UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA E OS CIRCUITOS ELÉTRICOS DE CORRENTE CONTÍNUA:
uma abordagem analítica, prático-experimental e computacional

RICARDO FERREIRA DA COSTA

Porto Alegre
2007

RICARDO FERREIRA DA COSTA

A MATEMÁTICA E OS CIRCUITOS ELÉTRICOS DE CORRENTE CONTÍNUA:
uma abordagem analítica, prático-experimental e computacional

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador(a): Dra. Elisabeta D'Elia Gallicchio

Porto Alegre
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA E OS CIRCUITOS ELÉTRICOS DE CORRENTE CONTÍNUA: uma abordagem analítica, prático-experimental e computacional
elaborada por

RICARDO FERREIRA DA COSTA

Como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática

APROVADO POR

Prof. Dr. Fernando Lang da Silveira

Profa. Dra. Irene Maria Fonseca Strauch - UFRGS

Profa. Dra. Vera Clotilde Garcia - UFRGS

Alegrete, 20 de dezembro de 2007.

À Ariete, minha companheira de todas as horas.

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dra. Elisabeta D' Elia Gallicchio pela sua orientação e contribuição para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Ms.Luiz Tiarajú dos Reis Loureiro por sugestões que contribuíram decisivamente para a construção do protótipo.

Ao meu colega, Prof. Lélio Conceição Leães Fialho, pelas discussões sobre aspectos deste trabalho.

Aos meus filhos Cristian e Flávia pelo incentivo.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

(Unidades das grandezas físicas no sistema MKS)

Capítulo 2:

q	carga elétrica, (**C**)
t	tempo, (**s**)
i	intensidade da corrente elétrica, (**A**)
CC	corrente contínua
CA	corrente alternada
U	diferença de potencial elétrico ou tensão, (**V**)
τ	consumo elétrico, (**J**, **kwh**)
P	potência elétrica, (**w**)
R	resistência elétrica, (Ω)
ρ	resistividade elétrica, (**Ω m**)
l	comprimentos do fio, (**m**)
A	área da secção transversal do fio, (**m^2**)
ε	força eletromotriz, (**V**)
ε'	força contra-eletromotriz, (**V**)
r	resistência interna dos geradores e receptores, (Ω)
E	energia potencial, (**J**)
V	potencial elétrico, (**V**)
s	solução do sistema linear

Capítulo 3:

A	amperímetro
V	voltímetro
U	diferença de potencial ou tensão, (**V**)
R	resistência elétrica, (Ω)
Ch	chave liga-desliga
i	intensidade da corrente elétrica, (**A**)

Capítulo 4:

IN	conjunto dos números naturais
IR	conjunto dos números reais
M	matriz
m, n	número de linhas ou colunas de uma matriz
a_{ij}	elemento da matriz
$\mathbf{I_n}$	matriz identidade de ordem n
$\mathbf{A}^T$	matriz transposta da matriz A
det **M**	determinante da matriz M
$\mathbf{A}^{-1}$	matriz inversa da matriz A
D_{ij}	menor complementar do elemento a_{ij}
A_{ij}	cofator do elemento a_{ij}
cof**(A)**	matriz dos cofatores da matriz A
Adj**(A)**	matriz adjunta da matriz A
S	sistema de equações lineares
S’	sistema equivalente
s	solução do sistema linear
D	determinante dos coeficientes do sistema
Dx	determinante x
Dy	determinante y
Dz	determinante z

Capítulo 5:

L	função objetivo

RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento de um material didático, sob a forma de cadernos (presentemente, em forma de capítulos), acompanhado de protótipo de circuito simples para testes experimentais, a ser utilizado no ensino de nível médio. O conteúdo reunido nos cadernos abrange o desenvolvimento analítico de tópicos pertinentes à física-matemática, esquema para a construção do protótipo e exemplos utilizando recursos computacionais. Mais especificamente, buscou-se enfatizar o ensino dos tópicos de equações e sistemas lineares, motivados por fenômenos físicos. Pretendeu-se explorar o aspecto experimental (com a construção e o uso de protótipo de circuitos simples), o analítico (com a resolução de equações e sistemas lineares, e com uma introdução à programação linear) e o computacional (com uso da planilha eletrônica). Em todos os conteúdos desenvolvidos, é dada especial ênfase à interpretação, à análise e à validação dos resultados. Com este material, procura-se oferecer ao professor um conjunto de atividades didático-pedagógicas, que possam estimular a sua atuação crítica e criativa. E que, também, propiciem a reflexão e a análise na identificação e resolução de problemas, a fim de desencadear processos cognitivos que levem o aluno a compreender as inter-relações entre a física e a matemática.

Palavras-chave:
sistemas lineares - álgebra matricial - circuitos elétricos - protótipo – planilha eletrônica - método simplex

ABSTRACT

This paper is about the development of a didatic material, under the way of notebooks (here, in chapters), accompained by the prototype of simple circuit for experimental tests, to be used in high school teaching. The issue brought in the notebooks comprehends the analytic development of the topics that belong to the physics- mathematics, scheme for the building of the prototype and examples with the use of computer resources. More specifically, applied to the teaching of the topics of equations and linear systems, motivated by physics phenomena. It was intended to explore the experimental aspect (with the building of simple circuit prototype), the analytic (with the resolution of equations and linear systems, with an introduction to the linear programming) and the computer (with the use of electronic chart). In all the topics developed, a special emphasis is given to the interpretation, analysis and validating of the results. With this material, it was intended to offer the teacher a set of didatic- pedagogical activities that can stimulate the critical and creative acting. And that can also provide the thinking and analysis in the identification and resolution of problems, with the aim of triggering cognitive processes that lead the student to understand the inter-relations between physics and mathematics.

Key-words:
linear systems - matricial algebra - electrical circuits - prototype - eletronic chart - simplex method

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática no nível médio é feito, em geral, de modo fechado, isto é, o ensino da matemática pela matemática em si. Sabe-se, entretanto, da existência de correntes que buscam uma visão mais ampla desta ciência: a teoria integrada às aplicações, interligando diferentes áreas do conhecimento, dentro de uma nova concepção epistemológica. Neste contexto, a modelagem matemática é a ferramenta principal e amplamente utilizada em problemas de ciências físicas, biológicas e sociais.

Graças a um movimento cada vez maior em favor do uso de novas metodologias, enriquecidas por novas tecnologias, no ensino em geral, têm surgido discussões em torno dos currículos escolares e dos métodos de ensino, dando origem a novas teorias e práticas educacionais.

Acredita-se que o ensino da matemática, baseado em problemas concretos, deva tornar a aprendizagem uma tarefa agradável e que, ao mesmo tempo, possibilite desenvolver habilidades de cálculo e de análise. Para vencer o desafio de fazer com que o aluno aprenda com prazer, propõe-se que o ensino de matemática seja vinculado a estímulos externos vindos de um mundo real. Neste contexto, a modelagem matemática ligada a experimentos ocupa um papel de destaque.

A modelagem matemática, aliada a novas tecnologias, é um dos caminhos para que se possa ensinar ao aluno de uma forma mais atrativa, propiciando uma melhor compreensão dos conceitos apresentados. A experimentação é um fator crucial para a visualização e o entendimento do fenômeno. A informática, por sua vez, oferece recursos de cálculo que permitem alterar os valores dos parâmetros nas equações e resolver rapidamente o novo problema. Aqui, a necessidade de uma rotina precisa, quando da inserção dos dados do problema, bem como o uso do recurso tentativa–erro-validação no procedimento, substituem a preocupação do aluno com o cálculo, dando lugar à assimilação de conceitos, regras e propriedades operatórias.

Deste modo, pretende-se propiciar ao professor uma estratégia de ensino, com vistas à compreensão e à resolução de problemas, num enfoque mais abrangente das relações entre a física e a matemática. Ou seja, com a utilização de experimentos, modelagem, simulação computacional, traçado de esquemas gráficos e análise de resultados, que conduzam o aluno à participação, à ação, à interação, à interpretação e à reflexão no processo de aprendizagem. Sob este prisma da prática pedagógica, o professor desempenha o papel de construtor de oportunidades de aprendizagem (BICUDO, 2005), de orientador nas etapas a serem vencidas e o de uma fonte de desafios para a motivação da atividade em sala de aula.

Ainda, segundo Silveira[1], "*os resultados da pesquisa têm mostrado que, [...] em eletricidade os alunos apresentam muitas concepções alternativas, ou seja, concepções com significados contextualmente errôneos, não compartilhados pela comunidade científica. Particularmente na área de circuitos elétricos simples, várias pesquisas foram já conduzidas. [...]*". Também, Dorneles[2] afirma que se tem constatado a dificuldade dos alunos do ensino médio e superior na compreensão dos conceitos físicos envolvidos no estudo de sistemas elétricos.

Sendo assim, o alicerce deste material é a construção do pensamento lógico e o desenvolvimento do raciocínio, tendo como ponto de partida o estudo de problemas reais. O propósito, aqui, é, evidentemente, a partir de situações experimentais e da reflexão sobre o fenômeno, estabelecer a relação interdisciplinar entre a Física e a Matemática. E proporcionar a sedimentação dos conceitos fundamentais para a aprendizagem destas áreas.

O desenvolvimento deste trabalho foi fundamentado nos seguintes objetivos:

Geral:

- procurar estabelecer, no espaço de sala de aula, um processo ensino-aprendizagem proposto, e a ser desenvolvido, com uma prática pedagógica gerada pela abordagem de fenômenos físicos.

[1] SILVEIRA, F. L. et all. Validação de um teste para verificar se o aluno possui concepções científicas sobre corrente elétrica. **Ciência e Cultura**, 41(11), p. 1129 -1133, 1989. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/~lang/Atitude_Fisica.pdf

[2] DORNELES, P. F. T.; ARAÚJO, I. S.; MOREIRA, M.A.; VEIT, E. A. Simulação e modelagem computacionais como recursos auxiliares no estudo de circuitos elétricos. Disponível em www.if.ufrgs.br/mpef/ieeefis/tecno/dificuldadescircuitoseletricos.ppt

Específicos:

- explorar os aspectos interdisciplinares que surgem, naturalmente, a partir do processo prático-experimental, como principal estratégia no desenvolvimento das atividades pedagógicas;
- apresentar um protótipo de circuitos elétricos, como delimitador da teoria e fonte de dados para os problemas a serem abordados;
- perceber a necessidade do saber matemático para um melhor entendimento da resposta do sistema elétrico;
- equacionar o problema real, a fim de originar o conteúdo a ser estudado nas aulas;
- desenvolver a teoria necessária para a compreensão e resolução das equações obtidas;
- aplicar ferramentas matemáticas adequadas à resolução de equações e sistemas lineares;
- apresentar e usar a planilha eletrônica na solução de sistemas lineares;
- propiciar alternativas de solução para um mesmo problema, a fim de que o aluno possa ampliar e aprofundar o seu conhecimento;
- introduzir o método simplex no conteúdo programático da disciplina de matemática para o ensino médio.

1 A ÊNFASE MATEMÁTICA

A matemática, chave de grande parte das áreas do conhecimento, é dotada de uma estrutura que permite o desenvolvimento dos níveis cognitivo e criativo do indivíduo, justificando assim o seu uso nos mais diversos graus de ensino. Tem-se, como meta principal, com o ensino de Matemática, desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar. Portanto, faz-se necessário que se encontre métodos eficientes para que o ensino-aprendizagem atinja seu objetivo nos meios escolares.

No aspecto de precisão, esta ciência prima pelas abstrações e as inter-relações entre os seus diferentes ramos. Mas, apesar desse caráter abstrato, a matemática tem sua origem no mundo real, nas suas aplicações a situações práticas do quotidiano em outras ciências. Deste modo, cria-se um ciclo permanente entre a teoria e a prática, um vai-e-vem entre o desenvolver e o aplicar.

Partindo desses pressupostos, a Matemática desempenha o papel de formador da capacidade intelectual, da estruturação do pensamento e da agilização do raciocínio dedutivo. Portanto, permite o desenvolvimento de competências para a busca, a análise e para a solução de problemas. Assim, a Matemática é de suma relevância na formação básica do cidadão, de suas habilidades e capacitação, propiciando a sua inserção no mundo do trabalho.

1.1 A METODOLOGIA DESENVOLVIDA

Com este material, pretende-se disponibilizar ao professor de matemática de ensino médio uma alternativa para a sua prática pedagógica. Busca-se oportunizar uma atividade dinâmica e diversificada em suas aulas, sem deixar de dar ênfase à fundamentação teórica dos conteúdos matemáticos.

Acredita-se oferecer, aqui, uma técnica diferente, porque não se procura, simplesmente, proporcionar uma habilidade matemática a ser utilizada na resolução de sistemas lineares.

O procedimento começa com aplicações geradas, em sala de aula, através da utilização de protótipo de circuito elétrico simples. Em seqüência às medições pertinentes à experimentação, tem início o processo de modelagem do fenômeno físico. De posse das equações e condições relativas ao problema, são introduzidas as ferramentas matemáticas para a obtenção da resposta analítica. Com os dados da resposta, o problema é implementado na planilha eletrônica tendo em vista a análise dos dados e a validação do resultado.

Com esta metodologia, espera-se criar uma situação ensino-aprendizagem onde o aluno: seja encorajado a pensar matematicamente; se sinta capacitado a enfrentar um problema prático e a pensar na formulação do mesmo em termos matemáticos; considere as possíveis maneiras de obter uma resposta a um problema matemático e escolha o modo que mais lhe aprouver para a sua resolução; esteja apto a achar a resposta e mais, a compreendê-la e a interpretá-la no contexto do problema original.

Este trabalho procura, dentro do possível, introduzir a teoria e as técnicas de resolução de sistemas lineares por meio de exemplos práticos. O que se quer enfatizar é a conjugação dos métodos experimental, analítico e computacional, diante de uma experiência estimulante e desafiadora.

No texto a seguir, tem-se como objetivo aprofundar uma discussão sobre a inserção da modelagem no contexto da educação matemática crítica, com reflexões que conduzam a uma mudança de postura do professor em sala de aula.

1.2 O PORQUÊ DA MODELAGEM

Ao usar a modelagem como estratégia pedagógica em sala de aula, o professor tem a intenção de motivar os alunos ao estudo da matemática e relacioná-la com o dia-a-dia (BIEMBEGUT, 2000). Com esta atividade, o professor espera oferecer ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos vivos, práticos, úteis e com bastante significado. Este modo de pensar do professor vem ao encontro do que D'Ambrósio[3] chama "*de matemática viva*". Ainda, segundo D'Ambrósio[4] "*o ciclo da aquisição do conhecimento é deflagrado a partir de fatos da realidade*".

Como já foi dito, acredita-se que a modelagem matemática é um dos caminhos para que se possa ensinar ao aluno de uma forma mais atrativa,

[3] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da Teoria à Prática**. Campinas, Papirus, 1996.
[4] Idem,

propiciando um melhor aproveitamento dos conceitos apresentados. Porém, algumas vezes, o professor corre o risco de executar, simplesmente, a ação de ensinar e de aprender sem explorar outras possibilidades oferecidas pela modelagem. Isto acontece, se o professor mantiver seu olhar exclusivamente na matemática e deixar de considerar outros aspectos caracterizados por essa metodologia; perderá a oportunidade de usá-la como ponte entre os níveis da observação e das proposições teóricas; deixará de explorá-la (CHRISTOFOLETTI, 2000), quanto aos seus aspectos inerentes, tais como:

- *psicológico – que possibilita a visualização e a compreensão de um fenômeno;*
- *comunicativo – que propicia a troca de idéias e concepções;*
- *promissor – que possui um sentido gerador e fértil para se estabelecer novos enunciados e percepção de novas relações;*
- *lógico – que ajuda a explicar como acontece e se encadeia o fenômeno;*
- *normativo - que permite comparar categorias de fenômenos;*
- *adequativo – que oportuniza a verificação, a validação, e a refutação de leis e teorias, classificando-as como apropriadas ou não;*
- *previsível – que fornece previsões específicas para tomada de decisão.*

Segundo Bassanezi[5], "[…] a modelagem consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem do mundo real […]". Ainda, conforme este autor, "esta pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa como uma estratégia de ensino-aprendizagem".

Bassanezi[6] também afirma que "*trabalhar com modelagem matemática no ensino não é apenas uma questão de ampliar o conhecimento matemático, mas, sobretudo, de se estruturar uma maneira de pensar e agir*".

Sob o ponto de vista de Bassanezi[1] a modelagem:

- *Estimula novas idéias e técnicas experimentais;*
- *Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;*

---

[5] BASSANEZI, Rodney. ***Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática***. São Paulo: Contexto, 2002.
[6] Idem.

- *Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;*
- *Pode sugerir prioridades da aplicação de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;*
- *Pode preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;*
- *Pode servir de recurso para melhor entendimento de realidade;*
- *Pode servir de linguagem universal para compreensão e o entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento".*

Por sua vez, Vygotsky[7], nos seus estudos sobre a aprendizagem, valorizava a relação homem-ambiente e atribuía uma importância muito grande à presença do professor, como impulsionador do desenvolvimento psíquico da criança. Neste sentido, a utilização de problemas concretos, seguidos de sua modelagem, vem de encontro a essa teoria: a modelagem usada como uma ferramenta que atua materialmente sobre o estímulo, modificando-o; e, o professor, como agente moderador, que proporciona ao indivíduo as ferramentas necessárias para modificar o seu meio.

Conforme Azevedo[8], que cita Hodson,

> os trabalhos de pesquisa em ensino mostram que os estudantes aprendem mais sobre a ciência e desenvolvem melhor seus conhecimentos conceituais quando participam de investigações científicas, semelhantes às feitas nos laboratórios. Essas investigações, quando propostas aos alunos, tanto podem ser resolvidas na formas de práticas como de problemas de lápis e papel. As recentes investigações parecem mostrar que deixando como atividades separadas a resolução de problemas, a teoria e as aulas práticas, os alunos acabam com uma visão deformada do que é ciência, já que na realidade do cientista essas formas de trabalho aparecem muito relacionadas umas com as outras, formando um todo coerente e independente.

[7] VYGOSTKY, L.S. ***Pensamento e Linguagem***. São Paulo: Martins Fontes, 1989.
[8] AZEVEDO, Maria Cristina Stella. ***Ensino por investigação: Problematizando as atividades em sala de aula – Ensino de Ciências: unindo a pesquisa à prática***. São Paulo, Thonson, 2004.

Diante destas afirmações, considera-se que a aplicação da modelagem em sala de aula exige interação constante entre os sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem. Além disso, esta prática pressupõe ações, conscientizações e transformações. Sendo assim, pondera-se ser oportuno e adequado inserir esse tipo de atividade prático-investigativa no âmbito do ensino de matemática.

1.3 A PLANILHA ELETRÔNICA

Conforme constatado, quando da aplicação deste trabalho durante estágio, uma exigência do PPGEM, foi notório o entusiasmo dos alunos diante da possibilidade do uso do computador numa aula de matemática. Embora familiarizados com o processador de texto e a utilização do computador (geralmente em suas residências) com outros fins, os alunos manifestaram-se surpresos com as possibilidades matemáticas da planilha eletrônica.

