MATEMÁTICA INTERVALAR:

DAS ORIGENS AO ESTADO DA ARTE

por

Dalcídio M. Claudio

RP nº 104 Janeiro 1989

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
Av. Osvaldo Aranha, 99
90.210 - Porto Alegre - RS - BRASIL
Telefone: (0512) 21-84-99
Telex: (051) 2680 - CCUF BR

Correspondência: UFRGS-CPGCC
Caixa Postal 1501
90001 - Porto Alegre - RS - BRASIL

Análise: Intervalos

SUMÁRIO

RESUMO

A Matemática Intervalar se baseia na possibilidade de se executar a análise de erros automaticamente em conecção com a própria computação. Neste trabalho serão apresentadas algumas noções gerais sobre intervalos e o atual estágio de desenvolvimento em algumas áreas.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Intervalar, aritmética intervalar, método de Newton, sistemas lineares, integração numérica.

ABSTRACT

Interval mathematics is based on the possibility of performing automatically the errors control. The techniques can be programmed for computers in order to obtain simultaneously upper and lower bounds to exact solutions of equations of various types. Itwill be showed some basic concepts about intervals and point out the actual state of art in some areas.

KEY WORDS: Interval Mathematics, interval arithmetic, Newton's method, linear equations, numerical integration.

1. INTRODUÇÃO

O controle de erros dos processos numéricos ganhou nos últimos 30 anos uma posição importante dentro de Matemática Numérica. Quase todos os algoritmos da década de 60 utilizados para resolução de um dado problema eram elaborados no corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou dos complexos ($\mathbb{C}$). A análise de erros ou a pesquisa da ordem de convergência era também feita nestas estruturas. Quando se pensa em implementar um desses algoritmos numa máquina digital precisa-se inicialmente representar os dados e as operações de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ num sistema finito de números de máquina chamado, por exemplo, sistema de Ponto Flutuante (F). A execução de tal algoritmo modelado de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ para F deve ser considerado como um experimento, tendo em vista que as mais simples regras de cálculo não são mais válidas ([CLA 79]). Em [NIC 66] foi deixado claro que quase todos os cálculos computacionais são sem sentido, se não se puder dar paralelamente cotas para o erro cometido.

A Matemática Intervalar se baseia na possibilidade de se executar a análise de erros automaticamente em conecção com a própria computação. Neste trabalho serão apresentadas algumas noções gerais sobre intervalos e o atual estágio de desenvolvimento em algumas áreas.

2. FUNDAMENTOS

O uso da aritmética intervalar foi desenvolvido inicialmente por [MOO 66]. Este grande e novo campo da matemática que vem a cada dia ganhando novas aplicações, tem a seguinte idéia básica do ponto de vista computacional: Dada uma função f(x) de variável real x pertencente a um interlo $X = [a,b]$ onde a e b são números de máquina. Com isso temos $a \leq x \leq b$ e portanto x está perfeitamente representado no sistema numérico da máquina. O domínio da f é dado por

$$f(X) = \{y \mid y = f(x),\ a \leq x \leq b\} \qquad (2\text{-}1)$$

Este domínio não é em geral dado exatamente, mas é sempre possível determinar um intervalo $Y = [c,d]$ tal que $f(X) \subseteq Y$, isto é $c \leq f(x) \leq d$. Podemos então definir uma função intervalar F associada a f pela transformação do intervalo [a,b] em [c,d], isto é,

$$Y = F(X) \supseteq f(X) \qquad (2\text{-}2)$$

Esta função F, chamada extensão intervalar de f, deve ser aquela que se afasta o mínimo possível de f(X). A esse respeito encontramos diversos trabalhos como por exemplo a avaliação de expressões aritméticas com exatidão máxima [Böh 83]. O erro obtido no cálculo de f(x) a partir do intervalo X é facilmente obtido através do diâmetro D(F(X)) isto é,

$$D(F(X)) = d - c \qquad (2\text{-}3)$$

O cálculo de expressões na aritmética intervalar consiste na extensão das operações aritméticas, o qual junto com um conjunto de funções standards forma a Aritmética Intervalar. Tal pacote foi desenvolvido em diversas universidades e centros de pesquisa como Universidade de Wisconsin [REI 87], Universidade de Karslruhe [PAS 86] e IBM, [HIG 84].

A aritmética intervalar utiliza um arredondamento especial, chamado arredondamento direcionado, o que significa que os resultados são arredondados para o menor e para o maior número de máquina que contém o resultado das operações, obtendo-se com isso um intervalo de máquina, com diâmetro mínimal, no qual a solução se situa.

