Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO MÁXIMO DE ELEMENTOS INDEPENDENTES EM UM ANEL LOCAL E A COALTURA DE IDEAIS PRIMOS ASSOCIADOS AO SEU COMPLETAMENTO

por
LUISA RODRIGUEZ DOERING

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadora
Profa. Dra. Ada Maria de Souza Doering

Porto Alegre, Dezembro de 1990.

Dedico este trabalho ao Claus.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Ada Maria de Souza Doering por toda a paciência e dedicação.

Agradeço à Rosaura pelo excelente trabalho executado na edição do texto.

Agradeço ao Claus pelo apoio e carinho.

Resumo:

Neste trabalho estudamos resultados sobre elementos independentes em relação a um ideal de um anel noetheriano comutativo com unidade. Começamos mostrando, num resultado devido a G. VALLA, que o supremo de um ideal (número máximo de elementos independentes nesse ideal) está entre a profundidade e a altura do mesmo. Demonstramos então um teorema, devido a N.V. TRUNG, que relaciona o supremo de um ideal com o comportamento do ideal nulo de completamentos de localizações do anel em primos associados a este ideal. Como aplicação desse resultado provamos que o completamento de um anel local (R, m) possui um ideal primo associado (mínimo) ao ideal nulo de coaltura r se e somente se em R existir um ideal m-primário (inteiramente fechado) cujo supremo é r.

Abstract:

We prove results concerning independent elements with respect to an ideal of a commutative Noetherian ring with unity. First we prove a result due to G. VALLA: the supremum of an ideal, that is, the maximum number of independent elements of an ideal with respect to itself, is bounded below by the depth and above by the height of the ideal. Next we prove a characterization theorem of N.V. TRUNG which relates the supremum of an ideal with the behavior of the zero ideal of completions of localizations of the ring at its associated prime ideals. As an application, we prove that the completion of a local ring (R, m) has a (minimal) prime divisor of coheight r if and only if there exists in R an (integrally closed) m-primary ideal with supremum r.

Índice:

INTRODUÇÃO

Seja R um anel noetheriano, comutativo e com unidade. Dizemos que r elementos de R são independentes em relação a um ideal $\mathfrak{Q}$ do anel R se todas as formas de r variáveis, com coeficientes em R, que se anulam nestes elementos têm seus coeficientes no ideal $\mathfrak{Q}$. Em [22] G. Valla provou que o número máximo de elementos de $\mathfrak{Q}$ independentes em relação ao ideal $\mathfrak{Q}$, denotado por $sup\ \mathfrak{Q}$, é limitado inferiormente pela profundidade de $\mathfrak{Q}$ e superiormente pela altura de $\mathfrak{Q}$. Seguiram-se vários trabalhos , entre os quais citamos os de L.J. Ratliff [16, 17], W. Bruns [5], C. Huneke [7], nenhum, entretanto, logrando caracterizar $sup\ \mathfrak{Q}$ em termos de outros invariantes do ideal $\mathfrak{Q}$. Pensava-se, inclusive, que $sup\ \mathfrak{Q}$ era sempre igual a uma de suas cotas, $alt\ \mathfrak{Q}$ ou $prf\ \mathfrak{Q}$, quando J. Barshay exibiu o seguinte exemplo em [2] : $R = k[x,y,z]$, onde k é um corpo e x,y,z são as classes de X,Y,Z , respectivamente, em relação a (X^2, XY^2, XYZ) no anel $k[X,Y,Z]$ e $\mathfrak{Q} = (x,y,z)^2$; então $prf\ \mathfrak{Q} = 0$ pois $m = (0 : xy)$ e $alt\ \mathfrak{Q} = 2$. No entanto, $sup\ \mathfrak{Q} = 1$. De fato, z^2 é $\mathfrak{Q}$-independente, pois $c.(z^2)^n = 0$ implica $c \in (xy) \subseteq \mathfrak{Q}$; logo $sup\ \mathfrak{Q} \geq 1$. Por outro lado tomando $b = (xy, xz, y^2, yz)$, temos que nenhum elemento de b é $\mathfrak{Q}$-independente, pois $x.b = 0$ e $x \notin \mathfrak{Q}$. Assim, supondo que $u, v \in \mathfrak{Q}$ são $\mathfrak{Q}$-independentes, podemos escrever $u = f(z).z^p + u'$ e $v = g(z).z^q + v'$ com $u', v' \in b$, $p \geq q \geq 2$ e $f(0) \neq 0 \neq g(0)$. Segue-se que $x.g(z).S - xz^{p-q} f(z)T$ é uma forma em S e T que se anula em u e v ; no entanto $x.g(z) \equiv xg(0) \equiv x \not\equiv 0\ mod\ (\mathfrak{Q})$, e portanto u e v não são $\mathfrak{Q}$-independentes.

Coloca-se então, naturalmente, o problema de Barshay: dados $r \leq s \leq t$, existem sempre um anel R e um ideal $\mathfrak{Q}$ tais que $prf\ \mathfrak{Q} = r$, $alt\ \mathfrak{Q} = t$ e $sup\ \mathfrak{Q} = s$?

Coube a N.V. Trung, em seu trabalho [21], obter uma caracterização de $sup\ \mathfrak{Q}$ em termos do comportamento do zero do completamento de localizações de R relacionadas com $\mathfrak{Q}$. Essa caracterização permite resolver , de maneira direta, o problema de Barshay. Além disso, tal caracterização permite a Trung obter com maior facilidade alguns resultados de Bruns e Ratliff bem como simplificar algumas fórmulas.

O tema central desta monografia é relatar este trabalho de Trung. Depois de fixar a terminologia em um parágrafo preliminar, demonstramos no §1 o resultado de Valla: $prf\ \mathfrak{a} \leq sup\ \mathfrak{a} \leq alt\ \mathfrak{a}$. No §2 enunciamos o teorema central deste trabalho caracterizando, precisamente, $sup\ \mathfrak{a}$ em termos de invariantes de $\mathfrak{a}$. Com essa caracterização constroi-se uma família de ideais que resolve o problema de Barshay. Ainda neste parágrafo iniciamos a demonstração do teorema, que só é concluida no §3. Observamos que em [3], Björk relata esta caracterização de $sup\ \mathfrak{a}$ a partir de uma versão preliminar não publicada do trabalho de Trung.

Nos últimos três parágrafos passamos às aplicações. Em se tratando do ideal máximo m de um anel local, elementos independentes em relação a m são ditos analiticamente independentes. Como conseqüência do teorema central podemos expressar o número máximo de elementos analiticamente independentes de um ideal b, pela coaltura de algum ideal primo mínimo do anel que não contem b. Em particular, no Teorema 4.3 (respectivamente 5.3), provamos que para estudar a coaltura de ideais primos (respectivamente mínimos) associados ao zero do completamento de R, basta estudar o número máximo de elementos independentes em relação a ideais m-primários (respectivamente inteiramente fechados). Este resultado é notável pois com ele podemos investigar o comportamento do completamento de um anel local sem tratar diretamente com o anel. Por exemplo, obtém-se facilmente a seguinte caracterização de anéis unmixed e quasi-unmixed devido a Bruns e Ratliff respectivamente: R é um anel local (quasi-) unmixed se e somente se o supremo é igual à altura para cada ideal (inteiramente fechado) de R. Mais ainda, nas proposições 4.5 e 5.5, usando o teorema central estamos aptos a estender para coalturas quaisquer a caracterização de Ratliff [14], ([15]) de domínios locais que possuem um ideal primo (mínimo) de coaltura <u>um</u> associados ao zero do completamento do domínio local, como aqueles domínios locais cujo ideal máximo é um ideal primo associado a cada ideal não nulo (respectivamente inteiramente fechado) contido em potências grandes do ideal máximo.

Como última aplicação do teorema central, obtemos na Proposição 6.1 (6.5) uma fórmula para $\min_n sup\ \mathfrak{a}^n$ (respectivamente $\min_n sup\ \overline{\mathfrak{a}^n}$, onde $^-$ denota o fecho inteiro de $\mathfrak{a}^n$ em R) que depende somente do mínimo das coalturas dos ideais primos associados (respect. mínimos) ao zero do completamento de uma certa localização de R. Isto não era conhecido por Bruns em [5] e Ratliff em [16], que têm fórmulas semelhantes mas mais complicadas.

Finalmente, em um apêndice, demonstramos os fatos não relacionados com *sup* e que são usados neste trabalho. Em uma primeira parte coletamos resultados gerais e na segunda parte demonstramos resultados sobre ideais inteiramente fechados.

CAPÍTULO I: Supremo de Ideais

§0 - Preliminares

Neste trabalho todos os anéis são noetherianos, comutativos e com unidade. Seja R um anel; *Spec* R denota o conjunto dos ideais primos de R. Por ser R um anel noetheriano, dado um ideal $\mathfrak{a}$ de R, $\mathfrak{a}$ possui uma decomposição primária, os ideais primos associados a essa decomposição dependem somente de $\mathfrak{a}$ e o conjunto desses ideais primos é denotado por $Ass(\mathfrak{a})$. A altura, a profundidade e a coaltura de um ideal $\mathfrak{a}$ são denotadas por $alt\ \mathfrak{a}$, $prf\ \mathfrak{a}$ e $coalt\ \mathfrak{a}$ respectivamente.

Se (R, m) é um anel local denotamos por R^* o completamento de R segundo a topologia m-ádica. Para facilitar a escrita, o completamento do anel R_p, onde $p \in Spec\ R$, é denotado por R_p^* no lugar de $(R_p)^*$.

Sejam $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis e $\mathfrak{a}$ um ideal próprio de R. Denotamos $\varphi(\mathfrak{a})\ S \cap R := \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})S)$, mesmo que φ não seja injetor. Em particular, se $p \in Spec\ R$, $\mathfrak{a}\ R_p \cap R$ denota $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})\ R_p)$, ficando o homomorfismo natural de localização

$$\varphi : R \longrightarrow R_p$$

$$a \longmapsto \frac{a}{1}$$

subentendido.

Conceito básico:

Sejam $\mathfrak{a}$ um ideal do anel R e $r \in \mathbb{N}$. Dizemos que os elementos $a_1, \ldots, a_r \in R$ são independentes em relação a $\mathfrak{a}$, e escrevemos **$\mathfrak{a}$-independentes**, se qualquer forma de $R[X_1, \ldots, X_r]$ que se anula em $a_1, \ldots, a_r$ tem todos os coeficientes no ideal $\mathfrak{a}$. Em particular, se (R, m) é um anel local, elementos m-independentes são denominados analiticamente independentes.

Dados os ideais $\mathfrak{a}$ e b de R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, definimos $sup_b\ \mathfrak{a}$ como o número máximo de elementos de b independentes em relação a $\mathfrak{a}$. Em particular

$$sup\ \mathfrak{a} := sup_{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a}\ .$$

§1 - Relação entre Supremo, Profundidade e Altura de um Ideal

Neste parágrafo provamos que

$$prf\ \mathfrak{a} \leq sup\ \mathfrak{a} \leq alt\ \mathfrak{a}$$

para qualquer ideal $\mathfrak{a}$ de um anel R. Começamos com alguns resultados elementares, que serão utilizados também nos próximos capítulos.

<u>Proposição 1.1.</u>: Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais do anel R e $a_1, \ldots, a_r \in R$.

(i) Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ e $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{a}$-independentes, então $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{b}$-independentes; em particular, $sup\ \mathfrak{a} \leq sup\ \mathfrak{b}$.

(ii) Se $r \geq 2$ e $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{a}$- independentes, então $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{a}$.

(iii) Se $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ então $sup_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = sup_{\sqrt{\mathfrak{b}}}\ \mathfrak{a}$; em particular, $sup_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} \leq sup\ \mathfrak{a}$.

(iv) Se (R, m) é um anel local e $\mathfrak{a}$ é um ideal m-primário, então $sup\ \mathfrak{a} =$ $= sup_{m}\ \mathfrak{a}$.

<u>Observação</u>: Se $r = 1$ em (ii), a afirmação é falsa. Basta tomar $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ um ideal primo: todo $a \in R \setminus \mathfrak{a}$ é $\mathfrak{a}$-independente.

<u>Prova</u>: (i) É imediato. (ii) Para cada $i = 2, \ldots, r$ consideremos a forma de $R[X_1, \ldots, X_r]$ definida por

$$G_i(X_1, \ldots, X_r) = a_i X_1 \ldots X_{i-1} X_{i+1} \ldots X_r - a_1 X_2 \ldots X_r\ ;$$

temos $G_i(a_1, \ldots, a_r) = 0$. Como $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{a}$-independentes, os coeficientes de G_i estão em $\mathfrak{a}$, ou seja, $a_i \in \mathfrak{a}$ para $i = 2, \ldots, r$ e $a_1 \in \mathfrak{a}$.

(iii) Como $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$, temos que $sup_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} \leq sup_{\sqrt{\mathfrak{b}}}\ \mathfrak{a}$. Sejam $a_1, \ldots, a_r \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ elementos $\mathfrak{a}$-independentes; logo existem $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tais que $a_i^{n_i} \in \mathfrak{b}$. Afirmamos que $a_1^{n_1}, \ldots, a_r^{n_r}$ são $\mathfrak{a}$-independentes. De fato, seja $F \in R[X_1, \ldots, X_r]$ uma forma que se anula em $a_1^{n_1}, \ldots, a_r^{n_r}$; obtemos de F uma forma de grau maior que anula $a_1, \ldots, a_r$. Assim, como $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{a}$-independentes, os coeficientes de F pertencem a $\mathfrak{a}$. Conseqüentemente $sup_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = sup_{\sqrt{\mathfrak{b}}}\ \mathfrak{a}$. Agora, como $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Logo $sup_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = sup_{\sqrt{\mathfrak{b}}} \leq sup_{\sqrt{\mathfrak{b}}}\ \mathfrak{a} \leq sup_{\sqrt{\mathfrak{a}}}\ \mathfrak{a} = sup\ \mathfrak{a}$.

(iv) Decorre de (iii) que $sup_{m}\ \mathfrak{a} \leq sup\ \mathfrak{a}$. Como $sup\ \mathfrak{a} \leq sup_{m}\ \mathfrak{a}$, temos que $sup_{m}\ \mathfrak{a} = sup\ \mathfrak{a}$. ◊

Proposição 1.2.: Sejam $\mathfrak{Q}$ um ideal de R e $a_1, \ldots, a_r \in R$. Dados um anel S e um homomorfismo $\varphi : R \to S$, temos:

(i) se $\varphi(\mathfrak{Q})S \cap R$ e $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$ são $\varphi(\mathfrak{Q})S$-independentes, então $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes.

(ii) se S (via φ) é um R-módulo plano e $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes, então $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$ são $\varphi(\mathfrak{Q})S$-independentes; em particular, $sup\ \varphi(\mathfrak{Q})S \geq sup\ \mathfrak{Q}$.

Prova: (i) Seja $F(X_1, \ldots, X_r) \in R[X_1, \ldots, X_r]$ uma forma que anula $a_1, \ldots, a_r$. Então φ induz uma forma $F^{\varphi}(X_1, \ldots, X_r) \in \varphi(R)[X_1, \ldots, X_r] \subseteq S[X_1, \ldots, X_r]$ que anula $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$. Mas, $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$ são $\varphi(\mathfrak{Q})S$-independentes; logo, os coeficientes de F^{φ} estão em $\varphi(\mathfrak{Q})S$ e portanto os coeficientes de F estão em $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{Q})S) = \mathfrak{Q}$. Provamos, assim, que $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes.

(ii) Seja $F(X_1, \ldots, X_r) \in S[X_1, \ldots, X_r]$ uma forma de grau n que anula $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$. O conjunto

$$I = \{(i_1, \ldots, i_r) \ / \ 0 \leq i_j \leq n \ e \ \sum_{j=1}^{r} i_j = n\}$$

dos multi-índices dos coeficientes de F é finito, portanto podemos ordená-lo e supor que

$$\{a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \ / \ (i_1, \ldots, i_r) \in I\} = \{A_1, \ldots, A_t\} \subseteq R$$

e

$$\{s_{i_1, \ldots, i_r} \ / \ (i_1, \ldots, i_r) \in I\} = \{S_1, \ldots, S_t\} \subseteq S,$$

onde t é o número de elementos de I e $s_{i_1, \ldots, i_r}$ são os coeficientes de F. Nossa hipótese sobre esta forma pode então ser escrita assim:

$$\sum_{i=1}^{t} S_i \ \varphi(A_i) = F(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)) = 0_s \, .$$

Como S é um R-módulo (via φ), decorre que $\sum_{i=1}^{t} A_i.S_i = 0$; resta mostrar que $S_i \in \varphi(\mathfrak{Q})S$, $i = 1, \ldots, t$. Usando o fato de S ser um R-módulo plano, obtemos [9, Teorema 1 (6), pag.18] $k \in \mathbb{N}$, $c_{ij} \in R$ e $d_j \in S$, $1 \leq j \leq k$, tais que

$$\sum_{i=1}^{t} c_{ij} \ A_i = 0 \qquad (1)$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} c_{ij}.d_j = S_i \ . \qquad (2)$$

Por outro lado, para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$ existe uma forma G_j de grau n em $R[X_1,\ldots,X_r]$ tal que $G_j(a_1,\ldots,a_r) = \sum_{i=1}^{t} c_{ij}\ A_i$; como $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes, (1) implica $c_{ij} \in \mathfrak{Q}$ para $j = 1,\ldots,k$ e portanto $c_{ij}.\ d_j = \varphi(c_{ij})d_j \in \varphi(\mathfrak{Q})S$ para $j = 1,\ldots,k$. Finalmente, de (2) decorre que $S_i \in \varphi(\mathfrak{Q})S$. ◊

<u>Corolário 1.3.</u>: Sejam $\mathfrak{Q}$ um ideal de R , p um ideal primo de R que contém $\mathfrak{Q}$ e $a_1,\ldots,a_r \in R$.

(i) Se $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes então $\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_r}{1}$ são $\mathfrak{Q}R_p$-independentes; em particular, $sup\ \mathfrak{Q} \leq sup\ \mathfrak{Q}R_p$.

(ii) Se $\mathfrak{Q}$ é um ideal p-primário e $\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_r}{1}$ são $\mathfrak{Q}R_p$-independentes, então $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes. Além disso, $sup\ \mathfrak{Q} = sup\ \mathfrak{Q}R_p$.

(iii) $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}R_p$-independentes se e só se $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}R_p^*$-independentes; em particular, $sup\ \mathfrak{Q}R_p = sup\ \mathfrak{Q}R_p^*$.

(iv) Se b é um ideal de R e $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$ então $sup_{\,b}\ \mathfrak{Q}\ \leq sup_{\,bR_p^*}\ \mathfrak{Q}R_p^*$.

<u>Prova</u>: (i) Como R_p é um módulo plano, (i) decorre da Proposição 1.2 (ii).

(ii) Observemos que $\mathfrak{Q}$ sendo p-primário temos $\mathfrak{Q}^{ec} = (\mathfrak{Q}R_p) \cap R = \mathfrak{Q}$; assim basta aplicar a Proposição 1.2 (i). Como $\frac{a_1}{s_1},\ldots,\frac{a_r}{s_r}$ são $\mathfrak{Q}R_p$-independentes se e só se $\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_r}{1}$ são $\mathfrak{Q}R_p$-independentes, já que $\frac{1}{s_i}$ é inversível em R_p, obtemos $sup\ \mathfrak{Q} = sup\ \mathfrak{Q}R_p$.

(iii) Como R_p^* é um R_p-módulo plano e como $(\mathfrak{Q}R_p^*) \cap R_p = \mathfrak{Q}R_p$ [12, Corolário 17.9] podemos aplicar a Proposição 1.2 (i) e (ii).

(iv) Decorre de (i) e (iii). ◊

<u>Corolário 1.4</u>: Seja $\mathfrak{Q} = \bigcap_{i=1}^{t} q_i$ uma decomposição primária do ideal $\mathfrak{Q}$ de R, com $\sqrt{q_i} = p_i$ para $i = 1,\ldots,t$. Então:

(i)Dados $a_1,\ldots,a_r \in R$, $a_1,\ldots,a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes se e só se, para cada $i = 1,\ldots,t$, $a_1,\ldots,a_r$ são $q_iR_{p_i}^*$-independentes.

(ii) Se $M = \bigcup_{i=1}^{t} p_i$, então $sup\ \mathfrak{Q} = sup\ \mathfrak{Q}R_M$; em particular, se p é um ideal primo de R então $sup\ p = sup\ pR_p$.

Prova: (i) Decorre facilmente da definição de elementos independentes que $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes se e só se, para todo $i = 1, \ldots, t$, $a_1, \ldots, a_r$ são q_i-independentes. Para cada $i = 1, \ldots, t$, o Corolário 1.3 (i), (ii) e (iii) garante que $a_1, \ldots, a_r$ são q_i-independentes se e só se $a_1, \ldots, a_r$ são $q_i R_{p_i}$-independentes se e só se $a_1, \ldots, a_r$ são $q_i R^*_{p_i}$-independentes .

(ii) Como R_M é uma localização de R, R_M é um R-módulo plano e, pela escolha de M, $\mathfrak{Q}^{ec} = \mathfrak{Q}$. Assim, pela proposição 1.2, $sup\ \mathfrak{Q} = sup\ \mathfrak{Q}R_M$. ◊

Passamos à prova de $prf\ \mathfrak{Q} \leq sup\ \mathfrak{Q}$. Para tal iniciamos com caracterizações alternativas de elementos independentes.

Proposição 1.5: Sejam $\mathfrak{Q}$ um ideal de R , $a_1, \ldots, a_r \in R$ e $X_1, \ldots, X_r, T$ indeterminadas. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Para toda forma $F(X_1, \ldots, X_r) \in R[X_1, \ldots, X_r]$, se $F(a_1, \ldots, a_r) = 0$ então $F(X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]$; ou seja, $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes.

(ii) Para todo $i \geq 0$ e para toda forma $F(X_1, \ldots, X_r) \in R[X_1, \ldots, X_r]$ de grau i, se $F(a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{Q}(a_1, \ldots, a_r)^i$ então $F(X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]$.

(iii)
$$\varphi : \frac{R[X_1, \ldots, X_r]}{\mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r)^i}{\mathfrak{Q}(a_1, \ldots, a_r)^i}$$
definido, em cada forma $F_i \in R[X_1, \ldots, X_r]$ de grau i, por
$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{k} F_i(X_1, \ldots, X_r) + \mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]\right) = \sum_{i=0}^{k} (F_i(a_1, \ldots, a_r) + \mathfrak{Q}(a_1, \ldots, a_r)^i) ,$$
é um isomorfismo.

(iv)
$$\psi : \frac{R[X_1, \ldots, X_r]}{\mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]} \longrightarrow \frac{R[a_1 T, \ldots, a_r T]}{\mathfrak{Q}[a_1 T, \ldots, a_r T]}$$
definido, em cada forma $F_i \in R[X_1, \ldots, X_r]$ de grau i, por
$$\psi\left(\sum_{i=0}^{k} F_i(X_1, \ldots, X_r) + \mathfrak{Q}[X_1, \ldots, X_r]\right) = \sum_{i=0}^{k} F_i(a_1, \ldots, a_r)T^i + \mathfrak{Q}[a_1 T, \ldots, a_r T] ,$$

definido, em cada forma $f_i \in R[X_1,\dots,X_r]$ de grau i, por $\varphi(f_i+(a_1,\dots,a_r)R) = f(a_1,\dots,a_r)+(a_1,\dots,a_r)^{i+1}R$, é bijeção. Segue-se da Proposição 1.5 que $a_1,\dots,a_r$ são $(a_1,\dots,a_r)R$-independentes. ◇

Teorema 1.7.: Seja $\mathfrak{Q}$ um ideal do anel R. Então, $prf\ \mathfrak{Q} \leq sup\ \mathfrak{Q}$.

Prova: Suponhamos que $prf\ \mathfrak{Q} = n$ e sejam $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{Q}$ tais que $a_1,\dots,a_n$ é uma seqüência regular. Pela Proposição 1.6 sabemos que $a_1,\dots,a_n$ são $(a_1,\dots,a_n)R$-independentes; mas $(a_1,\dots,a_n)R \subseteq \mathfrak{Q}$, portanto, pela Proposição 1.1 (i), $a_1,\dots,a_n$ são $\mathfrak{Q}$-independentes. Assim $n \leq sup\ \mathfrak{Q}$. ◇

No restante deste capítulo provamos que $sup\ \mathfrak{Q} \leq alt\ \mathfrak{Q}$ para um ideal qualquer $\mathfrak{Q}$. O roteiro desta demonstração é o seguinte: primeiramente mostramos que a desigualdade é válida para ideais primos em domínios, depois a estendemos para o ideal máximo de um anel local reduzido, em seguida eliminamos a hipótese de anel reduzido, e finalmente, via localização, chegamos ao resultado desejado.

Lema 1.8.: Sejam R um domínio e p um ideal primo de R. Então $sup\ (p) \leq alt(p)$.