Esta oferece recursos que permitem alterar os valores dos parâmetros e resolver rapidamente o novo problema, sem que estes cálculos se tornem enfadonhos.

Ainda, durante a aula no laboratório, tornou-se evidente que a ação de inserir os dados do problema fez com que os alunos refletissem sobre a notação e conceitos matemáticos envolvidos. Principalmente, esta aprendizagem foi vivenciada, no que se refere à notação formal dos elementos de uma matriz, através de subíndices que indicam a linha e a coluna do elemento. O uso do recurso tentativa–erro-validação no procedimento deu origem a manifestações espontâneas sobre a aprendizagem, por parte dos alunos (veja Anexo B).

Lamentavelmente, à época, pôde-se comprovar que, apesar do avanço da tecnologia e a inserção de laboratórios em muitas escolas, estes recursos não estão disponíveis aos alunos e às disciplinas, em geral. E, que esta nova metodologia educacional se encontra limitada, muitas vezes, ao ensino para turmas especiais.

2 OS CIRCUITOS ELÉTRICOS

A análise de fenômenos, produzidos por cargas elétricas em movimento, dá início ao estudo da corrente elétrica e dos circuitos elétricos. A expressão corrente elétrica está relacionada a uma antiga concepção: a de que a eletricidade (GASPAR, 2000) seria um fluido e, como tal, poderia ser canalizado por condutores (encanamentos hipotéticos desse fluido elétrico). Na verdade, embora essa analogia ainda seja usada, esses fenômenos têm características bastante diferentes. A corrente elétrica tem como elemento básico os portadores de cargas elétricas livres: elétrons nos sólidos; e, elétrons ou íons, positivos ou negativos, nos líquidos e gases.

No mundo moderno, a energia elétrica tem um papel fundamental. A corrente elétrica está presente nos sistemas urbanos de iluminação, na indústria, nos aparelhos de comunicação, nos veículos de transporte e nos eletrodomésticos em geral.

2.1 A CORRENTE ELÉTRICA

A corrente elétrica é definida como sendo o movimento ordenado de portadores de carga elétrica (BISCOULA, 2001) causado por uma diferença de potencial elétrico (**ddp**), ou seja, por uma tensão elétrica.

Para que a corrente elétrica circule de modo apreciável, através de um material, este precisa ser um condutor elétrico. Existem três tipos de condutores:

- os metais, em que os portadores móveis de carga elétrica são elétrons livres;
- as soluções eletrolíticas, em que os portadores móveis são íons positivos e negativos;
- os gases ionizados, em que os portadores móveis podem ser íons positivos, íons negativos e elétrons livres.

2.1.1 A Intensidade da Corrente Elétrica

A figura (1) representa uma corrente de cargas elétricas que se movem para a direita, ao longo de uma região cilíndrica (condutor cilíndrico).

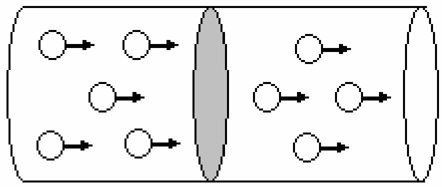


Figura 1: Corrente elétrica em condutor cilíndrico.

A intensidade média da corrente elétrica é definida por

$$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

sendo **q** o módulo da carga elétrica (dada em coulombs, **C**) que passa por uma secção reta **S**, num intervalo de tempo Δ**t** (dado em segundos, **s**).

A unidade de medida da corrente é o ampère. Tem-se que 1 **A** = 1**C**/1**s** (veja a Lista de Símbolos).

2.1.2 O Sentido Convencional da Corrente

O movimento de uma carga elétrica negativa, movendo-se com uma certa velocidade dirigida para a direita, é equivalente ao movimento de uma carga positiva, de mesmo valor absoluto, deslocando-se com a mesma velocidade, para a esquerda.

Este fato deu origem a uma convenção (MÁXIMO, 2000) para o estudo da corrente elétrica: *uma carga negativa em movimento será sempre imaginada como uma carga positiva movendo-se em sentido contrário.*

Dessa convenção, para um condutor metálico, decorre que, em uma corrente elétrica qualquer, as cargas negativas em movimento deverão ser substituídas por cargas positivas movendo-se em sentido contrário. Essa corrente (Figura 2) imaginária, equivalente à corrente real, é chamada corrente convencional.

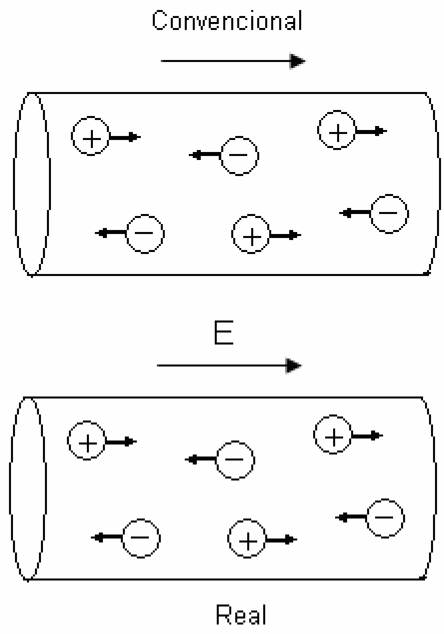


Figura 2: Corrente real e convencional

2.1.3 A Corrente Contínua e a Corrente Alternada

A motivação, para o estudo de tópicos físico-matemáticos que integram este material didático, é feita a partir de medições experimentais com um protótipo. Este texto apresenta, exclusivamente, os casos em que a intensidade da corrente elétrica é constante. Esta corrente é chamada de **corrente contínua (CC)**. O gráfico de sua intensidade em função do tempo, função constante, está indicado (Figura 3) abaixo. Porém, há casos em que a intensidade da corrente não é constante. Por exemplo, a corrente elétrica enviada pelas usinas às indústrias e às residências varia em intensidade e sentido (Figura 3). E, dentro do fio condutor, os elétrons executam um movimento de vai-e-vem. Essa corrente é chamada de **corrente alternada (CA)**, e é representada por funções senoidais.

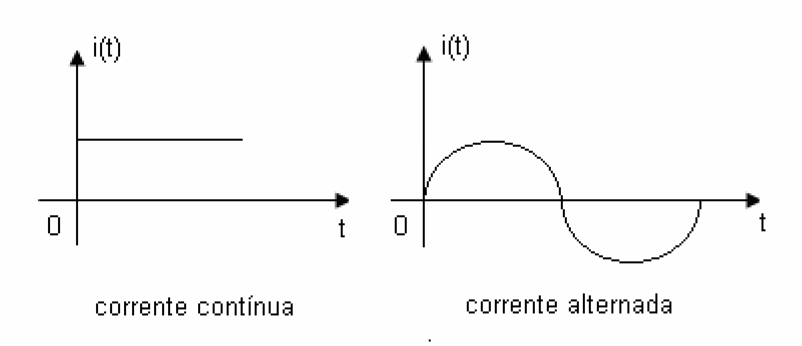


Figura 3: Corrente contínua e alternada

Neste momento, cabe a questão: dado que a corrente na sala de aula é alternada, como, utilizando o protótipo, é medida a corrente contínua?

A resposta é: basta que seja usado um transformador com entrada **CA** e saída **CC**.

2.1.4 Os Efeitos da Corrente Elétrica

A passagem da corrente elétrica, através de condutores, produz diferentes efeitos que dependem da natureza do condutor e da intensidade da corrente (BISCOULA, 2001). Os principais são:

a) o efeito fisiológico – é o efeito que corresponde à passagem da corrente elétrica por organismos vivos e age diretamente no sistema nervoso, provocando contrações musculares; é o que comumente chamamos de choque elétrico.

O valor mínimo de intensidade de corrente que se percebe pela sensação de formigamento é de **1 mA**.

b) o efeito térmico – também conhecido como efeito Joule – é produzido pelo choque dos condutores de carga elétrica contra os átomos dos condutores. Ao receberem energia, os átomos vibram com mais intensidade, aumentando a temperatura do condutor. Este é o efeito que produz energia térmica nos condutores e pode ser verificado nos aquecedores em geral.

c) o efeito químico – é o que corresponde a certas reações químicas, quando a corrente elétrica atravessa as soluções eletrolíticas; é amplamente aplicado em siderurgia, no recobrimento de metais.

d) o efeito magnético – conhecido como a Lei de Ampère – é o que produz um campo magnético na região em torno do condutor, atravessado pela corrente elétrica; tem aplicação nos motores.

2.1.5 A Energia e a Potência da Corrente Elétrica

O movimento de cargas elétricas (**q** dada em coulomb, **C**), entre dois pontos **A** e **B** de um circuito elétrico, só é possível se for mantida uma diferença de potencial **U** (**V_A – V_B**) entre esses pontos. Diz-se (AMALDI, 1992), então, que a **ddp U** (dada em Volt, **V**) é a causa da passagem da corrente elétrica. A energia elétrica consumida é a diferença entre as energias potencial elétrica nos pontos, dada por

$$\tau_{AB} = E_A - E_B,$$

onde a energia é dada por

$$E_A = \Delta q\ V_A \qquad \text{e} \qquad E_B = \Delta q\ V_B\,.$$

Tem-se,

$$\tau_{AB} = \Delta q\ V_A - \Delta q\ V_B$$

ou

$$\tau_{AB} = \Delta q\ (V_A - V_B).$$

Assim,

$$\boldsymbol{\tau_{AB} = \Delta q\ U}.$$

A unidade de medida da energia é o Joule e **1 J** = **1 C.1 V** (veja a Lista de Símbolos).

A potência elétrica consumida é dada pela razão entre a energia consumida e o tempo de consumo

$$P = \frac{\tau}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad P = \frac{\Delta q U}{\Delta t}.$$

Como $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ = i, pode-se escrever que

$$\mathbf{P = U\ i.}$$

A unidade de medida da potência é o watt, com: **1 w** = **1 V.1 A** (veja a Lista de Símbolos).

2.2 OS ELEMENTOS DO CIRCUITO ELÉTRICO

De um modo geral (RAMALHO JUNIOR, 1991), o circuito elétrico é um conjunto de caminhos que permite a passagem da corrente elétrica. Para a existência da corrente elétrica são necessários: uma fonte de energia, condutores em circuito fechado e um elemento para usar a energia da fonte. Alguns elementos que compõem um circuito elétrico são descritos a seguir:

a) Gerador elétrico é o dispositivo capaz de transformar em energia elétrica outra modalidade de energia. O gerador não gera ou cria cargas elétricas. A sua função é fornecer energia às cargas elétricas que o atravessam. Os geradores (Figura 4) mais comuns são os químicos e os mecânicos.

b) Receptor elétrico é o dispositivo que transforma energia elétrica em outra modalidade de energia não, exclusivamente, térmica. O principal receptor (Figura 4) é o motor elétrico que transforma energia elétrica em energia mecânica, além de dissipar uma parcela de energia sob a forma de calor.

c) Resistor elétrico é o dispositivo (Figura 4) destinado, em geral, a limitar a intensidade da corrente elétrica nos circuitos. Os resistores também podem ser usados como conversores de energia elétrica em energia térmica, quando forem concebidos para tal finalidade. Este é o caso de ferros elétricos, chuveiros elétricos, etc.

d) Dispositivos de manobra são elementos (Figura 4) que servem para acionar ou desligar um circuito elétrico, tais como as chaves e os interruptores.

e) Dispositivos de segurança são dispositivos (Figura 4) que protegem os demais elementos do circuito, interrompendo a passagem da corrente elétrica ao serem atravessados por uma corrente de intensidade maior que a prevista. Os mais comuns são os fusíveis e os disjuntores.

f) Dispositivos de controle são dispositivos usados nos circuitos elétricos para medir as várias grandezas elétricas ou para, simplesmente, detectá-las. Os mais usados são o <u>Amperímetro</u>: aparelho (Figura 4) que serve para medir a intensidade da corrente elétrica; o <u>Voltímetro</u>: aparelho (Figura 4) que serve para medir a diferença de potencial entre dois pontos do circuito elétrico; e, o Multímetro: aparelho que pode ser usado tanto com amperímetro ou como voltímetro.

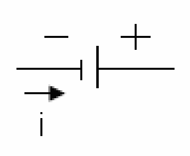
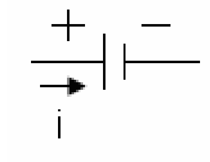
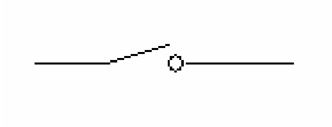
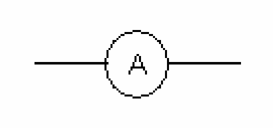
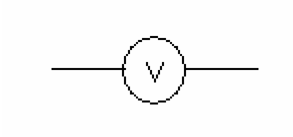
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gerador elétrico</td><td>Receptor elétrico</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Dispositivo de manobra</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Amperímetro</td><td>Voltímetro</td></tr>
</table>

Figura 4: Elementos do circuito elétrico

2.3 A LEI DE OHM

2.3.1 Os Resistores e a Lei de Ohm

O físico alemão George Simon Ohm verificou experimentalmente (1827) que, a uma temperatura constante, o quociente entre a **ddp** aplicada **U** e a intensidade de corrente elétrica **i** permanece constante.

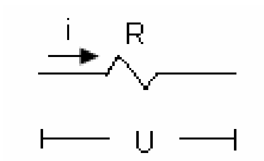


Figura 5: Resistor elétrico

$$\frac{U_1}{i_1} = \frac{U_{21}}{i_{21}} = \frac{U_3}{i_3} = ... = R$$

A medida **R,** assim obtida, é chamada de **resistência elétrica** e mede a oposição do condutor à passagem da corrente elétrica. A razão

$$R = \frac{U}{i} \qquad \text{ou} \qquad U = R\,i$$

é conhecida como a **Lei de Ohm**: "*o quociente entre a* ***ddp U*** *nos terminais de um resistor e a intensidade de corrente elétrica* ***i*** *que o atravessa é constante*". Ou seja, *"a resistência de um condutor é constante".*

A unidade de medida da resistência elétrica é o **ohm** e **1 Ω** = **V / A** (veja a Lista de Símbolos).

Ao transformar energia elétrica, exclusivamente, em energia térmica, o resistor (Figura 5) dissipa a energia elétrica que recebe do circuito. Assim, a potência elétrica consumida por um resistor é a energia dissipada. Como a potência elétrica **P** é dada por

$$P = i\,U,$$

da Lei de Ohm, tem-se que a potência elétrica dissipada no resistor é

$$P = R\,i^2.$$

E, a **energia elétrica consumida** pelo resistor é dada por

$$\boldsymbol{\tau = R\,i^2\,\Delta t,}$$

conhecida como a **Lei de Joule:** *"A energia elétrica dissipada em um resistor, num dado intervalo de tempo, é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de corrente que o percorre".*

A unidade de medida do consumo elétrico é o Joule e **1 J** = **1 w.1s** (veja a Lista de Símbolos). Na prática, por exemplo, nas contas de luz, usa-se como unidade de consumo elétrico o **Kwh**.

2.3.2 A Resistividade elétrica: uma propriedade do material

A resistência de um resistor depende do material que o constitui, de suas dimensões e de sua temperatura. Considere-se um resistor (Figura 6) de comprimento **l** e secção transversal de área **S**.

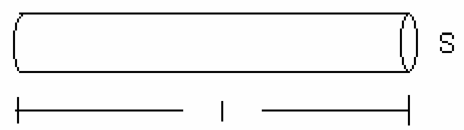


Figura 6: Resistor de fio

Dos resultados da experimentação com condutores metálicos de diversas formas e constituídos dos mais diversos materiais, infere-se que “*à temperatura constante, a resistência elétrica do resistor é diretamente proporcional ao seu comprimento **l*** e *inversamente proporcional à área de sua secção transversal **S***”. Ou seja,

$$\mathbf{R} = \rho\ \frac{l}{S},$$

onde o coeficiente de proporcionalidade, denotado por ρ, é a **resistividade elétrica**, uma grandeza característica do material que constitui o resistor.

2.3.3 Associação de Resistores

Os circuitos elétricos podem ser compostos por mais de um resistor. Isto acontece, quando se faz necessário aumentar ou diminuir a resistência do circuito elétrico. Os resistores componentes do circuito podem ser associados de duas maneiras distintas: em **série** ou em **paralelo**, ou numa **combinação de ambas.**

O resistor que produz o mesmo efeito dos resistores associados, ou seja, que submetido à mesma tensão (**ddp**) deixa passar a mesma intensidade de corrente elétrica é chamado de **resistor equivalente**, denotado por $\mathbf{R_e}$.

2.3.3.1 Associação em Série

Os resistores estão associados em série (Figura 7), quando formam um único caminho para a passagem da corrente elétrica.

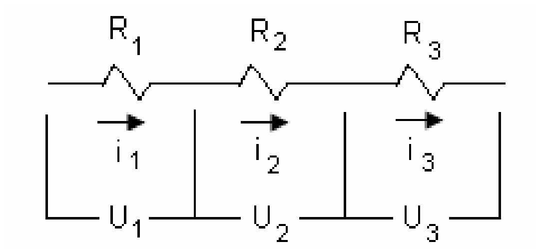


Figura 7: Associação em série

Características da associação em série:

- a intensidade da corrente elétrica **i** é a mesma em todos os resistores, pois eles estão ligados em seqüência. Assim,

$$i = i_1 = i_2 = i_3$$

- a **ddp** na associação, **U**, é igual à soma das **ddp** em cada resistor, isto é,

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Aplicando-se a Lei de Ohm na última equação, determina-se a resistência do resistor equivalente da associação. Mais especificamente, como U = R i, então

$$R_e\ i = R_1\ i + R_2\ i + R_3\ i = i\ (R_1 + R_2 + R_3).$$

E, resulta que

$$\mathbf{R_e = R_1 + R_2 + R_3.}$$

Portanto, *a resistência do resistor equivalente da associação em série é igual à soma das resistências dos resistores associados.*

2.3.3.2 Associação em Paralelo

Os resistores estão associados em paralelo (Figura 8), quando estão ligados pelos seus terminais, ficando submetidos a uma mesma diferença de potencial e oferecendo caminhos separados para a corrente elétrica.

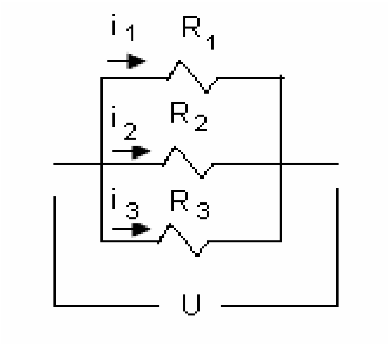


Figura 8: Associação em paralelo

Características da associação em paralelo:

- a **ddp U** é a mesma em todos os resistores, pois eles estão ligados aos mesmos pontos. Assim,

$$U = U_1 = U_2 = U_3.$$

- A corrente elétrica **i** da associação é igual à soma das correntes elétricas que atravessam os resistores, ou seja,

$$i = i_1 + i_2 + i_3.$$

Aplicando-se a lei de Ohm na expressão anterior, pode-se determinar a resistência do resistor equivalente da associação. Deste modo, sendo

$$\mathbf{i} = \frac{U}{R},$$

tem-se,

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

ou

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Portanto*, o inverso da resistência do resistor equivalente da associação em paralelo é igual à soma dos inversos das resistências dos resistores associados.*

2.4 OS GERADORES

Em um circuito elétrico (JOHNSON, 1968), deve existir um dispositivo externo responsável pelo movimento dos portadores de carga elétrica. Este agente externo é o gerador (Figura 9), um dispositivo que realiza uma força eletrostática sobre os portadores de carga elétrica, repondo a energia consumida pelos portadores de carga em outras partes do circuito.