Tomando-se como base o conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$ as operações básicas nos conjuntos dos Intervalos sobre $I\mathbb{R}$ são dadas por

$$[a,b] + [c,d] = [a + c,\ b + d]$$

$$k.\ [a,b] = [k.a,\ k.b] \quad \text{se } k \geq 0$$
$$= [k.b,\ k.a] \quad \text{se } k < 0$$

$$[a,b] - [c,d] = [a-d,\ b-c]$$

$$[a,b]\ .\ [c,d] = [\mathrm{Min}\ \{a.c,\ a.d,\ b.c,\ b.d\},\ \mathrm{Max}\ \{a.c,\ a.d,\ b.c,\ b.d\}]$$

$$[a,b]^{-1} = [b^{-1},\ a^{-1}] \quad ab > 0$$
$$= \text{indefinido se } a\ b \leq 0$$

Para se trabalhar com intervalos é preciso que se disponha de uma boa biblioteca que contenha as operações básicas bem como todas as funções standards. Tal software está disponível, por exemplo em [PAS 86]. A implementação dessas operações é baseada no trabalho [KUL 80] realizado em sua maior parte pelo Prof. Dr. U. Kulisch e sua equipe na Universidade de Karlsuhe - R.F.A., onde além das operações básicas que foram implementadas com exatidão máxima, isto é, entre o resultado real e o de máquina não existe nenhum outro número de máquina, foram também definidos algoritmos para vetores e matrizes igualmente com exatidão máxima. Para esse propósito foi necessário a realização do produto escalar com máxima exatidão, conhecido como Algoritmo de Bohlender. A partir daí seguiu-se a implementação de intervalos, matrizes sobre intervalos reais e complexos, etc, formando todos os espaços numéricos necessários para se trabalhar com computação científica.

É possível também introduzirmos a partir de um espaço parcialmente ordenado M, o espaço IM de todos os intervalos sobre M, como por exemplo o de Intervalo de Operadores ou Intervalo de Funções (Fig. 1)

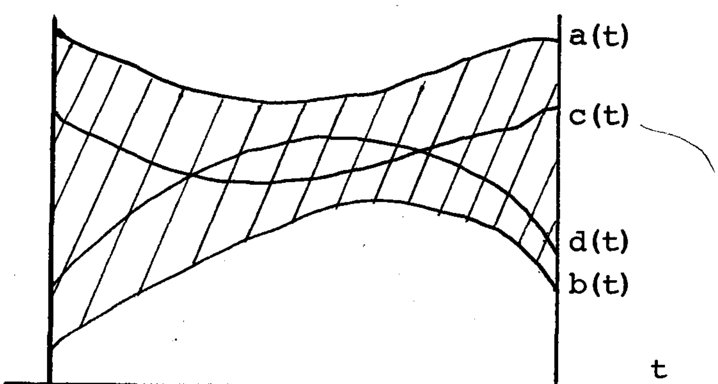

Fig. 1: Intervalo X = [a(t), b(t)] com representantes c,d ε X

Em [NIC 75] são definidas diversas relações de ordem em IM e diversos aspectos teóricos desse espaço.

3. APLICAÇÕES

3.1 Método de Newton,o primeiro grande sucesso

Vamos considerar f uma função contínua e x^* uma raiz de f num intervalo $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$. Seja válido sem perda de generalidade.

$$f(x_1^{(0)}) < 0 \quad e \quad f(x_2^{(0)}) > 0 \tag{3-1}$$

e para o intervalo $M = [m_1, m_2]$, $m_1 > 0$ valha

$$0 < m_1 \leq \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \frac{f(x)}{x-x^*} \leq m_2 < \infty,\ x^* \neq x \in X^{(0)} \tag{3-2}$$

então para a sequência $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ dada por

$$X^{(k+1)} = \{m\ (X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{M}\} \cap X^{(k)},\ k \geq 0 \tag{3-3}$$

Valem as propriedades:

- $x^* \in X^{(k)},\quad k > 0$ (3-4)
- $X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots$ com $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = x^*$ (3-5)

ou após um número finito de passos a seqüência termina $[x^*, x^*]$

- $D(X^{(k+1)}) \leq (1 - \frac{m_1}{m_2})\ D(X^{(k)})$ (3-6)

Isto significa que a seqüência $\{X^{(k)}\}$ converge no mínimo linear para x^*, A figura 2 mostra graficamente tal iteração.

