

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Eficácia das Estratégias de
controle: ATMD, Tendão ,
Isolamento da Base e Híbrido
no Controle de Vibração de
Prédios de Múltiplos Andares**

por

Vera Lúcia Duarte Ferreira

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz
Orientadora

Porto Alegre. Junho de 1998.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Duarte Ferreira, Vera Lúcia

Eficácia das Estratégias de controle: ATMD, Tendão, Isolamento da Base e Híbrido no Controle de Vibração de Prédios de Múltiplos Andares / Vera Lúcia Duarte Ferreira.—Porto Alegre: CPGMA da UFRGS. 1998.

114 p.: il.

Dissertação (mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1998. Orientadora: Teresa Tsukazan de Ruiz

Dissertação:

17778

DISSETACAO/MAT
F384E
1998

MAT
1999/226646-6
1999/01/12
8269

À minha filha Izabel que chega num momento importante da minha vida,
momento que tenho certeza que a ciência so é válida quando melhora a existência
neste planeta, e a meus pais que me incentivaram a buscar esta certeza.

Agradecimentos

À Prof. Teresa Tsukazan de Ruiz pela orientação e apoio; sem os quais não teria sido possível a conclusão deste trabalho.

Aos colegas da pós graduação pelo carinho, incentivo, e companheirismo por mim recebido.

Aos funcionários do Instituto de Matemática pelo apoio e dedicação durante a minha estada nesta instituição.

A minha família por acreditar em mim.

Ao colega Germán pela contribuição na realização deste trabalho.

Aos meus tios Luís e Rosa pelo modo acolhedor que me receberam em sua casa no início desta caminhada.

Em especial, aos amigos Zeliane, Daniela, Ana Paula, Betti Dorneles, Ivone, Darlan e Marcelo Nogute. Gente, obrigada. Valeu...

A toda equipe da maternidade do Hospital São Francisco: médicos, enfermeiras, funcionários; em especial ao estudante de me-

dicina Andre Antunes por me dar apoio e coragem no momento mais importante de minha vida.

A todos que de uma maneira ou de outra contribuíram para realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a eficácia entre as estratégias de controle: sistema de massa ativa regulada (**ATMD**); *tendão*; *isolamento da base e sistema híbrido*. A matriz ponderada **Q** usada no sistema de **ATMD** é determinada através do método da matriz de amortecimento modificado $\bar{\mathbf{C}}$ e matriz de rigidez modificada $\bar{\mathbf{K}}$.

Para a estrutura modelada com controle híbrido, um algoritmo de controle ótimo com aceleração, velocidade e deslocamento realimentados é proposto.

Na estrutura modelada com controle ativo por tendão, um algoritmo para calcular o ganho de realimentação ótimo da saída é desenvolvido de um modo simples tal que certo índice de realização prescrito é minimizado. Com a introdução de uma operação matricial especial, o ganho de realimentação ótimo é obtido sistematicamente pela resolução simultânea e iterativa de equações algébricas lineares.

Uma vez conhecido o vetor de controle, é resolvido um problema diferencial vetorial de valor inicial do tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t) \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad \epsilon \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \dot{\mathbf{X}}_0$$

de duas maneiras:

1. enfatizando o uso da Resposta Impulso matricial;
2. especificamente no sistema de controle híbrido, utilizando o método da análise modal (Runge-Kutta de Ordem 4).

Na seqüência foram feitas simulações numéricas usando dois tipos de parâmetros estruturais, uma estrutura rígida e outra mais flexível.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show the effectiveness of control strategies among the active tuned mass damper **ATMD** system, Active Tendon system, base-isolation system and hybrid control system. The weighting matrix \mathbf{Q} used in the **ATMD** is determined through a method that modifies the damping matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ and the stiffness matrix $\tilde{\mathbf{K}}$.

For the hybrid control system, an optimal-control algorithm with acceleration, velocity and displacement feedback is proposed.

For the active Tendon control system, an algorithm to calculate optimal direct output feedback gain is developed in a simple fashion such that a certain prescribed performance index is minimized. With the introduction of a special matrix operation, optimal feedback gain is obtained systematically by solving simultaneously linear algebraic equation iteratively.

If one knows the control vector, there two ways to solve the following initial differential vector problem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(x)$$

1. emphasizing the use of *Impulse response*
2. for hybrid control system one used the *modal analysis method* (Fourth-order Runge-kutta method)

In the following, numerical somulations for two types of structural parameters are presented (one is a stiff structure and the other is a soft structure).

SUMÁRIO

RESUMO	4
ABSTRACT	5
LISTA DE FIGURAS	10
1 INTRODUÇÃO	15
2 PRELIMINARES	17
2.1 Análise Modal	17
2.2 Resposta Impulso Matricial	20
2.3 Métodos Diretos de Integração	22
2.4 Comparação dos Métodos	22
2.5 Índice de Realização	23
2.6 Condições Necessárias para o Controle Ótimo	24
2.7 Representação dos Sismos	26
3 FORMULAÇÃO	27
3.1 Introdução	27
3.2 Modelo Básico	30
3.3 Modelagem Sob Excitação Sísmica	33
3.4 Modelagem Com Controle Ativo	38

3.5	Modelagem Com Controle Passivo De Base Isolada	44
3.6	Modelagem Com Controle Híbrido	47
4	LEIS DE CONTROLE ÓTIMO APLICADAS A ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL	50
4.1	Introdução	50
4.2	Excitação Sísmica	51
4.3	Algoritmos de Controles Ótimos Instantâneos	52
4.4	Dedução de Algoritmos de Controle Ótimo Instantâneo Através do Método Numérico de Runge-Kutta de Quarta Ordem . . .	53
4.4.1	Uso do Método Numérico	53
4.4.2	Controle Ótimo Instantâneo	55
4.5	Determinação da Matriz Ponderada Q	56
4.6	Formulação Direta	59
4.7	Simulação Numérica para Controle Ótimo Instantâneo por ATMD	60
4.7.1	DADOS I	60
4.7.2	DADOS II	62
4.8	Efeito da Matriz de Ponderação Q no Sistema de ATMD . . .	67
4.9	Controle por Retroalimentação Direta e Ótima da Saída . . .	67
4.9.1	Algoritmo De Controle	68
4.9.2	Existência De Uma Matriz De Ganho De Realimentação Para Uma Saída Ótima	70

4.9.3	(Cálculo Da Matriz G) OU minimização Do Índice de Realização . . .	71
4.9.4	Teste De Convergência Para a Matriz Iterativa G	74
4.10	Simulação Numérica para o Controle Por Retroalimentação Di-	
	reta e Ótima da Saída	76
4.10.1	Caso U123v123	79
4.10.2	Caso U1v123	80
4.10.3	Caso U1v1	81
4.10.4	Caso U1v3	82
4.10.5	Caso U1v1[D_1]	84
4.10.6	Caso U1v3[D_1]	84
4.10.7	Resumo dos Resultados Numéricos	85
4.11	Conclusões Sobre o Algoritmo de Retroalimentação Direta e	
	Ótima Saída (vide secção 4.10)	88
4.12	Controle Ótimo De Estruturas Com Aceleração ,Velocidade E	
	Deslocamento Realimentados	89
4.13	Construções Com Base-Isolada	89
4.14	Equações Do Movimento Para Os Modos Controlados E Resi-	
	duais	94
4.15	Controle Híbrido	95
4.15.1	Controle no Primeiro Modo	96
4.15.2	Controle em Todos os Modos	102

4.16 Conclusões Sobre o Algoritmo Ótimo De Estruturas Com Aceleração ,Velocidade E Deslocamento Realimentados 4.12	106
4.17 Tabelas Comparativas para os Deslocamentos no Terceiro Andar	107
BIBLIOGRAFIA	110

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema de Desacoplamento de um Sistema Vibratório	19
Figura 3.1	Representação simplificada do sistema vibratório que representa o Prédio	29
Figura 3.2	Modelo de um Prédio de n Andares como um Sistema de Parâmetros Agrupados (Modelo Básico) [JAR96]	32
Figura 3.3	Prédio de n Andares sujeito a excitação sísmica [JAR96]	35
Figura 3.4	(a) Prédio com amortecedor de Massa Regulada sujeito a excitação sísmica; (b) Amortecedor de Massa Regulada [KAY81]	37
Figura 3.5	Modelo de um Prédio de n Andares com Sistema de Controle Ativo: (a) Sistema de Tendão Ativo; (b) Andar Unitário; (c) Força Interna sobre o j -ésimo Andar [YAN82]	42
Figura 3.6	Modelo de um Prédio de n Andares com Sistema de de Controle Ativo: Amortecedor de Massa Ativo [YAN91]	43
Figura 3.7	Representação Esquemática de um Prédio de múltiplos Andares com Isolamento de Base do tipo suporte de borracha (LRB) [TAD92]	45
Figura 3.8	Estrutura com Isolamento de Base sob excitação sísmica: Modelo com Parâmetros Agrupados [TAD92]	46
Figura 3.9	Representação Esquemática de um Prédio de múltiplos Andares com Isolamento de Base do tipo suporte de borracha (LRB) e Atuador: Controle Híbrido [YAN91]	49

Figura 4.1	Registro temporal da aceleração vertical do terremoto e espectro de frequência	51
Figura 4.2	Deslocamentos dos andares sob excitação sísmica para os dados I (sem controle)	61
Figura 4.4	Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_1	61
Figura 4.3	Deslocamentos do prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_1	62
Figura 4.5	Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados I e Q_2	63
Figura 4.6	Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_2	64
Figura 4.9	Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados II e matriz Q_3	64
Figura 4.7	Deslocamentos dos andares sob excitação sísmica para os dados II (sem controle)	65
Figura 4.10	Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados II e Q_4	65
Figura 4.8	Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados II e Q_3	66
Figura 4.11	Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados II e matriz Q_4	66
Figura 4.12	Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I, sendo $D = I$, $u123v$ Estado	78

Figura 4.13 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II, sendo $D = I, u_{123v}Estado$	79
Figura 4.14 Força de controle por tendão no prédio sob excitação sísmica para os dados I	79
Figura 4.15 Força de controle por tendão no prédio sob excitação sísmica para os dados II	80
Figura 4.16 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I	81
Figura 4.17 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II	81
Figura 4.18 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I	82
Figura 4.19 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II	82
Figura 4.20 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I	83
Figura 4.21 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II	83
Figura 4.22 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I	84
Figura 4.23 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II	85
Figura 4.24 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I	85
Figura 4.25 Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II	88
Figura 4.26 Controle por Isolamento de Base dos deslocamentos do prédio para os dados I	95
Figura 4.27 Controle por Isolamento de Base dos deslocamentos do prédio para os dados II	96

Figura 4.28 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando o Primeiro Modo	97
Figura 4.29 Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando o Primeiro Modo	98
Figura 4.30 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando o Primeiro Modo	99
Figura 4.31 Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando o Primeiro Modo	100
Figura 4.32 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando o Primeiro Modo	101
Figura 4.33 Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando o Primeiro Modo	102
Figura 4.38 Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando todos os modos(deslocamento-velocidade realimentados)	102
Figura 4.34 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando o Primeiro Modo	103
Figura 4.35 Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando o Primeiro Modo	103
Figura 4.39 Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando todos os modos(aceleração-velocidade realimentados)	103
Figura 4.36 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando todos os Modos(velocidade-deslocamento realimentados)	104

Figura 4.40 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando todos os Modos(deslocamento-velocidade realimentados)	104
Figura 4.37 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando todos os Modos(aceleração-velocidade realimentados)	105
Figura 4.41 Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando todos os Modos(aceleração-velocidade realimentados)	105
Figura 4.42 Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando todos os modos(deslocamento-velocidade realimentados)	106
Figura 4.43 Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando todos os modos(aceleração-velocidade realimentados)	106

1 INTRODUÇÃO

Idealmente uma estrutura pode ser projetada de um modo preciso se:

1. é conhecida a informação exata sobre as cargas e forças envolvidas durante o tempo de vida dessa estrutura;
2. dispõem-se de métodos exatos de análise estrutural para o uso dos engenheiros.

