Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGER NO ESPAÇO N-DIMENSIONAL

por

DANUSA DE LARA BONOTTO

Porto Alegre, dezembro de 2000

Dissertação submetida por DANUSA DE LARA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dra. Vanilde Bisognin

Banca Examinadora:
Dra. Eleni Bisognin
Dra. Sílvia Regina Costa Lopes
Dr. Ruy Coimbra Charão

Data de Defesa: 11 de dezembro de 2000.

Agradecimentos

Ao Deus eterno, o criador de todas as coisas que nos dá o fôlego de vida.

Com carinho, a minha orientadora Vanilde Bisognin, pela paciência, estímulo, confiança e apoio dispensados alo longo desse período.

A professora Eleni Bisognin pelos ensinamentos, incentivo e amizade desde o início do curso.

Ao meu esposo Sérgio, por todo amor, carinho, companheirismo e compreensão.

A minha família, em especial a minha mãe Ondina que com grande luta e amor me ajudaram a trilhar o caminho até aqui.

Aos colegas, Carmen, Marcio e Vera, pela agradável convivência com quem pude compartilhar cada etapa do curso.

A Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI/Campus Santiago), em especial aos colegas do curso de Matemática, pelo apoio e confiança no meu trabalho.

Ao Centro Universitário Franciscano e professores do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS que oportunizaram a realização do convênio interinstitucional.

Um agradecimento especial à CAPES e FAPERGS que apoiaram financeiramente a realização deste curso.

Aos colegas de trabalho, pelo estímulo compreensão.

Resumo

Consideramos o problema de Cauchy associado à equação de Benjamin-Bona-Mahony em R^n, $1 \leq n \leq 3$ com dissipação do tipo Burger, da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + B.\nabla u + \varphi(u).\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ é constante, B é um vetor constante de R^n, φ é uma função vetorial de variável real u, Δ é o operador Laplaciano n-dimensional e ∇ é o operador Gradiente n-dimensional. Provamos resultados de existência, unicidade e dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Também, obtemos o decaimento da solução nas normas de $L^2(R^n)$ e $H^1(R^n)$ para $1 \leq n \leq 3$.

Abstract

Let's consider the Cauchy's problem associated to the Benjamin-Bona-Mahony equation in R^n, $1 \leq n \leq 3$ with a burger dissipation, in the way

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + B.\nabla u + \varphi(u).\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \end{cases}$$

where $\alpha > 0$ is a constant, B$\in R^n$ is a constant vector, φ is a vector valued function of the real variable u, Δ is the n-dimensional Laplace operator, ∇ is the n-dimensional gradient operator. We prove the existence, uniquiness and continuous dependence of the solution.We analyse the norm decay of the solutions in L$^2(R^n)$ and $H^1(R^n)$ 1$\leq n \leq 3$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho fazemos uma análise do problema de Cauchy e do comportamento assintótico da solução da equação dispersiva e dissipativa do tipo Benjamin-Bona-Mahony-Burguer, da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + B.\nabla u + \varphi(u).\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Quando $n = 1$ e $\alpha = 0$ a equação em (1.1) foi deduzida por Benjamin-Bona e Mahony [4] como um modelo que descreve de modo aproximado a propagação unidirecional de ondas de água em um canal cujo fundo é raso.

Este problema, no caso $1 \leq n \leq 3$, foi estudado por L. Zhang [15]. No capítulo 3 deste trabalho, provamos a existência e unicidade de solução global forte para o problema (1.1) e a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Para isso, estabelecemos primeiramente a existência de solução local de (1.1) via a teoria de semigrupos e o princípio de contração de Banach. A seguir, através de estimativas a priori, provamos a existência de solução global.

No capítulo 4 estudamos o comportamento assintótico da solução do problema (1.1). Nesta parte, seguimos o método descrito em L. Zhang [15] que consiste, basicamente, em obter uma boa estimativa para $|\hat{u}(y,t)|$, sendo $\hat{u}$ a transformada de Fourier de u. O método consiste em obter a forma integral da solução de (1.1), via transformada de Fourier, e depois estimar esta integral em R^n, dividindo a mesma em intervalos convenientes.

No caso $n = 1$, Amich, Bona e Schonbeck [4] estudaram o problema (1.1) e primeiramente consideraram o problema linear associado a (1.1) e obtiveram taxas de decaimento nas normas de $L^\infty(R)$ e $L^2(R)$. Para isso, a transformação de Cole-Hopf foi empregada. No caso $n > 1$ este método não funciona, pois é difícil estudar a transformação de Cole-Hopf em funções mais complexas. Nesse caso ($n > 1$), estudamos o decaimento da solução seguindo a técnica de separação de Fourier para estimar a solução do problema não linear, nas normas de $L^2(R^n)$ e $H^1(R^n)$, para $1 \leq n \leq 3$. Estes resultados obtidos por L. Zhang [15] incluem aqueles obtidos em [4] para o caso $n = 1$. Assim o trabalho L. Zhang [15] generaliza o trabalho de [4] para o caso $1 \leq n \leq 3$ e fornece outra demonstração para o caso $n = 1$.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no capítulo 2 apresentamos as definições e os resultados básicos que utilizamos nos capítulos subseqüentes; no capítulo 3 estudamos a existência e unicidade de solução e provamos que o problema é bem posto em relação ao dado inicial; no capítulo 4 obtemos taxas de decaimento da solução para o problema (1.1).

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste Capítulo apresentamos os resultados básicos que são utilizados nos capítulos subseqüentes. Algumas demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados bem conhecidos, mas em cada caso, mencionamos alguma referência.

As proposições a seguir fornecem desigualdades que serão necessárias nos capítulos 3 e 4.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Gronwall generalizada). *Seja $g(t) \geq 0$, $h(t) \geq 0$ tal que*

$$g(t) \leq C + M\,(1+t)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t g(s)h(s)ds, \quad 0 \leq t < \infty,$$

onde $C \geq 0$ e $M \geq 0$ são constantes e $h(t)$ satisfaz

$$\int_0^\infty h(t)dt < \infty.$$

Então

$$g(t) \leq \left[C + M\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\right] \exp\left[\int_0^\infty h(t)dt\right], \quad 0 \leq t < \infty.$$

Demonstração: Ver referência [15].

Proposição 2.2 (Desigualdade de Young). *Sejam a, b números reais não negativos. Então:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sempre que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *com* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver referência [1].

Definição 2.1 *Sejam $p \in R$ com $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto do R^n, definimos:*

i) $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to R / f$ *é mensurável e* $|f|^p$ *é integrável à Lebesgue* $\}$.

Denota-se por :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

a norma de f em $L^p(\Omega)$.

Quando $p = 2$ usamos $\|f\|_{L^2} = \|f\|$.

Observamos que $L^p(\Omega)$, na verdade, é formado por classes de equivalência, onde duas funções estão na mensma classe se forem iguais quase sempre.

ii) $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to R$ *,f é mensurável e tal que existe* $C > 0$ *com* $|f(x)| \leq C$ *quase sempre em* $\Omega\}$.

Denota-se por :

$$\|f\|_\infty = \sup ess\, |f| = \inf \{C / \, |f(x)| \leq C \quad q.s\, em \quad \Omega\}$$

a norma de f em $L^\infty(\Omega)$.

Tem-se que $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.3 (Desigualdade de Hölder). *Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então $uv \in L^1$ e tem-se*

$$\int |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Demonstração: Ver referência [1].

Proposição 2.4 (Desigualdade de Minkowski). *Se $u, v \in L^p$ então*

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver referência [1].

Proposição 2.5 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). *Para todo $p, q, r \in [1, \infty]$ e para todo número natural m e k, existem constantes $\alpha \in [0, 1]$ e $C > 0$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(R^n)$ tem-se*

$$\left\|D^K u\right\|_{L^p} \leq C \|D^m u\|_{L^r}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

onde

$$\frac{n}{p} - k = \alpha\left(\frac{n}{r} - m\right) + (1 - \alpha)\frac{n}{q}, \quad \frac{1}{p} \leq \frac{\alpha}{r} + \frac{(1 - \alpha)}{q},$$

e

$$\left\|D^k u\right\|_{L^p}^p = \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = k} \left\| \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_{L^p}^p.$$

Demonstração: Ver referência [9].

Definição 2.2 *O espaço de Schwartz (ou das funções rapidamente decrescentes) denotado por $S(R^n)$ é a coleção das funções $f : R^n \to C, C$ o corpo dos complexos, tais que:*

i) $f \in C^{\infty}(R^n)$.

ii) $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in R^n} \left|x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)\right| < \infty$, *para todo* $(\alpha, \beta) \in N \times N$.

Definição 2.3 *Seja* $f \in S(R^n)$. *A transformada de Fourier de* f *é a função dada por:*

$$F(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} f(x) e^{-ix.\xi} dx$$

onde $x = (x_1, ..., x_n), \xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *são vetores do* R^n *e* $x.\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ *é o produto interno usual em* R^n.

Proposição 2.6 *A transformada de Fourier de* $f \in L^1(R^n)$ *é uma função contínua e satisfaz:*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}.$$

Demonstração: Note que $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} |f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}$ para todo $\xi \in R^n$. A continuidade é consequência do Teorema da convergência dominada de Lebesgue.(Ver Teorema 2.3 neste capítulo).

Definição 2.4 *Se* $f, g \in L^1(R^n)$, *a convolução de* f *e* g *é a função dada por*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{R^n} f(x-y) g(y) dy.$$

Proposição 2.7 *Sejam* $f, g \in L^1(R^n)$. *Então* $(f * g)^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \xi \in R^n$.

Demonstração: Ver referência [10].

Proposição 2.8 *Suponha que* $f \in S(R^n)$ *então* $\hat{f} \in S(R^n)$ *e* $(D^{\alpha} f)^{\wedge}(\xi) = i^{\alpha} \xi^{\alpha} \hat{f}(\xi)$, $\xi \in R^n$.

Demonstração: Ver referência [10].

Proposição 2.9 *Seja* $f \in S(R^n)$. *Então vale a fórmula de inversão :*

$$F^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} f(\xi) e^{i\xi.x} d\xi$$

e as propriedades :

i) $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$.

ii) $\hat{\check{f}} = f = \check{\hat{f}}$.

Demonstração: Ver referência [10].

Proposição 2.10 (Identidade de Parseval). *Se* $f \in S(R^n)$ *então* $\|f\|_{L^2} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}$.

Demonstração: Ver referência [10].

Definição 2.5 *Seja* $s \in R,\ s \geq 0$. *Denotamos por* $H^s(R^n)$ *o espaço de Sobolev de ordem s*

$$H^s(R^n) = \left\{u \in S'(R^n) \quad / \quad J_S\hat{u} \in L^2(R^n)\right\}$$

onde $J_s(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, *com a norma :*

$$\|f\|_s^2 = \int_{R^n} \left(1 + |y|^2\right)^s \left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Definição 2.6 *Sejam V e H dois espaços de Hilbert, sendo V um subespaço de H. Diz-se que V está continuamente imerso em H quando:* $\|f\|_H \leq C\|f\|_V$ *para toda* $f \in V$, *sendo* $C > 0$ *constante, independente de* $f \in V$.

Notação: $V \hookrightarrow H$.

Teorema 2.1 (Teorema de imersões de Sobolev). *Seja* Ω *aberto do* R^n *e*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad para \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

onde $D^\alpha f$ *é a derivada no sentido das distribuiçõesde f.*

Com esta notação, temos as seguintes imersões:

1) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *se* $m.p < n$ *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

2) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ *se* $m.p = n$ *e* $q \in [2, \infty)$.

3) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$ *se* $m.p > n$.

Observe que $W^{m,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|f\|_{m,p}^{p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L^{p}}^{p}$$

é um espaço de Banach.

Demonstração: Ver referência [1].

Definição 2.7 *Seja* X *um espaço de Banach. Diz-se que uma aplicação* $S : R^{+} \to L(X)$ *é um semigrupo de operadores lineares limitados de* X *se:*

i) $S(0) = I$, *onde* I *éoperador identidade de* X.

ii) $S(t+s) = S(t)\, S(s)$, *para todo* $t, s \in R^{+}$.

Diz-se que o semigrupo é de clase C_0 se

iii) $\lim_{t \to 0_{+}} \|(S(t) - I)\, x\|_{X} = 0$ *para todo* $x \in X$.

Proposição 2.11 *Se* S *é semigrupo de classe* C_0 *então* $\|S(t)\|$ *é uma função limitada em todo intervalo limitado* $[0, T]$.

Demonstração: Ver referência [13].