É possível tornarmos a convergência quadrática simplesmente fazendo a cada passo $M^{(k)} = f'\ (X^{(k)})$ (3-7)

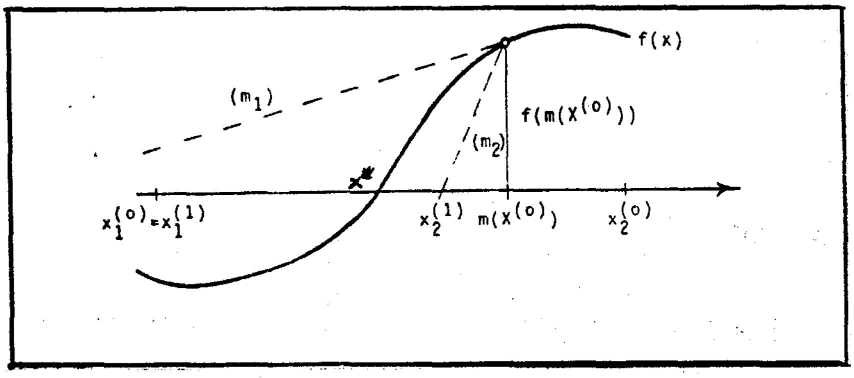

fig. 2: Método Intervalar de Newton

Nos últimos anos foram apresentadas diversas variações deste método, alguns deles se encontram em [ALE 81] e uma bibliografia vasta sobre o assunto [GAR 85], [GAR 87]. Lá se encontram métodos para cálculo de raízes complexas, sistemas, etc.

3.2 Diferenciação Numérica

Há muito tempo faz parte do folclore da matemática que derivadas são difíceis de serem calculadas, no entanto [MOO 79] mostrou que derivadas quando calculadas recursivamente e guardados os resultados intermediários num certo array, podem ser um problema fácil de ser resolvido. Em [RAL 83] é apresentada a diferenciação e geração de coeficientes de Taylor em Pascal SC e indicadas aplicações na solução de sistemas não lineares, análise de sensitividade, otimização e solução de problemas de valores iniciais para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

No caso de diferenciação de dados não exatos encontram-se em [AND 84] fórmulas de diferenças finitas multipontuais usando intervalos, onde são analisadas suas performances numéricas.

3.3 Resolução de Sistemas Lineares

Vamos supor, por exemplo, que os coeficientes $a_{ij} \varepsilon A$ do sistema linear.

$$Ax = b \tag{3-8}$$

podem ser representados exatamente por números de máquina. Então podemos afirmar

Teorema: Se for possível executar todos os passos de um método direto (p/ex. Gauss) para resolver em aritmética intervalar arredondada (se não ocorre divisão por um intervalo que contém o zero nem under(over)flow) então o sistema (3-8) tem uma única solução para cada matriz real A e cada vetor real b e esta solução está contida no intervalo vetorial X

Podemos exemplificar este teorema considerando o sistema mal condicionado.

$$\begin{aligned} 2.000\ x_1 + 3.001\ x_2 &= 1.000 \\ .6667\ x_1 + 1.000\ x_2 &= .3333 \end{aligned} \tag{3-9}$$

e resolvendo-o numa máquina decimal com 5 dígitos na mantissa. Ao eliminarmos x_1 na segunda equação se obtém

$$(1.000 - (0.6667/2.000)3.001)x_2 = .3333-(.6667/2.000)1.000$$

utilizando-se a partir daí intervalos, tem-se:

$$.6667/2.000 \quad \varepsilon \quad [.33335, 0.33335]$$

$$(.6667/2.000)\ 3.001 \ \varepsilon\ [1.0003, 1.0004]$$

$$.3333- (.6667/2.000)\ 1.000 \ \varepsilon\ [-0.00005, -0.00005]$$

$$(1.000 - (.6667/2.000)3.001 \ \varepsilon\ [-0.00040, -0.00030]$$

$$x_2 \ \varepsilon\ [.12500, .16667]$$

Se o nosso sistema tivesse 9 dígitos teríamos

$$x_2 \ \varepsilon\ [.130429111, .130429112]$$

Durante a eliminação da Gauss é possível que a combinação das operações aritméticas levem a um intervalo final com um diâmetro grande. Tais fenômenos pode ser vistos em [Won 75] e uma excelente técnica de solução utilizando-se algoritmos auto validáveis encontra-se em [Rum 80].

3.4 Integração Numérica

A fórmula do valor médio para integrais é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\varepsilon) \qquad (3\text{-}10)$$

onde f é contínua em $A = [a,b]$ e $\varepsilon \in A$.