De modo real, entretanto, existem incertezas nestas informações bem como nos métodos de análises.

Para o controle de prédios excitados por sismos, o objetivo é reduzir ambas: a deformação dos prédios; e a aceleração absoluta dos andares. O controle das deformações entre os andares está diretamente relacionado a segurança e integridade, e a redução da aceleração dos andares é para proteger o sistema secundário (componentes não-estruturais e equipamentos internos). O sistema de proteção a sismos, em geral, consiste de duas categorias; nominalmente, *sistema de proteção passivo e sistema de proteção ativo*. O sistema de proteção ativo difere do passivo, uma vez que aquele requer energia suplementar externa para conter o movimento da estrutura a ser protegida. Uma importante classe de mecanismo de controle passivo é o sistema de base isolada.

No presente trabalho nosso interesse estará centrado nos sistemas de controle ativo como: sistema de Controle Ativo de Tendão e o sistema Amortecedor de Massa Regulada Ativa (ATMD); e no sistema Híbrido que consiste da combinação do sistema de isolamento da base e controle ativo. As respostas das estruturas podem ser bastante reduzidas com o uso de um sistema de controle realimentado. Em geral, na bibliografia sobre o tema aqui estudado, as respostas e o vetor força de controle são determinados na forma de variáveis de estado.

Em nosso trabalho, utilizaremos primeiro a teoria de controle ótimo para depois encontrar as respostas e o vetor de força de controle para um sistema de controle realimentado. Isto será feito de duas maneiras:

- i) Apartir do sistema de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t)$$

onde $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e $\mathbf{f}(t)$ é o vetor força de excitação externa. Para isso usaremos a teoria desenvolvida por CLAEYSSSEN [CLA 90a] e [CLA 90b] onde são tratados os sistemas gerais de segunda ordem, e para implementação nos referimos a [CAN 95]

- ii) Usaremos também, mais especificamente para resolver o sistema de controle híbrido o método da análise modal.

Resumo dos Métodos

1. Pela teoria de Claeysen acha-se a resposta impulso matricial para equação diferencial vetorial dada no item i acima;
2. A análise modal consiste de desacoplar o sistema mediante uma diagonalização da matrizes M, C e K .

2 PRELIMINARES

Em muitos problemas de engenharia, sobre tudo quando se trata de sistemas vibratórios, aparece o problema diferencial vetorial de valor inicial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \dot{\mathbf{X}}_0 \quad (2.0.1)$$

\mathbf{M}, \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. Para resolver este problema temos basicamente três abordagens:

- i) Análise Modal;
- ii) Método Resposta Impulso Matricial;
- iii) Métodos Diretos de Integração.

A seguir, detalharemos os dois primeiros métodos e esboçaremos o último.

2.1 Análise Modal

Aqui estamos interessados em determinar as frequências fundamentais e as formas modais do sistema conservativo,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (2.1.2)$$

as matrizes de massa \mathbf{M} e rigidez \mathbf{K} são matrizes simétricas. O objetivo do método é desacoplar a Eq. 2.1.2, mediante um processo de diagonalização, [INM 94].

Efetuada a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) \quad (2.1.3)$$

onde $\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \Lambda$: $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$ ($\tilde{\mathbf{K}}$ é matriz simétrica)

$\Lambda = \text{diag} [\omega_i^2]$ é a matriz que contém as frequências fundamentais ao quadrado

\mathbf{P} é a matriz dos autovalores de $\tilde{\mathbf{K}}$, isto é, que contém só modos do sistema.

Obtemos o sistema desacoplado $\ddot{\mathbf{r}} + \Lambda \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, isto é,

$$\ddot{r}_i + \omega_i^2 r_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1.4)$$

cujas soluções são imediatas.

No caso amortecido

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.1.5)$$

sabe-se que se a matriz \mathbf{C} satisfaz a hipótese de Rayleigh, dada por

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.1.6)$$

α, β constantes não negativas [CAU 60], também chega-se a um sistema desacoplado do tipo

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\Theta \dot{\mathbf{r}} + \Lambda \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.1.7)$$

onde $\Theta = \text{diag} [\xi_i \omega_i]$; e ξ_i é o raio de amortecimento.

Devido a restrição da hipótese de Rayleigh apresenta-se a seguinte alternativa: analogamente aos sistemas de 1 grau de liberdade, podemos introduzir o amortecimento modal, que consiste em colocar um termo de dissipação de energia

da forma:

$$2\xi_i\omega_i\dot{r}_i(t)$$

em cada equação desacoplada 2.1.4. Esta forma é muito usada pela sua conveniência matemática. Em termos matemáticos, isto equivale a fazer:

$$\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} = \text{diag} [2\xi_i\omega_i], \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2}.$$

De onde obtemos que

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{P} \text{diag} [2\xi_i\omega_i] \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{1/2}. \quad (2.1.8)$$

Os processos detalhados acima, são mostrados esquematicamente na figura (2.1):

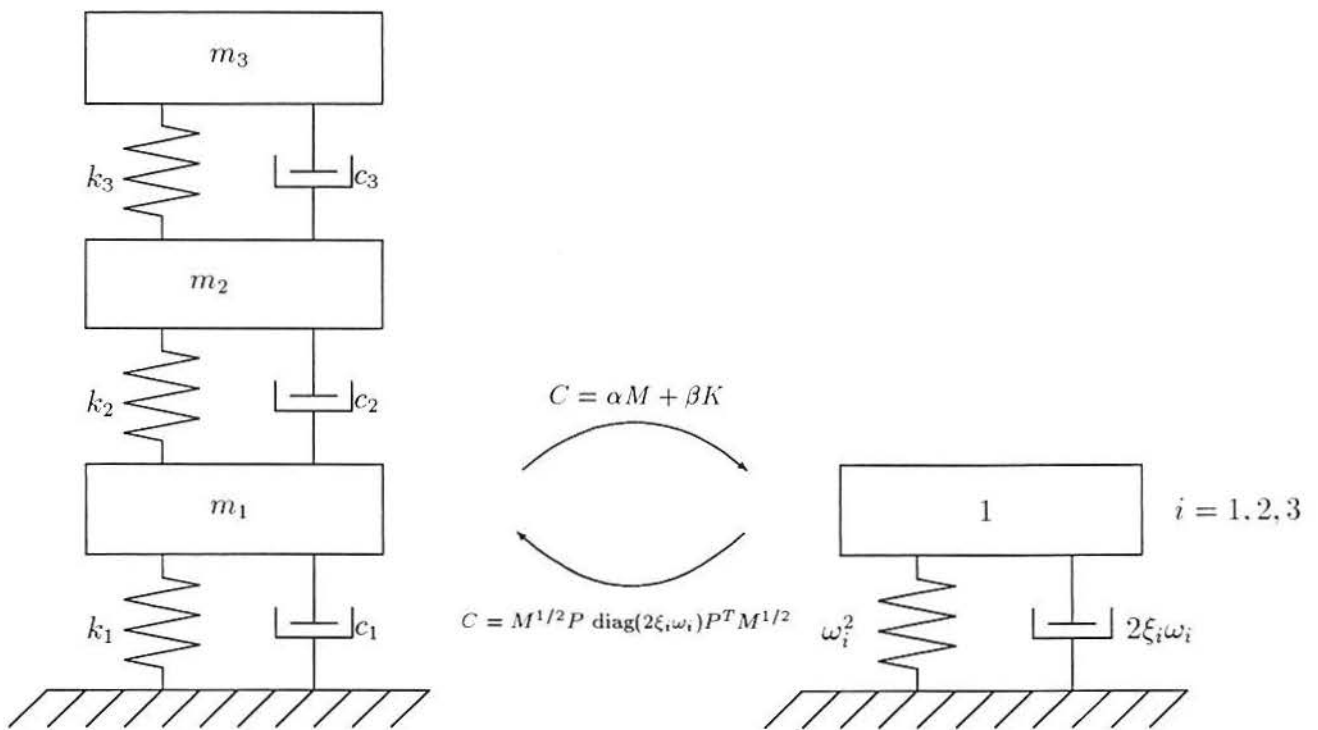


Figura 2.1: Esquema de Desacoplamento de um Sistema Vibratório

2.2 Resposta Impulso Matricial

Nesta seção faremos uma extensão do caso de sistemas de 1 grau de liberdade para n -graus. (**GDL = grau de Liberdade**)

No caso de 1 GDL a equação governante é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad (2.2.9)$$

sendo que a resposta impulso é a solução da equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad (2.2.10)$$

onde $\delta(t)$ é a função *impulso de Dirac*; por sua vez, a equação 2.2.10 pode ser escrita como o problema de valor inicial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0: \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{m} \quad (2.2.11)$$

o qual é interpretado fisicamente como o fornecimento de uma quantidade de movimento unitária, isto é, $m\dot{x}(0) = 1$.