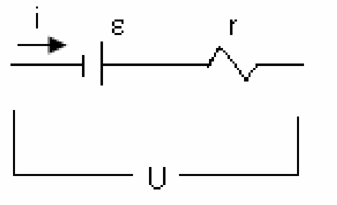


Figura 9: Gerador elétrico

Força eletromotriz (ε) é a razão entre o trabalho de uma força não eletrostática (dado em Joule, **J**) realizado pelo gerador e a carga deslocada entre os terminais do gerador (dada em coulomb, **C**), isto é,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{\Delta q}.$$

Resistência interna (r) é a resistência (dada em ohm, Ω) oferecida à passagem da corrente elétrica dentro do gerador.

A diferença de potencial, que o gerador aplica ao circuito elétrico, é dada pela diferença entre a força eletromotriz produzida e a **ddp** consumida internamente pelo mesmo. Assim, a **ddp** resultante, conhecida como a **equação do gerador,** é

$$\mathbf{U = \varepsilon - ri.}$$

Cabe ressaltar, que a força eletromotriz (**fem**) não é uma força. É o trabalho de uma força não eletrostática por unidade de carga transportada entre os terminais do gerador.

2.4.1 A Potência e o Rendimento do Gerador

Para complementar o estudo do gerador, será estabelecido, a seguir, o conceito e a caracterização de cada potência envolvida.

- Potência total fornecida pelo gerador: $\mathbf{P_t = \varepsilon i}$.
- Potência útil, potência fornecida pelo gerador ao circuito elétrico: $\mathbf{P_u = U\,i}$.
- Potência dissipada sob a forma de calor no interior do gerador: $\mathbf{P_d = r\,i^2}$.

O rendimento do gerador é dado pela relação entre a potência elétrica útil, fornecida ao circuito externo, e a potência elétrica total gerada: $\eta = \frac{P_u}{P_t}$.

2.5 OS RECEPTORES

Os receptores são dispositivos que fazem o papel oposto ao do gerador (MÁXIMO, 2000), ou seja, transformam a energia elétrica recebida por unidade de carga em outras formas de energia. Por exemplo, os motores dos ventiladores. No receptor (Figura 10), a força eletromotriz atua no sentido oposto ao da corrente elétrica. As cargas elétricas realizam trabalho sobre o aparelho.

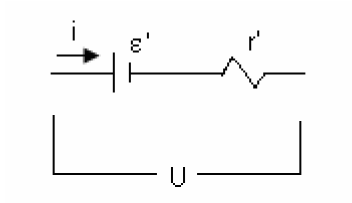


Figura 10: Receptor elétrico

Ao se estabelecer uma **ddp U** nos terminais de um receptor, uma parte da energia elétrica recebida é transformada em outra modalidade. Essa parte útil é chamada de **força contra-eletromotriz (ε')**. A parte restante é transformada em calor, porque o receptor oferece uma resistência, chamada **resistência interna (r')**, à passagem da corrente**.**

A **ddp** que o receptor recebe do circuito elétrico é dada pela soma da força contra-eletromotriz com a **ddp** consumida internamente. Assim, a **ddp** recebida, representada pela **equação do receptor**, é dada por

$$U = \varepsilon' + r'\, i.$$

2.5.1 A Potência e o Rendimento do Receptor

Para complementar o estudo do receptor, será estabelecido, a seguir, o conceito e a caracterização de cada potência envolvida.

- Potência total recebida pelo receptor: $P_t = U\, i$.
- Potência útil, potência absorvida pelo receptor: $P_u = \varepsilon'\, i$.
- Potência dissipada é a convertida em calor no interior do receptor: $P_d = r'\, i^2$.

O rendimento do receptor é dado pela relação entre a potência elétrica útil e a potência elétrica total fornecidas: $\eta = \frac{P_u}{P_t}$.

2.6 OS CIRCUITOS ELÉTRICOS

O caminho fechado, percorrido por portadores de carga, possui geradores, receptores e resistores ligados entre si. Este conjunto caminho-elemento constitui um circuito elétrico e possibilita a passagem da corrente elétrica. Os circuitos são classificados conforme os elementos que os compõem e o tipo de ligação entre os mesmos.

2.6.1 Os Circuitos Elétricos de Corrente Contínua e a Matemática

Um circuito elétrico (Figura 11), onde todos os elementos estão em série, consiste em circuito de caminho único (MACDONALD, 1971). Aqui, é importante lembrar que os geradores fornecem energia às cargas, elevando o potencial; e, os receptores e resistores retiram energia das cargas, diminuindo o potencial.

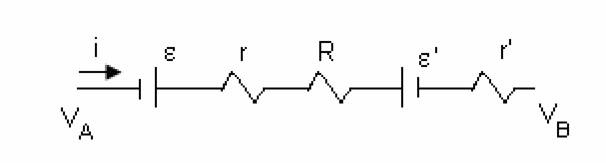


Figura 11: Circuito elétrico em série

Quando se analisa um trecho desse circuito, no sentido da corrente, devem ser adicionadas algebricamente todas as variações de potencial que ocorrem em seus elementos. Este fenômeno é equacionado através de

$$V_A + \varepsilon - r\,i - R\,i - \varepsilon' - r'\,i = V_B.$$

Então, a diferença de potencial, nas extremidades, é

$$V_B - V_A = \varepsilon - \varepsilon' - i\,(R + r + r').$$

E, diante da existência de vários geradores, receptores e resistores, tem-se a forma geral

$$\mathbf{V_B - V_A = \Sigma\varepsilon - \Sigma\varepsilon' - \Sigma(R + r + r')\,i}.$$

Esta equação expressa uma importante lei da física que é a Lei da Conservação de Energia.

2.6.2 Um Circuito Completo

Se os pontos **B** e **A** do circuito anterior forem ligados por um fio condutor metálico de resistência desprezível, a corrente elétrica percorre um caminho fechado de **A** para **B**. Como não existe perda de energia entre os pontos **B** e **A**, $\mathbf{V_A = V_B}$. Em conseqüência, $\mathbf{V_B - V_A = 0}$. Deste modo, decorre que

$$\mathbf{0 = \Sigma\varepsilon - \Sigma\varepsilon' - \Sigma(R + r + r')\,i.}$$

Esta equação linear permite o estudo de circuitos elétricos de apenas um caminho para o percurso da corrente elétrica: os circuitos elétricos simples.

Como exemplo, será determinada a intensidade da corrente elétrica total no circuito (Figura 12) completo. Neste, percebe-se dois possíveis geradores. Entretanto, apenas um deles funcionará como gerador (60 **V**), segundo a forma de ligação, ficando o outro como receptor (20 **V**). O sentido da corrente elétrica será do gerador para o receptor, portanto no sentido horário.

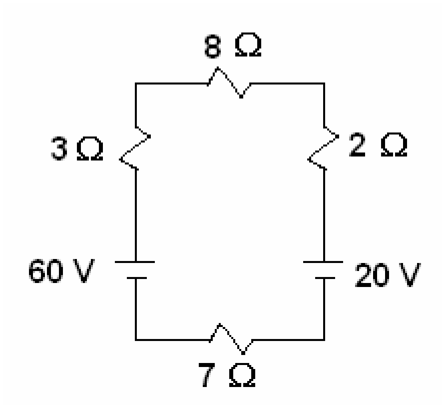


Figura 12: Circuito completo

$$\varepsilon = 60\ \mathbf{V},\ \varepsilon' = 20\ \mathbf{V},\ \mathbf{R_1} = 8\ \Omega,\ \mathbf{R_2} = 7\ \Omega,\ \mathbf{r} = 3\ \Omega \text{ e } \mathbf{r'} = 2\ \Omega$$

Por se tratar de um circuito de caminho único, é válida a relação

$$0 = \Sigma\varepsilon - \Sigma\varepsilon' - \Sigma\,(R + r + r')\,i.$$

Com o somatório dos elementos (fem, fcem e resistência), isto é,

$$\Sigma\varepsilon = 60\ \mathbf{V},\ \Sigma\varepsilon' = 20\ \mathbf{V} \text{ e } \Sigma(R + r + r') = 20\ \Omega,$$

ou seja,

$$0 = 60 - 20 - 20\ \mathbf{i},$$

resulta que a intensidade da corrente elétrica

$$\mathbf{i} = 2\ \mathbf{A}.$$

Se existirem ramificações, partes do circuito ligados em paralelo, duas alternativas são possíveis. Uma delas é substituir as ramificações por trechos equivalentes, o que simplifica o circuito e a equação de circuito completo, acima, é aplicável. Se esta simplificação não for possível, o que acontece quando se tem um circuito multimalhas, devem ser usadas equações específicas, conhecidas como as Leis de Kirchhoff.

2.6.3 As Leis de Kirchhoff

Os circuitos elétricos, que não podem ser reduzidos a um circuito de caminho único (GONÇALVES FILHO, 2007), são chamados de circuitos multimalhas (Figura 13). Aqui, as Leis de Kirchhoff são utilizadas para determinar a intensidade da corrente em cada parte do circuito. A seguir, serão caracterizadas as componentes de um circuito multimalhas:

- **nó**, ponto comum a três ou mais condutores, por exemplo, o ponto B;
- **ramo**, trecho entre dois nós; caminho EFAB;
- **malha**, conjunto de ramos, ABEFA, formando um circuito fechado.

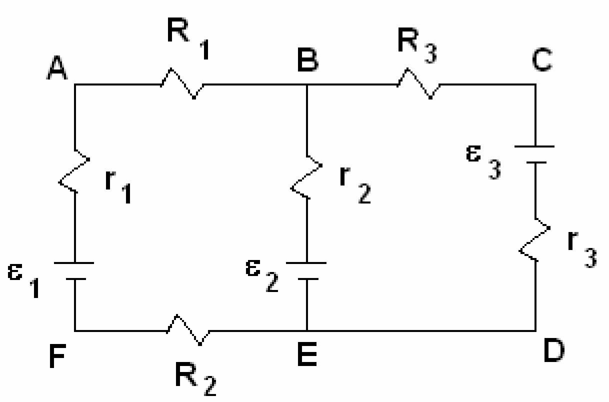


Figura 13: Rede elétrica

A Primeira Lei de Kirchhoff – A Lei dos Nós: *"A soma das intensidades das correntes elétricas que chegam a um nó é igual à soma das intensidades das correntes que deixam o nó"*. Esta lei é uma conseqüência imediata do Princípio da Conservação da Carga.

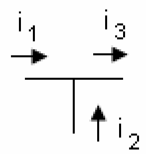


Figura 14: Representação da Lei dos Nós

A Segunda Lei de Kirchhoff - Lei das Malhas: *"Percorrendo uma malha, num mesmo sentido, é nula a soma algébrica das tensões encontradas em cada elemento do circuito".* Esta lei é uma conseqüência imediata do Princípio da Conservação da Energia.

Para as variações de potencial são adotadas as mesmas regras dos circuitos de caminho único.

- No caso dos resistores, quando se percorre a malha no sentido da corrente, a **ddp** é negativa **(- R i**) e, no sentido contrário ao da corrente, a **ddp** é positiva (**+ R i**).
- No caso de geradores e receptores, o sinal da **fem** ou o da **fcem**, será o do pólo de saída, de acordo com o sentido escolhido.

Ao se usar as leis de Kirchhoff, para resolver circuitos elétricos, obtém-se um sistema de equações lineares.

Como exemplo, serão determinadas as intensidades da corrente elétrica em cada um dos ramos do circuito representado na Figura 15.

Considere-se o nó A, representado na figura 14, acima, onde, conforme a Lei dos Nós, $i_1 + i_2 = i_3$. Assim, tem-se a primeira equação do sistema

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0. \qquad (1)$$

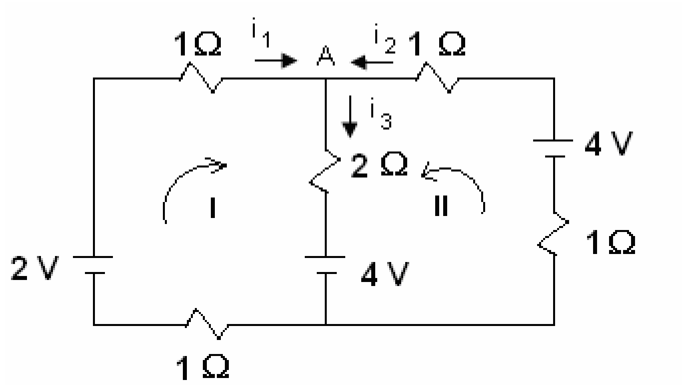


Figura 15: Circuito de duas malhas com especificação dos valores

Da malha **I**, no sentido horário, e da malha **II**, no sentido anti-horário, com a Lei Malhas, tem-se

$$- 1\, i_1 + 2 - 1\, i_1 - 2\, i_3 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad -1\, i_2 + 4 - 1\, i_2 - 2\, i_3 - 4 = 0.$$

Agrupando-se os termos semelhantes, decorrem as equações (2) e (3) do sistema

$$i_1 + i_3 = - 1 \ (2) \quad \text{e} \quad -i_2 - i_3 = 0 \ (3).$$

Deste modo, resulta o sistema 3x3 de equações lineares

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \qquad + i_3 = -1 \\ \qquad - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Este é um sistema possível e determinado. Portanto, tem solução única que pode ser calculada com o uso da regra de Cramer ou do método algébrico da substituição ou, ainda, com métodos matriciais. As operações nos levam aos seguintes valores

i_1 = - 2/3 **A**

i_2 = 1/3 **A**

i_3 = - 1/3 **A**

É importante observar que as correntes elétricas $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_3}$ possuem sentidos contrários aos atribuídos inicialmente. De fato, a solução do sistema é o terno ordenado s = (-2/3, 1/3, -1/3).

A fundamentação teórica para o cálculo da solução, objetivo maior deste trabalho, será desenvolvida em um capítulo específico.

3 SUGESTÕES PARA AULAS EXPERIMENTAIS

Nesta secção, são apresentados alguns exemplos que poderiam guiar o professor na utilização do protótipo de circuito elétrico em sala de aula. Na seqüência, serão descritos cinco procedimentos práticos, sendo dois relacionados com circuitos em série e três com circuitos multimalhas. Como roteiro, em cada caso, será destacado o material necessário, o tipo de ligação a ser feita, a equação matemática relacionada e como realizar e fazer a leitura dos dados.

O objetivo será determinar a intensidade da corrente elétrica ideal e real. Todos os resultados devem ser confrontados, a fim de validar o modelo. Para tanto, os aspectos relevantes de cada experimento e os dados são apresentados em forma de tabelas.

Cabe salientar que esta é apenas uma ilustração. O professor poderá acrescentar outros exemplos, pois que o protótipo de circuito elétrico (Figura 18) permite a possibilidade de diferentes ligações dos bornes, gerando uma grande variedade de circuitos a serem estudados.

Sugestão para a seqüência a ser seguida em todos os experimentos:

- Passo 1- Selecionar o material necessário;
- Passo 2- Conectar os elementos aos bornes, conforme instruções;
- Passo 3- Ativar a chave liga-desliga;
- Passo 4- Efetuar as medições necessárias.

O diagrama de blocos, figura 16, mostra o processo simplificado que foi seguido no desenvolvimento da prática pedagógica, sendo esta dividida em duas fases. Descrição:

FASE I

1- Observar - Significa fazer todas as conexões pretendidas, acionar a chave liga-desliga e avaliar se o equipamento está pronto para ser usado.
2- Enunciar o problema - Formular de modo claro e preciso o que se pretende alcançar com o experimento, ou seja, medir a intensidade da corrente elétrica.
3- Experimentar - Deixar o protótipo ligado, efetuar cada uma das medições com cuidado e registrar os valores obtidos nas leituras.

4- Enunciar o modelo físico - Desenhar as componentes que constituem o modelo físico, selecionar, enunciar e aplicar corretamente as leis da física (Lei de Ohm e Lei de Kirchhoff).

5- Modelo matemático - Extrair as equações lineares decorrentes dos itens anteriores.

FASE II – só poderá ser executada concomitantemente ao capítulo 4.

6- Resolver o modelo - Determinar a solução da equação ou a do sistema de equações lineares.

7- Interpretar a solução - Testar e validar a solução.

8- Predizer e comparar - Criar situações em sala de aula de modo a antever os resultados e comparar com os obtidos.

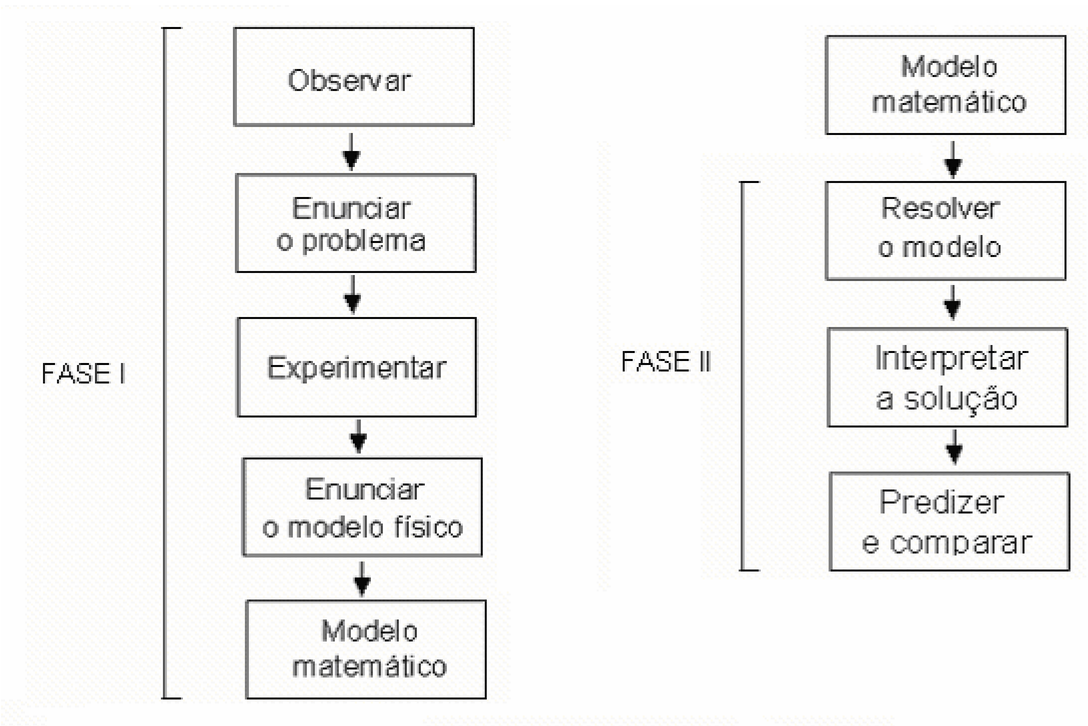


Figura 16: Diagrama de blocos

3.1 O PROTÓTIPO DE CIRCUITO ELÉTRICO

O protótipo de circuito elétrico é constituído por um amperímetro, bornes, resistores e fios condutores acoplados em uma placa de policarbonato. Nos experimentos, este é usado com o objetivo de medir a intensidade da corrente elétrica que flui no circuito. O aparelho é mostrado nas figuras (17) (foto) e (18) (planta baixa), e tem a sua construção detalhada no anexo A.