Proposição 2.12 *Todo semigrupo de classe* C_0 *é fortemente contínuo, isto é, se* $t \in R^{+}$ *então* $\lim_{s \to t} S(s)\, x = S(t)\, x$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração: Ver referência [13]

Observe que, semigrupos de classe C_0 são também conhecidos por semigrupos fortemente contínuos.

Definição 2.8 *O operador $A : D(A) \to X$, definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X / \lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ \ existe \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \quad para \quad todo \quad x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 2.13 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Demonstração: Ver referência [13].

Teorema 2.2 (Teorema de Hille-Yosida). *Uma condição necessária e suficiente para que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X, X$ espaço de Banach, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 é que:*

i) A seja fechado e $\overline{D(A)} = X$;

ii) Existem constantes reais M e w tais que para $\lambda \in R$, $\lambda > w$, se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall \quad n \in N.$$

Neste caso $\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall \quad t \geq 0.$

Demonstração: Ver referência [13].

Teorema 2.3 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja (u_n) uma seqüência de funções integráveis em $\Omega \subset R^n, \Omega$ aberto, convergente quase sempre para uma* *função u. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo $n \in N$, então u é integrável e tem-se:*

$$\int u = \lim_{n \to \infty} \int u_n.$$

Demonstração: Ver referência [8].

Teorema 2.4 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja X um espaço métrico completo e $S : X \to X$ uma aplicação tal que $\|S(v_1) - S(v_2)\|_X \leq K \|v_1 - v_2\|_X$ para todo $v_1, v_2 \in X$ com $0 < K < 1$ então S tem um único ponto fixo, isto é existe $u \in X$ tal que $Su = u$.*

Demonstração: Ver referência [8].

Proposição 2.14 *Seja $H \in C^1(R)$,* $H(t) \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty H(t)\, dt < \infty \quad e \quad \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} H(t) \right| dt < \infty.$$

Então $H(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ então existem $M_1 = M_1(\varepsilon) > 0$ e $M_2 = M_2(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_{M_1}^\infty H(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \int_{M_2}^\infty \left| \frac{d}{dt} H(t) \right| dt < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Sejam t e $\bar{t} \geq M = \max\{M_1, M_2\}$ com $t \geq \bar{t}$. Por integração por partes obtemos:

$$\int_{\bar{t}}^t \left(s - \bar{t}\right) \frac{d}{ds} H\, ds = \left(t - \bar{t}\right) H(t) - \int_{\bar{t}}^t H(s)\, ds.$$

Daí

$$\left(t - \bar{t}\right) H(t) = \int_{\bar{t}}^t H(s)\, ds + \int_{\bar{t}}^t \left(s - \bar{t}\right) \frac{d}{ds} H\, ds.$$

Portanto

$$\left(t - \bar{t}\right) H(t) \leq \int_{\bar{t}}^t H(s)\, ds + \left(t - \bar{t}\right) \int_{\bar{t}}^t \left| \frac{d}{ds} H \right| ds.$$

Escolhendo $\tilde{t}$ tal que $t - \tilde{t} = \sqrt{\varepsilon}$ segue que

$$H(t) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_M^\infty H(s)\, ds + \int_M^\infty \left| \frac{d}{ds} H \right| ds \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{M_1}^\infty H(s)\, ds + \int_{M2}^\infty \left| \frac{d}{ds} H \right| ds.$$

Assim obtemos $H(t) \leq \sqrt{\varepsilon}$, como queríamos.

Capítulo 3

O problema de Cauchy

Introdução

Neste capítulo estudamos o problema de Cauchy associado à classe de equações dispersivas e dissipativas do tipo Benjamin-Bona-Mahony-Burguer em R^n, com $1 \leq n \leq 3$, isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + B.\nabla u + \varphi(u).\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $t \geq 0$, $x \in R^n$ $(1 \leq n \leq 3)$.

Assumimos que:

A função $\varphi \in C^1(R, R^n)$ e existe $\gamma \geq 1$, $\gamma \in Z$, e uma constante $C > 0$ tal que $\left|\varphi_{j(s)}\right| \leq C\,|s|^\gamma$ para $1 \leq j \leq n$, $B = (B_1, ..., B_n)$ é um vetor constante do R^n, $\alpha > 0$ e o dado inicial $u_0 \in H^2(R^n)$

Em (3.1) o operador $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ é o operador Laplaciano e $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ é o vetor gradiente.

O propósito deste capítulo é discutir a existência e unicidade de solução global para o problema de valor inicial (3.1) e a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial.

A existência e unicidade de solução local para o problema de valor inicial é estudado via a teoria de semigrupos e do princípio de contração de Banach. Usando uma estimativa a priori, obtida pelo método da energia, mostramos que a solução não explode em tempo finito. A existência global segue então via argumentos conhecidos.

Existência de solução local

Consideremos o problema (3.1) e vamos escrevê-lo na seguinte forma

$$\begin{cases} u_t - \alpha (1-\Delta)^{-1} \Delta u = -(1-\Delta)^{-1} [\varphi(u) . \nabla u + B . \nabla u] \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

em vista que $(I - \Delta) : H^2(R^n) \to L^2(R^n)$ é uma isometria.

Primeiramente vamos estudar certas propriededades do semigrupo associado ao problema linear:

$$\begin{cases} u_t - \alpha (1-\Delta)^{-1} \Delta u = 0, \quad \alpha > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) . \end{cases} \tag{3.3}$$

Seja $Q_\alpha = \alpha (1-\Delta)^{-1} \Delta$, onde Q_α é o operador

$$Q_\alpha : D(Q_\alpha) \subset L^2(R^n) \to L^2(R^n)$$

cujo domínio é dado por :

$$D(Q_\alpha) = \left\{ u \in H^2(R^n) \quad tal \quad que \quad \alpha (1-\Delta)^{-1} \Delta u \in L^2(R^n) \right\} .$$

Para $\alpha > 0$, $y \in R^n$ e $u_0 \in H^2(R^n)$, usando a transformada de Fourier em (3.3) vamos definir:

$$F_\alpha(t,y) = e^{-\frac{\alpha|y|^2 t}{1+|y|^2}} \tag{3.4}$$

$$E_\alpha(t)\,u_0 = (F_\alpha(t,y)\,\hat{u}_0)^\vee \tag{3.5}$$

Com esta notação temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Seja* $\alpha \in (0,\infty)$. *Então:*

i)$E_\alpha(t) \in \mathcal{L}(H^2(R^n), H^2(R^n))$, $\forall \quad t > 0$ *e satisfaz:*

$$\|E_\alpha(t)\,u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2, \quad \forall \quad u_0 \in H^2(R^n). \tag{3.6}$$

ii)A família $E_\alpha(t) : H^2(R^n) \to H^2(R^n)$ é um semigrupo de contrações classe C_0.

Demonstração: Vamos provar (i).

Se $u_0 \in H^2(R^n)$ temos:

$$\|E_\alpha(t)\,u_0\|_2^2 = \int_{R^n} \left(1+|y|^2\right)^2 \left|\widehat{E_\alpha(t)u_0}\right|^2 dy =$$

$$\int_{R^n} \left(1+|y|^2\right)^2 e^{-\frac{2\alpha|y|^2 t}{1+|y|^2}} \left|\widehat{u_0}(y)\right|^2 dy \leq \sup_t \sup_{|y|} \left(e^{-\frac{2\alpha|y|^2 t}{1+|y|^2}}\right) \|u_0\|_2^2.$$

Logo $E_\alpha(t)\,u_0 \in H^2(R^n)$ e

$$\|E_\alpha(t)\,u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2.$$

Vamos provar (ii). Tem-se que:

1)$E_\alpha(0)\,u_0 = (F_\alpha(0,y)\,\hat{u}_0)^\vee = u_0$

Logo $E_\alpha(0) = I$.

2)$E_\alpha(t)\,u_0 = \left(F_\alpha(t,y)\,\hat{u}_0\right)^\vee = F_\alpha(t,y)^\vee * u_0.$

Assim:

$$\begin{aligned}
E_\alpha(t)\,E_\alpha(s)\,u_0 &= F_\alpha(t,y)^\vee * E_\alpha(s)\,u_0 \\
&= F_\alpha(t,y)^\vee * F_\alpha(s,y)^\vee * u_0 \\
&= \left(F_\alpha(t,y)\,F_\alpha(s,y)\right)^\vee * u_0 \\
&= \left(F_\alpha(t+s,y)\right)^\vee * u_0 \\
&= \left(F_\alpha(t+s,y)\,\hat{u}_0\right)^\vee = E_\alpha(t+s)\,u_0.
\end{aligned}$$

3)$\|E_\alpha(t)\,u_0\|_2 = \left\|\left(F_\alpha(t,y)\,\hat{u}_0\right)^\vee\right\|_2 \leq \|u_0\|_2\,.$

Portanto para $t \geq 0$, $y \in R^n$ e $\alpha > 0$, temos $\|E_\alpha(t)\|_2 \leq 1$.

Assim temos que $E_\alpha(t)$ é semigrupo de contrações, agora vamos mostrar que é de classe C_0.

Para isto note que a aplicação $t \in (0,\infty) \to E_\alpha(t)\,u_0$ é contínua de $R^+ \to H^2(R^n)$.

De fato, para obtermos a continuidade em $t = t_0$, vamos supor primeiramente $t > t_0$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(t)\,u_0 - E_\alpha(t_0)\,u_0\|_2^2 &= \int_{R^n} \left(1+|y|^2\right)^2 |F_\alpha(t,y) - F_\alpha(t_0,y)|^2\,|\hat{u}_0(y)|^2\,dy \\
&= \int_{R^n} \left(1+|y|^2\right)^2 |F_\alpha(t_0-t,y) - 1|^2\,|F_\alpha(t,y)|^2\,|\hat{u}_0(y)|^2\,dy.
\end{aligned}$$

Note que quando $t \to t_0^+$, o termo $|F_\alpha(t_0-t,y) - 1| \to 0$, para cada $y \in R^n$.

Logo

$$\left(1+|y|^2\right)^2 |F_\alpha(t_0-t,y) - 1|^2\,|F_\alpha(t,y)|^2\,|\hat{u}_0(y)|^2 \to 0 \tag{3.7}$$

quando $t \to t_0^+$.

Do fato de $|F_\alpha(t,y)| < 1$ segue que:

$$\begin{aligned} & \left(1+|y|^2\right)^2 |F_\alpha(t_0-t,y)-1|^2 |F_\alpha(t,y)|^2 |\hat{u}_0(y)|^2 \\ \leq \; & C\left(1+|y|^2\right)^2 |\hat{u}_0(y)|^2, \quad C>0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim temos de (3.7) e (3.8) e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver teorema 2.3 do capítulo 2) que:

$$\int_{R^n} \left(1+|y|^2\right)^2 |F_\alpha(t_0-t,y)-1|^2 |F_\alpha(t,y)|^2 |\hat{u}_0(y)|^2 \, dy \to 0$$

e daí $\|E_\alpha(t)\,u_0 - E_\alpha(t_0)\,u_0\|_2 \to 0$ quando $t \to t_0^+$.

A continuidade à esquerda é feita de maneira análoga.

Logo $E_\alpha(t)$ é contínua. Fazendo $t_0 = 0$ obtemos que $E_\alpha(t)$ é de classe C_0 pois $\lim_{t\to 0} \|E_\alpha(t)\,u_0 - E_\alpha(t_0)\,u_0\|_2 = 0$.

Como consequência tem-se:

Corolário 3.1 *Seja $u_0 \in D(Q_\alpha) \subset H^2(R^n)$ então:*

$$u(x,t) = E_\alpha(t)\,u_0 \in C([0,\infty), D(Q_\alpha)) \cap C^1\left([0,\infty), H^2(R^n)\right)$$

é a única solução do Problema de valor inicial (3.3).

Agora vamos considerar o problema não linear (3.2) e vamos mostrar a existência e unicidade de solução local em $H^2(R^n)$.

Se $u(x,t)$ é solução de (3.3) então podemos verificar facilmente $u(x,t)$ satisfaz a equação integral associada, isto é:

$$u(x,t) = E_\alpha(t)\,u_0 - \int_0^t E_\alpha(t-s)\,(1-\Delta)^{-1}\left[\varphi(u).\nabla u + B.\nabla u\right] ds. \tag{3.9}$$

Vamos provar que a equação integral (3.9) possui uma única solução local em uma classe conveniente de funções.

Teorema 3.2 *Seja* $u_0 \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$. *Então existe* $T_0 > 0$ *e uma única função* $u \in C([0,T_0], H^2(R^n))$ *solução da equação integral (3.9).*

Demonstração: Fixamos $R > 0$ e definimos o espaço vetorial normado

$$X_R(T) = \left\{v \in C\left([0,T], H^2(R^n)\right); \sup \|v(t) - E_\alpha(t) u_0\|_2 \leq R \quad e \quad v(x,0) = u_0(x)\right\}$$

onde a norma é dada por:

$$\|v\|_{X_R(T)} = \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_2 .$$

Note que $X_R(T)$ com esta norma é um espaço métrico completo.

