo disco paramétrico D. Daí e do lema 3, decorre o seguinte teorema.

TEOREMA 4: ω pertence a H(S) se e somente se ω é harmônica em S.

II.5 - DECOMPOSIÇÃO DE FORMAS FECHADAS

O objetivo deste capítulo é mostrar que toda forma diferenciável fechada numa superfície de Riemann compacta pode ser decomposta de maneira única como soma de uma forma diferenciável harmônica e uma forma diferenciável exata, que será feito neste último parágrafo.

LEMA 6: Seja ω 1-forma diferenciável (C^∞) fechada em S, tal que ω pertence a E(S). Então, existe uma função f pertencente a $C^\infty(S)$ tal que $\omega = df$.

Prova:

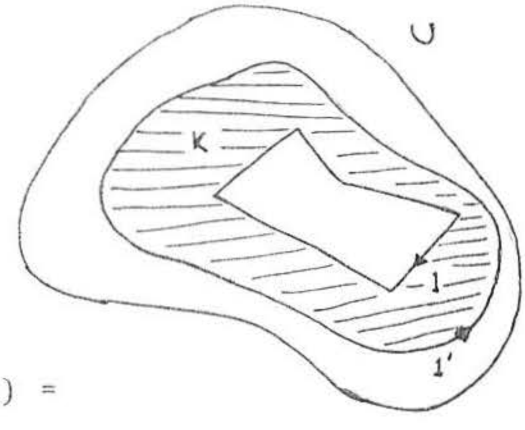
Pela proposição 5, capítulo I, devemos mostrar que para toda curva fechada c em S, $\int_c \omega = o$.

Sejam $c: [o,1] \to S$ curva fechada e $D_1, \ldots, D_n$ discos paramétricos que cobrem c, tais que para todo i, D_i tem intersecção não vazia com a curva c e $D_i \neq D_j$, se $i \neq j$. Seja $o = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ partição do intervalo $[o,1]$ tal que c restrita ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ está contida num único disco D_j. Reindexemos os índices de tal maneira que $c([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$.

Para cada $i \in \{1,2,\ldots, n\}$, seja l_i segmento em D_i unindo os pontos $c(t_{i-1})$ e $c(t_i)$, tal que a imagem de l_i em $D \subset \mathbb{C}$, pela parametrização local, é um segmento de reta. A curva $l = l_1.l_2. \ldots l_n$ é uma curva fechada homotópica à curva c em S. Como ω é fechada, pela proposição 4, capítulo I, $\int_c \omega = \int_l \omega$.

Sendo l uma curva fechada em S, analítica por partes, pode ser decomposta num número finito de curvas fechadas simples. Pela aditividade da integral, basta mostrar que a integral de ω ao longo de uma curva fechada simples analítica por partes é nula. Suponhamos, portanto, que l é uma curva fechada simples analítica por partes.

Seja U região em S formada por um número finito de discos paramétricos que cobrem l. Então, existe uma curva fechada simples 1' em U que não intercepta 1 e uma região compacta $K \subset U$ limitada pelas curvas 1 e 1'.



Existe uma função f pertencente a $C_o^\infty(S)$ tal que $f = 1$ ao longo de 1, $f = o$ ao longo de 1' e fora de U. Então, pelo teorema de Stokes,

$$\int_1 \omega = \int_1 f\,\omega = \int_1 f\,\omega - \int_{1'} f\,\omega = \int_K d(f\,\omega) =$$

$$= \int_K df \,.\, \omega \text{ , pois } \omega \text{ é fechada.}$$

Como $\omega \in E(S)$, existe uma seqüência de formas exatas $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\alpha_n \to \omega$ em $L^2(S)$. Para cada forma exata α_n, pelo teorema de Stokes,

$$\int_K df \,.\, \alpha_n = \int_K d(f\,\alpha_n) = \int_1 f\,\alpha_n - \int_{1'} f\,\alpha_n = \int_1 \alpha_n = o,$$

pois $f = 1$ ao longo de 1 e $f = o$ ao longo de 1'.