Figura 17 Foto do protótipo

A conexão entre os fios presos aos bornes poderá ser estabelecida de várias maneiras. Algumas destas possibilidades são sugeridas nos experimentos exemplificados a seguir, neste mesmo capítulo. Como elementos opcionais que integram o "kit" estão: um multímetro digital, quatro resistores extras, dois minúsculos motores, um "led", seis pontes de curto circuito (fios condutores sem resistência) e uma chave liga-desliga (ver anexo A).

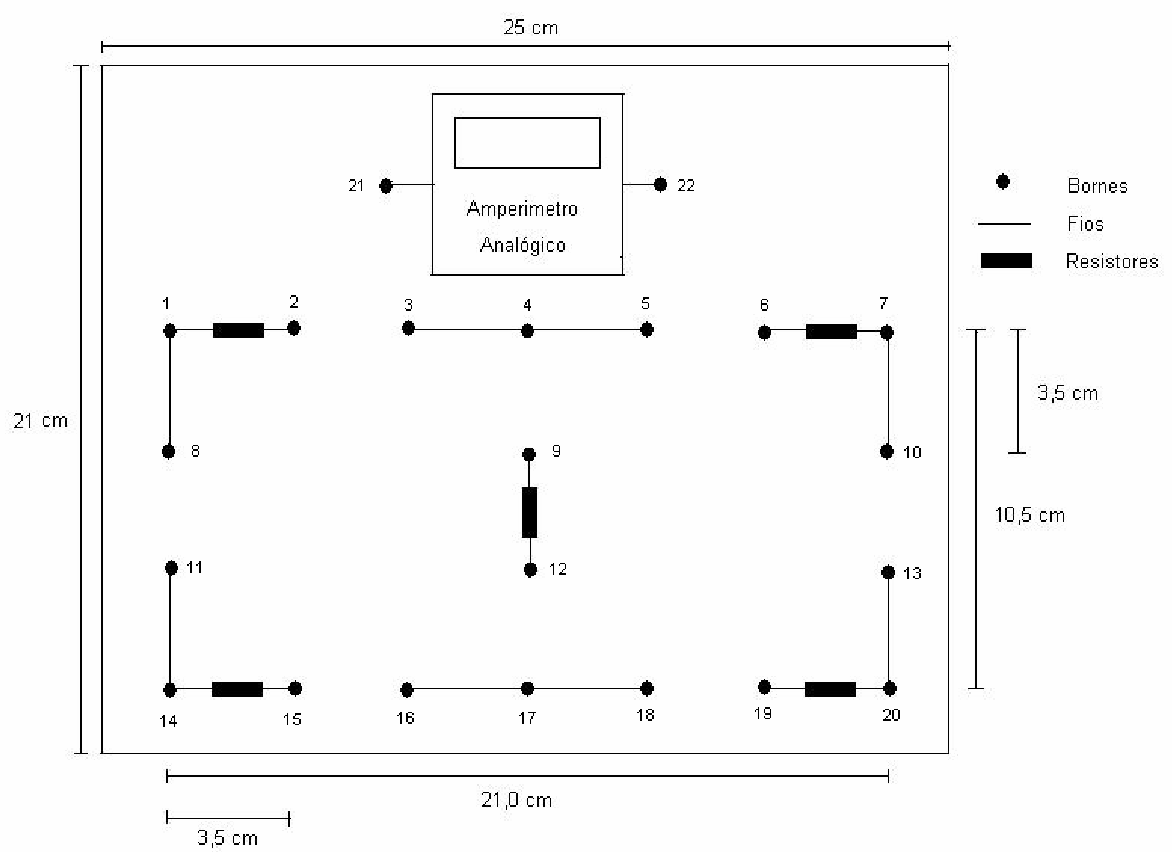


Figura 18: Planta do protótipo de circuito elétrico

3.2 CIRCUITOS SIMPLES

Inicialmente, serão considerados experimentos com circuitos simples, pelo fato de serem modelados por apenas uma equação linear. O resultado da medida da corrente elétrica, em cada ramo do circuito, poderá ser visualizado no mostrador do Amperímetro (ou do Multímetro).

3.2.1 Circuito 1– do tipo Fonte e Resistor.

O circuito consiste de um resistor de 100 Ω e de uma fonte de 12 **V** ligados em série, como mostra a figura 19. O material necessário para o experimento é exibido na tabela 1.

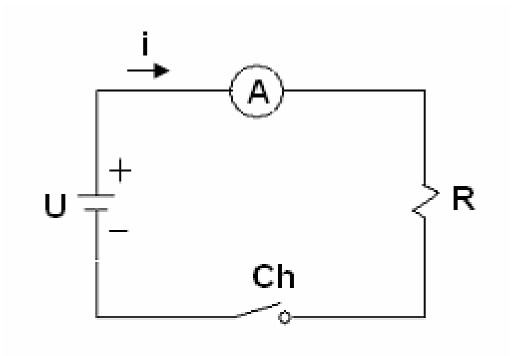


Figura 19: Circuito do experimento 1

Tabela 1: Material necessário, experimento 1

Placa – 1 unidade	Fonte – 1 unidade
Chave liga-desliga – 1 unidade	Ponte de curto-circuito – 1 unidade
Multímetro – 1 unidade	

Montagem do circuito 1 – os elementos devem ser ligados (Figura 20) conforme descrição a seguir:

- **Fonte**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 8 e o pino vermelho ligado ao borne 11.

- **Chave liga-desliga**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 21 e o pino vermelho ligado ao borne 2.

- **Ponte de curto-circuito**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 14 e o pino vermelho ligado ao borne 22.

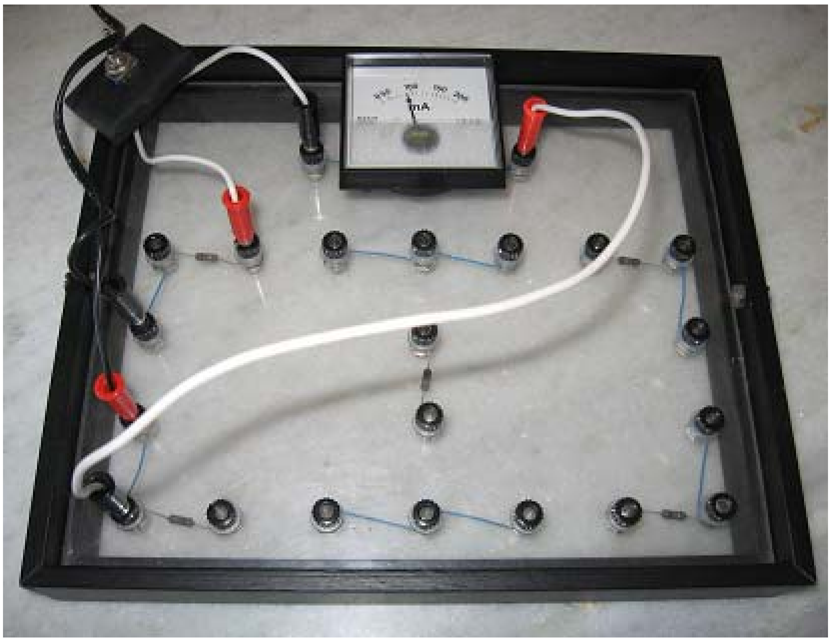


Figura 20 Foto Experimento 1

Leituras

Após as ligações serem feitas, usa-se o multímetro para a leitura das grandezas.

Para a leitura da tensão, o multímetro deve estar ligado em paralelo com a fonte. Esta é obtida com os terminais nos bornes 8 e 11. A leitura (Figura 21) foi de 10,38 **V**.

Para a leitura da resistência elétrica, o multímetro deve estar ligado em paralelo com o resistor. Esta é obtida, com os terminais nos bornes 1 e 2. A leitura (Figura 21) foi de 102,9 **Ω.**

Para a leitura da corrente elétrica, o multímetro deve estar ligado em série com o circuito. Esta é obtida, usando-o no lugar da ponte de curto-circuito, ou seja, com os seus terminais nos bornes 14 e 22. A leitura (Figura 21) foi de 100,8 **mA.** Os valores das leituras, nas medições, estão reunidos na tabela 2.

Equacionamento matemático do experimento segundo a Lei de Ohm

$$U = R\,i.$$

Substituindo-se os valores das medições, tem-se

$$10{,}380 = 102{,}900\ i.$$

E, o valor da intensidade da corrente é

$$i = 10{,}380 / 102{,}900,$$

Figura 21 Foto Leituras do Experimento 1

ou

$$i = 0{,}100875\ \mathbf{A} = 100{,}875\ \mathbf{mA}\ .$$

A corrente elétrica é lida no aparelho em **mA**. Portanto, o valor da leitura, no Sistema Internacional de Unidades, foi transformado de **A** (Ampère) em **mA** (miliampère).

Agora, confrontando-se o valor esperado com o obtido na leitura, verifica-se a validade da Lei de Ohm. Aqui, o erro é devido à limitação do aparelho que permite a leitura com apenas uma casa decimal (e, pelas especificações do manual do aparelho ele poderá apresentar um erro de 2%).

Tabela 2: Valores nominais e das leituras, experimento 1

Grandeza	Valor Nominal	Leitura
Tensão (**V**)	12	10,380 (*)
Resistência elétrica (Ω)	100	102,900 (**)
Corrente elétrica (**mA**)	120	100,800 (***)

* A diferença, observada na leitura da tensão, em relação ao seu valor nominal, decorre da resistência interna da fonte (17 Ω).

** A diferença, observada na leitura da resistência elétrica, (2,9 %) em relação ao seu valor nominal, é menor que a tolerância do resistor (5 %).

*** As diferenças, observadas na tensão e na resistência elétrica, produzem a diferença na leitura da corrente elétrica.

Em todos os experimentos descritos a seguir, essas diferenças poderão ser constatadas nas tabelas.

Sugere-se que, para o procedimento descrito acima, deva estar prevista uma duração de cerca de 20 minutos. A aula experimental poderá ser ministrada para um grupo de, no máximo, 25 alunos. Sendo que há apenas um equipamento, este deverá ser manuseado pelo professor. Entretanto, os alunos devem ser incentivados a se aproximar e a participar ativamente do experimento. A sua colaboração também deve ser solicitada quando da ligação dos elementos do circuito e, principalmente, nas leituras das medições e verificação dos resultados.

Cabe salientar que esta atividade foi desenvolvida em uma turma de alunos com conhecimento prévio de eletricidade. Contudo, este não precisa ser considerado como pré-requisito.

Observe-se que este problema envolve apenas uma equação linear. A sua resolução é um tópico desenvolvido na quinta série do ensino fundamental.

3.2.2 Circuito 2 – do tipo Fonte e Dois Resistores em série.

O circuito consiste de dois resistores de 100 Ω e de uma fonte de 12 **V** ligados em série, como mostra a figura 22. O material necessário para o experimento é exibido na tabela 3.

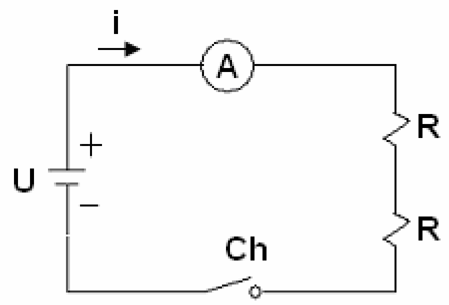


Figura 22: Circuito do Experimento 2

Tabela 3: Material necessário, experimento 2

Placa – 1 unidade	Fonte – 1 unidade
Chave liga-desliga – 1 unidade	Ponte de curto-circuito – 1 unidade
Multímetro – 1 unidade	

Montagem do circuito 2 – os elementos devem ser ligados conforme descrição a seguir:

- **Fonte**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 8 e o pino vermelho ligado ao borne 11.

- **Chave liga-desliga**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 21 e o pino vermelho ligado ao borne 2.

- **Ponte de curto-circuito**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 15 e o pino vermelho ligado ao borne 22.

Equacionamento matemático do experimento

$$\mathbf{U = (R_1 + R_2)\, i}.$$

Tabela 4: Valores nominais e das leituras, experimento 2

Grandeza	Valor Nominal	Leitura
Tensão (**V**)	12	10,750
Resistência elétrica (Ω)	200	203,000
Corrente elétrica (**mA**)	60	53,000

3.3 CIRCUITOS DE DUAS MALHAS

Aqui, serão considerados os experimentos com circuitos de duas malhas. Neste caso, tem-se circuitos descritos por um sistema de equações lineares, que traduzem as Leis de Ohm e Kirchhoff.

3.3.1 Circuito 3– do tipo Fonte e Dois Resistores em paralelo

O circuito consiste de dois resistores de 100 Ω e de uma fonte de 12 **V** ligados em paralelo, como mostra a figura 22. O material necessário para o experimento é exibido na tabela 5.

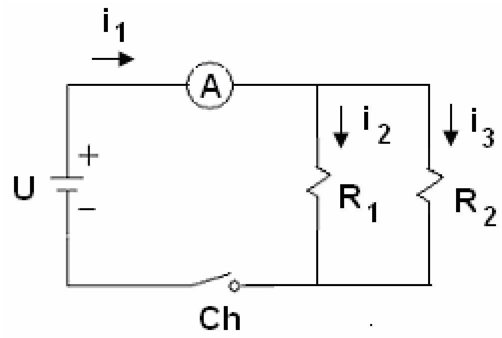


Figura 23: Circuito do Experimento 3

Tabela 5: Material necessário, experimento 3

Placa – 1 unidade	Chave liga-desliga –1 unidade
Fonte – 1 unidade	Pontes de curto-circuito – 2 unidades
Resistores – 2 unidades	Multímetro – 1 unidade

Montagem do circuito 3 – os elementos devem ser ligados (Figura 24) conforme descrição a seguir:

- **Fonte**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 8 e o pino vermelho ligado ao borne 11.

- **Chave liga-desliga**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 21 e o pino vermelho ligado ao borne 1

- **Pontes de curto-circuito**

Na primeira ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 14 e o pino vermelho ligado ao borne 16.

Na segunda ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 3 e o pino vermelho ligado ao borne 22.

- **Resistores 1 e 2**

O primeiro pino banana preto deverá ser ligado ao borne 17 e o pino vermelho ligado ao borne 4.

O segundo pino banana preto deverá ser ligado ao borne 18 e o pino vermelho ligado ao borne 5.

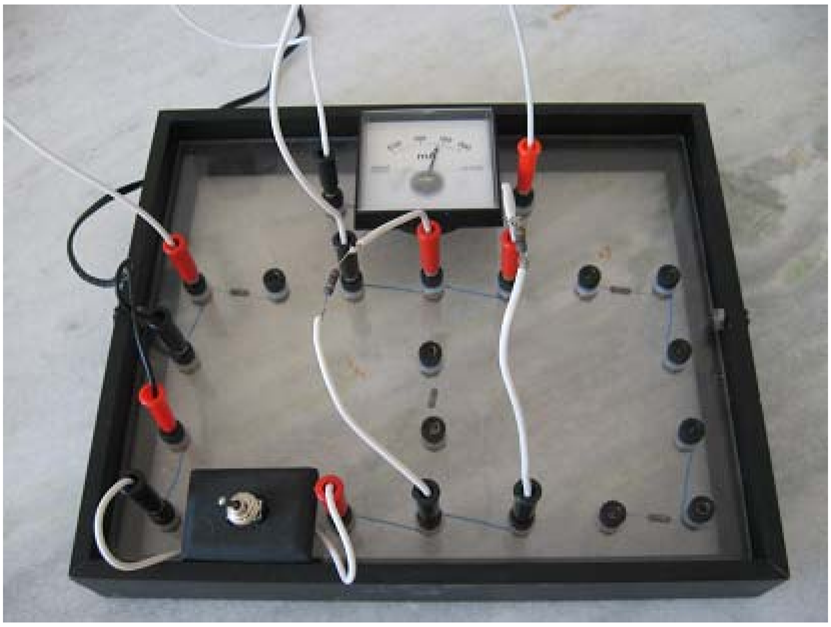


Figura 24 Foto experimento 3

Leituras

Após as ligações serem feitas, usa-se o multímetro para as leituras das grandezas.

Para a leitura da tensão, o multímetro deve estar ligado em paralelo com a fonte. Esta é obtida com os terminais nos bornes 8 e 11. A leitura foi de 9,67 **V** (Figura 25).

Para a leitura da resistência elétrica, o multímetro deve estar ligado em paralelo com o resistor. Para o resistor 1, esta é obtida com os terminais nos bornes 4 e 14. A leitura (Figura 25) foi 103,6 de Ω, e para o resistor 2, com os terminais nos bornes 5 e 18, a leitura (Figura 25) foi de 101,3 **Ω.**

A leitura da corrente elétrica é efetuada com o multímetro ligado em série com o circuito. A intensidade da corrente i_1 é lida com os terminais ligados nos bornes 1 e 3. A intensidade da corrente i_2 é lida entre os bornes, deslocando-se o pino vermelho banana do resistor 1 para o borne 10 e ligando-se os terminais do aparelho nos bornes 4 e 7. Para a leitura, entre os bornes, da intensidade de corrente i_3, desloca-se o pino vermelho banana do resistor 2 para o borne 10 e liga-se os terminais do aparelho nos bornes 5 e 7. Com as leituras (Figura 25) sucessivas, foram obtidos os valores : **i_1** = 188,9 **mA**, **i_2** = 93,3 **mA** e **i_3** = 95,6 **mA.**

Os valores das leituras, nas medições, estão reunidos na tabela 6.

Figura 25 Foto Leituras do Experimento 3

Sistematização matemática do experimento e tabela de valores:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 \cdot i_2 = U \\ R_2 \cdot i_3 = U \end{cases}$$

Substituindo os valores das medições, tem-se

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 103{,}6\ i_2 = 9{,}67 \\ 101{,}3\ i_3 = 9{,}67 \end{cases}$$

Tabela 6: Valores nominais e das leituras, experimento 3

Grandeza	Valor Nominal	Leitura
Tensão (**V**)	12	9,670
Resistência elétrica 1(Ω)	100	103,600
Resistência elétrica 2(Ω)	100	101,300
Corrente elétrica 1(**mA**)	200	188,900
Corrente elétrica 2(**mA**)	100	93,800
Corrente elétrica 3(**mA**)	100	95,200

Recomenda-se que, para o procedimento descrito acima, deva estar prevista uma duração de cerca de 25 minutos.

