

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Curso de Pós-Graduação em Matemática

SOBRE O AVANÇO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

por

ARÌ JOÃO AIOLFI

Porto Alegre, fevereiro de 1999

Dissertação submetida por ARI JOÃO AIOLFI\* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Claus Ivo Doering

Banca Examinadora:

Dr. Albert Meads Fisher

Dr. Artur Oscar Lopes

Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Data de Defesa: 22 de fevereiro de 1999.

---

\* Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

[Um filósofo] afirmava conhecer todo o segredo... [Ele] examinou os dois estranhos celestes da cabeça aos pés e afirmou, diante deles, que suas pessoas, seus mundos, sóis e estrelas haviam sido criados unicamente para servir ao homem. Diante dessa afirmação, nossos dois viajantes caíram nos abraços um do outro, tomados de um acesso incontrolável ... de riso.

VOLTAIRE, *Micrômegas, uma História Filosófica* (1752).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, especialmente, ao Prof. Claus Ivo Doering pelo apoio, paciência, disponibilidade e por sua valiosa orientação.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Matemática pela atenção e por todo o conhecimento adquirido.

Aos amigos da Pós-Graduação pela solidariedade e momentos de descontração.

À Izabel, nossa secretária, pela simpatia e bom atendimento.

À Andréa, por ter provado que é possível amar à distância.

À UNOESC, por ter confiado em mim.

A Deus, apesar da dúvida.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é deduzir a discrepância com os leis de Newton observada no avanço do periélio de Mercúrio, a partir da introdução de um termo de correção relativística na equação do movimento de um corpo sob a ação de um campo de forças cuja atração é dada pela Lei de Gravitação Universal.

## ABSTRACT

In this work we derive the anomaly of the precession of Mercury's perihelion with respect to the laws of Newton, by virtue of the introduction of a relativistic correction in the equation of the movement of a body under the influence of a force field whose attraction is given by the Universal Law of Gravitation.

## ÍNDICE

Introdução .....	01
1. Campos de forças .....	08
2. Campos de forças centrais e conservativos .....	16
3. Forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância ..	25
4. Perturbação da lei de atração .....	34
5. O avanço do periélio de Mercúrio.....	43
6. Apêndice.....	63
Bibliografia.....	69

## 0. Introdução

A base da Mecânica Celeste é a teoria dinâmica e matemática que descreve o movimento dos planetas em torno do Sol, de um satélite em torno de um planeta, de um cometa em sua viagem pelo sistema solar e fenômenos semelhantes. Juntos, dados observacionais e teoria matemática, produziram uma descrição clara do movimento dos corpos celestes através do universo visível.

O primeiro cientista a trazer poderosas idéias dinâmicas e a matemática indispensável à Mecânica Celeste foi Isaac Newton (1642-1727), que em 1687 publicou sua obra fundamental, *Principia Mathematica*. Newton, porém, não partiu do nada, mas continuou o trabalho de predecessores como Galileu e Kepler. Em 1609, Johannes Kepler (1571-1630) anunciou duas das suas três leis de movimento planetário, e a terceira se seguiu em 1619. Estas leis foram formuladas a partir dos dados de observações do planeta Marte feitas por Tycho Brahe durante a segunda metade do século XVI. Foi Kepler quem fez o rompimento definitivo com as idéias arraigadas de que só círculos e esferas poderiam ser usados para descrever movimentos de corpos celestes e suas leis constituem o clímax de milhares de anos de astronomia puramente observativa. Em termos atuais, as leis de Kepler são as seguintes:

- 1) *A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol em um foco.*
- 2) *O vetor radial do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.*
- 3) *O período de cada planeta é proporcional à potência  $3/2$  do semi-eixo maior de sua órbita.*

Estas leis empíricas enunciadas por Kepler levaram Newton, entre outros, à conclusão que a força que mantém um planeta em sua órbita ao redor do Sol varia inversamente com o quadrado de sua distância ao Sol. Assim que Newton conseguiu provar que a atração entre duas esferas homogêneas poderia ser calculada como se as massas das esferas estivessem concentradas em seus centros, a dinâmica astronômica progrediu muito. A Lei de Gravitação Universal, proclamada por Newton no *Principia Mathematica*, afirma que “cada partícula no universo atrai cada outra partícula de tal modo que a força entre ambas tem a direção da reta que liga as duas partículas e magnitude

$$\frac{GMm}{r^2},$$

onde  $M$  e  $m$  são as massas das partículas,  $r$  é a distância entre elas e  $G$  é uma constante universal denominada constante gravitacional e que independe da partícula”.

Nesta lei está baseada a estrutura teórica da Mecânica Celeste. Na mesma obra, Newton enunciou os postulados dos quais depende toda a análise subsequente; estas leis de Newton são:

- 1) *Toda partícula permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, exceto se sofrer a ação de uma força.*
- 2) *Uma partícula sob ação de uma força move-se de tal modo que a aceleração é diretamente proporcional à força e inversamente proporcional à sua massa.*
- 3) *A força exercida sobre uma partícula por uma outra partícula é igual e oposta à força exercida pela primeira partícula sobre a segunda e age ao longo da reta que liga*

*as duas partículas.*

A partir destas leis e da Lei de Gravitação Universal, podemos deduzir as leis de Kepler para o movimento dos planetas. Em particular, na mecânica newtoniana, a equação que descreve o movimento de um planeta é dada por

$$\rho'' + \rho = \frac{\mu}{l^2}, \quad (0.1)$$

na qual  $\mu = GM$  é constante ( $M$  é a massa do Sol) e  $l$  é o momento angular, também constante; a derivada é em termos da coordenada polar  $\theta$ , e  $\rho = \frac{1}{r}$ . A partir desta equação que depende da lei de atração ser inversamente proporcional ao quadrado da distância, decorre que as únicas trajetórias limitadas possíveis são elípticas, com o Sol em um dos focos – o outro foco é simplesmente um ponto no espaço, sem significado físico. O ponto da órbita de um planeta mais próximo do Sol é denominado de periélio e o ponto mais distante é o afélio; a reta que liga estes extremos passa pelos focos e a metade do segmento determinado pelo periélio e afélio é o semi-eixo maior da órbita do planeta.

As órbitas elípticas dos planetas são, entretanto, apenas uma primeira aproximação da órbita efetivamente observada. O modelo newtoniano produz elipses como órbitas por causa das várias hipóteses introduzidas no modelo. Entre outras, supomos que o Sol está fixo em um sistema inercial. Também ignoramos o efeito da atração gravitacional dos demais planetas sobre a trajetória de cada um; mas como as massas dos planetas são muito pequenas se comparadas à do Sol, produzem somente perturbações

muito pequenas da órbita elíptica. No entanto, estas pequenas perturbações são importantes e podem ser incorporadas ao estudo do movimento dos planetas no modelo newtoniano.

Nos séculos seguintes à publicação do *Principia Mathematica*, as leis de Newton obtiveram uma série brilhante de sucessos na explicação do movimento dos integrantes do sistema solar. No entanto, algumas irregularidades observadas na órbita de Urano permaneceram inexplicadas, mesmo levando-se em conta a atração gravitacional de todos os planetas até então conhecidos. Em 1846, J. Adams na Inglaterra e U. LeVerrier na França descobriram, independentemente, que as irregularidades poderiam ser explicadas pela presença de um planeta desconhecido e fizeram uma previsão de sua posição. A descoberta de Netuno pouco tempo depois, exatamente na posição prevista, foi talvez a mais esplêndida verificação da teoria de Newton. O movimento da Lua e do cometa Encke (e depois do de Halley) ainda mostravam uma discrepância com o modelo newtoniano, mas isto era de se esperar, pois nestes casos há também forças não gravitacionais em jogo.

Permanecia, entretanto, um problema sério no movimento observado dos planetas. A órbita de Mercúrio não é precisamente elíptica: a cada revolução, o periélio está ligeiramente adiantado na órbita. Um ano antes de prever a existência de Netuno, LeVerrier já calculou que o avanço observado no periélio de Mercúrio era de 35'' (segundos de arco) por século maior do que o esperado de acordo com a teoria newtoniana, mesmo levando-se em conta a atração gravitacional de todos os demais

planetas. Este problema foi confirmado em 1882 por S. Newcomb, que deu um valor de  $43''$  para a discrepância no avanço secular do periélio de Mercúrio. Os outros planetas igualmente apresentam uma precessão, como também é chamado o avanço do periélio, mas nestes, este avanço é quase nulo devido à maior distância do Sol. No caso de Mercúrio, este avanço pequeno (tão pequeno que são necessários mais de 3 milhões de anos terrestres para o periélio de Mercúrio dar uma volta completa em torno do Sol), entretanto, não pode ser desprezado. Várias hipóteses foram sugeridas, desde a existência de um planeta ou de um grupo de planetas misteriosos entre Mercúrio e o Sol, o que não foi verificado, até uma influência de matéria associado com uma “luz zodiacal” observada no plano da eclíptica. Newcomb chegou a levantar a hipótese que a atração gravitacional do Sol talvez não fosse exatamente proporcional ao inverso do quadrado da distância, mas infelizmente esta hipótese foi abandonada mais tarde pelo próprio Newcomb.

A causa do avanço do periélio de Mercúrio permaneceu um mistério total até 1915 quando, no dia 18 de novembro, Albert Einstein (1879-1955) apresentou à Academia Prussiana de Ciências em Berlim o trabalho [4], no qual finalmente é explicada a discrepância de  $43''$  com base na Teoria da Relatividade Geral, recém criada por ele. Além de explicar a precessão de Mercúrio, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein fez duas previsões, ambas confirmadas com observações posteriores: primeiro, que a trajetória da luz é curvada pela gravidade e segundo, que a frequência da luz sofria um desvio para o vermelho, na parte visível do espectro, devido à gravidade;

este desvio é distinto do efeito Doppler produzido pela luz da estrela que se afasta. Estas três explicações foram as principais razões para o sucesso obtido pela Teoria da Relatividade Geral e por sua aceitação no mundo da ciência, gradativamente vencendo a resistência de não modificar as idéias estabelecidas como verdadeiras há mais de dois séculos, por Newton.

Ao invés de usar a Lei de Gravitação Universal, Einstein utiliza idéias geométricas de Riemann e unifica o movimento no campo gravitacional do Sol, tanto de partículas materiais como até da própria luz, que simplesmente percorrem geodésicas segundo uma métrica semi-riemanniana no espaço-tempo. Em termos da equação (0.1) do movimento, a correção relativística do modelo newtoniano corresponde à introdução de um termo quadrático:

$$\rho'' + \rho = \frac{\mu}{l^2} + \kappa\rho^2, \quad (0.2)$$

onde  $\kappa$  é proporcional ao inverso do quadrado da velocidade da luz. Observamos, portanto, que o modelo newtoniano corresponde a tomar a velocidade da luz como sendo infinita, o que acarreta  $\kappa = 0$  e reduz (0.2) à equação (0.1).

Em princípio, poderíamos também obter a equação do movimento (0.2) utilizando as leis de Newton, como obtivemos (0.1); para isto, bastaria utilizar uma lei de atração gravitacional não simplesmente dada pelo inverso do quadrado da distância, como afirma a Lei de Gravitação Universal, mas também com termos de ordem maior, como suspeitado por Newcomb, e que no caso específico de Mercúrio, “ explicaria ” a precessão do periélio. Entretanto, uma tal “ lei de atração ” seria talhada especificamente

para Mercúrio e, portanto, completamente inútil para descrever o movimento dos demais planetas.

O objetivo deste trabalho é provar que a equação com a correção relativística (0.2) explica o avanço do periélio de Mercúrio que a equação (0.1) não consegue explicar. Também deduzimos a equação (0.2) a partir da métrica semi-riemanniana de Schwarzschild e, antes disto, deduzimos, a partir das leis de Newton, a equação do movimento (0.1) e as leis de Kepler.