Por analogia matemática, no caso de n GDL, se temos a equação diferencial vetorial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t) \quad (2.2.12)$$

a *resposta impulso matricial* será a solução da equação diferencial matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{C}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \tilde{\delta}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta(t) \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

que equivale ao problema de valor inicial:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{C}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}; \quad \Phi(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}\dot{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \quad (2.2.14)$$

Segundo a teoria de Claeysen [CLA 90a] que é uma extensão do Teorema da Redução Polinomial para o caso de n -ésima ordem, temos a seguinte fórmula compacta para a k -ésima derivada da resposta impulso matricial, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\Phi^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \right) \mathbf{D}_{2n-j+k} \quad (2.2.15)$$

onde:

- b_i são os coeficientes do polinômio característico:

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i}$$

- $d(t)$ é uma função escalar que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d^{(2n)}(t) + b_1 d^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n} d(t) &= 0, \\ d(0) = \dot{d}(0) = \ddot{d}(0) = \dots = d^{(2n-2)}(0) &= 0, \\ b_0 d^{(2n-1)}(0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

- \mathbf{D}_j é solução do problema em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{D}_{j+2} + \mathbf{C}\mathbf{D}_{j+1} + \mathbf{K}\mathbf{D}_j &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{D}_0 &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

O conhecimento da resposta impulso matricial permite escrever a solução do problema 2.2.12 como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & \Phi(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}(0) + \left(\dot{\Phi}(t)\mathbf{M} + \Phi(t)\mathbf{C} \right) \mathbf{X}(0) \\ & + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{f}(s)ds \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

mediante o uso da equação operacional do problema 2.2.12, (isto é, utilizando a Transformada de Laplace).

2.3 Métodos Diretos de Integração

Para resolver numericamente o problema 2.2.12 tem sido bastante usados métodos que envolvem diferenças finitas, tais como:

- i) Newmark;
- ii) Houbolt;
- iii) θ -Wilson;
- iv) Diferenças centrais, etc.

baseados em diferentes aproximações das derivadas envolvidas na equação 2.2.12.

2.4 Comparação dos Métodos

Analiticamente a Análise Modal precisa do cálculo dos autovalores e autovetores do sistema. Além disso, a matriz de amortecimento \mathbf{C} sofre das restrições 2.1.6 e 2.1.8. Em contra partida, o método da resposta impulso matricial não precisa cumprir as já referidas restrições e nem do cálculo dos autopares. Assim \mathbf{C} pode ser arbitrária.

O cálculo dos autopares é um problema numérico não resolvido, o qual restringe o campo de ação da análise modal. Os métodos diretos, por sua vez, envolvem aproximações globais do vetor $\mathbf{X}(t)$ fazendo com que seja perdida a precisão. O método da resposta impulso matricial translada o problema 2.2.14 para resolução do problema diferencial escalar 2.2.16.

2.5 Índice de Realização

Um dos métodos mais usados da teoria de controle moderno é o chamado *controle ótimo*. O controle ótimo está centrado na escolha de uma função custo ou índice de realização mínimo. Este controle é bastante eficaz na obtenção de uma resposta vibracional desejável.

A equação diferencial de movimento para o sistema estrutural é dada por

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{AZ}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{w}_1 \ddot{X}_g(t) \quad (2.5.19)$$

com condição inicial $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$ onde $\mathbf{Z}(t)$ é um vetor de estado $2n$ -dimensional e \ddot{X}_g é a aceleração do solo devido ao terremoto.

O problema de controle ótimo está em calcular um vetor de controle apropriado $\mathbf{u}(t)$ que melhor minimize o índice de realização denotado por

$$J = \int_0^{t_f} L(\mathbf{Z}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \quad (2.5.20)$$

Um problema com particular aplicação na supressão de vibração, é o chamado *Regulador Linear*. Em particular, o objetivo do projeto de controle é levar a resposta do valor de estado inicial $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$ a posição de equilíbrio, a qual é usualmente $\mathbf{Z}_e = \mathbf{0}$ no caso de vibração estrutural. Um índice de Realização para o problema

do regulador linear é definido como

$$J = \int_0^{t_f} (\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt \quad (2.5.21)$$

onde \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação.

Neste caso, o funcional

$$L(\mathbf{Z}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t).$$

2.6 Condições Necessárias para o Controle Ótimo

Dado o funcional

$$J = \int_0^{t_f} (\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \quad (2.6.22)$$

sujeito às restrições

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1\ddot{X}_g(t), \\ \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{Z}_0. \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Para incluir a equação diferencial das restrições, formamos o funcional aumentado

$$\tilde{J} = \int_0^{t_f} \left\{ [\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] + \lambda^T(t)(\mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1\ddot{X}_g - \dot{\mathbf{Z}}) \right\} dt \quad (2.6.24)$$

pela introdução dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{2N}(t)$ representando as variáveis custo. Assumiremos que o ponto final $t = t_f$ pode ser especificado ou livre.

É conveniente usar a função H , chamada *Hamiltoniano*, definida como:

$$H(\mathbf{Z}(t), \mathbf{u}(t), \lambda, \ddot{X}_g, t) = [\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] + \lambda^T(t)(\mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1\ddot{X}_g), \quad (2.6.25)$$

com $\lambda^T(t_f) = 0$ e

$$\dot{\lambda}^T(t) = \frac{-\partial H}{\partial \mathbf{Z}}$$

,

Assim substituindo H na equação 2.6.24 e integrando-se por partes a mesma, temos:

$$\tilde{J} = -\lambda^T(t_f)\mathbf{Z}(t_f) + \lambda^T(t)\mathbf{Z}(0) + \int_0^{t_f} (H + \dot{\lambda}^T(t)\mathbf{Z}(t))dt \quad (2.6.26)$$

a variação de \tilde{J} é dada por

$$\delta\tilde{J} = -\lambda^T(t_f)\mathbf{Z}(t_f) + \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{-\partial H}{\partial \mathbf{Z}} + \dot{\lambda}^T(t) \right) \delta\mathbf{Z} + \frac{-\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} \right] dt = \int_0^{t_f} \frac{-\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} dt. \quad (2.6.27)$$

Como $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$ é um vetor de estado constante tem-se $\delta\mathbf{Z}(0) = 0$. Como $\delta\tilde{J} = 0$ para algumas variações arbitrárias de $\delta\mathbf{Z}$ e $\delta\mathbf{u}$, obtem-se

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f. \quad (2.6.28)$$

O sistema de equações dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1\ddot{X}_g(t), & \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{Z}_0 \\ \dot{\lambda}^T(t) &= \frac{-\partial H}{\partial \mathbf{Z}}, & \lambda^T(t_f) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

proporciona soluções ótimas para o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$, vetor de estado resposta $\mathbf{Z}(t)$ e o vetor custo $\lambda(t)$. Como as condições de fronteira para equação de estado $\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1\ddot{X}_g(t)$ é especificada em $t = 0$ e as variáveis custo em $t = t_f$ temos um problema com valor de fronteira de dois pontos.

2.7 Representação dos Sismos

Os terremotos são movimentos bruscos do solo do tipo vibratório. Nos de grande magnitude, o movimento pode ser produzido por uma sucessão de terremotos cujos focos vão se deslocando ao longo de uma linha, em cujo caso apenas se pode detectar o foco inicial, que pode estar longe da zona de maior destruição. Durante um terremoto, um ponto particular na superfície da terra descreve um movimento tri-dimensional o qual pode ser teoricamente definido por três componentes de translação e três de rotação, sendo que as últimas são desconsideradas devido a ordem de grandeza do comprimento da onda e das estruturas de engenharia.

Durante os terremotos, as fundações das estruturas são atuadas por impulsos de aceleração cujas componentes predominantes são horizontais, orientadas segundo qualquer direção.

3 FORMULAÇÃO

3.1 Introdução

Um sistema vibratório é um sistema físico que possui movimento (relativo), o qual se repete depois de um intervalo de tempo. Tal movimento é denominado *vibração*. Fisicamente uma vibração não pode aparecer sob a ação de forças constantes; a força que origina e mantém uma vibração é sempre uma força flutuante. As forças flutuantes podem variar apenas em magnitude e são chamadas de forças recíprocas, ou podem variar apenas em direção e são então chamadas de forças rotativas. Às vezes, elas variam em ambas (magnitude e direção). Em geral, a força flutuante que causa vibração é chamada de *força de excitação* ou de *distúrbio*.

Tais forças e movimentos estão sempre presentes em movimentos de máquinas, e na maioria dos casos são indesejáveis. O efeito indesejável que elas podem produzir inclui o aumento das tensões nas peças de uma máquina; interferência no seu funcionamento e em outras próximas a ela; desconforto fisiológico, particularmente quando a vibração é um ruído; e origina perda de energia mecânica devido às forças de amortecimento, as quais estão sempre presentes.

Diante disso, uma das maneiras de abordar estes problemas é fazer um estudo das equações que governam o movimento de tais sistemas. Para analisar um sistema vibratório, primeiramente consideramos a sua simplificação em termos de massa, mola e amortecimento, os quais representam o corpo, a elasticidade e o atrito do sistema, respectivamente. A seguir, procuraremos determinar a solução e faremos a análise das equações de movimento, para chegarmos, por último, às conclusões apropriadas. Um sistema é dito de n graus de liberdade, quando são requeridas n coordenadas independentes para especificar as posições das partículas deste sistema.

O movimento de um sistema vibratório de n graus de liberdade é representado mediante n equações diferenciais, as quais são obtidas através da aplicação de diversos critérios e leis físicas: a segunda lei de Newton, as equações de Lagrange, o método dos coeficientes de influência, etc.