Antes do início da atividade, seria interessante que os “cadernos” de física (capítulo 2) e de matemática (capítulos 4 e 5) fossem distribuídos aos alunos.

Durante as medições, o professor construirá, passo a passo, as equações que integrarão o sistema. Sendo assim, ao finalizar esta tarefa, o professor deixará em aberto a resolução do(s) sistema(s) relacionado(s) ao experimento(s). Aqui, caberá, ao professor, ressaltar a importância dos conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos na seqüência, nas aulas teóricas.

Após o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos (Capítulo 4), o professor deverá voltar ao sistema, para resolvê-lo. A solução poderá ser obtida também com o uso da planilha eletrônica (detalhado no Capítulo 6). Esta seqüência de ações é recomendada para os demais experimentos.

3.3.2 Circuito 4 – do tipo Fonte e Três Resistores em série e em paralelo

O circuito consiste de três resistores de 100 Ω e de uma fonte de 12 **V** ligados em série e em paralelo, como mostra a figura 26. O material necessário para o experimento é exibido na tabela 7.

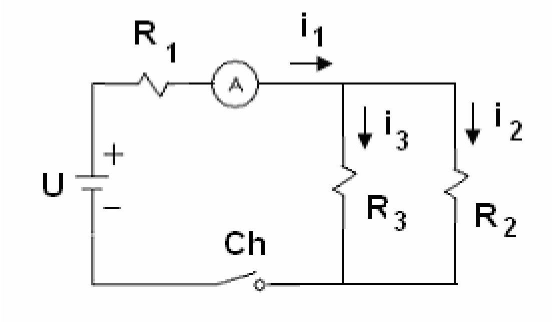


Figura 26: Circuito do Experimento 4

Tabela 7: Material necessário, experimento 4

Placa – 1 unidade	Chave liga-desliga – 1 unidade
Fonte – 1 unidade	Pontes de curto-circuito – 2 unidades
Resistores – 2 unidades	Multímetro – 1 unidade

Montagem do circuito – os elementos devem ser ligados conforme descrição a seguir:

- **Fonte**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 8 e o pino vermelho ligado ao borne 11.

- **Chave liga-desliga**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 21 e o pino vermelho ligado ao borne 2.

- **Pontes de curto-circuito**

Na primeira ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 14 e o pino vermelho ligado ao borne 16.

Na segunda ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 3 e o pino vermelho ligado ao borne 22.

- **Resistores 1 e 2**

O primeiro pino banana preto deverá ser ligado ao borne 17 e o pino vermelho ligado ao borne 4.

O segundo pino banana preto deverá ser ligado ao borne 18 e o pino vermelho ligado ao borne 5.

Equacionamento matemático do experimento e tabela de valores

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ R_1.i_1 + R_2.i_3 = U \\ R_3.i_2 - R_2.i_3 = 0 \end{cases}$$

Tabela 8: Valores nominais e das leituras, experimento 4

Grandeza	Valor Nominal	Leitura
Tensão (**V**)	12	10,580
Resistência elétrica 1(Ω)	100	101,000
Resistência elétrica 2(Ω)	100	106,000
Resistência elétrica 3(Ω)	100	103,000
Corrente elétrica 1(**mA**)	80	69,100
Corrente elétrica 2(**mA**)	40	34,100
Corrente elétrica 3(**mA**)	40	35,100

3.3.3 Circuito 5 – do tipo Fonte e Quatro Resistores em série e em paralelo

O circuito consiste de quatro resistores de 100 Ω e de uma fonte de 12 **V,** ligados em série e em paralelo, como mostra a figura 27. O material necessário para o experimento é exibido na tabela 9.

Tabela 9: Material necessário, experimento 5

Placa – 1 unidade	Chave liga-desliga – 1 unidade
Fonte – 1 unidade	Pontes de curto-circuito – 2 unidades
Resistores – 2 unidades	Multímetro – 1 unidade

Montagem do circuito 5 – os elementos devem ser ligados conforme descrição a seguir:

- **Fonte**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 8 e o pino vermelho ligado ao borne 11.

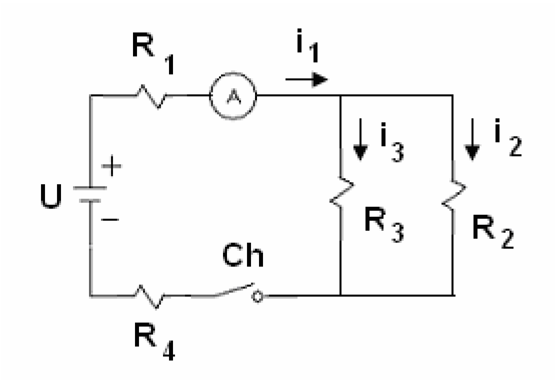


Figura 27: Circuito do Experimento 5

- **Chave liga-desliga**

O pino banana preto deverá ser ligado ao borne 21 e o pino vermelho ligado ao borne 2.

- **Pontes de curto-circuito**

Na primeira ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 15 e o pino vermelho ligado ao borne 16.

Na segunda ponte, o pino banana preto deverá ser ligado ao borne 3 e o pino vermelho ligado ao borne 22.

- **Resistores 1 e 2**

O primeiro pino banana preto deverá ser ligado ao borne 17 e o pino vermelho ligado ao borne 4.

O segundo pino banana preto deverá ser ligado ao borne 18 e o pino vermelho ligado ao borne 5.

Equacionamento matemático do experimento e tabela de valores:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ (R_1+R_2).i_1 + R_2.i_3 = U \\ R_3.i_2 - R_2.i_3 = 0 \end{cases}$$

Tabela 10: Valores nominais e das leituras, experimento 5

Grandeza	Valor Nominal	Leitura
Tensão (**V**)	12	10,830
Resistência elétrica 1(Ω)	100	101,000
Resistência elétrica 2(Ω)	100	106,000
Resistência elétrica 3(Ω)	100	103,000
Resistência elétrica 4(Ω)	100	102,000
Corrente elétrica 1(**mA**)	48	42,500
Corrente elétrica 2(**mA**)	24	21,200
Corrente elétrica 3(**mA**)	24	21,400

3.4 CONSIDERAÇÕES

É importante ressaltar que, devido à quantidade de bornes (20 unidades) instalados, existe a possibilidade de gerar no protótipo de circuito elétrico um grande número de circuitos em série e em paralelo. Portanto, os exemplos descritos, acima, constituem uma pequena amostra das possibilidades de instalação de circuitos no protótipo.

Observe-se, também, que outros componentes citados na construção do protótipo, a saber: o "led", os motores e o multímetro não foram utilizados nos experimentos. Contudo, os mesmos poderiam ser empregados na construção de circuitos alternativos. Assim, como sugestão: o uso do "led", ou dos motores, poderá substituir um ou mais resistores, na instalação dos circuitos descritos; e, o uso do multímetro poderia substituir o do amperímetro, quando da medição das correntes aplicadas nos diferentes ramos dos circuitos.

O aquecimento dos condutores provoca um aumento na sua resistência e uma variação na intensidade da corrente elétrica. Em conseqüência, pode produzir erro nas leituras experimentais. Em particular, no protótipo aqui utilizado, levando-se em conta, diante da baixa intensidade de corrente, que o aquecimento é muito pequeno, este possível erro foi desconsiderado.

Observação importante: aconselha-se, ao professor, muito cuidado quando da manipulação do equipamento, embora este não apresente riscos, pois a voltagem é da ordem de 12 **V**. E, pelas normas brasileiras (NR 10 – Segurança em serviços com eletricidade), tensões menores que 50 **V** em corrente alternada (**CA**) e 120 **V** em corrente contínua (**CC**) são inofensivas.

4 SISTEMAS LINEARES E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Este capítulo visa proporcionar o embasamento teórico para a solução de sistemas de equações lineares. Aqui, a abordagem será restrita ao tipo de sistemas decorrentes de situações práticas. Mais especificamente, pretende-se apresentar de modo sucinto as ferramentas necessárias para a resolução de problemas formulados nos tópicos anteriores.

O estudo inicia com uma breve recapitulação dos conceitos de matriz e de determinante. A seguir, são apresentados alguns métodos para a solução de sistemas de equações lineares: a regra de Cramer, o escalonamento e o da matriz inversa.

4.1 MATRIZES

O conceito de matriz aparece naturalmente na formulação de muitos tipos de problemas. A vantagem é que, o equacionamento, em forma matricial (BOLDRINI, 1986), ordena e simplifica o problema, além de sugerir diretamente o método de solução.

Matriz é uma tabela ordenada de elementos, dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, os valores da tensão, resistência elétrica e corrente elétrica em três experimentos.

	Tensão (V)	Resistência (Ω)	Corrente Elétrica (A)
Experimento 1	20	5	4
Experimento 2	30	10	3
Experimento 3	40	10	4

Para conferir a intensidade da corrente elétrica medida no experimento 1, basta olhar a primeira linha e a terceira coluna.

4.1.1 Definição

Sejam dois subconjuntos

$$\mathbf{I} = \{ i \in \mathrm{IN} \ / \ 1 \leq i \leq m \} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{J} = \{ j \in \mathrm{IN} \ / \ 1 \leq j \leq n \},$$

definidos no conjunto dos números naturais IN, e o produto cartesiano entre os mesmos

I x J = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..,(2,1),(2,2),..., (m, n)}.

Chama-se (NETTO, 1973) matriz real de ordem m por n qualquer função

M: I x J → IR

No contexto do ensino médio, somente são consideradas as matrizes reais.

4.1.2 Domínio e Conjunto-imagem

O domínio da função matriz de ordem m por n é o conjunto:

I x J = {(i, j) ∈ IN x IN / 1 ≤ i ≤ m , 1 ≤ j ≤ n}.

O que pode variar de uma matriz para outra, quanto ao domínio, é somente a ordem, isto é, os números m e n.

O conjunto-imagem da função matriz de ordem m por n é o conjunto de elementos a_{ij} correspondentes aos pares ordenados (i,j). Para exemplificar, o par ordenado (1,1) → a_{11} e (2,3) → a_{23}.

Ao se escrever o conjunto das imagens, utiliza-se uma tabela retangular, com m linhas e n colunas, de modo que cada elemento a_{ij} seja colocado na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Por exemplo, se a matriz é de ordem 3 por 2, tem-se

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

4.1.3 Representação Genérica de uma Matriz

Deve-se lembrar que o domínio é fixo e o que varia é somente a ordem, e que esta aparece, no conjunto-imagem, como o número de linhas e de colunas. Portanto, para representar uma matriz de ordem m por n, usa-se apenas o seu conjunto-imagem, ordenado segundo m linhas e n colunas. Assim, a matriz m por n é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente,

$$\mathbf{M} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

As matrizes também podem ser representadas entre colchetes $[\ ]$ ou por barras duplas paralelas $\|\ \|$.

4.1.4 Matrizes Especiais

A seguir, serão definidas algumas matrizes especiais (NETTO, 1973). Entretanto, a inversa, a cofator e a adjunta de uma matriz, serão definidas mais tarde, neste texto, após a introdução de determinante de uma matriz quadrada. É importante ressaltar que, com este material, não se pretende substituir o livro didático. Sendo assim, a fundamentação teórica, bem como os exemplos, foram limitados ao contexto do trabalho.

Matriz linha – é a matriz de ordem 1 x n, ou seja, aquela que tem apenas uma linha, isto é,

$$\mathbf{M} = (a_{11} a_{12} \dots . a_{1n}).$$

Matriz coluna – é a matriz de ordem m x 1, ou seja, aquela que tem apenas uma coluna, ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Matriz nula – é a matriz, cujos elementos são todos nulos, ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz quadrada – é a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas. É referida como a matriz n x n ou, simplesmente, matriz de ordem n. A matriz quadrada de ordem 3, é representada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Os elementos a_{ij}, onde i = j, constituem a diagonal principal da matriz quadrada.

Matriz diagonal – é a matriz quadrada em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Uma matriz diagonal de ordem 3 é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matriz identidade – é a matriz quadrada diagonal de ordem n, em que todos os elemento da diagonal principal são iguais a 1. Ou, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para i = j. A matriz identidade de ordem n é representada por

$$\mathbf{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular superior – é a matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos abaixo de diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para i > j. Ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular inferior – é a matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos acima de diagonal principal são nulos. Portanto, $a_{ij} = 0$, para i < j, e a matriz é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz oposta da matriz dada – é a matriz cujos elementos têm sinais opostos aos dos elementos da matriz dada. Formalmente, dada a matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$, chama-se oposta de **A**, a matriz: **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = - a_{ij}$, para todo i e para todo j. Sendo

A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, sua oposta é a matriz **B** = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$.

Matriz Transposta - dada a matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$, chama-se a transposta de **A** à matriz $\mathbf{A^T} = (a^T_{ji})_{n \times m,}$ tal que $a^T_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que as colunas de $\mathbf{A^T}$ são ordenadamente iguais às linhas de **A.** Como exemplo, tem-se

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ e sua transposta $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.1.5 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que, para duas matrizes serem iguais, devem ser da mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Por exemplo, são iguais as matrizes,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

4.1.6 Operações com matrizes

4.1.6.1 Adição

Dadas duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma **A** + **B** a matriz **C** = $(c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j (NETTO, 1973). Isto significa que a soma de duas matrizes **A** e **B** do tipo m x n é uma matriz **C** do mesmo tipo, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em **A** e **B**. Por exemplo,

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -4 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2-1 & 3+1\\ 4-4 & 5+0 & 6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Propriedades da Adição

A adição de matrizes do tipo m x n goza das seguintes propriedades:

i) **A** + **B** = **B** + **A** – comutatividade

ii) **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C** – associatividade

iii) **A** + **0** = **A**, onde **0** denota a matriz nula m x n

iv) **A** + (**-A**)= (**-A**) + **A**= **0.**

4.1.6.2 Produto de Matriz por um Número

Dado um número k e uma matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$,chama-se matriz produto k**A** a matriz **B** = (b_{ij}) m x n, tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j. Ou seja, multiplicar uma matriz por um número k é construir uma matriz **B** formada pelos elementos de **A** todos multiplicados por k. Como exemplo,

$$\mathbf{B} = 3\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 5 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 21 & 6\\ 15 & -9 & -6\end{pmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação da Matriz por um Número

O produto de uma matriz por um número goza das seguintes propriedades:

i) k (**A + B**) = k**A** + k**B**

ii) $(k_1 + k_2)$ **A** = k_1**A** + k_2**A**

iii) k_1 (k_2 **A**) = (k_1k_2) **A**

iv) 1. **A** = **A,** onde, **A** e **B** são matrizes do tipo m x n e k, k_1 e k_2 são números reais.

4.1.6.3 Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto **AB** a matriz **C** = (c_{ik}) m x p, tal que cada elemento (NETTO, 1973)

$$c_{ik} = a_{i1} \,.\, b_{ik} + a_{j2} \,.\, b_{2k} + ... + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \;.$$

Considerações:

- A definição dada garante a existência do produto **AB** somente se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**, pois **A** é do tipo m x n e **B** é do tipo n x p;
- Da definição, o produto **AB** é uma matriz que tem o número de linhas de **A** e o número de colunas de **B**, pois **C** = **AB** é do tipo m x p. Por exemplo,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+16+27 \\ 28+40+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}.$$

Propriedades do Produto de Matrizes

i) (**A** x **B**) x **C**= **A** x (**B** x **C**) – Associatividade da multiplicação

ii) (k . **A**) . **B**= **A** . (k . **B**)= k . (**A** . **B**)

iii) **A** x (**B** + **D**)= **A** x **B** + **A** x **D**; $\forall$ **A**, $\forall$ **B**, $\forall$ **D**

(B + **D**) x **C**= **B** x **C** + **D** x **C**; $\forall$ **B**, $\forall$ **C**, $\forall$ **D** (Distributividade em relação à soma).

A multiplicação de matrizes não é comutativa. Em gera,l **AB** $\neq$ **BA**. Por exemplo,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$

O produto de matrizes pode ser nulo, sem que nenhuma das matrizes seja nula. Por exemplo,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 DETERMINANTES

Toda a matriz quadrada tem, associado a ela, um número chamado determinante da matriz, obtido a partir de operações que envolvem todos os elementos da matriz (WEISS, 1978; COSTA, 1981). Uma das aplicações dos determinantes é na resolução de sistemas de equações lineares.

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 1

Seja a matriz **M**=(a_{11}), quadrada de ordem 1. Por definição, o determinante de **M** é igual ao número a_{11}, e é denotado por det **M** = a_{11}.

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 2

O determinante de **M,** uma matriz quadrada de ordem 2, é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Com

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, obtém-se det **A** = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 3

Dada uma matriz quadrada de ordem 3,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

o seu determinante é o número

det **M** = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz, procede-se do seguinte modo:

- repete-se, ao lado da última coluna da matriz, as duas primeiras colunas (ou as duas primeiras linhas abaixo da última linha);
- os termos precedidos pelo sinal positivo são obtidos multiplicando-se os elementos da diagonal principal e de suas paralelas;
- os termos precedidos pelo sinal negativo são obtidos multiplicando-se os elementos da diagonal secundária e de suas paralelas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

O cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem maior que 3, não será objeto de estudo neste material.

Propriedades dos Determinantes

i) O determinante de uma matriz **A** é igual ao determinante de sua transposta $\mathbf{A}^T$.

ii) Se uma matriz tem uma fila de elementos nulos, o seu determinante é nulo.

iii) Ao se permutar duas filas da matriz $\mathbf{A}=(a_{ij})_n$, o determinante da nova matriz **A** muda de sinal.

iv) Se uma matriz **A** tem 2 filas iguais, o seu determinante é nulo.

v) Ao se multiplicar uma fila de uma matriz **A** por uma constante k $\in$ IR**,** o seu determinante fica multiplicado por k**.**

vi) Se **A** = **B** + **C**, então det **A** = det **B**+ det **C**.

vii) Se uma matriz **A** tem uma fila de elementos que é combinação linear de outras, então det **A**=0.

4.3 MATRIZ INVERSA

Se **A** é uma matriz quadrada de ordem n, tal que det **A** ≠ 0, a inversa de **A** é matriz denotada por $\mathbf{A}^{-1}$, e tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ é inversível, det } \mathbf{A} \neq 0, \text{ e } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n$$

A matriz quadrada inversível é dita uma matriz não-singular; e, quando não inversível (det **A** = 0), é dita singular.

4.3.1 Cálculo da Matriz Inversa usando determinantes

Antes do cálculo propriamente dito, faz-se necessário introduzir o conceito de menor complementar e de cofator de um elemento de uma matriz; e, em seqüência, a definição de matriz cofator e de matriz adjunta.