Este trabalho está dividido em 5 partes: nas duas primeiras seções deduzimos as equações do movimento de uma partícula sob a ação de um campo de forças central e conservativo; na Seção 3 estudamos o movimento de uma partícula sob a ação de um campo central e conservativo com uma lei de atração inversamente proporcional ao quadrado da distância; na quarta seção calculamos a variação produzida pela correção relativística e na última seção traduzimos os resultados obtidos nas seções anteriores para o contexto específico do sistema solar.

A bibliografia sobre este assunto é extensa e, para elaborar este trabalho, nos beneficiamos de várias fontes. Em particular aprendemos muito das seguintes obras para as respectivas seções:

POLLARD [11] Capítulos 1 e 4, para as Seções 1 a 4.

COLLINSON [3] Capítulos 5 a 7 e McCUSKEY [9] Capítulos 1 a 3, para as Seções 1 a 3.

CHAZY [2] Capítulo 2 e FABER [5] Capítulo 3, para a Seção 5.

## 1. Campos de forças

Queremos estudar o movimento de uma partícula sujeita unicamente a um campo de forças.

**Definição 1.1.** *Um campo de forças em  $\mathbf{R}^3$  é um campo vetorial  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , no aberto  $A \subseteq \mathbf{R}^3$ , onde  $F(x)$  é interpretado como uma força agindo sobre uma partícula localizada em  $x$ .*

Pela segunda lei de Newton, um caminho  $x : I \rightarrow A$  duas vezes diferenciável no intervalo  $I \subseteq \mathbf{R}$  descreve o movimento de uma partícula de massa  $m > 0$  sujeita unicamente ao campo de forças  $F$  se  $x$  satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$mx''(t) = F(x(t)), \quad t \in I .$$

Pela teoria de equações diferenciais, dadas condições iniciais  $t_o \in \mathbf{R}$ ,  $x_o \in A$  e  $v_o \in \mathbf{R}^3$ , existe um único movimento possível  $x : I \rightarrow A$  sob este campo de forças  $F$ , definido em um intervalo maximal  $I$  tal que  $t_o \in I$ ,  $x(t_o) = x_o$  e  $x'(t_o) = v_o$ . Dizemos que  $x : I \rightarrow A$  é uma *trajetória* do campo, que descreve a *posição* da partícula, que  $x'(t) = v(t) = v$  é a *velocidade* da partícula e que  $v'(t) = a(t) = a$  é a *aceleração* da partícula. Assim  $ma = F$  é a segunda lei de Newton.

Um tipo especial de campos de forças que nos interessa são os *campos conservativos*, que são dados pelo gradiente de um potencial.

**Definição 1.2.** Dizemos que um campo  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^3$  aberto, é conservativo se existe uma função  $U : A \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{k+1}$  tal que  $F = -\nabla U$  vale em  $A$ ; neste caso,  $U$  é um potencial de  $F$ .

Estes campos são denominados conservativos pois conservam a energia total das partículas em movimento.

**Definição 1.3.** Se  $x : I \rightarrow A$  é a trajetória de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de um campo conservativo  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  com potencial  $U$ , então

$$\frac{1}{2}m |v(t)|^2 = T(v(t))$$

é a energia cinética da partícula, enquanto que

$$U(x(t))$$

é a energia potencial e a soma

$$\frac{1}{2}m |v(t)|^2 + U(x(t)) = E(x(t), v(t)) \quad (1.1)$$

é a energia total da partícula.

**Teorema 1.1.** *A energia total de uma partícula sob a ação de um campo de forças conservativo é constante ao longo do movimento.*

**Prova:** A energia total  $E = T + U$  de uma partícula é dada por (1.1), de modo que

$$\begin{aligned} E' &= T' + U' = m\langle v, v' \rangle + U'(x) \cdot x' = \langle v, mv' \rangle + \langle \nabla U(x), v \rangle = \\ &= \langle v, ma \rangle + \langle -F(x), v \rangle = \langle v, ma - F(x) \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0; \end{aligned}$$

logo  $E$  é constante. □

Um outro tipo especial de campos de forças que nos interessa são os *campos centrais*, nos quais a força  $F$  aponta na direção da reta determinada pela posição da partícula e uma origem fixada.

Para ver o interesse neste tipo de força, introduzimos o *momento angular* de uma partícula em movimento.

**Definição 1.4.** *Se  $x : I \rightarrow A$  é a trajetória de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de um campo de forças qualquer  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ , então o produto vetorial*

$$x(t) \times v(t) = c(t) \tag{1.2}$$

*é o momento angular da partícula.*

Sabemos <sup>(1)</sup> que o produto vetorial é nulo entre vetores colineares, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(t) &= c' = (x \times v)' = x' \times v + x \times v' = \\ &= v \times v + x \times a = 0 + x \times a = x \times \frac{1}{m}F(x)\end{aligned}$$

Vemos, assim, que a derivada  $c'(t)$  será nula e portanto o vetor  $c(t)$  será constante, sempre que o campo  $F(x)$  for colinear com a posição  $x$ . Como a posição  $x(t) = 0 \in \mathbf{R}^3$  sempre determina  $c(t) = 0$ , restringimo-nos a movimentos em  $A = \mathbf{R}^3 - \{0\}$ , fora da origem.

**Definição 1.5.** *Um campo de forças  $F : \mathbf{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^3$  é dito um campo central se existe uma função  $h : \mathbf{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$  tal que*

$$F(x) = h(x) \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Assim  $|h(x)|$  é a componente radial de  $F(x)$  e  $\frac{x}{|x|}$  é a componente angular do campo, que não está definido na origem.

**Teorema 1.2.** *O momento angular de uma partícula sob a ação de um campo de forças central é constante ao longo do movimento.*

---

<sup>1</sup>Propriedades do produto vetorial estão relacionadas no Apêndice.

**Prova:** De (1.2) segue que

$$\begin{aligned}c' &= (x \times v)' = x \times \frac{1}{m} F(x) = x \times \frac{h(x)}{m |x|} x = \\ &= \left( \frac{h(x)}{m |x|} \right) x \times x = 0,\end{aligned}$$

logo  $c$  é constante. □

Neste caso, como o momento angular é constante ao longo do movimento e  $x$  é sempre perpendicular a  $c = x \times v$ , decorre que o movimento permanece confinado a um plano perpendicular ao momento angular, pelo menos quando este momento é não-nulo. Mas isto é geral:

**Teorema 1.3.** *O movimento de uma partícula sob ação de um campo de forças central é sempre planar.*

**Prova:** Seja  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  uma trajetória do campo central  $F(x)$ . Como

$$x \perp x \times v = c$$

e  $c$  é constante,  $x(t)$  permanece no plano que passa pela origem e é perpendicular a  $c$ , sempre que  $c \neq 0 \in \mathbf{R}^3$ . Mas no caso  $c = 0$ , como <sup>(2)</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) = \frac{(x \times v) \times x}{|x|^3} = \frac{c \times x}{|x|^3} = 0,$$

---

<sup>2</sup>Ver Apêndice Lema 6.2 b) para esta derivada.

resulta que  $x(t) = |x(t)| u$  para  $t \in I$  e um vetor constante  $u \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$ . Assim  $x(t) \in [u]$ , para  $t \in I$  e portanto <sup>(3)</sup> o movimento ocorre na reta fixa  $[u]$ , em particular em um plano. □

Passamos agora a estudar campos de forças que são centrais e conservativos. Tais campos têm energia total e momento angular constantes ao longo do movimento; além disto, necessariamente a componente radial  $h(x)$  de tais campos é constante nas esferas centradas na origem, isto é,  $h(x_1) = h(x_2)$  para  $|x_1| = |x_2|$ . Isto decorre do seguinte resultado, que mostra que um campo central é conservativo, se e só se a intensidade da força em  $x$  depende somente da distância  $|x|$  de  $x$  à origem e não da posição  $x$  de  $x$ .

**Teorema 1.4.** *[[7], pg 19] Seja  $F : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  um campo de forças de classe  $C^k$  qualquer. São equivalentes:*

1)  *$F$  é central e conservativo.*

2) *Existe  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{k+1}$  tal que  $U(x) = -\psi(|x|)$ ,  $\forall x \neq 0$ , define um potencial de  $F$ .*

3) *Existe  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^k$  tal que  $F(x) = -\varphi(|x|) \frac{x}{|x|}$ ,  $\forall x \neq 0$ .*

**Prova:** Suponha 1). Então,  $F$  conservativo implica que existe  $U : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  diferenciável tal que  $\nabla U = -F$  e  $F$  central implica que existe  $h : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $F(x) = h(x) \frac{x}{|x|}$ . Para provar 2) devemos provar que  $U : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  é

---

<sup>3</sup>Aquí  $[u]$  denota a reta em  $\mathbf{R}^3$  gerada por  $u$ .

constante em cada esfera centrada na origem. Seja

$$S_r = \{x \in \mathbf{R}^3; |x| = r\}, r > 0,$$

uma esfera qualquer. Como quaisquer dois pontos em  $S_r$  podem ser ligados por um caminho em  $S_r$  (já que  $S_r$  é conexa), é suficiente mostrar que  $U$  é constante em qualquer caminho em  $S_r$ . Dado um caminho  $z : I \rightarrow S_r \subset \mathbf{R}^3 - \{0\}$  qualquer, vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(z(t)) &= \langle \nabla U(z(t)), z'(t) \rangle = -\langle F(z(t)), z'(t) \rangle = \\ &= \left( \frac{h(z(t))}{|z(t)|} \right) \langle z(t), z'(t) \rangle, t \in I. \end{aligned}$$

Mas  $|z(t)| = r > 0$  para qualquer  $t$  e portanto

$$0 = \frac{d}{dt} |z(t)| = \frac{\langle z(t), z'(t) \rangle}{|z(t)|}.$$

Segue que  $\frac{d}{dt}U(z(t)) = 0$  em  $I$ , o que implica que  $U(z(t))$  é constante. Isto prova que  $U$  é constante nas esferas centradas na origem, e portanto, prova 2). Suponha 2).

Temos  $U(x) = -\psi(|x|)$  diferenciável, e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}U(x) = -\psi'(|x|) \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = -\frac{\psi'(|x|)}{|x|}x_i,$$

portanto

$$\nabla U(x) = -\frac{\psi'(|x|)}{|x|}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\psi'(|x|)}{|x|}x.$$

Logo

$$F(x) = -\nabla U(x) = \frac{\psi'(|x|)}{|x|}x = -\varphi(|x|)\frac{x}{|x|}, \forall x \neq 0,$$

bastando por  $\varphi(|x|) = -\psi'(|x|)$ ,  $\forall x \neq 0$ . Isto prova 3). Para ver que 3) implica 1)

basta por  $h(x) = -\varphi(|x|)$ . □

## 2. Campos de forças centrais e conservativos

Queremos estudar o movimento de uma partícula de massa  $m > 0$  sujeita unicamente a um campo de forças  $F$  central e conservativo. Como não vamos estudar mais do que uma partícula e as forças que nos interessam têm  $m$  como fator, é conveniente incluir a nossa constante  $m$  no próprio campo de forças, ou seja, trocar  $F$  por  $\frac{1}{m}F$ . Isto equivale a tomar  $m = 1$  no que já foi visto na seção anterior e portanto a segunda lei de Newton reduz-se a  $F = a$ .

Seja, pois,  $F : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  um campo de forças central e conservativo de classe  $C^k$ . Pelo Teorema 1.4, existe uma função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^k$  tal que

$$F(x) = -f(|x|) \frac{x}{|x|}$$

para cada  $x \neq 0$  e a segunda lei de Newton

$$x'' = -\frac{f(|x|)}{|x|} x$$

rege o movimento da partícula <sup>(4)</sup>. Para simplificar a escrita, passamos a usar

$$r = |x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

---

<sup>4</sup>Na notação do Teorema 1.4, temos  $mf = \varphi$ .

e, em particular, se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  descreve uma trajetória da partícula, omitimos a variável  $t$  e escrevemos  $\frac{d}{dt} = ' ,$  ou seja,

$$\begin{aligned} r &= r(t) = |x(t)| = |x|, \\ r' &= \frac{d}{dt}r(t) = \frac{d}{dt} |x(t)| = |x'| \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ .

Por ser  $F$  conservativo, podemos tomar um potencial  $U(x) = -g(|x|)$  do campo  $F$ , onde  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  é qualquer função de classe  $C^{k+1}$  tal que  $g' = -f$ . Em termos de  $g$ , a energia total  $E$  de uma trajetória  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  é dada por

$$\frac{1}{2} |v|^2 - g(r) = E,$$

onde  $v = v(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  é a velocidade.

Pelo Teorema 1.3, cada movimento do campo central  $F$  ocorre em um plano fixo, determinado pelo momento angular  $c = x \times v$ , que é constante. Se  $c = 0$ , então vimos na demonstração do teorema citado que o movimento é até retilíneo, pois  $\left(\frac{x}{r}\right)' = 0$  e assim existe  $u \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$  tal que  $x \in [u]$ . Daqui em diante vamos supor que

$$c = x \times v \neq 0$$

e introduzimos coordenadas euclidianas em  $\mathbf{R}^3$  tais que  $c = (0, 0, l)$ , com  $|c| = l > 0$

constante.

No plano  $xOy$  perpendicular a  $c$ , ou seja, no plano do movimento, introduzimos um sistema de coordenadas polares como na Figura 1 abaixo.

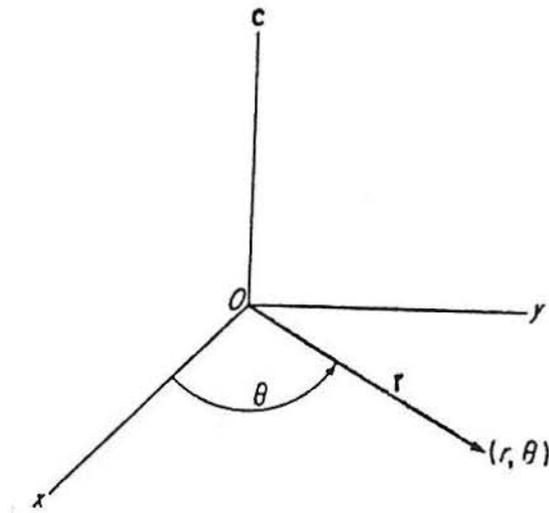


Figura 1

Temos então  $x = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$  e

$$\begin{aligned} x \times v &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \times (r' \cos \theta - r \sin \theta \theta', r' \sin \theta + r \cos \theta \theta', 0) = \\ &= (0, 0, rr' \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta \theta' - rr' \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta \theta') = \\ &= (0, 0, r^2 \theta' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) = (0, 0, r^2 \theta'). \end{aligned}$$

Como  $x \times v = c = (0, 0, l)$ , decorre a seguinte versão polar da conservação do momento angular (Teorema 1.2).

**Teorema 2.1.** Se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  é um movimento sob um campo de forças central, então

$$r^2\theta' = l$$

é constante.

No plano das coordenadas  $r, \theta$  podemos obter uma fórmula geral da equação do movimento sob a ação de um campo central e conservativo, como será visto no Teorema 2.4 abaixo. Para simplificar a argumentação, destacamos o seguinte lema.

**Lema 2.2.** Se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  é um movimento sob um campo de forças central e conservativo, então:

$$1) \quad rr' = \langle x, v \rangle;$$

$$2) \quad r'' = \frac{r^2 |v|^2 + r^2 \langle x, v' \rangle - \langle x, v \rangle^2}{r^3};$$

$$3) \quad (v \times c)' = f(r)rv - f(r)r'x;$$

$$4) \quad |v|^2 = (r')^2 + \frac{l^2}{r^2}.$$

**Prova:**

$$1) \quad rr' = |x| |x'| = |x| \frac{\langle x, x' \rangle}{|x|} = \langle x, v \rangle.$$

$$2) \quad r' = \frac{\langle x, x' \rangle}{|x|}, \text{ logo}$$

$$r'' = \frac{|x| (\langle x', x' \rangle + \langle x, x'' \rangle) - \frac{\langle x, x' \rangle}{|x|} \langle x, x' \rangle}{|x|^2} = \frac{r^2 |v|^2 + r^2 \langle x, v' \rangle - \langle x, v \rangle^2}{r^3}.$$

3) Como  $v' = a = -\frac{f(r)}{r}x$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v \times c) &= v' \times c + v \times c' = v' \times c + 0 = \\ &= -\frac{f(r)}{r}x \times (x \times v) = -\frac{f(r)}{r}[\langle x, v \rangle x - \langle x, x \rangle v] = \\ &= -f(r) \left[ \frac{\langle x, v \rangle x}{r} - \frac{\langle x, x \rangle v}{r} \right] = -f(r)[r'x - rx'] = \\ &= f(r)rv - f(r)r'x, \end{aligned}$$

pois  $r'x = |x|'x = \frac{\langle x, v \rangle}{|x|}x = \frac{\langle x, v \rangle x}{r}$  e  $\langle x, x \rangle = r^2$ .

4) Temos <sup>(5)</sup>

$$l^2 = |c|^2 = \langle x \times v, x \times v \rangle = r^2 |v|^2 - \langle x, v \rangle^2 = r^2 |v|^2 - (rr')^2$$

e portanto, dividindo por  $r^2$ , obtemos

$$(r')^2 + \frac{l^2}{r^2} = |v|^2,$$

o que prova o lema. □

**Proposição 2.3.** *Seja  $F(x) = -\frac{f(r)}{r}x$  um campo de forças central e conservativo.*

*Se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  é um movimento, então necessariamente*

$$f(r) = \frac{l^2}{r^3} - r''.$$

---

<sup>5</sup>Ver Lema 6.1 no Apêndice.

**Prova:** Com efeito, do Lema 2.2, ítems 3) e 4), temos

$$\begin{aligned} rr'' &= \frac{r^2 |v|^2 + r^2 \langle x, v' \rangle - \langle x, v \rangle^2}{r^2} = |v|^2 + \langle x, v' \rangle - (r')^2 = \\ &= \frac{l^2}{r^2} + \langle x, v' \rangle. \end{aligned}$$

Como  $v' = -\frac{f(r)}{r}x$ , fazendo o produto escalar de  $v'$  por  $x$ , temos

$$\langle x, v' \rangle = -f(r)r^{-1}\langle x, x \rangle = -f(r)r^{-1}r^2 = -rf(r)$$

e portanto

$$rr'' = \frac{l^2}{r^2} - rf(r).$$

Dividindo ambos os membros por  $r$ , obtemos a expressão desejada.  $\square$

As coordenadas polares  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$  ao longo da trajetória da partícula em movimento são funções do tempo. Sob um campo de forças central e conservativo, supondo que o momento angular é não nulo,  $l > 0$ , a lei de conservação do momento angular  $r^2\theta' = l$  implica que  $\theta'$  é positiva ao longo da trajetória. Então  $\theta$  é uma função crescente do tempo, e portanto  $r$  também é uma função de  $\theta$  ao longo da trajetória, isto é,  $r(t) = r(t(\theta)) = r(\theta)$ , pois podemos inverter  $\theta = \theta(t)$  para obter  $t = t(\theta)$ .

Considerando-se coordenadas polares, podemos obter uma importante fórmula

geral, para a qual introduzimos a variável  $\rho = \frac{1}{r}$ , e portanto a função

$$\rho(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{r(t(\theta))}.$$

**Teorema 2.4.** *[[11], pg 12] Seja  $F(x) = -\frac{f(r)}{r}x$  um campo central e conservativo.*

*Se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  é um movimento não retilíneo então*

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{1}{l^2\rho^2}f\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

**Prova:** Temos  $r(\theta) = [\rho(\theta)]^{-1}$  e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r(\theta) &= -[\rho(\theta)]^{-2}\frac{d}{dt}\rho(\theta) = -[\rho(\theta)]^{-2}\frac{d}{d\theta}\rho(\theta)\frac{d}{dt}\theta = -[\rho(\theta)]^{-2}\frac{d}{d\theta}\rho(\theta)lr^{-2} = \\ &= -[\rho(\theta)]^{-2}\frac{d}{d\theta}\rho(\theta)l[\rho(\theta)]^2 = -l\frac{d}{d\theta}\rho(\theta), \end{aligned}$$

já que  $r^2\frac{d}{dt}\theta = l$ , ou seja,  $\frac{d}{dt}\theta = lr^{-2}$ , e além disso  $r^{-2} = \rho^2$ . Derivando novamente, obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}r(\theta) = -l\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta)\frac{d}{dt}\theta = -l\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta)lr^{-2} = -l^2\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta)[\rho(\theta)]^2.$$

Por outro lado, a Proposição 2.3 garante que  $\frac{d^2}{dt^2}r - l^2r^{-3} = -f(r)$ . Assim,

$$-l^2[\rho(\theta)]^2\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta) + \rho(\theta)\right) = -l^2\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta)[\rho(\theta)]^2 - l^2[\rho(\theta)]^3 = -f\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right),$$

e portanto

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(\theta) + \rho(\theta) = l^{-2}[\rho(\theta)]^{-2}f\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right), \quad (2.1)$$

que é a fórmula prometida.  $\square$

A equação (2.1) é uma importante fórmula geral que, quando puder ser resolvida para  $\rho$  em termos de  $\theta$ , permite-nos obter a órbita de uma partícula em movimento sob ação de um campo de forças central e conservativo.

Além de  $E$  e  $c$ , campos centrais e conservativos podem ter uma outra constante do movimento, dependendo do tipo especial da força  $f(r)$ .

**Teorema 2.5.** *[[3], pg 88] Seja  $F(x) = -\frac{f(r)}{r}x$  um campo central e conservativo.*

*São equivalentes:*

1) *A lei  $f(r)$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja, existe  $\mu > 0$  tal que*

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2},$$

*para cada  $r > 0$ .*

2) *Para cada trajetória  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$ , o vetor  $v \times c$  é um múltiplo da posição a menos de uma translação constante, ou seja, existe um vetor  $d \in \mathbf{R}^3$  tal que*

$$v \times c \in d + [x],$$

*para cada  $t \in I$ .*

**Prova:** Suponha 1). Temos então  $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$ . Pelo item 3) do Lema 2.2 temos

$$(v \times c)' = -f(r)r'x + f(r)rv = -\frac{\mu r'}{r^2}x + \frac{\mu}{r}x' = \left(\frac{\mu}{r}x\right)'$$

e portanto  $v \times c - \frac{\mu}{r}x$  é um vetor constante. Suponha 2). Se  $v \times c = d + \alpha x$  para uma trajetória  $x$ , onde  $\alpha = \alpha(r)$ , então

$$-f(r)r'x + f(r)rv = (v \times c)' = (d + \alpha x)' = \alpha'x + \alpha v,$$

para todo  $t$ . Como  $x$  e  $v$  são linearmente independentes, decorre que  $\alpha' = -f(r)r'$  e  $\alpha = f(r)r$  para todo  $t$ . Logo

$$(\ln \alpha)' = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f(r)r'}{f(r)r} = -\frac{r'}{r} = (-\ln r)'$$

e portanto  $\ln \alpha = -\ln r + k$ , ou seja,  $\ln(\alpha r) = k$ , onde  $k$  é uma constante. Resulta então que

$$\alpha = \frac{e^k}{r} = \frac{\mu}{r}.$$

Como  $\alpha = f(r)r$ , obtemos  $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$ . □

Na próxima seção estudaremos campos de forças centrais e conservativos cuja lei de atração é proporcional ao inverso do quadrado da distância.

### 3. Forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância

Queremos estudar o movimento de uma partícula sob ação de um campo central e conservativo

$$F(x) = -\frac{f(r)}{r}x, \quad x \neq 0,$$

com uma lei de atração proporcional ao inverso do quadrado da distância, digamos

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2}, \quad r > 0,$$

para algum  $\mu > 0$  constante. Como na seção anterior, incorporamos a massa da partícula na força (ou então tomamos  $m = 1$ ) e utilizamos a notação  $r = |x|$ .