Prova: Se $p=(0)$, então $sup\ p = 0 = alt\ p$. Seja $p \neq (0)$ e sejam $a_1,\dots,a_r \in R$ r elementos p-independentes. Pela Proposição 1.5((i) ⇔ (iv)),

$$\left(\frac{R}{p}\right)[X_1,\dots,X_r] \approx \frac{R_C}{pR_C} = \frac{R[a_1T,\dots,a_rT]}{pR[a_1T,\dots,a_rT]}, \qquad (.1)$$

onde $C=(a_1,\dots,a_r)$. Como $R \subseteq R_C \subset R\,[\,T\,]$, temos que $p \subseteq pR_C \subseteq pR\,[\,T\,]$ e $pR\,[\,T\,] \cap R = p$, logo $pR_C \cap R = p$. Por [24, Proposição 2, pag.326] obtemos

$$alt(pR_C) + gr\ tr_{\frac{R}{p}} \left(\frac{R_C}{pR_C}\right) \leq alt\ p + gr\ tr_R R_C\ .$$

Como $R \subseteq R_C \subseteq R\,[\,T\,]$, vale $gr\ tr_R R_C \leq 1$; mas, por (.1),

$$gr\ tr_{\frac{R}{p}} \left(\frac{R_C}{pR_C}\right) = gr\ tr_{\frac{R}{p}} \left(\frac{R}{p}\,[X_1,\dots,X_r]\right) = r\,.$$

Além disso, $alt(pR_C) > 0$ pois $pR_C \neq (0)$, portanto obtemos

$$r < alt(pR_C) + r \leq alt p + 1\ ,$$

ou seja, $r \leq alt\ p$. Assim $sup\ p \leq alt\ p$. ◊

Sendo (R, m) um anel local denotamos $sup\ R = sup\ m$.

Lema 1.9.: Seja (R, m) um anel local reduzido. Então $sup\ R \leq dim\ R$.

Prova: Sejam $p_1, \ldots, p_r$ os primos mínimos do anel R. Como $\frac{R}{p_i}$ é um domínio para $i = 1, \ldots, r$, temos, pela Proposição 1.8, $sup \frac{R}{p_i} \leq dim\ \frac{R}{p_i}$ para $i = 1, \ldots, r$.

Consideremos o homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{R}{p_i}$ definido por $\varphi(a) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(a)$, onde $\varphi_i : R \longrightarrow \frac{R}{p_i}$ é a projeção canônica. Como R é um anel reduzido, $\bigcap_{i=1}^{r} p_i = 0$; portanto $Nuc\varphi = \bigcap_{i=1}^{r} p_i = (0)$ e conseqüentemente φ é injetor. Seja $d = dim R$. Sabemos que $dim\ \frac{R}{p_i} \leq d$ para $i = 1, \ldots, r$. Logo, ao considerarmos $d+1$ elementos de R, $a_1, \ldots a_{d+1}$, sabemos que $\varphi_i(a_1), \ldots, \varphi_i(a_{d+1})$ não são $\frac{m}{p_i}$-independentes em $\frac{R}{p_i}$ para $i = 1, \ldots, r$. Assim, para cada $i = 1, \ldots, r$ existe uma forma $F_i(X_1, \ldots, X_{d+1}) \in R[X_1, \ldots, X_{d+1}] \setminus m[X_1, \ldots, X_r]$ de grau s_i, tal que $\varphi_i(F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})) = 0$. Como $m[X_1, \ldots, X_{d+1}]$ é um ideal primo, tem-se que $G(X_1, \ldots, X_{d+1}) = F_1(X_1, \ldots, X_{d+1}) \cdot \ldots \cdot F_r(X_1, \ldots, X_{d+1})$ é uma forma de grau $s = \sum_{i=1}^{r} s_i$ em $R[X_1, \ldots, X_{d+1}] \setminus m[X_1, \ldots, X_{d+1}]$. Mas,

$$\varphi(G(a_1, \ldots, a_{d+1})) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{r} F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \varphi_j \left(\prod_{i=1}^{r} F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})\right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\prod_{i=1}^{r} \varphi_j(F_i(a_1, \ldots, a_{d+1}))\right) = 0\ ,$$

pois pelo menos um fator de cada produto é nulo. Como φ é injetor, $G(a_1, \ldots, a_{d+1}) = 0$. Isto mostra que $a_1, \ldots, a_{d+1}$ não são m-independentes. Concluímos que $sup\ R \leq d = dim\ R$. ◊

A fim de eliminar a hipótese de anel reduzido mostramos o seguinte lema.

Lema 1.10: Sejam p um ideal primo do anel R e $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{\sqrt{0_R}}$ a projeção canônica sobre o quociente. Sejam $a_1,\dots,a_r \in R$ elementos p-independentes. Então, $\varphi(a_1,\dots \varphi(a_r)$ são $\varphi(p)$- independentes; em particular, $sup\ (p) \le sup\ (\varphi(p))$.

Prova: Sejam $a_1,\dots,a_r \in R$ elementos p-independentes; queremos mostrar que $\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_r)$ são $\varphi(p)$-independentes. Para isto, tomamos uma forma $G(X_1,\dots,X_r) \in \frac{R}{\sqrt{0_R}}[X_1,\dots,X_r]$ de grau s, tal que $G(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_r)) = 0$. Seja $F(X_1,\dots,X_r) \in R[X_1,\dots,X_r]$ uma forma de grau s tal que $\varphi(F(X_1,\dots,X_r)) = G(X_1,\dots,X_r)$. Segue-se que $\varphi(F(a_1,\dots,a_r)) = G(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_r)) = 0$ e portanto, $F(a_1,\dots,a_r) \in \sqrt{0_R}$. Tomemos $t \in \mathbb{N}$ tal que $F^t(a_1,\dots,a_r) = (F(a_1,\dots,a_r))^t = 0$. Então $F^t(X_1,\dots,X_r) \in R[X_1,\dots,X_r]$ é uma forma de grau $t.s$ que anula $a_1,\dots,a_r$. Como $a_1,\dots,a_r$ são p-independentes temos que $F^t(X_1,\dots,X_r) \in p[X_1,\dots,X_r]$. Agora, p é um ideal primo de R, portanto $p[X_1,\dots,X_r]$ é um ideal primo de $R[X_1,\dots,X_r]$, e conseqüentemente $F(X_1,\dots,X_r) \in p[X_1,\dots,X_r]$. Isto prova que os coeficientes de $G(X_1,\dots,X_r)$ estão todos em $\varphi(p)$ e portanto $\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_r)$ são $\varphi(p)$-independentes. ◇

Teorema 1.11: Seja $@$ um ideal do anel R. Então $sup\ @ \le alt\ @$.

Prova: Basta mostrar para ideais primos. De fato, sejam $p_1,\dots,p_r$ os primos mínimos de $@$. Pela Proposição 1.1 (i) temos que $sup\ @ \le sup\ p_i$ para $i = 1,\dots,r$. Logo se $sup\ p_i \le alt\ p_i$, temos $sup\ @ \le sup\ p_i \le alt\ p_i$ para $i = 1,\dots,r$. Como existe $j \in \{1,\dots,r\}$ tal que $alt\ @ = alt\ p_j$, pois $p_i,\dots,p_r$ são primos mínimos de $@$, temos

$$sup\ @ \le alt\ p_j = alt\ @\ .$$

Para mostrar o resultado para ideais primos, basta demonstrá-lo para o ideal máximo de um anel local. De fato, como R_p é um anel local, teremos então $sup\ p = sup\ pR_p \le alt\ pR_p = alt\ p$.

Suponhamos finalmente que (R,m) é um anel local. Sabemos que $\sqrt{0_R} = \bigcap_{p\ min\ R} p$, logo $dim\ R = dim\ \frac{R}{\sqrt{0_R}}$ e, pelo Lema 1.10 acima, $sup\ R \le sup\ \frac{R}{\sqrt{0_R}}$. Como $\frac{R}{\sqrt{0_R}}$ é anel local reduzido, o Lema 1.9 garante que

$$sup\ \frac{R}{\sqrt{0_R}} \le dim\ \frac{R}{\sqrt{0_R}}\ ;$$

logo

$$sup\ R \leq sup\ \frac{R}{\sqrt{0_R}} \leq dim\ \frac{R}{\sqrt{0_R}} = dim\ R\ . \qquad \diamond$$

CAPÍTULO II: O Teorema Central

§2 - Majoração do Sup

Neste parágrafo enunciamos o teorema central deste trabalho e com um exemplo mostramos que $sup\ \mathfrak{Q}$ pode assumir qualquer valor entre $prf\ \mathfrak{Q}$ e $alt\ \mathfrak{Q}$. A demonstração do teorema central será feita no §3; neste parágrafo damos uma nova majoração para $sup\ \mathfrak{Q}$ que é mais fina que aquela dada por $alt\ \mathfrak{Q}$ e que representa um primeiro passo na direção do teorema central. Necessitamos da seguinte convenção.

Sejam S um anel local noetheriano, I um ideal de S e J um subconjunto de S. Fixemos uma decomposição primária $\bigcap_{j=1}^{t} Q_j$ de I. Consideramos a seguinte cadeia ascendente de ideais

$$U_0^J(I) \subseteq U_1^J(I) \subseteq \ldots \subseteq U_i^J(I) \subseteq \ldots,$$

onde $U_0^J(I) := I$ e, para $i \geq 1$,

$$U_i^J(I) := \bigcap_{\sqrt{Q_j} \in \Delta_i} Q_j\,,$$

com $\Delta_i = \{P \in Ass(I)\ ;\ P \not\supseteq J \text{ e } coalt P \geq i\}$. Caso $\Delta_i = \emptyset$, $U_i^J(I) := S$.

Com essa convenção, podemos formular precisamente o teorema central:

<u>Teorema 2.1.</u>: Sejam $\mathfrak{Q}$ e b ideais do anel R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Então

$$sup_b\, \mathfrak{Q} = max\,\{i \geq 0\ ;\ U_i^b\left(0_{R_p^*}\right) \subseteq \mathfrak{Q}R_p^*,\ para\ cada\ p \in Ass(\mathfrak{Q})\}\,.$$

Esta caracterização nos possibilita construir, facilmente, exemplos de ideais tais que $prf\ \mathfrak{Q} = r \leq s \leq t = alt\ \mathfrak{Q}$ e $sup\ \mathfrak{Q} = s$, com $r, s, t \in \mathbb{N}$ arbitrariamente dados.

<u>Exemplo 2.2.</u>: Sejam K um corpo, $r, s \in \mathbb{N}$ e $X_0, X_1, \ldots, X_{r+s}$ indeterminadas sobre K. Definimos

$$R := \frac{K[[X_0, X_1, \ldots, X_{r+s}]]}{(X_0) \cap (X_0^2, X_1^2, X_0X_1) \cap \ldots \cap (X_0^2, X_1^2, \ldots, X_s^2, X_0 \ldots X_s)}\,.$$

Sabemos que R é um anel local completo, com $m = (\overline{X}_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{r+s})$ seu ideal máximo; também $dim\ R = alt\ m = r+s$ e

$$(\overline{X}_0) \subsetneq (\overline{X}_0, \overline{X}_1) \subsetneq \ldots \subsetneq (\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_{r+s})$$

é uma cadeia saturada de ideais primos de R. Por ser anel local completo, R é catenário [12, Teorema 34.4 (3 $\rightarrow$ 2)], portanto $alt(\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_j) = j$ e $coalt(\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_j) = r+s-j$. Agora

$$0_R = (\overline{X}_0) \cap (\overline{X_0^2}, \overline{X_1^2}, \overline{X_0X_1}) \cap \ldots \cap (\overline{X_0^2}, \ldots, \overline{X_s^2}, \overline{X_0 \ldots X_s})$$

é uma decomposição primária de 0_R, onde $(\overline{X_0^2}, \ldots, \overline{X_j^2}, \overline{X_0X_1 \ldots X_j})$ é um ideal $(\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_j)$ - primário para $j = 1, \ldots, s$ [20, Lema 2]; resulta que:

$$U_i^m(0_R) = 0_R \quad \text{se} \quad 0 \leq i \leq r,$$

$$U_i^m(0_R) = (\overline{X}_0) \cap (\overline{X_0^2}, \overline{X_1^2}, \overline{X_0X_1}) \cap \ldots \cap (\overline{X_1^2}, \ldots, \overline{X^2}_{r+s-i}, \overline{X_0 \ldots X_{r+s-i}})$$
$$se \ \ r \leq i \leq r+s,$$

$$U_i^m(0_R) = R \quad \text{se} \ \ i > r+s.$$

Mas, em $K[[X_0, \ldots, X_{r+s}]]$, é fácil ver que

$$\begin{aligned}(X_0) \cap (X_0^2, X_1^2, X_0X_1) \cap \ldots \cap (X_0^2, \ldots, X_j^2, X_0 \ldots X_j) = \\ = (X_0^2, X_0X_1^2, X_0X_1X_2^2, \ldots, X_0 \ldots X_{j-2}X_{j-1}^2, X_0 \ldots X_j)\end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, s$. Logo, em R, para $j = 1, \ldots, s$ temos

$$(\overline{X}_0) \cap (\overline{X_0^2}, \overline{X_1^2}, \overline{X_0X_1}) \cap \ldots \cap (\overline{X_0^2}, \ldots, \overline{X_j^2}, \overline{X_0 \ldots X_j}) = (\overline{X_0 \ldots X_j}).$$

Assim,

$$U_i^m(0_R) = \begin{cases} 0_R & \text{se} \ \ 0 \leq i \leq r, \\ (\overline{X_0 \ldots X_{r+s-i}}) & \text{se} \ \ r \leq i \leq r+s, \\ R & \text{se} \ \ i > r+s. \end{cases}$$

Pela Proposição 1.1 (iv), $sup\ m^n = sup_m\, m^n$; logo, aplicando o Teorema 2.1,

$$sup\ m^n = max\{i \geq 0;\ U_i^m(0_R) \subseteq m^n\}.$$

Observemos que se $U_i^{m}(0_R) \subseteq m^n$ então $0 \leq i \leq r+s$ portanto $r \leq sup\ m^n \leq r+s$. Como $\overline{X_o \ldots X_{r+s-i}} \in m^n$ se e só se $r+s-i+1 \geq n$, ou seja $i \leq r+s-n+1$, temos,

$$sup\ m^n = \begin{cases} r+s-n+1 & \text{se} \quad 1 \leq n \leq s+1 \ , \\ r & \text{se} \quad n > s+1. \end{cases}$$

Quanto à profundidade e altura de m^n temos: $prf\ m^n = prf\ m = r$, pois $X_{s+1}, \ldots, X_{r+s}$ é seqüência regular maximal em m e $alt\ m^n = alt\ m = dim\ R = r+s$. Resumindo, para $1 \leq n \leq s+1$ temos $prf\ m^n = r \leq r+s-n+1 \leq r+s = alt\ m^n$, com $sup\ m^n = r+s-n+1$. △

Passamos à seguinte majoração de $sup\ \mathfrak{Q}$, majoração da qual decorre uma metade (a mais simples) do teorema central.

Proposição 2.3.: Sejam R um anel local, $\mathfrak{Q}$ e b ideais de R com $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Então

$$sup_{\,b}\ \mathfrak{Q} \leq max\{i \geq 0\ ;\ U_i^b(0_R) \subseteq \mathfrak{Q}\}.$$

A demonstração desta proposição ocupa o restante deste parágrafo; antes de apresentá-la, tiramos a desigualdade anunciada.

Corolário 2.4.: Sejam $\mathfrak{Q}$ e b ideais do anel R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Então

$$sup_{\,b}\ \mathfrak{Q} \leq max\{i \geq 0\ ;\ U_i^b\left(0_{R_p^*}\right) \subseteq \mathfrak{Q}\, R_p^* \text{ para todo } p \in Ass(\mathfrak{Q})\}.$$

Prova: Primeiramente, notemos que

$$U_i^b\left(0_{R_p^*}\right) = U_i^{bR_p^*}\left(0_{R_p^*}\right),$$

onde p é um ideal primo de R, pois, dado $P \in Ass\left(0_{R_p^*}\right)$, $P \not\supseteq b$ se e só se $P \not\supseteq bR_p^*$. Escrevemos $\{p_1, \ldots, p_r\} = Ass(\mathfrak{Q})$ e para cada $j = 1, \ldots, r$ seja $i_j := max\{i \geq 0\ ;\ U_i^b\left(0_{R_{p_j}^*}\right) \subseteq \mathfrak{Q}\, R_{p_j}^*\}$.

Denotamos $k = \min_{1 \leq j \leq r} i_j$; então

$$U_k^b\left(0_{R_{p_j}^*}\right) \subseteq U_{i_j}^b\left(0_{R_{p_j}^*}\right) \subseteq \mathfrak{Q}\, R_{p_j}^*,$$

para cada $j = 1, \ldots, r$, pois a cadeia $\{U_i^b\ (0_R)\}_{i \in N}$ é crescente. Daí decorre que

$$k \in \{i \geq 0\ ;\ U_i^b\left(0_{R_p^*}\right) \subseteq @\, R_p^* \text{ para cada } p \in Ass(@)\}\ ,$$

logo

$$k = max\{i \geq 0\ ;\ U_i^b\left(0_{R_p^*}\right) \subseteq @R_p^* \text{ para cada } p \in Ass(@)\}\ .$$

Por outro lado, como $k = i_j$ para algum j , a Proposição 2.3 garante que

$$sup_{\,bR_{p_j}^*}\ @\, R_{p_j}^* \leq i_j = k\ .$$

Assim, pela Proposição 1.3 (iv),

$$sup_{\,b}\, @ \leq sup_{\,bR_{p_j}^*}\ @\, R_{p_j}^* \leq k\ . \qquad \diamond$$

Passamos pois, à prova da Proposição 2.3, na qual utilizamos os seguintes lemas.

Lema 2.5: Seja C um ideal do anel R. Se $a_1, \ldots, a_r \in R$ são @-independentes e $\overline{a}_i = a_i + (0_R : C)$ para $i = 1, \ldots, r$, então $\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_r \in \dfrac{R}{(0_R : C)}$ são $\dfrac{(@ : C)}{(0_R : C)}$-independentes.

Prova: Seja $F(X_1, \ldots, X_r) = \sum\limits_{\Sigma i_j = k} \overline{s}_{i_1 \ldots i_r}\ X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$ uma forma de $\dfrac{R}{(0_R : C)}\ [X_1, \ldots, X_r]$ de grau k, com $s_{i_1 \ldots i_r} \in R$, que se anula em $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$. Logo

$$\sum_{\Sigma i_j = k} s_{i_1 \ldots i_r} . a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \in (0_R : C)$$

e conseqüentemente, para cada $c \in C$, $\sum\limits_{\Sigma i_j = k} c.s_{i_1 \ldots i_r}\ a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} = 0_R$.

Assim, para cada $c \in C$, $\sum\limits_{\Sigma i_j = k} c.s_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$ é uma forma de $R[X_1, \ldots, X_r]$ que se anula em $a_1, \ldots, a_r$. Como $a_1, \ldots, a_r$ são @-independentes, temos $c.s_{i_1 \ldots i_r} \in @$ para cada $c \in C$, portanto $s_{i_1 \ldots i_r} \in (@ : C)$ e $\overline{s_{i_1 \ldots i_r}} \in \dfrac{(@ : C)}{(0_R : C)}$. $\diamond$

Lema 2.6: Sejam (R, m) um anel local, b e I ideais de R. Então

$$U_1^b(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I : b^n)\ .$$

Prova: Fixemos uma decomposição primária $\bigcap_{i=1}^{t} Q_i$ do ideal I, $\sqrt{Q_i} = P_i$, $P_i \not\supseteq b$ para $i = 1, \ldots, s$ e $P_i \supseteq b$ para $i = s+1, \ldots, t$. Por definição $U_1^b(I)$ é a intersecção de todas as componentes primárias de I cujos primos associados não contêm b e têm coaltura maior do que ou igual a 1. Mas o único ideal primo de R com coaltura zero é m e $m \supset b$, portanto $U_1^b(I) = Q_1 \cup \ldots \cup Q_s$. Dado $x \in U_1^b(I)$, vamos mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x.b^N \subseteq I$. Se $i \in \{1, \ldots, s\}$, temos $x \in Q_i$ e portanto $x.b \subseteq Q_i$. Se $i \in \{s+1, \ldots, t\}$ então $b \subseteq P_i = \sqrt{Q_i}$, logo existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $b^{n_i} \subseteq Q_i$, e portanto tal que $x.b^{n_i} \subseteq Q_i$. Assim, $N := max\{n_i \; ; \; i = s+1, \ldots, t\}$ satisfaz $x.b^N \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} Q_i = I$. Desse modo $U_1^b(I) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I : b^n)$. Mostremos, agora, a outra inclusão. Dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (I : b^n)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (I : b^k)$. Temos que $x.b^k \in I \subseteq Q_i$ para $i = 1, \ldots, t$. Se $P_i \not\supseteq b$ então, como P_i é um ideal primo, $P_i \not\supseteq b^s$ para todo $s \in \mathbb{N}$; como Q_i é um ideal P_i-primário, $x \in Q_i$. Assim, $x \in Q_i$ para cada i tal que $P_i \not\supseteq b$, ou seja, $x \in U_1^b(I)$. Desse modo $U_1^b(I) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I : b^n)$. ◇

Lema 2.7.: Sejam (R, m) um anel local, $\mathbb{Q}$ e b ideais de R com $b \subseteq \sqrt{\mathbb{Q}}$. Se $a_1, \ldots, a_r \in b$ são $\mathbb{Q}$-independentes então $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ são $\mathbb{Q}\overline{R}$-independentes, onde $\overline{R} = \dfrac{R}{U_1^b(0_R)}$ e $\overline{a} = a + U_1^b(0_R), a \in R$. Em particular, $sup_b \, \mathbb{Q} \leq sup_{b\overline{R}} \, \mathbb{Q}\overline{R}$.

Prova: Seja $\overline{F}(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{\Sigma i_j = k} \overline{s}_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$ uma forma de grau k em $\overline{R}[X_1, \ldots, X_r]$ que se anula em $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ e com $s_{i_1 \ldots i_r} \in R$; logo

$$\sum_{\Sigma i_j = k} s_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \in U_1^b(0_R).$$

Mas, pelo Lema 2.6 , $U_1^b(0_R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0_R : b^n)$, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\Sigma i_j = k} s_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \in (0_R : b^N).$$

Como $a_1 \in b$, $a_1^N \in b^N$ e então

$$a_1^N \left(\sum_{\Sigma i_j = k} s_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \right) = 0.$$

Assim, $\sum s_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1+N} X_2^{i_2} \ldots X_r^{i_r}$ é uma forma de grau $k+N$ em $R[X_1, \ldots, X_r]$ que se anula em $a_1, \ldots, a_r$; como $a_1, \ldots, a_r$ são $\mathfrak{Q}$-independentes obtemos $s_{i_1 \ldots i_r} \in \mathfrak{Q}$ e $\overline{s_{i_1 \ldots i_r}} \in \mathfrak{Q}\overline{R}$. ◊

Prova da Proposição 2.3.:

Sejam $r := max\{i \geq 0;\ U_i^b(0_R) \subseteq \mathfrak{Q}\}$ e $C = (\mathfrak{Q} : U_{r+1}^b(0_R))$; então C é um ideal próprio de R, já que $U_{r+1}^b(0_R) \not\subseteq \mathfrak{Q}$. Sejam

$$S := \frac{R}{(0_R : U_{r+1}(0_R)} \quad e \quad \overline{S} := \frac{S}{U_1^b(0_S)} ;$$

pelos Lemas 2.5 e 2.7 obtemos

$$sup_{\,b}\, \mathfrak{Q} \leq sup_{\,bS} \frac{(\mathfrak{Q} : U_{r+1}^b(0_R))}{(0_R : U_{r+1}^b(0_R))} = sup_{\,bS}\, CS \leq sup_{\,b\overline{S}}\, C\overline{S}.$$

Além disso, pela Proposição 1.1 (iii) e Teorema 1.13 temos

$$sup_{\,b\overline{S}} C\overline{S} \leq sup\ C\overline{S} \leq alt\ C\overline{S} \leq dim\ \overline{S},$$

e portanto

$$sup_{\,b}\, \mathfrak{Q} \leq dim\ \overline{S};$$

resta mostrar que $dim\ \overline{S} \leq r$.