Seja $v \in X_R(T)$ e definimos a função $P : X_R(T) \rightarrow C([0,T], H^2(R^n))$ dada por:

$$(Pv)(x,t) = E_\alpha(t) u_0(x) - \int_0^t E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}[\varphi(v).\nabla v + B.\nabla v]\, ds, \tag{3.10}$$

$\forall t \in [0,T]$.

Vamos mostrar que P está bem definida; $P : X_R(T) \rightarrow X_R(T)$ e P é uma contração se T é escolhido suficientemente pequeno. A seguir usamos o teorema do ponto fixo de Banach (ver teorema 2.4 do capítulo 2) para obter a existência de solução para (3.9).

Seja

$$G(v(x,s)) = E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}[\varphi(v).\nabla v + B.\nabla v],$$

$v \in X_R(T)$.

Tem-se que:

1º) $G(v(x,s)) \in H^2(R^n)$ se $s \in [0,t]$, $0 \leq t \leq T$ e $v \in X_R(T)$.

De fato,(usando a proposição 2.10 do capítulo 2) sabe-se que:

$$\|(1-\Delta)v\| = \|v\|_2 . \tag{3.11}$$

Logo de (3.6) e (3.11) obtemos:

$$\|G(v(x,s))\|_2 \leq \|\varphi(v).\nabla v + B.\nabla v\| \leq \|\varphi(v).\nabla v\| + \|B.\nabla v\| .$$

Mas

$$\|\varphi(v).\nabla v\|^2 = \int_{R^n} |\varphi(v).\nabla v|^2\, dx \leq \|v\|_\infty^{2\gamma} \|\nabla v\|^2 .$$

Do fato de $H^2(R^n) \hookrightarrow L^\infty(R^n)$ se $n < 4$, (ver teorema 2.1 do capítulo 2) tem-se que:

$$\|\varphi(v).\nabla v\| \leq \|v\|_2^\gamma \|v\|_2 \leq C\|v\|_2^{\gamma+1}, \quad C > 0 \tag{3.12}$$

e

$$\|B.\nabla v\| \leq |B|\, \|v\|_2 . \tag{3.13}$$

Portanto

$$\|G(v(x,s))\|_2 \leq C\|v\|_2^{\gamma+1} + |B|\, \|v\|_2 .$$

$2^{\underline{o}}$) A função $G(v(x,s))$ é contínua em s com valores em $H^2(R^n)$ para

$0 \leq s \leq t$ e $t \in [0,T]$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ tal que $s+\varepsilon \in [0,t]$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \|G(v(s+\varepsilon)) - G(v(s))\|_2 &\leq \|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s+\varepsilon) - \varphi(v(s)).\nabla v(s)\| \\ &+ \|E_\alpha(\varepsilon)B.\nabla v(s+\varepsilon) - B.\nabla v(s)\| . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Vamos mostrar que cada termo de (3.14) tende a zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

De fato:

Analisando o 1º termo do 2º membro de (3.14) .

$$\|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s+\varepsilon) - \varphi(v(s)).\nabla v(s)\| \leq$$

$$\|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s+\varepsilon) - E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s)\| +$$

$$\|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s) - \varphi(v(s)).\nabla v(s)\|.$$

De (3.6) segue que:

$$\begin{aligned}
&\|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s+\varepsilon) - \varphi(v(s)).\nabla v(s)\| \leq \\
&\|\varphi(v(s+\varepsilon)).(\nabla v(s+\varepsilon) - \nabla v(s))\| + \\
&\|[E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)) - \varphi(v(s))].\nabla v(s)\|. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Vamos analisar o 1º termo do 2º membro de (3.15).Tem-se:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(v(s+\varepsilon)).(\nabla v(s+\varepsilon) - \nabla v(s))\|^2 &= \int_{R^n} |\varphi(v(s+\varepsilon))|^2 |\nabla(v(s+\varepsilon) - v(s))|^2 dx \\
&\leq \|v(s+\varepsilon)\|_\infty^{2\gamma} \|\nabla(v(s+\varepsilon) - v(s))\|^2.
\end{aligned}$$

Do fato de $H^2(R^n) \hookrightarrow L^\infty(R^n)$, se $n < 4$ segue que:

$$\|\varphi(v(s+\varepsilon)).(\nabla v(s+\varepsilon) - \nabla v(s))\| \leq C\|v(s+\varepsilon)\|_2^\gamma \|v(s+\varepsilon) - v(s)\|_2, \quad C > 0. \quad (3.16)$$

Como $v \in X_R(T)$ tem-se que o 1º termo do 2º membro de (3.15) tende a zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

Agora vamos analisar o $2^{\underline{o}}$ termo do $2^{\underline{o}}$ membro de (3.15).

Usando (3.6) obtemos:

$$\begin{aligned}\left\|E_\alpha(\varepsilon)\varphi(v(s+\varepsilon)).\nabla v(s)-\varphi(v(s)).\nabla v(s)\right\| &\leq \left\|(\varphi(v(s+\varepsilon))-\varphi(v(s))).\nabla v(s)\right\|+\\ &\quad \left\|(E_\alpha(\varepsilon)-1)\varphi(v(s)).\nabla v(s)\right\|.\end{aligned}$$

Note que:

$$\left\|(\varphi(v(s+\varepsilon))-\varphi(v(s))).\nabla v(s)\right\|^2=\sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}\left|\varphi_j(v(s+\varepsilon))-\varphi_j(v(s))\right|^2\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 dx.$$

Do teorema do valor médio para derivadas, segue que para cada j fixado e $\tau,\tau_1\in R$ temos que existe τ_j^* tal que

$$\left|\varphi_j(\tau)-\varphi_j(\tau_1)\right|=\left|\varphi_j'(\tau^*)\right|\left|\tau-\tau_1\right|,$$

onde $\tau^*=\tau_j^*$ e $\tau_j^*=\theta_j\tau+(1-\theta_j)\tau_1$; $\theta_j\in(0,1)$. Logo

$$\left|\varphi(\tau)-\varphi(\tau_1)\right|^2=\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j(\tau)-\varphi_j(\tau_1)\right|^2=\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j'(\tau^*)(\tau-\tau_1)\right|^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left\|(\varphi(v(s+\varepsilon))-\varphi(v(s))).\nabla v(s)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}\left|\varphi_j(v(s+\varepsilon))-\varphi_j(v(s))\right|^2\left|\frac{\partial v(s)}{\partial x_j}\right|^2 dx\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}\left|\varphi_j'\left(w_j^*\right)\right|^2\left|v(s+\varepsilon)-v(s)\right|^2\left|\frac{\partial v(s)}{\partial x_j}\right|^2 dx\end{aligned}$$

onde $w_j^*=\theta_j v(x,s+\varepsilon)+(1-\theta_j)v(x,s)$ e $\theta_j\in(0,1)$; $j=1,2,3$.

Para $v\in X_R(T)$ temos:

$$\left|w_j^*(x,t)\right|\leq\|\theta_j v\|_{X_R(T)}+\|(1-\theta_j)v\|_{X_R(T)}\leq C_j$$

onde $C_j = Cj\,(R, T, \|u_0\|_2)$.

Sendo $\varphi \in C^1(R, R^n)$ tem-se:

$$\left|\varphi_j'\left(w_j^*(x,t)\right)\right| \leq \sup_{t\in[0T],x\in R^n} \left|\varphi_j'\left(w_j^*(x,t)\right)\right| \leq \tilde{C}_j$$

onde $\tilde{C}_j = \tilde{C}_j\,(R, T, \|u_0\|_2)$.

Logo

$$\begin{aligned} \|(\varphi(v(s+\varepsilon)) - \varphi(v(s))) . \nabla v(s)\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j \int_{R^n} |v(s+\varepsilon) - v(s)|^2 \left|\frac{\partial v(s)}{\partial x_j}\right|^2 dx \\ &\leq \tilde{C}\, \|v(s+\varepsilon) - v(s)\|_\infty^2 \|\nabla v(s)\|^2, \end{aligned}$$

$\tilde{C} = \max C_j$.

Tem-se então:

$$\begin{gathered} \|E_\alpha(\varepsilon)\,\varphi(v(s+\varepsilon)) . \nabla v(s) - \varphi(v(s)) . \nabla v(s)\| \leq \\ \tilde{C}\, \|v(s+\varepsilon) - v(s)\|_2 \|v\|_2 + \|(E_\alpha(\varepsilon) - 1)\,\varphi(v(s)) . \nabla v(s)\| . \end{gathered} \tag{3.17}$$

Como $v \in X_R(T)$ e E_α é semigrupo de contrações de classe C_0 tem-se que (3.17) tende a zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

Agora vamos analisar o $2^{\underline{o}}$ termo do $2^{\underline{o}}$ membro de (3.14). Tem-se:

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(\varepsilon)\, B . \nabla v(s+\varepsilon) - B . \nabla v(s)\| &\leq |B|\, \|E_\alpha(\varepsilon)\,(\nabla v(s+\varepsilon) - \nabla v(s))\| + \\ &\quad \|(E_\alpha(\varepsilon) - 1) . \nabla v(s)\| . \end{aligned}$$

Usando (3.6) obtemos:

$$\|E_\alpha(\varepsilon)\, B . \nabla v(s+\varepsilon) - B . \nabla v(s)\| \leq |B|\, \|v(s+\varepsilon) - v(s)\|_2 + \|(E_\alpha(\varepsilon) - 1) . \nabla v(s)\| . \tag{3.18}$$

Como $v \in X_R(T)$ e E_α é semigrupo de contrações, tem-se que (3.18) tende a zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

Logo tem-se que (3.14) tende a zero quando $\varepsilon \to 0^+$ e portanto $G(v(x,s))$ é contínua à direita em s com valores em $H^2(R^n)$.

A continuidade à esquerda segue de maneira análoga.

$3^{\underline{o}}$) $(Pv)(x,t) \in C([0,T], H^2(R^n))$, para todo $v \in X_R(T)$. Com efeito,

$$(Pv)(x,t) = E_\alpha(t) u_0 - \int_0^t G(v(x,s))\, ds$$

é contínua pois é composta de funções contínuas.

$4^{\underline{o}}$) Vamos mostrar que existe $T_0 > 0$ tal que $P : X_R(T_0) \to X_R(T_0)$ e que P é contração se T_0 é escolhido suficientemente pequeno.

Tem-se para $v \in X_R(T)$:

$$\|Pv(t) - E_\alpha(t) u_0\|_2 \leq \int_0^t \|\varphi(v).\nabla v + B.\nabla v\|_2\, ds.$$

Usando (3.12) e (3.13) vem que:

$$\|Pv(t) - E_\alpha(t) u_0\|_2 \leq \left(C \|v\|_{X_R(T)}^{\gamma+1} + |B| \|v\|_{X_R(T)}\right) T.$$

Mas

$$\|v\|_2 \leq \|v - E_\alpha(t) u_0\|_2 + \|u_0\|_2 .$$

Então

$$\|v\|_{X_R(T)} \leq R + \|u_0\|_2 .$$

Portanto

$$\|Pv(t) - E_\alpha(t)\,u_0\|_2 \le KT \tag{3.19}$$

onde $K = K(\gamma, R, \|u_0\|_2)$, $K > 0$. Assim, se$T_0 < \left(\frac{1}{K}\right)$ então $Pv \in X_R(T)$.

Se $v, w \in X_R(T)$ então para $t \in [0,T]$ tem-se:

$$\|Pv(t) - Pw(t)\|_2 \le \int_0^t (\|\varphi(v).\nabla v - \varphi(w).\nabla w\| + \|B.\nabla v - B.\nabla w\|)\,ds.$$

Note que:

$$\|\varphi(v).\nabla v - \varphi(w).\nabla w\| \le \|\varphi(v).(\nabla v - \nabla w)\| + \|(\varphi(v) - \varphi(w)).\nabla w\|.$$

Usando (3.12) e (3.17) segue que:

$$\|\varphi(v).\nabla v - \varphi(w).\nabla w\| \le C(\|v\|_2^\gamma \|v-w\|_2 + \|v-w\|_2\|w\|_2), \quad C > 0.$$

Logo

$$\|Pv(t) - Pw(t)\|_2 \le \int_0^t (C\|v\|_2^\gamma + C\|w\|_2 + |B|)\,\|v-w\|_2\,ds. \tag{3.20}$$

$$\|Pv(t) - Pw(t)\|_2 \le K_1\|v-w\|_{X_R(T)}T, \tag{3.21}$$

$K_1 = K_1(\gamma, R, \|u_0\|_2)$.