Um potencial deste campo é dado por

$$U(x) = -\frac{\mu}{|x|} = -\frac{\mu}{r} = -g(r), \quad x \neq 0.$$

Fixada uma trajetória  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$ , temos 7 grandezas escalares constantes ao longo do movimento, a saber:

$$E = E(x(t), v(t)) = \frac{1}{2} |v|^2 - \frac{\mu}{r} \in \mathbf{R},$$

$$c = x(t) \times v(t) \in \mathbf{R}^3 \text{ e}$$

$$d = v(t) \times c - \frac{\mu}{r}x(t) = v \times c - \frac{\mu}{r}x \in \mathbf{R}^3,$$

onde  $E$  é a energia total,  $c$  é o vetor momento angular e  $d \in \mathbf{R}^3$  é o vetor obtido no Teorema 2.5, devido à lei  $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$ . Podemos sempre supor que  $0 \in I$  e tomar os valores  $r(0) = r_o$ ,  $v(0) = v_o$ ,  $x(0) = x_o$  e  $\xi_o = |v(0)|$  para determinar

$$E = \frac{\xi_o^2}{2} - \frac{\mu}{r_o}, \quad c = x_o \times v_o \quad \text{e} \quad d = v_o \times c - \frac{\mu}{r_o}x_o.$$

Em vez de usar o vetor  $d$  <sup>(6)</sup> é costume usar um múltiplo de  $d$ , a saber,

$$e = \frac{1}{\mu}d \in \mathbf{R}^3, \tag{3.1}$$

chamado o *vetor excêntrico* da trajetória, ou *eixo excêntrico*.

Observe que se  $c \neq 0$  tem-se que  $\{c, e, c \times e\}$  forma uma base ortogonal do espaço tridimensional. De fato,  $c \times e$  é perpendicular a  $c$  e a  $e$ . De (3.1) temos

$$\mu e + \frac{\mu}{r}x = v \times c,$$

ou melhor,

$$\mu e + \frac{\mu}{r_o}x_o = v_o \times c. \tag{3.2}$$

---

<sup>6</sup>O vetor  $d$  é denominado por alguns autores como vetor de Lenz-Runge.

Fazendo o produto escalar com  $c$ , temos

$$0 = \langle v_o \times c, c \rangle = \langle \mu e + \frac{\mu}{r_o} x_o, c \rangle = \mu \langle e, c \rangle + \frac{\mu}{r_o} \langle x_o, c \rangle,$$

e portanto, como  $\langle x_o, c \rangle = 0$  e  $\mu \neq 0$ , resulta que  $\langle e, c \rangle = 0$ .

Observe ainda que  $\{e, c \times e\}$  gera o plano do movimento se  $c \neq 0$ . Além disto, se  $c = 0$  é fácil ver de (3.2) que  $e = -\frac{\mu}{r_o} x_o$  é um vetor unitário na reta do movimento.

Como nosso interesse não é o movimento retilíneo, continuamos supondo  $c \neq 0$ .

No plano do movimento introduzimos as grandezas  $\omega, \phi$  como segue.

Primeiramente fazemos o produto escalar de (3.2) por  $x$  e obtemos

$$\langle \mu e + \frac{\mu}{r} x, x \rangle = \langle x, v \times c \rangle = \langle x \times v, c \rangle = \langle c, c \rangle = l^2$$

e portanto,

$$l^2 = \mu \langle e, x \rangle + \frac{\mu}{r} \langle x, x \rangle = \mu \langle e, x \rangle + \frac{\mu}{r} r^2 = \mu (\langle e, x \rangle + r);$$

segue-se que

$$\langle e, x \rangle + r = \frac{l^2}{\mu}. \quad (3.3)$$

Temos dois casos, dependendo de  $e$  ser nulo ou não. Se  $e = 0$ , então

$$r = \frac{l^2}{\mu}$$

é constante ao longo do movimento, portanto o movimento é circular. Além disto, pelo Lema 2.2, item 4),

$$|v|^2 = (r')^2 + \frac{l^2}{r^2} = 0 + \frac{l^2}{r^2} = \frac{l^2}{r^2},$$

portanto a velocidade escalar é constante, já que  $|v| = \frac{l}{r} = \frac{\mu}{l}$ . Note que, neste caso,

$$2T = 2 \frac{1}{2} |v|^2 = \frac{l^2}{r^2} = \frac{\mu^2 l^2}{l^4} = \frac{\mu}{l^2} \mu = \frac{\mu}{r} = -U$$

e, em particular,  $E = T + U = \frac{1}{2}U = -\frac{\mu}{2r} = -\frac{\mu^2}{2l^2}$ .

Passamos a supor que  $e \neq 0$ . No plano do movimento introduzimos o vetor  $e$  como na Figura 2 abaixo.

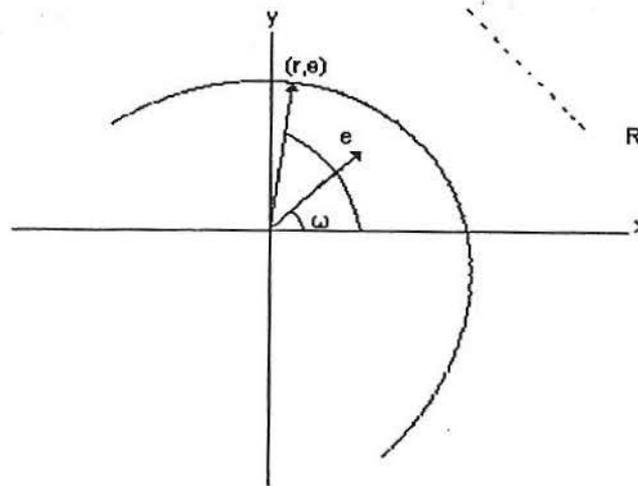


Figura 2

O ângulo fixo do eixo  $x$  até  $e$  é denotado por  $\omega$  e denominado *ângulo excêntrico*.

Se  $(r, \theta)$  representa a posição  $x$  da partícula, o ângulo  $\theta - \omega$  é denotado por  $\phi$  e

denominado *anomalia verdadeira*. A mesma posição da partícula pode ser também representada por  $(r, \phi)$  se  $e$  é usado como o eixo das coordenadas. Como  $\phi$  é o ângulo entre os dois vetores não nulos  $e$  e  $x$  segue que

$$\langle e, x \rangle = |e| |x| \cos \phi = |e| r \cos \phi,$$

portanto a equação (3.3) torna-se

$$r(|e| \cos \phi + 1) = |e| r \cos \phi + r = \frac{l^2}{\mu},$$

ou seja,

$$r = \frac{l^2}{\mu(1 + |e| \cos \phi)}, \quad (3.4)$$

que é a equação de uma cônica de excentricidade  $|e|$  em coordenadas polares, se considerarmos o eixo excêntrico  $e$  como eixo das coordenadas. Com efeito, considere a linha pontilhada  $R$  na figura acima a uma distância  $\frac{l^2}{\mu |e|}$  da origem  $O$ , perpendicular a  $e$  e do mesmo lado, em relação à origem, para o qual  $e$  aponta. Lembremos que uma secção cônica pode ser definida como o conjunto dos pontos  $p$  no plano, tal que a razão entre a distância não orientada de  $p$  a um ponto fixo e a distância não orientada de  $p$  a uma reta fixa que não contenha o ponto fixo seja uma constante positiva, a

excentricidade. Observe que a equação (3.4) pode ser escrita também como

$$r = |e| \left( \frac{l^2}{\mu |e|} - r \cos \phi \right),$$

ou seja, a distância da partícula que está em  $x$  à origem é  $|e|$  vezes sua distância de  $R$ . Conseqüentemente, se  $e \neq 0$ , a partícula movimenta-se sobre uma secção cônica de excentricidade  $|e|$  com um foco na origem.

**Teorema 3.1.** *A cônica de equação*

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos \phi},$$

*é uma elipse se  $0 \leq \varepsilon < 1$ , uma parábola se  $\varepsilon = 1$  e uma hipérbole se  $\varepsilon > 1$ . Além disto, o semi-eixo maior da elipse é dado por*

$$a = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon^2}.$$

**Prova:** (Ver Apêndice 6.2). □

**Corolário 3.2.** *A excentricidade  $\varepsilon = |e|$  da secção cônica dada por (3.4) é expressa em termos de energia total por  $\varepsilon = \sqrt{\frac{2l^2 E}{\mu^2} + 1}$ . Em particular, o movimento descreve uma parábola se a energia total é nula, uma elipse se  $E < 0$  e uma hipérbole se  $E > 0$ .*

**Prova:** Observamos que

$$\langle v \times c, x \rangle = \langle v \times (x \times v), x \rangle = \langle v \times x, v \times x \rangle = \langle c, c \rangle = l^2$$

pois  $c = x \times v$  e que

$$\langle v \times c, v \times c \rangle = |v \times c|^2 = |v|^2 |c|^2 = |v|^2 l^2,$$

pois  $v \perp c$ . Além disto, de  $E = \frac{1}{2} |v|^2 - \frac{\mu}{r}$  segue que

$$2l^2 E = |v|^2 l^2 - 2\frac{\mu}{r} l^2.$$

Temos  $d = v \times c - \frac{\mu}{r} x$ . Então

$$\begin{aligned} |d|^2 &= \langle d, d \rangle = \langle v \times c - \frac{\mu}{r} x, v \times c - \frac{\mu}{r} x \rangle = \\ &= \langle v \times c, v \times c \rangle - 2\frac{\mu}{r} \langle v \times c, x \rangle + \frac{\mu^2}{r^2} \langle x, x \rangle = \\ &= |v|^2 l^2 - 2\frac{\mu}{r} l^2 + \mu^2 = 2l^2 E + \mu^2. \end{aligned}$$

Resta lembrar que  $e = \frac{1}{\mu} d$ , de modo que

$$|e|^2 = \frac{1}{\mu^2} |d|^2 = \frac{2l^2 E}{\mu^2} + 1,$$

e portanto  $\varepsilon = |e| = \sqrt{\frac{2l^2 E}{\mu^2} + 1}$ . □

**Corolário 3.3.** *Se o movimento descreve uma elipse então a energia total  $E$  depende somente do semi-eixo maior  $a$ . Mais precisamente, temos*

$$|E| = \frac{\mu}{2a}$$

e a equação (3.4) da elipse também é dada por  $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \phi}$ .

**Prova:** Pelo teorema acima, se  $0 \leq \varepsilon < 1$ , temos

$$a(1 - \varepsilon^2) = \frac{l^2}{\mu},$$

e do corolário anterior decorre que

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2l^2 E}{\mu^2}.$$

Assim  $E = \frac{\mu}{-2a}$  e  $r = \frac{l^2}{\mu(1 + \varepsilon \cos \phi)} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \phi}$ . □

Vemos, assim, que o movimento sob ação de um campo de forças central e conservativo, em que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância, é sempre dado por uma cônica. É interessante observar que a recíproca também é válida, como segue. (Compare também com a afirmação do Teorema 2.5.)