Temos que, quando $n \to \infty$,

$$\left|\int_K df(\omega-\alpha_n)\right|^2 \leq \int_K df \,{*}df \,.\, \int_K (\omega-\alpha_n)*(\omega-\alpha_n) \leq$$

$$\leq \int_K df{*}df \,.\, \int_S (\omega-\alpha_n)*(\omega-\alpha_n) \to o,$$

portanto,

$$\int_1 \omega = \int_K df \,.\, \omega = \lim_{n\to\infty} \int_K df \,.\, \alpha_n = o. \blacksquare$$

<u>LEMA 7</u>: Se ω é uma forma diferenciável (C^∞) fechada pertencente a $L^2(S)$, então $\omega = df + h$, onde $f \in C^\infty(S)$ e h é uma forma diferenciável harmônica em S.

Prova:

Seja ω pertencente a $L^2(S)$ tal que $d\omega = o$. Pelo teorema 2, $\omega = \alpha + \gamma + h$, onde $\alpha \in E$, $\gamma \in E^*$ e $h \in H$. Do lema 2, segue que $\omega \in (E^*)^\perp$, pois ω é de classe C^∞. Daí, $o = (\omega, \gamma) = (\gamma, \gamma)$, pois E e H são ortogonais a E^*. Portanto, $\omega = \alpha + h$, pois $\gamma = o$.

Pelo teorema 4, h é harmônica em S. Logo, $\alpha \in C^\infty(S)$ e $d\alpha = d\omega - dh = o$. Daí, pelo lema 6, existe uma função f de classe C^∞ em S tal que $\alpha = df$. ∎

Seja R uma superfície de Riemann compacta. Por forma diferenciável em R, entenderemos forma de classe C^∞ em R. Como R é compacto, o espaço das formas diferenciáveis em R está contido no espaço $L^2(R)$. Portanto, do lema 7, decorre o seguinte teorema:

TEOREMA 5 (TEOREMA DE HODGE): Toda forma diferenciável C^∞ fechada ω numa superfície de Riemann compacta R, se escreve de maneira única como $\omega = df + h$, onde $f \in C^\infty(R)$ e h é uma forma diferenciável harmônica em R.

Prova:

Pelo lema 7, $\omega = df + h$, onde $f \in C^\infty(R)$ e h é uma forma harmônica em R. Resta, portanto, mostrar a unicidade.

Suponhamos que $\omega = dq + 1$, onde $g \in C^\infty(R)$ e 1 é harmônica em R. Então, $d(f - g) = h - 1$, ou seja, a forma diferenciável $h - 1$ é harmônica e exata em R. Além disso, como R é compacto, $h - 1 = d(f-g) \in E(R)$, pois $f - g$ tem suporte compacto. Portanto, como H(R) é, por definição, ortogonal a E(R), $o = h - 1 = d(f - g)$. Logo, $h = 1$ e $df = dg$. ∎

CAPÍTULO III - DIFERENCIAIS DE $1^{\underline{a}}$ ESPÉCIE NUMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN COMPACTA

Sejam R superfície de Riemann compacta e $H^1(R,\mathbb{R})$ o espaço dos homomorfismos do grupo fundamental de R no grupo dos números reais. Mostraremos que $H^1(R,\mathbb{R})$ tem dimensão par, a saber, o dobro do genus g da superfície R, e provaremos que o espaço das diferenciais de $1^{\underline{a}}$ espécie tem dimensão g.

III.1 - 1-FORMAS DIFERENCIAIS A VALORES COMPLEXOS

Seja N superfície no sentido do primeiro capítulo, ou seja, variedade diferenciável conexa de dimensão 2. Para cada $p \in N$, consideremos $T_p(N)$ o plano tangente a N no ponto p.