Tomando $T_0 < \min\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K_1}\right)$ tem-se de (3.19) e (3.21) que $P : X_R(T_0) \to X_R(T_0)$ e P é contração. Do princípio de contração de Banach existe uma função $u \in X_R(T_0)$, ponto fixo de P, isto é, solução da equação integral (3.9).

Vamos mostrar a unicidade da solução.

Lema 3.1 *Sejam $u, v \in C([0,T_0], H^2(R^n))$ soluções da equação integral (3.9) tal que $u(x,0) = v(x,0) = u_0(x)$, com $u_0(x) \in H^2(R^n)$ .Então $u \equiv v \quad \forall \quad t \in [0,T_0]$.*

Demonstração: Para $t \in [0, T_0]$ tem-se de (3.21) que:

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \leq K \int_0^t \|u - v\|_2 ;$$

$K = K(\gamma, R, \|u_0\|_2, T_0,)$, $\quad K > 0$.

Da desigualdade de Gronwall (ver proposição 2.1 do capítulo 2), segue que $u \equiv v$.

Vamos mostrar que a solução local da equação integral (3.9) é solução do problema de valor inicial (3.2).

Teorema 3.3 *Seja $u_0 \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$. Então a função u obtida no teorema 3.2 é tal que existe $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T_0], H^2(R^n))$ e u é a única solução do problema de valor inicial (3.2).*

Demonstração: Tem-se que $E_\alpha(t)$ é semigrupo de contrações de classe C_0 e Q_α é o seu gerador, assim para $u_0 \in D(Q_\alpha) \subset H^2(R^n)$ segue que:

$$\frac{d}{dt} E_\alpha(t) u_0 = Q_\alpha E_\alpha(t) u_0, \tag{3.22}$$

$t \in [0, \infty)$.

Vamos definir para $0 \leq t \leq T_0$

$$v(t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}[\nabla u.\varphi(u) + B.\nabla u]\, ds.$$

Para $h > 0$ tal que $t + h \in [0, T_0]$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{E_\alpha(h)}{h} \int_t^{t+h} E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}(\nabla u.\varphi(u) + B.\nabla u)\, ds + \\ &\left(\frac{E_\alpha(h) - 1}{h}\right) \int_0^t E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}(\nabla u.\varphi(u) + B.\nabla u)\, ds. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Vamos analisar o $1^{\underline{o}}$ elemento do $2^{\underline{o}}$ membro de (3.23). Do teorema 3.2 temos que o integrando é função contínua em s com valores em $H^2(R^n)$, portanto do teorema do valor médio para integrais segue que:

$$\begin{aligned}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= E_\alpha(h)\,E_\alpha(t-t^*)\,(1-\Delta)^{-1}\left(\nabla u(t^*).\varphi(u(t^*))+B.\nabla u(t^*)\right)+\\ &\left(\frac{E_\alpha(h)-1}{h}\right)\int_0^t E_\alpha(t-s)\,(1-\Delta)^{-1}\left(\nabla u.\varphi(u)+B.\nabla u\right)ds,\end{aligned}$$

para algum $t^* \in (t, t+h)$.

Logo

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=(1-\Delta)^{-1}\left(\nabla u(t).\varphi(u(t))+B.\nabla u(t)\right)+Q_\alpha\int_0^t G(u(s))\,ds. \quad (3.24)$$

Desse modo v é derivável à direita.

De modo análogo mostra-se que v é derivável à esquerda.

Portanto para $0 \le t \le T_0$ tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=(1-\Delta)^{-1}\left(\nabla u.\varphi(u)+B.\nabla u\right)+Q_\alpha\int_0^t G(u(s))\,ds.$$

Note que $u(x,t)=E_\alpha(t)\,u_0-v(t)$, então de (3.22) e (3.24) segue que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(E_\alpha(t)\,u_0\right)-\frac{\partial}{\partial t}v(t).$$

Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha(1-\Delta)^{-1}\Delta\left(E_\alpha(t)\,u_0-\int_0^t G(u(s))\,ds\right)-(1-\Delta)^{-1}\left(\nabla u.\varphi(u)+B.\nabla u\right).$$

Logo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + \nabla u . \varphi(u) + B . \nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) . \end{cases}$$

Portanto a função u definida no teorema 3.2 satisfaz o problema de valor inicial (3.2) e além disso $\frac{\partial u}{\partial t}$ é função contínua, disto segue que $u \in C^1([0, T_0], H^2(R^n))$.

Unicidade: Se consideramos v outra solução do Problema de valor inicial 2.2; $v \in C^1([0, T_0], H^2(R^n$ com $v(x, 0) = u_0(x)$, tem-se que v satisfaz a equação integral (3.9) e do lema 3.1 segue que $u \equiv v$.

Existência de solução global e dependência contínua

Nesta seção vamos estabelecer a existência e unicidade de solução global para o problema de Cauchy (3.2). Além disso estabeleceremos a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial.

Lema 3.2 *Seja* $u_0 \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$. *Então* $\|u(t)\|_1 \leq \|u_0\|_1$ *para todo* $t \geq 0$ *onde* u *exista.*

Demonstração: Multiplicando a equação em (3.1) por $2u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{R^n} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + 2\alpha \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx = 0. \tag{3.25}$$

Integrando em t tem-se:

$$\|u(t)\|_1^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds = \|u_0\|_1^2.$$

Portanto $\|u(t)\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2$.

Teorema 3.4 *Seja $u_0 \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$. Então para cada $T > 0$ existe uma única função $u \in C^1(0,T,H^2(R^n))$ e é solução global do problema de valor inicial (3.2).*

Demonstração: Multiplicando a equação em (3.1) por $-2\Delta u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + 2\alpha\|\Delta u(t)\|^2 = 2\int_{R^n} \Delta u \varphi(u) . \nabla u dx. \tag{3.26}$$

Da desigualdade de Hölder vem que:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + \alpha\|\Delta u(t)\|^2 \leq \alpha^{-1}\int_{R^n} |\varphi(u) . \nabla u|^2 dx. \tag{3.27}$$

Vamos analisar o termo $\int_{R^n} |\varphi(u) . \nabla u|^2 dx$, quando $n = 1, 2, 3$.

Se $n = 1$ tem-se que $H^1(R) \hookrightarrow L^\infty(R)$, logo

$$\int_R |\varphi(u) . \nabla u|^2 dx \leq \|u\|_\infty^{2\gamma} \int_R |\nabla u|^2 dx \leq \|u\|_1^{2\gamma}\|\nabla u\|^2.$$

Do lema 3.2 tem-se que $\|u(t)\|_1 \leq \|u_0\|_1$, assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + \alpha\|\Delta u(t)\|^2 \leq \alpha^{-1}\|u_0\|_1^{2\gamma}\|\nabla u(t)\|^2.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u(t)\|_2^2, \quad C > 0. \tag{3.28}$$

Adicionando (3.25) e (3.28) vem que:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + 2\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u(t)\|_2^2$$

Do teorema de Parseval obtém-se que:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 + 2\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 &= \int_{R^n}\left(1 + 2|\xi|^2 + |\xi|^4\right)|\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &= \|u(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

logo

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_2^2\right) \leq C\,\|u(t)\|_2^2 \quad C > 0. \tag{3.30}$$

Integrando de 0 a t obtemos:

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + C\int_0^t \|u(s)\|_2^2\,ds$$

para $0 \leq t \leq T$.

Da desigualdade de Gronwall segue que:

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2\,e^{CT}. \tag{3.31}$$

para $0 \leq t \leq T$, $\quad C > 0$ e $C = C(\gamma, \|u_0\|_1)$.

Se $n = 2$, usando a desigualdade de Hölder com $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ tem-se que:

$$\int_{R^2} |\varphi(u)\,.\nabla u|^2\,dx \leq \|\varphi(u)\|_{L^4}\,\|\nabla u\|_{L^4}.$$

Usando a desigualdade $a.b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ para $a, b \in R$ e a, b positivos obtemos:

$$\int_{R^2} |\varphi(u)\,.\nabla u|^2\,dx \leq C\,\|u\|_{L^{4\gamma}}^{2\gamma} + C\,\|\nabla u\|_{L^4}^2$$

Do teorema de imersão de Sobolev temos $H^1(R^2) \hookrightarrow L^s(R^2)$ se $s \in [2, \infty)$, daí tomando $s = 4\gamma\,(1 \leq \gamma < \infty)$ obtemos:

$$\int_{R^2} |\varphi(u)\,.\nabla u|^2\,dx \leq C\,\|u\|_1^{2\gamma} + C\,\|\nabla u\|_1^2$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + \alpha\,\|\Delta u(t)\|^2 \quad &\leq \quad C\,\|u_0\|_1^{2\gamma} + \\ &\quad +C\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right).\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u_0\|_1^{2\gamma} + C\|u(t)\|_2^2. \tag{3.32}$$

Adicionando (3.25) e (3.32) vem que:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + 2\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u_0\|_1^{2\gamma} + C\|u(t)\|_2^2. \tag{3.33}$$

De (3.29) e da desigualdade de Gronwall obtemos:

$$\|u(t)\|_2^2 \leq Ke^{CT},$$

para $0 \leq t \leq T, \quad K > 0 \quad e \quad K = K(\|u_0\|_2, \gamma, T)$.

Se $n = 3$, usando a desigualdade de Holder para $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ tem-se:

$$\int_{R^3} |\varphi(u).\nabla u|^2 dx \leq \|\varphi(u)\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6} \leq C\left(\|\varphi(u)\|_{L^3}^2 + \|\nabla u\|_{L^6}^2\right).$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + \alpha\|\Delta u(t)\|^2 \leq C\left(\|u(t)\|_{L^{3\gamma}}^{2\gamma} + \|\nabla u(t)\|_{L^6}^2\right).$$

Do teorema de imersão de Sobolev $H^1(R^3) \hookrightarrow L^q(R^3)$ com $q = 6\,(\gamma = 2)$. Usando o lema 3.2 obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u_0\|_1^4 + C\|u(t)\|_2^2. \tag{3.34}$$

Adicionando (3.34) e (3.25) vem que

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + 2\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) \leq C\|u_0\|_1^4 + C\|u(t)\|_2^2.$$

De (3.29) e da desigualdade de Gronwall segue que:

$$\|u(t)\|_2^2 \leq Ke^{CT} \tag{3.35}$$

para $0 \leq t \leq T, \quad K > 0 \quad e \quad K = K\left(\|u_0\|_2, \gamma, T\right).$

Portanto para $n = 1, 2, 3$ tem-se que $\|u(t)\|_2$ é limitada sobre t-intervalos limitados. O prolongamento da solução segue via argumentos conhecidos e tem-se que $u \in C^1\left(0, T, H^2\left(R^n\right)\right)$.

Unicidade: Suponha que $v \in C^1\left(0, T, H^2\left(R^n\right)\right)$, $1 \leq n \leq 3$ é outra solução global de (3.2) tal que $v(x, 0) = u_0(x)$.

Seja $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Então w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w_t - \alpha \Delta w + B.\nabla w + \varphi(u).\nabla u - \varphi(v).\nabla v = 0 \\ w(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Tem-se que w satisfaz a equação integral:

$$w(x, t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}\left[\varphi(v).\nabla v + B.\nabla v - \varphi(u).\nabla u - B.\nabla u\right] ds.$$

Logo de (3.6) e (3.11) tem-se:

$$\|w(x, t)\|_2 \leq \int_0^t \left(\|\varphi(v).\nabla v - \varphi(u).\nabla u\| + \|B.\nabla v - B.\nabla u\|\right) ds.$$

De (3.12) e (3.17) segue que:

$$\begin{aligned} \|\varphi(v).\nabla v - \varphi(u).\nabla u\| &\leq \|\varphi(v).\nabla(u-v)\| + \|(\varphi(v) - \varphi(u)).\nabla u\| \\ &\leq C\|v\|_2^\gamma \|w\|_2 + \tilde{C}\|w\|_2 \|u\|_2 \\ &\leq \left(C\|v\|_2^\gamma + \tilde{C}\|u\|_2\right)\|w\|_2. \end{aligned}$$

Logo

$$\|w(x, t)\|_2 \leq C \int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds,$$

onde $C = C\left(\gamma, T, \|u_0\|_2\right)$.

Da desigualdade de Gronwall segue que $w = 0$ e portanto $u \equiv v$.

Vamos mostrar a dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais.

Teorema 3.5 *Sejam u_0^m e $u_0 \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$ e $u \in C^1(0,T,H^2(R^n))$, $u^m \in C^1(0,T,H^2(R^n))$ soluções de (??) e de*

$$\begin{cases} u_t^m - \Delta u_t^m - \alpha \Delta u^m + B.\nabla u^m + \varphi(u^m).\nabla u^m = 0 \\ u^m(x,0) = u_0^m(x), \end{cases}$$

$m \in Z$ e $m \geq 0$.