**Teorema 3.4.** *[[9], pg 30] Se a trajetória de cada partícula sob a ação de um campo central e conservativo é uma cônica com um foco na origem então a lei de atração é inversamente proporcional ao quadrado da distância.*

**Prova:** Seja  $F(x) = -\frac{f(r)}{r}x$  um campo central e conservativo com um movimento  $x : I \longrightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  dado por

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

Sem perda de generalidade, supomos que o eixo das coordenadas polares é o semi-eixo maior da cônica. Pelo Teorema 2.4 sabemos que

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{1}{l^2\rho^2}f\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad r = \frac{1}{\rho}.$$

Derivando  $\rho = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\lambda}$  duas vezes, obtemos  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\frac{\varepsilon}{\lambda} \cos \theta$ . Portanto

$$f(r) = \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} \cos \theta + \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\lambda}\right) l^2 \rho^2 = \frac{1}{\lambda} l^2 \rho^2 = \frac{l^2 \lambda^{-1}}{r^2},$$

que é uma lei de atração proporcional ao inverso do quadrado da distância. □

## 4. Perturbação da lei de atração

Nesta seção estudamos o movimento de uma partícula sob ação do campo de forças central e conservativo

$$F(x) = -\frac{f(r)}{r}x, \quad x \neq 0,$$

com uma lei de atração dada por

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta}{r^4}, \quad r > 0,$$

para algum  $\mu > 0$  constante e  $\eta > 0$  pequeno. Como nas seções anteriores, incorporamos a massa da partícula na força (ou então consideramos a massa unitária), usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$  no plano do movimento e escrevemos  $r = |x|$  e  $\rho = \frac{1}{r}$ ; além disto, nesta seção passamos a denotar

$$\frac{d}{d\theta} = '.$$

Pelo Teorema 2.4 sabemos que o movimento de uma partícula sob a ação de um campo de forças central e conservativo, cuja lei de atração é a explicitada acima, é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$\rho'' + \rho = \frac{\mu}{l^2} + \frac{\eta}{l^2}\rho^2, \tag{4.1}$$

já que

$$\frac{1}{l^2 \rho^2} f\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{l^2 \rho^2} \left( \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta}{r^4} \right) = \frac{1}{l^2 \rho^2} (\mu \rho^2 + \eta \rho^4) = \frac{\mu}{l^2} + \frac{\eta}{l^2} \rho^2.$$

Aqui  $l = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  é o momento angular da partícula, constante ao longo do movimento, e que supomos não nulo: a órbita que nos interessa não é uma linha reta. Como só queremos entender o movimento de uma dada partícula, passamos a escrever

$$\kappa = \frac{\eta}{l^2}$$

e portanto a estudar a equação diferencial

$$\rho'' + \rho = \frac{\mu}{l^2} + \kappa \rho^2$$

Queremos entender a diferença entre o comportamento das soluções desta equação, para  $\kappa > 0$  pequeno, e das soluções da mesma equação com  $\kappa = 0$ , ou seja, com a lei de atração  $f(r)$  proporcional ao inverso do quadrado da distância.

Pelo que estudamos na seção anterior, as trajetórias da equação

$$\rho'' + \rho = \frac{\mu}{l^2}, \tag{4.2}$$

obtida de (4.1) tomando  $\kappa = 0$ , descreve uma cônica de equação

$$\rho = \frac{\mu}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \phi),$$

onde  $\varepsilon = |e| \geq 0$  é a excentricidade e  $\phi = \theta - \omega$  é o ângulo contado a partir do eixo excêntrico definido por  $e \in \mathbf{R}^3$ , que satisfaz (3.3), e ocupa a posição  $\theta = \omega$  (ver Figura 2, na Seção 3). Estas coordenadas polares  $(\varepsilon, \omega)$  do vetor excêntrico  $e$  são uma constante ao longo de cada movimento sob a ação de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Em particular, consideremos um movimento elíptico, com  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Passando de  $\kappa = 0$  para  $\kappa > 0$  pequeno, este movimento é levemente perturbado e não descreve mais uma elipse (pelo Teorema 3.4). Mesmo assim, esperamos que o movimento descreva aproximadamente uma elipse e que seja pequena a variação nas coordenadas polares

$$(\varepsilon, \omega) = (\varepsilon(\theta), \omega(\theta))$$

do vetor excêntrico  $e = e(\theta)$  ao longo da trajetória.

O objetivo desta seção é estimar a variação de  $\omega$  ao longo de uma volta.

**Teorema 4.1.** *[[11], pg. 88] A variação do ângulo excêntrico  $\omega$  ao longo de uma volta de uma trajetória limitada da equação (4.1) é dada aproximadamente, por*

$$\omega(2\pi) - \omega(0) \cong 2\pi \frac{\mu}{l^2} \kappa,$$

para  $\kappa \geq 0$  pequeno.

**Prova:** Para demonstrar o teorema, como não sabemos resolver (4.1) explicitamente, usamos o método da variação dos parâmetros. Para motivar este método, voltamos a

resolver (4.2) explicitamente pelo método da variação dos parâmetros e, em seguida, com as soluções obtidas, aproximamos as soluções de (4.1). A equação diferencial de segunda ordem (4.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_2, \\ \rho_2' = l^{-2}\mu - \rho_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

O sistema homogêneo

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_2, \\ \rho_2' = -\rho_1, \end{cases}$$

associado à equação homogênea  $\rho'' + \rho = 0$ , tem solução geral

$$\begin{cases} \rho_1 = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta, \\ \rho_2 = -c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta, \end{cases}$$

com condições iniciais  $(\rho_1(0), \rho_2(0)) = (c_1, c_2)$ . Agora nós interpretamos  $c_1$  e  $c_2$  como funções de  $\theta$  e derivamos  $\rho_1$  e  $\rho_2$  em relação a  $\theta$ , obtendo

$$\begin{cases} \rho_1' = c_1' \cos \theta - c_1 \sin \theta + c_2' \sin \theta + c_2 \cos \theta, \\ \rho_2' = -c_1' \sin \theta - c_1 \cos \theta + c_2' \cos \theta - c_2 \sin \theta. \end{cases}$$

Substituindo no sistema (4.3) resulta

$$\begin{cases} c_1' \cos \theta - c_1 \operatorname{sen} \theta + c_2' \operatorname{sen} \theta + c_2 \cos \theta = -c_1 \operatorname{sen} \theta + c_2 \cos \theta, \\ -c_1' \operatorname{sen} \theta - c_1 \cos \theta + c_2' \cos \theta - c_2 \operatorname{sen} \theta = l^{-2} \mu - c_1 \cos \theta - c_2 \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Fazendo os cancelamentos óbvios segue que

$$\begin{cases} c_1' \cos \theta + c_2' \operatorname{sen} \theta = 0, \\ -c_1' \operatorname{sen} \theta + c_2' \cos \theta = l^{-2} \mu. \end{cases}$$

Como o determinante deste sistema é não nulo, podemos resolver para  $c_1'$  e  $c_2'$  e obter

$c_1' = -l^{-2} \mu \operatorname{sen} \theta$  e  $c_2' = -l^{-2} \mu \cos \theta$ , donde, integrando, resulta

$$\begin{cases} c_1 = l^{-2} \mu \cos \theta + k_1, \\ c_2 = l^{-2} \mu \operatorname{sen} \theta + k_2. \end{cases}$$

Portanto, a solução geral para o sistema (4.3) é

$$\begin{cases} \rho_1 = (l^{-2} \mu \cos \theta + k_1) \cos \theta + (l^{-2} \mu \operatorname{sen} \theta + k_2) \operatorname{sen} \theta = l^{-2} \mu + k_1 \cos \theta + k_2 \operatorname{sen} \theta, \\ \rho_2 = (-l^{-2} \mu \cos \theta - k_1) \operatorname{sen} \theta + (l^{-2} \mu \operatorname{sen} \theta + k_2) \cos \theta = -k_1 \operatorname{sen} \theta + k_2 \cos \theta, \end{cases}$$

com condições iniciais  $(\rho_1(0), \rho_2(0)) = (l^{-2} \mu + k_1, k_2) = (c_1(0), c_2(0))$ . Em particular,

$$\rho(\theta) = \rho_1(\theta) = l^{-2} \mu + k_1 \cos \theta + k_2 \operatorname{sen} \theta$$

é a solução geral da equação (4.2) com condições iniciais  $\rho(0) = l^{-2}\mu + k_1$  e  $\rho'(0) = k_2$ .

Para ver a relação desta solução com a equação (3.4) da cônica, basta mudar das coordenadas euclidianas  $(k_1, k_2)$  das condições iniciais para as coordenadas polares, isto é, basta tomar,

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{l^2}{\mu} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \omega = \arctan \frac{k_2}{k_1}, \end{cases}$$

ou então, equivalentemente,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{\mu}{l^2} \varepsilon \cos \omega, \\ k_2 = \frac{\mu}{l^2} \varepsilon \operatorname{sen} \omega, \end{cases}$$

para obter

$$\rho(\theta) = \frac{\mu}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \theta \cos \omega + \varepsilon \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega) = \frac{\mu}{l^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)),$$

a mesma solução geral conhecida da equação (4.2). Observe que neste caso  $\kappa = 0$  temos  $\varepsilon$  e  $\omega$  constantes; em particular,  $\omega(2\pi) - \omega(0) = 0$ .

Voltando ao sistema (4.3), concluímos que

$$\begin{cases} \rho_1 = l^{-2}\mu(1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)), \\ \rho_2 = -l^{-2}\mu\varepsilon \operatorname{sen}(\theta - \omega), \end{cases} \quad (4.4)$$

é a solução geral com condições iniciais  $\rho_1(0) = \frac{\mu}{l^2}(1 + \varepsilon \cos \omega) = \frac{\mu}{l^2} + k_1 = c_1(0)$  e  $\rho_2(0) = \frac{\mu}{l^2}\varepsilon \operatorname{sen} \omega = k_2 = c_2(0)$ .

Passamos agora a considerar  $\kappa > 0$  pequeno. Neste caso a equação diferencial (4.1)

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_2, \\ \rho_2' = \frac{\mu}{l^2} - \rho_1 + \kappa\rho_1^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Não sabemos resolver este sistema, mas o que queremos é calcular a variação em  $\omega$ .

Para este fim utilizamos novamente o método da variação dos parâmetros, como segue.

Na solução geral (4.4) do sistema (4.3) interpretamos  $\varepsilon$  e  $\omega$  como funções de  $\theta$ ; assim, derivando  $\rho_1$  e  $\rho_2$  em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\begin{cases} \rho_1' = l^{-2}\mu(\varepsilon' \cos(\theta - \omega) + \varepsilon\omega' \sin(\theta - \omega) - \varepsilon \sin(\theta - \omega)), \\ \rho_2' = -l^{-2}\mu(\varepsilon' \sin(\theta - \omega) + \varepsilon \cos(\theta - \omega) - \varepsilon\omega' \cos(\theta - \omega)). \end{cases}$$

Substituindo estas derivadas no sistema (4.5), usando (4.4) e abreviando  $\phi = \theta - \omega$ , resulta

$$\varepsilon' \cos \phi + \varepsilon(\omega' - 1)\sin \phi = l^2\mu^{-1}\rho_1' = l^2\mu^{-1}\rho_2 = -\varepsilon \sin \phi$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon' \sin \phi + \varepsilon(1 - \omega')\cos \phi &= -l^2\mu^{-1}\rho_2' = -l^2\mu^{-1}[\mu l^{-2} - \rho_1 + \kappa\rho_1^2] = \\ &= -1 + (1 + \varepsilon \cos \phi) - \kappa l^{-2}\mu(1 + \varepsilon \cos \phi)^2 = \\ &= \varepsilon \cos \phi - l^{-2}\mu\kappa(1 + \varepsilon \cos \phi)^2. \end{aligned}$$

Fazendo os cancelamentos óbvios vem que

$$\begin{cases} \varepsilon' \cos \phi + \varepsilon \omega' \sin \phi = 0, \\ \varepsilon' \sin \phi - \varepsilon \omega' \cos \phi = -l^{-2} \mu \kappa (1 + \varepsilon \cos \phi)^2. \end{cases}$$

Como

$$\begin{vmatrix} \cos \phi & \varepsilon \sin \phi \\ \sin \phi & -\varepsilon \cos \phi \end{vmatrix} = \varepsilon \cos^2 \phi + \varepsilon \sin^2 \phi = \varepsilon > 0,$$

podemos resolver o sistema para  $\varepsilon'$  e  $\omega'$ , obtendo

$$\begin{cases} \varepsilon' = l^{-2} \mu \kappa \sin \phi (1 + \varepsilon \cos \phi)^2, \\ \omega' = \varepsilon^{-1} l^{-2} \mu \kappa \cos \phi (1 + \varepsilon \cos \phi)^2, \end{cases} \quad (4.6)$$

que não é mais fácil de resolver do que o original (4.5), mas é suficiente para explicar a variação em  $\omega$ . Devido à presença de  $\kappa > 0$  pequeno no lado direito das equações (4.6), as derivadas  $\varepsilon'$  e  $\omega'$  são pequenas e portanto nossa expectativa é que  $\varepsilon$  e  $\omega$  mudem muito lentamente. Para obter uma aproximação do valor desta variação de  $\omega$  podemos, assim, supor que o valor de  $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$  e de  $\omega = \omega(\theta)$  no lado direito das equações (4.6) é constante ao longo de cada volta. Mais precisamente, vamos supor que

$$\omega'(\theta) \cong \frac{\mu}{\varepsilon l^2} \kappa \cos(\theta - \omega) (1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega))^2$$

para cada  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , onde  $\varepsilon = \varepsilon(0)$  e  $\omega = \omega(0)$  são constantes.