4.3.1.1 Menor Complementar

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem $n \geq 2$, denomina-se o menor complementar do elemento a_{ij} ao determinante D_{ij} associado à matriz quadrada que se obtém da matriz **A,** ao se suprimir a linha e a coluna do elemento a_{ij} considerado. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

tem-se que o menor complementar do elemento a_{21} é o determinante obtido suprimindo-se a segunda linha e a primeira coluna

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 50 + 3 = 53.$$

4.3.1.2 Cofator de um elemento

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem $n \geq 2$, denomina-se o cofator do elemento a_{ij} de **A** ao número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$. Para exemplificar, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

decorre que $D_{21} = 53$, e o cofator deste elemento é

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\, 53 = -53.$$

4.3.1.3 Matriz Cofator

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem $n \geq 2$, denomina-se a matriz dos cofatores de **A** (indica-se cof (**A**), à matriz obtida com a substituição de todos os elementos de **A** pelos seus respectivos cofatores).

Assim, dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

os cofatores de seus elementos são dados por

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

Repetindo-se o procedimento para os nove elementos, obtém-se

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -2 \\ -14 & -17 & 13 \\ 18 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.3.1.4 Matriz Adjunta

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem $n \geq 2$, denomina-se a matriz adjunta de **A** (indica-se adj **A**), à matriz transposta da matriz dos cofatores.

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \text{cof}(\mathbf{A})^T$$

Como exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{cof}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -2 \\ -14 & -17 & 13 \\ 18 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.3.1.5 Cálculo da Matriz Inversa

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem $n \geq 2$, se **A** é inversível, então

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{adj } \mathbf{A} \,/\, \det \mathbf{A}.$$

Usando-se a matriz anterior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 50$$

e a sua inversa é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.4 SISTEMAS LINEARES

4.4.1 Introdução

A modelagem de problemas reais, como os experimentados nos capítulos dois e três, conduz a um sistema de equações lineares. Pelo fato de serem reais e apresentarem soluções que podem ser medidas, estes fazem parte dos sistemas ditos possíveis e determinados. O objetivo desta secção é, portanto, estudar alguns métodos para resolver esta classe de sistemas lineares.

4.4.2 Equações Lineares

De modo geral, denomina-se equação linear (WEISS, 1978) a toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

na qual: $a_1, a_2, \dots, a_n$ – são números reais chamados coeficientes das incógnitas; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – são as incógnitas; b – é o termo independente. Por exemplo,

- $3x + 2y = 7$ é uma equação linear de incógnitas x e y;
- $2x + 3y - 2z = 10$ é uma equação linear de incógnitas x, y e z;
- $x - 5y + z - 4t = 0$ é uma equação linear de incógnitas x, y, z e t.

4.4.2.1 Solução das Equações Lineares

Dada a equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

a seqüência ordenada (α_1, α_2, ..., α_n) é a solução da equação se, e somente se,

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b.$$

Por exemplo, considere-se a equação

$$3x + 2y = 18.$$

O par ordenado (4,3) é uma solução da equação, pois 3 (4) + 2 (3) = 18. Ao passo que o par (5,1) não é uma solução, pois 3(5) + 2(1) $\neq$ 18.

Para a equação

$$3x + y - 2z = 8,$$

tem-se que o terno ordenado (2,4,1) é solução, pois verifica identicamente a equação, ou seja, 3 (2) + (4) – 2 (1) = 8; o terno ordenado (5, -2, 3) não é solução, porque 3 (5) + (-2) – 2 (3) $\neq$ 8.

4.4.3 Sistemas de Equações Lineares

O conjunto **S** de m (m≥1) equações lineares (GUELLI, 1980) a n incógnitas é dito um sistema linear m x n, e é representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Como exemplos, tem-se o sistema linear 2 x 2, nas incógnitas x e y,

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10; \end{cases}$$

e, o sistema linear 3 x 3 nas incógnitas x, y e z dado por

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}.$$

4.4.3.1 Solução de um sistema linear

Diz-se que a ênupla ou o conjunto ordenado de n números (α_1, α_2,..., α_n) é solução de um sistema de equações lineares, quando é solução de cada uma das equações do sistema. O par ordenado (5, 1) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}.$$

E, o terno ordenado (1, 3, -2) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}.$$

4.4.3.2 Classificação de Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados como possíveis ou impossíveis.

- Possíveis – são aqueles sistemas lineares que possuem solução.
  - Determinado – a solução é única.
  - Indeterminado – possui infinitas soluções.
- Impossíveis – são aqueles que não possuem solução.

4.4.3.3 Solução de sistemas lineares n x n ($n \geq 2$), usando a regra de Cramer

Neste trabalho, serão considerados apenas os sistemas possíveis e determinados. A regra de Cramer é um método para se obter a solução de tais sistemas, usando determinantes.

Considere-se o sistema genérico de m equações com n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

O determinante da matriz quadrada formada pelos coeficientes a_{ij}, i=1...m e j=1...n, das incógnitas constitui o determinante do sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Substituindo os coeficientes a_{i1} pela coluna dos termos independentes b_k, k=1... m, obtém-se o determinante Dx_1, dado por

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Substituindo os coeficientes a_{i2} pela coluna dos termos independentes b_k, k=1... m, obtém-se o determinante Dx_2, ou seja,

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Repetindo-se este processo para as colunas a_{ij}, j=3...n, decorrem os determinantes Dx_3, ..., Dx_n

A solução do sistema de equações lineares é obtida dividindo-se cada um desses determinantes pelo determinante do sistema. Portanto,

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{Dx_2}{D}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{Dx_n}{D}.$$

Por exemplo, o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$$

tem como resultado de seus determinantes

$$D = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -4 - 1 = -5$$
$$Dx = 7 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 = -28 - 2 = -30$$
$$Dy = 1 \cdot (2) - 7 \cdot 1 = 2 - 5 = -5.$$

E, como valores das incógnitas, decorre

$$x = -30 / -5 = 6 \quad e \quad y = -5 / -5 = 1.$$

4.3.3.4 Solução de sistemas lineares de ordem n x n com o método do escalonamento

Diz-se que dois sistemas lineares $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são equivalentes se, e somente se, possuem a mesma solução. Assim, um sistema linear qualquer pode ser transformado em um sistema equivalente mais simples, para o cálculo de suas soluções.

A forma escalonada é uma representação mais simples do sistema linear. Para determiná-la, efetua-se operações elementares sobre as linhas do sistema, tais como:

i) a multiplicação dos termos de uma equação qualquer de um sistema linear **S**, por um numero real $c \neq 0$, produz o sistema **S'** equivalente a **S**;

ii) a substituição de uma equação qualquer de um sistema linear **S**, pela adição de seus termo com os correspondentes de uma outra, conduz a um sistema **S**' equivalente a **S**.

O cálculo da forma escalonada é, freqüentemente, mencionado na literatura (STRANG, 1980) como o método da eliminação Gaussiana.

Escalonamento de um sistema

Um sistema é colocado na forma escalonada (BOLDRINI, 1986), seguindo-se vários passos baseados nas operações elementares anteriores, isto é:

i) coloca-se como primeira equação aquela em o coeficiente da primeira incógnita for diferente de zero;
ii) anula-se o coeficiente da primeira incógnita de todas as equações, exceto da primeira, substituindo-as pela sua soma com a primeira equação multiplicada por um número conveniente;
iii) mantém-se fixa a primeira equação e aplica-se os passos i) e ii) nas equações restantes até o sistema ficar escalonado.

Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = 9 \\ 2x + y - \quad z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases},$$

ao se substituir a segunda equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -2, vem

$$\begin{cases} x + 2y + z = \quad 9 \\ \quad - y - 3z = -15 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}.$$

Substituindo-se a terceira equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -3, obtém-se

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = \quad 9 \\ \quad - 3y - 3z = -15 \\ \quad -7y - \quad 5z = -31 \end{cases}.$$

E, multiplicando-se a segunda equação por -1/3, segue que

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = \quad 9 \\ \qquad y + z \quad = -15 \\ \quad - 7y - 5z = -31 \end{cases}.$$

Com a troca da terceira equação pela sua soma com a segunda multiplicada por 7, resulta o sistema escalonado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ \quad\;\; y + z = 5 \\ \qquad\;\; 2z = 4 \end{cases}.$$

A sua solução é obtida facilmente, isto é,

$$z = 2, \quad y = 3 \quad \text{e} \quad x = 1.$$

4.4.3.5 Solução de sistemas lineares com a matriz inversa

Considere-se o sistema linear de ordem n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Este pode ser escrito na forma da equação matricial a seguir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Assim, resolver o sistema, equivale a resolver a equação matricial

A X = **B**, que tem por solução **X** = **A**$^{-1}$ **B**

Para ilustrar este procedimento, seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}.$$

A equação matricial a ser resolvida é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como det A = 10 e a transposta da matriz dos cofatores é

$$\textbf{Adj A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

E, da definição $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det A} AdjA$, segue que

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a matriz solução do sistema é dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}}\ \mathbf{B} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

E, os valores correspondentes às variáveis são

$$x = 2, \quad y = 3 \quad \text{e} \quad z = -1$$

4.4 CÁLCULO DO POSTO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Algumas vezes, pode-se verificar se um sistema de equações lineares tem solução sem precisar resolvê-lo (BOLDRINI, 1986). Por exemplo, pode-se estar interessado em saber se duas retas, dadas pelas equações y-2x=3 e y-3x=2, se interceptam, ou não, sem determinar seu ponto de intersecção. Em outras palavras, deseja-se verificar se o sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

admite ou não solução.

A existência e o número de solução estão relacionados com o posto da matriz **A** dos coeficientes e o posto da matriz ampliada. O posto característico de uma matriz (quadrada ou não) pode ser determinado com o cálculo dos determinantes sucessivos de suas submatrizes quadradas. Este é dado pela ordem da submatriz de **A** de maior ordem possível, com determinante não nulo.

A seguir, são apresentados dois exemplos para o cálculo do posto de uma matriz.

Exemplo 1: Dada a matriz de ordem 4 x 5

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

As suas cinco submatrizes de ordem 4 têm determinante nulo. O mesmo acontece com as suas submatrizes (em número de 40) de ordem 3. Mas, por sorte, na primeira tentativa com as submatrizes de ordem 2, tem-se

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Então, o posto de **A** é 2.

Exemplo 2: Verificar se o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = -1 \end{cases},$$

é possível ou não, sem resolvê-lo.

A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

tem determinante nulo, pois a terceira linha é igual à segunda multiplicada por -3. Portanto, o posto de **A** é menor que 3. (Se o **det A** $\neq 0$, o posto seria 3, pois **A** é submatriz dela mesma). Como o determinante da submatriz de ordem 2, obtida suprimindo-se a terceira linha e terceira coluna, isto é,

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

a matriz **A** tem uma submatriz quadrada de ordem 2, com determinante diferente de zero; portanto, o posto de **A** é 2.

Considere-se, agora, a matriz obtida adicionando-se a coluna dos termos constantes do sistema à matriz original do sistema, ou seja, a matriz ampliada

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sendo o determinante da submatriz obtida com as três últimas colunas de **B** dado por

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

o posto da matriz **B** é 3. Conclui-se, assim, que o sistema não tem solução, pois o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz ampliada.

5 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

As inequações lineares, bem como os sistemas de inequações simultâneas, são bastante úteis na solução de problemas de várias áreas do conhecimento (CAIXETA-FILHO, 2001). Neste contexto, é comum se perguntar pelos valores máximo ou mínimo de uma função, cujas variáveis estão sujeitas a certas restrições (desigualdades). Aqui, a função que se quer otimizar é uma função linear, submetida a restrições lineares, portanto, trata-se de um problema de programação linear.

A **programação linear** é definida como sendo o conjunto de técnicas matemáticas, com as quais pode ser determinada uma solução ótima para um problema que apresenta várias soluções. Consiste num método interativo que determina a melhor combinação de valores que as variáveis do modelo, obedecendo a certas restrições, podem assumir a fim de otimizar a solução.

5.1 O MÉTODO GRÁFICO

Frente a um problema de programação linear (WEISS, 1978), considera-se as seguintes orientações para resolvê-lo:

1- Deve ser estabelecida a **função objetivo**, ou seja, a função a ser otimizada;
2- As restrições impostas pelo problema devem ser transformadas em inequações lineares;
3- A seguir, traça-se o gráfico do polígono convexo (região plausível) correspondente a essas restrições, e determinam-se as coordenadas de seus vértices;
4- Calcula-se o valor da função objetivo em cada um dos vértices;
5- O maior valor determinado é o máximo e o menor valor é o mínimo.
6- Volta-se ao problema e apresenta-se a solução.

Sistema de inequações lineares, exemplo:

Uma indústria produz dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A,** tem um lucro de R$ 20,00 por unidade e na venda do artigo **B**, um lucro de R$ 30,00. A máquina que produz o artigo **A** consome 1 **kwh** de energia por unidade produzida e pode produzir até 60 unidades por período. A máquina que produz o artigo **B** também consome 1 **kwh** de energia por unidade e pode produzir no máximo 50 unidades por período. A potência instalada só permite um consumo de 100 **kwh**. Quantas unidades de cada artigo a indústria deverá produzir, supondo que todas as unidades sejam vendidas, a fim de que o lucro seja máximo?

Solução:

Considere-se:

x = artigos do tipo **A**, y = artigos do tipo **B**

e a função objetivo

$$L(x,y) = 20\,x + 30\,y.$$

Restrições:

Consumo máximo de energia 100 **kwh**: $x + y \leq 100$;

Capacidade máxima de produção do artigo **A** 60 unidades: $x \leq 60$;

E, do artigo **B,** produção máxima 50 unidades: $y \leq 50$

Assim, decorre o sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases}$$

Solução gráfica:

As restrições, acima, dão origem ao polígono da região plausível (Figura 28) limitado pelas retas

$$x + y = 100, \quad x = 60 \quad \text{e } y = 50.$$

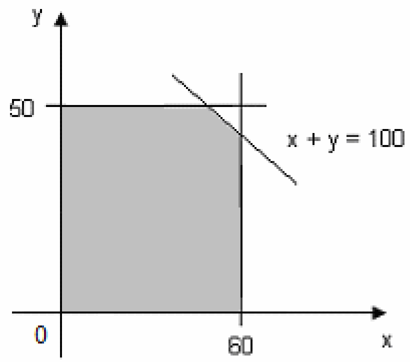


Figura 28: Gráfico da Região Plausível

As coordenadas dos vértices do polígono são obtidas com a resolução dos sistemas de inequações correspondentes aos lados do mesmo, e geram (tabela 11) os valores da função objetivo.

Tabela 11: Valor da função objetivo nos vértices

Vértice	**Valor de L = 20 x + 30 y**	
(0, 0)	0	Mínimo
(0, 50)	1500	***
(50, 50)	2500	Máximo
(60, 40)	2400	***
(60, 0)	1200	***

Conclui-se que a indústria deverá fabricar 50 unidades de cada artigo e, com a venda total, alcançará um lucro de R$ 2500,00.

5.2 O MÉTODO SIMPLEX

O algoritmo **simplex** é um processo iterativo para determinar as soluções básicas viáveis (WILLIAMS, 1978; WEISS, 1978) para um sistema de equações e testá-las quanto a otimicidade. A sua aplicação envolve as etapas descritas a seguir.

A primeira etapa consiste na transformação do sistema de desigualdades em um sistema de equações, através das variáveis de folga (falta ou excesso), segundo o procedimento: para a restrição menor (<) adiciona-se a variável de folga e, para a maior (>), subtrai-se a variável de folga.

Na segunda etapa, constrói-se (tabela 12) o quadro simplex. Neste procedimento, os ($\mathbf{C_j}$) coeficientes da função objetivo, os coeficientes das variáveis nas equações ($\mathbf{A_{ij}}$) e os termos independentes ($\mathbf{B_i}$) são transferidos de maneira ordenada para uma tabela.

Na coluna $\mathbf{C_b}$, estão os coeficientes $\mathbf{C_j}$ das variáveis básicas, que são nulos na solução básica inicial.

Tabela 12: Quadro simplex

C_b	C_j	C_1	C_2	C_3	....	C_n	S
	Base	X_1	X_2	X_3	....	X_n	X_1
0	x_{n+1}	A_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	b_1
0	x_{n+2}	A_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
....	....	....	....	....	....	....	....
0	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	b_n

A terceira etapa visa determinar a solução. Para tanto, em cada iteração será determinada uma nova solução (outro ponto extremo) e, para isso, é necessário realizar a troca de base (valor numérico da variável).

A escolha da variável que deve entrar na base é feita pela regra simplex 1, e da que deve sair pela regra simplex 2, descritas a seguir.

- **REGRA SIMPLEX 1**

A seleção da variável que entra na base depende dos valores dos coeficientes da função objetivo. Para a maximização, é escolhido o menor entre os coeficientes negativos na linha da função objetivo. Se todos os valores forem positivos, a solução já é ótima. Para minimização, a variável selecionada será aquela que apresentar o maior entre os coeficientes negativos na linha da função objetiva. Se todos os valores forem positivos, a solução já é ótima.

- **REGRA SIMPLEX 2**

A seleção da variável que deve deixar a base é feita diante do valor obtido pelo quociente entre os números da coluna solução (**b_i**) e os coeficientes **A_{ij}** da coluna da variável que entrar na base. É selecionada a linha com a menor razão (as razões com denominador zero ou negativo são ignoradas) e a variável desta linha deve deixar a base. Cabe observar que esta regra é válida para o processo de maximização e minimização.

A quarta etapa consiste no pivotamento. Este processo envolve a obtenção da matriz dos coeficientes das variáveis básicas na forma da matriz identidade. Como somente uma variável básica entra na tabela a cada iteração, o cálculo da matriz identidade é completado com as operações elementares sobre as linhas da matriz. Mais especificamente, busca-se obter um coeficiente unitário na posição do elemento pivô e zeros nas demais posições desta coluna.

O problema solucionado anteriormente pelo método gráfico também será resolvido com o método simplex, a seguir.

Como antes, tem-se o problema de maximizar a função objetivo

$$L = 20\,x + 30\,y,$$

sujeita às restrições:

$$x + y \leq 100,\ x \leq 60 \quad \text{e} \quad y \leq 50,$$

que produzem o sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \qquad \leq 60 \\ \qquad y \leq 50 \end{cases}$$

Acrescentando-se as variáveis de folga z_1, z_2 e z_3, e igualando a função objetivo a zero, transforma-se o sistema de inequações acima em um sistema de equações algébricas,

$$L - 20\,x - 30\,y = 0 \qquad \text{(função objetiva)}$$

$$\begin{cases} x + z_1 = 60 \\ y + z_2 = 50 \\ x + y + z_3 = 100 \end{cases}$$

As variáveis x, y, z_1, z_2 e z_3 são números inteiros positivos, e são classificadas como:

Variáveis não básicas: x e y

Variáveis básicas: z_1, z_2 e z_3

A solução básica inicial, obtida no sistema atribuindo-se os valores x = 0, y = 0 para as variáveis não básicas , é $z_1 = 60$, $z_2 = 50$ e $z_3 = 100$

O problema é resumido no quadro simplex (tabela 13).

