Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

TEOREMAS TAUBERIANOS PARA SÉRIES DE FOURIER

por

IZABEL GIOVELI

Porto Alegre, dezembro de 1999

Dissertação submetida por IZABEL GIOVELI* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Leonardo Prange Bonorino
Dra. Sílvia Regina Costa Lopes
Dr. Roberto Markarian

Data de Defesa: 27 de dezembro de 1999.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Aos meus pais

Frederico e Genoeva

AGRADECIMENTOS

De forma muito especial agradeço ao professor Dr. Artur Oscar Lopes pela excelente orientação e contribuição na elaboração deste trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pelos ensinamentos e pela atenção.

As secretárias Izabel, Rosane e Mara pelo carinho e excelente atendimento.

A Graci pela amizade, por compartilhar as alegrias e os momentos difíceis, pelas contribuições nos estudos e pelos ensinamentos de vida.

A Flávia, Lisandra, Mariza e Paty pela amizade, pelo incentivo e pelos momentos de alegria.

A Gê, Mara, Neda e Vera Bauer por terem me "adotado" com o amor de verdadeiras mães e pelas horas de estudos.

A Cíntia, Patrícia, Vera Lupinacci e demais colegas da Pós-Graduação pela amizade e pelos momentos de descontração.

A minha família pelo incentivo e carinho durante todos esses anos.

Ao Mauro pelo amor, incentivo, compreenção e por ajudar mesmo distante.

E principalmente a Deus pela graça de viver este momento.

A todos os meus familiares e amigos que mesmo distantes, sempre me ajudaram e torceram pelo sucesso na realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, vamos caracterizar certas propriedades das séries de Fourier em função da velocidade de convergência a zero de seus coeficientes de Fourier.

Apresentamos dois resultados distintos: o primeiro do tipo Tauberiano caracteriza quando $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \approx x^{-\beta}$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen \; nx\right)$ para x próximo de zero em função dos coeficientes a_n.

O segundo resultado caracteriza quando $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen \; nx\right)$ é Hölder em função de a_n.

É fundamental em nossas hipóteses supor que a seqüência dos coeficientes a_n é monótona decrescente a zero.

Abstract

In this work we characterize certain properties of Fourier series.

We show two distinct results: the first one is of Tauberian type characterizes when $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \approx x^{-\beta}$ for x close to zero in terms of the a_n.

The second result characterizes when $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(\text{respectively } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen \; nx\right)$ is Hölder in terms of the a_n.

It is of fundamental importance in our hypothesis to assume that a_n is a monotone sequence decreasing to zero.

Índice

1. Definições e Resultados Gerais

Neste trabalho, vamos caracterizar certas propriedades das séries de Fourier em função da velocidade de convergência a zero de seus coeficientes.

Apresentamos dois resultados distintos: o primeiro do tipo Tauberiano caracteriza quando $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \approx x^{-\beta}$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\, nx\right)$ para x próximo de zero, em função dos coeficientes a_n.

O segundo resultado caracteriza quando $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\, nx\right)$ é Hölder, em função de a_n.

É fundamental em nossas hipóteses supor que a seqüência dos coeficientes a_n é monótona decrescente a zero.

Vamos apresentar com todos os detalhes alguns resultados esquematizados em [2], no Cap.10, seções 3 e 9.

Referimos ao leitor a [1] e [4] para resultados gerais sobre integral de Lebesgue.

Definição 1. *Sejam f e g funções mensuráveis Borel.* $f \sim g \Leftrightarrow$

$\{x/\, |f(x) - g(x)| \neq 0\}$ é um conjunto de medida nula. Na próxima definição é tomado o quociente do espaço vetorial módulo a relação de equivalência $\sim$.

Definição 2. *Seja $1 \leq p < \infty$, $p \in \mathbb{R}$. Define-se o espaço*

$L^p[-\pi,\pi] = \left\{ f / \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$, onde $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ é uma função periódica de período 2π, mensurável a Lebesgue tal que $|f(x)|^p$ é integrável a Lebesgue.

A *norma* p da f é dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço L^p é completo com a norma p, isto é, L^p é um espaço de Banach.

Teorema 1. **(Desigualdade de Hölder)** *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e*

$q = \dfrac{p}{p-1}$, então

$$\int |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A demonstração pode ser encontrada em [4].

Observação: uma conseqüência da desigualdade de Hölder é que, se $f(x) \in L^p$ e $g(x) \in L^q$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então o produto $fg \in L^1$. Em particular, se $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g = 1$ e $f \in L^p$ então $f \in L^1$.

Definição 3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π, $f \in L^p$. Podemos considerar tal f como a função $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$.*

A *série de Fourier* da f é dada informalmente por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \, sen \, nx), \tag{1.1}$$

onde seus respectivos *coeficientes de Fourier* são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen \, nx \, dx, n = 1, 2, ...$$

A expressão (1.1) chama-se *Série Trigonométrica de Fourier* na forma real ou Série Trigonométrica.

Observação: se $f \in L^p$ então $f \in L^1$ e os coeficientes de Fourier estão bem definidos.

O fato de $f \in L^1$ permite a integração de $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen \, nx)$, e isto será usado em várias ocasiões.

O sentido de convergência da série para f em L^p, é dado pelo teorema subseqüente.

Teorema 2. *Se $1 < p < \infty$ e $f(x) \in L^p$ então a série de Fourier da f converge para f na norma p, para toda $f \in L^p$.*

Mais exatamente, $\lim_{k\to\infty}\left\|\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n\, sen\, nx)\right)-f(x)\right\|_p=0.$

Diremos que $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\, sen\, nx)$ neste sentido.

A demonstração pode ser encontrada em [6].

A expressão

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n\, sen\, nx)$$

é chamada a *soma parcial de Fourier de ordem k.*

Definição 4. *Seja* $f\in L^p$. *A série de Fourier* (na forma complexa) *da* f *é dada pela expressão*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx},$$

onde $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$

Observação: dada

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n sen\, nx)$$

uma série trigonométrica real pode ser expressa numa forma mais compacta com ajuda das fórmulas de Euler

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\quad \text{e}\quad sen\, nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}.$$

Substituindo estas expressões na série de Fourier na forma real obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},
\end{aligned}$$

onde $c_0 = \frac{a_0}{2}$ e, para $n \geq 1$,

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}, \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Os coeficientes c_n se expressam, portanto, através dos a_n e b_n mediante as igualdades (1.2).

Teorema 3. (***Dirichlet***) *Seja* $\sum b_n$ *uma série (não necessariamente convergente) cujas somas parciais* $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ *formam uma seqüência limitada. Seja* (a_n) *uma seqüência não-crescente de números positivos com* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Então a série* $\sum a_n b_n$ *é convergente.*

A demonstração pode ser encontrada em [7].