Se $u_0^m \to u_0$ em $H^2(R^n)$ então $u^m \to u$ em $C(0,T,H^2(R^n))$.

Demonstração: Seja $w(x,t) = u^m(x,t) - u(x,t)$. Então w satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w_t - \alpha \Delta w + B.\nabla u^m - B.\nabla u + \varphi(u^m).\nabla u^m - \varphi(u).\nabla u = 0 \\ w(x,0) = u_0^m(x) - u_0(x) = w_0(x). \end{cases}$$

Tem-se que w satisfaz a equação integral:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= E_\alpha(t) w_0(x) + \\ & \int_0^t E_\alpha(t-s)(1-\Delta)^{-1}[\varphi(u).\nabla u + B.\nabla u - \varphi(u^m).\nabla u^m - B.\nabla u^m]\, ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\|w(x,t)\|_2 \leq \|w_0\|_2 + \int_0^t (\|\varphi(u).\nabla u - \varphi(u^m).\nabla u^m\| + \|B.\nabla u - B.\nabla u^m\|)\, ds.$$

De (3.6), (3.12) e (3.17) segue que:

$$\|w(x,t)\|_2 \leq \|w_0\|_2 + C\int_0^t \|w(s)\|_2\, ds$$

Da desigualdade de Gronwall obtém-se:

$$\|w\|_2 \leq \|w_0\|_2 e^{CT},$$

$C = C(\gamma, T, \|u_0\|_2)$, ou seja

$$\|u^m - u\|_2 \leq C \|u_0^m - u_0\|_2 .$$

Portanto

$$\sup_{[0,T]} \|u^m - u\|_2 \leq C, \quad C = C(\gamma, T, \|u_0\|_2) .$$

Dessa forma, podemos dizer que o problema de valor inicial(3.1) é globalmente bem posto.

Capítulo 4

Comportamento assintótico

Neste capítulo estudamos o comportamento assintótico da solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u + B.\nabla u + \varphi(u).\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Em (4.1) tem-se que $x \in R^n$, $n = 1, 2, 3$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$ é uma constante, $B = (B_1, ..., B_n)$ *éumvetor* e a função φ é tal que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} |\varphi(u)| &\leq C|u|^2, \quad \left|\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right| \leq C|u|^3, \quad se \quad n=1 \quad e \quad |u| \quad pequeno. \\ |\varphi(u)| &\leq C|u|, \quad \left|\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right| \leq C|u|^2, \quad se \quad n=2,3 \quad e \quad |u| \quad pequeno. \\ |\varphi(u)| &\leq C|u|^\gamma, \quad \left|\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right| \leq C|u|^{\gamma+1}, \quad se \quad n=2 \quad e \quad |u| \quad grande; \gamma \geq 1, \gamma \in Z. \\ |\varphi(u)| &\leq C|u|^2, \quad \left|\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right| \leq C|u|^3, \quad se \quad n=3 \quad e \quad |u| \quad grande. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O objetivo principal deste capítulo é obter taxas de decaimento da solução do problema (4.1) quando $1 \leq n \leq 3$, nas normas $H^1(R^n)$ e $L^2(R^n)$. A idéia central consiste em obter a forma integral da solução de (4.1), via transformada de Fourier, e, a partir daí estimar a integral obtida dividindo-a em convenientes subintervalos.

Primeiramente obtemos estimativas de decaimento tomando o dado inicial $u_0 \in H^2(R^n)$ e a seguir tomando o dado inicial $u_0 \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$, obtemos estimativas melhores para a solução do problema (4.1). Os lemas a seguir são úteis para a obtenção dos resultados que nos propomos.

Lema 4.1 *Seja* $u_0(x) \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$, $\varphi(u) \in C(R)$ *nas condições (4.2). Então valem as estimativas:*

i) $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_\infty^2 \leq C$.

ii) $\int_0^\infty \left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] dt \leq C$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.1) por $2u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n}\left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + 2\alpha \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Integrando de 0 a t, tem-se:

$$\|u(t)\|_1^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla u(t)\|^2 dt = \|u_0\|_1^2. \tag{4.3}$$

Desta igualdade segue que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2 \quad e \quad 2\alpha \int_0^\infty \|\nabla u(t)\|^2 dt \leq \|u_0\|_1^{\cdot} \tag{4.4}$$

Se $n = 1$, do teorema da imersão de Sobolev tem-se $H^1(R) \hookrightarrow L^\infty(R)$, logo

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_\infty^2 \leq \sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2.$$

Multiplicando a equação (4.1) por $-2\Delta u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n}\left(|\nabla u|^2 + |\Delta u|^2\right) dx + 2\alpha \int_{R^n} |\Delta u|^2 dx = 2\int_{R^n} \Delta u\left[\varphi(u) . \nabla u\right] dx.$$

integral obtida dividindo-a em convenientes subintervalos.

Primeiramente obtemos estimativas de decaimento tomando o dado inicial $u_0 \in H^2(R^n)$ e a seguir tomando o dado inicial $u_0 \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$, obtemos estimativas melhores para a solução do problema (4.1). Os lemas a seguir são úteis para a obtenção dos resultados que nos propomos.

Lema 4.1 *Seja* $u_0(x) \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$, $\varphi(u) \in C(R)$ *nas condições (4.2). Então valem as estimativas:*

i) $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_\infty^2 \leq C.$

ii) $\int_0^\infty \left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] dt \leq C.$

Demonstração: Multiplicando a equação (4.1) por $2u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{R^n} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + 2\alpha \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Integrando de 0 a t, tem-se:

$$\|u(t)\|_1^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla u(t)\|^2 dt = \|u_0\|_1^2. \tag{4.3}$$

Desta igualdade segue que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2 \quad e \quad 2\alpha \int_0^\infty \|\nabla u(t)\|^2 dt \leq \|u_0\|_1^{t.(4.4)}$$

Se $n = 1$, do teorema da imersão de Sobolev tem-se $H^1(R) \hookrightarrow L^\infty(R)$, logo

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_\infty^2 \leq \sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2.$$

Multiplicando a equação (4.1) por $-2\Delta u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{R^n} \left(|\nabla u|^2 + |\Delta u|^2\right) dx + 2\alpha \int_{R^n} |\Delta u|^2 dx = 2 \int_{R^n} \Delta u \left[\varphi(u) . \nabla u\right] dx.$$

Integrando de 0 a t, tem-se:

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + 2\alpha \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds =$$

$$\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + 2\int_0^t \int_{R^n} \Delta u\,[\varphi(u) . \nabla u]\, dx ds. \tag{4.5}$$

Vamos analisar o termo $2 \int_{R^n} \Delta u\,[\varphi(u) . \nabla u]\, dx$, quando $n = 1, 2, 3$.

Se $n = 1$, usando a desigualdade de Hölder, tem-se:

$$\begin{aligned} 2\left|\int_R \varphi(u)\, u_x u_{xx} dx\right| &\leq \alpha \|u_{xx}(t)\|^2 + \alpha^{-1} \int_R |\varphi(u)\, u_x|^2 dx \\ &\leq \alpha \|u_{xx}(t)\|^2 + \alpha^{-1} \|\varphi(u(t))\|_\infty^2 \|u_x(t)\|^2 \\ &\leq \alpha \|u_{xx}(t)\|^2 + \alpha^{-1} \|\varphi(u_0)\|_\infty^2 \|u_x(t)\|^2 . \end{aligned}$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|^2 + \|u_{xx}(t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|u_{xx}(s)\|^2 ds &\leq \|u_{0x}\|^2 + \|u_{0xx}\|^2 + \\ \alpha^{-1} \|\varphi(u_0)\|_\infty^2 \int_0^\infty \|u_x(t)\|^2 dt &\leq C. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se $n = 2$ tem-se de (4.2) que $|\varphi(u)| \leq C |u|^\gamma$, $\gamma \geq 1$ e $\gamma \in Z$, logo

$$2\left|\int_{R^2} \Delta u\,[\varphi(u) . \nabla u]\, dx\right| \leq \frac{\alpha}{2} \|\Delta u(t)\|^2 + C \|u(t)\|_\infty^{2\gamma} \|\nabla u(t)\|^2 .$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos:

$$\|u(t)\|_\infty^{2\gamma} \leq C \|u(t)\| \|\nabla u(t)\|^{2\gamma-2} \|\Delta u(t)\| .$$

Logo

$$\begin{aligned} 2\left|\int_0^t \int_{R^2} \Delta u\,[\varphi(u) . \nabla u]\, dx ds\right| &\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|u(s)\| \|\nabla u(s)\|^{2\gamma} \|\Delta u(s)\| ds \\ &\leq \alpha \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|u(s)\|^2 \|\nabla u(s)\|^{4\gamma} ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds &\leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \\
&\quad C\int_0^t \|u(s)\|^2 \|\nabla u(s)\|^{4\gamma} ds. \\
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds &\leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \\
&\quad C\int_0^t \|u(s)\|_1^2 \|u(s)\|^{4\gamma-2} \|\nabla u(s)\|^2 ds. \\
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds &\leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \\
&\quad C\|u_0\|_1^{4\gamma}\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds. \\
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds &\leq C,
\end{aligned}$$

onde usamos (4.4).

Assim obtemos:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha\int_0^\infty \|\Delta u(t)\|^2 dt \leq C. \tag{4.7}$$

Se n=3 tem-se de (4.2) que $|\varphi(u)| \leq C|u|^2$, logo

$$2\left|\int_{R^3} \Delta u\,[\varphi(u).\nabla u]\,dx\right| \leq \frac{\alpha}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + C\|u(t)\|_\infty^4 \|\nabla u(t)\|^2.$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg obtemos:

$$\|u(t)\|_\infty^4 \leq C\|u(t)\|_{L^6}^2 \|\Delta u(t)\|^2 \leq C\|\nabla u(t)\|^2 \|\Delta u(t)\|^2.$$

Logo

$$2\left|\int_0^t\int_{R^3} \Delta u\,[\varphi(u).\nabla u]\,dxds\right| \leq \alpha\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds + C\int_0^t \|\nabla u(s)\|^4 \|\Delta u(s)\|^2 ds.$$

Portanto

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + C\|u_0\|_1^{2\gamma} \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 \|\Delta u(s)\|^2 ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall generalizada segue que

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|\Delta u(t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|\Delta u(t)\|^2 dt \leq C. \tag{4.8}$$

Do fato de $H^2(R^n) \hookrightarrow L^\infty(R^n)$ se $n < 4$ tem-se:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|u(t)\|_\infty^2 \leq \sup_{0\leq t<\infty} \|u(t)\|_2^2 \leq C \quad . \tag{4.9}$$

De (4.4), (4.6), (4.7) e (4.8) segue que

$$\int_0^\infty \left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] dt \leq C,$$

para $n = 1, 2, 3$.

Lema 4.2 *Seja $u(x,t)$ solução da equação (4.1) com $u_0(x) \in H^2(R^n)$,*

$1 \leq n \leq 3$. Então:

i) $\lim_{t\to\infty} \left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] = 0$.

ii) $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_\infty = 0$.

Demonstração: Da identidade (4.5) tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] = -2\alpha \|\Delta u(t)\|^2 + 2\int_{R^n} \Delta u \left[\varphi(u) . \nabla u\right] dx.$$

Do lema (4.1) tem-se que:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|u(t)\|_\infty \leq C.$$

e

$$\int_0^\infty \left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] dt \leq C.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] \leq -\alpha \|\Delta u(t)\|^2 + C\|\nabla u(t)\|^2 \in L^1(0,\infty).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] &= -2\alpha \|\Delta u(t)\|^2 + \\ 2\int_{R^n} \Delta u\left[\varphi(u).\nabla u\right] dx &\in L^1(0,\infty). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Seja $h(t) = \|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2$, tem-se que:

$$\int_0^\infty h(t)\, dt \leq C \qquad e \qquad \int_0^\infty \left|\frac{d}{dt}h(t)\right| dt \leq C,$$

logo pela proposição 2.14 do capìtulo2 segue que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] = 0.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtém-se:

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\|u(t)\|^{1-\frac{n}{4}} \|u(t)\|^{\frac{n}{4}},$$

para $n = 1, 2, 3$.