Mediante as *equações de Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial C}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad j = 1 \dots n, \quad (3.1.1)$$

onde $L = T - U$ é a função lagrangeana do sistema, T é a energia de cinética e Q_j , $j=1 \dots n$ são as forças externas. ∂q_j são coordenadas generalizadas, podemos obter as equações do movimento para um prédio de três andares. A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2), \quad (3.1.2)$$

a energia potencial é dada por:

$$U = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2) \quad (3.1.3)$$

e a energia de dissipação tem a forma

$$C = \frac{1}{2} (c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2). \quad (3.1.4)$$

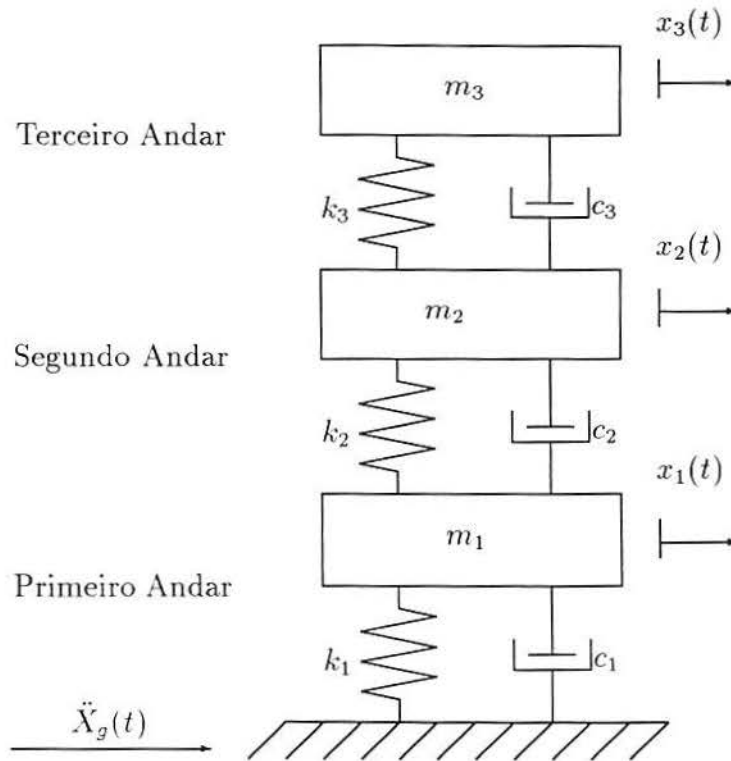


Figura 3.1: Representação simplificada do sistema vibratório que representa o Prédio

Substituindo (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4) nas equações de Lagrange (3.1.1), obtemos o sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t),$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{X}_g(t) \\ \ddot{X}_g(t) \\ \ddot{X}_g(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

3.2 Modelo Básico

Um prédio pode ser considerado como um sistema de elementos com massa distribuída e elasticidade. Porém, há elementos que são massivos e duros (pisos) e estão conectados com outros membros que possuem uma massa relativamente pequena porém de grande flexibilidade (paredes, colunas).

Em uma estrutura idealizada de n andares que se mostra na figura fig.3.2, suas equações de movimento resultantes da aplicação da segunda lei de Newton podem ser escritas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - k_i(x_i - x_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + u_i + w_i \\ m_n \ddot{x}_n &= -k_n(x_n - x_{n-1}) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + u_n + w_n \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

onde

- $i=1,2,\dots,n-1$
- m_i, c_i, k_i , são a massa, coeficiente de amortecimento, e rigidez do i -ésimo andar respectivamente
- u_i, w_i representa, a força de controle e a carga externa exercida sobre o i -ésimo andar.

As equações de (3.2.5) podem ser escritas também na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{U} + \mathbf{W} \quad (3.2.6)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & c_n \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & k_n \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente.

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T;$$

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T; \text{ e}$$

$$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$$

são os vetores deslocamento relativo à base, vetor força de controle, e vetor de carga externa.

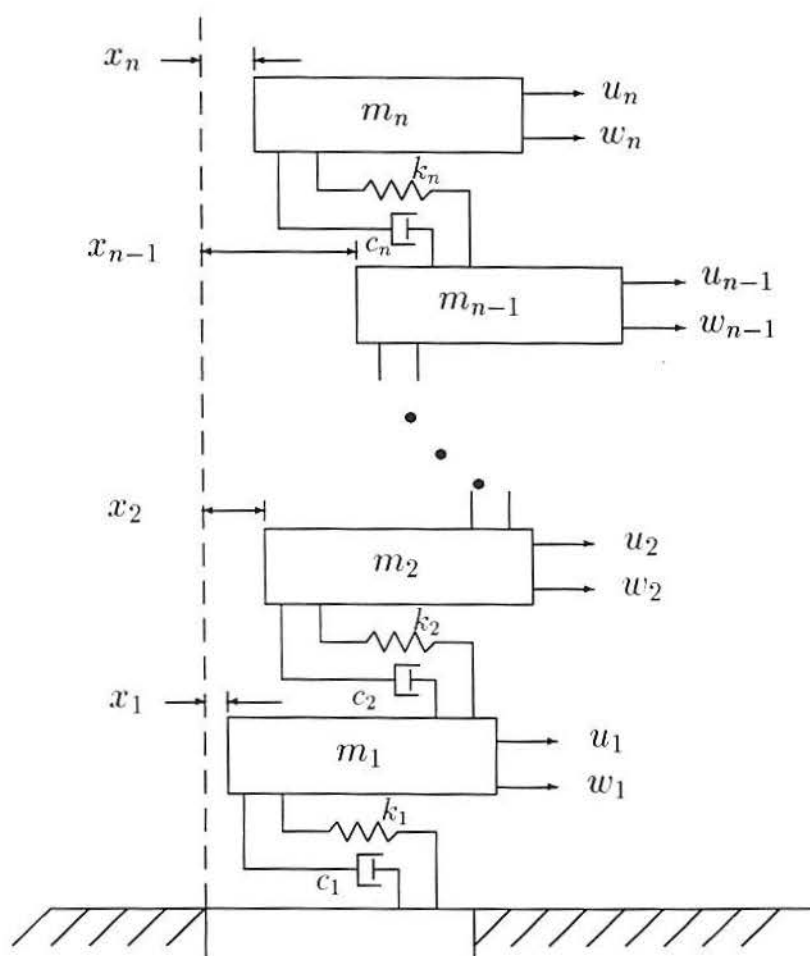


Figura 3.2: Modelo de um Prédio de n Andares como um Sistema de Parâmetros Agrupados (Modelo Básico) [JAR96]

3.3 Modelagem Sob Excitação Sísmica

Com referência a idealização dada na figura fig.3.3 , o movimento de uma estrutura linear elástica com n graus de liberdade e amortecimento viscoso, estrutura está sujeita a uma aceleração $\ddot{X}_g(t)$ na base, satisfaz as equações seguintes:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{z}_i &= k_{i+1}(z_{i+1} - z_i) - k_i(z_i - z_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{z}_{i+1} - \dot{z}_i) - c_i(\dot{z}_i - \dot{z}_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n-1 \\ m_n \ddot{z}_n &= -k_n(z_n - z_{n-1}) - c_n(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

onde

m_i , c_i , k_i são a massa, coeficiente de amortecimento, e rigidez do i -ésimo andar respectivamente.

z_i é o deslocamento da i -ésima massa.

Portanto, se o deslocamento absoluto z_i é trocado pelo deslocamento x_i relativo ao solo, temos que as seguintes substituições:

$$x_i = z_i - X_g, \quad \dot{x}_i = \dot{z}_i - \dot{X}_g, \quad \ddot{x}_i = \ddot{z}_i - \ddot{X}_g \quad (3.3.11)$$

podem ser introduzidas na Eqs. (3.3.10) tendo:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_i + \ddot{X}_g) &= k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - k_i(x_i - x_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n-1 \\ m_n(\ddot{x}_n + \ddot{X}_g) &= -k_n(x_n - x_{n-1}) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

As equações dadas em (3.3.12) também podem ser escritas como uma equação diferencial matricial de segunda ordem:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{V}\ddot{X}_g) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.3.13)$$

onde

\mathbf{M} , \mathbf{C} , e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento, e rigidez já conhecidas;

$\mathbf{V} = (1, 1, \dots, 1)^T$, è um vetor n -dimensional, e

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, è o vetor deslocamentos relativos ao solo.

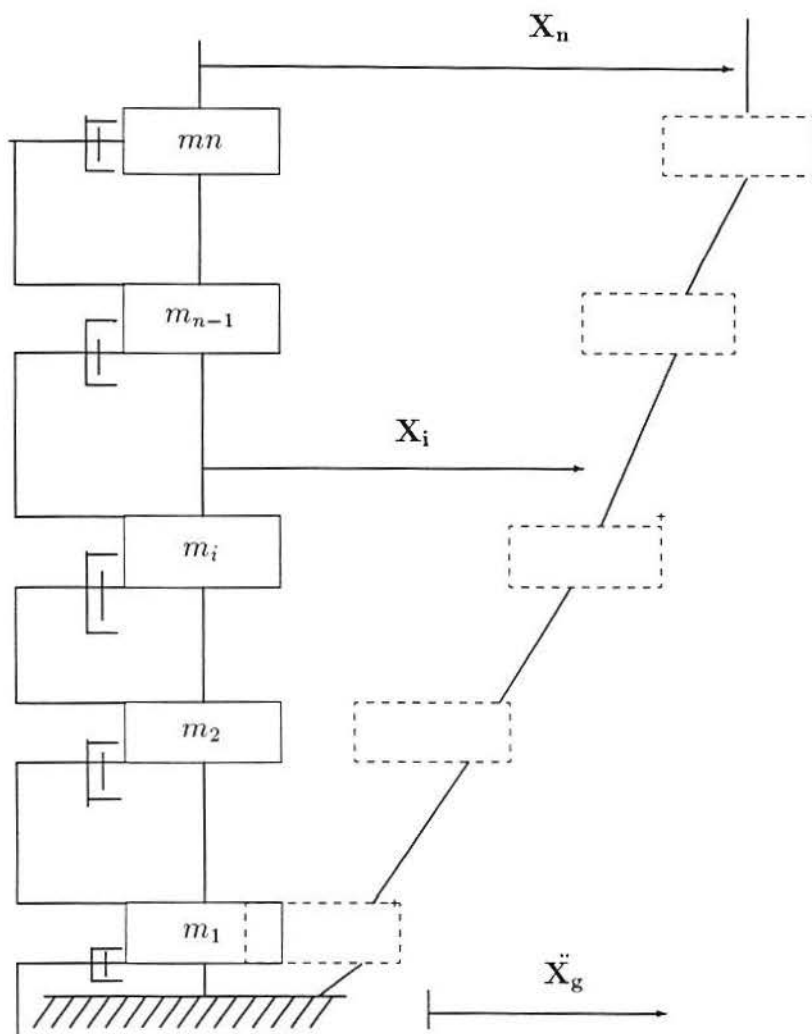


Figura 3.3: Prédio de n Andares sujeito a excitação sísmica [JAR96]

Considerando o modelo da fig.3.2 , porém com amortecedor de massa regulada acrescentado ao piso superior fig.3.4(a) , a equação do movimento do novo sistema de múltiplos graus de liberdade torna-se:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{X}}_g) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{F} = 0 \quad (3.3.14)$$

Esta equação é idêntica á equação (3.3.13), excepto pela adição do vetor,

$$\mathbf{F} = (0, 0, \dots, c_d x_d + k_d x_d)^T$$

a qual é a força aplicada aos pisos. Da figura 3.4(b) temos:

- x_d é o deslocamento do vibrador absorvente relativo ao piso;
- k_d é a rigidez da mola, cte associada, e
- c_d é o coeficiente de amortecimento associado.