Como

$$\begin{aligned}\cos \phi(1 + \varepsilon \cos \phi)^2 &= \cos \phi[1 + 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2 \cos^2 \phi] = \cos \phi + \varepsilon 2 \cos^2 \phi + \varepsilon^2 \cos^3 \phi = \\ &= \cos \phi + \varepsilon(1 + \cos 2\phi) + \varepsilon^2(1 - \sin^2 \phi) \cos \phi = \\ &= \cos \phi + \varepsilon + \varepsilon \cos 2\phi + \varepsilon^2 \cos \phi - \varepsilon^2 \sin^2 \phi \cos \phi = \\ &= \varepsilon + (1 + \varepsilon^2) \cos \phi + \varepsilon \cos 2\phi - \varepsilon^2 \sin^2 \phi \cos \phi\end{aligned}$$

e, lembrando que  $\phi = \theta - \omega$ ,

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \cos \phi \, d\theta = 0,$$

obtemos, portanto,

$$\begin{aligned}\omega(2\pi) - \omega(0) &= \int_0^{2\pi} \omega' d\theta \cong \frac{\mu}{\varepsilon l^2} \kappa \int_0^{2\pi} \cos \phi(1 + \varepsilon \cos \phi)^2 \, d\theta = \\ &= \frac{\mu}{\varepsilon l^2} \kappa \int_0^{2\pi} \varepsilon \, d\theta = \frac{\mu}{\varepsilon l^2} \kappa (2\varepsilon\pi) = 2\pi \frac{\mu}{l^2} \kappa,\end{aligned}$$

que é a aproximação desejada. □

## 5. O avanço do periélio de Mercúrio

Nesta seção aplicamos os resultados obtidos ao problema do avanço do periélio do planeta Mercúrio. Inicialmente deduzimos as equações que governam o movimento de um planeta qualquer.

Newton observou que uma partícula de massa  $m$  é atraída por uma partícula de massa  $M$  a uma distância  $r$  por uma força gravitacional  $F$  dada por

$$F = -G \frac{mM}{r^2} u,$$

onde  $u$  é o vetor unitário de  $M$  para  $m$  e  $G$  é a constante gravitacional; o sinal  $-$  significa que a força é atrativa. Formulada assim, esta lei, denominada *Lei de Gravitação Universal*, aplica-se unicamente a partículas e não a planetas, que não são partículas, e muito menos ao Sol. Para termos uma idéia dos fatores envolvidos, consideremos o sistema Terra-Sol. O raio da Terra (<sup>7</sup>) é aproximadamente  $6 \times 10^6$  m, enquanto que a distância média da Terra ao Sol é aproximadamente  $1,5 \times 10^{11}$  m: a proporção entre estas medidas é  $1/25000$ , de modo que a primeira é certamente insignificante em relação à segunda. Em outras palavras, para modelar a órbita da Terra, é razoável supor que a Terra é uma partícula, pois os erros envolvidos nesta hipótese são provavelmente muito menores que os erros decorrentes da observação real da órbita da Terra. Se a Terra pode ser modelada como uma partícula, pode o Sol?

---

<sup>7</sup>Ver Apêndice 6.3, onde estão relacionados algumas constantes astronômicas.

O raio do Sol é aproximadamente  $7 \times 10^8$  m, ou seja, mais de 100 vezes o raio da Terra; segue-se que a proporção entre o raio do Sol e o raio da órbita da Terra é aproximadamente  $1/500$ , o que levanta dúvidas sobre como justificar que o Sol pode ser considerado uma partícula, ainda mais quando o Sol certamente não parece uma partícula.

Para poder usar a Lei da Gravitação Universal no sistema solar precisamos, portanto, fazer hipóteses adicionais de simetria e de linearidade. A linearidade que passamos a supor se refere ao campo gravitacional, ou seja, supomos que o efeito acumulado da força gravitacional de várias partículas é a soma das forças – no caso de um contínuo de partículas, é a integral das forças. A simetria que supomos se refere à distribuição radial de densidade e à esfericidade dos planetas e do Sol.

**Teorema 5.1.** *[[3], pg 10] Uma esfera sólida com uma densidade que só depende do raio atrai uma partícula como se toda sua massa estivesse concentrada no centro da esfera.*

**Prova:** Considere uma casca da esfera sólida de espessura unitária com centro na origem  $O$  do espaço, raio  $a$  e densidade constante  $\rho$ . Suponhamos que a partícula de massa  $m$  é colocada no ponto  $P = (0, 0, r)$ , com  $r = OP > a$ . Sem perda de generalidade, supomos  $m = 1$ .

Um elemento de área da superfície desta casca está representado na Figura 3 abaixo

e é dado em coordenadas esféricas por

$$d\sigma = a^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi.$$

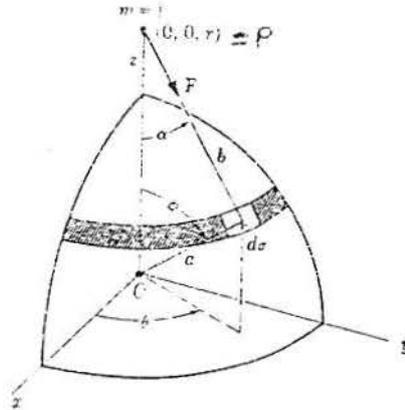


Figura 3

A massa do elemento  $d\sigma$  é dado por  $\rho d\sigma$ . A magnitude da força de atração entre o elemento de massa  $\rho d\sigma$  e a partícula em  $P$  é dado por

$$\frac{G\rho d\sigma}{b^2} = \frac{Ga^2\rho \sin \phi \, d\theta \, d\phi}{b^2},$$

onde  $b$  é a distância entre o elemento  $d\sigma$  e  $P$ . Por simetria, a força que o total da casca exerce sobre a partícula em  $P$  é dirigida ao longo de  $PO$ . A componente da força entre o elemento  $\rho d\sigma$  e a partícula em  $P$  nessa direção é

$$\frac{G\rho \, d\sigma \, \cos \alpha}{b^2} = \frac{Ga^2\rho \sin \phi \cos \alpha \, d\theta \, d\phi}{b^2},$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $F$  e o eixo  $z$ .

Para encontrar a magnitude da força total exercida pela casca sobre a partícula em  $P$ , basta integrar essa expressão sobre toda a casca, donde obtemos

$$|F| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{G\rho \cos \alpha}{b^2} d\sigma = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{G\rho a^2 \sin \phi \cos \alpha}{b^2} d\phi d\theta.$$

A integração desta expressão é mais fácil de efetuar usando  $b$  como a variável. Observando o triângulo de lados  $abr$  da Figura 3, vemos que, pela lei dos senos e dos co-senos,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi, \\ \cos \alpha &= \frac{r^2 - a^2 + b^2}{2br}. \end{aligned}$$

Derivando a primeira dessas expressões em relação a  $\phi$ , temos  $2b \frac{d}{d\phi} b = 2ar \sin \phi$ , ou seja,  $b db = ar \sin \phi d\phi$ . Substituindo em  $d\sigma$ , obtemos

$$d\sigma = \frac{ab db d\theta}{r},$$

portanto

$$\begin{aligned} |F| &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{b=r-a}^{r+a} \frac{G\rho ab}{rb^2} \left( \frac{r^2 - a^2 + b^2}{2br} \right) db d\theta = \\ &= \frac{G\rho a}{2r^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{b=r-a}^{r+a} \frac{r^2 + b^2 - a^2}{b^2} db d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G\rho a}{2r^2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{r^2}{b} + b + \frac{a^2}{b} \right]_{b=r-a}^{r=a} d\theta = \\
&= \frac{G\rho a}{2r^2} \int_0^{2\pi} 4a d\theta = -\frac{4aG\rho a 2\pi}{2r^2} = \frac{4\pi G\rho a^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

Mas  $4\pi\rho a^2$  é o total da massa da casca. Assim a casca atrai a partícula com uma força de magnitude

$$\frac{GM_c m}{r^2},$$

onde  $M_c$  é a massa total da casca (lembramos que tínhamos tomado  $m = 1$ ), que é exatamente a mesma que seria exercida sobre a partícula em  $P$ , por uma partícula localizada no centro da casca, cuja massa é igual ao total da massa da casca.

Para uma esfera sólida de raio  $R$  em que a densidade é uma função somente da distância do centro, a magnitude da força por unidade de massa em um ponto exterior é

$$\frac{4\pi Gm}{r^2} \int_{a=0}^R \rho a^2 da, \quad \rho = \rho(a).$$

Como a massa da esfera de raio  $R$  é

$$M_R = 4\pi \int_{a=0}^R \rho a^2 da,$$

substituindo na equação anterior obtemos a magnitude da força total, que é

$$\frac{GM_R m}{r^2}.$$

Portanto, a esfera sólida atrai uma partícula exterior como se toda sua massa fosse concentrada no centro.  $\square$

O Teorema 5.1 acima aplica-se analogamente ao próprio corpo que está sendo atraído, ou seja, para estudar a atração gravitacional entre o Sol e um planeta, podemos supor que ambos são partículas pontuais, que concentram toda sua massa em seus centros.

Com essas hipóteses adicionais de linearidade e de simetria, podemos reduzir o *problema dos dois corpos* para um problema de movimento sob a ação de um campo de forças central e conservativo.

O problema dos dois corpos consiste em descrever o movimento de dois corpos sob ação de sua atração gravitacional mútua. Suponha que  $O$  representa um ponto fixo no espaço do movimento. Sejam  $M$  e  $m$  as massas dos corpos que, com nossas hipóteses adicionais, representam as massas de duas partículas. Sejam  $x_1$  e  $x_2$  suas posições e  $r = |x_2 - x_1| > 0$  a distância entre eles; o vetor unitário de  $x_2$  para  $x_1$  é  $\frac{1}{r}(x_1 - x_2)$  e o de  $x_1$  para  $x_2$  é  $\frac{1}{r}(x_2 - x_1)$ . De acordo com a Lei de Gravitação Universal de Newton, a magnitude da força de atração entre as partículas é  $\frac{GMm}{r^2}$  e, portanto, da segunda lei de Newton sabemos que as equações diferenciais que regem o movimento das partículas  $M$  e  $m$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned} Mx_1'' &= \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r}, \\ mx_2'' &= \frac{GmM}{r^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever as equações acima como

$$\begin{aligned}x_1'' &= \frac{Gm}{r^3}(x_2 - x_1), \\x_2'' &= -\frac{GM}{r^3}(x_2 - x_1),\end{aligned}$$

onde vemos que a massa da partícula atraída é irrelevante para a equação diferencial que rege o movimento; é claro que a massa da partícula que atrai permanece nesta equação. Para reduzir o problema para o problema de um campo de forças central e conservativo, utilizamos o procedimento conhecido por *redução a coordenadas relativas*. Tomamos  $x = x_2 - x_1$  e temos  $x'' = x_2'' - x_1''$  e  $|x| = r$ , de modo que

$$x'' = x_2'' - x_1'' = -\frac{GM}{r^3}x - \frac{Gm}{r^3}x = -\frac{G(M+m)}{r^3}x$$

e assim, escrevendo  $\mu = G(M+m)$ , obtemos

$$x'' = -\frac{\mu}{r^3}x, x \neq 0.$$

Nesta forma, a equação do movimento descrito pela posição relativa  $x = x_2 - x_1$  da segunda partícula em relação à primeira, é idêntica à equação que descreve o movimento de uma partícula qualquer sob atração gravitacional de uma partícula de massa  $M+m$  situada na origem fixa de um sistema inercial.