DEFINIÇÃO 1: ω é uma 1-forma diferencial a valores complexos em N, se a cada ponto $p \in N$, ω associa a aplicação R- linear

$$\omega_p : T_p(N) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Analogamente ao caso de 1-formas reais, se ω é uma 1-forma diferencial a valores complexos, localmente ω é dada por $\omega = u\,dx + v\,dy$, onde u,v são funções de N no conjunto dos números complexos.

Definindo $dz = dx + i\,dy$ e $\overline{dz} = dx - i\,dy$, localmente, a 1-forma a valores complexos ω em função de dz e $\overline{dz}$ é dada por

$\omega = f\,dz + g\,\overline{dz}$, onde f e g são funções de N a valores complexos.

<u>OBSERVAÇÃO 1</u>: Seja, localmente, $\omega = u\,dx + v\,dy$. Da definição acima, segue que $dx = \frac{dz + \overline{dz}}{2}$ e $dy = \frac{dz - \overline{dz}}{2i}$. Portanto, localmente,

$$\omega = u\,\frac{dz + \overline{dz}}{2} + v\,\frac{dz - \overline{dz}}{2i} =$$

$$= \frac{u - iv}{2}\,dz + \frac{u + iv}{2}\,\overline{dz} = f\,dz + g\,\overline{dz},$$

onde $f = \frac{u - iv}{2}$ e $g = \frac{u + iv}{2}$.

<u>DEFINIÇÃO 2</u>: Uma 1-forma diferencial a valores complexos ω é contínua, diferenciável, de classe C^∞, etc., se e somente se, localmente,

$\omega = u\,dx + v\,dy$ $(= f\,dz + g\,\overline{dz})$, onde u e v (ou f e g) são contínuas, diferenciáveis, de classe C^∞, etc., respectivamente.

<u>OBSERVAÇÃO 2</u>: Se ω é uma 1-forma diferencial em N a valores complexos, para cada p pertencente a N, temos: $\omega_p\colon T_p(N) \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$- linear.

Daí, para cada ponto p pertencente a N, existem aplicações $L_R(p)$, $L_I(p)\colon T_p(N) \to \mathbb{R}$ tais que

$\omega_p = L_R(p) + i\,L_I(p)$, e $L_R(p)$, $L_I(p)$ são únicas.

Definindo ω_R e ω_I em N, por $\omega_{R_p} = L_R(p)$ e $\omega_{I_p} = L_I(p)$, $p \in N$, temos que ω_R e ω_I são 1-formas diferenciais em N e, para cada ponto $p \in N$,

$$\omega_p = L_R(p) + i\, L_I(p) = \omega_{R_p} + i\, \omega_{I_p}\ , \quad \text{ou seja,}$$

$$\omega = \omega_R + i\, \omega_I \qquad (1).$$

Como, para cada p pertencente a N, $L_R(p)$ e $L_I(p)$ são únicas, as 1-formas diferenciais reais ω_R e ω_I em (1) são únicas.

DEFINIÇÃO 3: Se ω é uma 1-forma diferencial a valores complexos, em N, definimos a conjugada de ω, $\overline{\omega}$, por $\overline{\omega}_p(u) = \overline{\omega_p(u)}$, para todo $u \in T_p(N)$.

Escrevendo $\omega = \omega_R + i\, \omega_I$ como em (1), temos, $\overline{\omega} = \omega_R - i\, \omega_I$.

III.2 - DIFERENCIAIS DE 1ª ESPÉCIE:

Seja S superfície de Riemann. S tem estrutura de variedade diferenciável (real) conexa de dimensão 2. Portanto, o que foi feito no parágrafo III.1 se aplica à superfície S.

DEFINIÇÃO 4: Uma 1-forma diferencial a valores complexos ω, em S, é chamada diferencial de 1ª espécie se e somente se, para todo $p \in S$, existe uma vizinhança aberta U_p de p e uma função analítica $f: U_p \to \mathbb{C}$ tal que $\omega = f\, dz$ em U_p, onde z é coordenada local em U_p.