Seja $\overline{P} = \dfrac{P}{U_1^{bS}(0_S)}$ um ideal primo de $\overline{S}$, P sendo um ideal primo de S que contém $U_1^{bS}(0_S)$. Pela definição de $U_1^{bS}(0_S)$, P contém algum primo $p \in Ass(0_S)$ tal que $p \not\supseteq bS$ e $coalt\ p \geq 1$. Pela definição de S , $p = \dfrac{p'}{(0_R : U_{r+1}^b(0_R))}$ com $p' \in Ass\ ((0_R : U_{r+1}^b(0_R)))$. Pelo Lema 2.8, abaixo, $coalt\ p' \leq r$, já que $p' \not\supseteq b$ pois $p \not\supseteq bS$, e portanto $coalt\ p \leq r$. Segue-se que $coalt\ P \leq r$, pois $P \supseteq p$, e então $coalt\ \overline{P} \leq r$. Podemos concluir, então, que $dim\ \overline{S} \leq r$. ◊

Lema 2.8: Sejam R um anel local e p, b ideais de R. Se $p \in Ass\ ((0_R : U_{r+1}^b(0_R)))$ então $p \supseteq b$ ou $coalt\ p \leq r$.

Prova: Sejam $(0_R) = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$ uma decomposição primária de 0_R e $\Gamma =$ $= \{Q_i; \sqrt{Q_i} \supseteq b$ ou $coalt \sqrt{Q_i} \leq r\}$. Observemos que

$$\bigcap_{Q_i \in \Gamma} Q_i \subseteq (0_R : U^b_{r+1}(0_R)).$$

Seja $p \in Ass\,((0_R : U^b_{r+1}(0_R)))$; então

$$p \supseteq (0_R : U^b_{r+1}(0_R)) \supseteq \bigcap_{Q_i \in \Gamma} Q_i,$$

portanto $p \supseteq Q_{i_0}$ e $p \supseteq \sqrt{Q_{i_0}}$ para algum $Q_{i0} \in \Gamma$. ◇

Podemos precisar o resultado do Lema 2.7 da seguinte maneira.

Proposição 2.9.: Sejam $\mathfrak{Q}$ e b ideais do anel local R com $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Seja $\overline{R} := \frac{R}{U^b_1(0_R)}$. Se $sup_b\, \mathfrak{Q} \geq 1$, então $sup_b\, \mathfrak{Q} = sup\, \mathfrak{Q}\overline{R}$.

Prova: Pelos Lema 2.7 e Proposição 1.1. (iii) temos

$$sup_b\, \mathfrak{Q} \leq sup_{b\overline{R}} \mathfrak{Q}\overline{R} \leq sup\, \mathfrak{Q}\overline{R}.$$

Portanto basta mostrar que $sup_b\, \mathfrak{Q} \geq sup\, \mathfrak{Q}\overline{R}$.

Sejam $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r \in \mathfrak{Q}\overline{R}$ elementos $\mathfrak{Q}\overline{R}$-independentes. Seja $c \in b$ tal que $c \notin P$ para cada $P \in Ass\,(0_R)$ com $P \not\supseteq b$. Tal $c \in b$ existe pois, caso contrário, b estaria contido na união dos ideais primos de $Ass\,(0_R)$ que não contém b e portanto $b \subseteq P$ para algum $P \in Ass\,(0_R)$ com $P \not\supseteq b$, o que é impossível. Tomemos $F(X_1, \ldots, X_r) \in R[X_1, \ldots, X_r]$ uma forma qualquer de grau k que se anula em $ca_1, \ldots, ca_r$ e mostremos que seus coeficientes estão em $\mathfrak{Q}$; assim temos $sup_b\, \mathfrak{Q} \geq r$ e consequentemente $sup_b \mathfrak{Q} \geq sup\, \mathfrak{Q}\overline{R}$.

Começamos provando que da escolha de c decorre

$$\bigcup_{n+1}^{\infty} (0_R : c^n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0_R : b^n).$$

É claro que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0_R : b^n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (0_R : c^n);$$

provemos a outra inclusão. Seja $(0_R) = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$ uma decomposição primária de (0_R) com $\sqrt{Q_i} = P_i$, $P_i \not\supseteq b$ para $i = 1, \ldots, t$ e $P_i \supseteq b$ para $i = s+1, \ldots, t$. Dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : c^n)$ existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $x.c^{n'} = 0$, portanto $x.c^{n'} \in Q_i$, $i = 1, \ldots, t$. Se $i \in \{1, \ldots, s\}$ então $P_i \not\supseteq b$, e pela escolha de c , o elemento $c \notin P_i$, de modo que $c^{n'} \notin P_i$ e $x \in Q_i$; em particular $x.b^n \subseteq Q_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $i \in \{s+1, \ldots, t\}$, então $P_i \supseteq b$ e existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $b^{n_i} \subseteq Q_i$ pois R é um anel noetheriano e $P_i = \sqrt{Q_i}$. Tomando $N = max\ \{n_i; i = s+1, \ldots, t\}$, temos $b^N \subseteq Q_i$ e portanto também $x.b^N \subseteq Q_i$, para todo $i \in \{s+1, \ldots, t\}$. Isto mostra que $x.b^N \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} Q_i = (0_R)$ e portanto que $x \in (0_R : b^N) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : b^n)$.

Em seguida provamos que $U_1^b(0_R) \subseteq \mathfrak{Q}$. Por hipótese, $sup_b\, \mathfrak{Q} \geq 1$, de modo que podemos tomar $a \in b$, $\mathfrak{Q}$-independente. Do Lema 2.6 e do fato de que $a \in b$, decorre

$$U_1^b(0_R) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : b^n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : a^n).$$

Assim dado, $\alpha \in U_1^b(0_R)$, podemos escolher $l \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha.a^l = 0$ e portanto a forma $\alpha.X^l \in R[X]$ se anula em $\underline{a}$, de modo que $\alpha \in \mathfrak{Q}$.

Finalmente mostramos que os coeficientes de F pertencem a $\mathfrak{Q}$. Temos $0 = F(ca_1, \ldots, ca_r) = c^k\ F(a_1, \ldots, a_r)$,logo

$$F(a_1, \ldots, a_r) \in (0 : c^k) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : c^n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(0_R : b^n) = U_1^b(0_R).$$

Passando ao quociente, obtemos $\overline{F}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r) = \overline{0}$; como $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ são $\mathfrak{Q}\overline{R}$-independentes e $U_1^b(0_R) \subseteq \mathfrak{Q}$, resulta que os coeficientes de $\overline{F}$ pertencem a $\mathfrak{Q}\overline{R} = \dfrac{\mathfrak{Q} + U_1^b(0_R)}{U_1^b(0_R)} = \dfrac{\mathfrak{Q}}{U_1^b(0_R)}$, portanto os de F a $\mathfrak{Q}$. ◇

§3 - Conjunto Maximal de Elementos Independentes

Já sabemos que

$$sup_{\,b}\, \mathfrak{Q} \le max\{i \ge 0; U_i^b(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{Q}R_p^*, \text{ para cada } p \in Ass(\mathfrak{Q})\} ;$$

para demonstrar o Teorema 2.1, basta, portanto, mostrar a desigualdade inversa. Fixemos uma decomposição primária $\mathfrak{Q} = \bigcap_{j=1}^{t} q_j$ de $\mathfrak{Q}$, com $\sqrt{q_j} = p_j\,, j = 1, \ldots t$. Temos $\mathfrak{Q}\, R_{p_j}^* \subseteq q_j\, R_{p_j}^*$ para $j = 1, \ldots, t$, de modo que $U_i^b(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq \mathfrak{Q}\, R_{p_j}^*$ implica $U_i^b\,(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq q_j\, R_{p_j}^*$ e portanto

$$\begin{aligned} r := max\{i \ge 0 \;/\; U_i^b\,(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq q_j\, R_{p_j}^* \text{ para todo } j = 1, \ldots, t\} \ge \\ \ge max\{i \ge 0 \;/\; U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{Q}\, R_p^*, \text{ para todo } p \in Ass(\mathfrak{Q})\}. \end{aligned}$$

Assim, para demonstrar o Teorema 2.1, basta provar que

$$(*)\; sup_{\,b}\, \mathfrak{Q} \ge r := max\{i \ge 0 \;/\; U_i^b\,(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq q_j\, R_{p_j}^* \text{ para todo } j = 1, \ldots, t\}.$$

Para provar isto, é suficiente construir um conjunto $\mathfrak{Q}$-independente com r elementos de b. Iniciamos com um Lema que dá condições suficientes adequadas para r elementos de b serem $\mathfrak{Q}$-independentes. Em seguida exploramos as hipóteses deste Lema de modo a poder provar a desigualdade $(*)$, o que é feito na Proposição 3.6.

Lema 3.1: Sejam (R, m) um anel local e $\mathfrak{Q}$ um ideal do anel R. Sejam $r \ge 1$ e $a_1, \ldots, a_r$ elementos de $\mathfrak{Q}$ que satisfazem as seguintes condições:

(i) Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ e para cada $p \in Ass((a_1, \ldots, a_{i-1}))$, se $a_r \notin p$ então $a_i \notin p$;

(ii) $\bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) \subseteq \mathfrak{Q}$.

Então $a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r^n$ são $\mathfrak{Q}$-independentes, para n suficientemente grande.

Prova: Dividimos esta demonstração em dois casos.

1º caso. Suponhamos que a_r não é divisor de zero em R. Por ser R um anel noetheriano, a cadeia ascendente de ideais $((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r) \subseteq ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^2) \subseteq \ldots \subseteq ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) \subseteq \ldots$ é estacionária, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$((a_1,\dots,a_{r-1}) : a_r^{n-1}) = \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\dots,a_{r-1}) : a_r^t)$. Como a_r não é divisor de zero em R, a_r^{1-n} é um elemento do anel total de frações de R. Definimos $x_i := a_i.a_r^{1-n}$, $i = 1,\dots,r-1$ e $S := R[x_1,\dots,x_{r-1}]$.

<u>Afirmação 1</u>:

$$(x_1,\dots,x_{r-1})\, S \cap R = \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\dots,a_{r-1}) : a_r^t).$$

De fato, dado $\alpha \in \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\dots,a_{r-1})) : a_r^t)$, pelo visto acima, temos $\alpha.a_r^{n-1} \in$ $\in (a_1,\dots,a_{r-1})$, portanto existem $k_1,\dots,k_{r-1} \in R$ tais que $\alpha.a_r^{n-1} = \sum_{i=1}^{r-1} k_i\, a_i$. Multiplicando esta igualdade por a_r^{1-n}, resulta que

$$\alpha = \alpha.(a_r^{n-1}\, a_r^{1-n}) = \sum_{i=1}^{r-1} k_i\, a_i\, a_r^{1-n} = \sum_{i=1}^{r-1} k_i\, x_i \in (x_1,\dots,x_{r-1})S.$$

Como $\alpha \in R$, provamos uma inclusão. Reciprocamente, dado $\beta \in (x_1,\dots,x_{r-1})S$ temos $\beta = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i\, x_i$ com $\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1} \in S$. Por definição de S podemos escolher n_i tal que $\lambda_i a_r^{(n-1)n_i} \in R$ e tomando $N = max\{n_i\}$ obtemos $\lambda_i\, a_r^{(n-1)N} \in R$ para cada $i = 1,\dots,r-1$. Assim $\beta\, .\, a_r^{(n-1)(N+1)} \in (a_1,\dots,a_{r-1})R$ e portanto

$$(x_1,\dots,x_{r-1})S \cap R \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\dots,a_{r-1}) : a_r^t)\ ,$$

concluindo a prova da Afirmação 1.

<u>Afirmação 2</u>: $M = (m, (x_1,\dots,x_{r-1})S)S$ é um ideal máximo de S.

De fato, consideremos a aplicação $\varphi : R[x_1,\dots,x_{r-1}] \longrightarrow \dfrac{R}{m}$ definida por $\varphi(\sum a_{i_1\dots i_{r-1}}\, x_1^{i_1}\dots x_{r-1}^{i_{r-1}}) = a_{0\dots0} + m$, onde $a_{i_1\dots i_r} \in R$. Observamos, primeiramente, que φ está bem definida, pois se

$$\sum a_{i_1\dots i_{r-1}}\, x_1^{i_1}\dots x_{r-1}^{i_{r-1}} = \sum b_{i_1\dots i_{r-1}}\, x_1^{i_1}\dots x_{r-1}^{i_{r-1}}$$

com $a_{i_1\dots i_{r-1}}$ e $b_{i_1\dots i_{r-1}} \in R$, então

$$b_{0\dots0} - a_{0\dots0} = \sum_{i_1\dots i_{r-1} \neq 0\dots0} (a_{i_1\dots i_{r-1}} - b_{i_1\dots i_{r-1}}).\, x_1^{i_1}\dots x_{r-1}^{i_{r-1}} \in (x_1,\dots,x_{r-1})S\ .$$

Assim, $b_{0\ldots 0} - a_{0\ldots 0} \in (x_1, \ldots, x_{r-1})S \cap R$; logo, pela Afirmação 1 e condição (ii), temos $b_{0\ldots 0} - a_{0\ldots 0} \in \mathbb{Q} \subseteq m$, provando que φ está bem definida. φ é obviamente um homomorfismo sobrejetor e $Nuc\ \varphi = (m, (x_1, \ldots, x_{r-1})S)S = M$; portanto $\dfrac{S}{M} \approx \dfrac{R}{m}$ e conseqüentemente M é um ideal máximo de S.

Afirmação 3: $(x_1, \ldots, x_{r-1}, a_r)S_M \cap R \subseteq \mathbb{Q}$.

De fato, dado $a \in (x_1, \ldots, x_{r-1}, a_r)S_M \cap R$, existem $y, z \in (x_1, \ldots, x_{r-1})S$, $b \in R$ e $d \notin m$ tais que $a(d+y) = z + b.a_r$; como $ad - ba_r \in R$ e $z - ay \in (x_1, \ldots, x_{r-1})S$, temos que $ad - ba_r = z - ay \in (x_1, \ldots, x_{r-1})S \cap R$. Pela Afirmação 1 e condição (ii) decorre que $ad - ba_r \in \mathbb{Q}$; mas $a_r \in \mathbb{Q}$, portanto $ad \in \mathbb{Q}$, do que resulta que $a \in \mathbb{Q}$, já que d é inversível.

Afirmação 4: $\overline{a}_r := a_r + (x_1, \ldots, x_{r-1})S$ não é divisor de zero em

$$\frac{S}{(x_1, \ldots, x_{r-1})S}.$$

De fato, seja $\varphi : \dfrac{R}{\bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)} \longrightarrow \dfrac{S}{(x_1, \ldots, x_{r-1})S}$ definida por $\varphi(\overline{r}) = $

$= \varphi(r + \bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)) = r + (x_1, \ldots, x_{r-1})S = \overline{r}$. Pela afirmação 1, temos que φ está bem definida e é injetora. Dado $s \in S$, $s = \sum a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\ x_1^{i_1} \ldots x_{r-1}^{i_{r-1}}$ com $a_{i_1 \ldots i_{r-1}} \in R$ e $\overline{s} = \sum \overline{a}_{i_1 \ldots i_{r-1}}\ \overline{\overline{x_1^{i_1}}} \ldots \overline{\overline{x_{r-1}^{i_{r-1}}}} = \overline{a}_{0\ldots 0} = \varphi(\overline{a}_{0\ldots 0})$; logo φ é sobrejetora. Como φ é obviamente um homomoformismo, temos

$$\frac{R}{\bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)} \approx \frac{S}{(x_1, \ldots, x_{r-1})S}.$$

Suponhamos, agora, que $\overline{a}_r$ é divisor de zero em $\dfrac{S}{(x_1, \ldots, x_{r-1})S}$.

Assim $\overline{a}_r$ é divisor de zero em $\dfrac{R}{\bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)}$ e existe $\overline{\alpha} \neq 0$ em $\dfrac{R}{\bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)}$ tal que $\overline{\alpha}\ .\ \overline{a}_r = \overline{0}$; logo $\alpha.a_r \in \bigcup\limits_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)$, e portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha.a_r \in (a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^N$, ou seja, $\alpha.a_r^{N+1} \in$

$\in (a_1,\ldots,a_{r-1})$. Desse modo $\alpha \in ((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^{N+1}) \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty}((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^t)$ e decorre então que $\overline{\alpha} = \overline{0}$, o que é impossível.

Finalmente estamos em condições de provar o 1º caso do Lema. Queremos mostrar que $a_1,\ldots,a_{r-1},a_r^n$ são $\mathbb{Q}$-independentes. Para isso basta mostrar que $x_1,\ldots,x_{r-1},a_r$ é uma seqüência regular de S_M. De fato, a Proposição 1.6 garante que então $x_1,\ldots,x_{r-1},a_r$ são $(x_1,\ldots,x_{r-1},a_r)S_M$-independentes, do que decorre que $a_1 = a_r^{n-1}\, x_1,\ldots,a_{r-1} = a_r^{n-1}\, .\, x_{r-1}\, , a_r^n = a_r^{n-1}\, .\, a_r$ são $(x_1,\ldots,x_{r-1},a_r)S_M$-independentes. Como $a_i \in R$, $i = 1,\ldots,r$, temos que $a_1,\ldots,a_{r-1},a_r^n$ são $(x_1,\ldots,x_{r-1},a_r)S_M \cap R$-independentes; mas, pela Afirmação 3, acima, $(x_1,\ldots,x_{r-1},a_r)S_M \cap R \subseteq \mathbb{Q}$, de modo que $a_1,\ldots,a_{r-1},a_r^n$ são $\mathbb{Q}$-independentes.
Para mostrar que $x_1,\ldots,x_{r-1},a_r$ é uma seqüência regular de S_M, começamos provando que $x_1,\ldots,x_{r-1}$ é uma seqüência regular de S_T, onde $T := \{1,a_r,a_r^2,\ldots\}$ é um sistema multiplicativo de S. Observemos que:

$$S_T = S\,[a_r^{-1}] = R\,[a_r^{-1}] = R_T, \quad (x_1,\ldots,x_{r-1})S\,[a_r^{-1}] = (a_1,\ldots,a_{r-1})R\,[a_r^{-1}]$$

e

$$\bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^t) = \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1})R[a_r^{-1}] : a_r^t) \cap R\,.$$

Se $a_r \in (a_1,\ldots,a_{r-1})R\,[a_r^{-1}]$ então temos $((a_1,\ldots,a_{r-1})R[a_r^{-1}] : a_r) = R\,[a_r^{-1}]$, portanto $\bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^t) = R$ o que, pela condição (ii), não acontece. Assim, $a_r \notin (a_1,\ldots,a_{r-1})R\,[a_r^{-1}] = (x_1,\ldots,x_{r-1})S_T$ e portanto $(x_1,\ldots,x_{r-1})S_T \subset S_T$.
Resta mostrar que $x_i \notin P'$ para cada $P' \in Ass\,((x_1,\ldots,x_{i-1})S_T)$. Suponhamos que existe $P' \in Ass\,((x_1,\ldots,x_{i-1})S_T)$ tal que $x_i \in P'$. Como $(x_1,\ldots,x_{r-1})S_T = (a_1,\ldots,a_{r-1})R_T$, existe $P \in Ass\,((a_1,\ldots,a_{i-1})R)$ tal que $P \cap T = \emptyset$ e $P' = P_T$; mas, se $P \cap T = \emptyset$ então $a_r \notin P$, e portanto, pela condição (i), $a_i \notin P$, o que contradiz o fato de $x_i \in P'$, uma vez que $x_i = a_i\, .\, a_r^{1-n}$. Isto prova que $x_1,\ldots,x_{r-1}$ é uma seqüência regular em S_T.

Passamos a provar que $x_1,\ldots,x_{r-1},a_r$ é uma seqüência regular em S_M. Pela Afirmação 4, $\overline{a}$ não é divisor de zero em $\dfrac{S}{(x_1,\ldots,x_{r-1})S}$, logo $\dfrac{\overline{a}_r}{1}$ não é divisor de zero em

$$\left(\frac{S}{(x_1,\ldots,x_{r-1})S}\right)_M \approx \left(\frac{S_M}{(x_1,\ldots,x_{r-1})S_M}\right).$$

Com isto provamos que $a_r + (x_1, \ldots, x_{r-1})S_M$ não é divisor de zero em

$$\frac{S_M}{(x_1, \ldots, x_{r-1})S_M} .$$

Resta provar, então que $x_1, \ldots, x_{r-1}$ é uma seqüência regular de S_M. Denotemos

$$\begin{aligned}
&I := (x_1, \ldots, x_{r-1})S \; ; \\
&V := \cup P, \text{ com } P \in Ass\,(I_M) \; ; \\
&H := \cup Q, \text{ com } Q \subseteq M \text{ e } Q \in Ass\,(I) \; ; \\
&L := \cup P, \text{ com } P \subseteq M_T \text{ e } P \in Ass\,(I_T) \, .
\end{aligned}$$

É fácil verificar que

$$(S_M)_V = S_H = (S_T)_L \, .$$

Pelo visto acima, $x_1, \ldots, x_{r-1}$ é uma seqüência regular de S_T, de modo que também o é de $(S_T)_L = (S_M)_V$; decorre, pois do Corolário A4 do Apêndice, que $x_1, \ldots, x_{r-1}$ é uma seqüência regular de S_M.

<u>2º caso:</u> Suponhamos que a_r é um divisor de zero em R. Denotamos

$$C := \bigcup_{t=1}^{\infty} (0_R : a_r^t), \qquad R' := \frac{R}{C}$$

e, como sempre, $\overline{a} := a + C$ para $a \in R$; temos que $\overline{a}_r$ não é divisor de zero em R'. De fato, se $\overline{\alpha} \in R'$ é tal que $\overline{\alpha} \,.\, \overline{a}_r = \overline{0}$ então obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \,.\, a_r \in (0_R : a_r^N)$, ou seja $\alpha . a_r . a_r^N = 0$; desse modo, $\alpha \in (0_R : a_r^{N+1}) \subseteq C$ e portanto $\overline{\alpha} = \overline{0}$.

Queremos mostrar que $a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r^n$ são @-independentes para n suficientemente grande. Como $C \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) \subseteq @$ pela condição (ii), podemos aplicar o Lema 1.2 parte (i) ao homomorfismo projeção $R \longrightarrow \frac{R}{C} = R'$, e assim concluimos que basta provar que $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{r-1}, \overline{a_r^n}$ são @ R'-independentes. Como $\overline{a}_r$ não é divisor de zero em R', basta mostrar que $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ satisfazem as condições (i) e (ii) deste Lema e pelo primeiro caso temos, então, que $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a_r^n}$ são @ R'-independentes para n suficientemente grande.

Sejam $i \in \{1,\ldots,r\}$ e $\overline{P} \in Ass\,(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{i-1})R')$ dados, com $\overline{a}_r \notin \overline{P}$. Temos que $\overline{P} = \dfrac{P+C}{C}$ para algum $P \in Ass\,((a_1,\ldots,a_{r-1})R)$ e $a_r \notin P$. Supondo que $\overline{a}_i \in \overline{P}$, tomamos $\alpha \in P$ e $\beta \in C$ tais que $a_i = \alpha + \beta$; como $\beta \in C$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\beta . a_r^N = 0$ e portanto $a_i . a_r^N = \alpha . a_r^N + \beta \,.\, a_r^N = \alpha \,.\, a_r^N \in P$, pois $\alpha \in P$. Como $a_r \notin P$, $a_i \in P$, o que contradiz a condição (i). Desse modo, $\overline{a}_i \notin \overline{P}$ e portanto $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_r$ satisfazem a condição (i).

Dado $\overline{\alpha} \in \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{r-1})R' : \overline{a_r^t})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\alpha} \,.\, \overline{a_r^N} \in (\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{r-1})R'$, ou seja,

$$\alpha\, a_r^N + C \in \frac{(a_1 + C,\ldots,a_{r-1}+C)}{C} = \frac{(a_1,\ldots a_{r-1},C)}{C} \,;$$

assim $\alpha \,.\, a_r^N \in (a_1,\ldots,a_{r-1},C)$ e portanto

$$\alpha \in ((a_1,\ldots,a_{r-1},C) : a_r^N) \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1},C) : a_r^t)\,.$$

Se mostrarmos que

$$(\dagger) \qquad \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1},C) : a_r^t) = \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^t)\,,$$

teremos $\alpha \in \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1}) : a_r^t)$ e portanto $\alpha \in \mathbb{Q}$, pela condição (ii) e conseqüentemente $\overline{\alpha} \in \mathbb{Q}\, R'$. Desse modo

$$\bigcup_{t=1}^{\infty} ((\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{r-1})R' : \overline{a_r^t}) \subseteq \mathbb{Q}\, R'$$

e portanto $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_r$ satisfarão a condição (ii).