Observação: pelo teorema 3, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (*respectivamente*, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen\, nx$), onde a_n é uma seqüência monótona decrescente a zero, é convergente, para $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, sabemos que a_n é uma seqüência monótona decrescente a zero, basta verificarmos que as seqüências $S_n = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$ e $T_n = sen\, x + sen\, 2x + ... + sen\, nx$ são limitadas. Usando números complexos, temos que, $1 + S_n$ e T_n são respectivamente a parte real e imaginária da soma $1 + e^{ix} + e^{i2x} + ... + e^{inx} = \dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$. Para $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos $1 \neq e^{ix}$ e, portanto, $\left|\dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|}$.

A seqüência dos números complexos $1 + e^{ix} + e^{i2x} + ... + e^{inx}$ é portanto limitada e assim as seqüências de suas partes reais e imaginárias também são limitadas.

Definição 5. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é Hölder de ordem* α, $0 < \alpha < 1$, *se existe* $c > 0$, *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^{\alpha}$, *para todo* x *e* y *pertencentes ao domínio da* f.

Definição 6. $a_n = O\left(n^{-\beta}\right)$ *se existe* $k > 0$ *tal que* $a_n \leq kn^{-\beta}$, *para todo* $n > 0$.

Definição 7. *Seja* $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx)$ *a série de Fourier de uma função* $f \in L^p$. *Então chamamos* $\overline{f(x)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n sen\, nx - b_n \cos nx)$ *a série de Fourier conjugada* da f.

Nosso objetivo neste trabalho é analisar propriedades da série de Fourier $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ou $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nx$ em função da velocidade de convergência de a_n a zero, onde a_n é uma seqüência decrescente.

Mais exatamente, na seção 2, será apresentado o seguinte teorema.

Teorema 4. *Seja a_n uma seqüência monótona decrescente a zero ($a_n \downarrow 0$). Para a função*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ \left(\textit{respectivamente, } \overline{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sen}\, nx\right)$$

pertencer a classe L^p $(1 < p < \infty)$, é necessário e suficiente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p n^{p-2} < \infty. \tag{1.3}$$

Na seção 3, vamos analisar outro tipo de problema, quando uma série de Fourier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sen}\, nx\right)$ é Hölder ou não .

Mais exatamente, serão apresentados os seguintes teoremas.

Teorema 5. *Se $f(x)$ é uma função Hölder de ordem α, $0 < \alpha < 1$, com*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

onde a_n é uma seqüência monótona decrescente a zero $(a_n \downarrow 0)$, então

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Isto também é válido para $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sen}\, nx$.

Teorema 6. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad e \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sen}\, nx$$

são funções Hölder de ordem α.

Observação: no último teorema, a seqüência a_n não precisa ser decrescente.

Teorema 7. *Seja a_n uma seqüência monótona decrescente a zero $(a_n \downarrow 0)$.*

Então,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \left(\textit{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sen}\, nx\right)$$

é Hölder de ordem α, $0 < \alpha < 1$, se e somente se

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Fica assim caracterizado quando uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, com $a_n \downarrow 0$, é Hölder de ordem α, $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1. *Segue do teorema 7 acima que se $0 < \alpha < 1$ então*

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) sen\, nx$ é Hölder de ordem α.

A seguir, vamos dar uma classe de exemplos em que os resultados deste trabalho podem ser aplicados.

Definição 8. *Seja $f(x)$ uma função contínua em $(0, 2\pi]$. Dizemos que $f(x)$ é do tipo $x^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, para x próximo da origem se existem A_1, A_2 e $\varepsilon > 0$,*

tal que $A_1 x^{-\beta} < f(x) < A_2\, x^{-\beta}$, para $0 < x < \varepsilon$.

Proposição 8. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π, do tipo $x^{-\beta}$ e $\beta > 0$.*

Então, $f(x) \in L^p$ se e somente se $p < \dfrac{1}{\beta}$.

Prova:

Como f é contínua em $[\varepsilon, 2\pi]$ a parte da f de $[\varepsilon, 2\pi]$ é limitada, assim $\int_{\varepsilon}^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$.

Portanto, vamos considerar f apenas no intervalo $[0, \varepsilon]$.

Seja $f(x) \in L^p$. Por hipótese $f(x)$ é do tipo $x^{-\beta}$, isto é, existem A_1, $A_2 > 0$, tais que $A_1 x^{-\beta} < f(x) < A_2 \, x^{-\beta}$, elevando na potência $p > 0$ e integrando, segue que,

$$C_1 \int_0^{\varepsilon} x^{-\beta p} dx \;<\; \int_0^{\varepsilon} |f(x)|^p \, dx \;< C_2 \int_0^{\varepsilon} x^{-\beta p} dx, \tag{1.4}$$

onde $C_i = A_i^p$, $i = 1, 2$.

A partir daqui as constantes serão absorvidas de maneira conveniente, sem maiores comentários.

Como $f(x) \in L^p$, isto é, $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$. Então

$$C_1 \int_0^{\varepsilon} x^{-\beta p} dx \;< \infty.$$

Queremos mostrar que $p < \dfrac{1}{\beta}$.

Suponha que $p \geq \dfrac{1}{\beta}$. Assim $-\beta p \leq -1$.

Logo,

$$\int_0^{\varepsilon} x^{-\beta p} dx \;\geq\; \int_0^{\varepsilon} x^{-1} dx \;= \infty$$

absurdo, pois $\int_0^\varepsilon x^{-\beta p} dx \ < \infty$.

Agora provaremos a recíproca.

$$p < \frac{1}{\beta} \Rightarrow -\beta p > -1 \Rightarrow \int_0^\varepsilon x^{-\beta p} dx \ < \infty.$$

Por (1.4) temos que

$$\int_0^\varepsilon |f(x)|^p \, dx \ < C_2 \int_0^\varepsilon x^{-\beta p} dx \ < \infty.$$

Assim, $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$, isto é, $f(x) \in L^p$.

Definição 9. *Uma seqüência a_n é do tipo $n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, se existem k_1, $k_2 > 0$ tal que $k_1 n^{-\gamma} < a_n < k_2 n^{-\gamma}$.*

Proposição 9. *Seja a_n uma seqüência do tipo $n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$.*

Suponha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(\text{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \right)$, a_n seqüência decrescente a zero.

Então, $f(x) \in L^p$ se e somente se, $p < \frac{1}{1-\gamma}$.

Prova:

Seja $f(x) \in L^p$. Por hipótese a_n é do tipo $n^{-\gamma}$, ou seja, $k_1 n^{-\gamma} < a_n < k_2 n^{-\gamma}$, elevando na potência $p > 0$ e multiplicando por n^{p-2}, obtemos,

$$K_1\, n^{p(1-\gamma)-2} < (a_n)^p\, n^{p-2} < K_2\, n^{p(1-\gamma)-2}. \tag{1.5}$$

Pelo teorema 4, mais a hipótese que $f(x) \in L^p$, temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^p\, n^{p-2} < \infty$ e, aplicando o teste da comparação (teorema 12, desta seção), obtemos

$$K_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\gamma)-2} < \infty \Rightarrow p(1-\gamma) - 2 < -1 \Rightarrow p < \frac{1}{1-\gamma}.$$

Agora mostraremos a recíproca. Observe que

$$p < \frac{1}{1-\gamma} \Rightarrow p(1-\gamma) - 2 < -1 \Rightarrow K_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\gamma)-2} < \infty$$

por 1.5 temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^p\, n^{p-2} < \infty$.