LEMA 1: ω é uma diferencial de 1ª espécie em S se e somente se existe uma forma harmônica em S, ω_o, tal que $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$. Neste caso, ω_o é única.

Prova:

Seja ω diferencial de $1^{\underline{a}}$ espécie. Pela observação 2 (em III.1) existem únicas 1-formas diferenciais reais ω_R e ω_I, tais que $\omega = \omega_R + i\,\omega_I$. Localmente, $\omega = f\,dz = (f_1 + i\,f_2)(dx + i\,dy)$. Portanto,

$$\omega_R + i\,\omega_I = (f_1\,dx - f_2\,dy) + i\,(f_2\,dx + f_1\,dy)$$

Pela unicidade, $\omega_R = f_1\,dx - f_2\,dy$ e $\omega_I = f_2\,dx + f_1\,dy = i{*}\omega_R$.

Como $f = f_1 + i\,f_2$ é analítica, pelas equações de Canchy-Riemann, temos que:

$$d\omega_R = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx\,dy = o \quad \text{e} \quad d{*}\omega_R = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx\,dy = o,$$

isto é, ω_R é harmônica.

Logo, existe uma forma harmônica ω_R tal que $\omega = \omega_R + i{*}\omega_R$. Além disso, se existe uma forma harmônica ω_o em S tal que $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$, então $\omega_o = \omega_R$, provando a unicidade.

Reciprocamente, seja ω_o uma forma harmônica em S. Consideremos a 1-forma $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$. Se, localmente, $\omega_o = p\,dx + q\,dy$, localmente, ω será dada por:

$$\omega = (p\,dx + q\,dy) + i\,(-q\,dx + p\,dy) =$$
$$= (p - i\,q)\,dz.$$

Como, pela observação 2 em II.1, $p - iq$ é analítica, ω é uma diferencial de $1^{\underline{a}}$ espécie.■

Consideremos os seguintes $\mathbb{C}$ - espaços vetoriais:

Ω = espaço das diferenciais de $1^{\underline{a}}$ espécie em S.

$\overline{\Omega}$ = espaço das formas conjugadas das diferenciais de $1^{\underline{a}}$ espécie em S.

H = espaço das formas harmônicas em S (como no capítulo II).

LEMA 2:

(i) $\Omega + \overline{\Omega} = H + i\,H$

(ii) $\Omega \cap \overline{\Omega} = o$

(iii) $H \cap i\,H = o$.

Conseqüentemente, $\Omega \oplus \overline{\Omega} = H \oplus i\,H$.

Prova:

(i) Sejam $\omega \in \Omega$ e $\overline{\alpha} \in \overline{\Omega}$. Pelo lema 1, existem $\omega_o, \alpha_o \in H$ tais que: $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$ e $\overline{\alpha} = \overline{\alpha_o + i{*}\alpha_o} = \alpha_o - i{*}\alpha_o$. Ora, se $\gamma \in H$, então ${*}\gamma \in H$. Portanto,

$$\omega + \overline{\alpha} = (\omega_o + \alpha_o) + i\,({*}\omega_o - {*}\alpha_o) \in H + i\,H.$$

Por outro lado, dados $\omega_o, \alpha_o \in H$, temos que

$$\omega_o + i\,\alpha_o = \frac{(\omega_o + i\,{*}\omega_o) + (\omega_o - i\,{*}\omega_o)}{2} + i\,\frac{(\alpha_o + i\,{*}\alpha_o) + (\alpha_o - i\,{*}\alpha_o)}{2} =$$

$$= \frac{\omega + \overline{\omega}}{2} + i\,\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} = \frac{\omega + i\alpha}{2} + \frac{\overline{\omega} + i\overline{\alpha}}{2}, \quad \text{onde}$$

$\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$ e $\alpha = \alpha_o + i{*}\alpha_o$. Portanto, pelo lema 1, $\omega_o + i\,\alpha_o$ pertence a $\Omega + \overline{\Omega}$.