Resta, pois, demonstrar a igualdade $(\dagger)$. Dado $\alpha \in \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1,\ldots,a_{r-1},C) : a_r^t)$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \,.\, a_r^N \in (a_1,\ldots,a_{r-1},C)$; então existem $t_i \in R$ e $c \in C$ tais que $\alpha . a_r^N = \sum\limits_{i=1}^{r-1} t_i . a_i + c$; mas $c \in C$, de modo que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $c . a_r^s = 0$. Assim,

$$\alpha \,.\, a_r^{N+s} = \sum_{i=1}^{r-1} t_i a_i . a_r^s \; + \; c . a_r^s = \sum_{i=1}^{r-1} t_i a_i a_r^s \in (a_1,\ldots,a_{r-1})R\,,$$

portanto

$$\alpha \in (a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^{N+s} \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) .$$

Isto prova que $\bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}, C) : a_r^t) \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t)$. A outra inclusão é óbvia. ◇

Lema 3.2: Sejam (R, m) um anel local e $\mathfrak{a}$ e b ideais de R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Sejam $r \geq 1$ e $a_1, \ldots, a_r$ elementos de $\mathfrak{a} \cap b$ que satisfazem as seguintes condições:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots r\}$ e para cada $p \in Ass\ ((a_1, \ldots, a_{i-1})R)$, se $p \not\supseteq b$ então $a_i \notin p$;

(2) $U_1^b\ ((a_1, \ldots, a_{r-1})R) \subseteq \mathfrak{a}$.

Então $a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r^n$ são $\mathfrak{a}$-independentes para n suficientemente grande.

Prova: Basta provar que (1), (2) implica (i), (ii) do Lema 3.1. Sejam $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $p \in Ass\ ((a_1, \ldots, a_{i-1})R)$ tais que $a_r \notin p$; ora, $a_r \in b$, portanto $p \not\supseteq b$ e obtemos $a_i \notin p$ por (1), provando (i). Para mostrar (ii), basta provar que

$$(\dagger) \quad \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) = \bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : b^t) .$$

De fato, desta igualdade decorre, pelo Lema 2.6, que

$$\bigcup_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_{r-1}) : a_r^t) = U_1^b\ ((a_1, \ldots, a_{r-1})R)$$

e, por (2), obtemos (ii). Provemos (†). Seja $\alpha \in \bigcup_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1})R : a_r^t)$ e tomemos $k \in N$ tal que $\alpha \,.\, a_r^k \in (a_1, \ldots, a_{r-1})R$. Seja $\bigcap_{j=1}^{t} \tilde{q}_j$ uma decomposição primária do ideal $(a_1, \ldots, a_{r-1})R$, com $\sqrt{q_j} = \tilde{p}_j$. Se $\tilde{p}_j \supseteq b$ então existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $b^{N_j} \subseteq \tilde{q}_j$; tomando $N = max\ \{N_j\ ;\ \tilde{p}_j \supseteq b\}$, obtemos $b^N \subseteq \tilde{q}_j$ para todos esses índices. Se $\tilde{p}_j \not\supseteq b$, a hipótese (1) garante que $a_r \notin \tilde{p}_j$ e portanto $a_r^n \notin \tilde{q}_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas $\alpha.a_r^k \in q_j$; assim $\alpha \in \tilde{q}_j$ se $\tilde{p}_j \not\supseteq b$. Desse modo, $\alpha.b^N \subseteq \tilde{q}_j$ para cada $j = 1, \ldots, t$; logo

$a.b^N \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \tilde{q}_j = (a_1, \ldots, a_{r-1})R$ e concluimos que $a \in \bigcup_{t=1}^{\infty}((a_1, \ldots, a_{r-1})R : b^t)$. A outra inclusão é óbvia. ◊

Lema 3.3: Seja $\mathfrak{a}$ um ideal do anel R. Sejam $Q \in Ass\,(0_R)$ e $P \in Spec\ R$ tais que $P \supseteq (Q, \mathfrak{a})$. Então existe um ideal primo P' tal que $Q \subseteq P' \subseteq P$ e $P' \in Ass\,(\mathfrak{a}^n)$ para todo n suficientemente grande.

Prova: Sabemos por [4] que para n suficientemente grande, $Ass\,(\mathfrak{a}^n) = Ass\,(\mathfrak{a}^{n+k})$,para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim basta provar que para n suficientemente grande existe $P' \in Ass(\mathfrak{a}^n)$ tal que $Q \subseteq P' \subseteq P$. Dado $Q \in Ass\,(0_R)$, como R é anel noetheriano, podemos escolher $a \in R$ tal que $Q = (0_R : a)$. Pelo Lema de Artin Rees [1, Corolário 10.10] existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo n suficientemente grande $\mathfrak{a}^n \cap (a) = \mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^r \cap (a))$. Afirmamos que para tais n, $(\mathfrak{a}^n : a) \subseteq Q + \mathfrak{a}^{n-r}$. De fato, se $x \in (\mathfrak{a}^n : a)$ então $x.a \in \mathfrak{a}^n \cap (a) = \mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^r \cap (a))$; logo $x.a = \sum_{i=0}^{k} u_i v_i$, onde $u_i \in \mathfrak{a}^{n-r}$ e $v_i \in (\mathfrak{a}^r \cap (a))$, de modo que $v_i = \lambda_i.a \in \mathfrak{a}^r$ com $\lambda_i \in R$ e $i = 1, \ldots, k$. Segue-se que $x.a = \sum_{i=0}^{k} u_i a \lambda_i = a \sum_{i=0}^{k} u_i \lambda_i$ e portanto $x.a - a \sum_{i=0}^{k} u_i \lambda_i = 0$, ou seja, $a\left(x - \sum_{i=0}^{k} u_i \lambda_i\right) = 0$. Assim $x - \sum_{i=0}^{k} u_i \lambda_i \in Q$ e, como $\sum_{i=0}^{k} u_i \lambda_i \in \mathfrak{a}^{n-r}$, obtemos $x \in Q + \mathfrak{a}^{n-r}$, demonstrando a afirmação.

Como $P \supset (Q, \mathfrak{a}) \supset Q + \mathfrak{a}^{n-r}$ resulta da afirmação que $P \supset (\mathfrak{a}^n : a)$ e portanto existe um primo mínimo P' associado a $(\mathfrak{a}^n : a)$ tal que $P \supset P'$; por ser P' associado a $(\mathfrak{a}^n : a)$, existe $\lambda \in R$ tal que $P' = ((\mathfrak{a}^n : a) : \lambda)$. Como $((\mathfrak{a}^n : a) : \lambda) = (\mathfrak{a}^n : a\lambda), P'$ é também associado a $\mathfrak{a}^n$; além disto, $Q = (0_R : a) \subseteq (\mathfrak{a}^n : a) \subseteq P'$. Provamos, pois, que $P' \in Ass\,(\mathfrak{a}^n)$ e $Q \subseteq P' \subseteq P$. ◊

Lema 3.4: Sejam (R, m) um anel local completo e $\mathfrak{a}$ um ideal m-primário. Suponhamos que existem um inteiro $i \geq 1$ tal que $U_{i+1}^b\,(0_R) \subseteq \mathfrak{a}$ e um elemento $a \in b$ que satisfazem a seguinte condição: para cada primo $Q \in Ass\,(0_R)$ tal que $b \not\subseteq Q$ e $coalt\ Q \geq i+1$, podemos encontrar um ideal primo $P \supseteq (Q, a)$ tal que $P \not\supseteq b$ e $coalt\ P \geq i$. Então $U_i^b\,(a^n R) \subseteq \mathfrak{a}$ para todo n suficientemente grande.

Prova: Pelo Lema A7 do Apêndice temos que $\{U_i^b(a^tR)\}_t$ é uma cadeia decrescente de ideais de R. Seja

$$R' = \frac{R}{\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)}; \quad \text{logo} \quad \overline{U_i^b(a^tR)} = \frac{U_i^b(a^tR)}{\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)}.$$

Assim, $\left\{\overline{U_i^b(a^tR)}\right\}_t$ é uma cadeia decrescente de ideais de R' e $\bigcap_{t=1}^{\infty} \overline{U_i^b(a^tR)} = \overline{0}$. Portanto, pelo Teorema de Chevalley [24, Teorema 13, pag. 270] existe uma função $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s(n) = \infty$ e $\overline{U_i^b(a^nR)} \subseteq \overline{m}^{s(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{Q}$ é um ideal m-primário, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $m^{s(n)} \subseteq \mathbb{Q}$ para todo $n > N$. Então, para $n > N$, temos

$$\overline{U_i^b(a^nR)} \subseteq \overline{m}^{s(n)} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} = \frac{\mathbb{Q} + \bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)}{\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)}.$$

Suponhamos que $\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR) \subseteq \mathbb{Q}$. Desse modo

$$\frac{U_i^b(a^nR)}{\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)} \subseteq \frac{\mathbb{Q}}{\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR)}$$

e portanto $U_i^b(a^nR) \subseteq \mathbb{Q}$ para todo $n > N$. Resta, então, provar que $\bigcap_{t=1}^{\infty} U_i^b(a^tR) \subseteq \mathbb{Q}$.

Como já foi observado anteriormente, $Ass\,(a^nR)$ tem comportamento assintótico [4]. Escolhemos, pois, $N \in \mathbb{N}$ tal que $Ass\,(a^NR) = Ass\,(a^{N+k}R)$ para todo $k \in N$ e denotamos $V := \{p \in Ass\,(a^NR);\, p \not\supseteq b \text{ e } coalt\ p \geq i\}$; seja M o sistema multiplicativo $M := R \setminus \bigcup_{p\in V} p$ de R.

Afirmamos que $U_i^b(a^nR) = a^nR_M \cap R$ para todo $n > N$. De fato, seja $a^nR = \bigcap_{j=1}^{k} q_j$ uma decomposição primária de a^nR, com $\sqrt{q_j} = p_j$. Sabemos que

$q_i R_M \neq R_M$ se e só se $p_i \subseteq \bigcup_{p \in V} p$, ou seja $q_i R_M \neq R_M$ se e só se $p_i \in V$. Então

$$a^n R_M = \bigcap_{i=1}^{k} q_i R_M = \bigcap_{p_i \in V} q_i R_M$$

e, assim,

$$a^n R_M \cap R = \left(\bigcap_{p_i \in V} q_i R_M \right) \cap R = \bigcap_{p_j \in V} q_j = U_i^b(a^n R) .$$

Como R é um anel noetheriano temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n R_M) \cap R = 0_{R_M} \cap R$$

e portanto, pelo acima afirmado, resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_i^b(a^n R) = 0_{R_M} \cap R .$$

Queremos mostrar que $0_{R_M} \cap R \subseteq U_{i+1}^b(0_R)$. Como $0_{R_M} \cap R$ é a intersecção de todas as componentes primárias de 0_R cujos primos associados estão contidos em algum primo de V, basta mostrar que qualquer primo de $Q \in Ass\,(0_R)$ com $Q \not\supseteq b$ e $coalt\, Q \geq i+1$ está contido em algum ideal primo de V; mas isto sempre ocorre pois, por hipótese, para cada ideal primo $Q \in Ass\,(0_R)$ com $Q \not\supset b$ e $coalt\, Q \geq i+1$ podemos encontar um ideal primo $P \supset (Q, a)$ tal que $P \not\supseteq b$ e $coalt\, P \geq i$. Assim, pelo Lema 3.3 aplicado a P, Q e $\mathfrak{a} = (a)R$, existe P' tal que $Q \subseteq P' \subseteq P$ e $P' \in Ass\,(a^n R)$ para n suficientemente grande. Como $P \not\supseteq b$ temos então que $P' \not\supseteq b$ e $coalt\, P' \geq coalt\, P \geq i$, de modo que $P' \in V$ e $Q \subseteq P'$. Dessa maneira

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_i^b(a^n R) = 0_{R_M} \cap R \subseteq U_{i+1}^b(0_R) \subseteq \mathfrak{a} . \qquad \diamond$$

Lema 3.5: Sejam $\mathfrak{a}$ e b ideais de R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Existe um elemento $a \in b$ tal que, para cada ideal primo $p \in Ass\,(\mathfrak{a})$ e cada ideal primo $Q \in Ass\,(0_{R_p})$ com $Q \not\supseteq b$, valem as afirmações:

(i) $a \notin Q$;

(ii) Se $coalt\ Q \geq 2$ então existe um ideal primo $P \supseteq (Q, a)$ com $P \not\supseteq b$ e $coalt\ P = coalt\ Q - 1$.

Prova Denotamos $Ass\ (\mathfrak{a}) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ definimos

$$V_j := \{Q \cap R /\ Q \in Ass\ (0_{R^*_{p_j}}) \text{ e } Q \not\supseteq b\}$$

e

$$W_j := \{P \cap R /\ P \in Spec\ (R^*_{p_j}),\ P \supseteq (Q, b) \textit{ para algum}$$

$$Q \in Ass\ (0_{R^*_{p_j}}) \textit{ tal que } Q \not\supseteq b \textit{ e } coalt\ P = coalt\ Q - 1 \geq 1\}.$$

Observamos que $V_1, \ldots, V_t, W_1, \ldots, W_t$ são conjuntos finitos, portanto se existisse um índice $j \in \{1, \ldots, t\}$ talque p_j estivesse contido na união de todos os ideais primos de $V_1 \cup \ldots \cup V_t \cup W_j$ então existiria um ideal primo $q \in V_1 \cup \ldots \cup V_t \cup W_j$ tal que $p_j \subseteq q$; mas isto não é possível. De fato:

1º caso: $p_j \subseteq q \in V_1 \cup \ldots \cup V_t$, ou seja, existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $p_j \subseteq q \in V_i$. Neste caso existe $Q \in Ass\ (0_{R^*_{p_i}})$ tal que $q = Q \cap R$ e $Q \not\supseteq b$; mas $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, logo $\sqrt{\mathfrak{a}} \not\subseteq Q$ e, como Q é primo, $\mathfrak{a} \not\subseteq Q$. Dessa maneira $\mathfrak{a} \not\subseteq Q \cap R = q$ e portanto $\mathfrak{a} \not\subseteq p_j$, o que não pode acontecer pois $p_j \in Ass\ (\mathfrak{a})$.

2º caso: $p_j \subseteq q \in W_j$, ou seja, existem $P \in Spec\ (R^*_{p_j})$ e $Q \in Ass\ (0_{R^*_{p_j}})$ tais que $q = P \cap R$, $Q \not\supseteq b$, $P \supset (Q, b)$ e $coalt\ P = coalt\ Q - 1 \geq 1$. Neste caso, como $p_j \subseteq q = P \cap R$, temos que $p_j R_{p_j} = P$ é o ideal máxino de R_{p_j} e obtemos $0 = coalt\ p_j R_{p_j} = coalt\ P \geq 1$, o que também não pode acontecer.

Assim fica estabelecido que, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ podemos escolher um elemento $a_j \in p_j$ tal que $a_j \notin q$, qualquer que seja o ideal $q \in V_1 \cup \ldots \cup V_t \cup W_j$. Também podemos escolher um elemento $a' \in b$ tal que $a' \notin q$, qualquer que seja o ideal $q \in V_1 \cup \ldots \cup V_t$; de fato, dado $q \in V_1 \cup \ldots \cup V_t$ tomamos $i \in \{1, \ldots, t\}$ e $Q \in Ass\ (0_{R^*_{p_i}})$ tal que $q = Q \cap R$ e $Q \not\supseteq b$ e temos $q \not\supseteq b$, portanto b não está contido na união de todos os ideais primos de $V_1 \cup \ldots \cup V_t$.

Com estas escolhas de elementos $a_1, \ldots, a_t, a'$, definimos $a := a_1 \ldots a_t . a'$. É claro que $a \in b$ e que vale (i). Mostramos, agora, que a satisfaz também (ii).

Seja $Q \in Ass\,(0_{R^*_{\mathfrak{p}_j}})$ com $Q \not\supseteq b$, $coalt\ Q \geq 2$ e $j \in \{1,\ldots,t\}$. Queremos mostrar que existe $P \in Spec\,(R^*_{\mathfrak{p}_j})$ tal que $P \supset (Q,a)$, $P \not\supset b$ e $coalt\ P = coalt\ Q - 1$. Seja P um primo mínimo de (Q,a_j); como $a_j \notin Q$, o Teorema do ideal principal de Krull [1, Corolário 11.17] aplicado a $\dfrac{R^*_{\mathfrak{p}_j}}{Q}$ garante que $alt\ \dfrac{P}{Q} = 1$. Mas $R^*_{\mathfrak{p}_j}$ é anel local completo, portanto catenário [12, Teorema 34.4 (3 $\Rightarrow$ 2)] e $alt\ P = alt\ Q + 1$. Desse modo, $coalt\ P = coalt\ Q - 1 \geq 1$. Como $P \supseteq (Q,a_j)$ temos que $P \supseteq (Q,a)$ e também que $P \not\supseteq b$, pois, caso contrário, $P \supseteq (Q,b)$ e portanto $P \cap R \in W_j$, o que não ocorre pela escolha de a_j. ◇

Proposição 3.6: $sup_b\, \mathfrak{Q} \geq r$. (*)

Prova: Se $r = 0$ não há nada a fazer. Suponhamos então, que $r \geq 1$; basta encontar r elementos $a_1,\ldots,a_r \in \mathfrak{Q} \cap b$ que satisfazem as seguintes condições (abaixo) relativas à decomposição primária $\mathfrak{Q} = \bigcap_{j=1}^{t} q_j$, $p_j = \sqrt{q_j}$, fixada desde o ínicio:

Para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$,

(1) para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$ e para cada $p \in Ass\,((a_1,\ldots,a_{i-1})R^*_{\mathfrak{p}_j})$, se $p \not\supseteq b$ então $a_i \notin p$;

(2) $U^b_1((a_1,\ldots,a_{r-1})R^*_{\mathfrak{p}_j}) \subseteq q_j\, R^*_{\mathfrak{p}_j}$.

De fato, o Lema 3.2 garante que $a_1,\ldots,a_{r-1},a_r^n$ são $q_j\, R^*_{\mathfrak{p}_j}$-independentes para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ e para n suficientemente grande; já o Corolário 1.4 (i) garante que $a_1,\ldots,a_{r-1},a_r^n$ são $\mathfrak{Q}$-independentes para n suficientemente grande.

Suponhamos que $r = 1$. Neste caso, temos $U^b_1\,(0_{R^*_{\mathfrak{p}_j}}) \subseteq q_j\, R^*_{\mathfrak{p}_j}$ para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$. Portanto a condição (2) é automaticamente satisfeita. Pelo Lema 3.5 existe $a \in b$ tal que $a \notin Q$ para cada $Q \in Ass\,(0_{R^*_{\mathfrak{p}_j}})$ com $Q \not\supseteq b$; para tais ideais primos de Q e para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n \notin Q$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N \in \mathfrak{Q}$; tal N existe já que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Assim $a_1 := a^N \in b \cap \mathfrak{Q}$ satisfaz (1).

Suponhamos agora que $r \geq 2$ e que, para cada $2 \leq s$ tal que $U^b_{s-1}\,(0_{R^*_{\mathfrak{p}_j}}) \subseteq q_j\, R_{\mathfrak{p}_j}$ para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$, sabemos construir $s-1$ elementos de $\mathfrak{Q} \cap b$ satisfazendo (1) e (2). Vamos supor, para usar indução, que $U^b_s\,(0_{R^*_{\mathfrak{p}_j}}) \subseteq q_j\, R^*_{\mathfrak{p}_j}$ para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ e provar que obtemos s elementos de $\mathfrak{Q} \cap b$ que satisfazem (1) e (2).

Pelo Lema 3.5 existe $a \in b$ tal que, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ e para cada primo $Q \in Ass\,(0_{R^*_{p_j}})$, com $Q \not\supseteq b$, são válidas:

(i) $a \notin Q$;

(ii) se $coalt\ Q \geq 2$ então existe um ideal primo $P \supseteq (Q, a)$ com $P \not\supseteq b$ e $coalt\ P = coalt\ Q - 1$.

Podemos aplicar, então, o Lema 3.4 para cada anel local completo $R^*_{p_j}$ (fazendo $@ = q_j\ R^*_{p_j}$ e pondo $s = i$). Assim, temos $U^b_{s-1}\ (a^n R^*_{p_j}) \subseteq q_j\ R^*_{p_j}$ para n suficientemente grande. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N \in @$ e

$$(\dagger) \quad U^b_{s-1}\ (a^N\ R^*_{p_j}) \subseteq q_j\ R^*_{p_j}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$. Denotemos $a_1 := a^N$, $R' = \dfrac{R}{a_1 R}$ e $I' = \dfrac{I + a_1 R}{a_1 R}$, onde I é um ideal de R e $\overline{a_i} = a_i + a_1 R$, onde $a_i \in R$. Note que $a_1 \in @ \subseteq p_j$. Seja

$$p'_j = \frac{p_j}{a_1 R}\ , \text{ assim } \left(R'_{p'_j}\right)^* = \left(\left(\frac{R}{a_1 R}\right)_{\frac{p_j}{a_1 R}}\right)^* = \left(\frac{R_{p_j}}{a_1 R_{p_j}}\right)^* = \frac{R^*_{p_j}}{a_1 R^*_{p_j}}\ .$$

Desse modo, $(\dagger)$ se torna

$$U^{b'}_{s-1}\left(0_{R'^*_{p'_j}}\right) \subseteq q'_j\ R'^*_{p'_j}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$. Assim, por indução, existem $\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s \in (b \cap @)' = b' \cap @'$ tais que, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, valem:

(1') para cada $i \in \{2, \ldots, s\}$ e para cada $\tilde{Q} \in Ass\,((\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{i-1}) R'^*_{p'_j})$, se $\tilde{Q} \not\supseteq b'$ então $\overline{a}_i \notin \tilde{Q}$;

(2') $U^{b'}_1\ ((\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{s-1})\ R'^*_{p'_j}) \subseteq q'_j\ R'^*_{p'_j}$.

Mas, se $\tilde{Q} \in Ass\,((\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{i-1})\ R'^*_{p'_j})$, então existe

$$Q \in Ass\,(((a_2, \ldots, a_{i-1}) + (a_1)) R^*_{p_j}) = Ass\,((a_1, \ldots, a_{i-1}) R^*_{p_j})$$

tal que $\tilde{Q} = Q'$. Como $Q' \not\supseteq b'$ se e só se $Q \not\supseteq b$ e $\overline{a}_i \notin Q'$ se e só se $a_i \notin Q$ temos que $a_i, \ldots, a_s$ satisfazem (1). Temos também que

$$U^{b'}_1\ ((\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{s-1})\ R'^*_{p'_j}) = \frac{U^b_1\ ((a_1, \ldots, a_{s-1}) R^*_{p_j})}{a_1\ R^*_{p_j}}$$

Assim, por (2'), temos que $U_1^b(a_1, \ldots, a_{s-1})R_{p_j}^s \subseteq q_j R_{p_j}^s$ para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$. Desse modo, $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{Q} \cap b$ satisfazem (1) e (2); logo podemos escolher r elementos em $\mathbb{Q} \cap b$ que satisfazem (1) e (2). $\diamond$

CAPÍTULO III: Aplicações

§4 Coaltura de Primos Associados ao Zero do Completamento de Anéis Locais

Neste parágrafo R é sempre um anel local e m seu ideal máximo. Estudamos, aqui, a relação entre o número máximo de elementos independentes em ideais m-primários e a coaltura de ideais primos associados ao zero de R^*. Começamos com uma fórmula para o número máximo de elementos m-independentes em um ideal b dado; tais elementos m-independentes são denominados analiticamente independentes.

Proposição 4.1: Seja b um ideal do anel R. Se $b \subseteq \sqrt{0_R}$ então $sup_b\, m = 0$. Se $b \not\subseteq \sqrt{0_R}$ então $sup_b\, m = max\,\{coalt\ Q;\ Q \in Ass\,(0_R)$ e $Q \not\supseteq b\}$.

Prova: Pelo Teorema 2.1 temos que

$$sup_b\, m = max\,\{i \geq 0;\ U_i^b\,(0_{R^*}) \subseteq mR^*\} = max\,\{i \geq 0;\ U_i^b\,(0_{R^*}) \neq R^*\}\,,$$

onde a última igualdade decorre do fato de mR^* ser o ideal máximo de R^*. Por definição, $U_i^b\,(0_{R^*}) \neq R^*$ se e só se $i = 0$ ou $\{Q \in Ass\,(0_{R^*})\,;\, Q \not\supseteq b$ e $coaltQ \geq i\} \neq \emptyset$. Segue-se que $sup_b\, m = max\,\{i \geq 0;\ i = 0$ ou $\{Q \in Ass\,(0_{R^*})\,;\, Q \not\supseteq b$ e $coalt\ Q \geq i\} \neq \emptyset\}$. Se $b \subseteq \sqrt{0_R}$ então b só possui elementos nilpotentes logo $sup_b\, m = 0$.