Pelo teorema 4, temos que $f(x) \in L^p$.

Das proposições 8 e 9, segue que:

Teorema 10. *Se $f(x)$ é do tipo $x^{-\beta}$, $\beta > 0$, onde*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \left(\textit{respectivamente, } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\textit{sen}\, nx \right)$$

com $a_n \downarrow 0$ *e* a_n *do tipo* $n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ *então,* $\beta = 1 - \gamma$.

Prova:

Por absurdo, vamos provar que $\beta = 1 - \gamma$.

Suponha que $\beta < 1 - \gamma$, assim $\dfrac{1}{\beta} > \dfrac{1}{1-\gamma}$.

Logo, pela proposição 8, $f(x) \in L^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

Tomando $p = \dfrac{1}{1-\gamma}$, pela proposição 9, temos que,
$\dfrac{1}{1-\gamma} < \dfrac{1}{1-\gamma}$, absurdo.

Portanto,

$$\beta \geq 1 - \gamma.$$

Suponha agora que $\beta > 1 - \gamma$. Logo $\dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{1-\gamma}$.

Seja $\dfrac{1}{\beta} < p < \dfrac{1}{1-\gamma}$.

Pela proposição 8, $f(x) \notin L^p$. Por outro lado, pela proposição 9, $f(x) \in L^p$. Absurdo.

Portanto, $\beta = 1 - \gamma$.

Exemplo 2. *Seja* $0 < \beta < 1$ *e* $f(x) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left|2\,sen\dfrac{x}{2}\right|^{-\beta} \approx Cx^{-\beta}$, $f(x)$ *é do tipo* $x^{-\beta}$, $x \in (-\pi, \pi)$, C *e* σ_ε^2 *são constantes. Denote* $\gamma(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$, *os coeficientes de Fourier da* f *na forma complexa.*

É possível mostrar que

$$\gamma(n) = C\frac{\Gamma\left(n+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1-\frac{\beta}{2}\right)}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

onde $C = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)} > 0$ e $\Gamma(.)$ é a função gama.

Vamos mostrar que $\gamma(n)$ é do tipo $n^{\beta-1}$.

De fato, vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)\, n^{a-b}} = k$, onde k é uma constante positiva.

Pela Fórmula de Stirling $\left(\ \Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} e^{1-x}(x-1)^{x-\frac{1}{2}},\ \text{quando } x \to \infty\ \right)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)\, n^{a-b}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{b-a}\left(\dfrac{n+a-1}{n+b-1}\right)^n \left(\dfrac{n+a-1}{n+b-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{n+a-1}{n}\right)^a \left(\dfrac{n}{n+b-1}\right)^b$

$= e^{b-a} = k.$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica $\left|\dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)\, n^{a-b}} - k\right| < \varepsilon$.

Daí, $\left|\dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)\, n^{a-b}} - k\right| < \varepsilon \Rightarrow (k-\varepsilon)\, n^{a-b} < \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} < (k+\varepsilon)\, n^{a-b}$.

Podemos escolher ε de modo que $(k-\varepsilon) > 0$.

Fazendo $a = \dfrac{\beta}{2}$ e $b = 1 - \dfrac{\beta}{2}$, obtemos

$$(k-\varepsilon)\, n^{\beta-1} < \frac{\Gamma\left(n+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1-\frac{\beta}{2}\right)} < (k+\varepsilon)\, n^{\beta-1}.$$

De (1.6), segue que $(k-\varepsilon)\,Cn^{\beta-1} < \gamma(n) < (k+\varepsilon)\,Cn^{\beta-1}$.

Logo, existem $k_1, k_2 > 0$ tal que $k_1 n^{\beta-1} < \gamma(n) < k_2 n^{\beta-1}$.

Isto é, $\gamma(n)$ é do tipo $n^{\beta-1}$.

Observe que, $\left|2\,sen\frac{x}{2}\right|^{-\beta}$ $sen\, nx$ é uma função ímpar, sendo assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, nx f(x)dx \;=0,$$

já que $f(x) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left|2\,sen\frac{x}{2}\right|^{-\beta}$.

Portanto,

$$\gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x)dx \;= a_n.$$

Logo, a série de Fourier da f é, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Isto mostra que o conjunto da classe de funções do tipo $x^{-\beta}$ e $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ com a_n do tipo $n^{-\gamma}$, $\gamma = 1-\beta$ é não vazio.

A seguir, apresentamos o enunciado de alguns teoremas que serão necessários para obtenção dos resultados principais deste trabalho.

Teorema 11. (***Riesz***) *Se $\varphi(x) \in L^p\,(p>1)$ então $\overline{\varphi(x)} \in L^p$, onde $\varphi(x)$ e $\overline{\varphi(x)}$ são funções conjugadas.*

A demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 12. (**Teste da comparação**) *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries de termos não negativos. Se existem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq cb_n$, *para todo* $n > n_0$, *então a convergência de* $\sum b_n$ *implica a convergência de* $\sum a_n$, *enquanto que a divergência de* $\sum a_n$ *acarreta a de* $\sum b_n$.

A demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 13. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função periódica de período* 2π, *contínua e*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \, sen \, nx)$$

sua série de Fourier. Então a série pode ser integrada termo a termo.

Isto é,

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nx dx + b_n \int_0^x sen \, nx dx \right).$$

A demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 14. *Seja* $f \in L^1(-\pi, \pi)$ *e suponha que* $c_{|n|} = -c_{-|n|}$ *e* $c_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, *onde* c_n *são os coeficientes de Fourier na forma complexa. Então,* $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n} < \infty$.

A demonstração segue facilmente do teorema de Féjer e pode ser encontrada em [6].

Teorema 15. *Se* $f(x) \in L^p[-\pi,\pi]$ *e* $\phi(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt$ *então*

$\int_0^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx \leq A_p \int_0^\pi |f(x)|^p\,dx\,(p > 1)$, *onde* A_p *depende somente de* p.

A demonstração deste teorema é dada no apêndice.

Teorema 16. *Seja* $p > 1, \varphi(x) \geq 0$ *e* $h(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$.

Então $\int_1^\infty \varphi(x)^p x^{p-2}dx \ < \infty \Rightarrow \int_1^\infty h(x)^p x^{-2}dx < \infty.$

A demonstração deste teorema é dada no apêndice.

2. Séries de Fourier para Funções de classe L^p

Nesta seção, vamos apresentar um critério para saber quando uma função está ou não em L^p.

Teorema 4. *Seja a_n uma seqüência monótona decrescente a zero ($a_n \downarrow 0$). Para a função*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \left(\text{respectivamente, } \overline{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \right)$$

pertencer a classe L^p $(1 < p < \infty)$ é necessário e suficiente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p n^{p-2} < \infty. \tag{2.1}$$

Prova:

Pelo teorema de Riesz, temos que, se $f(x) \in L^p$ $(1 < p < \infty)$ então $\overline{f(x)}$ também pertence a L^p.