Logo

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_\infty = 0.$$

Lema 4.3 *Seja $u(x,t)$ solução da equação (4.1) com $u_0(x) \in H^2(R^n)$, $1 \leq n \leq 3$. Suponha que $|\varphi(u)| \leq |u|^{\gamma-1}$ para todo $|u| \leq 1$ onde $\gamma = 3$ se $n = 1$ e $\gamma = 2$ se $n = 2, 3$. Então tem-se:*

$$\lim_{t\to\infty} \left[t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\| \right] = 0.$$

Demonstração: Multiplicando a equação em (4.1) por $u_t + B.\nabla u + \alpha^{-1}[B.\nabla u_t]$ e integrando em R^n obtemos a identidade

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|B.\nabla u(t)\|^2\right] + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|(u_t + B.\nabla u)(t)\|^2 =$$

$$-\int_{R^n} [u_t + B.\nabla u][\varphi(u).\nabla u]\,dx - \alpha^{-1}\int_{R^n}[B.\nabla u_t][\varphi(u).\nabla u]\,dx. \qquad (4.11)$$

Multiplicando a equação (4.1) por $2\gamma\delta u^{2\gamma-1}$, onde $\delta > 0$ e integrando em R^n tem-se:

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n}\delta|u|^{2\gamma}dx + 2\gamma(2\gamma-1)\alpha\delta\int_{R^n}|u|^{2\gamma-2}|\nabla u|^2 dx =$$

$$-2\gamma(2\gamma-1)\delta\int_{R^n}|u|^{2\gamma-2}\nabla u.\nabla u_t dx. \qquad (4.12)$$

Adicionando-se (4.11) e (4.12) temos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|B.\nabla u(t)\|^2 + \delta\int_{R^n}|u|^{2\gamma}dx\right] + 2\gamma(2\gamma-1)\alpha\delta\int_{R^n}|u|^{2\gamma-2}|\nabla u|^2 dx +$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|(u_t + B.\nabla u)(t)\|^2 \;=\;& -\int_{R^n}[u_t + B.\nabla u][\varphi(u).\nabla u]\,dx - \\ & \alpha^{-1}\int_{R^n}[B.\nabla u_t][\varphi(u).\nabla u]\,dx - \\ & 2\gamma(2\gamma-1)\int_{R^n}|u|^{2\gamma-2}\nabla u.\nabla u_t dx. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Note que

$$\left|\int\limits_{R^n} [u_t + B.\nabla u] [\varphi(u).\nabla u]\, dx\right| \leq \|u_t + B.\nabla u\|^2 + \|\varphi(u).\nabla u\|^2. \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\left|\int\limits_{R^n} [\varphi(u).\nabla u][B.\nabla u_t]\, dx\right| &\leq \alpha^{-1}|B|\,\|\nabla u_t\|\,\|\varphi(u).\nabla u\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{|B|^2}{2\alpha^2}\|\varphi(u).\nabla u\|^2. \end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}2\gamma(2\gamma-1)\delta\left|\int\limits_{R^n} |u|^{2\gamma-2}\nabla u.\nabla u_t dx\right| &\leq 2\gamma(2\gamma-1)\|\nabla u_t\|\, u^{2\gamma-2}\nabla u \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2 + 2\gamma^2(2\gamma-1)^2\delta^2\int\limits_{R^n}|u|^{4\gamma-4}|\nabla u|^2\, dx.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Logo de (4.14), (4.15) e (4.16) obtém-se que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|B.\nabla u(t)\|^2 + \delta\int\limits_{R^n}|u|^{2\gamma}dx\right] + 2\gamma(2\gamma-1)\alpha\delta\int\limits_{R^n}|u|^{2\gamma-2}|\nabla u|^2 dx \leq \\ &\left[1+\frac{|B|^2}{2\alpha^2}\right]\|\varphi(u).\nabla u\|^2 + 2\gamma^2(2\gamma-1)^2\delta^2\int\limits_{R^n}|u|^{4\gamma-4}|\nabla u|^2 dx.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Seja

$$h(t) = \frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|B.\nabla u(t)\|^2 + \delta\int\limits_{R^n}|u|^{2\gamma}dx.$$

Do lema (4.2) temos que:

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_\infty = 0$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\left[\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right] = 0$$

Logo

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

Ainda da hipótese que $|\varphi(u)| \leq M|u|^{\gamma-1}$, $|u| \leq 1$, e escolhendo $\delta > 0$ suficientemente grande e $T > 0$ tal que para $t \geq T$ tenhamos

$$2\gamma(2\gamma-1)\alpha\delta \geq 2\gamma^2(2\gamma-1)^2\delta^2\|u(t)\|_\infty^{2\gamma-2} + M^2\left(1+\frac{|B|^2}{2\alpha^2}\right),$$

obtemos $\frac{d}{dt}h(t) \leq 0$ para todo $t \geq T$.

Por outro lado, temos que $h(t) \in L^1(0,\infty)$.

De fato, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtém-se em cada caso:

1) Se $n = 1$ então $\gamma = 3$ e

$$\int_{R^n} |u|^6\,dx \leq \|u(t)\|_\infty^4\|u(t)\|^2 \leq C\|u(t)\|^4\|\nabla u(t)\|^2 \leq C\|u_0\|_1^4\|\nabla u(t)\|^2. \tag{4.18}$$

2) Se $n = 2$ então $\gamma = 2$ e

$$\int_{R^n} |u|^4\,dx \leq \|u(t)\|_\infty^2\|u(t)\|^2 \leq C\|\nabla u(t)\|^2\|u(t)\|^2 \leq C\|u_0\|_1^2\|\nabla u(t)\|^2. \tag{4.19}$$

3) Se $n = 3$ então $\gamma = 2$ e

$$\begin{aligned}\int_{R^n} |u|^4\,dx &\leq \|u(t)\|_\infty^2\|u(t)\|^2 \leq C\|u(t)\|_{L^6}\|\Delta u(t)\|\,\|u(t)\|^2\\ &\leq C\|\nabla u(t)\|\,\|\Delta u(t)\|\,\|u(t)\|^2\\ &\leq C\|u(t)\|^2\left[\|\nabla u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2\right]\\ &\leq C\|u_0\|_1^2\left[\|\nabla u(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2\right].\end{aligned} \tag{4.20}$$

Portanto se $n = 1,2,3$ tem-se:

$$\int_0^\infty h(t)\,dt \leq C$$

e daí $h(t) \in L^1(0,\infty)$.

Como $\frac{d}{dt}h(t) \leq 0$ temos que $h(t)$ é decrescente e portanto

$$\int_s^\infty h(\tau)\,d\tau \geq \int_s^t h(\tau)\,d\tau \geq (t-s)\,h(t) \tag{4.21}$$

para $t > s$ e s suficientemente grande.

Logo

$$\int_s^\infty h(\tau)\,d\tau \geq \lim_{t\to\infty} \sup\,[h(t)\,t]$$

para s suficientemente grande.

Como $h(t) \in L^1(0,\infty)$, o lado esquerdo da desigualdade pode ser tão pequeno quanto se queira, escolhendo s suficientemente grande. Logo

$$\lim_{t\to\infty} [th(t)] = 0.$$

Portanto

$$\|\nabla u(t)\| \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$$

o que prova o resultado.

Assumimos que:

$$u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n), 1 \leq n \leq 3$$

e

$$\int\limits_{R^n} u_0(x)\,dx \neq 0$$

Vamos empregar o método da separação de Fourier que consiste em separar convenientemente, em determinados subintervalos a integral em R^n. O ponto chave deste método é obter algumas estimativas para $|\hat{u}(\xi,t)|$.

Lema 4.4 *Seja* $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$ $1 \leq n \leq 3$, *e* u *solução de (4.1). Então as seguintes relações são válidas:*

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-h(\xi)t}\left[\hat{u}_0(\xi) - \int_0^t e^{h(\xi)s} g(\xi, s)\, ds\right], \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\left[\int_0^t \|u(s)\|^5 ds\right]^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} &(4.23)\\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi| t^{\frac{3}{4}}, \quad se \quad n=1, &(4.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi| t, \quad se \quad n=2,3, &(4.25)\end{aligned}$$

onde

$$h(\xi) = \frac{\alpha|\xi|^2 + iB.\xi}{1+|\xi|^2}, \quad g(\xi,t) = \frac{i\xi.F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right](\xi,t)}{1+|\xi|^2}.$$

Demonstração: Aplicando a transformada de Fourier à equação (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \left(1+|\xi|^2\right)\hat{u}_t + \alpha|\xi|^2\hat{u} + i\xi.B\hat{u} + i\xi.F(\varphi(u)) &= 0 \\ \left(1+|\xi|^2\right)\hat{u}_t(\xi,t) + \left(\alpha|\xi|^2 + i\xi.B\right)\hat{u}(\xi,t) + i\xi.F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right](\xi,t) &= 0 \\ \hat{u}_t(\xi,t) + \left(\frac{\alpha|\xi|^2 + iB.\xi}{1+|\xi|^2}\right)\hat{u}(\xi,t) + \frac{i\xi.F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\,d\tau\right](\xi,t)}{1+|\xi|^2} &= 0 \\ \hat{u}_t(\xi,t) + h(\xi)\hat{u}(\xi,t) + g(\xi,t) &= 0 \\ \left[\hat{u}(\xi,t)e^{h(\xi)t}\right]_t + g(\xi,t)e^{h(\xi)t} &= 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t obtemos:

$$\hat{u}(\xi,t)e^{h(\xi)t} - \hat{u}(\xi,0) + \int_0^t g(\xi,s)e^{h(\xi)s}ds = 0.$$

Logo

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-h(\xi)t}\left[\hat{u}_0(\xi) - \int_0^t g(\xi,s)\, e^{h(\xi)s} ds\right].$$

Ainda

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-h(\xi)t}\left[\hat{u}_0(\xi) - i\xi. \int_0^t \frac{F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right](\xi,s)}{1+|\xi|^2} e^{h(\xi)s} ds\right].$$

Portanto

$$\hat{u}(\xi,t) \le |u_0(\xi)| + |\xi| \int_0^t \left|\frac{F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right](\xi,t)}{1+|\xi|^2 \hat{u}_t}\right| ds.$$

Note que

Se $n=1$, usando (4.2) e o teorema da imersão de Sobolev tem-se:

$$\begin{aligned} \left|F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right](\xi,s)\right| &\le \int_{R^n} \left|\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right| dx \le C \int_{R^n} |u|^3\, dx \\ &\le \|u(s)\|_\infty \|u(s)\|^2 \le \|u_x(s)\|^{\frac{1}{2}} \|u(s)\|^{\frac{1}{2}} \|u(s)\|^2 \\ &\le C\, \|u_x(s)\|^{\frac{1}{2}} \|u(s)\|^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Se $n=2,3$, usando (4.2) obtém-se:

$$\left|F\left[\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right](\xi,s)\right| \le \int_{R^n} \left|\int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau\right| dx \le C \int_{R^n} |u|^2\, dx \le C\, \|u(s)\|^2.$$

Do fato que $\|\hat{u}\|_\infty \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^1}$, para $u \in L^1(R^n)$ $\quad 1 \le n \le 3$, segue que:

Se $n=1$

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\le \|u_0\|_{L^1} + C\,|\xi| \int_0^t \|u_x(s)\|^{\frac{1}{2}} \|u(s)\|^{\frac{5}{2}} ds \\ &\le \|u_0\|_{L^1} + C\,|\xi| \left(\int_0^\infty \|u_x(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^t \|u(s)\|^5 ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} \\ &\le \|u_0\|_{L^1} + C\,|\xi| \left(\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} \\ &\le \|u_0\|_{L^1} + C\,|\xi|\, t^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Se $n = 2, 3$

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi| \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi| t. \end{aligned}$$

Lema 4.5 *Seja $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$, e $1 \leq n \leq 3$. As seguintes estimativas são válidas para o problema de valor inicial (4.1), onde $N = \max\{2, n\}$:*

$$\left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}(\xi,t)|^2 d\xi \leq \left(\frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi +$$

$$N \int_0^t \left[\left(s + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1} \int_{|\xi|^2 \leq \frac{N}{1+2\alpha s}} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}(\xi,s)|^2 d\xi \right] ds.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (4.1) por $2u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2\right) + 2\alpha \|\nabla u(t)\|^2 = 0.$$

Aplicando a igualdade de Parseval a esta equação tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\|\hat{u}(t)\|^2 + \left\|\widehat{\nabla u(t)}\right\|^2\right) + 2\alpha \left\|\widehat{\nabla u(t)}\right\|^2 &= 0. \\ \frac{d}{dt}\int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}|^2 d\xi + 2\alpha \int_{R^n} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi &= 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Multiplicando a equação (4.26) por $\left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N$ tem-se:

$$\left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \frac{d}{dt}\int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}|^2 d\xi + 2\alpha \left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \int_{R^n} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi = 0. \tag{4.27}$$