Se $b \not\subseteq \sqrt{0_R}$ então existe $P \in Ass\,(0_R)$ tal que $P \not\supseteq b$; logo existe $\mathcal{P} \in Ass\,(0_{R^*})$ tal que $\mathcal{P} \cap R = P$ e $\mathcal{P} \not\supseteq b$ e portanto $\{Q \in Ass\,(0_{R^*})\,;\, b \not\subseteq Q$ e $coalt\ Q \geq i\} \neq \emptyset$ para algum $i \geq 1$. Assim,

$$sup_b\, m = max\,\{coalt\ Q\ /\ Q \in Ass\,(0_{R^*})\ e\ b \not\subseteq Q\}\,.$$

Dado $P \in Ass\,(0_R)$ tal que $P \not\supseteq b$, existe $\mathcal{P} \in Ass\,(0_{R^*})$ com $\mathcal{P} \cap R = P$ e $coalt\ \mathcal{P} = coalt\ P$; naturalmente $\mathcal{P} \not\supseteq b$. Por outro lado, para cada $\mathcal{P} \in Spec\,(R^*)$, $coalt\ \mathcal{P} \leq coalt\ \mathcal{P} \cap R$. Assim,

$$max\,\{coalt\ P\ /\ P \in Ass\,(0_R)\ e\ b \not\subseteq P\} = max\,\{coalt\ \mathcal{P}\ /\ \mathcal{P} \in Ass\,(0_{R^*})\ e\ b \not\subseteq \mathcal{P}\}$$

e $$sup_b\, m = max\,\{coalt\ P\ /\ P \in Ass\,(0_R)\ e\ P \not\supseteq b\} \quad \diamond$$

Observação: Fazendo $b = m$, temos que $sup\ m = alt\ m$. Mais geralmente temos que se $p \in SpecR$ então $sup\ p = alt\ p$, pois $sup\ pR_p = sup\ p \leq alt\ p = alt\ pR_p = sup\ pR_p$.

A Proposição 4.1 diz que o número máximo de elementos analiticamente independentes em um ideal b é a coaltura de algum ideal primo mínimo de 0_R que não contém b. Como conseqüencia temos :

Corolário 4.2: Todos os ideais primos mínimos de um anel local R têm a mesma coaltura se e somente se para cada ideal $b \not\subset \sqrt{0_R}$, o número máximo de elementos analiticamente independentes em b é exatamente $dim\ R$, ou seja, se e somente se $sup_b\ m = dim\ R$, para cada ideal $b \not\subset \sqrt{0_R}$.

Prova: Suponhamos que $sup_b\ m = dim\ R$ para cada ideal $b \not\subseteq \sqrt{0_R}$. Sejam $\{P_1, \dots, P_t\}$ o conjunto dos primos mínimos de 0_R e $T_i = \bigcap\limits_{j \neq i} P_j$, $i = 1, \dots, t$. Como $\sqrt{0_R} = \bigcap\limits_{i=1}^{t} P_i$, pela escolha de T_i temos $T_i \not\subseteq \sqrt{0_R}$; também pela escolha de T_i sabemos que P_i é o único primo mínimo de zero que não contém T_i. Assim, pela Proposição 4.1, $sup_{T_i}\ m = coalt\ P_i$, $i = 1, \dots, t$ e portanto $coalt\ P_i = dim\ R$ para $i = 1, \dots, t$, ou seja, todos os primos mínimos de 0_R têm a mesma coaltura.

Suponhamos, agora, que todos os primos mínimos de 0_R têm a mesma coaltura, a saber, $dim\ R$. Se $b \not\subseteq \sqrt{0_R}$ então $sup_b\ m = coalt\ P$, onde P é um primo mínimo de 0_R e $P \not\supseteq b$. Assim, $sup_b\ m = dim\ R$. ◇

Caracterizamos, a seguir, a coaltura de primos associados a 0_{R^*}.

Teorema 4.3: Seja $r \leq dim\ R$ um inteiro não negativo. As seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe $P \in Ass\ (0_{R^*})$ com $coalt\ P = r$.

(ii) Existe um ideal u de R, m-primário e tal que $sup\ u = r$.

Prova: Note que, por definição, $U_0^m\ (0_{R^*}) = 0_{R^*}$; logo, para $i \geq 0$, $U_i^m\ (0_{R^*})$ é a intersecção de todas as componentes primárias de 0_{R^*} cujos primos associados têm coaltura maior que ou igual a i. Assim, existe $P \in Ass\ (0_{R^*})$ tal que *coalt* $P = r$ se e só se $U_r^m(0_{R^*}) \neq U_{r+1}^m(0_{R^*})$. Como em um anel local cada ideal é a intersecção de todos os ideais m-primários que o contém , temos que $U_r^m(0_{R^*}) \neq U_{r+1}^m(0_{R^*})$ se e só se existe um ideal U de R^*, mR^*-primário, tal que $U_r^m(0_{R^*}) \subseteq U$ e $U_{r+1}^m(0_{R^*}) \not\subseteq U$. Assim, se (i) é verdadeira, pelo Teorema 2.1 temos $sup_{mR^*}\ U = r$; mas, $sup_{mR^*}\ U = sup\ U$, logo $sup\ U = r$. Seja $u = U \cap R$; sabemos que pelo Lema A6 do Apêndice u é m-primário e $uR^* = U$. Desse modo, $sup\ U = sup\ u = r$. Reciprocamente, se (ii) é verdadeira, ou seja se existe um ideal u de R, m-primário tal que $sup\ u = r$, então $U = uR^*$ é um ideal mR^*-primário tal que $sup\ U = r$. Logo $U_r^m(0_{R^*}) \subset U$ e $U_{r+1}^m(0_{R^*}) \not\subseteq U$; assim, pelo observado anteriormente, existe $P \in Ass(0_{R^*})$ com $coalt\ P = r$. ◇

Um anel local é dito unmixed se $coalt\ P = dim\ R$ para cada $P \in Ass\ (0_{R^*})$; neste caso, cada ideal primo associado a 0_{R^*} é primo mínimo. Do Teorema 4.3 podemos obter a seguinte caracterização para anéis locais unmixed.

Corolário 4.4: [5, Corolário 1] R é um anel local unmixed se e somente se $sup\ @ = alt\ @$ para cada ideal $@$ de R.

Prova: Suponhamos que R é um anel local unmixed. Por [10,Proposição 6] R_p também é anel local unmixed para cada $p \in Spec\ R$. Seja $@$ um ideal de R. Sejam $p \in Ass\ (@)$ e $\{P_1, \ldots, P_t\} = Ass\ (0_{R_p^*})$; já sabemos que cada $P_i\ , i = 1, \ldots, t,$ é primo mínimo.

Se $@\, R_p^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} P_i$ então existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $@\, R_p^* \subseteq P_j$. Como $alt\ P_j = 0$, obtém-se $alt\ @R_{p_j}^* = 0$. Segue-se que $alt\ @ = 0$ e resulta que $0 \leq sup\ @ \leq alt\ @ = 0$, ou seja, $sup\ @ = 0 = alt\ @$.

Suponhamos que $@\, R_p^* \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{t} P_j$. Como para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$

$$coalt\ P_j = dim\ R_p^* = dim\ R_p = alt\ p\ ,$$

temos que

$$se\ \ i\ \leq\ alt\ p\ \ então\ \ U_i^@\ (0_{R_p^*}) = 0_{R_p^*};$$

$$se\ \ i\ >\ alt\ p\ \ então\ \ U_i^@\ (0_{R_p^*}) = R_p^*.$$

Então, pelo Teorema 2.1 obtemos

$$sup\ \mathfrak{Q} = max\ \{i \geq 0;\ U_i^{\circ}\ (0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{Q}\ R_p^*\ ,\ para\ cada\ \ p\ \in Ass\ (\mathfrak{Q})\} =$$

$$= min\ \{alt\ p;\ p \in\ Ass\ (\mathfrak{Q})\ \} = alt\ (\mathfrak{Q})\ .$$

Reciprocamente, suponhamos que $sup\ \mathfrak{Q} = alt\ \mathfrak{Q}$ para cada ideal $\mathfrak{Q}$ de R. Sejam $P\ \in\ Ass\ (0_{R^*})$ e $r = coalt\ P$. Pelo Teorema 4.3 existe um ideal u de R, m-primário tal que $sup\ u = r$. Como $sup\ u = alt\ u$ e u é m-primário temos que $r = alt\ u = alt\ m = dim\ R$. Assim, $coalt\ P = dim\ R$. ◊

Utilizamos agora o Teorema 4.3 para obter outra caracterização da coaltura de ideais primos associados ao zero no completamento de um anel local como segue:

Proposição 4.5: Seja $r\ \leq\ dim\ R$ um inteiro não negativo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe $P\ \in\ Ass\ (0_R^*)$ tal que $coalt\ P\ \leq\ r$.

(ii) Existe um ideal u de R , m-primário e tal que m é um ideal primo associado a cada ideal $\mathfrak{Q} \subseteq u$ que tem a seguinte propriedade: $prf\ R_p\ \geq\ r$ para cada ideal primo $p\ \supseteq\ \mathfrak{Q}$ e $p\ \neq\ m$.

(iii) Existe $k \in I\!N$ tal que m é um ideal primo associado a cada ideal $\mathfrak{Q} \subseteq m^k$ que tem a seguinte propriedade: $prf\ R_p\ \geq r$ para cada ideal primo $p \supseteq \mathfrak{Q}$ e $p \neq\ m$.

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $P\ \in\ Ass\ (0_{R^*})$ tal que $coalt\ P\ \leq\ r$. Então, pelo Teorema 4.3 existe um ideal u de R, m-primário, tal que $sup\ u\ \leq\ r$. Seja $\mathfrak{Q} \subseteq u$ um ideal de R como em (ii), ou seja, $prf\ R_p\ \geq\ r$ para cada ideal primo p tal que $p\ \supseteq\ \mathfrak{Q}$ e $p\ \neq\ m$. Assim, pelo Lema A5 do Apêndice, podemos encontrar r elementos $a_1, \ldots, a_r\ \in\ \mathfrak{Q}$ tais que $a_i\ \notin\ P$ para todo $P\ \in\ Ass\ ((a_1, \ldots, a_{i-1}))$ com $P\ \neq\ m,\ i\ \in\ \{1, \ldots, r\}$. Se m não é um ideal primo associado a $\mathfrak{Q}$ então $u\ \not\subseteq\ \bigcup_{P\ \in\ Ass(\mathfrak{Q})} P$; de fato, caso contrário existiria $P\ \in\ Ass\ (\mathfrak{Q})$ tal que $u \subseteq P$ e, como u é m-primário, resultaria $m = \sqrt{u} \subseteq P$, o que não pode acontecer. Assim, podemos escolher um elemento $a_{r+1}\ \in\ u$ tal que a_{r+1} não é divisor de zero de $\frac{R}{\mathfrak{Q}}$, logo $(\mathfrak{Q}\ :\ a_{r+1}^n) = \mathfrak{Q}$ para cada $n\ \geq\ 1$. Como $((a_1, \ldots, a_r)\ :\ a_{r+1}^n) \subseteq (\mathfrak{Q}\ :\ a_{r+1}^n)$, para todo $n\ \geq\ 1$, temos $((a_1, \ldots, a_r)\ :\ a_{r+1}^n) \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq u$, para todo $n\ \geq\ 1$, e portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty}\ ((a_1, \ldots, a_r)\ :\ a_{r+1}^n) \subseteq u$. Desse modo, $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}$ satisfazem:

(a) Para cada $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ e para cada $P \in Ass\,((a_1, \ldots a_{i-1}))$, se $a_{r+1} \notin P$ então $a_i \notin P$;

(b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r) : a_{r+1}^n) \subseteq u$.

Segue-se pelo Lema 3.1 que $a_1, \ldots, a_{r+1}^n$ são u-independentes para n suficientemente grande. Dessa maneira $sup\ u \geq r+1$, o que contradiz a hipótese inicial de $sup\ u \leq r$. Isto prova que m é um ideal primo associado a $\mathbb{Q}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Tomamos k tal que $m^k \subseteq u$; assim (iii) é claramente satisfeito.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Suponhamos que vale (iii). Basta provar que $sup\ m^k \leq r$, pois então pelo Teorema 4.3 existe $P \in Ass\,(0_{R^*})$ tal que $coalt\ P \leq r$ e obtemos a afirmação (i). Suponhamos, contrariamente ao desejado, que $sup\ m^k > r$; então, pela demonstração da Proposição 3.6, podemos encontrar $r+1$ elementos $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} \in m^K$ que satisfazem:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ e cada $P \in Ass\,((a_1, \ldots, a_{i-1})R^*)$ se $P \neq mR^*$ (ou seja, $P \not\supseteq m^k$) então $a_i \notin P$;

(2) $\bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r)R^* : a_{r+1}^t) \subseteq m^k R^*$.

Assim, em R os elementos $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} \in m^k$ satisfazem:

(1') Para cada $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ e cada $p \in Ass\,((a_1, \ldots, a_{i-1})R)$ se $p \neq m$ (ou seja, $p \not\supseteq m^k$) então $a_i \notin p$

(2') $\bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r))R : a_{r+1}^t) = \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r)R^* \cap R : a_{r+1}^t) \subseteq m^k R^* \cap R = m^k$.

Desse modo, $prf\ R_P \geq r$ para cada ideal primo $P \neq m$ tal que $P \supseteq \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r) : a_{r+1}^t)$ e, como vale (iii), segue-se que m é um ideal associado a $\bigcup\limits_{t=1}^{\infty} ((a_1, \ldots, a_r) : a_{r+1}^t) = U_1^{a_{r+1}}\,(a_1, \ldots, a_r)$. Mas $U_1^{a_{r+1}}\,((a_1, \ldots, a_r))$ é, por definição, a intersecção das componentes primárias de $(a_1, \ldots, a_r)R$ cujos primos associados não contém a_{r+1} e com coaltura maior do que ou igual a 1 ; logo m não pode ser ideal associado a $U_1^{a_{r+1}}\,((a_1, \ldots, a_r)R)$, que é a contradição procurada. Logo $sup\ m^k \leq r$. ◇

Concluimos este parágrafo com um resultado para domínios locais que também aparece em [14, Teorema 9].

Corolário 4.6: Seja R um domímio local. Existe um ideal primo de R^* associado a 0_{R^*} e de coaltura 1 se e somente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que m é associado a todo ideal $\mathfrak{Q}$ não nulo de R tal que $\mathfrak{Q} \subseteq m^k$.

Prova: Suponhamos que existe $P \in Ass\,(0_{R^*})$ tal que $coalt P = 1$. Pela Proposição 4.5 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m \in Ass\,(\mathfrak{Q})$ para cada ideal $\mathfrak{Q} \subseteq m^k$ com a seguinte propriedade: $prf\ R_p \geq 1$ para cada ideal primo $p \supseteq \mathfrak{Q}$ com $p \neq m$. Seja $\mathfrak{Q}$ um ideal de R com $\mathfrak{Q} \subseteq m^k$ e $\mathfrak{Q} \neq 0_R$. Como R é domínio, a profundidade de qualquer ideal de R é maior do que ou igual a 1. Por outro lado para cada ideal primo P temos que $prf\ P \leq prf\ PR_p = prf\ R_p$; logo para cada ideal primo $P \supseteq \mathfrak{Q}$, $P \neq m$ temos $prf\ R_p \geq 1$. Portanto, pela Proposição 4.5, $m \in Ass\,(\mathfrak{Q})$.

Reciprocamente, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $m \in Ass\,(\mathfrak{Q})$ para cada ideal $\mathfrak{Q} \neq 0_R$ com $\mathfrak{Q} \subseteq m^k$. Se $p \supseteq \mathfrak{Q} \neq 0_R$ e $p \neq m$ então $prf\ R_p \geq prf\ p \geq 1$, já que R é domínio. Assim, pela Proposição 4.5, existe $P \in Ass\,(0_{R^*})$ tal que $coalt\ P \leq 1$. Como R é domímio, $m \notin Ass\,(0_R)$ logo $mR^* \notin Ass\,(0_{R^*})$ [12, Teorema 18.11] e portanto $coalt\ P = 1$. ◇

§5 - Ideais Inteiramente Fechados e Primos Mínimos Associados ao Zero

Neste parágrafo estabelecemos uma relação entre o número máximo de elementos independentes de um ideal inteiramente fechado em um anel local e a coaltura de primos associados ao zero de seu completamento. Também aqui R denota sempre um anel local e m seu ideal máximo.

Primeiramente relembramos a definição de ideal inteiramente fechado em R. Seja R' um anel que contém o anel R. Um elemento $a \in R'$ é dito inteiramente dependente em $\mathfrak{a}$ se existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathfrak{a}^i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, tais que $a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}a + a_n = 0$. Dizemos que $\mathfrak{a}$ é inteiramente fechado em R se $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}}$, onde $\overline{\mathfrak{a}}$ é o fecho inteiro de $\mathfrak{a}$ em R, definido por $\overline{\mathfrak{a}} := \{x \in R\,; x$ é inteiramente dependente em $\mathfrak{a}\}$.

<u>Teorema 5.1</u> : Sejam $\mathfrak{a}$ um ideal de R inteiramente fechado em R e $\mathfrak{b}$ um ideal de R tais que $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Então

$$sup_{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{a} = max\ \{i \geq 0;\ \sqrt{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_p^*})} \subseteq \overline{\mathfrak{a}R_p^*}\ para\ cada\ p \in Ass\ (\mathfrak{a})\}\ .$$

<u>Prova</u> : Como $\mathfrak{a}$ é um ideal inteiramente fechado em R, pela Proposição B9 do Apêndice podemos escolher uma decomposição primária de $\mathfrak{a}$ em que cada componente primária é inteiramente fechada. Seja $\mathfrak{a} = \bigcap_{j=1}^{t} q_j$ uma decomposição desse tipo, com $\sqrt{q_j} = p_j$ para $j \in \{1,\ldots,t\}$.

Sabemos que se $U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq \mathfrak{a}R_{p_j}^*$ para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ então $\overline{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*})} \subseteq \overline{\mathfrak{a}R_{p_j}^*}$ para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$. Pelo Lema 5.2 a seguir temos que $\overline{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*})} = \sqrt{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*})}$; logo se $U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq \mathfrak{a}R_{p_j}^*$ então $\sqrt{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*})} \subseteq \overline{\mathfrak{a}R_{p_j}^*}$. Como, pelo Teorema 2.1, $sup_{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{a} = max\ \{i \geq 0;\ U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*}) \subseteq \mathfrak{a}R_{p_j}^*$ para cada $j = 1,\ldots,t\}$, resulta

$$sup_{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{a}\ \leq\ max\ \{i \geq 0;\ \sqrt{U_i^{\mathfrak{b}}(0_{R_{p_j}^*})} \subseteq \overline{\mathfrak{a}R_{p_j}^*}\ para\ cada\ j = 1,\ldots,t\}\ .$$

Por outro lado, a Proposição 3.6. garante que

$$sup_{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{a}\ \geq\ max\ \{i \geq 0;\ U_i^{\mathfrak{b}}\ (0_{R_{p_j}^*}) \subseteq q_j\ R_{p_j}^*\ \ para\ cada\ j\ =\ 1,\ldots,t\ \};$$

mas

$$U_i^b\,(0_{R^*_{p_j}}) \subseteq \overline{U_i^b(0_{R^*_{p_j}})} = \sqrt{U_i^b\,(0_{R^*_{p_j}})}\ ,$$

logo

$$sup_{\,b}\,@ \geq max\,\{i \geq 0;\ \sqrt{U_i^b\,(0_{R^*_{p_j}})} \subseteq q_j R^*_{p_j}\ para\ cada\ j \in \{1,\ldots,t\}\}\ .$$

Como, para cada $j = 1,\ldots,t$, q_j é inteiramente fechado, então, pelos Lemas B8 e B10 do Apêndice, temos que $q_j\ R^*_{p_j}$ é inteiramente fechado e portanto $q_j\ R^*_{p_j} = \overline{q_j\ R^*_{p_j}} \supseteq \overline{@\ R^*_{p_j}}$. Desse modo

$$sup_{\,b}\,@ \geq max\,\{i \geq 0,\ \sqrt{U_i^b\,(0_{R^*_{p_j}})} \subseteq \overline{@\ R^*_{p_j}}\ para\ cada\ j = 1,\ldots,t\}.\quad \diamond$$

<u>Lema 5.2</u>: Fixado $i \geq 0$, temos

$$\sqrt{U_i^b\,(0_R)} = \overline{U_i^b\,(0_R)}\ .$$

<u>Prova</u> : Seja $0_R = \bigcap_{j=1}^{t} Q_j$ uma decomposição primária de 0_R com $\sqrt{Q_j} = P_j\ , j = 1,\ldots,t$. Reordenando, se necessário, os ideais primários, podemos escolher r e $s \in \mathbb{N}$ com $1 \leq s \leq r \leq t$ tais que $1 \leq j \leq r$ se e só se $P_j \not\supseteq b$ e $coalt\ P_j \geq i$ e $P_1,\ldots,P_s$ são os elementos mínimais de $\{P_1,\ldots,P_r\}$. Assim, $U_i^b\,(0_R) = \bigcap_{j=1}^{r} Q_j$ e portanto $\sqrt{U_i^b\,(0_R)} = \bigcap_{j=1}^{s} P_j$. Para facilitar a demonstração denotamos

$$C = \sqrt{U_i^b\,(0_R)} \quad e \quad D = \overline{U_i^b\,(0_R)}\ .$$

Sabemos que $@ \subseteq \overline{@} \subseteq \sqrt{@}$ para todo ideal $@$ de R , logo $D \subseteq C$. Como $U_i^b\,(0_R) \subseteq D$, temos que $C = \sqrt{U_i^b\,(0_R)} \subseteq \sqrt{D}$ e portanto $C = \sqrt{D}$. Para cada $j \in \{1,\ldots,s\}$ temos que

$$C\ R_{P_j} = (P_1 \cap \ldots \cap P_s)R_{P_j} = P_j\ R_{P_j} = \sqrt{0_{R_{P_j}}}\ .$$

Como D é inteiramente fechado, o Lema B1 do Apêndice garante que $\sqrt{0_R} \subseteq D$; logo $C\ R_{P_j} = \sqrt{0_{R_{P_j}}} \subseteq D\ R_{P_j}$. Mas $D \subseteq C$, portanto $D\ R_{P_j} \subseteq C\ R_{P_j}$. Assim, para cada $j \in \{1,\ldots,s\}$, $D\ R_{P_j} = C\ R_{P_j}$. Queremos mostrar que $D\ R_P = C\ R_P$

para cada $P \in Spec\ R$, pois disso decorre que $D = C$ [1, Proposição 3.8]. Seja $P \in Spec\ R$. Se $P \not\supseteq C$ então $C\ R_P = R_P$ e, como $C = \sqrt{D}$, $P \not\supseteq D$ e $D\ R_P = R_P$. Assim, $C\ R_P = R_P = D\ R_P$. Se $P \supseteq C$ então existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $P \supseteq P_j$. Como $D\ R_{P_j} = C\ R_{P_j} = P_j\ R_{P_j}$ para cada $j = 1, \ldots, s$, temos que $(D\ R_P)_{P,R_P} = (C\ R_P)_{P,R_P} = (P_j\ R_P)_{P,R_P}$ para tais j acima; logo DR_P e $C\ R_P$ são ideais primos de R_P . Conseqüentemente

$$D\ R_P = (DR_P)_{P,R_P} \cap R_P = (CR_P)_{P,R_P} \cap R_P = CR_P\ . \quad \diamond$$

Com base no Teorema 5.1 podemos dar uma nova versão para o Teorema 4.3 com ideais inteiramente fechados.

Teorema 5.3 : Seja $r \leq dim\ R$ um inteiro não negativo. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) Existe um ideal primo mínimo $P \in Ass\ (0_{R^*})$ tal que $coalt\ P = r$.

(ii) Existe um ideal u de R, m-primário e inteiramente fechado tal que $sup\ u = r$.

Prova: Note que, por definição, $U_0^m\ (0_{R^*}) = 0_{R^*}$, que é a intersecção de todas as componentes primárias de 0_{R^*} ; logo, para $i \geq 0$, $U_i^m\ (0_{R^*})$ é a intersecção de todas as componentes primárias de 0_{R^*} cujos primos associados têm coaltura maior do que ou igual a i. Desse modo, para $i \geq 0$, $\sqrt{U_i^m\ (0_{R^*})}$ é a intersecção de todos os ideais primos mínimos de 0_{R^*} que têm coaltura maior do que ou igual a i . Assim, existe um ideal primo mínimo P de 0_{R^*} tal que $coalt\ P = r$ se e só se $\sqrt{U_r^m\ (0_{R^*})} \neq \sqrt{U_{r+1}^m\ (0_{R^*})}$. Pelo Lemma 5.2 $\sqrt{U_i^m\ (0_{R^*})} = \overline{U_i^m\ (0_{R^*})}$, logo $\sqrt{U_i^m\ (0_{R^*})}$ é inteiramente fechado, portanto, pelo Lema B7 do Apêndice, $\sqrt{U_i^m\ (0_{R^*})}$ é a intersecção de todos os ideais mR^*-primários inteiramente fechados que o contém. Dessa maneira $\sqrt{U_r^m\ (0_{R^*})} \neq \sqrt{U_{r+1}^m\ (0_{R^*})}$ se e somente se existe um ideal U de R^* , mR^*-primário e inteiramente fechado tal que $\sqrt{U_r^m\ (0_{R^*})} \subseteq U$ e $\sqrt{U_{r+1}^m\ (0_{R^*})} \not\subseteq U$. Logo, se (i) é verdadeira pelo Teorema 5.1, $sup\ _{mR^*}\ U = r$. Como $sup\ _{mR^*}\ U = sup\ U$ (Proposição 1.1 (iv)), temos $sup\ U = r$. Seja $u = U \cap R$; u é um ideal m-primário e inteiramente fechado sobre R. Pelo Lema A6 do Apêndice, $U = u\ R^*$, logo $r = sup\ U = sup\ u$. Reciprocamente, se (ii) é verdadeira, ou seja, se existe um ideal u de R , m-primário e inteiramente fechado tal que $sup\ u = r$, então $U = uR^*$ é um ideal mR^*-primário e inteiramente fechado tal que $sup\ U = r$. Logo $\sqrt{U_r^m(0_{R^*})} \subseteq U$ e $\sqrt{U_{r+1}^m(0_{R^*})} \not\subseteq U$; assim pelo observado anteriomente existe $P \in Ass(0_{R^*})$ com $coalt\ P = r$. $\diamond$

Um anel local R é dito quasi-unmixed se $coalt\ P = dim\ R$ para cada ideal primo mínimo P de 0_{R^*}. Em particular, todo anel unmixed é quasi-unmixed. A recíproca é falsa; basta tomar k um corpo, X e Y indeterminadas sobre k e considerar $R = \dfrac{k[[X,Y]]}{(X) \cap (X^2, Y)}$.