A manipulação numérica não intervalar de (3-10) não abrange toda informação dada pela fórmula do valor médio e substitui $f(\varepsilon)$ por algum valor aproximado, como por exemplo $f(\frac{a+b}{2})$. Em termos de intervalos teríamos

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(\varepsilon) \in (b-a)\,f(A) \subseteq (b-a)\,F(A)$$

onde F é uma extensão intervalar da função f. Portanto nenhuma informação é perdida e ganha-se uma estimativa para o erro.

Exigindo-se que F seja uma inclusão monotônica, Lipschtziana e extensão intervalar de f com F(A) definida para todo $A \subseteq A_0$, temos quando f for contínua para x em A.

$$\int_A f(x)\,dx \ \varepsilon\ f(A)\ D(A) \text{ para todo } A \subseteq A_0 \qquad (3\text{-}11)$$

Seja $N \ \varepsilon\ \mathbb{N}$ e consideremos N subdivisões de A, do seguinte modo

$$A_1 = [a_1, b_1] \ldots A_N = [a_N, b_N], \text{ com}$$

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < b_3 \ldots < b_N = b$$

Utilizando-se a propriedade aditiva da integração chega-se facilmente ao Teorema: Existe uma constante arbitrária L, independente de N ou do método de subdivisões tal que:

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx \in \sum_{i=1}^{n} F(A_i)\, D(A_i)$$

$$\text{b)} \quad D\Big(\sum_{i=1}^{n} F(A_i)\, D(A_i)\Big) \leq L \sum_{i=1}^{n} D(A_i)^2 \tag{3-13}$$

Para uma subdivisão uniforme de $A = [a,b]$ com $D(A_i) = \frac{b-a}{N}$, $i = 1(1)N$ vamos definir

$$S_N = S_N\ (F\ ;\ A) = \sum_{i=1}^{N} F(A_i)\ (b-a)/N \tag{3-14}$$

e por (3-13)

$$D\ (S_N) \leq L\ (b-a)^2/N \tag{3-15}$$

e consequentemente

$$\int_a^b f(x)\ dx = \bigcap_{N=1}^{\infty} S_N\ (F;A) = \lim_{N\to\infty} S_N\ (F;A) \tag{3-16}$$

logo temos que a seqüência de intervalos $Y_1 = S_1$, $Y_{k+1} = S_{k+1} \cap Y_k$, $k = 1,2\ldots$ é uma seqüência encaixante de intervalos convergente.

<u>Exemplo</u> ([MOO 79])

Seja $f(x) = 1/x$ e seja a extensão intervalar $F(X) = 1/X$. De (3-11) obtemos para $A = [1,2]$

$$\int_1^2 (1/X)\,dX \in (1/[1,2]) = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

e de (3-14) segue-se que

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} (1/(1 + [i-1,\ i]/N))/N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} [1/(N+i),\ \ 1/(N+i-1)]$$

Utilizando-se um sistema de 3 dígitos com arredondamento direcionado obtem-se:

$$Y_1 = [.5,\ 1.0],\quad Y_2 = [.583,\ .834]$$

$$\ldots\ Y_{10} = [.663,\ .722]$$

Métodos mais rápidos do que esse, bem como fórmulas de Newton-Cotas fechadas e abertas, quadratura de Gauss e Euler-Maclaurin podem ser vistas em trabalhos como [MOO 79], [GRA 75].

3.5 Outras aplicações

Infelizmente não é possível entrarmos nos detalhes de todas as atuais pesquisas na área de matemática intervalar, citaremos aqui alguns dos recentes avanços e o leitor interessado deverá procurar a bibliografia indicada.

1. Otimização usando Matemática Intervalar
   [NIC 86], [Kra 75], [MOO 79], [Gar 85], [Gar 87]

2. Resolução Numérica de Equações Diferenciais
   [Mar 85], [MOO 79], [Gar 85], [Gar 87]

3. Análise de circuitos elétricos
   [Ske 79] [Pet 86], [Gar 85] [Gar 87]

4. Aproximação, Interpolação
   [Eng 85], [Gar 80], [Gar 85], [Gar 87]

4. OBSERVAÇÕES FINAIS

A Matemática Intervalar é atualmente um campo muito produtivo de trabalhos. Existem ainda muitas questões em estudo (em aberto) como por exemplo:

. A Teoria de Análise de intervalos: não foram ainda completados os estudos sobre diferenciação e integração de funções intervalares.

. Extensões Intervalares: como avaliar funções de modo a obtermos diâmetro mínimo com menor custo computacional?