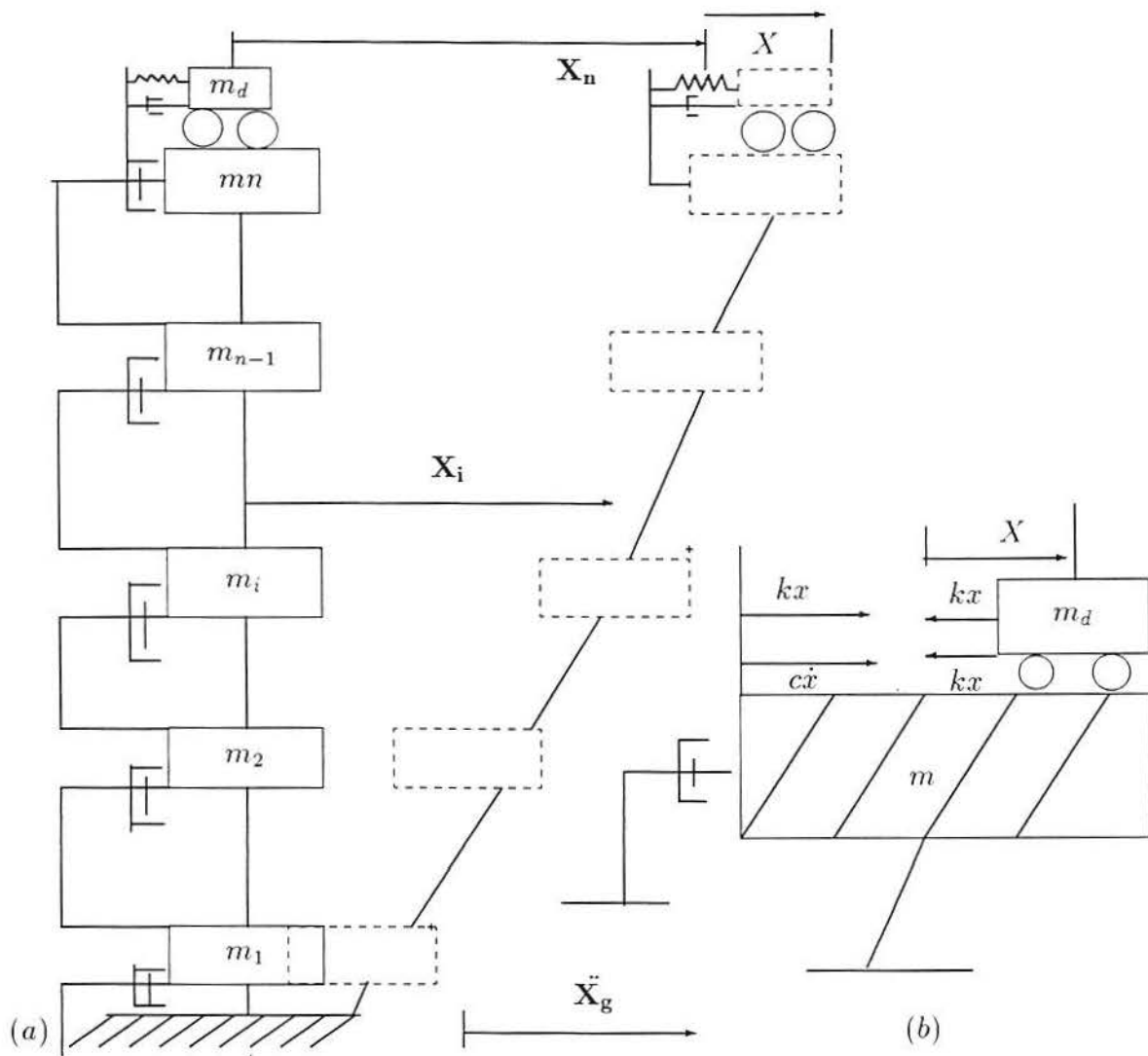


Figura 3.4: (a) Prédio com amortecedor de Massa Regulada sujeito a excitação sísmica: (b) Amortecedor de Massa Regulada [KAY81]

3.4 Modelagem Com Controle Ativo

O modelo estrutural escolhido nesta seção é um prédio de n andares como mostra-se na fig. 3.6 e 3.5. São feitas as seguintes hipóteses para simplificar as análises:

1. a massa de cada andar esta concentrada ao nivel do piso;
2. a elasticidade linear é fornecida pelas colunas sem massa /paredes rígidas entre os pisos;e
3. a resposta estrutural é descrita por uma variável deslocamento e uma variável força em cada andar (sem rotação para as massas).

Dois tipos de controle ativos são considerados:

1. sistema de Tendão ativo: 3.5 (a).
2. uma massa ativa amortecedora instalada no piso superior do prédio como mostra a fig.3.6 . Um sensor é colocado no andar superior (n -ésimo) para regular o controlador da massa ativa amortecedora.

Para o sistema de Tendão ativo são feitas as seguintes hipóteses:

1. todo o controlador é idêntico;
2. os controladores de tendão estão instalados entre cada par de andares vizinhos adjacentes. tanto acima como abaixo do l -ésimo piso, onde l é um inteiro positivo; e
3. um controlador esta regulado por dois sensores colocados sobre os pisos acima e abaixo deste.

Seja z_j e g_{j-1} o deslocamento do j -ésimo andar e a força de cisalhamento resultante nas colunas o atrito nas paredes, do j -ésimo andar. [ver fig.3.5(c)].

A equação do movimento e a força deslocamento do j -ésimo andar unitário, são:

$$g_j = g_{j-1} + m_j \ddot{z}_j + \overline{\beta}_j \dot{z}_j, \quad (3.4.15)$$

$$g_{j-1} = k_j(z_j - z_{j-1}) + c_j(\dot{z}_j - \dot{z}_{j-1}) + f_j(t), \quad (3.4.16)$$

onde

m_j é a massa do j -ésimo andar;

$\overline{\beta}_j$ é o amortecimento externo;

c_j é o amortecimento interno;

k_j é a elasticidade da rigides; e

$f_j(t)$ é a força do controle j -ésimo controlador de tendão.

Faz-se o amortecimento externo igual a zero, então das equações (3.4.15) e (3.4.16) temos:

$$m_j \ddot{z}_j + c_j(\dot{z}_j - \dot{z}_{j-1}) + c_{j+1}(\dot{z}_j - \dot{z}_{j+1}) + k_{j+1}(z_j - z_{j+1}) + k_{j+1}(z_j - z_{j+1}) = f_{j+1}(t) - f_j(t),$$

$$j = 1, \dots, n \quad \dot{z}_0 = z_0 = 0, \quad f_{n+1} = c_{n+1} = k_{n+1} = 0. \quad (3.4.17)$$

Agora os deslocamentos relativos x_j com respeito a X_g , é:

$$x_j = z_j - X_g; \quad \dot{x}_j = \dot{z}_j - \dot{X}_g; \quad \ddot{x}_j = \ddot{z}_j - \ddot{X}_g \quad (3.4.18)$$

Usando as equações (3.4.18), então as equações (3.4.17) pode-se escrever como segue

$$m_j(\ddot{x}_j + \ddot{X}_g) + c_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + c_{j+1}(\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) + k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_j - x_{j+1}) = f_{j+1}(t) - f_j(t),$$

$$j = 1, \dots, n \quad \dot{x}_0 = x_0 = 0, \quad f_{n+1} = c_{n+1} = k_{n+1} = 0. \quad (3.4.19)$$

Portanto a equação diferencial matricial de segundo ordem de movimento do sistema estrutural integral pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{H}\mathbf{U}(t) - \mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{X}_g(t), \quad (3.4.20)$$

onde $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$ é o vetor resposta n -dimensional;

$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ é um vetor n -dimensional;

\mathbf{H} é a matriz de localização dos controladores de ordem $n \times n$;

$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix}$; é o vetor força de controle;

\mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente de ordem $n \times n$.

Quando se coloca um sensor o n -ésimo andar para regular o controlador de um amortecedor de massa ativa mostrado na figura 3.3 as equações para os $n-1$ primei-

ros andares são

$$\begin{aligned} m_j(\ddot{x}_j + \ddot{X}_g) + c_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + c_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) + k_j(x_j - x_{j-1}) + k_j(x_j - x_{j+1}) &= 0, j = 1, \dots, n-1, \\ m_n(\ddot{x}_n + \ddot{X}_g) + c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + k_n(x_n - x_{n-1}) &= -u_d, \\ m_d(\ddot{x}_n + \ddot{X}_g) + c_d(\dot{x}_d - \dot{x}_n) + k_d(x_d - x_n) &= u_d, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Portanto a equação diferencial matricial de movimento do sistema estrutural integral pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{h}u_d - \mathbf{M}\mathbf{v}\ddot{X}_g(t), \quad (3.4.22)$$

Onde $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_d(t) \end{pmatrix}$ é o vetor resposta $n + 1$ -dimensional; x_i é deslocamento

relativo do i -ésimo piso com respeito ao solo; // x_d é o deslocamento do amortecedor de massa regulada;

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ é um vetor $n + 1$ -dimensional;

\mathbf{h} é um vetor de localização do controlador $n + 1$ dimensional;

$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

u_d é a força ativa

\mathbf{M} é a matriz de ordem $n + 1 \times n + 1$

onde $m_{ii} = m_i$, $i = 1 : N$;

$m_{n+1, n+1} = m_d$ (massa do absorvedor regulado);

\mathbf{C} , \mathbf{K} são as matrizes de amortecimento e rigidez, respectivamente de ordem $n + 1 \times n + 1$.