Corolário 5.4 [14, Teorema 37] : R é um anel local quasi-unmixed se e somente se $sup\ @ = alt\ @$ para cada ideal $@$ de R inteiramente fechado.

Prova: Suponhamos que R é um anel local quasi-unmixed. Sejam $@$ um ideal de R inteiramente fechado, $p \in Ass\ (@)$ e $\{P_1, \ldots, P_r\}$ o conjunto dos primos mínimos de $0_{R_p^*}$.

1º caso: $@\ R_p^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} P_i$; então existe $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $@\ R_p^* \subseteq P_j$, logo existe $p' \in Ass\ (@\ R_p^*)$, p' primo mínimo de $@\ R_p^*$, tal que $p' \subseteq P_j$. Como P_j é primo mínimo de $0_{R_p^*}$, temos que $p' = P_j$ e $alt\ P_j = 0$. Portanto $alt\ (@\ R_p) = 0$ e conseqüentemente $alt\ (@) = 0$. Desse modo $0 \leq sup\ @ \leq alt\ @ = 0$ e resulta $sup\ @ = 0 = alt\ @$.

2º caso: $@\ R_p^* \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{r} P_i$. Por [11, Proposição 6], sabemos que R_p é um anel local quasi-unmixed para cada $p \in Spec\ R$, logo para cada $P_j \in \{P_1, \ldots, P_r\}$, $coalt\ P_j = dim\ R_p = alt\ p$. Assim, como $\sqrt{U_i^@\ (0_{R_p^*})}$ é a intersecção de todos os primos mínimos de $0_{R_p^*}$ que não contém $@$ e com coaltura maior do que ou igual a i , temos que

$$se\ i \leq alt\ p\ então\ \sqrt{U_i^@\ (0_{R_p^*})} = \sqrt{0_{R_p^*}}$$

e

$$se\ i \geq alt\ p\ então\ \sqrt{U_i^@\ (0_{R_p^*})} = R_p^* .$$

Assim, pelo Teorema 5.1, $sup\ @ = max\ \{i \geq 0\ ;\ \sqrt{U_i^@\ (0_{R_p^*})} \subseteq \overline{@\ R_p^*}$ para cada $p \in Ass\ (@)\}$ e, como $\sqrt{0_{R_p^*}} \subseteq \overline{@\ R_p^*}$ (Lema B1 do Apêndice), temos que $sup\ @ = min\ \{alt\ p\ ; p \in Ass\ (@)\} = alt\ @$.

Suponhamos, agora, que $sup\, \mathfrak{Q} = alt\, \mathfrak{Q}$ para cada ideal $\mathfrak{Q}$ de R inteiramente fechado.

Seja P um ideal primo mínimo de 0_{R^*} com $coalt\ P = r$. Pelo Teorema 5.3 existe um ideal u de R inteiramente fechado tal que $sup\ u = r$, logo $sup\ u = alt\ u$ e, como u é um ideal m-primário, $alt\ u = dim\ R$. Conseqüentemente $coalt\ P = r = dim\ R$ e R é quasi-unmixed. ◇

Observamos que se (R, m) é um anel local e $r \leq dim\ R$ é um inteiro não negativo então pelo Teorema 5.3 são equivalentes:

(i) Existe P ideal primo mínimo de 0_{R^*} com $coalt\ P \leq r$.

(ii) Existe um ideal u de R, m-primário e inteiramente fechado tal que $sup\ u \leq r$.

Assim a demonstração da Proposição 5.5 abaixo segue do Teorema 5.3 como a da Proposição 4.5 segue do Teorema 4.3.

Proposição 5.5 : Seja $r \leq dim\ R$ um inteiro não negativo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe um ideal P primo mínimo de 0_{R^*} tal que $coalt\ P \leq r$.

(ii) Existe um ideal u de R, m-primário e inteiramente fechado tal que m é um primo associado a cada ideal $\mathfrak{Q} \subseteq u$ que satisfaz: $prf\ R_p \geq r$ sempre que $p \neq m$ é um ideal primo de R que contém $\mathfrak{Q}$.

(iii) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que m é um primo associado ao ideal $\overline{\mathfrak{Q}}$ para todo ideal não nulo $\mathfrak{Q} \subseteq \overline{m^k}$ que tem a seguinte propriedade : $prf\ R_p \geq r$ para cada ideal primo $p \supseteq \mathfrak{Q}$ e $p \neq m$.

McAdam em [8, Proposição 3.19] mostra que, se (R, m) é um dom´ínio local, as seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe $n \geq 0$ tal que m é um primo associado a todo ideal não nulo $\mathfrak{Q}$ tal que $\mathfrak{Q} \subseteq \overline{m^n}$.

(ii) Existe $n \geq 0$ tal que m é um primo associado a todo ideal $\overline{\mathfrak{Q}}$ tal que $0 \neq \mathfrak{Q} \subseteq m^n$.

Decorre dessa observação e da Proposição 5.5 o seguinte Corolário.

Corolário 5.6 [15, Teorema 1] : Seja R um domínio local. Existe um primo mínimo de 0_{R^*} com coaltura 1 se e somente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que m é um primo associado ao ideal $\overline{\mathbb{Q}}$ para todo ideal não nulo $\mathbb{Q}$ de R tal que $\mathbb{Q} \subseteq m^k$.

§6 - Estabilidade Assintótica

Neste parágrafo mostramos que $\min_n \sup_b \mathfrak{a}^n$ depende apenas das coalturas dos primos associados ao ideal nulo de R_p^*, onde $P \in Ass\,(\mathfrak{a}^n)$. Da mesma maneira, mostramos que $\min_n \sup \overline{\mathfrak{a}^n}$ depende apenas das coalturas dos ideais primos mínimos associados ao ideal nulo de R_p^* onde $P \in Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^n})$. Por [4] sabemos que $Ass\,(\mathfrak{a}^n)$ é estavelmente assintótico, ou seja, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $Ass\,(\mathfrak{a}^M) = Ass\,(\mathfrak{a}^{M+k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ao longo deste parágrafo M denotará tal inteiro.

<u>Proposição 6.1</u> : Sejam (R, m) um anel local, $\mathfrak{a}$ e b ideais de R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ e M como acima. Se existem um ideal primo $P \in Ass\,(0_R)$ e um ideal primo $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^M)$ tais que $b \subseteq P \subseteq p$ então $\min_n \sup_b \mathfrak{a}^n = 0$. Caso contrário, vale $\min_n \sup_b \mathfrak{a}^n = min\,\{coalt\,P\,;\ P \in Ass\,(0_{R_p^*})$ e $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^M)\}$.

<u>Prova</u>: Sabemos que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}^i \supseteq \ldots$ é uma cadeia decrescente de ideais de R ; conseqüentemente $\sup_b \mathfrak{a} \geq \sup_b \mathfrak{a}^2 \geq \ldots \geq \sup_b \mathfrak{a}^i \geq \ldots$ é uma seqüência de números naturais, limitada inferiormente por zero. Segue-se que existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_b \mathfrak{a}^{n'} = \sup_b \mathfrak{a}^{n'+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $N = max\,\{n', M\}$, resulta $\min_n \sup_b \mathfrak{a}^n = \sup_b \mathfrak{a}^N$.

Pelo Teorema 1.1, dado $k \geq 0$, $U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{a}^k R_p^*$ para cada $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^k)$ se e só se $\sup_b \mathfrak{a}^k \geq i$. Como $\sup_b \mathfrak{a}^N = \sup_b \mathfrak{a}^n$ para todo $n > N$ temos que $\sup_b \mathfrak{a}^N \geq i$ se e somente se $\sup_b \mathfrak{a}^n \geq i$ para todo $n > N$; isto ocorre se e somente se $U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{a}^n R_p^*$ para cada $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)$ e $n > N$. Desse modo, pelo Teorema 1.1, temos que

$\sup_b \mathfrak{a}^N = max\,\{i \geq 0\,;\ U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{a}^N R_p^*$ para cada $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)\} =$
$= max\,\{i \geq 0\,; U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{a}^n R_p^*$ para cada $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)$ e $n > N\}$;
mas, $U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \mathfrak{a}^n R_p^*$ para cada $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)$ e $n > N$ se e somente se $U_i^b\,(0_{R_p^*}) \subseteq \bigcap_{n > N} \mathfrak{a}^n R_p^*$ e, como R_p^* é anel local noetheriano, $\bigcap_{n > N} \mathfrak{a}^n R_p^* = 0_{R_p^*}$.
Assim,

$$\min_n \sup_b \mathfrak{a}^n = \sup_b \mathfrak{a}^N =$$
$$= max\,\{i \geq 0\,;\ U_i^b\,(0_{R_p^*}) = 0_{R_p^*}\ para\ cada\ p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)\}\,.$$

Se existem um primo $P \in Ass\,(0_R)$ e um primo $p \in Ass\,(\mathfrak{a}^N)$ tais que

$b \subseteq P \subseteq p$ então, escolhendo $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ tal que $P^{\bullet} \cap R_p = P\, R_p$, teremos $P^{\bullet} \supseteq b$. Assim, existirá um primo $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ tal que $P^{\bullet} \supseteq b$; consequentemente $U_i^b\,(0_{R_p^\bullet}) \neq 0_{R_p^\bullet}$ para $i > 0$ e portanto $\min_n \sup{}_b\, @^n = 0.$ Se não existem $P \in Ass\,(0_R)$ e $p \in Ass\,(@^N)$ tais que $b \subseteq P \subseteq p$, então para cada $p \in Ass\,(@^N)$ e para cada $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$, $P^{\bullet} \not\supseteq b$. Desse modo, $U_i^b\,(0_{R_p^\bullet}) = 0_{R_p^\bullet}$ se e só se para cada $p \in Ass\,(@^N)$ e para cada $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ $coalt\ P^{\bullet} \geq i$. Isto significa que $U_i^b\,(0_{R_p^\bullet}) = 0_{R_p^\bullet}$ para cada $p \in Ass\,(@^N)$ se e só se para cada $p \in Ass\,(@^n)$ não existir $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ tal que $coalt\ P^{\bullet} < i$. Portanto,

$\min_n \sup{}_b\, @^n = max\,\{i \geq 0\ ;\ U_i^b(0_{R_p^\bullet}) = 0_{R_p^\bullet}$ para cada $p \in Ass\,(@^N)\} =$ $max\,\{i \geq 0\,;\ coalt\ P^{\bullet} \geq i$ para cada $p \in Ass\,(@^N)$ e para cada $P^{\bullet} \in$ $\in Ass\,(0_{R_p^\bullet})\} = \min\,\{coalt\ P^{\bullet}\,;P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ e $p \in Ass\,(@^N)\}$. ◇

Corolário 6.2: $\min_n \sup @^n = \min\,\{coalt\ P^{\bullet}\,; P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})\,, p \in Ass\,(@^M)\}.$

Prova : Suponhamos que existam $P \in Ass\,(0_R)$ e $p \in Ass\,(@^N)$ tais que $@ \subseteq P \subseteq p$. Pela Proposição 6.1 e Lema 6.2 basta mostrar que

$$\min\{\ coalt\ P^{\bullet}\ ;\ P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})\ ,\ p \in Ass\,(@^N)\} = 0\ .$$

Como $@ \subseteq P$ temos $(@, P) \subseteq P$; logo, pelo Lema 3.3 (aplicado a P e $@$) existe $P' \in Ass\,(@^N)$ tal que $P \subseteq P' \subseteq P$, ou seja $P \in Ass\,(@^N)$. Tomando $P^{\bullet} = P\, R_p^\bullet$ temos $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$ e $coalt\ P^{\bullet} = 0$. O outro caso já é válido pelo Teorema 6.1 . ◇

Corolário 6.3 : [5, Teorema 2] Sejam (R, m) um anel local e $@$ um ideal de R . Então

$$\min_n sup\ @^n = \min\,\{alt\left(\frac{(@,\ P^{\bullet})}{P^{\bullet}}\right)\ ;\ P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})\ e\ p \in Ass\,(@^M)\ \}\ .$$

Prova : Seja

$$r := \min\left\{alt\left(\frac{(@,\ P^{\bullet})}{P^{\bullet}}\right)\ ;P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})\ e\ p \in Ass(@^M)\ \right\}\ ;$$

sejam $p \in Ass\,(@^M)$ e $P^{\bullet} \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$. É fácil ver que

$$alt\left(\frac{(@,\ P^{\bullet})}{P^{\bullet}}\right) \leq coalt\ P^{\bullet}\ ;$$

logo pelo Corolário 6.3, $r \leq \min\limits_{n} \sup{}_b\, \mathfrak{a}^n$. Seja, agora , $P \in Ass\,(\mathfrak{a},\ P^\bullet)$ tal que $alt\,\left(\dfrac{P}{P^\bullet}\right) = r$. Aplicando o Lemma 3.3 ao anel $R_p^\bullet$ temos que existe $P' \in Ass\,(\mathfrak{a}^N R_p^\bullet)$, tal que $P^\bullet \subseteq P' \subseteq P$. Sejam $S = (R_p^\bullet)^\bullet_{P'}$, e $Q' \in Ass\,(P^\bullet S)$ tais que $coalt\ Q' = \dim \dfrac{S}{P^\bullet S}$. Como $P^\bullet \in Ass\,(0_{R_p^\bullet})$, por [12, Teorema 18.11] temos que $Q' \in Ass\,(0_S)$. Mas

$$\frac{S}{P^\bullet S} = \left(\frac{(R_p^\bullet)_{P'}}{P^\bullet\,(R_p^\bullet)_{P'}}\right)^\bullet ;$$

logo

$$\dim \frac{S}{P^\bullet S} = \dim \left(\frac{(R_p^\bullet)_{P'}}{P^\bullet\,(R_p^\bullet)_{P'}}\right)^\bullet = \dim \frac{(R_p^\bullet)_{P'}}{P^\bullet\,(R_p^\bullet)_{P'}} = alt\ \frac{P'}{P^\bullet} .$$

Assim,

$$coalt\ Q' = alt\ \frac{P'}{P^\bullet} \leq alt\ \frac{P}{P^\bullet} = r .$$

Pelo Corolário 6.3 temos que

$$\min_n\ \sup\ \mathfrak{a}^n R_p^\bullet = \min\,\{coalt\ Q\ ;\ Q \in Ass\,\left((0_{R_p^\bullet})^\bullet_{\mathcal{P}}\right)\ \ e\ \ \mathcal{P} \in Ass\,(\mathfrak{a}^M R_p^\bullet)\} .$$

Como $P' \in Ass\,(\mathfrak{a}^M R_p^\bullet)$ e $Q' \in Ass\,((0_{R_p^\bullet})_{P'})$, $coalt\ Q' \geq \min\limits_n \sup\ \mathfrak{a}^n R_p^\bullet$. Pelo Lema 1.3, $\sup\ \mathfrak{a}\, R_p \geq \sup\ \mathfrak{a}$, portanto

$$r \geq coalt\ Q' \geq \min_n\ \sup\ \mathfrak{a}^n R_p^\bullet \geq \min_n\ \sup\ \mathfrak{a}^n . \qquad \diamond$$

A proposição a seguir é a versão da Proposição 6.1 para $\min\limits_n \sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}^n}$. Por [13, Proposição 5] sabemos que $Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^n})$ é estavelmente assintótico. No restante deste parágrafo, T denotará um inteiro tal que $Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^T}) = Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^{T+k}})$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

<u>Proposição 6.4</u> : Sejam $\mathfrak{a}$ e b ideais do anel local R tais que $b \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Se existem P ideal primo mínimo de 0_R e $p \in Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^T})$ tais que $b \subseteq P \subseteq p$, então $\min\limits_n \sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}^n} = 0$. Caso contrário, vale
$\min\limits_n \sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}^n} = \min\,\{coalt\ P^\bullet\ ; P^\bullet$ é primo mínimo de $0_{R_p^\bullet}$ e $p \in Ass\,(\overline{\mathfrak{a}^T})\ \}$.

<u>Prova</u> : Como $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}^i \supseteq \ldots$, temos $\overline{\mathfrak{a}} \supseteq \overline{\mathfrak{a}^2} \supseteq \ldots \supseteq \overline{\mathfrak{a}^i} \supseteq \ldots$; conseqüentemente, $\sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}} \geq \sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}^2} \geq \ldots \geq \sup{}_b\, \overline{\mathfrak{a}^i} \geq \ldots$ é uma seqüência

decrescente de números naturais, limitada inferiormente por zero. Assim, existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_b \overline{@^{n'}} = \sup_b \overline{@^{n'+k}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando $N = \max\{T, n'\}$, resulta que $\min_n \sup_b \overline{@^n} = \sup_b \overline{@^N}$. Pelo Teorema 5.1, $\sup_b \overline{@^N} = \max\{i \geq 0 \,;\, \sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} \subseteq \overline{@^N R_p^\bullet}$ para cada $p \in Ass(\overline{@^N})\}$; assim, de maneira análoga à que foi feita demonstração da Proposição 6.1, mostra-se que $\sup_b \overline{@^N} = \max\{i \geq 0 \,;\, \sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} \subseteq \overline{@^n R_p^\bullet}$ para cada $p \in Ass(\overline{@^N})$ e $n \geq N\}$. É claro que $\sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} \subseteq \overline{@^n R_p^\bullet}$ para todo $p \in Ass(\overline{@^N})$ e $n > N$ se e somente se

$$\sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} \subseteq \bigcap_{n > N} \overline{@^n R_p^\bullet}$$

para cada $p \in Ass(\overline{@^N})$. Pelo Lema B3 do Apêndice,
$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{@^n R_p^\bullet} = \sqrt{0_{R_p^\bullet}}$; mas $\overline{@^n R_p^\bullet} \supseteq \overline{@^{n+1} R_p^\bullet}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\bigcap_{n>N} \overline{@^n R_p^\bullet} = \sqrt{0_{R_p^\bullet}}$. Assim, $\sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} \subseteq \overline{@^n R_p^\bullet}$ para cada $p \in Ass(\overline{@^N})$ e $n > N$ se e somente se $\sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} = \sqrt{0_{R_p^\bullet}}$ para cada $p \in Ass(\overline{@^N})$; desse modo,

$$\min_n \sup_b \overline{@^N} = \max\{i \geq 0 \,;\, \sqrt{U_i^b(0_{R_p^\bullet})} = \sqrt{0_{R_p^\bullet}} \text{ para cada } p \in Ass(\overline{@^N})\}.$$

A partir daqui a demonstração prossegue como a demonstração da Proposição 6.1, trocando $P \in Ass(0_R)$ por P primo mínimo de 0_R e $p \in Ass(@^N)$ por $p \in Ass(\overline{@^N})$. ◇

<u>Corolário 6.5</u> : Seja $@$ un ideal do anel R . Então
$\min_n \sup \overline{@^n} = \min\{coalt\ P^\bullet \,;\, P^\bullet$ é primo mínimo de $0_{R_p^\bullet}$ e $p \in Ass(\overline{@^N})\}$.

<u>Prova</u> : Como $@^n \subseteq \overline{@^n} \subseteq \sqrt{@^n} = \sqrt{@}$ temos que $\sqrt{\overline{@^n}} = \sqrt{@}$. Assim, pelo Lema 6.2 $sup\ \overline{@^n} = sup_{@}\ \overline{@^n}$ e portanto $\min_n sup\ \overline{@^n} = \min_n sup_{@}\ \overline{@^n}$. Desse modo, a prova deste corolário segue diretamente do Corolário 6.3 assim como a prova da Proposição 6.5 segue da prova da Proposição 6.1. ◇

<u>Corolário 6.6</u> : Sejam (R, m) um anel local e $@$ um ideal de R . Então
$\min_n \sup \overline{@^n} = \min\{alt\left(\frac{(@, P^\bullet)}{P^\bullet}\right) \,;\, P^\bullet$ é primo mínimo de $0_{R_p^\bullet}$ e $p \in Ass(\overline{@^N})\}$.

<u>Prova</u>: Decorre da do Corolário 6.4 fazendo as mesmas alterações que acima. ◇

APÊNDICE

APÊNDICE A: MISCELÂNEAS

O objetivo principal deste apêndice é demonstrar o Teorema A3, que usamos no §3 e que também se encontra em [6, Teorema 1]. Além disso, também mostramos alguns resultados que foram utilizados nos §§2, 3 e 4.

Lema A1: Seja $I = (f_1, \ldots, f_n)$ um ideal do anel R com $alt\ I = n$. Então, $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} \ / \ \sum_{j=1}^{n} i_j = d\}$ é um conjunto minimal de geradores de I^d.

Prova : Seja P um primo mínimo de I com $alt\ P = n$. Consideremos o anel local R_P. Sabemos que IR_P é um ideal PR_P-primário e $dim\ R_P = alt\ PR_P = n$. Como $IR_P = \left(\frac{f_1}{1}, \ldots, \frac{f_n}{1}\right) R_P$ temos que $\frac{f_1}{1}, \ldots, \frac{f_n}{1}$ é um sistema de parâmetros de R_P. Se $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} \ / \ \sum_{j=1}^{n} i_j = d\}$ não é conjunto minimal de geradores de I^d, então existem $k_1, \ldots, k_n$ com $\sum_{j=1}^{n} k_j = d$ tal que

$$f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n} = \sum r_{i_1 \ldots i_n} f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} ,$$

onde a soma é feita sobre $\sum_{j=1}^{n} i_j = d$, $(i_1, \ldots i_n) \neq (k_1, \ldots, k_n)$ e $r_{i_1 \ldots i_n} \in R$.

Logo,

$$\frac{f_1^{k_1}}{1} \ldots \frac{f_n^{k_n}}{1} = \sum \frac{r_{i_1 \ldots i_n}}{1} \frac{f_1^{i_1}}{1} \ldots \frac{f_n^{i_n}}{1}$$

em R_p. Assim,

$$\frac{f_1^{k_1}}{1} \ldots \frac{f_n^{k_n}}{1} - \sum r_{i_1, \ldots, i_n} \frac{f_1^{i_1}}{1} \ldots \frac{f_n^{i_n}}{1} = \frac{0}{1} .$$

Portanto existe $F \in R_p [X_1, \ldots, X_n]$, uma forma de grau d, tal que

$$F\left(\frac{f_1}{1}, \ldots, \frac{f_n}{1}\right) = 0 \in I_P^{d+1} .$$

Assim, [1, proposição 11.20] os coeficientes de F estão em PR_p . Desse modo $1 \in PR_p$, o que não acontece. Logo o conjunto

$$\left\{(f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n}) \ / \ \sum_{j=1}^{n} i_j = d\right\}$$

é um conjunto minimal de geradores de I^d. ◇

Lema A2: Sejam (A, m) um anel local e $I = (f_1, \dots, f_n)$ um ideal de A. Se $alt\ I = n$, então

$$\frac{gr_I\ A}{m\ gr_I\ A} \approx \frac{A}{m}\,[X_1, \dots, X_n]\ .$$

Prova: Sejam

$$\Pi : gr_I\ A \longrightarrow \frac{gr_I\ A}{m\ gr_I\ A}$$

a projeção canônica e

$$\varphi : A\,[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow gr_I\ A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{I^{k+1}}$$

o homomorfismo definido em cada em cada forma de grau t $\sum_t a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, onde $t = \sum_{j=1}^{n} i_j$, por

$$\varphi\left(\sum_t a_{i_1 \dots i_n}\, X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}\right) = \sum_t a_{i_1 \dots i_n}\, f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} + I^{t+1}\ .$$

Consideremos

$$\Pi \circ \varphi : A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \frac{gr_I\ A}{m\ gr_I\ A}$$

que é obviamente um homomorfismo sobrejetor. Assim, para mostrar este Lema, basta mostrar que $Nuc\ (\Pi \circ \varphi) = m\ [X_1, \dots, X_n]$. Como $A\ [X_1, \dots, X_n]$ e $\frac{gr_I\ A}{m\ gr_I\ A}$ são anéis graduados, então basta mostrar que se f_d é uma forma de grau d de $A\ [X_1, \dots, X_n]$, então $f_d \in Nuc(\Pi \circ \varphi)$ se e só se $f_d \in m\ [X_1, \dots, X_n\ ]$. Seja, então

$$f_d = \sum_d a_{i_1 \dots i_n}\, X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}\ .$$

Temos que $f_d \in Nuc\ (\Pi \circ \varphi)$ se e só se

$$\sum_d a_{i_1 \dots i_n}\, f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} + I^{d+1} \in m\ gr_I\ A\ .$$

Como

$$m\ gr_I\ A = m\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{I^{k+1}}\right) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{mI^k}{I^{k+1}}\ ,$$

temos que

$$\sum_d a_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} + I^{d+1} \in m\, gr_I\, A$$

se e só se

$$\sum_d a_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} + I^{d+1} \in \frac{m\, I^d}{I^{d+1}},$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_d a_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} \in m\, I^d.$$

Sabemos que

$$I^d = \left(\left\{ f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} \;/\; \sum_{j=1}^{n} i_j = d \right\} \right),$$

portanto $f_d \in Nuc\,(\Pi \circ \varphi)$ se e só se

$$\sum_d a_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} = \sum_d m_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n}$$

onde $m_{i_1 \dots i_n} \in m$.