Portanto, neste caso, é suficiente provar o teorema para $f(x)$.

Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ e $\phi(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$.

Suponha que $f(x) \in L^p$, então mostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p n^{p-2} < \infty$.

Vamos necessitar do seguinte lema.

Lema 1. *Seja a_n uma seqüência monótona decrescente a zero ($a_n \downarrow 0$). Se*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in L^p \, (1 < p < \infty)$$

então vale a integração termo a termo da $f(x)$.

Mais exatamente, $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x \cos nt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx.$

A demonstração deste lema é feita no apêndice.

Segue do lema que

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x \cos nt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx.$$

Note que

$$sen \frac{n\pi}{k} = -sen\,(n+k)\,\frac{\pi}{k} = sen\,(n+2k)\,\frac{\pi}{k} = -sen\,(n+3k)\,\frac{\pi}{k} = \ldots \tag{2.2}$$

onde, a primeira igualdade é devido a

$$sen\,(n+k)\,\frac{\pi}{k} = sen \frac{n\pi}{k} \cos \pi + sen\, \pi \cos \frac{n\pi}{k} = -sen \frac{n\pi}{k}$$

e a segunda, porque

$$sen\,(n+2k)\,\frac{\pi}{k} = sen\left(\frac{n\pi}{k}+2\pi\right) = sen\frac{n\pi}{k}$$

e, por estes mesmos motivos seguem as demais igualdades.

Usando (2.2) podemos escrever

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\frac{n\pi}{k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} + \frac{a_{n+2k}}{n+2k} - \frac{a_{n+3k}}{n+3k} + \ldots\right) sen\frac{n\pi}{k} \\ &\geq \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k}\right) sen\frac{n\pi}{k}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato que $a_n \downarrow 0$, ou seja,

$$a_n \geq a_{n+k} \geq a_{n+2k} \geq \ldots \Rightarrow \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} \geq 0,\ \frac{a_{n+2k}}{n+2k} - \frac{a_{n+3k}}{n+3k} \geq 0,\ \ldots$$

De modo que

$$g\left(\frac{\pi}{k}\right) \geq \sum_{n=[\frac{k}{4}]+1}^{[\frac{k}{2}]} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k}\right) sen\frac{n\pi}{k}. \tag{2.3}$$

Se

$$\frac{k}{4} < n \leq \frac{k}{2},$$

então

$$sen\frac{n\pi}{k} > \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2.4}$$

Além disso, lembrando que $a_n \downarrow 0$, temos que

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} \geq a_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right) = a_n\left(\frac{n+k-n}{n(n+k)}\right) = \frac{a_n}{n}\left(\frac{k}{n+k}\right) \geq \frac{2a_n}{3n}. \quad (2.5)$$

A última desigualdade segue do fato que

$\frac{k}{4} < n \leq \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{5k}{4} < n+k \leq \frac{3k}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{k}{n+k} < \frac{4}{5}.$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{k}\right) &\geq \sum_{n=[\frac{k}{4}]+1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{2a_n\sqrt{2}}{3n2} \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{3\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k}{4}\right]\right) a_{[\frac{k}{2}]} \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{3\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k}{4}\right]\right) a_k \geq C a_k, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que não depende de k (o numerador e denominador crescem como k) e $a_k > 0$ já que $a_n \downarrow 0$.

Logo, segue que

$Ca_n \leq g\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow (a_n)^p \leq \left[\frac{1}{C} g\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^p \Rightarrow (a_n)^p \leq C_1 \left[g\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^p.$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p n^{p-2} \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \left[g\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^p. \quad (2.6)$$

Dado que

$$|g(x)| = \left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \ = \phi(x).$$

Obtemos

$$\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \left| g\left(\frac{\pi}{n}\right) \right| = g\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.7}$$

Logo de (2.6) e (2.7), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p\, n^{p-2} \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \left[g\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \left[\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p. \tag{2.8}$$

Se provarmos que a série do lado direito em (2.8) converge então a condição (2.1) está provada.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{x} \right]^p dx \ &= \left[\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \frac{1}{x^p} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{p-1}} \left[\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p \frac{n^{p-1} - (n-1)^{p-1}}{p-1} \\
&\geq k \frac{n^{p-2}}{\pi^{p-1}} \left[\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p \\
&= C_2 \left[\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p n^{p-2},
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue do fato que,

$$\frac{n^{p-1}-(n-1)^{p-1}}{n^{p-2}} \geq k > 0.$$

Como $\phi(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$ é crescente, implica que

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{x}\right]^p dx \leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx.$$

Logo,

$$C_2\left[\phi(\frac{\pi}{n})\right]^p n^{p-2} \leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx.$$

De (2.8) segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^p n^{p-2} \leq (a_1)^p + C_3\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx. \tag{2.9}$$

Mas, $\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx = \int_0^{\pi}\left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx.$

Pelo teorema 15 (a demonstração será dada no apêndice) e lembrando que $f(x) \in L^p$, temos que $\int_0^{\pi}\left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx < \infty.$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^p n^{p-2} < \infty.$

Fica concluída a primeira implicação.

Mostraremos que se $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(a_n)^p < \infty$, então $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in L^p$, ou seja, queremos mostrar que $\int_0^{\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$.

Para isso, iniciaremos fazendo algumas observações sobre $|f(x)|$

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx\right|. \tag{2.10}$$

Observemos que

$$\left|\sum_{k=1}^{t} \cos kx\right| \leq \frac{\pi}{|x|}, \text{ para } 0 < |x| < \pi.$$

De fato:

Sabemos que, $2\,sen\frac{x}{2}\cos kx = sen\left(\frac{2k+1}{2}\right)x - sen\left(\frac{2k-1}{2}\right)x.$

Desta forma

$$\left|\sum_{k=1}^{t} \cos kx\right| = \left|\left[2\,sen\frac{x}{2}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{t}\left[sen\left(\frac{2k+1}{2}\right)x - sen\left(\frac{2k-1}{2}\right)x\right]\right|$$

$$= \left|\left[2\,sen\frac{x}{2}\right]^{-1}\left[sen\frac{3}{2}x - sen\frac{1}{2}x + sen\frac{5}{2}x - sen\frac{3}{2}x + sen\frac{7}{2}x - sen\frac{5}{2}x + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + sen\left(\frac{2t-1}{2}\right)x - sen\left(\frac{2t-3}{2}\right)x + sen\left(\frac{2t+1}{2}\right)x - sen\left(\frac{2t-1}{2}\right)x\right]\right|$$

$$= \left|\left[2\,sen\frac{x}{2}\right]^{-1}\right|\left|\left[-sen\frac{1}{2}x + sen\left(\frac{2t+1}{2}\right)x\right]\right|$$

$$\leq \left|\left[2\,sen\frac{x}{2}\right]^{-1}\right|\left[\left|-sen\frac{1}{2}x\right| + \left|sen\left(\frac{2t+1}{2}\right)x\right|\right]$$

$$\leq 2\left|\left[2\,sen\frac{x}{2}\right]^{-1}\right| = \left|\frac{1}{sen\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{\pi}{|x|}, \text{ para } 0 < |x| < \pi.$$

Para provarmos a última desigualdade, suponha que $0 < |z| < \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{2z}{\pi}$. Assim $sen\, z \geq y = \frac{2z}{\pi}$ e fazendo $z = \frac{x}{2}$, obtemos

$$sen\frac{x}{2} \geq \frac{2x}{2\pi} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow \left|\frac{1}{sen\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{\pi}{|x|},$$

para $0 < |x| < \pi$.