Na verdade, num sistema de dois corpos, o que está fixo num sistema inercial não

é um dos dois corpos, mas sim o centro de massa destes dois corpos que, pelo princípio da conservação do momento linear, está em movimento retilíneo uniforme. O centro de massa de  $x_1$  e  $x_2$  tem coordenadas

$$x_c = \frac{M}{M+m}x_1 + \frac{m}{M+m}x_2 = x_1 + \frac{m}{M+m}x,$$

de modo que a distância do centro de massa a  $x_1$  é

$$|x_c - x_1| = \frac{m}{M+m} |x| = \frac{m}{M+m}r.$$

Assim, se a massa  $M$  do corpo em  $x_1$  é muito maior que a massa  $m$  do corpo em  $x_2$ , então  $\frac{m}{M+m}$  é muito pequeno, portanto, o centro de massa está praticamente no centro do corpo de massa  $M$  e a soma  $M+m$  das massas é praticamente a massa maior  $M$ .

No caso do Sol e seus planetas (mesmo Júpiter, o maior planeta, tem menos do que 1/1000 da massa do Sol) é plausível supor que o centro de massa do sistema Sol-planeta coincide com o centro do Sol e que a soma  $M+m$  das massas coincide com a massa do Sol; passamos, portanto, a supor que o Sol está fixo na origem e que de acordo com o modelo newtoniano, o movimento de um planeta em torno do Sol é regido pela equação

$$x'' = -\frac{\mu}{r^3}x, \quad x \neq 0, \tag{5.1}$$

com  $\mu = GM$ , onde  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  é a massa do Sol, que se

encontra na origem. Esta é a equação do movimento no campo de forças central e conservativo

$$F(x) = -\frac{f(r)}{r}x, \quad x \neq 0,$$

com a lei de atração

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2}, \quad r > 0,$$

inversamente proporcional ao quadrado da distância, de modo que podemos aplicar todos os resultados obtidos nas seções anteriores. Em particular, obtemos as leis de Kepler, como segue.

**Corolário 5.2 (Leis de Kepler).** *O movimento de um planeta em torno do Sol obedece às seguintes leis:*

- 1) *A órbita do planeta descreve uma elipse com o Sol em um dos focos.*
- 2) *O vetor radial do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.*
- 3) *O quadrado do período  $T$  de revolução do planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior  $a$ , com constante de proporcionalidade independente do planeta. Mais precisamente,*

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3.$$

**Prova:** As soluções da equação (5.1) são cônicas pelo Teorema 3.1. Como os planetas descrevem órbitas limitadas, não podem ser parábolas ou hipérbolas, de modo que são elipses. O Sol ocupa a origem do plano do movimento, que é um dos focos da elipse. Em coordenadas polares,  $r$  denota a distância do Sol ao planeta. Se  $dA$  denota a área

varrida pelo vetor radial do Sol ao planeta para um pequeno incremento no ângulo  $\theta$  dado por  $d\theta$ , a área é aproximadamente igual à área do triângulo de altura  $r$  e base  $r d\theta$ , isto é,  $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ . A lei da conservação do momento angular, dada pelo Teorema 2.1, fornece

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}l,$$

ou seja, a taxa de variação da área varrida pelo vetor radial do Sol ao planeta é constante. Finalmente, em um período  $T$  o planeta dá uma volta completa, de modo que a área varrida é

$$A = \int_0^T dA = \frac{lT}{2}.$$

Por outro lado, denotando os semi-eixos maior e menor por  $a$  e  $b$  respectivamente, sabemos que a área da elipse é  $A = \pi ab$ , de modo que

$$T = \frac{2A}{l} = \frac{2\pi ab}{l}.$$

Pelo Teorema 3.1 sabemos que

$$a^2 = \frac{l^4}{\mu^2(1 - \varepsilon^2)^2} \text{ e } b^2 = \frac{l^4}{\mu^2(1 - \varepsilon^2)},$$

e, portanto,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{l^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu},$$

o que prova o corolário. □

**Obs 5.1.** *A terceira lei de Kepler é apenas aproximadamente válida, pois o fator de proporcionalidade*

$$\frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{GM} \cong \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

*na verdade depende da massa do planeta e só é constante se idealizarmos  $M = M+m$ .*

Órbitas elípticas não apresentam avanço de periélio, pois a cada período voltam ao mesmo ponto. A Teoria da Relatividade Geral de Einstein, no entanto, interpreta o movimento de um planeta, ou de qualquer outro objeto em movimento inercial (inclusive o da luz), não como uma reação a uma força, mas como um movimento livre ao longo de uma geodésica no espaço-tempo de dimensão quatro, que é visto como uma variedade diferenciável dotada de uma métrica semi-riemanniana <sup>(8)</sup>

$$ds^2 = \sum_{\eta, \nu=0}^3 g_{\eta\nu} dx_\eta dx_\nu$$

que obedece a certos princípios, e onde  $ds$  é o análogo do comprimento de arco da métrica riemanniana. A métrica que explica o movimento no sistema solar é a métrica semi-riemanniana de Schwarzschild; como só queremos entender o movimento planetário, que é planar, basta utilizar a versão planar desta métrica que, em coordenadas polares, é

$$ds^2 = V^2 \gamma dt^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\theta^2. \quad (5.2)$$

---

<sup>8</sup>Semi-riemanniana pois a forma bilinear simétrica de matriz  $(g_{\eta\nu})$  é apenas não degenerada mas não é necessariamente positivo-definida.

Nesta métrica,  $V$  denota a velocidade constante da luz <sup>(9)</sup> e

$$\gamma = 1 - \frac{2\mu}{V^2 r}, \quad (5.3)$$

onde  $\mu = GM$ , como antes.

Veamos como interpretar a variável  $s$ . Numa primeira aproximação podemos tomar  $\gamma \cong 1$  em (5.3) e portanto (5.2) se reduz à métrica de Lorentz

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2.$$

Consideremos uma partícula material em movimento no plano  $r, \theta$  descrevendo uma trajetória dada por  $x(t) = (r(t), \theta(t))$ . Como a velocidade escalar é dada por

$$|v|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

conforme o Lema 2.2; item 4), resulta que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = V^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 - |v|^2.$$

Mas todos os planetas, inclusive Mercúrio, o mais rápido, têm velocidades escalares  $|v|$  praticamente desprezíveis em relação à velocidade da luz, de modo que podemos

---

<sup>9</sup>Nos textos de Física, é costume normalizar  $V = 1$ .

tomar  $V^2 - |v|^2 \cong V^2$  e, com um sinal conveniente,

$$\frac{ds}{dt} \cong V$$

em uma primeira aproximação. Integrando, obtemos

$$s = tV + s_0$$

e, portanto,  $s$  é um múltiplo do tempo, denominado *tempo próprio*. Em particular podemos reparametrizar a trajetória de uma partícula material com  $s$  em lugar de  $t$ .

**Obs 5.2.** *A bem da verdade,  $V$  e  $\mu$  são somente análogos, mas não idênticos, à velocidade da luz e a  $GM$ . O mesmo ocorre com  $t, r$  e  $\theta$ , que não são exatamente o tempo e as coordenadas polares no plano do movimento mas, como são suficientemente semelhantes, podemos, para os nossos propósitos, interpretá-los como tais.*

Uma geodésica no plano-tempo das variáveis  $t, r$  e  $\theta$  na métrica (5.2) é um caminho

$$x(s) = (t(s), r(s), \theta(s))$$

que satisfaz uma certa equação diferencial ordinária de segunda ordem na variável  $s$  e que envolve os coeficientes  $V^2\gamma, -\gamma^{-1}$  e  $-r^2$  da métrica  $ds^2$ . Como estes coeficientes só dependem de  $r$  e independem de  $t$  e  $\theta$ , é fácil obter uma interpretação física para

as componentes  $t$  e  $\theta$  de  $x(s)$ , pois podemos integrá-las e obter

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{B}{V} \quad (5.4)$$

e

$$V^2 \gamma \frac{dt}{ds} = A, \quad (5.5)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. Como vemos, podemos interpretar

$$A = V^2 \gamma \frac{dt}{ds} \cong V^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^{-1} = V$$

como a velocidade da luz e

$$B \cong B \frac{1}{V} \frac{ds}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \theta' = l$$

é o análogo do momento angular newtoniano, que é constante, já que o movimento é planar. No que segue, portanto, tomamos  $B = l$  em (5.4) e temos

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{l}{V}.$$

Em particular  $\frac{d\theta}{ds} > 0$  e, portanto, podemos inverter  $\theta = \theta(s)$  para obter  $s = s(\theta)$  e assim escrever a geodésica  $x(s)$  em função de  $\theta$ .

A terceira e última componente (a componente  $r$ ) da geodésica  $x(s) = x(s(\theta))$  não é

fácil de integrar, mas aqui podemos usar uma outra condição necessária de geodésicas de partículas materiais: a velocidade escalar segundo a métrica  $ds^2$  é constante e positiva; normalizando temos

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \right\rangle = \sum g_{\eta\nu} \frac{dx_\eta}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = \\ &= V^2 \gamma \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Não iremos nos aprofundar neste assunto, pois só queremos ver como a Teoria da Relatividade Geral explica o avanço do periélio de Mercúrio. Tudo que precisamos aqui é das equações (5.4) a (5.6); para maiores informações consultar [2] Cap. 2 e [5] Cap. 3.

Voltamos a escrever  $\rho = \frac{1}{r}$ , mais precisamente,

$$\rho = \rho(s) = \rho(s(\theta)) = \frac{1}{r(s(\theta))} = \frac{1}{r(s)} = \frac{1}{r}.$$

**Teorema 5.3.** *A equação diferencial*

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{l^2} + \frac{3\mu}{V^2}\rho^2$$

*descreve o movimento de uma partícula material ao longo de uma geodésica da métrica de Schwarzschild.*

**Prova:** O movimento  $x(s) = (t(s), r(s), \theta(s))$  de uma partícula material ao longo de

uma geodésica da métrica de Schwarzschild satisfaz (5.4) e (5.5), de modo que

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 &= \frac{B^2}{r^4 V^2} = \frac{l^2}{r^4 V^2}, \\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= \frac{A^2}{\gamma^2 V^4}\end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{l^2}{r^4 V^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

Substituindo em (5.6) obtemos

$$1 = \frac{A^2}{\gamma V^2} - \frac{l^2}{\gamma r^4 V^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{l^2}{r^2 V^2}$$

e, multiplicando por  $\gamma r^4 V^2 l^{-2}$ , vem que

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = -\frac{\gamma r^4 V^2}{l^2} + \frac{r^4 A^2}{l^2} - \gamma r^2.$$

Mas, de  $r = \frac{1}{\rho}$  segue que  $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}$ , de modo que

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -\frac{\gamma r^4 V^2}{l^2} \rho^4 + \frac{r^4 A^2}{l^2} \rho^4 - \gamma r^2 \rho^4 = -\frac{\gamma V^2}{l^2} + \frac{A^2}{l^2} - \gamma \rho^2$$

e portanto, usando (5.3), resulta que

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -\frac{V^2}{l^2} + \frac{2\mu}{l^2} \rho + \frac{A^2}{l^2} - \rho^2 + \frac{2\mu}{V^2} \rho^3 = \frac{A^2 - V^2}{l^2} + \frac{2\mu}{l^2} \rho - \rho^2 + \frac{2\mu}{V^2} \rho^3.$$

Resta derivar  $\rho$  em relação a  $\theta$  :

$$2 \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2\mu}{l^2} \frac{d\rho}{d\theta} - 2\rho \frac{d\rho}{d\theta} + 3 \frac{2\mu}{V^2} \rho^2 \frac{d\rho}{d\theta}$$

e cancelar  $2 \frac{d\rho}{d\theta}$  :

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{l^2} + \frac{3\mu}{V^2} \rho^2,$$

o que prova o teorema. □

Podemos, assim, usar o Teorema 4.1, com  $\kappa = \frac{3\mu}{V^2}$  e obter uma estimativa da precessão dos planetas do sistema solar segundo a Teoria da Relatividade Geral, como segue.