(ii) Seja $\omega \in \Omega \cap \overline{\Omega}$. Existe α pertencente a Ω tal que $\overline{\alpha} = \omega$. Sejam $\omega_o, \alpha_o \in H$ tais que $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o$ e $\alpha = \alpha_o + i{*}\alpha_o$. Temos que

$(\omega_o - \alpha_o) + i\,({*}\omega_o + {*}\alpha_o) = \omega - \overline{\alpha} = o$, isto é, $\alpha_o = \omega_o = -\alpha_o$.

Logo, $\omega_o = o$ e $\omega = \omega_o + i{*}\omega_o = o$.

(iii) óbvio.∎

III.3 - GENUS DE UMA SUPERFÍCIE DE RIEMANN COMPACTA

Seja R superfície de Riemann compacta. No teorema 1, capítulo I, vimos que o espaço dos homomorfismos do grupo fundamental de R no grupo dos números reais, $H^1(R,\mathbb{R})$, tem dimensão finita. Como dim $H^1(R,\mathbb{R})$ é um invariante topológico, podemos definir:

<u>DEFINIÇÃO 5</u>: O genus de uma superfície de Riemann compacta é o número real $g = \frac{1}{2} \dim H^1(R,\mathbb{R})$.

<u>TEOREMA</u>: $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega$, onde Ω é o espaço das diferenciais de 1ª espécie em R.

Prova: Temos que $\dim \Omega = \dim \overline{\Omega}$, pois Ω e $\overline{\Omega}$ são $\mathbb{R}$- isomorfos e a dimensão complexa é a metade da dimensão real.

Pelo lema 2(ii),

$$\dim_{\mathbb{R}} (\Omega + \overline{\Omega}) = \dim_{\mathbb{R}} \Omega + \dim_{\mathbb{R}} \overline{\Omega} = 2 \dim_{\mathbb{R}} \Omega.$$

Ainda pelo lema 2, (i) e (iii), temos:

$$2 \dim_{\mathbb{R}} \Omega = \dim_{\mathbb{R}} (\Omega + \overline{\Omega}) = \dim_{\mathbb{R}} (H + i\, H) = 2 \dim_{\mathbb{R}} H,$$

ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \Omega = \dim_{\mathbb{R}} H$.

Pelo teorema 5, capítulo II, o espaço H das formas harmônicas em R é isomorfo ao espaço quociente das formas fechadas em R, módulo o subespaço das formas exatas, $H^1_{DR}(R)$. Por outro lado, pelo isomorfismo de de Rham (parágrafo I.4),

$$\dim_{\mathbb{R}} H^1_{DR}(R) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(R,\mathbb{R}).$$

Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} \Omega = \dim_{\mathbb{R}} H = \dim_{\mathbb{R}} H^1_{DR}(R) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(R,\mathbb{R}) = 2\, g$, pela definição do genus g. Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \Omega = g.$$

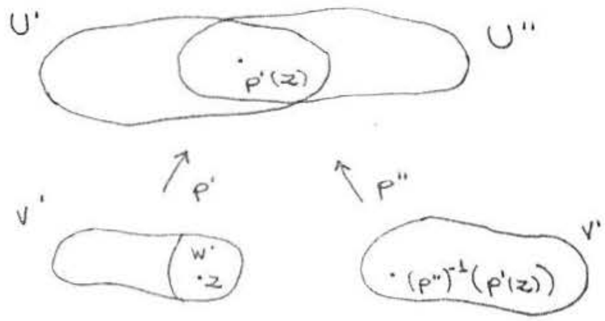
Daí segue, de imediato, o corolário:

<u>COROLÁRIO</u>: g é inteiro (isto é, $\dim H^1(R,\mathbb{R})$ é par).