Definição 10. ***(Transformação de Abel)*** *Dados a_k, b_k, $k = n, ..., S$, a soma $\sum_{k=n}^{S} a_k b_k$ pode ser expressa como*

$\sum_{k=n}^{S} a_k b_k = \sum_{k=n}^{S-1} A_k (b_k - b_{k+1}) - A_{n-1} b_n + A_S b_S$, para $0 \leq n \leq S$, onde $A_{-1} = 0$ e $A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$, para $k \geq 0$.

Pela transformada de Abel e lembrando que $a_n \downarrow 0$, obtemos

$\sum_{k=n+1}^{S} a_k \cos kx = \sum_{k=n+1}^{S-1} B_k (a_k - a_{k+1}) - B_n a_{n+1} + B_S a_S$, onde $B_k = \sum_{j=1}^{k} \cos jx$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{S} a_k \cos kx\right| &\leq \left|\sum_{k=n+1}^{S-1} B_k (a_k - a_{k+1})\right| + |B_n a_{n+1}| + |B_S a_S| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{S-1} |B_k| \, |(a_k - a_{k+1})| + |B_n a_{n+1}| + |B_S a_S| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{S-1} \frac{\pi}{|x|} (a_k - a_{k+1}) + \frac{\pi}{|x|} a_{n+1} + \frac{\pi}{|x|} a_S \\
&= \frac{\pi}{|x|} (a_{n+1} - a_S + a_{n+1} + a_S) \\
&= \frac{2\pi}{|x|} a_{n+1} \leq \frac{2\pi}{|x|} a_n, \text{ para } 0 < |x| < \pi.
\end{aligned}$$

Fazendo $S \to \infty$, temos que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx\right| \leq \frac{2\pi}{|x|} a_n, \tag{2.11}$$

para $0 < |x| < \pi$.

Por (2.10) e (2.11), obtemos

$|f(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right| + \frac{2\pi}{|x|} a_n \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{2\pi}{|x|} a_n = A_n + \frac{2\pi}{|x|} a_n$, para $0 < |x| < \pi$,

onde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Suponha que $\frac{\pi}{n+1} \leq x < \frac{\pi}{n} \Rightarrow n < \frac{\pi}{x} \leq n+1$.

Desta forma

$$A_n + \frac{2\pi}{|x|} a_n \leq A_n + 2(n+1)a_n \leq A_n + 2\left(a_1 + \dots + a_n + a_n\right) = 3A_n + 2a_n \leq CA_n.$$

Assim

$|f(x)| \leq CA_n$, para $\frac{\pi}{n+1} \leq x < \frac{\pi}{n}$.

De modo que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |f(x)|^p \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|^p \, dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} (CA_n)^p \, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (CA_n)^p \left(\frac{\pi}{n(n+1)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1 \, (A_n)^p}{n(n+1)} \\
&\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A_n)^p}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Se provarmos que a última série converge, então $f(x) \in L^p$.

Para isso, usaremos o teorema 16 (a demonstração é dada no apêndice) e mais a hipótese que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \, (a_n)^p < \infty$.

Seja $\varphi(x) = a_n$, $n \leq x < n+1$ $(n = 1, 2, ...)$ e denotando $h(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$, teremos:

1° Caso: $1 < p < 2$.

Vamos verificar que estamos nas hipóteses do teorema 16.

Temos que, $\varphi(x) = a_n \geq 0$ já que $a_n \downarrow 0$.

Para estarmos nas hipóteses do teorema 16, falta mostrarmos que

$$
\int_1^{\infty} \varphi(x)^p x^{p-2} dx \ < \infty.
$$

Para isso

$$\int_1^\infty \varphi(x)^p x^{p-2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, x^{p-2}dx.$$

$n \leq x < n+1 \Rightarrow (n+1)^{p-2} < x^{p-2} \leq n^{p-2}$ já que $p-2<0$.

Daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, x^{p-2}dx \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, n^{p-2}dx \;=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p \, n^{p-2} < \infty,$$

ou seja, $\int_1^\infty \varphi(x)^p x^{p-2}dx < \infty$.

Pelo teorema 16, temos que $\int_1^\infty h(x)^p x^{-2}dx < \infty$,

onde $h(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$ e $\varphi(x) = a_n$, $n \leq x < n+1$.

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty h(x)^p x^{-2}dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} h(x)^p x^{-2}dx \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} h(x)^p \, (n+1)^{-2} \, dx \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_{1+\ldots+}a_{n-1})^p \, (n+1)^{-2} \, dx \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (a_{1+\ldots+}a_{n-1})^p \, (n+1)^{-2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p \, (n+2)^{-2} < \infty,$$

onde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Queremos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p\, n^{-2} < \infty$.

Para isso observe que, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2} = 1$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica $\left|\left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2} - 1\right| < \varepsilon$.

Mas, $\left|\left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2}\right| - |1| \leq \left|\left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2} - 1\right| < \varepsilon$.

Assim

$$\left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2} \leq \varepsilon + 1 \Rightarrow n^{-2} < K_1\,(n+2)^{-2} \Rightarrow (A_n)^p\, n^{-2} < K_1\,(A_n)^p\,(n+2)^{-2}.$$

Pelo teste da comparação e lembrando que $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p\,(n+2)^{-2} < \infty$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p\, n^{-2} < \infty.$$

Do fato que, $\int_0^{\pi} |f(x)|^p\, dx \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p\, n^{-2}$, concluímos que $f(x) \in L^p$.

2° Caso: $p \geq 2$.

Vamos verificar que estamos nas hipóteses do teorema 16.

Como, no 1° caso, temos que $\varphi(x) = a_n \geq 0$.

Agora mostraremos que $\int_1^{\infty} \varphi(x)^p x^{p-2} dx < \infty$.

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)^p x^{p-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, x^{p-2} dx.$$

$n \leq x < n+1 \Rightarrow n^{p-2} \leq x^{p-2} < (n+1)^{p-2}$ já que $p - 2 \geq 0$.

De modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, x^{p-2} dx \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (a_n)^p \, (n+1)^{p-2} \, dx \;= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p \, (n+1)^{p-2}. \tag{2.12}$$

Queremos mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^p \, (n+1)^{p-2} < \infty$.

Para isso observe que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+1}{n} \right) = 1$, isto é,

dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica $\left| \dfrac{n+1}{n} - 1 \right| = \left(\dfrac{n+1}{n} - 1 \right) < \varepsilon$.