**Corolário 5.4.** *Segundo a Teoria da Relatividade Geral, o avanço do periélio por translação de um planeta no sistema solar é dado, aproximadamente, por*

$$\Delta\omega \cong \frac{6\pi\mu}{V^2 a(1 - \varepsilon^2)},$$

onde  $a$  e  $\varepsilon$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita do planeta.

**Prova:** Do Teorema 4.1 obtemos

$$\Delta\omega = \omega(2\pi) - \omega(0) \cong 2\pi \frac{\mu}{l^2} \frac{3\mu}{V^2} = \frac{6\pi\mu^2}{l^2 V^2},$$

já que  $\kappa = \frac{3\mu}{V^2}$ . Como a órbita dos planetas é aproximadamente uma elipse, podemos usar a relação

$$\frac{\mu}{l^2} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)},$$

dada no Corolário 3.3, de modo que o avanço do periélio de um planeta do sistema solar, a cada volta em torno do Sol, é dado aproximadamente por

$$\Delta\omega \cong \frac{6\pi\mu^2}{l^2V^2} \cong \frac{6\pi\mu}{V^2a(1 - \varepsilon^2)},$$

o que prova o corolário. □

Finalmente, para obter os 43'' por século terrestre de avanço do periélio do planeta Mercúrio, resta substituir os dados físicos (ver Apêndice 6.3) na estimativa dada no corolário acima. Em geral, temos

$$\begin{aligned} \mu &= GM \cong (6,67 \times 10^{-11}) \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} (1,99 \times 10^{30}) \text{ kg} \cong (1,3273 \times 10^{20}) \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}, \\ V^2 &\cong (8,9876 \times 10^{16}) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}, \end{aligned}$$

e

$$\pi = 180 \times 3600'' = (6,48 \times 10^5)'',$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{6\pi\mu}{V^2} &= \frac{6 \times (6,48 \times 10^5)'' \times (1,3273 \times 10^{20}) \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{(8,9876 \times 10^{16}) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \\ &= (5,74185 \times 10^9)\text{m}.\end{aligned}$$

No caso específico de Mercúrio, temos

$$a \cong 0,3871 \text{ U.A.} \cong (5,7910 \times 10^{10})\text{m}$$

e

$$\varepsilon = 0,2056,$$

de modo que

$$a(1 - \varepsilon^2) \cong (5,5462 \times 10^{10})\text{m}$$

e portanto

$$\Delta\omega \cong \frac{6\pi\mu}{V^2 a(1 - \varepsilon^2)} \cong \frac{(5,74185 \times 10^9)\text{m}}{(5,5462 \times 10^{10})\text{m}} = (1,03528 \times 10^{-1})''.$$

Como o ano de Mercúrio equivale a 88 dias terrestres, obtemos

$$\frac{(365,56 \times 100)}{88} = 415,409$$

translações por século terrestre, totalizando  $(415,409) \times (1,03528 \times 10^{-1})'' = 43,0065''$  de arco de avanço do periélio.

Uma representação extremamente exagerada do avanço do periélio de Mercúrio é dada pela Figura 4 abaixo.

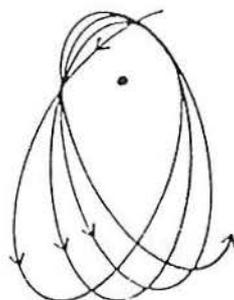


Figura 4

O valor observado deste avanço é de  $43,11 \pm 0,45$  segundos de arco por século além da quantia obtida pela aplicação da teoria de Newton levando-se em conta a influência de todos os demais planetas, de modo que esta previsão da Teoria da Relatividade Geral de Einstein é confirmada de maneira incisiva.

## 6. Apêndice

### 6.1. Produto Vetorial.

O produto vetorial  $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$  é uma aplicação bilinear alternada, isto é, valem

$$i) \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z;$$

$$ii) \quad (kx) \times y = k(x \times y);$$

$$iii) \quad x \times x = 0,$$

para quaisquer  $x, y, z \in \mathbf{R}^3$  e  $k \in \mathbf{R}$ . Em particular, decorre que também valem

$$iv) \quad (x + y) \times z = x \times z + y \times z;$$

$$v) \quad x \times (ky) = k(x \times y);$$

$$vi) \quad x \times y = -(y \times x);$$

$$vii) \quad x \times 0 = 0 = 0 \times x.$$

Além disto, o produto vetorial é a única aplicação bilinear tal que  $e_1 \times e_2 = e_3$ ,  $e_2 \times e_3 = e_1$  e  $e_3 \times e_1 = e_2$ , onde  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ , ou seja, a base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  do  $\mathbf{R}^3$  é positiva.

Do ponto de vista geométrico o que é mais importante é que o módulo  $|x \times y|$  é a área do paralelogramo gerado por  $\{x, y\}$ . Isto decorre das propriedades do produto vetorial e dos determinantes. Temos

$$viii) \quad |x \times y| = |x| |y| \operatorname{sen} \theta,$$

onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  é o ângulo entre  $x$  e  $y$  (no caso de  $x \neq 0 \neq y$ ; se  $x = 0$  ou  $y = 0$ , podemos tomar  $\theta = 0$ ). Finalmente utilizamos muito a relação do produto vetorial

com o produto interno; para  $x, y$  e  $z \in \mathbf{R}^3$ , temos:

$$ix) \langle x, y \times z \rangle = \langle x \times y, z \rangle;$$

$$x) x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Em particular segue de *ix)* e *iii)* que

$$xi) x \times y \text{ é ortogonal a } x \text{ e a } y.$$

**Lema 6.1.** *Dados  $x$  e  $y \in \mathbf{R}^3$  temos*

$$|x \times y|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

**Prova:** De *ix)* e *x)* temos

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x \times y \rangle &= \langle x, y \times (x \times y) \rangle = \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle y, x \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle = |y|^2 |x|^2 - \langle x, y \rangle^2, \end{aligned}$$

o que prova o lema. □

**Lema 6.2.** *Se  $x, y : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  são caminhos diferenciáveis, então*

$$a) \frac{d}{dt} (x(t) \times y(t)) = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t).$$

$$b) \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) = \frac{x \times (x' \times x)}{|x|^3} = \frac{(x \times x') \times x}{|x|^3}.$$

**Prova:** a) Usando a bilinearidade, temos, para  $h \neq 0$ ,

$$\frac{1}{h} [x(t+h) \times y(t+h) - x(t) \times y(t)] = \frac{1}{h} [x(t+h) \times y(t+h) - x(t+h) \times y(t) +$$

$$\begin{aligned}
+x(t+h) \times y(t) - x(t) \times y(t) &= x(t+h) \times \frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)] + \\
&+ \frac{1}{h}[x(t+h) - x(t)] \times y(t),
\end{aligned}$$

de modo que basta passar ao limite com  $h \rightarrow 0$  para obter a). b) A afirmação b) decorre de x)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) &= \frac{|x| x' - \frac{\langle x, x' \rangle}{|x|} x}{|x|^2} = \frac{|x|^2 x' - \langle x, x' \rangle x}{|x|^3} = \\
&= \frac{\langle x, x \rangle x' - \langle x, x' \rangle x}{|x|^3} = \frac{x \times (x' \times x)}{|x|^3}.
\end{aligned}$$

Além disso, por vi), temos  $x \times (x' \times x) = (x \times x') \times x$ . □

## 6.2. Prova do Teorema 3.1:

**Teorema 3.1.** *A cônica de equação*

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos \phi},$$

é uma elipse se  $0 \leq \varepsilon < 1$ , uma parábola se  $\varepsilon = 1$  e uma hipérbole se  $\varepsilon > 1$ . Além disto, o semi-eixo maior da elipse é dado por

$$a = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon^2}.$$

**Prova:** Como  $x = r \cos \phi$  e  $y = r \sin \phi$ , temos  $\lambda = r(1 + \varepsilon \cos \phi) = r(1 + \varepsilon \frac{x}{r}) = r + \varepsilon x$ ,

ou seja,  $r = \lambda - \varepsilon x$ . Como  $r^2 = x^2 + y^2$ , elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:  $x^2 + y^2 = \lambda^2 - 2\lambda\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$ , ou seja,

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + 2\lambda\varepsilon x + y^2 = \lambda^2. \quad (6.1)$$

Consideramos três casos:

a) Se  $0 \leq \varepsilon < 1$  então a equação (6.1) pode ser escrita como

$$(1 - \varepsilon^2) \left( x + \frac{\lambda\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{1 - \varepsilon^2},$$

ou melhor,

$$\frac{\left( x + \frac{\lambda\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \text{ e } b^2 = \frac{\lambda^2}{1 - \varepsilon^2},$$

que é a equação de uma elipse centrada em  $\left( \frac{-\lambda\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, 0 \right)$ , com semi-eixo maior

$$a = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon^2}$$

e semi-eixo menor  $b = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ , pois  $0 \leq \varepsilon < 1$  implica que  $1 - \varepsilon^2 \leq 1$  e conseqüentemente que  $a^2 \geq b^2$ . É claro que se  $\varepsilon = 0$  então a elipse é um círculo centrado na origem, com semi-eixo igual ao raio e foco na origem.

b) Se  $1 < \varepsilon$ , então a equação (6.1) pode ser escrita como

$$(\varepsilon^2 - 1) \left( x - \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

donde, tomando

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \text{ e } b^2 = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

obtemos

$$\frac{\left( x - \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de uma hipérbole centrada em  $\left( \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}, 0 \right)$  com assíntotas  $y = \pm \frac{b}{a} \left( x - \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \right)$ .

c) Se  $\varepsilon = 1$ , então (6.1) reduz-se a  $y^2 = \lambda^2 - 2\lambda x$  que é a equação de uma parábola com foco na origem e diretriz  $x = \lambda$ . □

### 6.3. Alguns dados numéricos

Constante gravitacional	$G = (6,67 \pm 0,006) \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Velocidade da luz no vácuo	$V = 6,6256 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$
Distância média da Terra ao Sol	$1,496 \times 10^{11} \text{m} = 1 \text{ U.A}$
Raio equatorial da Terra	$6,37816 \times 10^6 \text{m}$
Raio equatorial do Sol	$6,96 \times 10^8 \text{m}$
Massa da Terra	$5,976 \times 10^{24} \text{kg}$
Massa do Sol	$1,99 \times 10^{30} \text{kg}$
Excentricidade da órbita de Mercúrio	$\varepsilon \cong 0,2056$
Semi-eixo maior da órbita de Mercúrio	$a \cong 0,3871 \text{ U.A}$

Fontes: [3][2][8]

## Bibliografia

- [1] ARNOLD, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] CHAZY, J. *Mécanique Céleste*. Universitaires de France, Paris, 1953.
- [3] COLLINSON, C.D. *Introductory Mechanics*. Edward Arnold, London, 1980.
- [4] EINSTEIN, A. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **1915**, 831-839.
- [5] FABER, R.L. *Differential Geometry and Relativity Theory*. Marcel Dekker, New York, 1983.
- [6] FINLAY-FREUNDLICH, E. *Celestial Mechanics*. Pergamom Press, London, 1958.
- [7] HIRSCH, M. and SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [8] MARION, J.B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Academic Press, 2nd edition, New York, 1970.

- [9] McCUSKEY, S.W. *Introduction to Celestial Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [10] POLLARD, H. *Celestial Mechanics*. The Mathematical Association of America, Buffalo, 1976.
- [11] POLLARD, H. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [12] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.