EXEMPLO:

Seja Λ subgrupo discreto de $\mathbb{C}$ gerado pelos elementos e_1 e e_2, cujo quociente não é real. O conjunto quociente $S = \mathbb{C} / \Lambda$ é uma superfície de Riemann. Com efeito, consideremos em S a topologia quociente, isto é, $U \subset S$ é aberto se e somente se $p^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{C}$, onde $p: \mathbb{C} \to S$ é a projeção canônica. Observemos que se V é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$, para cada m e n inteiros, o translado $V + m\,e_1 + n\,e_2$ é aberto em $\mathbb{C}$; portanto, se V é aberto em $\mathbb{C}$, então $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} (V + m\,e_1 + n\,e_2)$ é aberto em $\mathbb{C}$, ou seja, o conjunto $U = p(V)$ é aberto em S. Tomemos abertos suficientemente pequenos V em $\mathbb{C}$, tais que a restrição de p a V seja injetiva (isto é possível pois Λ é discreto). Sejam $U = p(V)$ em S, mostremos que os pares $\{U, p^{-1}\}$ constituem um sistema de coordenadas locais.

Sejam V' e V'' abertos suficientemente pequenos de $\mathbb{C}$ (isto é, as restrições de p a V' e V'', respectivamente, são injetivas), tais que $U' = p(V')$ e $U'' = p(V'')$ tem intersecção não vazia. Sejam p' a restrição de p a V' e $W' = (p')^{-1}(U' \cap U'') \neq \phi$. Se z pertence a $W' \subset V'$, $p'(z)$ e $p''((p'')^{-1}(p'(z))$ são iguais em S, portanto, $(p'')^{-1}(p'(z)) - z$ é uma constante, pois pertence a Λ. Daí, $(p'')^{-1} \circ p'$ é holomorfa e tem derivada não nula numa vizinhança de cada ponto de W'. Conseqüentemente, as mudanças de coordenadas são analíticas. Além disso, é fácil ver que S é conexa. Portanto, S é uma superfície de Riemann. Mais ainda, é uma superfície de Riemann



compacta, pois se P é o paralelogramo fechado em $\mathbb{C}$ determinado por e_1 e e_2, sua imagem em S pela projeção p é todo S, e daí, S é compacto, pois P é compacto.

Vamos determinar o espaço $\Omega(S)$ das formas de $1^{\underline{a}}$ espécie em S. Os pontos z da superfície S, são representados, módulo Λ, por $z = \alpha e_1 + \beta e_2$, onde $\alpha, \beta \in [o,1)$. Com esta notação, definimos a aplicação

$$z = \alpha e_1 + \beta e_2 \to (e^{2\Pi i \alpha}, e^{2\Pi i \beta})$$

É óbvio que a aplicação acima é um homeomorfismo de S sobre o toro $S^1 \times S^1$. Daí,

$$\Pi_1(S) = \Pi_1(S^1 x S^1) = \Pi_1 (S^1) \oplus \Pi_1 (S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

onde $\Pi_1(S)$ é o grupo fundamental de S. Conseqüentemente, $H^1(S,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ e $\dim H^1(S,\mathbb{R}) = 2$. Pelo teorema anterior, $\dim \Omega(S) = g(S) = 1$.

Vejamos um gerador do espaço $\Omega(S)$. A diferencial de $1^{\underline{a}}$ espécie $\omega = dz$, em $\mathbb{C}$, é invariante por Λ (pois é invariante por translação), portanto, podemos passar ao quociente definido $\overline{\omega} = dz$ em $S = \mathbb{C} / \Lambda$. Como $\overline{\omega}$ é não nula, $\overline{\omega}$ gera $\Omega(S)$.

BIBLIOGRAFIA

BARTLE, Robert G. The elements of integration. New York, John Wiley, 1966.

CARTAN, Henry. Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas. Madrid, Selecciones Científicas, 1968.

KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Baltimore, Graylock Press, 1961. v. 2.

SPRINGER, George. Introduction to Riemann Surfaces. Reading, Addison - Wesley, 1957.