Assim,

$n + 1 < (\varepsilon + 1) \, n \Rightarrow (n+1)^{p-2} < [(\varepsilon + 1) \, n]^{p-2} = C_2 n^{p-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)^p \, (n+1)^{p-2} < C_2 \, (a_n)^p \, n^{p-2}$.

Pelo teste da comparação e lembrando que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \, (a_n)^p < \infty$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{p-2} \, (a_n)^p < \infty. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) , obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} (a_n)^p x^{p-2} dx \ < \infty.$$

Logo, pelo teorema 16, temos que

$\int_1^\infty h(x)^p x^{-2} dx < \infty$, onde $h(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$ e $\varphi(x) = a_n$, $n \leq x < n+1$.

De modo análago ao feito no 1°caso, obtemos que

$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^p n^{-2} < \infty$, onde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Concluímos assim que $f(x) \in L^p$. □

3. Série de Fourier para Funções Hölder de ordem α

Nesta seção, vamos caracterizar quando $f(x)$, em série de Fourier, é Hölder.

Teorema 5. *Se $f(x)$ é uma função Hölder de ordem α, $0 < \alpha < 1$, com*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

onde a_n é uma seqüência monótona e decrescente a zero, então

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Isto também é válido para $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\, nx$.

Prova:

Mostraremos que, se $f(x)$ é Hölder de ordem α, então $a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$, ou seja, mostraremos que existe $k > 0$ tal que $a_n \leq \frac{k}{n^{1+\alpha}}$, para todo $n > 0$.

Para isso, observemos que

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos kx - 1) = -2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \, sen^2 k\frac{x}{2} \tag{3.1}$$

pois,

$$\begin{aligned}\cos(kx) &= \cos\left(\frac{kx}{2}+\frac{kx}{2}\right)\\ &= \cos^2\frac{kx}{2} - sen^2\frac{kx}{2}\\ &= \left(1 - sen^2\frac{kx}{2}\right) - sen^2\frac{kx}{2}\\ &= 1 - 2sen^2\frac{kx}{2}.\end{aligned}$$

Supondo $x = \dfrac{\pi}{n}$ em (3.1) e lembrando que $f(x)$ é Hölder de ordem α, obtemos

$$\left|f(\frac{\pi}{n}) - f(0)\right| = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, sen^2\frac{k\pi}{2n} \leq c\left|\frac{\pi}{n}\right|^{\alpha} = c\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}. \tag{3.2}$$

Se $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{k}{n} \leq 1$, então $\dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{k\pi}{2n} \leq \dfrac{\pi}{2}$ e assim $sen^2\dfrac{k\pi}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$.

Logo,

$$\frac{n}{2}a_n \leq \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k \leq 2\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k\, sen^2\frac{k\pi}{2n}, \tag{3.3}$$

onde a primeira desigualdade é devido a $a_n \downarrow 0$.

De (3.2) e (3.3) e observando que $\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k\, sen^2\dfrac{k\pi}{2n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, sen^2\dfrac{k\pi}{2n}$, obtemos

$$a_n \leq \frac{C_1}{n^{\alpha+1}}.$$

Logo,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Agora mostraremos que, se $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen \, nx$ é Hölder de ordem α, então $a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^x g(t)dt &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nt\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n sen\, nt\, dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(1 - \cos nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen^2 \frac{nx}{2}.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade segue do teorema 13, já que $g(x)$ é contínua e periódica.

Como $g(0) = 0$ e $g(x)$ é Hölder de ordem α, então

$$\max_{o \le t \le x} |g(t)| = \max_{o \le t \le x} |g(t) - g(0)| \le \max_{o \le t \le x} c\, |t|^{\alpha} = cx^{\alpha}.$$

Assim

$$\int_0^x g(t)dt \le \int_0^x \max_{o \le t \le x} |g(t)|\, dt \le c \int_0^x t^{\alpha} dt = \frac{cx^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Logo,

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen^2 \frac{nx}{2} = \int_0^x g(t)dt \le C_1 x^{1+\alpha}.$$

Supondo $x = \frac{\pi}{n}$ e procedendo de maneira análoga ao feito para $f(x)$, obtemos

$$\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} \frac{a_k}{k} \leq 2 \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} \frac{a_k}{k} sen^2 \frac{k\pi}{2n} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} sen^2 \frac{k\pi}{2n} \leq C_1 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}. \tag{3.4}$$

Como $a_n \downarrow 0$ então

$$\frac{na_n}{2n} \leq \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} \frac{a_k}{k}. \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.4) e (3.5) temos que $a_n \leq \frac{C_2}{n^{1+\alpha}}$, ou seja, $a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$.

Vamos mostrar agora a recíproca do teorema acima.

Teorema 6. *Se* $0 < \alpha < 1$ *e*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),$$

então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nx$$

são funções Hölder de ordem α.

Prova:

Mostraremos que, se $a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$ então $f(x)$ é Hölder de ordem α, $0 < \alpha < 1$, onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Queremos mostrar que

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq k\,|h|^{\alpha}$$

para qualquer h.

Começamos observando que a série de Fourier para $f(x+h) - f(x-h)$ pode ser escrita como

$$f(x+h) - f(x-h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\cos n(x+h) - \cos n(x-h)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\cos nx \cos nh - sen\, nx\, sen\, nh - \cos nx \cos nh - sen\, nx\, sen\, nh\right]$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\, nx\, sen\, nh.$$

Assim

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x-h)| &\leq 2\left|\sum_{j=1}^{2^S-1} a_j senjx\, senjh\right| + 2\left|\sum_{j=2^S}^{\infty} a_j senjx\, senjh\right| \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{2^S-1} |a_j senjx\, senjh| + 2\lim_{l\to\infty}\sum_{j=2^S}^{l} |a_j senjx\, senjh| \\
&* \leq 2\sum_{j=1}^{2^S-1} |a_j|\,|jh| + 2\lim_{l\to\infty}\sum_{j=2^S}^{l} |a_j| \\
&= 2\sum_{j=1}^{S}\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} |a_k|\,|h|\,k + 2\sum_{j=2^S}^{\infty} |a_j|\,.
\end{aligned}$$

Onde S é tal que, $\frac{1}{2^S} < |h| \leq \frac{1}{2^{S-1}}$. A desigualdade $*$ segue de:

1) $|senx| \leq 1,\ \forall\ x.$

2)Seja $\varepsilon > 0$ qualquer e $\varepsilon \leq x < \pi$.

Do fato que, $\dfrac{sen\,x}{x}$ é uma função decrescente em $(0,\pi)$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x} = 1$, obtemos $\left|\dfrac{sen\,x}{x}\right| \leq 1$, para todo $x \in (0,\pi)$.

Ou seja, $|sen\,x| \leq |x|$, para $0 < x < \pi$.

Logo, pela escolha de S, $\dfrac{1}{2^S} < |jh| < 2$, para $1 < j < 2^S - 1$ e portanto, $|sen\,jh| \leq |jh|$.