Note que

$$\frac{d}{dt}\left[\left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}|^2 d\xi\right] = \left(t + \frac{N+1}{2\alpha}\right)^N \frac{d}{dt}\int_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}|^2 d\xi +$$

$$N\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \tag{4.28}$$

Seja

$$\begin{aligned} B(t) &= \left\{\xi\in R^n\, |\xi|^2\leq\frac{N}{1+2\alpha t}\right\} \\ &= \left\{\xi\in R^n/\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\leq\frac{N}{N+1+2\alpha t}\right\}. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} 2\alpha\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)\int_{R^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi &= (N+1+2\alpha t)\int_{B(t)}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi+ \\ &\quad +(N+1+2\alpha t)\int_{B(t)^c}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi \\ &\geq \int_{B(t)^c}(N+1+2\alpha t)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi \\ &\geq N\int_{B(t)^c}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi \\ &\geq N\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi-N\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \end{aligned}$$

Logo

$$2\alpha\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)\int_{R^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi\geq N\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi-N\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \tag{4.29}$$

Multiplicando-se (4.29) por $\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2\alpha\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N}\int_{R^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi &\geq N\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi- \\ &\quad N\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \end{aligned}$$

Portanto em (4.27) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi\right]\leq N\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi.$$

Integrando de 0 a t, tem-se:

$$\left(t+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq \left(\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi +$$

$$+N\int_0^t\left[\left(s+\frac{N+1}{2\alpha}\right)^{N-1}\int_{B(s)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right]ds.$$

Lema 4.6 *Seja $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$, e $1 \leq n \leq 3$, então a seguinte estimativa de decaimento vale para a solução do problema (4.1) com $n = 1$:*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C\left[\ln(e+t)\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Demonstração: Da identidade (4.26) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi + 2\alpha\int_R|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi = 0.$$

Multiplicando esta equação por $[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}$ onde $\lambda > 1$ é solução da equação $4\alpha\lambda\ln\lambda = 6$ tem-se:

$$[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\frac{d}{dt}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi + 2\alpha[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int_R|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi = 0. \tag{4.30}$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] &= [\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\frac{d}{dt}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi + \\ &\quad \frac{5}{2}\frac{[\ln(\lambda+t)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda+t}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Logo, em (4.30) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left[[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] + 2\alpha[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int_R|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi =$$

$$\frac{5}{2}\frac{[\ln(\lambda+t)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda+t}\int\limits_{R}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \tag{4.31}$$

Seja

$$\begin{aligned} B(t) &= \left\{\xi\in R/\,|\xi|^2\leq\frac{5}{4\alpha(\lambda+t)\ln(\lambda+t)-5}\right\} \\ &= \left\{\xi\in R/\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\leq\frac{5}{4\alpha(\lambda+t)\ln(\lambda+t)}\right\} \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} 2\alpha\ln(\lambda+t)\int\limits_{R^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi &\geq \frac{5}{2(\lambda+t)}\int\limits_{B(t)^c}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi \\ &\geq \frac{5}{2(\lambda+t)}\int\limits_{R}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi - \\ &\quad \frac{5}{2(\lambda+t)}\int\limits_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left[[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int\limits_{R}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi\right]\leq\frac{5}{2}\frac{[\ln(\lambda+t)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda+t}\int\limits_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi$$

De (4.24) segue que

$$\frac{d}{dt}\left[[\ln(\lambda+t)]^{\frac{5}{2}}\int\limits_{R}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi\right]\leq$$

$$\frac{5}{2}\frac{[\ln(\lambda+t)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda+t}\int_{-A}^{A}\left(1+|\xi|^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1}+C\,|\xi|\,t^{\frac{3}{4}}\right]^2d\xi\leq$$

$$\frac{5}{2}\frac{[\ln(\lambda+t)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda+t}\left[\|u_0\|_{L^1}^2\int_0^A\left(1+|\xi|^2\right)d\xi+Ct^{\frac{3}{2}}\int_0^A\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2\,d\xi\right]\leq$$

$$\frac{C\,\|u_0\|_{L^1}^2}{\lambda+t}+\frac{C}{\lambda+t}\leq\frac{C}{\lambda+t},$$

onde $A^2=5\left[4\alpha(\lambda+t)\ln(\lambda+t)-5\right]^{-1}$ e $C>0$.

Integrando de 0 a t

$$(\ln(\lambda+t))^{\frac{5}{2}} \int_R \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq [\ln(\lambda)]^{\frac{5}{2}} \int_R \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + C\ln(\lambda+t).$$

Logo

$$\int_R \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq C[\ln(\lambda+t)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Portanto

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C[\ln(e+t)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Lema 4.7 *Seja $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$; $1 \leq n \leq 3$. Se $n=1$ e $u(x,t)$ é solução de (4.1), então tem-se a estimativa de decaimento:*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Usando o lema (4.5), tem-se neste caso que $N=2$ e daí

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^2 \int_R \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2 \int_R \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi +$$
$$2\int_0^t \left[\left(s+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2\leq\frac{2}{1+2\alpha s}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] ds.$$

Usando o lema (4.4) podemos escrever:

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2\leq\frac{2}{1+2\alpha t}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq$$
$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2\leq\frac{2}{1+2\alpha t}} \left(1+|\xi|^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\left(\int_0^t \|u(s)\|^5 ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}\right]^2 d\xi \leq$$
$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\left[\|u_0\|_{L^1}^2 \int_{-A}^{A}\left(1+|\xi|^2\right)d\xi + Ct^{\frac{1}{2}}\int_{-A}^{A}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2\left(\int_0^t \|u(s)\|^5 ds\right)d\xi\right]$$

onde $A = \left(\frac{2}{1+2\alpha t}\right)^{\frac{1}{2}}$

Logo

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2\leq\frac{2}{1+2\alpha s}}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi \leq C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\int_0^t\|u(s)\|^5\,ds.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^2\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi &\leq \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2+\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2\,d\xi+\\ &\quad C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}+Ct\int_0^t\|u(s)\|^5\,ds.\end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi &\leq \left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2+\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2\,d\xi+\\ &\quad C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{-1}t\int_0^t\|u(s)\|^5\,ds.\end{aligned}$$

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi \leq C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+C\int_0^t\|u(s)\|^5\,ds.$$

Logo

$$(t+1)\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi \leq C(t+1)^{\frac{1}{2}}+C\int_0^t\|u(s)\|^5\,ds.$$

Do lema (4.6) segue que:

$$\begin{aligned}(t+1)\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi &\leq C(t+1)^{\frac{1}{2}}+C\int_0^t\|u(s)\|^2\left[\ln(e+s)\right]^{-\frac{9}{4}}ds\\ &\leq C(t+1)^{\frac{1}{2}}+C\int_0^t(1+s)\|u(s)\|^2(1+s)^{-1}\left[\ln(e+s)\right]^{-\frac{9}{4}}ds.\end{aligned}$$

Fazendo

$$g(t)=(1+t)\int_R\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\,d\xi=(1+t)\|u(t)\|_1^2$$

e

$$h(t) = C(1+t)^{-1}[\ln(e+t)]^{-2}$$

e usando a desigualdade de Gronwall tem-se

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_1^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\int_0^\infty (1+t)^{-1}[\ln(e+t)]^{-2} dt\right] \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pois a integral $\int_0^\infty (1+t)^{-1}[\ln(e+t)]^{-2} dt$ é convergente.

Lema 4.8 *Seja* $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. *Se* $n = 2$ *tem-se a estimativa de decaimento para a solução do problema (4.1):*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C[\ln(e+t)]^{-2}.$$

Demonstração: Multiplicando a igualdade (4.26) por $[\ln(\mu+t)]^3$, onde $\mu > 1$ é solução da equação $2\alpha\mu\ln\mu = 4$, obtemos:

$$[\ln(\mu+t)]^3 \frac{d}{dt} \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi + 2\alpha[\ln(\mu+t)]^3 \int\limits_{R^2} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi = 0. \tag{4.32}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[[\ln(\mu+t)]^3 \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] &= [\ln(\mu+t)]^3 \frac{d}{dt} \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi + \\ &\quad \frac{3[\ln(\mu+t)]^2}{\mu+t} \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Logo em (4.32) temos:

$$\frac{d}{dt}\left[[\ln(\mu+t)]^3 \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] - \frac{3[\ln(\mu+t)]^2}{\mu+t} \int\limits_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi +$$

$$+2\alpha\left[\ln(\mu+t)\right]^3\int_{R^2}|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi=0.$$

Seja

$$\begin{aligned}B(t) &= \left\{\xi\in R^2/\,|\xi|^2\le\frac{3}{2\alpha(\mu+t)\ln(\mu+t)-3}\right\}\\ &= \left\{\xi\in R/\,\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\le\frac{3}{2\alpha(\mu+t)\ln(\mu+t)}\right\}.\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}2\alpha\left[\ln(\mu+t)\right]\int_{R^2}|\xi|^2|\hat{u}|^2d\xi &\ge \frac{3}{\mu+t}\int_{B(t)^c}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi\\ &\ge \frac{3}{\mu+t}\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi-\frac{3}{\mu+t}\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)d\xi.\end{aligned}$$

Logo obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\left[\ln(\mu+t)\right]^3\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi\right]\le\frac{3\left[\ln(\mu+t)\right]^2}{\mu+t}\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi.$$

De (4.25) segue que

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\ln(\mu+t)\right)^3\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi\right]\le\frac{3\left[\ln(\mu+t)\right]^2}{\mu+t}\int_0^{2\pi}\int_0^A r\left(1+r^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1}+Crt\right]^2drd\theta,$$

onde

$$A^2=\frac{3}{2\alpha(\mu+t)\ln(\mu+t)-3}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\ln(\mu+t)\right)^3\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi\right]\le\frac{C}{(\mu+t)^3}+\frac{C}{(\mu+t)}\le\frac{C}{\mu+t}.$$

Integrando de 0 a t tem-se:

$$\left[\ln(\mu+t)\right]^3\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2d\xi\le\left[\ln(\mu)\right]^3\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2d\xi+C\ln(\mu+t).$$

Portanto

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C\left[\ln(\mu+t)\right]^{-2} \leq C\left[\ln(e+t)\right]^{-2}.$$

Lema 4.9 *Seja* $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. *Se* $n = 2$ *tem-se a estimativa de decaimento para a solução do problema (4.1):*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C(1+t)^{-1}.$$

Demonstração: Usando o lema (4.5), onde, neste caso $N = 2$ tem-se

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^2 \int_{R^2} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq & \left(\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \\ & 2\int_0^t \left[\left(s+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2 \leq \frac{2}{1+2\alpha s}}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] ds.\end{aligned}$$

Usando o lema (4.4) podemos escrever:

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2 \leq \frac{2}{1+2\alpha t}}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d \leq$$

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{|\xi|^2 \leq \frac{2}{1+2\alpha t}}\left(1+|\xi|^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\int_0^t \|u(s)\|^2 ds\right]^2 d\xi \leq$$

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\left(\frac{2}{1+2\alpha t}\right)^{\frac{1}{2}}} r\left(1+r^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + Cr\int_0^t \|u(s)\|^2 ds\right]^2 dr d\theta \leq$$

$$C + C\int_0^t \|u(s)\|^4 ds.$$

Logo

$$\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^2 \int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq \left(\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + Ct + Ct\int_0^t \|u(s)\|^4 ds.$$

ou

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi &\leq \left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2\alpha}\right)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \\ &\quad C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{-1} t + C\left(t+\frac{3}{2\alpha}\right)^{-1} t\int_0^t \|u(s)\|^4 ds \\ &\leq C + C\int_0^t \|u(s)\|^4 ds.\end{aligned}$$

Logo

$$(t+1)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq C + C\int_0^t \|u(s)\|^4 ds.$$

Do lema (4.8) segue que:

$$(t+1)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq C + C\int_0^t (1+s)\|u(s)\|^2 (1+s)^{-1}[\ln(e+s)]^{-2} ds.$$

Fazendo

$$g(t) = (t+1)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi$$

e

$$h(t) = C(1+t)^{-1}[\ln(e+t)]^{-2}$$

e usando a desiguladade de Gronwall obtém-se:

$$(t+1)\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq C\exp\left[C\int_0^\infty (1+t)^{-1}[\ln(e+t)]^{-2} dt\right].$$

Logo

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C(1+t)^{-1}.$$

Lema 4.10 *Seja $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. Se $n = 3$ tem-se a estimativa de decaimento para a solução do problema (4.1):*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Usando o lema (4.5), onde, neste caso $N = 3$ tem-se

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int\limits_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\, d\xi \;\leq\; \left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int\limits_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2\, d\xi + 3\int_0^t \left[\left(s+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha s}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\, d\xi\right] ds.$$

Do lema (4.4) vem que:

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha t}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\, d\xi \leq \left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha t}} \left(1+|\xi|^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + C\,|\xi|\, t\right]^2 d\xi.$$

Logo

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha t}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\, d\xi \leq$$

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\left(\frac{3}{1+2\alpha t}\right)^{\frac{1}{2}}} r^2\left(1+r^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + Crt\right]^2 sen\theta_1 dr d\theta_1 d\theta_2 \leq$$

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\left(\frac{3}{1+2\alpha t}\right)^{\frac{1}{2}}} r^2\left(1+r^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1}^2 + Cr^2t^2\right] sen\theta_1\, dr d\theta_1 d\theta_2 \leq$$

$$C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int\limits_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2\, d\xi \;&\leq\; \left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int\limits_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2\, d\xi + \\ &\quad C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &\leq\; C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq C\,(t+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lema 4.11 *Seja $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. Se $n = 3$ tem-se a estimativa de decaimento para a solução do problema (4.1):*

$$\|u(t)\|_1^2 \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}.$$

Demonstração: Do lema (4.4) e (4.10) tem-se:

$$|\hat{u}(\xi,t)| \leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi| \int_0^t (1+s)^{-\frac{1}{2}} ds \leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|(1+s)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

se $|\xi|^2(1+t) \leq C_0$ para alguma constante $C_0 > 0$.