. Computação Gráfica: esta área foi até agora pouco explorada pela matemática intervalar.

. Aplicações de intervalos à Engenharia Elétrica

. Aplicações de intervalos à inteligência artificial.

. Lógica Matemática.

Para aqueles que desejam não apenas trabalhar com intervalos, mas também buscam fazer tal tarefa de uma maneira mais confortável e com exatidão optimal não podem deixar de ler os trabalhos que se encontram em [Kul 83].

Toda bibliografica com excessão dos livros descrita em [Gar 85,87] pode ser obtida entrando-se em contato com Freiburger Interval Berichte, Universität Freiburg i Br, 7800 Freiburg i.Br., Alemanha Ocidental.

Agradecimentos

Parte desta pesquisa foi realizada com o apoio do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

5. BIBLIOGRAFIA

[Ale 81] Alefeld, G; Herzberger, J: Introduction to Interval Computations. Academic Press, NY, 1981.

[And 84] Andersen, R.S.; Hoog, F.R.: Finite Difference Methods for Numerical Differentiation of non-exact Data: Universität Freiburg, 1984.

[CLA 79] Claudio, D.M.: Beiträge zur struktur der Rechnerarithmetik, dissertação de doutorado, Universidade de Karlsruhe, R.F. Alemanha, 1979.

[Eng 85] Engels, H: an May, D.: Interpolation of an Interval-Valued function for arbitrarily distributed nodes, Luctures Notes in Computer Science 212/85, 1985.

[Gar 80] Garloff, J: Untersuchungen zur Intervallinterpolation, dissertação, Universidade Freiburg, R.F.A., 1980.

[Gar 85] Garloff, J: Interval Mathematics. A bibliography Freiburger Intervall-Berichte 85/6, 1985

[Gar 87] Garloff, J: Bibliography on Interval Mathematics, continuation. Freiburger Intervall-Berichte, 87/2, 1987.

[GRA 75] Gray, J.H.; Rall, L.B.: INTE: A Unival 1108/1110 program for numerical integration with rigorous error estimation, MRC technical summary report 1428, University of Wisconsin, Madison, 1975.

[Hig 84] High - Accuaracy arithmetic, subroutime labrary, General information manual, IBM, Program Number 5664-185, 1984.

[Kul 80] Kulisch, U.W.: Miranker, W.L.: Computer arithmetic in theory and practice, Academic Press, 1980.

[Kul 83] Kulisch, U.W.; Miranker, W.L.: A new aproach to scientific computation, Academic Press, 1983.

[Kra 75] Krawczyk, R.: Fehlerabschätzung bei linearer Optimierung, Lectures nots in Computer Sicence 29/75, 1975.

[Mar 85] Markov, S.; Angelov, R.: An interval Method for systems of ODE: Lectures notes in computer science 212/85, 1985.

[MOO 66] Moore, R.E.: Interval Analysis Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

[MOO 79] Moore, R.E.: Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1979.

[Nic 66] Nickel, K.: Über die notwendigkeit linerarer fehlerschrankemarithmetik fuer rechnerantomaten. Num. Math. 9.69-79, 1966.

[Nic 75] Nickel, K.: Verbandtheoretische grundlagen der intervall-mathematik, Interval Mathematics, Ed. by K. Nickel, Lecture Notes in Computer Science 29, Springer Verlag, 1975.

[Nic 86] Nickel, K.: Otimization using interval mathematics, Freiburger Intervall-Berichte nº 7/86, 1986.

[PAS 86] Pascal SC. A PASCAL extension for scientific computation, Teubner/J. Wiley, 1986.

[Pet 86] Petrovêc, M.S.: Analysis of linear electrical circuits in Z. Bohte (Eds) 5th conference on applied math. Sept 2-5, 1986, University of Ljubljana, Ljubljana.

[Ral 83] Rall, L.B.; Differentiation and generation of taylor coefficients in PASCAL - SC in [Kul 83], 1983.

[Rei 67] Reiter, A.: Interval arithmetic package (INTERVAL) for the CDC 1604 and CDC 3600. MRC tech summary rept. NO. 794. University of Wisconsin - Madison, 1967.

[Rum 80] Rump, S.M.: Kleine Fehlerschranken bei matrixproblemen, Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1980

[Ske 79] Skelloe, S.: True worst-case analysis of linear electrical circuit by interval arithmetic, IEEE trans. Circuits and systems 26, 874-879, 1979.

[Won 75] Wongwises, P.: Experimentelle unterschungen zur numerischen Aufloesung von linearen Gleichungssystemen mit fehlerschranken. Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1975.