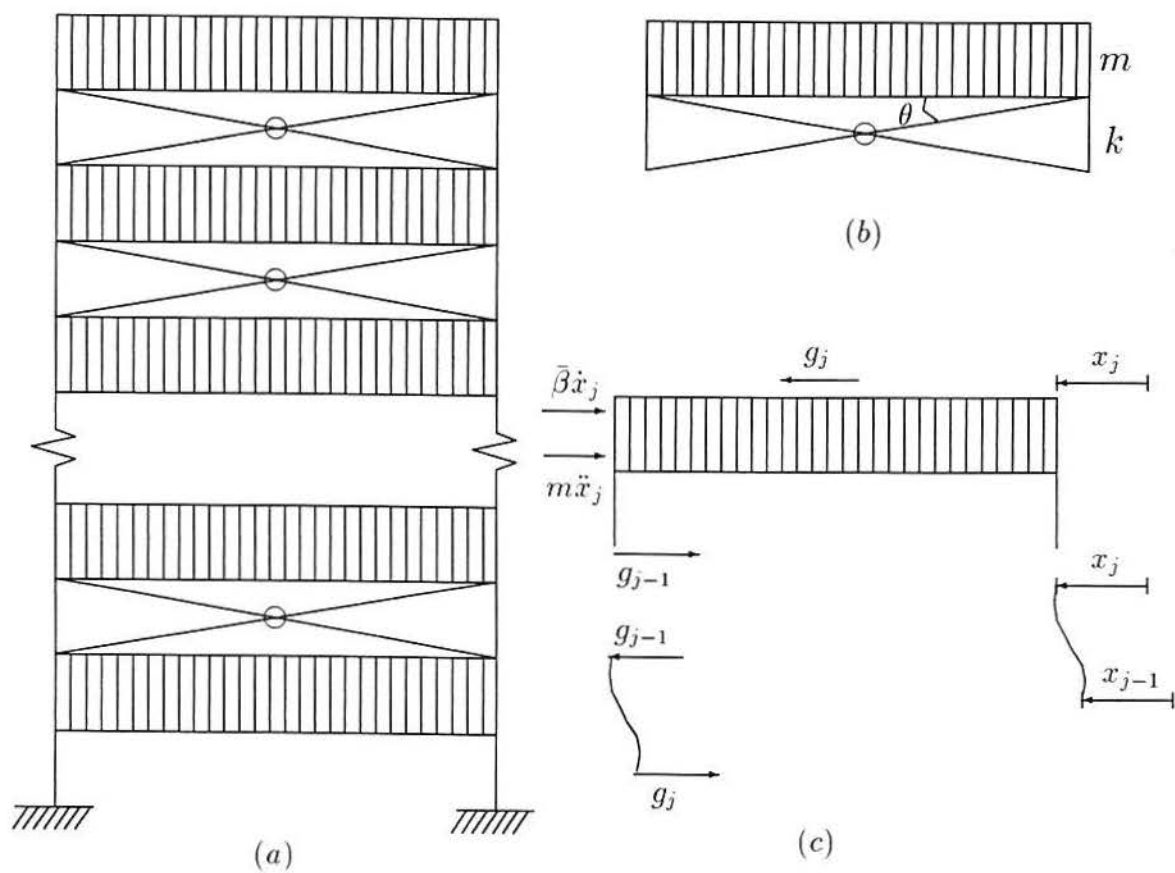


Figura 3.5: Modelo de um Prédio de n Andares com Sistema de Controle Ativo : (a) Sistema de Tendão Ativo ;(b)Andar Unitário ;(c) Força Interna sobre o j -ésimo Andar [YAN82]

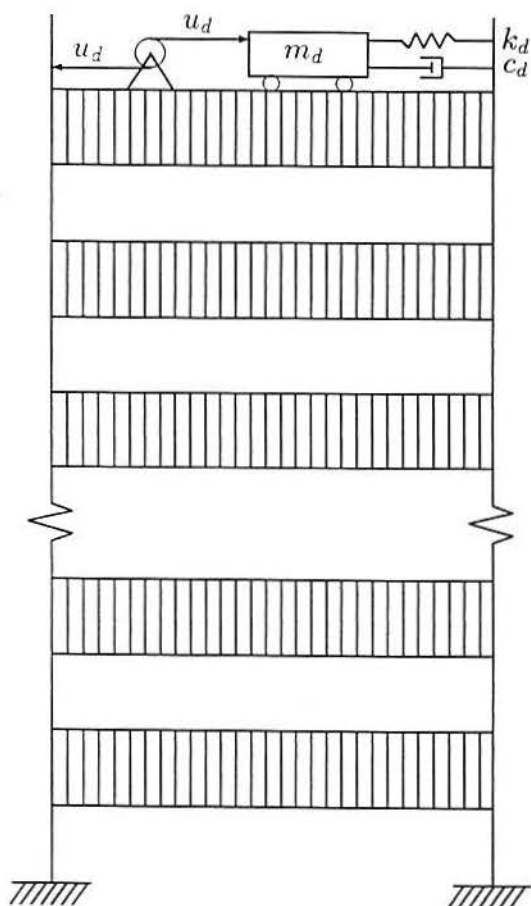


Figura 3.6: Modelo de um Prédio de n Andares com Sistema de de Controle Ativo: Amortecedor de Massa Ativo [YAN91]

3.5 Modelagem Com Controle Passivo De Base Isolada

Uma estrutura linear, de n andares sobre uma base flexível é considerada. Os graus de liberdade selecionados são o deslocamento de cada andar relativo ao andar (piso)-base e o deslocamento desse piso-base relativo ao chão. O sistema de base isolada fornece rigidez e amortecimento viscoso na direção horizontal. A estrutura com a base fixada será referida como a *superestrutura*. A fig. 3.7 mostra o sistema sob esta consideração. As equações do movimento para uma excitação no chão são:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\mathbf{V}(\ddot{X}_g + \ddot{X}_b) \\ m_b(\ddot{X}_g + \ddot{X}_b) + c_b\dot{X}_b + k_bX_b - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 = 0 \end{cases} \quad (3.5.23)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da superestrutura;

$$\mathbf{X} = (x_1, x_3, \dots, x_{n-1})^T \quad (3.5.24)$$

é o vetor deslocamento $(n - 1)$ dimensional com respeito ao solo;

$$\mathbf{V} = (1, 1, \dots, 1)^T \quad (3.5.25)$$

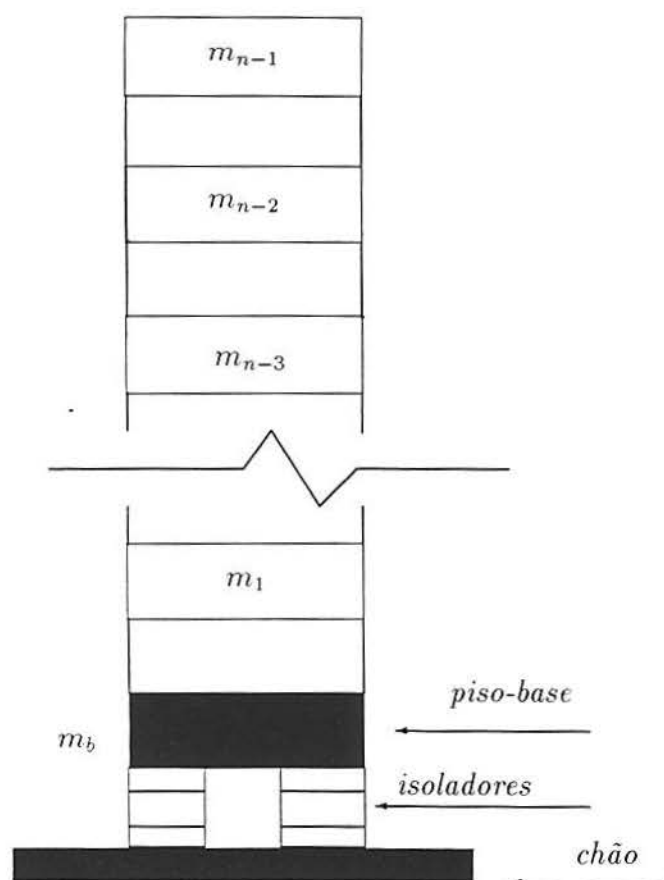


Figura 3.7: Representação Esquemática de um Prédio de múltiplos Andares com Isolamento de Base do tipo suporte de borracha (**LRB**) [TAD92]

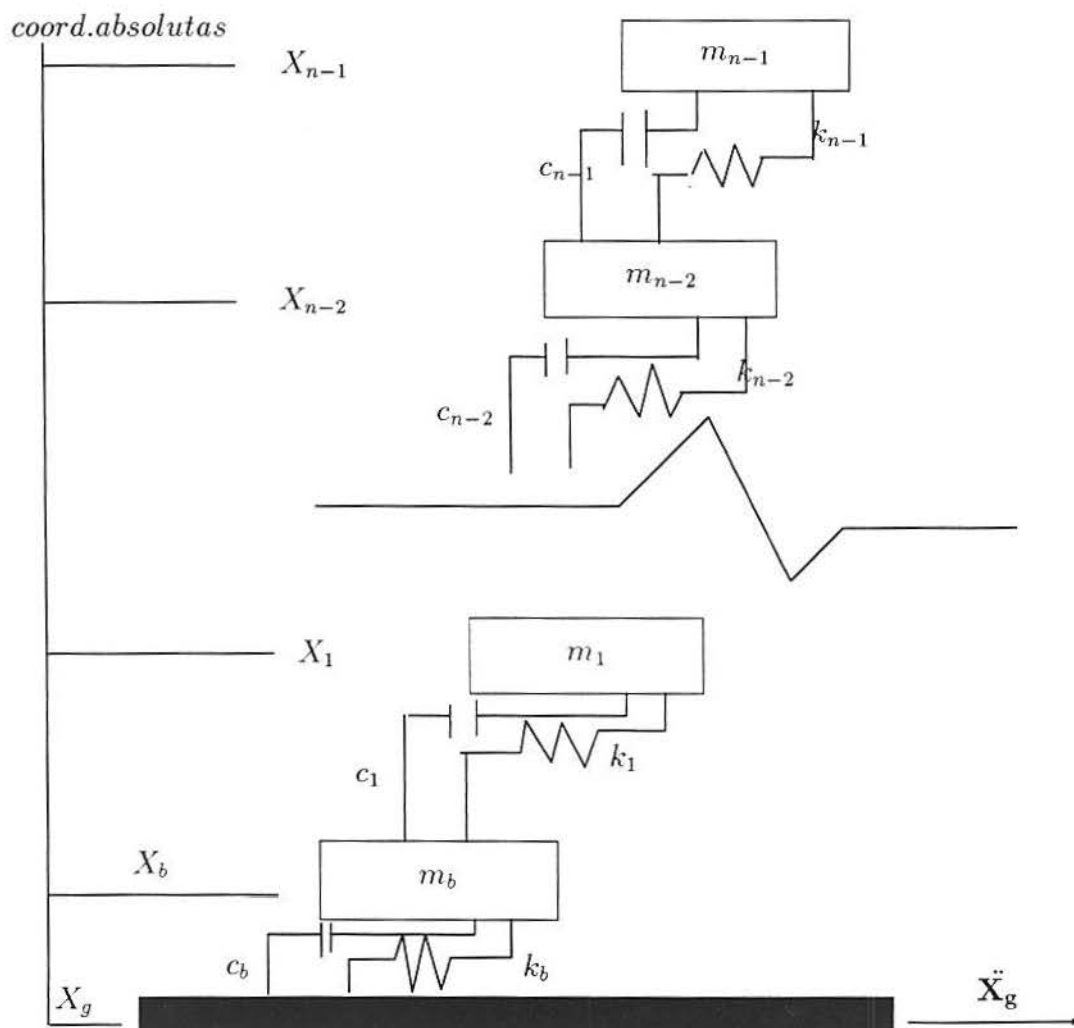


Figura 3.8: Estrutura com Isolamento de Base sob excitação sísmica: Modelo com Parâmetros Agrupados [TAD92]

3.6 Modelagem Com Controle Híbrido

Consideramos aqui o sistema de controle híbrido que consiste da combinação de um sistema de base isolado passivo com um controle ativo como mostra a fig.3.9 .