Do lema (4.5) tem-se que:

$$\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi +$$
$$3\int_0^t \left[\left(s+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha s}} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi\right] ds \leq$$
$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi +$$
$$3\int_0^t \left[\left(s+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha s}} \left(1+|\xi|^2\right)\left[\|u_0\|_{L^1} + C|\xi|(1+s)^{\frac{1}{2}}\right]^2 d\xi\right] ds \leq$$
$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\int_0^t \left[\left(s+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_{|\xi|^2 \leq \frac{3}{1+2\alpha s}} d\xi\right] ds \leq$$
$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\int_0^t \left[\left(s+\frac{2}{\alpha}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\left(\frac{3}{1+2\alpha s}\right)^{\frac{1}{2}}} r^2 sen\theta_1 dr d\theta_1 d\theta_2\right] ds \leq$$
$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 \int_{R^3} \left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_1^2 &\leq C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{-3} + C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\leq C\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}} \leq C(t+1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Corolário 1 *Seja* $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. *Na norma de* $L^2(R^n)$ *tem-se* $\|u(t)\|^2 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}$, *onde* $1 \leq n \leq 3$ *e* u *é solução do problema (4.1):*

Demonstração: A demonstração segue dos lemas (4.7), (4.9) e (4.11).

Corolário 2 *A seguinte estimativa é válida:* $|\hat{u}(\xi, t)| \leq C$, *desde que* $|\xi|^2(1+t) \leq C_0$ *para alguma constante* $C_0 > 0$.

Demonstração: Do lema (4.4), se $n = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\left[\int_0^t \|u(s)\|^5 ds\right]^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\left[\int_0^t (1+s)^{-\frac{5}{4}} ds\right]^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\left[(1+t)^{-\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} \leq C, \end{aligned}$$

desde que $|\xi|^2(1+t) \leq C_0$ para alguma constante $C_0 > 0$.

Do lema (4.4), ne $n = 2, 3$ tem-se:

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi,t)| &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\int_0^t (1+s)^{-1} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^1} + C|\xi|\int_0^t (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \leq C, \end{aligned}$$

desde que $|\xi|^2(1+t) \leq C_0$ para alguma constante $C_0 > 0$.

Lema 4.12 *Seja* $u_0(x) \in L^1(R^n) \cap H^2(R^n)$. *Então vale a estimativa:*

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 \leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}},$$

para $1 \leq n \leq 3$.

Demonstração: Multiplicando a equação em (4.1) por $-2\Delta u$ e integrando em R^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n}\left(|\nabla u|^2+|\Delta u|^2\right)dx+2\alpha\int_{R^n}|\Delta u|^2\,dx=2\int_{R^n}\Delta u\left[\varphi\left(u\right).\nabla u\right]dx.$$

Da desigualdade de Hölder vem que:

$$2\int_{R^n}\Delta u\left[\varphi\left(u\right).\nabla u\right]dx\leq\alpha\int_{R^n}|\Delta u|^2\,dx+\alpha^{-1}\left\|\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right\|_{\infty}^2\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx.$$

Se $n=1$ tem-se de (4.2) que $|\varphi\left(u\right)|\leq C\,|u|^2$, $|u|$ pequeno.

Então

$$\left\|\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right\|_{\infty}^2\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx\leq C\left\|u\left(t\right)\right\|_{\infty}^4\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg tem-se:

$$\left\|u\left(t\right)\right\|_{\infty}^4\leq\left\|u\left(t\right)\right\|^2\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}\left\|\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right\|_{\infty}^2\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx &\leq C\left\|u\left(t\right)\right\|^2\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^4\leq C\left\|u\left(t\right)\right\|^4\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|^2\\ &\leq C\left(1+t\right)^{-1}\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|^2. \qquad (4.33)\end{aligned}$$

Se $n=2$ tem-se de (4.2) que $|\varphi\left(u\right)|\leq C\,|u|$, $|u|$ pequeno.

Então

$$\left\|\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right\|_{\infty}^2\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx\leq C\left\|u\left(t\right)\right\|_{\infty}^2\int_{R^n}|\nabla u|^2\,dx.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg tem-se:

$$\left\|u\left(t\right)\right\|_{\infty}^2\leq C\left\|u\left(t\right)\right\|\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u(t))\|_\infty^2 \int_{R^n} |\nabla u|^2\,dx &\leq C\|u(t)\|\,\|\nabla u(t)\|^2\,\|\Delta u(t)\| \\
&\leq C\|u(t)\|^2\,\|\Delta u(t)\|^2 \qquad (4.34)\\
&\leq C(1+t)^{-1}\,\|\Delta u(t)\|^2. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Se $n = 3$ tem-se de (4.2) que $|\varphi(u)| \leq C|u|$, $|u|$ pequeno.

Então

$$\|\varphi(u(t))\|_\infty^2 \int_{R^n} |\nabla u|^2\,dx \leq C\|u(t)\|_\infty^2 \int_{R^n} |\nabla u|^2\,dx.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg tem-se:

$$\|u(t)\|_\infty^2 \leq C\|\nabla u(t)\|\,\|\Delta u(t)\|$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u(t))\|_\infty^2 \int_{R^n} |\nabla u|^2\,dx &\leq C\|\nabla u(t)\|\,\|\nabla u(t)\|^2\,\|\Delta u(t)\| \\
&\leq C\|u(t)\|\,\|\nabla u(t)\|\,\|\Delta u(t)\|^2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}\,\|\Delta u(t)\|^2 \\
&\leq C(1+t)^{-1}\,\|\Delta u(t)\|^2. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Assim, de (4.33), (4.35) e (4.36) segue que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + \alpha\|\Delta u(t)\|^2 \leq C'(1+t)^{-1}\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right)$$

Aplicando a igualdade de Parseval vem que:

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi + \alpha\int_{R^n}|\xi|^4|\hat{u}|^2\,d\xi \leq C'(1+t)^{-1}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi. \qquad (4.37)$$

Multiplicando (4.37) por $(1+t)^{2n}$ e usando o fato que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right] &= (1+t)^{2n}\frac{d}{dt}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi + \\ & \quad 2n(1+t)^{2n-1}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi,\end{aligned}$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right] + \alpha(1+t)^{2n}\int_{R^n}|\xi|^4|\hat{u}|^2 d\xi \leq \\ &\quad (2n+C')(1+t)^{2n-1}\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi. \qquad (4.38)\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha t_0 = 2n + C'$. Para $t \geq t_0$ seja

$$\begin{aligned}B(t) &= \left\{\xi \in R^n / |\xi|^2 \leq \frac{2n+C'}{\alpha + \alpha t - 2n - C'}\right\} \\ &= \left\{\xi \in R^n / \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \leq \frac{2n+C'}{\alpha+\alpha t}\right\}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\alpha(1+t)\int_{R^n}|\xi|^4|\hat{u}|^2 d\xi &= (\alpha+\alpha t)\int_{B(t)}|\xi|^4|\hat{u}|^2 d\xi + (\alpha+\alpha t)\int_{B(t)^c}|\xi|^4|\hat{u}|^2 d\xi \\ &\geq (2n+C')\int_{B(t)^c}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi \\ &\geq (2n+C')\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi - \\ &\quad (2n+C')\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi. \qquad (4.39)\end{aligned}$$

Muliplicando (4.39) por $(1+t)^{2n-1}$ tem-se

$$\begin{aligned}\alpha(1+t)^{2n}\int_{R^n}|\xi|^4|\hat{u}|^2 d\xi &\geq (1+t)^{2n-1}(2n+C')\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi - \\ &\quad (1+t)^{2n-1}(2n+C')\int_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Logo de (4.38) vem que:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi\right] \leq (1+t)^{2n-1}(2n+C')\int\limits_{B(t)}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi.$$

Usando o corolário 2 obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi\right] \leq C\,(1+t)^{2n-2-\frac{n}{2}},$$

para todo $t \geq t_0$.

Para $0 \leq t \leq t_0$ usando o lema (4.1) e (4.38) segue que

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi\right] \leq C\,(1+t)^{2n-2-\frac{n}{2}}.$$

Portanto para todo $t \geq 0$ tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)^{2n}\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi\right] \leq (1+t)^{2n-2-\frac{n}{2}}.$$

Integrando de 0 a t obtemos:

$$(1+t)^{2n}\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\xi|^2|\hat{u}|^2\,d\xi \leq \int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{u}_0|^2\,d\xi + C\,(1+t)^{\frac{3n-2}{2}}.$$

Logo

$$\|\nabla u\,(t)\|^2 + \|\Delta u\,(t)\|^2 \leq C\,(1+t)^{-2n} + C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}-1} \leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Capítulo 5

Conclusão

Estudamos o problema de Cauchy e o comportamento assintótico da solução da equação generalizada de Benjamin-Bona-Mahony-Burger no espaço n-dimensional, $1 \leq n \leq 3$.

Quando $n > 3$ e $\alpha > 0$, não encontramos resultados provados na literatura consultada. O caso $n \geq 1$ e $\alpha = 0$ é estudado pelo método da fase estacionária. Quando $n = 1$ o problema foi estudado por J. Albert [3] e quando $n > 1$ o resultado de decaimento foi obtido por P. Biler [6].

Se consideramos o problema (1.1), com uma dissipação localizada, isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha(x)\,\Delta u + B.\nabla u + \varphi(u)\,.\nabla u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \end{cases}$$

onde $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, Ω aberto do R^n.

Se $n = 1$, o problema foi estudado por G. Perla Menzala, Enrique Zuazua, C.F. Vasconcellos. Os autores obtiveram resultados de decaimento exponencial da solução periódica do problema para o caso da equação de KDV.

Se $n > 1$, o problema está em aberto.

Referências

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Albert,J., *Dispersion of low-energy for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, J. Differential Equations, 63 (1986), 117-134.

[3] Albert,J., On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation, *J. Math. Anal. and Appl.*, 141 (1989), 527-537.

[4] Amick, C. J., Bona, J. L., e Schonbek, M. E., *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differential Equations, 81 (1989), 1-49.

[5] Benjamin, T., Bona, J. L. e Mahony, J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems,*Phil. R. Soc. London*, Ser. A 272 (1972), 47-48.

[6] Biler, P., Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equatins in two space dimensions, *Diff. Integral Eqns 5*, (1992), 891-901.

[7] Bisognin, V., Menzala, G. P., Decay rates of solutions of nonlinear dispersive equations,*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 124-A (1994), 1231-1246.

[8] Brézis, H. , *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[9] Henry, D. B., How to remember the Sobolev inequalities, in Differential equations, *Lecture Notes in Math*, vol. 957, 97-109 Springer, Berlin.

[10] Iório, R., Iório, V., *Equações diferenciais parciais: uma introdução,* Livros Técnicos e Científicos Editora, R. J. 1988.

[11] Medeiros, L. A. e Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Impressos do IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1988.

[12] Menzala, G. P., Equações diferenciais: ordinárias e parciais (notas de aula), *Textos de Métodos Matemáticos, nº* 14, 1988.

[13] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[14] Strauss, W. A., Dispersions of low-energy waves for two conservative equations, A *rch. Rational Mech. Anal. 55* (1974), 86-98.

[15] Zhang, L., Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations in n-space dimensions, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 25, *nº* 12 (1995), 1343-1369.

GRÁFICA UFRGS

Impressão: Gráfica UFRGS
Rua Ramiro Barcelos, 2705 - 1º andar
Fone: 316 5088 Fax: 316 5083 - Porto Alegre - RS
E-mail: grafica@vortex.ufrgs.br