Como $alt\ I = n$, pelo Lema A1, o conjunto $\{f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} \;/\; \sum_{j=1}^{n} i_j = d\}$ é um conjunto minimal de geradores de I^d . Logo $a_{i_1 \dots i_n} \in m$ para todas n-uplas tais que $\sum_{j=1}^{n} i_j = d$.

Desse modo, $f_d \in Nuc\,(\Pi \circ \varphi)$ se e só se $f_d \in m\,[X_1, \dots, X_n]$.

Assim,

$$\frac{A}{m}\,[X_1, \dots, X_n] \approx \frac{A\,[X_1, \dots, X_n]}{m\,[X_1, \dots, X_n]} \approx \frac{gr_I\, A}{m\, gr_I\, A}. \qquad \diamond$$

<u>Teorema A3</u> [6, Teorema 1]: Seja $I = (f_1, \dots, f_n)$ um ideal do anel R tal que existe $p \in Spec\ R$, primo mínimo de I com $alt\ p = n$. Seja

$$U = R \setminus \bigcup_{P \in Ass\,(I)} P$$

Se $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$ é um $\left(\frac{R}{I}\right)_U$-módulo livre para infinitos valores de k , então $f_1, \dots, f_n$ é uma seqüência regular em R .

Prova: Sabemos que R é um anel noetheriano, logo, por [9, Teorema 27 (iii)] basta mostrar que $f_1, \ldots, f_n$ é uma seqüência quasi-regular de R. Ou seja, basta mostrar que $\varphi : \frac{R}{I}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow gr_I\, A$ definido por

$$\varphi\left(\sum \overline{a_{i_1 \ldots i_n}}\, X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}\right) = \sum a_{i_1 \ldots i_n}\, f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} + I^{t+1},$$

onde $\sum_{j=1}^{n} i_j = t$ e $\overline{a_{i_1 \ldots i_n}} = a_{i_1 \ldots i_1} + I$, é uma bijeção.

É claro que φ é um homomorfismo sobrejetor. Mostremos então que φ é injetor. Sabemos que

$$\frac{gr_I\, R}{m\, gr_I\, R} = \frac{\bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{I^{k+1}}}{m\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{I^{k+1}}\right)} \approx \frac{\bigoplus_{k+0}^{\infty} \frac{I^k}{I^{k+1}}}{\bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{m\, I^k}{I^{k+1}}} \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{m\, I^k}.$$

Assim, aplicando o Lema A2 a $IR_p = I_p$ temos

$$\frac{R_p}{pR_p}[X_1, \ldots, X_n] \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{I_p^k}{pR_p\, I_p^k}.$$

Logo $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} + I_p\, p_p \,/ \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ é uma base de $\frac{I_p^k}{I_p^k\, p_p}$ como $\frac{R_p}{p_p}$-espaço vetorial. Por outro lado, $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} + I_p^{k+1} \,/ \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ gera $\frac{I_p^k}{I_p^{k+1}}$ como R_p-módulo e

$$\frac{\frac{I_p^k}{I_p^{k+1}}}{\frac{p_p\, I_p^k}{I_p^{k+1}}} \approx \frac{I_p^k}{p_p\, I_p^k};$$

portanto, pelo Lema de Nakayama, $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} + I_p^{k+1} \,/ \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ é um sistema minimal de geradores do R_p-módulo $\frac{I_p^k}{I_p^{k+1}}$. Como $I_p \subseteq ann_{R_p}\left(\frac{I_p^k}{I_p^{k+1}}\right)$, temos que $\{f_1^{i_1} \ldots f_n^{i_n} + I_p^{k+1} / \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ é um sistema minimal de geradores de $\frac{I_p^k}{I_p^{k+1}}$ como $\frac{R_p}{I_p}$-módulo.

Seja $k \in I\!N$ tal que $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$ é um $\left(\frac{R}{I}\right)_U$-módulo livre. Então $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_P$ é um $\left(\frac{R}{I}\right)_P$-módulo livre, já que $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_P$ é uma localização de $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$. Assim, $B = \{f_1^{i_1}\ldots f_n^{i_n} + I_P^{k+1} \ / \ \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ é uma base do $\frac{R_P}{I_P}$-módulo livre $\frac{I_P^k}{I_P^{k+1}}$. Como $f_1^{i_1}\ldots f_n^{i_n} + I^{k+1} \in \left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)$, se $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$ então $B' = \{f_1^{i_1}.\ldots.f_n^{i_n} + I_U^{k+1} \ ; \ \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}$ é base do $\left(\frac{R}{I}\right)_U$-módulo livre $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$.

Sejam $F_k = \{$formas de grau k de $\frac{R}{I}[X_1,\ldots,X_n]\}$ e φ_k a restrição de φ à F_k. Assim, $(\varphi_k)_U : (F_k)_U \longrightarrow \left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$, definida por $(\varphi_k)_U\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\varphi(f)}{g}$, é injetor pois B' é base do $\left(\frac{R}{I}\right)_U$-módulo livre $\left(\frac{I^k}{I^{k+1}}\right)_U$.

Afirmamos que φ_k é injetor. De fato, seja $f \in Nuc\ \varphi_k : \varphi_k(f) = 0$. Desse modo, $(\varphi_k)\left(\frac{f}{1}\right) = \frac{\varphi_k(f)}{1} = 0$ e, como $(\varphi_k)_U$ é injetor, temos $\frac{f}{1} = 0$ em $(F_k)_U$. Assim, existe $t \in (R) \setminus \bigcup_{P \in Ass(I)} P$ tal que $(t+I).f = 0$. Como $t \notin \bigcup_{P \in Ass(I)} P$, $t+I$ não é divisor de zero em $\frac{R}{I}$ e portanto $f = 0$. Concluimos então que φ_k é injetor.

Se $Nuc\ \varphi \neq 0$, então $Nuc\ \varphi_k \neq 0$ a menos de um número finito de valores de k. Como $Nuc\ \varphi_k = 0$ para infinitos valores de k, temos $Nuc\ \varphi = 0$. Conseqüentemente φ é injetor. $\diamond$

Corolário A4 [6, Corolário 1]: Seja $I = (f_1,\ldots,f_n)$ um ideal do anel R. Seja $U = R \setminus \bigcup_{P \in Ass(I)} P$. Se $f_1,\ldots,f_n$ é uma seqüência R_U-regular, então $f_1,\ldots,f_n$ é uma seqüência R-regular.

Prova : Se $f_1,\ldots,f_n$ é uma seqüência R_U-regular então

(i) $alt\ (P) = n$ para todo P primo mínimo de I_U ;

(ii) $\frac{(f_1,\ldots,f_n)^k R_U}{(f_1,\ldots,f_n)^{k+1} R_U}$ é um $\frac{R_U}{I_U}$-módulo livre.

Mas, (i) é equivalente à $alt\ (P) = n$ para todo P primo mínimo de I. Como $\dfrac{(f_1,\ldots,f_n)^k\ R_U}{(f_1,\ldots,f_n)^{k+1}\ R_U} = \left(\dfrac{(f_1,\ldots,f_n)^k}{(f_1,\ldots,f_n)^{k+1}}\right)_U$, podemos aplicar o Teorema A3 com $I = (f_1,\ldots,f_n)$. Assim, $f_1,\ldots,f_n$ é uma seqüência R-regular. ◇

Lema A5 : Sejam (R, m) um anel local, $\mathfrak{a}$ um ideal de R e $r \in \mathbb{N}$ tais que $prf\ R_P \geq r$ para todo ideal primo $P \supseteq \mathfrak{a}$ e $P \neq m$. Então existem $a_1,\ldots a_r \in \mathfrak{a}$ tais que, para todo $i = 1,\ldots r$, $a_i \notin P$ para cada $P \neq m$ com $P \in Ass\,(a_1,\ldots a_{i-1})$.

Prova : Faremos esta demonstração por indução em r.

Suponhamos que $prf\ R_P \geq 1$ para todo primo $P \supseteq \mathfrak{a}$ e $P \neq m$. Afirmamos que $\mathfrak{a} \not\subseteq D(0_R) := \bigcup_{P \in \mathcal{X}} P$, com $\mathcal{X} = \{P \in Ass(0); P \neq m\}$. De fato, caso contrário, existe $P' \in Ass\ (0_R)$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq P'$. Mas $0 = prf\ P' = prf\ P'\ R_{P'}$ e como $prf\ P'\ R_{P'} = prf\ R_{P'}$, temos $0 = prf\ R_{P'}$, o que não pode acontecer já que $P' \supseteq \mathfrak{a}$. Logo $\mathfrak{a} \not\subseteq D(0_R)$. Portanto, existe $a_1 \in \mathfrak{a}$ tal que $a_1 \notin D(0_R)$. Assim, $a_1 \notin P$ se $P \neq m$ e $P \in Ass\ (0_R)$.

Suponhamos que se $prf\ R_P \geq s-1$ para todo ideal primo $P \supset \mathfrak{a}$ com $P \neq m$ então existem $a_1,\ldots,a_{s-1} \in \mathfrak{a}$ tais que para todo $i = 1,\ldots,s-1$ $a_1 \notin P$ se $P \neq m$ e $P \in Ass\,(a_1,\ldots,a_{i-1})$.

Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R tal que $prf\ R_P \geq s$ para todo ideal primo $P \supseteq \mathfrak{a}$ e $P \neq m$. Como $prf\ R_P \geq s \geq s-1$ para todo ideal primo $P \supseteq \mathfrak{a}$ e $P \neq m$, então existem $a_1,\ldots,a_{s-1} \in \mathfrak{a}$ tais que $a_i \notin P$ se $P \neq m$ e $P \in Ass\,(a_1,\ldots,a_{i-1})$ com $i = 1,\ldots,s-1$.

Seja $\{P_1,\ldots,P_t\} = \{P \in Ass\,(a_1,\ldots,a_{s-1})\ /\ P \neq m\}$. Sabemos que $\dfrac{a_1}{1},\ldots,\dfrac{a_{s-1}}{1}$ é uma seqüência regular maximal de $P_i\ R_{P_i}$, logo $prf\ P_i\ R_{P_i} = prf\ R_{P_i} = s-1$ para $i = 1,\ldots,t$. Então, como $prf\ R_P \geq s$ para todo ideal primo $P \neq m$ e $P \supseteq \mathfrak{a}$, temos que $\mathfrak{a} \not\subset P_i$ qualquer que seja $i = 1,\ldots,t$. Assim, $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{i=1}^{t} P_i \neq \emptyset$.

Seja $a_s \in \mathfrak{a} \setminus \bigcup_{i=1}^{t} P_i$. Pela escolha de a_s, $a_s \notin P$ se $P \neq m$ e $P \in Ass\,(a_1,\ldots,a_{s-1})$. ◇

Lema A6 : Sejam (R, m) um anel local e R^* seu completamento. Seja Q^*

um ideal de R^* mR^*-primário. Então, o ideal $Q = Q^* \cap R$ é m-primário e $QR^* = Q^*$.

Prova : Como Q^* é um ideal mR^*-primário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m^n R^* \subseteq Q^*$. Assim, $m^n R^* \cap R \subseteq Q^* \cap R$, logo $m^n \subseteq Q$. Portanto Q é m-primário. Seja $b^* \in Q^*$; pela estrutura de R^* existe $b \in R$ tal que $b^* - b \in m^n R^*$. Logo $b \in Q^*$; mas $b \in R$, portanto $b \in Q^* \cap R = Q$. Temos que $m^n R^* \subseteq QR^*$ pois QR^* é mR^*-primário (já que Q é m-primário) ; assim $b^* - b \in QR^*$. Logo, como $b \in Q$, $b^* \in QR^*$. Desse modo, $Q^* \subseteq QR^*$. A outra inclusão é trivial. ◇

Lema A7 : Sejam $\mathfrak{a}, b$ e C ideais do anel R e $i > 0$ um inteiro. Se $\mathfrak{a} \supseteq C$ então $U_i^b(C) \subseteq U_i^b(\mathfrak{a})$. Em particular $U_i^b(\mathfrak{a}^{n+1}) \subseteq U_i^b(\mathfrak{a}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova : Sejam $\mathfrak{a} = \bigcap_{j=1}^{s} Q_j$ e $C = \bigcap_{j=1}^{u} q_j$ decomposições primárias desses ideais, com $\sqrt{Q_j} = P_j$ para $j = 1, \ldots, s$ e $\sqrt{q_j} = p_j$ para $j = 1, \ldots, u$. Observemos que

$$\bigcap_{\substack{p_j \supseteq b \text{ ou} \\ \text{coalt } p_j < i}} q_j \not\subseteq \bigcup_{\substack{P_k \not\supseteq b \text{ e} \\ \text{coalt } P_k \geq i}} P_k$$

pois, caso contrário existiria $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{\substack{p_j \supseteq b \text{ ou} \\ \text{coalt } p_j < i}} q_j \subseteq P_k$$

e portanto existiria $j \in \mathbb{N}$ tal que $q_j \subseteq P_k$. Assim, $p_j \subseteq P_k$, o que não pode acontecer, já que $P_k \not\supseteq b$ e *coalt* $P_k \geq i$ e , por outro lado, $p_j \supseteq b$ ou *coalt* $p_j < i$. Tomamos então um elemento

$$\alpha \in \bigcap_{\substack{p_j \supseteq b \text{ ou} \\ \text{coalt } p_j < i}} q_j \setminus \bigcup_{\substack{P_k \not\supseteq b \text{ e} \\ \text{coalt } P_k \geq i}} P_k$$

Dado $x \in U_i^b(C)$ temos $x \in q_j$ se $p_j \not\supseteq b$ e *coalt* $p_j \geq i$ de modo que $x.\alpha \in \bigcap_{j=1}^{u} q_j = C \subseteq \mathfrak{a} = \bigcap_{j=1}^{s} Q_j$ e portanto $x.\alpha \in Q_j$, $j = 1, \ldots, s$. Pela escolha de α segue-se que $x \in Q_j$ se $P_j \not\supseteq b$ e *coalt* $P_j \geq i$; portanto $x \in U_i^b(\mathfrak{a})$. ◇

APÊNDICE B : SOBRE IDEAIS INTEIRAMENTE FECHADOS

Neste apêndice demonstramos os teoremas referentes a ideais inteiramente fechados que são usados no §5; entre estes provamos que todo ideal inteiramente fechado possui uma decomposição primária em que cada componente primária é inteiramente fechada. Para obter esse resultado (Proposição B9) necessitamos saber que todo ideal inteiramente fechado em um anel local (R, m) é a intersecção de todos os ideais m-primários inteiramente fechados que o contém; isto é a Proposição B7. Iniciamos com alguns lemas.

Lema B1 : Seja $@$ um ideal inteiramente fechado do anel R . Então

$$\sqrt{0_R} \subseteq @ .$$

Prova : Seja $x \in \sqrt{0_R}$; logo existe $n \in I\!N$ tal que $X^n = 0$, ou seja, $x^n + 0 = 0$ e $0 \in @^n$. Assim, x é inteiramente dependente sobre $@$. Como $@$ é inteiramente fechado, $x \in @$. ◇

Lema B2 : Sejam A um domínio noetheriano, K seu corpo de frações e $I \subset A$ um ideal de A . Então existe um anel de valorização discreta (V, m_V) de posto 1 tal que $A \subseteq V \subseteq K$ e $m_V \supset I$.

Prova : Como A é domínio noetheriano, existe uma valorização ω tal que $\omega(a) \geq 0$ para todo $x \in A$ e $\omega(i) > 0$ para todo $i \in I$ [10, Teorema 10.2]. Sejam $i_1, \ldots, i_s \in I$ tais que $I = (i_1, \ldots, i_s)$ e $\omega(i_1) = \min_{1 \leq j \leq s} \omega(i_j)$. Seja $B = A\left[\frac{i_2}{i_1}, \ldots, \frac{i_s}{i_1}\right]$. B é uma A-álgebra finitamente gerada e A é um domínio noetheriano, logo B é um domínio noetheriano. Como $\omega\left(\frac{i_j}{i_1}\right) = \omega(i_j) - \omega(i_j) \geq 0$, temos $\omega(b) \geq 0$ para todo $b \in B$. Como $i_j = i_1 \ \frac{i_j}{i_1}$, temos $i_1 B \supseteq I$.

Seja P um primo mínimo de $i_1 B$; pelo Teorema do ideal principal de Krull, $alt\ P = 1$. Por outro lado,

$P \supseteq iB \supseteq I$, logo $P \cap A \supseteq I$. Sejam $\overline{B}$ o fecho inteiro de B e $\overline{P} \in Spec\,\overline{B}$ tais que $\overline{P} \cap B = P$; logo $alt\ \overline{P} = 1$ pelo Teorema do "Going Up". Então

$V = \overline{B}_{\overline{P}}$ é anel de valorização discreta de posto 1 [24, Corolário 2, pag. 42] e mais:

$$m_V \cap A = \overline{P}\overline{B}_{\overline{P}} \cap A = (\overline{P}\overline{B}_{\overline{P}} \cap B) \cap A = ((\overline{P}\overline{B}_{\overline{P}} \cap \overline{B}) \cap B) \cap A =$$

$$= (\overline{P} \cap B) \cap A = P \cap A \supseteq I . \qquad \diamond$$

<u>Lema B3</u> : Sejam (R, m) um anel local e I um ideal de R . Então

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} = \sqrt{0_R}.$$

<u>Prova</u> : Pelo Lema B1, $\sqrt{0_R} \subseteq \overline{I^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\sqrt{0_R} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} .$$

A demonstração da inclusão recíproca é feita em dois casos:

<u>1º caso</u> : R domínio.

Seja V um anel de valorização discreta de posto 1 tal que $R \subseteq V \subseteq cf(R)$ e $m_V \cap R = m$ (Lema B2). Como IV é um ideal principal e V é inteiramente fechado, temos que $\overline{I^nV} = I^nV$, logo

$$\overline{I^n} \subseteq \overline{I^n} . V \subseteq \overline{I^nV} = I^nV$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} I^nV .$$

Mas, V é domínio local noetheriano; logo $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^nV = 0_R$ pelo Teorema da Intersecção de Krull. Assim,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I_n} = 0_R = \sqrt{0_R}.$$

<u>2º caso</u>: R anel e $P_1, \ldots, P_s$ os primos mínimos de 0_R .

Pelo 1º caso temos que para cada $i = 1, \ldots, s$,

$$\frac{P_i}{P_i} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{I+P_i}{P_i}\right)^n} \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{I^n} + P_i}{P_i},$$

ou seja, para cada $i = 1, \ldots, s$,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} + P_i = P_i \,.$$

Portanto, para cada $i = 1, \ldots, s$,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} \subseteq P_i \,,$$

logo

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I^n} \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} P_i = \sqrt{0_R} \,. \qquad \diamond$$

<u>Corolário B4</u> : Sejam (R, m) um anel local e $P \in Spec\ R$. Então $P = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{(P + @^n)}$ para qualquer ideal $@$ de R .

<u>Prova</u> : Seja $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{(P + @^n)}$, logo para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $s(n) = s \in \mathbb{N}$ tal que $x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s = 0$ e $a_i \in (@^n + P)^i$, $i = 1, \ldots, s$. Como $(@^n + P)^i \subseteq @^{ni} + P$, temos que

$$a_i + P \in \frac{@^{ni} + P}{P} = \left(\frac{@^n + P}{P}\right)^i .$$

Desse modo $x + P \in \overline{\left(\frac{@^n + P}{P}\right)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e portanto

$$x + P \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{@^n + P}{P}\right)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{@ + P}{P}\right)^n} .$$

Como pelo Lema B1

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{@ + P}{P}\right)^n} = \sqrt{0_{\frac{R}{P}}}$$

e $\frac{R}{P}$ é domínio, já que P é ideal primo, temos que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{@ + P}{P}\right)^n} = 0_{\frac{R}{P}} = \frac{P}{P} .$$

Conseqüentemente

$$x+P \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{Q^n+P}{P}\right)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{Q+P}{P}\right)^n} = \frac{P}{P}$$

e $x \in P$. A outra inclusão é imediata. $\diamond$

Definição : Seja G um grupo aditivo ordenado de números reais, unido com o elemento ∞ que satisfaz $a+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$ e $\infty > a$ para qualquer $a \in G$. Uma valorização v de um anel comutativo com unidade R é uma função $v : R \to G$ tal que:

(i) $v(0)=\infty$ e $v(1)=0$;

(ii) $v(x-y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$;

(iii) $v(xy)=v(x)+v(y)$.

Lema B5 : Sejam R um anel noetheriano e $I \subset R$ um ideal de R . Então existe uma valorização discreta de posto 1 , $v : R \to Z\cup\{\infty\}$, tal que $v(x) \geq 0$ para todo $x \in R$ e $v(x) > 0$ para todo $x \in I$. Além disto, se existir $P \in Spec\, R$ tal que $I \not\subset P$ e $P+I \neq R$ então existe $x \in I$ com $v(x) \in Z$.

Prova: Sejam $P \in Spec\, R$ e $R' = \frac{R}{P}$. R' é um domínio noetheriano. Seja $I' := \frac{I+P}{P}$. Pelo Lema B2 existe uma valorização $v' : K \to Z\cup\{\infty\}$ discreta de posto 1 , onde K é o corpo de frações de R' , tal que $v'(x) \geq 0$ para todo $x \in R'$ e $v'(x) > 0$ para todo $x \in I'$. Sejam $\Pi : R \to R'$ a projeção canônonica e $v = v' o\, \Pi : R \to Z\cup\{\infty\}$. Dado $x \in R$, $v(x) = v' o\, \Pi(x) \geq 0$, pois $\Pi(x) \in R'$ e dado $x \in I$, $\Pi(x) \in I'$; logo $v(x) = v'(\Pi(x)) > 0$. É fácil ver que v é valorização de R , pois v' é uma valorização de K .

Note-se que $v(x)=\infty$ se e só se $x \in P$; logo se $I \not\subset P$ e $P+I \neq R$, existe $x \in I$ tal que $v(x) \in Z$. $\diamond$

As idéias da demonstração do Lema a seguir se encontram em [18] e [19].

Lema B6 : Sejam (R,m) um anel local, $s \in N$ e $v : R \to Z\cup\{\infty\}$ uma valorização discreta de posto 1 , com $v(x) \geq 0$ para todo $x \in R$ e $v(x) > 0$ para todo $x \in m$.

Então $u := \{d \in R\,; v(d) \geq s\}$ é um ideal m-primário e inteiramente fechado.

Prova Mostraremos, primeiramente, que u é ideal m-primário. De fato, sejam $r = \min_{d \in m} v(d)$ e $k \in I\!N$ tais que $k.r > s$. Seja $b \in m^k$ e sejam $d_1, \ldots, d_n \in m$ e $i_1, \ldots, i_n \in I\!N$, com $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, tais que $b = d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$. Assim, $v(b) = i_1 v(d_1) + \ldots + i_n v(d_n)$; como $v(d) \geq r$ para todo $d \in m$, temos $v(b) \geq i_1 r + \ldots + i_n r = (i_1 + \ldots + i_n) r = k.r \geq s$. Desse modo $b \in u$ e portanto $m^k \subseteq u$, o que mostra que u é ideal m-primário.