Por hipótese $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$, ou seja, existe C tal que $a_n \leq \dfrac{C}{n^{1+\alpha}}$ e lembrando que $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{1+\alpha}} < \infty$ já que $1+\alpha > 1$, obtemos

$$\sum_{k=R}^{\infty}|a_k|\,R^{\alpha} \leq \sum_{k=R}^{\infty}\left|\frac{C}{k^{1+\alpha}}\right|R^{\alpha} = |C|\,R^{\alpha}\sum_{k=R}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha}} < C_1,$$

ou seja,

$$\sum_{k=R}^{\infty}|a_k| < \frac{C_1}{R^{\alpha}}. \tag{3.6}$$

Por outro lado, como $|a_k| \geq 0$, podemos escrever

$$\sum_{k=R}^{2R-1}|a_k| \leq \sum_{k=R}^{\infty}|a_k| < \frac{C_1}{R^{\alpha}}.$$

Assim

$$\sum_{k=R}^{2R-1}k\,|a_k| \leq 2R\sum_{k=R}^{2R-1}|a_k| < \frac{2C_1R}{R^{\alpha}} = 2C_1R^{1-\alpha}. \tag{3.7}$$

Logo, fazendo $R = 2^S$ em (3.6) e fazendo $R = 2^{j-1}$ em (3.7), obtemos

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq 2\,|h| \sum_{j=1}^{S} 2C_1 2^{(j-1)(1-\alpha)} + \frac{2C_1}{2^{S\alpha}}$$

$$= |h|\, C_3 \sum_{j=1}^{S} 2^{(j-1)(1-\alpha)} + \frac{C_2}{2^{S\alpha}}$$

$$= |h|\, C_3 \left(1 + 2^{(1-\alpha)} + 2^{2(1-\alpha)} + ... + 2^{(S-1)(1-\alpha)}\right) + \frac{C_2}{2^{S\alpha}}$$

$$\leq |h|\, C_3 \left(S 2^{S(1-\alpha)}\right) + \frac{C_2}{2^{S\alpha}}$$

$$\leq C_4 \left(|h| \left(2^{S(1-\alpha)}\right) + \frac{1}{2^{S\alpha}}\right)$$

$$= C_4 \left(\frac{|h|\, 2^S + 1}{2^{S\alpha}}\right) \leq \frac{3C_4}{(2^S)^{\alpha}} < k\,|h|^{\alpha}.$$

Portanto, $|f(x+h) - f(x-h)| < k\,|h|^{\alpha}$,

onde k é uma constante.

Logo f é Hölder de ordem α.

De maneira análoga, obtemos que $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\, nx$ é Hölder de ordem α.

□

4. Apêndice

A seguir, vamos apresentar as provas do lema 1 da seção 2 e dos teoremas 15, 16 da seção 1.

Lema 1. *Seja a_n uma sequência monótona decrescente a zero ($a_n \downarrow 0$). Se*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in L^p \, (1 < p < \infty),$$

então vale a integração termo a termo da $f(x)$.

Isto é, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x \cos nt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx.$

Prova:

Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, para $x \in [0, 2\pi]$ e g periódica.

Vamos mostrar que g é contínua. Para isso, mostraremos que

$$\lim_{a \to 0} g(x + a) = g(x).$$

De fato:

$$\begin{aligned}
|g(x)-g(x+a)| &\leq \int_x^{x+a} |f(t)|\, dt \\
&\leq \left(\int_x^{x+a} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^{x+a} 1dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\int_x^{x+a} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} a^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue da desigualdade de Hölder.

Como $f(x) \in L^p$, ou seja, $\int_x^{x+a} |f(t)|^p\, dt < \infty$. Segue que

$$|g(x)-g(x+a)| \leq k a^{\frac{p-1}{p}}.$$

De modo que

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ (k constante positiva) tal que $|a| < \delta$ implica que

$$|g(x)-g(x+a)| \leq k a^{\frac{p-1}{p}} < k\delta^{\frac{p-1}{p}} = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Ou seja, $\lim_{a\to 0} g(x+a) = g(x)$.

Sendo assim, existe a série de Fourier da $g(x) = \int_0^x f(t)dt =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n\, sen\, nx$, onde $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$.

Vamos determinar os coeficientes de Fourier.

Se $f \in L^p$ então $f \in L^1$. Logo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ é absolutamente contínua e assim podemos utilizar integração por partes (Veja em [4], na p.164).

Denotamos, $A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dx$.

Integrando por partes, encontramos

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[g(x)\frac{sen\, nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) sen\, nx}{n} dx \right] = 0,$$

pois os coeficientes de Fourier em seno da f são nulos.

Denotamos, $B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, sen\, nx\, dx$.

Integrando por partes e observando que $g(-\pi) = g(\pi)$, encontramos

$$B_n = \frac{1}{\pi}\left[-g(x)\frac{\cos\, nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)\cos\, nx}{n} dx \right] = \frac{a_n}{n},$$

onde a_n são os coeficientes de Fourier em cosseno da f.

Segue formalmente que

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sen\, nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx.$$

Observe que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx$ é a série, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, integrada termo a termo de zero a x.

Para mostrarmos que a série de Fourier da f pode ser integrada termo a termo, é suficiente mostrarmos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx$ converge pontualmente, para isso usaremos o teorema 14.

Vamos verificar que estamos nas hipóteses do teorema 14.

Pelo teorema de Riesz, se $f(x) \in L^p$ então $\overline{f(x)} \in L^p$. Sendo assim $\overline{f} \in L^1$.

Temos que, $\overline{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen \, nx$, onde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$.

Considere $\overline{f(x)}$ na forma complexa, então conforme (1.2)

$\overline{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, onde $c_0 = \frac{a_0}{2} = 0$ e para $n \geq 1$,

$$\begin{cases} c_n = -ia_n \\ c_{-n} = ia_n \end{cases}$$

Logo, $\overline{f(x)}i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ic_n e^{inx}$, onde $\begin{cases} ic_n = a_n \\ ic_{-n} = -a_n \end{cases}$

De modo que $ic_n = -ic_{-n} = a_n$, para $n \geq 1$.

Além disso, $a_n \geq 0$ já que $a_n \downarrow 0$.

Logo, pelo teorema 14,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ic_n}{n} < \infty$$

Assim

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sen \, nx\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen \, nx\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n} sen \, nx\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sen \, nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen \, nx$ é absolutamente convergente na norma do Sup. De modo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen \, nx$ converge pontualmente.

Neste caso, vale a integração termo a termo da série, como segue

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x \cos nt\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sen\, nx. \end{aligned}$$

Teorema 15. *Se* $f(x) \in L^p[-\pi,\pi]$ *e* $\phi(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$ *então* $\int_0^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx \le A_p \int_0^\pi |f(x)|^p\, dx\, (p > 1)$, *onde* A_p *depende somente de* p.

Prova:

Observemos que, para $\varepsilon > 0$, podemos integrar por partes.