Tabela 13: Solução inicial

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
base	1	-20	-30	0	0	0	0
z_1	0	1	0	1	0	0	60
z_2	0	0	1	0	1	0	50
z_3	0	1	1	0	0	1	100

Observa-se que há coeficientes negativos na linha da função objetivo, portanto, esta solução não é ótima. Pelos critérios, estabelecidos acima, a variável a entrar na base é y (correspondente ao menor valor negativo, situado na coluna Y) e a variável a sair (tabela 14) da base (o menor quociente entre a coluna b e as colunas Z) é z_2 correspondente a 50/1.

Tabela 14: Primeira troca de variáveis na base

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1		0	0		0	
z_1	0		0	1		0	
y	0		1	0		0	
z_3	0		0	0		0	

Agora, deve-se completar a tabela 14 em função da tabela 13 (tabela 15). Para não alterar as equações, é necessário aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas na coluna Y**.** Ou seja, repetem-se as linhas (1) e (2). A seguir (tabela 12), a linha (2) deve ser multiplicada por –1 e somada à linha (3); e, a linha (2) deve ser multiplicada por 30 e somada à linha (0).

Tabela 15: Solução intermediária

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1	-20	0	0	30	0	1500
z_1	0	0	0	1	0	0	60
y	0	0	1	0	1	0	50
z_3	0	1	0	0	0	1	50

Como há um coeficiente negativo na função objetivo, a solução ainda não é ótima. Então, pelos critérios estabelecidos acima, a variável a entrar na base é x e a variável (Tabela 16) que deve sair é z_3.

Tabela 16: Segunda troca de variáveis na base

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1	0	0	0			
z_1	0	0	0	1			
y	0	0	1	0			
x	0	1	0	0			

Como antes, precisa-se completar a tabela 16 em função da tabela 15, obtendo-se a tabela 17. Também, para não alterar as equações, é necessário aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas na coluna X. Assim, repetem-se as linhas (2) e (3), sendo que a linha (3) deve ser multiplicada por –1 e somada à linha (1); e, a linha (3) deve ser multiplicada por 20 e somada à linha (0).

Tabela 17: Solução final

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
base	1	0	0	0	30	20	2500
z_1	0	0	0	1	0	-1	10
y	0	0	1	0	1	0	50
x	0	1	0	0	0	1	50

Com a leitura dos dados (lê-se os valores não nulos nas colunas X,Y das variáveis e o valores associados na coluna B) na tabela 17, resulta (pelo fato de que não há valores negativos na linha da função objetivo) a solução ótima com os valores x = 50 e y = 50, e a função objetiva é L = 2500. Isto significa, que devem ser fabricadas 50 unidades de cada item e que o lucro máximo a ser alcançado é de R$ 2500,00.

Em seqüência, a solução do problema é obtida com a planilha de cálculo Excel. Aqui, os passos a serem seguidos são os mesmos utilizados na resolução analítica do problema em questão. Inicialmente, os coeficientes das equações são dispostos nas células da planilha (quadro 1 – figura 29). Usando-se os critérios fixados nas regras simplex 1 e 2, é feita a troca das variáveis: sai a variável y e entra a variável z_2 (quadro 2 – figura 29). Para completar o quadro 2 em função do quadro 1, com os comandos **Editar-Copiar** e **Editar –Colar,** repetem-se as linhas (1) e (2). A linha (3) é substituída pelo produto da linha (2) por – 1 somado à linha (3), conforme o comando **= - 1 * B4 + B5.** E, a linha (0), pelo produto da linha (2) por 30 somado à linha (0), com o comando **= 30 * B4 + B2** (quadro 3 – figura 29).

Repete-se o procedimento para se obter o quadro 4 – figura 29. Agora, sai a variável x e entra a variável z_1, as linhas (2) e (3) são repetidas. A linha (1) é substituída pelo produto da linha (3) por –1 somado com a linha (1), com o comando **= - 1 * B19 + B17**. A linha (0) é trocada pelo produto de (3) por 20 somado a (0), com o comando **= 20 * B19 + B16**. E, finalmente, a solução ótima é obtida (quadro 4 – Figura 29).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		L	x	y	z1	z2	z3	b	
2	base	1	-20	-30	0	0	0	0	0
3	z1	0	1	0	1	0	0	60	1
4	z2	0	0	1	0	1	0	50	2
5	z3	0	1	1	0	0	1	100	3
6					quadro 1				
7									
8		L	x	y	z1	z2	z3	b	
9	base	1		0	0		0		0
10	z1	0		0	1		0		1
11	y	0		1	0		0		2
12	z3	0		0	0		1		3
13					quadro 2				
14									
15		L	x	y	z1	z2	z3	b	
16	base	1	-20	0	0	30	0	1500	0
17	z1	0	1	0	1	0	0	60	1
18	y	0	0	1	0	1	0	50	2
19	z3	0	1	0	0	0	1	50	3
20					quadro 3				
21									
22		L	x	y	z1	z2	z3	b	
23	base	1	0	0	0	30	20	2500	0
24	z1	0	0	0	1	0	-1	10	1
25	y	0	0	1	0	1	0	50	2
26	x	0	1	0	0	0	1	50	3
27					quadro 4				
28									

Figura 29: Solução pelo método simplex usando a planilha Excel

6 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM O USO DA PLANILHA ELETRÔNICA

A informática está cada vez mais presente nas salas de aula. A sua incorporação (HEATINGER, 2003) gradual, nas atividades desenvolvidas pelo professor, tem alcançado um papel de destaque no ensino em todos os níveis.

O computador, utilizado como um facilitador (LEVY, 1993) do processo de ensino e aprendizagem, e o desenvolvimento de novos softwares, específicos ou adaptáveis para esta área, são temas constantes de análise e discussões em eventos.

A planilha é um aplicativo usado para cálculos em geral que admite ser programada para a resolução de problemas singulares. Em particular, neste capítulo, a planilha Microsoft Excel é utilizada na solução de sistemas de equações lineares com a regra de Cramer.

6.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Como exemplo, deve-se resolver o sistema de equações lineares 3 x 3 dado por

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

A rotina, para o cálculo com a regra de Cramer, é desenvolvida em 4 etapas, a saber:

Passo 1: Abrir a planilha de cálculo (Figura 30)

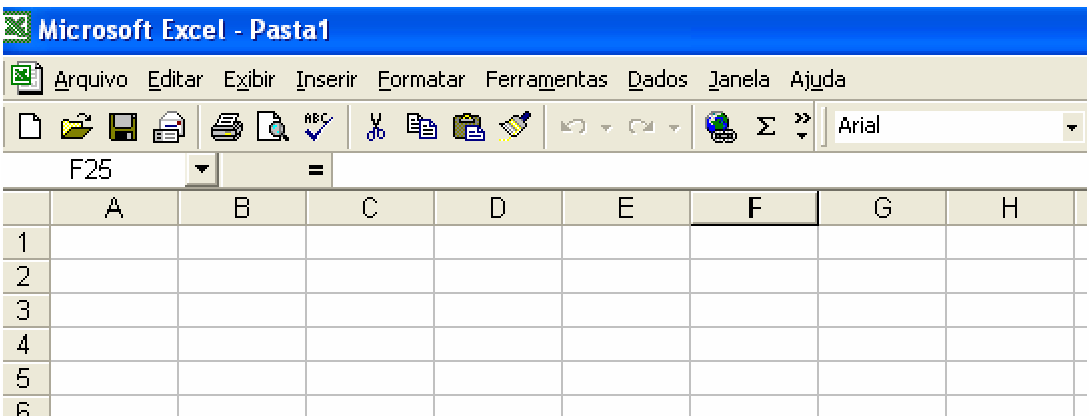


Figura 30: Planilha de cálculo Excel

Passo 2: Colocar os coeficientes das incógnitas nas células

	A	B	C	D
1	a1	b1	c1	d1
2	a2	b2	c2	d2
3	a3	b3	c3	d3
4				

Figura 31: Coeficientes nas células da planilha

Passo 3: Calcular o determinante da matriz dos coeficientes, escrevendo a regra de Sarrrus na célula B 5.

B5 = =(A1*B2*C3+A3*B1*C2+A2*B3*C1)-(A3*B2*C1+A2*B1*C3+A1*B3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							

Figura 32: Cálculo do determinante da matriz

1- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita x, pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita x, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 6**. Mais precisamente,

delta x = (D1*B2*C3+D3*B1*C2+D2*B3*C1)- (D3*B2*C1+D2*B1*C3+D1*B3*C2), como mostra a figura 33.

B6 = =(D1*B2*C3+D3*B1*C2+D2*B3*C1)-(D3*B2*C1+D2*B1*C3+D1*B3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							

Figura 33: Cálculo do determinante da incógnita x

2- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita (veja figura 34), pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita y, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 7**. Mais precisamente,

delta y = (A1*D2*C3+A3*D1*C2+A2*D3*C1)- (A3*D2*C1+A2*D1*C3+A1*D3*C2), como mostra a figura 34.

B7 = =(A1*D2*C3+A3*D1*C2+A2*D3*C1)-(A3*D2*C1+A2*D1*C3+A1*D3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							
7	delta y	#VALOR!							

Figura 34: Cálculo do determinante da incógnita y

3- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita **z**, pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita **z**, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 8**. Mais precisamente,

delta z= (A1*B2*D3+A3*B1*D2+A2*B3*D1)- (A3*B2*D1+A2*B1*D3+A1*B3*D2), como na figura 35.

B8 = =(A1*B2*D3+A3*B1*D2+A2*B3*D1)-(A3*B2*D1+A2*B1*D3+A1*B3*D2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							
7	delta y	#VALOR!							
8	delta z	#VALOR!							

Figura 35: Cálculo do determinante da incógnita z

Passo 4- Determinar os valores das incógnitas x, y e z, dividindo os valores dos respectivos determinantes pelo valor do determinante da matriz dos coeficientes, escrevendo nas células **B10**, **B11** e **B12** os quocientes **B6/B5**, **B7/B5** e **B8/B5**.

B10 = =B6/B$5

	A	B	C	D
1	a1	b1	c1	d1
2	a2	b2	c2	d2
3	a3	b3	c3	d3
4				
5	delta	#VALOR!		
6	delta x	#VALOR!		
7	delta y	#VALOR!		
8	delta z	#VALOR!		
9				
10	x	#VALOR!		
11	y	#VALOR!		
12	z	#VALOR!		

Figura 36: Cálculo das incógnitas

Como exemplo, usando a rotina desenvolvida, resolver o sistema de equações, abaixo, gerado pelo circuito da figura 2.15, da seção 2.7.3 deste trabalho.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \qquad\quad + i_3 = -1 \\ \qquad - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Para tanto, basta dar entrada aos coeficientes do sistema, inserindo-os nas células pré-definidas na planilha de cálculo obtida no passo 4.

	A	B	C	D	E
1	1	1	-1	0	
2	1	0	1	-1	
3	0	-1	-1	0	
4					
5	delta	3			
6	delta x	-2			
7	delta y	1			
8	delta z	-1			
9					
10	x	-0,6667			
11	y	0,3333			
12	z	-0,3333			
13					

Figura 37: Uso da planilha na solução de um sistema linear

A leitura dos valores das incógnitas é feita nas correspondentes células das colunas **A** e **B**. Assim, a solução do sistema é a terna x= -2/3, y= 1/3 e z= -1/3.

Para determinar a solução de qualquer outro sistema 3x3, pela regra de Cramer, é suficiente digitar os dados do sistema na planilha final (passo 4).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, pretendeu-se desenvolver e apresentar um método que possibilite ao professor uma diversificação em sua prática pedagógica. O material didático é constituído de textos para a fundamentação teórica dos tópicos inerentes às disciplinas de Matemática e de Física, e de um protótipo. Este último, proporciona a realização de testes experimentais em circuitos elétricos de corrente contínua, sendo o ponto de partida para se alcançar à interdisciplinaridade e é a base para o estudo de problemas reais.

Os textos e o desenvolvimento das atividades foram aqui distribuídos em capítulos. Entretanto, tem-se o propósito de dividi-los em cadernos, quando da multiplicação deste material.

Um capítulo especial (Capítulo 6) é dedicado ao uso da planilha eletrônica, como ferramenta para concretizar conceitos e propriedades das operações algébricas envolvidas na solução de sistemas lineares; e, para a visualização e a fixação da ordem dos elementos de uma matriz. Também (Capítulo 5) foi feita uma breve introdução à Programação Linear, com o estudo da função objetiva e do Método Simplex.

O esquema para a construção do protótipo é apresentado no Anexo A, e o Capítulo 3 contempla de modo detalhado a sua utilização em experimentos. .

No desenvolvimento deste material, buscou-se gerar problemas reais e desenvolver os tópicos físico-matemáticos necessários para alcançar as soluções. Mais especificamente, foi proposto o ensino de equações e de sistemas lineares, motivado por fenômenos físicos.

Todos os passos desta nova metodologia foram experimentados na disciplina de Matemática, ministrada para uma turma de alunos do terceiro ano do

Ensino Médio. Cabe ressaltar que, com os textos apresentados resumidamente, não se pretende aqui substituir o livro didático.

Ao longo do trabalho, foi possível verificar que, ao se explorar o aspecto experimental, o analítico e o computacional, foi visível a melhoria obtida pelos alunos, na sua capacidade de compreender e aplicar conhecimentos matemáticos. No depoimento espontâneo dos alunos (Anexo B) é possível constatar que eles perceberam a importância da aprendizagem matemática, para a melhor compreensão de situações reais. O uso do computador na solução dos sistemas lineares também foi muito bem recebido por eles. Neste aspecto, em especial, destaca-se a declaração de uma aluna ao comparar os subíndices dos elementos da matriz com as células da planilha: “finalmente consegui entender para que servem os índices na matriz”.

Com este material, procurou-se disponibilizar o uso de procedimentos não convencionais, a fim de estimular a elevação do grau de aprendizagem e de criar condições para aperfeiçoar e consolidar a atividade didática nas aulas de Matemática.

Sem dúvida alguma, acredita-se ser possível dar continuidade a este trabalho. Esta afirmação justifica-se no fato de que o protótipo construído (ou a ser construído) poderá ser usado como motivador no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos. Como exemplo, a combinação dos bornes possibilita a criação de uma grande variedade de circuitos. Sendo assim, poderá servir como ponto de partida para o estudo de problemas de analise combinatória.

Ainda, segundo as Leis de Kirchhoff, (O’NEIL, 1995), para circuitos elétricos, muitos resultados dependem de propriedades geométricas subjacentes ao circuito. Estas propriedades inerentes são representadas por diagramas gerados a partir de pontos e de linhas de conexão, e denominados de grafos. Portanto, a Teoria dos Grafos também poderia ser estudada a partir do protótipo, consideradas as possíveis ramificações e ligações de seus componentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMALDI, Ugo. ***Imagens da Física***. São Paulo: Scipione, 1992.

AZEVEDO, Maria Cristina Stella. ***Ensino por investigação: Problematizando as atividades em sala de aula – Ensino de Ciências: unindo a pesquisa à prática***. São Paulo: Thomson, 2004.

BASSANEZI, Rodney. ***Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática***. São Paulo: Contexto, 2002.

BICUDO, Maria Aparecida et al. ***Educação Matemática***. São Paulo: Centauro, 2005.

BIEMBEGUT, Maria; HEIN, Nelson. ***Modelagem Matemática no Ensino***. São Paulo: Contexto, 2000.

BISCOULA, Gualter José et al. ***Tópicos de Física*.** São Paulo: Saraiva, 2001.v.3.

BOLDRINI, José Luis et al. ***Álgebra Linear***. São Paulo: Harbra, 1986.

CAIXETA-FILHO, José Vicente: ***Pesquisa Operacional***. São Paulo: Atlas, 2001.

COSTA, M. A. ***As Idéias Fundamentais da Matemática e outros Ensaios***. São Paulo: Convívio, 1981.

CHRISTOFOLETTI, Antônio. ***Modelagem de Sistemas Ambientais*.** São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. ***Da Realidade à Ação***. São Paulo, Summus, 1986.

______. ***Da Teoria à Prática***. Campinas(SP): Papirus, 1996.

DORNELES, P. F. T.; ARAÚJO, I. S.; MOREIRA, M.A.; VEIT, E. A. Simulação e modelagem computacionais como recursos auxiliares no estudo de circuitos elétricos. Disponível em www.if.ufrgs.br/mpef/ieeefis/tecno/dificuldadescircuitoseletricos.ppt

GASPAR, Alberto. ***Física***. São Paulo: Ática, 2000.v.3.

GONÇALVES FILHO, Aurélio; TOSCANO, Carlos. ***Física***. São Paulo: Scipione, 2007.

GUELLI, Cid et al. ***Álgebra***. São Paulo: Moderna, 1980.

HEATINGER, Max Günter. ***Informática na Educação*****.** Porto Alegre: Instituto Criar, 2003.

JOHNSON, Tore. ***Problemas de Física***. São Paulo: Nobel, 1968.

LÉVY, P.A. ***As tecnologias da inteligência - O futuro do pensamento na era da informática***. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz*.* ***Física***.São Paulo: Scipione, 2000.v.3.

MACDONALD, Simon. ***Problemas de Física Geral e suas Soluções***. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

NETTO, Scipione Di Pierro; GÓES, Célia Contin. ***Matemática na Escola Renovada***. São Paulo: Saraiva, 1973.

O'NEIL, Peter. **Advanced Engineering Mathematics.** Toronto, Canadá: Thomson Publishing Inc., 1995.

RAMALHO JUNIOR, Francisco et al. ***Os Fundamentos da Física***. São Paulo: Moderna, 1991. v.3.

SILVEIRA, F. L. et al. Validação de um teste para verificar se o aluno possui concepções científicas sobre corrente elétrica. **Ciência e Cultura**, 41(11), p. 1129 - 1133, 1989. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/~lang/Atitude_Fisica.pdf

STRANG, Gilbert. ***Linear Álgebra and Its Applications.***2.ed. New York: Academic Press Inc., 1980.

VYGOSTKY, L.S. ***A Formação Social da Mente***. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

______. ***Pensamento e Linguagem***. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

WEISS, N. A.; YOSELOFF, M. L. ***Matemática Finita***. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

WILLIAMS, Gareth. ***Computacional Linear Algebra***. USA: Allyn and Bacon, 1978.