Mostramos agora que u é um ideal inteiramente fechado. Seja $x \in R$ um elemento inteiramente dependente sobre u ; logo existem $n \in I\!N$ e $a_i \in u^i$, $i = 1, \ldots, n$ tais que $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$. Assim, $x^n = -(a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)$, portanto

$$v(x^n) = v(-a_1 x^{n-1} - \ldots - a_{n-1} x - a_n) \geq \min_{1 \leq j \leq s} (v(-a_i x^{n-i})).$$

Mas $v(-a_i x^{n-i}) = v(-a_i) + (n-i) v(x)$ e, como $a_i \in u^i$, $v(a_i) \geq is$; logo $v(-a_i x^{n-1}) \geq is + (n-i) v(x)$. Desse modo,

$$n.v(x) = v(x^n) \geq \min_{1 \leq j \leq s} (is + (n-i) v(x)) .$$

Seja $i_o \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $i_o s + (n - i_o) v(x) = \min_{1 \leq j \leq s} (is + (n-i) v(x))$; logo $n.v(x) \geq i_o s + (n - i_o) v(x)$ e portanto $i_o(v(x) - s) \geq 0$, de modo que $v(x) - s \geq 0$. Assim $v(x) \geq s$ e $x \in u$. ◇

Proposição B7 : Sejam (R, m) um anel local e $@ \subset m$ um ideal de R inteiramente fechado. Então $@$ é a intersecção de todos os ideais m-primários inteiramente fechados que o contém.

Prova : Se $dim\ R = 0$, então $\sqrt{0_R} = m$, logo pelo Lema B1 temos que m é o único ideal inteiramente fechado. Portanto este Lema vale trivialmente.

Suponhamos, então, que $dim\ R > 0$. Mostramos, primeiramente, o caso em que $@$ é um ideal primo de R . Neste caso, o Corolário B4 afirma que $@ = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{(@ + I^n)}$ para qualquer ideal I de R . Assim, tomando I tal que

$\mathfrak{Q}+I$ é m-primário temos $\mathfrak{Q}+I^n$ m-primário para cada $n \in \mathbb{N}$. Desse modo $\overline{\mathfrak{Q}+I^n}$ é m-primário e inteiramente fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ (Note que sempre podemos escolher I tal que $\mathfrak{Q}+I$ é m-primário, basta tomar $m = I$) . Conseqüentemente $\mathfrak{Q}$ é a intersecção de todos os ideais m-primários que o contém.

Seja $\mathfrak{Q}$ um ideal inteiramente fechado qualquer de R . É óbvio que $\mathfrak{Q}$ está contido na intersecção de todos os ideais m-primários inteiramente fechados que o contém. Demonstramos a seguir a inclusão recíproca.

Seja $c \in m \setminus \mathfrak{Q}$ e mostremos que existe um ideal u de R m-primário e inteiramente fechado que contém $\mathfrak{Q}$ e não contém c . Se $c \notin \sqrt{\mathfrak{Q}}$ existe P um ideal primo mínimo de $\mathfrak{Q}$ tal que $c \notin P$; logo pelo 1º caso existe u ideal m-primário de R e inteiramente fechado tal que $u \supset P$ e $c \notin u$. Assim u é um ideal m-primário e inteiramente fechado tal que $\mathfrak{Q} \subseteq P \subseteq u$ e $c \notin u$. Suponhamos, então, que $c \in \sqrt{\mathfrak{Q}}$. Sejam $C = (\mathfrak{Q}, c)$ e $S = R[CT, U]$ o anel de Rees, onde T é uma indeterminada e $U = T^{-1}$. Lembramos que $S = \{ \sum_{finita} c_n T^n ; c_n \in C^n$ se $n \geq 0$ e $c_n \in R$ se $n < 0\}$. Afirmamos que o ideal homogêneo $(\mathfrak{Q}T, U)$ não é irrelevante em S (um ideal homogêneo b de S é dito irrelevante se $\mathcal{I} \subseteq \sqrt{b}$, onde $\mathcal{I}$ é o ideal gerado pelos elementos homogêneos de grau estritamente positivo; neste caso $(CT)S = \mathcal{I}$) . De fato, $(\mathfrak{Q}T, U)$ não é ideal irrelevante pois, caso contrário $\mathcal{I} \subseteq \sqrt{(\mathfrak{Q}T, U)}$ e como $cT \in \mathcal{I}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c^N T^N \in (\mathfrak{Q}T, U)$. Assim, existiriam $a_i \in \mathfrak{Q}$ e $y_j, x_{ij} \in R$ com y_j e $x_{ij} \in C^j$ se $j \geq 0$, tais que

$$c^N T^N = \sum_{\substack{i,j \\ finitas}} a_i . x_{ij} T^{j+1} + \sum_{\substack{j \\ finita}} y_j T^{j-1} ;$$

logo

$$c^N T^N = \sum_{\substack{i \\ finita}} a_i x_{i,N-1} T^N + y_{N+1} T^N = \left(\sum_{\substack{i \\ finita}} a_i . x_{i,N-1} + y_{N+1} \right) . T^N$$

e como $a_i . x_{i,N-1} \in \mathfrak{Q} C^{N-1}$ e $y_{N+1} \in C^{N+1}$ temos que $c^N \in \mathfrak{Q} C^{N-1} + C^{N+1}$. Queremos mostrar que $C^N \subseteq \mathfrak{Q} C^{N-1} + C^{N+1}$; para tanto basta mostrar que $\beta = c^{i_0} . a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \in \mathfrak{Q} C^{N-1} + C^{N+1}$ onde $a_i \in \mathfrak{Q}$ para $i = 1, \ldots, r$ e $\sum_{j=0}^{r} i_j = N$.

Se $i_o = N$, então $\beta = c^N \in \mathfrak{a}C^{N-1} + C^{N+1}$. Se $i_0 < N$, então existe $j > 0$ tal que $i_j \neq 0$, logo

$$\beta = a_j(c^{i_0}.a_1^{i_1} \ldots a_j^{i_j - 1} \ldots a_r^{i_r}) \in \mathfrak{a}.C^{N-1} \subseteq \mathfrak{a}C^{N-1} + C^{N+1} .$$

Portanto $C^N \subseteq \mathfrak{a}C^{N-1} + C^{N+1}$; como $C = (\mathfrak{a}, c)$, temos $\mathfrak{a}C^{N-1} \subseteq C^N$; desse modo $C^N = \mathfrak{a}C^{N-1} + C^{N+1}$. Segue-se, então, pelo Lema de Nakayama, que $C^N = \mathfrak{a}C^{N-1}$, logo, por [12, pag. 34], $\overline{C} = \overline{\mathfrak{a}}$, o que não o pode acontecer já que $\mathfrak{a}$ é inteiramente fechado e $c \in C$ e $c \notin \mathfrak{a}$. Isto prova que o ideal homogêneo $(\mathfrak{a}T , U)$ é relevante. Seja $\Im = \{b \subseteq S \ / \ b$ é ideal homogêneo de S , $b \supseteq (\mathfrak{a}T , U)$ e b é relevante $\}$. $\Im \neq \emptyset$ pois $(\mathfrak{a}T , U) \in \Im$, logo, como S é anel noetheriano, $\Im$ possui elemento máximo P . Mostraremos a seguir, que P é um ideal primo. Seja $P = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$ uma decomposição primária de P onde cada uma das componentes primárias é um ideal homôgeneo [24, Teorema 9, pag. 153] e $\sqrt{Q_i} = P_i$ (que também são ideais homogêneos). Como P é um ideal relevante $\mathcal{I} \not\subset \sqrt{P}$; mas $\sqrt{P} = \bigcap_{i=1}^{t} P_i$, logo $\mathcal{I} \not\subset \bigcap_{i=1}^{t} P_i$; assim existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $\mathcal{I} \not\subset P_j$. Desse modo, P_j é um ideal relevante, homogêneo e $P_j \supset P \supset (\mathfrak{a}T, U)$, conseqüentemente $P_j \in \Im$ e pela maximalidade de P temos que $P = P_j$. Segue-se que P é um ideal primo homogêneo, relevante que contém $(\mathfrak{a}T, U)$ e é máximo para essa propriedade. Mostraremos, a seguir que $P \supseteq mS$. De fato, caso contrário, $P + mS \supsetneq P \supseteq (\mathfrak{a}T, U)$ e como $P + mS$ é um ideal homogêneo [24, Teorema 8, pag. 152] pela maximalidade de P temos que $P + mS$ é um ideal irrelevante. Seja $p_n = \{d \in R \ ; dT^n \in P\}$ para $n \geq 1$. Como $p_n \subseteq C^n$, temos que $p_n + mC^n \subseteq C^n$ para cada $n \geq 1$. Seja $N \in I\!N$ tal que $\mathcal{I}^N \subseteq P + mS$ (já que $P + mS$ é irrelevante tal N existe). Seja $\alpha \in C^N$, logo $\alpha T^N \in (CT)^N S = \mathcal{I}^N \subseteq P + mS$. Como P e mS são ideais homogêneos temos que $\alpha T^N = b_N T^N + d_N T^N$ onde $b_N T^N \in P$ e $d_N T^N \in mS$, logo $b_N \in p_N$ e $d_N \in mC^N$ e portanto , $\alpha \in p_N + mC^N$. Assim, $C^N \subseteq p_N + mC^N$ e conseqëntemente $C^N = p_N + mC^N$. Segue-se, então, do Lema de Nakayama que $C^N = p_N$. Seja $\alpha T^N \in \mathcal{I}$; como $N > 0$, $\alpha \in C^N = p_N$ e desse modo $\alpha.T^N \in P$ e portanto $\mathcal{I} \subseteq P$, o que contraria o fato de P ser relevante. Isto mostra que $P \supset mS$.

Como $dim\, R > 0$ temos que $alt\, P > 0$, pois caso contrário P é um primo mínimo de 0, e conseqüentemente $m = P \cap R$ é primo mínimo de 0_R [10, pag. 120], o que contradiz $dim\, R = alt\, m > 0$. Seja pois, P' um ideal primo mínimo de S tal que $P' \subseteq P$. Como $P' = p\, R[U]_{\{1,U,U^2,\ldots\}} \cap S$, onde p é primo mínimo de 0_R [10, pag. 120] , temos que $U \notin P'$. É fácil ver que $cT \notin P$, pois, caso contrário, $P \supseteq (@T, cT) = (CT)S = I$ o que não acontece já que P é relevante. Assim, $c \notin P'$; de fato, caso contrário $c = cT.U \in P'$ e como $U \notin P'$, $cT \in P' \subset P$, o que é uma contradição. Podemos afirmar, então que $@S \not\subset P'$. De fato, $c \in \sqrt{@}$, logo para cada $p \in Spec\, R$ temos que se $c \notin p$ então $@ \not\subset p$. Assim, como $c \notin P' \cap R$ temos que $@ \not\subset P' \cap R$ e portanto $@S \not\subset P'$. Seja $M = PS_P$ o ideal máximo do anel S_P . Como $M \cap S = P$ e $P \cap R = m$, temos $M \cap R = m$. Seja $a \in @$, como $cT \notin P$ $a = aT.c(cT)^{-1} \in c.M$, logo $@ \subseteq cM$. Pelo Lema B5, tomando $I = P'S_P$, existe v uma valorização de S_P não trivial com valores em $Z \cup \{\infty\}$ tal que $v \geq 0$ em S_P e $v > 0$ em M . Seja $r = \min_{d \in m} v(d)$ e $s = \min_{d \in @} v(d)$. Note que pelo Lema B5 como $@S \not\subset P'$ e $@S + P' \subseteq P$, s é finito. Já vimos que $@ \subseteq c.M$, logo para cada $a \in @$, existe $m \in M$ tq $a = c.m$; assim $v(a) = v(c) + v(m)$. Conseqüentemente, $\min_{a \in @} v(a) \geq v(c) + \min_{m \in M} v(m)$, ou seja, $s \geq v(c) + r$ e como $r > 0$, $s > v(c)$. Seja $u = \{d \in R\, ; v(d) \geq s\}$. Pelo Lema B6 u é um ideal m-primário e inteiramente fechado. Pela escolha de u , $c \notin u$ e $@ \subseteq u$. ◇

Lema B8 : Seja $@$ um ideal inteiramente fechado do anel R . Então $@\, R_p$ é inteiramente fechado para todo $p \in Spec\, R$.

Prova: Seja $p \in Spec\, R$. . Se $@ \not\subset p$ então $@\, R_p = R_p$ e não há nada a fazer. Suponhamos, então que $@ \subset p$. Seja $\alpha \in R_p$ um elemento inteiramente dependente sobre $@\, R_p$; logo existem $a_i \in @^i$ e $s_i \notin p$ para $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$\alpha^n + \frac{a_i}{s_i}\alpha^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}\alpha + \frac{a_n}{s_n} = 0 . \qquad (*)$$

Seja $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$, logo $s \notin p$. Como $\alpha \in R_p$, existem $r \in R$ e $s' \notin p$

tais que $\alpha = \frac{r}{s^*}$. Assim multiplicando (*) por $(s.s^*)^n$, temos

$$(sr)^n + \frac{ss^*a_1}{s_1}(s.r)^{n-1} + \ldots + \frac{s^{n-1}.s^{*(n-1)}.a_{n-1}}{s_{n-1}} + (s.s^*)^n.\frac{a_n}{s_n} = 0.$$

Pela escolha de s , $\frac{(s.s^*)^j.a_j}{s_j} \in R$ e como $a_j \in @^i$ temos $\frac{(s.s^*)^j a_j}{s_j} \in @^j$. Desse modo $s.r \in R$ é inteiramente dependente sobre $@$ e como $@$ é inteiramente fechado, $s.r \notin @$. Portanto

$$\alpha = \frac{r}{s^*} = \frac{r.s}{s^*.s} \in @\, R_p \,,$$

já que $s.s^* \in p$. Assim, $@\, R_p$ é inteiramente fechado. $\diamond$

<u>Proposição B9</u> : Seja $@$ um ideal inteiramente fechado do anel R . Então $@$ possui uma decomposição primária onde cada componente primária é inteiramente fechada.

<u>Prova</u>: Observemos inicialmente que se q é um ideal p-primário e qR_p é inteiramente fechado, então q é inteirmante fechado. De fato, seja $x \in R$ inteiramente dependente sobre q . Logo existem $n \in I\!N$ e $a_i \in q^i$, $i = 1, \ldots, n$ tais que $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Mas $\frac{x}{1} \in R_p$, $\frac{a_i}{1} \in q^i\, R_p$ e

$$\left(\frac{x}{1}\right)^n + \frac{a_1}{1}\left(\frac{x}{1}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1}\frac{x}{1} + \frac{a_n}{1} = \frac{0}{1} \;\; em \;\; R_p\,.$$

Portanto $\frac{x}{1}$ é inteiramente dependente sobre $q\, R_p$ e $q\, R_p$ é inteiramente fechado. Logo $\frac{x}{1} \in q\, R_p$. Como $x \in R$, $x \in (q\, R_p)^c = q$ (já que q é p-primário).

Seja $@ = \bigcap_{i=1}^{t} q_i$ uma decomposição primária de $@$ com $\sqrt{q_i} = p_i$. Seja $p \in Ass\,(@)$. Se p é um primo mínimo de $@$ então $@\, R_p = q\, R_p$, onde $\sqrt{q} = p$ e pelo Lema B8, $q\, R_p$ é inteiramente fechado. Logo, pela observação acima, q é inteiramente fechado. Se p é um primo imerso, basta mostrar que podemos escolher a componente p-primária de $@$ inteiramente fechada no caso de p ser o único ideal máximo de R , pois neste caso teremos

$$@\, R_p = \left(\bigcap_{\sqrt{q_i} \subset p} q_i\, R_p\right) \cap q\, R_p = \left(\bigcap_{\sqrt{q_i} \subset p} q_i\, R_p\right) \cap Q'\,,$$

onde Q' é um ideal p R_p-primário e inteiramente fechado. Seja $q' = Q' \cap R$; sabemos que q' é um ideal p-primário e inteiramente fechado. Afirmamos que

$$\mathfrak{Q} = \left(\bigcap_{\sqrt{q_i} \subset p} q_i \right) \cap q' .$$

De fato, seja

$$x \in \left(\bigcap_{\sqrt{q_i} \subset p} q_i \right) \cap q' .$$

Sabemos que $\frac{x}{1} \in \mathfrak{Q} R_p$, logo $\frac{x}{1} \in q R_p$. Assim, existe $b \in q$ e $s \notin p$ tal que $\frac{x}{1} = \frac{b}{s}$. Logo existe $s' \notin p$ tal que $x.s.s' = b.s' \in q$. Como $s.s' \notin p$ temos que $x \in q$. Desse modo, $x \in \bigcap_{i=1}^{t} q_i = \mathfrak{Q}$. A outra inclusão é óbvia.

Desse modo, dado p um primo imerso de $\mathfrak{Q}$, se soubermos resolver o caso local poderemos substituir na decomposição primária de $\mathfrak{Q}$ a componente p-primária de $\mathfrak{Q}$ por uma outra correspondente p-primária inteiramente fechada. Seja então R um anel local com ideal máximo p um primo imerso de $\mathfrak{Q}$.

Seja

$$C = \bigcap_{\substack{\sqrt{q_i} \in Ass(\mathfrak{Q}) \\ \sqrt{q_i} \neq m}} q_i .$$

Seja $M = \frac{C}{\mathfrak{Q}}$. Então $ann_R M = (\mathfrak{Q} : C)$. Mas $(\mathfrak{Q} : C) = \bigcap_{i=1}^{t} (q_i : C) = (q : C)$, onde $\sqrt{q} = p = m$. Assim, $ann_R M = (q : C)$. Como q é m-primário, então $(q : C)$ é m-primário. Portanto, $\frac{R}{ann_R M} = \frac{R}{(q : C)}$ é anel noetheriano e artiniano. Logo como M é um $\frac{R}{ann_R M}$-módulo finitamente gerado, M é um R- módulo noetheriano e artiniano, conseqüentemente M tem comprimento finito.

Consideremos os ideais $u_n = \overline{(\mathfrak{Q} + m^n)}$ para todo $n \geq 1$. Estes ideais são obviamente, m-primários e inteiramente fechados. Como $M = \frac{C}{\mathfrak{Q}}$ tem comprimento finito, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\frac{C \cap u_{n_0}}{\mathfrak{Q}} = \frac{C \cap u_{n_0+k}}{\mathfrak{Q}}$ para todo $k \in I\!N$. Logo $C \cap u_{n_0} = C \cap u_{n_0+k}$ para todo $k \in I\!N$. Seja u um ideal m-primário e inteiramente fechado que contém $\mathfrak{Q}$. Logo, $u \supseteq \mathfrak{Q}$ e existe $n \in I\!N$ tal que $m^n \subseteq u$, portanto $\mathfrak{Q} + m^n \subseteq u$. Como u é inteiramente fechado

$u_n = \overline{\mathbb{Q} + m^n} \subseteq \overline{u} = u$. Assim, pela Proposição B7 temos que $\mathbb{Q}$ é a intersecção de todos os ideais u inteiramente fechados m-primários que o contêm, portanto,

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} u_i \,.$$

Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap C$, temos $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (u_i \cap C)$. Mas,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (u_i \cap C) = \bigcap_{i=1}^{n_0} (u_i \cap C) = u_{n_0} \cap C \,.$$

Logo

$$\mathbb{Q} = \left(\bigcap_{\sqrt{q_i} \subset m} q_i \right) \cap u_{n_0} \,,$$

onde u_{n_0} é m-primário inteiramente fechado. ◇

Lema B 10 : Sejam (R, m) um anel local e $\mathbb{Q} \subset m$ um ideal inteiramente fechado. Se $\mathbb{Q}$ é um ideal m- primário, então $\mathbb{Q}\, R^*$ é inteiramente fechado.

Prova Sabemos que $\mathbb{Q}$ é um ideal m-primário, logo existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $m^t \subseteq \mathbb{Q}$. Logo $m^{it} \subseteq \mathbb{Q}^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $a \in R^*$ um elemento inteiramente dependente sobre $\mathbb{Q}\, R^*$. Portanto existem $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Q}^i R^*$ para $i = 1, \ldots, n$ tais que $a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a + a_n = 0$. Pela estrutura de R^* , podemos encontrar $b, b_1, \ldots, b_n \in R$ que satisfazem $a - b \in m^{nt} R^*$ e $a_i - b_i \in m^{nt} R^*$ $i = 1, \ldots n$. Mas, $m^{nt} R^* \subseteq m^{it} R^* \subseteq \mathbb{Q}^i R^*$, então $a_i - b_i \in \mathbb{Q}^i R^*$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $a_i \in \mathbb{Q}^i R^*$, $b_i \in \mathbb{Q}^i R^* \cap R = \mathbb{Q}^i$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $a \equiv b \mod m^{nt} R^*$ e $a_i \equiv b_i \mod m^{nt} R^*$ para $i = 1, \ldots, n$, com $b \in R$ e $b_i \in \mathbb{Q}^i$. Multiplicando adequadamente tais congruências obtemos: $a^n \equiv b^n \mod m^{nt}$ e $a^{n-i} a_i \equiv b^{n-i} b_i \mod m^{nt}$ para $i = 1, \ldots, n$. Somando estas duas últimas congruências temos

$$0 = a^n + a_1\, a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, a + a_n \equiv b^n + b_1\, b^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\, b + b_n \mod m^{nt} R^* \,.$$

Logo, $b^n + b_1\, b^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\, b + b_n \in m^{nt} R^* \cap R = m^{nt} \subseteq \mathbb{Q}^n$. Assim, $b^n + b_1\, b^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\, b + b_n = u \in \mathbb{Q}^n$. Mas $b_n \in \mathbb{Q}^n$, então $b_n - u \in \mathbb{Q}^n$ e já sabemos que $b_i \in \mathbb{Q}^i$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto b é inteiramente dependente sobre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ é inteiramente fechado. Logo $b \in \mathbb{Q}$. Mas, $a - b \in m^{n\ell} R^{*}$; , então $a = b + x$ onde $x \in m^{n\ell} R^{*} \subseteq \mathbb{Q}^{n} R^{*} \subseteq \mathbb{Q} R^{*}$ e portanto $a \in \mathbb{Q} R^{*}$. Desse modo, $\mathbb{Q} R^{*}$ é inteiramente fechado. $\diamond$

REFERÊNCIAS

[1] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD: "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley, Reading, 1969.

[2] J. BARSHAY: Generalized analytic independence, Proc. Amer. Math. Soc., 58 (1976), 32-36.

[3] J.E. BJÖRK: On the maximal number of @-independent elements in ideals of Noetherian rings, Lecture Notes in Mathematics, 924 (1982), 413-422.

[4] M. BRODMANN: Assymptotic stability of Ass $(M\ /\ I^n M)$, Proc. Amer. Math. Soc., 74 (1979), 16-18.

[5] W. BRUNS: On the number of elements independents with respect to an ideal, J. London Math. Soc., 22 (1980), 57-62.

[6] D. EISENBUD, M. HERRMANN, W. VOGEL: Remarks on regular sequences, Nagoya Math. J., 67 (1977), 177-180.

[7] C. HUNEKE: The theory of d-sequences and powers of ideals, Adv. in Math., 46 (1982), 249-279.

[8] S. McADAM: "Asymptotic prime divisors", Lectures Notes in Mathematics, 1023. Springer, Berlin, 1983.

[9] H. MATSUMURA: "Commutative Algebra", 2nd. Ed., Benjamin, Reading, 1980.

[10] ——: "Commutative Ring Theory", Cambrige University Press, Cambrige, 1986.

[11] M. NAGATA: On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. J., 10 (1956) 51-64.

[12] ——: "Local Ring", Interscience, New York, 1962.

[13] L.J. RATLIFF, JR: On prime divisors of I^n, n large, Michigan Math. J., 23 (1976), 337-352.

[14] ——: Two theorems on prime divisors of zero in completions of local rings, Pacific J. Math., 81 (1979), 537-545.

[15] ——: Integrally closed ideals and asymptotic prime divisors, Pacific J. Math., 91 (1980), 445-456.

[16] ——: Independent elements, integrally closed ideals and quasi- unmixedness, J. Algebra, 73 (1981), 327-343.

[17] ——: Independent elements and asymtotic sequences, J. Algebra, 78 (1982), 410-430.

[18] D. REES: A note on on valutions associated with local domain, Proc. Cambrige Math. Soc., 51 (1955), 252-253.

[19] ——: Valuation associated with local rings, Proc. London Math. Soc., 5 (1955), 107-128.

[20] A. SEIDENBERG: Differential ideals in rings of finitely generated type, Amer. J. Math., 89 (1967), 22-42.

[21] N.V. TRUNG: Maximun number of independent elements and dimension of prime divisors in completion of local ring, J. Algebra, 93 (1985), 418-438.

[22] G. VALLA: Elementi independenti rispetto ad un ideale, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 44 (1970), 339-354.

[23] ——: Remarks on generalized analytic independence, Math. Proc. Cambrige Philos. Soc., 85(1979), 281-289.

[24] O. ZARISKI, P. SAMUEL: "Commutative Algebra", Vol. II, Springer, New York, 1975.