Assim

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx \\ &= -\frac{\phi(\pi)^p}{(p-1)\,\pi^{p-1}} + \frac{\phi(\varepsilon)^p}{(p-1)\,\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_\varepsilon^\pi x^{1-p}\phi(x)^{p-1}\,|f(x)|\, dx \\ &< \frac{\phi(\varepsilon)^p}{(p-1)\,\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^{p-1} |f(x)|\, dx\ . \end{aligned}$$

Ou seja,

$$I(\varepsilon) < \frac{\phi(\varepsilon)^p}{(p-1)\,\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^{p-1} |f(x)|\, dx. \tag{4.1}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\phi(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt \le \left(\int_0^x |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x 1dt\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{4.2}$$

Observe que:

$a)$O primeiro termo do lado direito em (4.2) pode ser tornado tão pequeno quanto se queira, desde que x seja suficientemete pequeno.

$b)\left(\int_0^x 1dt\right)^{\frac{p-1}{p}} = x^{\frac{p-1}{p}}.$

De modo que, $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^{\frac{p-1}{p}}} = 0.$

Portanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}} = 0.$

Novamente, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^{p-1} |f(x)|\, dx \ &\leq \left(\int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x}\right]^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\varepsilon^\pi |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= [I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\varepsilon^\pi |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Combinando (4.1) e (4.3) , encontramos

$$I(\varepsilon) < \frac{\phi(\varepsilon)^p}{(p-1)\,\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\,[I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\varepsilon^\pi |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dividindo ambos os lados por $[I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}}$, obtemos

$$I(\varepsilon)^{\frac{1}{p}} < \frac{\phi(\varepsilon)^p}{(p-1)\,\varepsilon^{p-1}\,[I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{p}{p-1} \left(\int_\varepsilon^\pi |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo ε tender a zero e lembrando que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}} = 0$, temos que

$$\left(\int_0^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x} \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\pi |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, $\int_0^\pi \left[\frac{\phi(x)}{x} \right]^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\pi |f(x)|^p \, dx.$

Teorema 16. *Seja* $p > 1, \varphi(x) \geq 0$ *e* $h(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$ *então*
$\int_1^\infty \varphi(x)^p x^{p-2} dx \ < \infty \Rightarrow \int_1^\infty h(x)^p x^{-2} dx < \infty.$

Prova:

Inicialmente, observemos que, para qualquer $a \geq 1$ e para qualquer $x > a$, é possível escrever

$$\int_a^x \varphi(t)dt \ = \ \int_a^x \varphi(t) t^{\frac{p-2}{p}} t^{-\left(\frac{p-2}{p}\right)} dt.$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(t) t^{\frac{p-2}{p}} t^{-\left(\frac{p-2}{p}\right)} dt \ &\leq \left(\int_a^x \left[\varphi(t) t^{\frac{p-2}{p}} \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x t^{-\left(\frac{p-2}{p}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_a^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x t^{-\left(\frac{p-2}{p-1}\right)} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_a^x \varphi(t)dt \ \leq \left(\int_a^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x t^{-\left(\frac{p-2}{p-1}\right)} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (4.4)$$

Observe que:

a)O primeiro termo do lado direito em (4.4) pode ser tornado tão pequeno quanto se queira, desde que a seja suficientemente grande, visto que por hipótese:

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)^p x^{p-2} dx =$$

$$= \left[\int_1^a \varphi(x)^p x^{p-2} dx + \int_a^x \varphi(x)^p x^{p-2} dx + \int_x^{\infty} \varphi(x)^p x^{p-2} dx \right] < \infty.$$

b) $$\left(\int_a^x t^{-\left(\frac{p-2}{p-1}\right)} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left[(p-1) \left(x^{\frac{1}{p-1}} - a^{\frac{1}{p-1}} \right) \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq (p-1)^{\frac{p-1}{p}} \left(x^{\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = k x^{\frac{1}{p}},$$

onde a penúltima desigualdade segue do fato que $1 \leq a^{\frac{1}{p-1}} < x^{\frac{1}{p-1}}$.

Conseqüentemente, tomando $\varepsilon > 0$ um valor qualquer, é possível escolher a tal que $\int_a^x \varphi(t) dt < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}$.

Fixado este a, temos

$$h(x) = \int_1^x \varphi(t) dt = h(a) + \int_a^x \varphi(t) dt < h(a) + \varepsilon x^{\frac{1}{p}}.$$

Porém, para x suficientemente grande, obtemos

$$h(a) = \int_1^a \varphi(t) dt < \int_a^x \varphi(t) dt < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, $h(x) < 2\varepsilon x^{\frac{1}{p}}$.

Logo, dado $\eta = 2\varepsilon$, existe $A > 0$ tal que $|x| > A$ implica $\left|\dfrac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\right| = \dfrac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}} < \eta$,

isto é,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}} = 0. \tag{4.5}$$

Queremos mostrar que $\int_1^\infty h(x)^p x^{-2} dx < \infty$.

Para isso, integrando por partes, obtemos

$$\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt = -\left[\frac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\right]^p + \int_1^x p h(t)^{p-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}. \tag{4.6}$$

Agora vamos estimar a integral do lado direito de (4.6).

Para isso, escrevemos

$$h(t)^{p-1}\varphi(t)\frac{1}{t} = \left[h(t)^{p-1} t^{-1} t^{-\left(\frac{p-2}{p}\right)}\right]\left[\varphi(t) t^{\left(\frac{p-2}{p}\right)}\right].$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,teremos

$$\int_1^x h(t)^{p-1}\varphi(t)\frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \left(\int_1^x \left[h(t)^{p-1} t^{-1} t^{-\left(\frac{p-2}{p}\right)}\right]^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \left[\varphi(t) t^{\left(\frac{p-2}{p}\right)}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De modo que

$$\int_1^x h(t)^{p-1}\varphi(t)\frac{dt}{t} \le \left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7), obtemos

$$\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt \le -\left[\frac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\right]^p + p\left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.8}$$

Dividindo ambos os lados de (4.8) por $\left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$, encontramos para x suficientemente grande

$$\begin{aligned} \left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt\right)^{\frac{1}{p}} &\le -\left[\frac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\right]^p \left(\int_1^x h(t)^p t^{-2} dt\right)^{\frac{1-p}{p}} + p\left(\int_1^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le -\left[\frac{h(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\right]^p \left(\int_1^2 h(t)^p t^{-2} dt\right)^{\frac{1-p}{p}} + p\left(\int_1^x \varphi(t)^p t^{p-2} dt\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por hipótese $\int_1^\infty \varphi(t)^p t^{p-2} dt < \infty$.

Logo, fazendo x tender a ∞ e por (4.5) obtemos: $\int_1^\infty h(t)^p t^{-2} dt < \infty$. $\square$

Bibliografia

[1] Bartle, R.G., *The Elements of Integration*, New York, John Wiley, 1966.

[2] Bary, N.K., *A Treatise on Trigonometric Series*, Vol. II, New York, Pergamon Press, 1964.

[3] Butzer, P.L. e Nessel, R.J., *Fourier Analysis and Approximation*, Vol. I, New York, Academic Press, 1971.

[4] Fernandez, P.J., *Medida e Integração*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1976.

[5] Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1977.

[6] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York, John Wiley, 1968.

[7] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol. I, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1992.