A estrutura é modelada com a base dos andares, apoiada em suportes de borracha laminados, os LRB. A base isolada é considerada no primeiro andar. A equação do movimento para os diferentes andares é escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{p} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.6.26)$$

onde \mathbf{X} denota o deslocamento dos andares com respeito a um referencial inercial, com as condições iniciais

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0; \quad \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{V}_0. \quad (3.6.27)$$

A matriz \mathbf{C} é uma matriz de amortecimento e é determinada apartir da introdução de amortecimento modal.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.6.28)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_b + k_1 & -k_1 & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & -k_{(n-1)} \\ & & & k_{(n-1)} & k_{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.6.29)$$

onde

- m_i massa do i -ésimo andar
- u_j força do j -ésimo controlador ($j = 1 \dots, l$), aqui l é o número de controladores colocados na construção e
- \mathbf{B} é uma matriz de localização de ordem $n \times l$ com elementos $b_{i,j}=0$ ou 1.
- o vetor \mathbf{p} tem a forma

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} c_b \dot{x}_g(t) + k_b x_g \\ \vdots \\ O_{n-1,1} \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

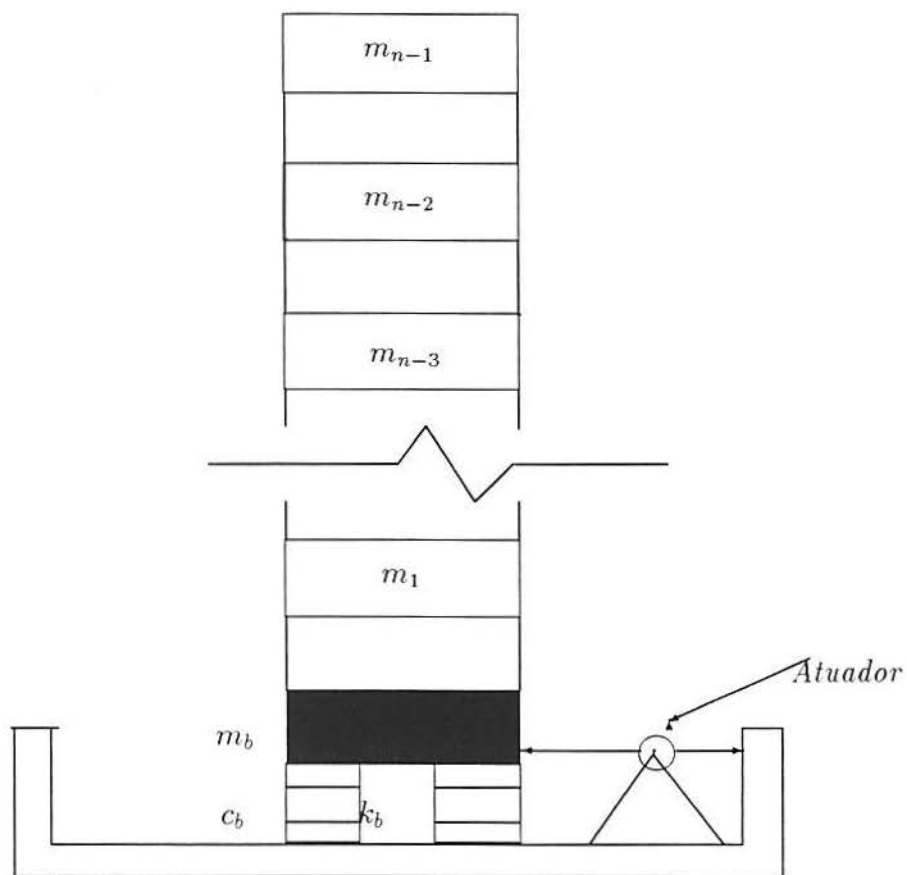


Figura 3.9: Representação Esquemática de um Prédio de múltiplos Andares com Isolamento de Base do tipo suporte de borracha (**LRB**) e Atuador : Controle Híbrido [YAN91]

4 LEIS DE CONTROLE ÓTIMO APLICADAS A ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL

4.1 Introdução

O conceito de controle estrutural tem ganho muito interesse entre os engenheiros estruturais. Nesse sentido, pesquisas feitas demonstraram que o uso do controle ativo é uma maneira muito eficiente de controlar vibrações de estruturas flexíveis de engenharia civil (prédios muito altos, pontes). Os principais problemas em controle estrutural são encontrados quando consideramos:

- i) a implementação da força de controle;
- ii) projeto apropriado dos parâmetros de controle;
- iii) interação entre o sistema de controle e a estrutura.

Uma vez que os prédios futuros tendem a ser muito mais altos e mais flexíveis devemos ter presente que para estes prédios super-altos funcionarem, sejam seguros sob meios hostis, por exemplo, terremotos ou furações, os sistemas de controle passivo ou ativo poderiam ser concebidos como parte integral do prédio.

A necessidade de desenvolver novos algoritmos de controles ótimos convenientes para controlar estruturas excitadas por sismos, requereria uma revisão de vários algoritmos de controles ótimos clássicos. Por simplicidade, consideraremos prédios unidimensionais implementados com sistemas de controle ativo, ou passivo, como se mostra nas figuras do capítulo anterior. As estruturas são idealizadas por um sistema de n graus de liberdade e sujeitas a uma aceleração unidimensional $\ddot{X}_g(t)$ do solo devido a um terremoto.

4.2 Excitação Sísmica

Para efeitos de simulação numérica, consideraremos a aceleração vertical do terremoto de Loma Prieta ocorrido em 17 de Outubro de 1989. Estes dados estão contidos no arquivo `quake.mat` do MATLAB e fora registrado com um período de amostragem 1/200 segundos e adequadamente escalados. A figura 4.1 mostra o registro temporal da aceleração do terremoto e o correspondente espectro de frequência.

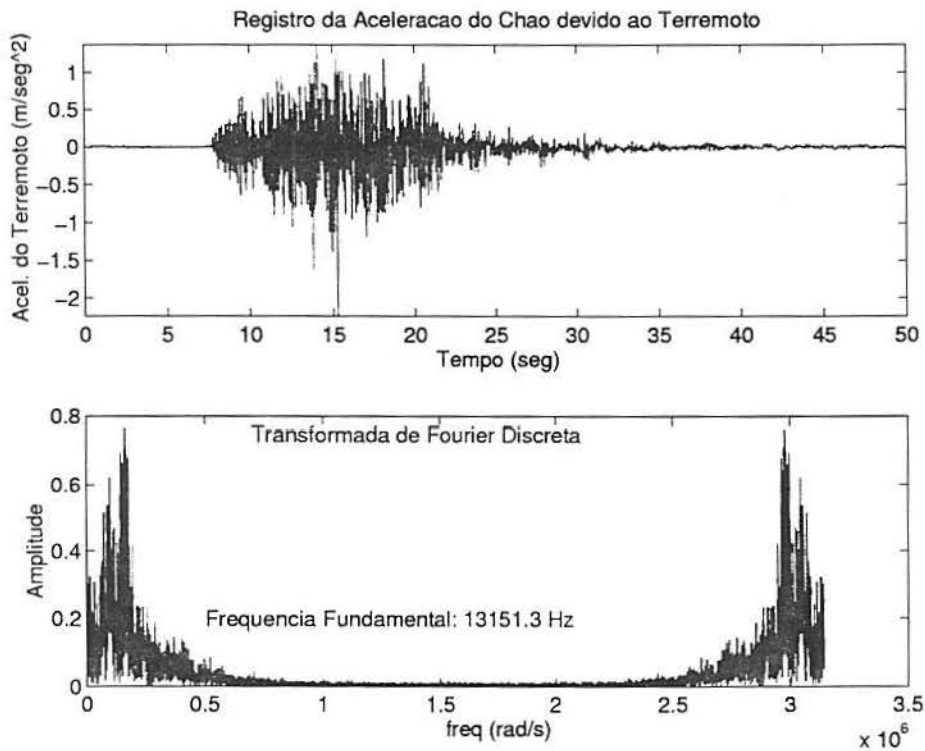


Figura 4.1: Registro temporal da aceleração vertical do terremoto e espectro de frequência

Mediante a redução à primeira ordem, a equação diferencial matricial do movimento dessas estruturas pode ser expressa como (modelo ATMD)[ABD 80], [YAN 75]-[YAN 87]:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{AZ}(t) + \mathbf{BU}(t) + \mathbf{W}_1\ddot{\mathbf{X}}_g(t) \quad (4.2.1)$$

com a condição inicial $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$, onde

- $\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t))^T$ è o vetor de estado de ordem $2n \times 2n$

-

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

- $\mathbf{Z}(t)$ é um vetor de estado $2n$ -dimensional;
- $\mathbf{U}(t)$ é um vetor de controle r -dimensional;
- \mathbf{A} é uma matriz de ordem $2n \times 2n$;
- \mathbf{B} é uma matriz de ordem $2n \times r$ especificando a localização dos controladores ativos e;
- \mathbf{W}_1 é um vetor apropriado de ordem $2n$.

4.3 Algoritmos de Controles Ótimos Instantâneos

Com referência ao controle ótimo clássico, somente o algoritmo de controle de laço-fechado é aplicável a estruturas excitadas por sismos. [ABD 80]-[YAN 87]

Enquanto o movimento do solo devido a terremotos não é conhecido a priori a base excitada do prédio pode ser medida em tempo real instalando sensores

sobre a base do piso de cada andar. Em outras palavras: em algum tempo t particular o registro da base excitada avaliado sobre aquele instante de tempo t . Este tipo de informação importante será utilizada no desenvolvimento de novos algoritmos de controle ótimo na secções seguintes.

Conseqüentemente, se estabelecemos novos algoritmos de controle usando o índice de realização $J(t)$ dependente do tempo temos [YAN 75]-[YAN 87]:

$$J(t) = \mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{U}(t)^T\mathbf{R}\mathbf{U}(t) \quad (4.3.4)$$

A minimização da equação (4.3.4) implica que o índice de realização $J(t)$ é minimizado em cada instante de tempo t , para todo $0 \leq t \leq t_f$. O controle ótimo assim obtido denomina-se o "algoritmo de controle ótimo instantâneo" [YAN 75]-[YAN 87].