ANEXOS

ANEXO A – O ESQUEMA PARA A CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO DE CIRCUITO ELÉTRICO

Introdução:

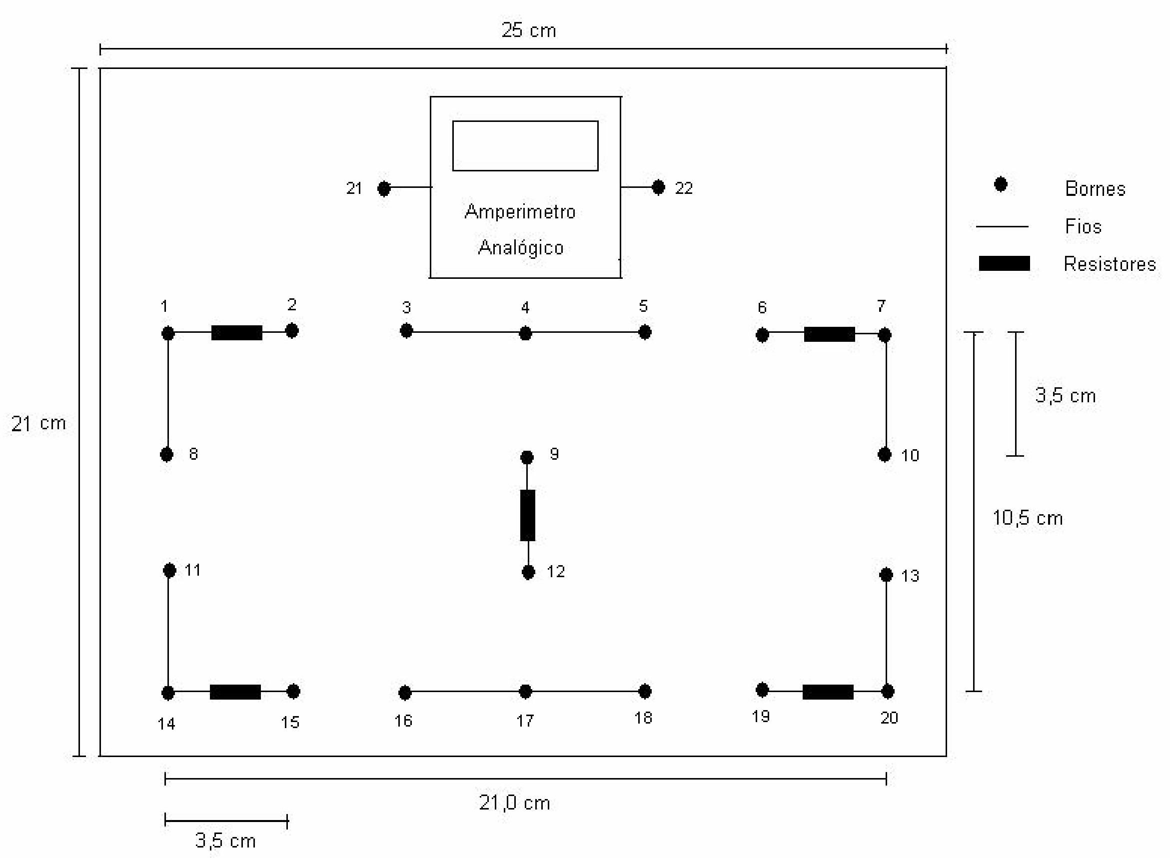
Este caderno tem como objetivo exemplificar e especificar a construção de um dispositivo. Mais especificamente, trata-se de um manual que descreve de modo sucinto a montagem de um protótipo de circuito elétrico de corrente contínua.

O projeto de construção será detalhado passo a passo, envolvendo todas as etapas desde a planta baixa até o uso do equipamento.

Detalhamento do Projeto

A construção envolve quatro etapas, a saber:

Etapa 1- Planta baixa



Etapa 2- Material Necessário

Placa de policarbonato 21 cm x 25 cm, espessura 4mm – 1 unidade

Moldura de madeira – 1 m

Borne – 22 unidades

Fio elétrico – 4 m

Resistor de 100 Ω e tolerância 5% - 9 unidades

Pino banana – 28 unidades (14 vermelhos e 14 pretos)

Fonte 12 Volts – 1 unidade

Amperímetro analógico – 1 unidade

Multímetro digital – 1 unidade

Motor 3 Volts – 1 unidade

Motor 6 Volts – 1 unidade

Led – 1 unidade

Suporte para Led – 1 unidade

Chave liga-desliga – 1 unidade

Madeira, espessura 1 cm – 80 cm^2

Etapa 3- Montagem da Placa **(**figura 1**)**

- Passo 1 - Fazer 22 furos de 5 mm de diâmetro na placa de poli carbonato, conforme indicado na planta.
- Passo 2 - Colocar os bornes em cada um dos furos da placa.
- Passo 3 - Fazer a ligação entre os bornes com fios ou com resistores, de acordo com a planta.
- Passo 4 - Fixar o amperímetro analógico na placa, na posição indicada na planta.
- Passo 5 - Colocar a moldura.
- Passo 6 - Numerar os bornes de acordo com a planta.

fig 1 – Protótipo de circuito elétrico

Etapa 4 - Montagem dos Componentes

- Fonte de 12 V (figura 2) – 1 unidade

  Abrir o fio duplo flexível e soldar em cada uma de suas extremidades, um pino banana vermelho e outro preto, respectivamente.

fig 2 – Fonte de 12 V

- Pontes de curto circuito (figura 3) – 6 unidades

  Cortar um pedaço de fio flexível de 30 cm e soldar nas suas extremidades dois pinos banana, um vermelho e outro preto.

fig 3 – Ponte de curto circuito

- Resistores extras (figura 4) – 4 unidades

  Soldar nas extremidades dos resistores 5 cm de fio flexível e um pino banana vermelho de um lado e um pino preto do outro.

fig 4 – Resistor

- Motor de 3 V (figura 5)– 1 unidade

  Fixar o motor em um pedaço de madeira de 4 cm x 5 cm e, em cada um dos seus terminais soldar 5 cm de fio, ainda deve-se soldar dois pinos banana nas extremidades livres do fio, sendo um vermelho e o outro preto.

fig 5 – Motor

- Motor de 6 V (figura 5) – 1 unidade

  Fixar o motor em um pedaço de madeira de 4 cm x 5 cm e, em cada um os seus terminais soldar 5 cm de fio com um pino banana na extremidade livre, sendo um pino vermelho e o outro preto.

- “Led” com suporte (figura 6) – 1 unidade

  Fixar o suporte do “Led” em um pedaço de madeira de 4 cm x 5 cm e soldar, nos seus terminais dois pedaços de fio de 5 cm, cada um deles com um pino banana, sendo um pino vermelho e o outro preto.

fig 6 – “Led”

- Chave liga-desliga (figura 7) – 1 unidade

  Fixar a chave em um pedaço de madeira de 4 cm x 5 cm e soldar, dois pedaços de fio condutor de 5 cm nos seus terminais, em cada uma das extremidades livres soldar um pino banana, sendo um pino vermelho e o outro preto.

fig 7 – Chave liga-desliga

Experimentos

Após a construção do protótipo, o mesmo pode ser utilizado na realização de diversos experimentos de circuitos elétricos com corrente contínua em geral.

Objetivo do uso do protótipo

Possibilitar a medição da corrente elétrica em circuitos simples e em circuitos multimalhas.

ANEXO B – O ESTÁGIO

1 DADOS DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO:

Instituição: Instituto Estadual de Educação “Oswaldo Aranha”.
Local de Execução: Cidade de Alegrete, RS
Endereço/telefone : Rua General Sampaio, sem n°. / (55) 34221985
Disciplina: Matemática
Grau: Ensino Médio
Turma/Turno: 304/Diurno
Período de realização: 9 a 24 de novembro de 2006
Tempo de duração: 10 horas aula
Professor: Ricardo Ferreira da Costa
Professor Supervisor/Orientador: Elisabeta D’ Elia Gallicchio

2 TEMA:

O ensino/aprendizagem de matemática no nível médio: uma vivência prática, gerada pela abordagem de fenômenos físicos. Mais especificamente, o ensinar e o aprender equações e sistemas lineares, em uma classe de alunos do terceiro ano do ensino médio, tendo como estratégia a motivação despertada por um protótipo de circuitos elétricos de corrente contínua.

3 METODOLOGIA:

As aulas são desenvolvidas considerando-se três etapas. A primeira envolve o aspecto experimental, com a apresentação do protótipo de circuito simples, seguida pela descrição e caracterização dos componentes, e por várias medições da corrente elétrica e da tensão. A seguir, é estabelecida a modelagem física, com o esboço do circuito, e a matemática, com o equacionamento do mesmo.

A segunda etapa tem como objeto o estudo analítico do sistema, com a resolução de equações e de sistemas lineares. Aqui, além dos métodos tradicionalmente ensinados, é feita uma introdução à programação linear.

O aspecto computacional é o tema da terceira etapa. Consiste numa breve introdução ao uso da planilha eletrônica, seguida de aplicações simples vinculadas à álgebra linear.

4 OBJETIVOS DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO

4.1 Objetivo Geral:

Procurar estabelecer, no espaço de sala de aula, um processo ensino-aprendizagem proposto e desenvolvido através de prática pedagógica gerada pela abordagem de fenômenos físicos.

4.2 Objetivos específicos:

- explorar os aspectos interdisciplinares que surgem, naturalmente, a partir do processo prático-experimental, como principal estratégia no desenvolvimento das atividades pedagógicas;
- apresentar um protótipo de circuitos elétricos, como delimitador da teoria e fonte de dados para os problemas a serem abordados;
- perceber a necessidade do saber matemático para um melhor entendimento da resposta do sistema elétrico;
- equacionar o problema real, a fim de originar o conteúdo a ser estudado nas aulas;
- desenvolver a teoria necessária para a compreensão e resolução das equações obtidas;
- aplicar ferramentas matemáticas adequadas à resolução de equações e sistemas lineares;
- apresentar e usar a planilha eletrônica na solução de sistemas lineares;
- propiciar alternativas de solução para um mesmo problema, a fim de que o aluno possa ampliar e aprofundar o seu conhecimento.

5 DESCRIÇÃO:

O estágio foi desenvolvido no Instituto Estadual de Educação “Oswaldo Aranha”, na cidade de Alegrete, RS, no período de 9 a 24 de novembro de 2006.

As atividades envolveram 21 alunos da turma 304 da terceira série do ensino médio diurno, totalizando 10 horas/aulas.

A proposta foi elaborada a partir da experiência do professor, em sala de aula, nas disciplinas de física e matemática para o ensino médio. Ao longo desses anos, ao abordar certos conteúdos, são constantes as perguntas que, certamente, no processo ensino/aprendizagem, todo professor já ouviu inúmeras vezes: ”para que serve?”, “como vou usar?”, “quando vou usar?”, e outras perguntas análogas.

Na tentativa de esclarecer estas questões, foi elaborada uma proposta de ensino, com o enfoque em uma área específica e que visa ensinar matemática de uma forma mais abrangente. A atividade de ensino a que nos propomos desenvolver, interliga o ensino da matemática a problemas reais de física.

Um protótipo elétrico, onde os alunos podem realizar medições, visualizar seus componentes e constatar, na prática, os valores da corrente e da tensão elétrica é o ponto de partida para todo o desenvolvimento posterior. A modelagem matemática é estabelecida a partir de uma vivência concreta de um experimento físico. Em seqüência ao equacionamento, foram apresentados aos alunos dois textos. Um deles aborda os conceitos e definições relacionadas com o ensino de circuitos elétricos: as Leis de Kirchhoff e redes elétricas, e seus componentes. O outro introduz a Álgebra Linear: matrizes, determinantes, sistemas lineares e noções de programação linear. Com a apresentação do primeiro texto, a necessidade de conhecimento matemático para a solução de problemas reais, torna-se evidente. O segundo texto procura dotar os alunos desses conhecimentos. Por último, foi realizada uma atividade em laboratório de ensino de informática. A planilha eletrônica (Excel) possibilitou criar uma rotina de cálculo, a fim de determinar a solução do sistema linear possível e determinado, em questão. Esta rotina permitiu a solução de outros sistemas análogos.

Cronograma de Aplicação da proposta

<u>10 de novembro de 2006 – 2 aulas</u>

Conteúdos apresentados

Elementos do circuito elétrico:

- resistores,
- geradores,
- receptores.

Dispositivos de medição elétrica:

- amperímetro,
- voltímetro.

<u>16 de novembro de 2006 – 2 aulas</u>

Aula com a presença da supervisora

Conteúdos apresentados e atividades realizadas

Circuitos elétricos de caminho único

Obtenção de equações lineares na solução de problemas envolvendo circuitos elétricos de caminho único

Leis de Kirchhoff

Redes elétricas

Obtenção de sistemas lineares na solução de problemas envolvendo redes elétricas

<u>17 de novembro de 2006 – 2 aulas (turno da manhã)</u>

Aula com a presença da supervisora

Conteúdos apresentados e atividades realizadas

Sistemas lineares:

- equações lineares
- solução das equações lineares
- sistemas lineares
- classificação dos sistemas lineares
- solução dos sistemas lineares
- método de solução dos sistemas lineares – regra de Cramer e o método do escalonamento

Solução das equações lineares geradas nos circuitos elétricos de caminho único
Solução dos sistemas lineares gerados nas redes elétricas

17 de novembro de 2006 – 2 aulas (turno da tarde)
Laboratório de informática
Aula com a presença da supervisora
Atividades realizadas
Apresentação da planilha eletrônica Excel
Criação de uma rotina de cálculo para determinar a solução de sistemas lineares possíveis e determinados através da regra de Cramer
Solução dos sistemas lineares gerados nas redes elétricas usando a rotina de cálculo

21 de novembro de 2006 – 1 aula
Conteúdos apresentados e atividades realizadas
Método de solução de sistemas lineares através da matriz inversa
Solução dos sistemas lineares gerados nas redes elétricas

23 de novembro de 2006 – 1 aulas
Conteúdos apresentados e atividades realizadas
Introdução à programação linear:
- método gráfico
- método simplex

Atividades envolvendo maximização e minimização de quantidades

5.1 DEPOIMENTO DOS ALUNOS

Taiz Martins da Silva – 17 anos

“As aulas foram muito produtivas, o professor conseguiu prender a nossa atenção fazendo uma aula diferente e interessante.”

Bianca Paim Pereira – 17 anos

"As aulas foram bem descontraídas, eu consegui entender bem o conteúdo. A melhor aula foi a de informática."

Camila Pare Guglielmi – 16 anos

"As aulas foram muito boas, discutimos e tiramos todas as dúvidas sobre a matéria."

Jéssica Cambraia – 16 anos

"As aulas foram muito boas e práticas. Por mais que eu não goste de matemática e física, o método usado deixou a aula bem interessante."

Carla Guterres – 17 anos

"Gostei muito da aula, o polígrafo distribuído deixou o conteúdo bem mais fácil."

Paulo da Costa Custódio – 18 anos

"Aproveitei bastante a aula, principalmente a forma de usar o excel para resolver problemas."

Laraine Ramos dos Anjos – 17 anos

"Eu achei a aula muito interessante. A idéia de tornar as aulas práticas tornaram as aulas mais atrativas. Eu nunca pensei que no final do ano eu ia sentir falta, mas agora sei que sim."

Geraldine de Oliveira Brum – 17 anos

"Adorei a professora Beta."

Claudine Lima – 17 anos

"Entendi bem a matéria, os polígrafos ajudaram bastante. Achei a professora Beta muito simpática e legal."

5.2 DEPOIMENTO DOS ALUNOS, APÓS A AULA NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

Bibiana: *"Gostei muito da aula de hoje."*

Taiz: *"Ficou muito melhor! Entendi melhor, com o Excel, o cálculo do determinante. Fixei mais."*

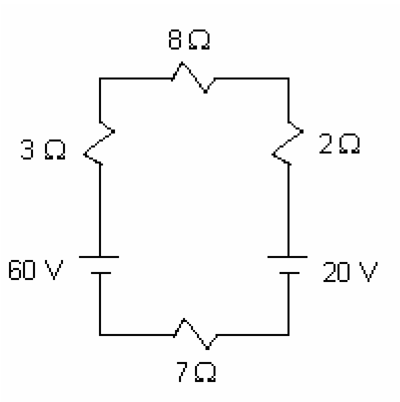
Mateus (Dunga): *"Muito legal! Muito proveitoso!"*

Claudine: *"Finalmente consegui entender o que significam os índices."*

Um grupo de alunos: *"Legal! A aula que mais gostamos foi a de hoje!"*

Exemplos de atividades realizadas

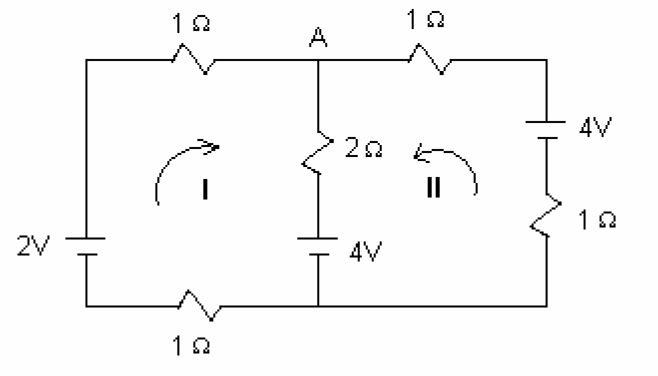
Circuito Elétrico de Caminho Único



Equação linear resultante
$0 = 60 - 20 - 20\ i$

Solução da equação
$i = 2$ A

Redes Elétricas



Sistema de equações gerado pela solução do problema

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \qquad + i_3 = -1 \\ \quad - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Solução do sistema de equações

$i_1 = -\ 2/3$ A

$i_2 =\ \ 1/3$ A

$i_3 = -\ 1/3$

Rotina de Cálculo criada no Excel

Sistema de Equações Lineares 3 x 3

Entre com os coeficientes da equação

	x	Y	z	t. ind.
equação 1	1	1	-1	0
equação 2	1	0	1	-1
equação 3	0	-1	-1	0

D =	3
Dx =	-2
Dy =	1
Dz =	-1

x =	-0,6667
y =	0,3333
z =	-0,3333

Fotos

Aulas 3 e 4

Aulas 3 e 4

Aulas 3 e 4

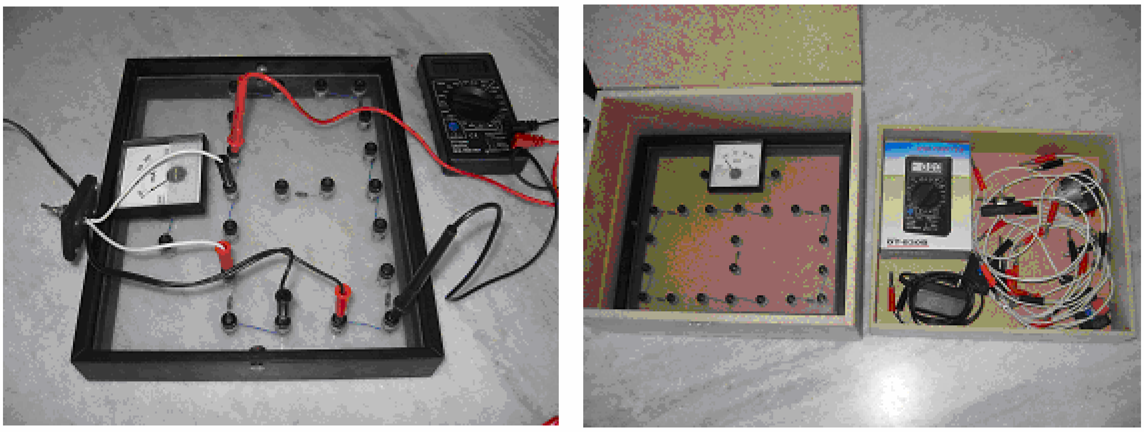
Aulas 3 e 4

Montagem do protótipo

Aulas 5 e 6 - Final

Laboratório de Informática - Aulas 7 e 8

Protótipo



O Protótipo Final