4.4 Dedução de Algoritmos de Controle Ótimo Instantâneo Através do Método Numérico de Runge-Kutta de Quarta Ordem

4.4.1 Uso do Método Numérico

A equação matricial $\dot{Z}(t) = AZ(t) + Bu(t) + W_1 X_g''(t)$ pode ser resolvida usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem como segue:

$$Z(t + \Delta\tau) = Z(t) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (4.4.5)$$

onde $\Delta\tau$ é o tempo de passo de integração e k_1, k_2, k_3, k_4 são vetores $2N$ dimensionais. tomando um passo anterior em 4.4.5 temos:

$$Z(t) = AZ(t - \Delta\tau) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (4.4.6)$$

O tempo de passo de integração no método de Runge-Kutta regular é $\Delta\tau$, usamos aqui neste esquema numérico $\Delta\tau = 2\Delta t$ ou $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{2}$, ou seja, o tamanho do passo usado neste esquema é a metade do que é usado no método regular de Runge-Kutta de quarta ordem. Assim substituindo $\Delta\tau = 2\Delta t$ na eq.4.4.6 temos:

$$Z(t) = AZ(t - 2\Delta t) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (4.4.7)$$

Os vetores k_i , para $i = 1, \dots, 4$ são dados como segue:

$$k_1 = 2\Delta t A[Z(t - 2\Delta t)] + Bu(t - 2\Delta t) + W_1 \ddot{X}_g(t - 2\Delta t) \quad (4.4.8)$$

$$k_2 = 2\Delta t A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_1] + Bu(t - \Delta t) + W_1 \ddot{X}_g(t - \Delta t) \quad (4.4.9)$$

$$k_3 = 2\Delta t A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_2] + Bu(t - \Delta t) + W_1 \ddot{X}_g(t - \Delta t) \quad (4.4.10)$$

$$k_4 = 2\Delta t A[Z(t - 2\Delta t) + k_3] + Bu(t) + W_1 \ddot{X}_g(t) \quad (4.4.11)$$

Observa-se das equações 4.4.8, 4.4.9, 4.4.10, 4.4.11 que k_i para $i = 1, \dots, 4$ são funções de $t - 2\Delta t, t - \Delta t$ e t . Por simplicidade de apresentação os argumentos $t - 2\Delta t, t - \Delta t$ e t serão omitidos. Para simplificar a operação matemática, todos os vetores em (4.4.7) que são funções de $\tau < t$ são agrupados em um único termo, denotado por $d(t - 2\Delta t, t - \Delta t)$, como segue:

$$d(t - 2\Delta t, t - \Delta t) = Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{3}\Delta t A[Z(t - 2\Delta t)] + Bu(t - 2\Delta t) +$$

$$W_1\ddot{X}_g(t - 2\Delta t) + 2A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_1] + 4Bu(t - \Delta t) + 4w_1\ddot{X}_g(t - \Delta t) \quad (4.4.12)$$

$$+ 2A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_2] + A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_2] + A[Z(t - 2\Delta t) + \frac{1}{2}k_3]$$

Então a equação 4.4.7 pode ser escrita da forma

$$Z(t) = d(t - 2\Delta t, t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{3}[Bu(t) + W_1\ddot{X}_g(t)] \quad (4.4.13)$$

4.4.2 Controle Ótimo Instantâneo

Ao minimizar o índice realização $J(t)$, em 4.3.4, o vetor Hamiltoniano H é obtido introduzindo um vetor multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ $2N$ dimensional como segue

$$H[Z(t), u(t), \lambda(t), \ddot{X}_g] = Z^T(t)QZ(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)\{Z(t) - d(t - 2\Delta t, t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{3}[Bu(t) + W_1\ddot{X}_g(t)]\} \quad (4.4.14)$$

As condições necessárias para minimizar $J(t)$, sujeito a restrição 4.4.13 são:

$$\frac{\partial H}{\partial Z} = 0 \quad (4.4.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (4.4.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (4.4.17)$$

Substituindo a equação 4.4.14 nas equações 4.4.15, 4.4.16 e 4.4.17 obtém-se o vetor de controle regulado pelo vetor de estado resposta $Z(t)$, na forma: (Controle ótimo instantâneo de laço fechado)

$$u(t) = -\frac{\Delta t}{3} R^{-1} B^T Q Z(t) \quad (4.4.18)$$

Substituindo o vetor de controle dado por 4.4.18 na eq. 4.4.13, o vetor estado resposta é dado por:

$$z(t) = [I + (\frac{\Delta t}{3})^2 B R^{-1} B^T Q]^{-1} [d(t - 2\Delta t.t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{3} W_1 \ddot{X}_g(t)] \quad (4.4.19)$$

onde I é a matriz de ordem $2n \times 2n$.

4.5 Determinação da Matriz Ponderada Q

Consideraremos os exemplos de um prédio de três andares com ATMD adicionada ao topo da construção. Por simplicidade a matriz de ponderação \mathbf{R} da força de controle é tomada como a matriz identidade, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Se um sistema de ATMD é usado então a equação 4.4.18 pode ser expandido na forma

$$\begin{aligned} U(t) &= -\frac{\Delta t}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_3} & \frac{1}{m_d} \end{bmatrix}_{1 \times 8} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \\ &= B_1 X + B_2 \dot{X} \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

onde

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{13} & \bar{q}_{14} \\ \bar{q}_{21} & \bar{q}_{22} & \bar{q}_{23} & \bar{q}_{24} \end{bmatrix} \quad (4.5.21)$$

por causa do arranjo típico da matriz \mathbf{B} , apenas os elementos das duas últimas linhas da matriz \mathbf{Q} de ordem (8×8) necessitam ser discutidos. Pela expansão da multiplicação de matriz, os vetores \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\Delta t}{3} \left[\frac{-q_{11}}{m_3} + \frac{q_{21}}{m_d}, \frac{-q_{13}}{m_3} + \frac{q_{22}}{m_d}, \frac{-q_{13}}{m_3} + \frac{q_{23}}{m_d}, \frac{-q_{14}}{m_3} + \frac{q_{24}}{m_d} \right] = \\ &= \frac{\Delta t}{3} [a, b, c, d], \\ B_2 &= -\frac{\Delta t}{3} \left[\frac{-\bar{q}_{11}}{m_3} + \frac{\bar{q}_{21}}{m_d}, \frac{-\bar{q}_{13}}{m_3} + \frac{\bar{q}_{22}}{m_d}, \frac{-\bar{q}_{13}}{m_3} + \frac{\bar{q}_{23}}{m_d}, \frac{-\bar{q}_{14}}{m_3} + \frac{\bar{q}_{24}}{m_d} \right] = \\ &= \frac{\Delta t}{3} [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}]. \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

entenda-se por m_3 a massa do topo do prédio.

Pela substituição da força de controle 4.5.20 na equação do movimento (3.4.20), temos

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{C} - \mathbf{H}\mathbf{B}_2)\dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{H}\mathbf{B}_1)\mathbf{X}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{X}_g(t), \quad (4.5.23)$$

onde \mathbf{H} é o vetor de localização dos controladores. $\mathbf{H} = (0, 0, -1, 1)^T$. A matriz de amortecimento modificada $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{H}\mathbf{B}_2$ e a matriz de rigidez modificada $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{H}\mathbf{B}_1$ podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & -c_d \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_d & -c_d \\ 0 & 0 & -c_d & c_d \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ -\bar{a} & -\bar{b} & -\bar{c} & -\bar{d} \end{bmatrix} \\
\bar{K} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_d & -k_d \\ 0 & 0 & -k_d & k_d \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ -a & -b & -c & -d \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

onde c_d e k_d são o amortecimento e a rigidez do amortecedor de massa regulada. Salientamos aqui a perda de simetria sofrida pelas novas matrizes de rigidez e amortecimento. Caso queiramos preservar as características de simetria dessas matrizes, podemos expressá-las como

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & -c_d \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_d & -c_d \\ 0 & 0 & -c_d & c_d \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_2 & -2d_2 \\ 0 & 0 & -2d_2 & 2d_2 \end{bmatrix} \\
\bar{K} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_d & -k_d \\ 0 & 0 & -k_d & k_d \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_1 & -2d_1 \\ 0 & 0 & -2d_1 & 2d_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

Este arranjo na matriz \mathbf{Q} é equivalente a modificar o amortecimento e a rigidez da massa amortecida regulada (**TMD**), isto é

$$c'_d = c_d + \frac{2}{3}\Delta t d_2, \quad k'_d = k_d + \frac{2}{3}\Delta t d_1. \quad (4.5.26)$$

As equações 4.5.25 são similares àsquelas do sistema de controle passivo mas com c_d e k_d modificados para c'_d e k'_d .

4.6 Formulação Direta

De acordo com os resultados do capítulo 3. na equação

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = U + W \quad (4.6.27)$$

o vetor força de controle $u(t)$ pode ser escrito na forma:

$$U(t) = -\phi R^{-1} B^T Q Z(t); \quad Z(t) = (X(t), \dot{X}(t))^T \quad (4.6.28)$$

onde $\phi = \frac{\Delta t}{3}$. A matriz $R^{-1} B^T Q$ pode ser particionada como

$$R^{-1} B^T Q = [T_1 \quad | \quad T_2] \quad (4.6.29)$$

onde T_i são matrizes $n \times n$ ($i = 1, 2$) e após substituir a equação 4.6.29 em 4.6.28 e a equação 4.6.28 em 4.6.27 temos a equação:

$$M\ddot{X} + (C + \phi T_2)\dot{X} + (K + \phi T_1)X = f(t). \quad (4.6.30)$$

Nos casos de controle por ATMD e controle por Tendão, resolveremos numericamente a equação 4.6.30 usando a abordagem da Resposta Impulso Matricial.

4.7 Simulação Numérica para Controle Ótimo Instantâneo por ATMD

Utilizando o exemplo citado na seção anterior (4.5) O vetor deslocamento $X(t)$ e o vetor força de controle foram determinados através do controle ótimo instantâneo de laço fechado. As propriedades estruturais de cada andar são:

4.7.1 DADOS I

A massa de cada andar é $m_i = 5.0000E + 003 \text{ N/s}^2/cm$ ($i = 1, 2, 3$).

O coeficiente de rigidez é dado por:

$k_1 = 1.2609E + 006$; $k_2 = 8.4061E + 005$; $k_3 = 42030E + 005$, onde os k_i estão em N/cm .

O coeficiente de amortecimento interno de cada andar em $N/s/cm$ é dado por:

$c_1 = 4.2657E + 003$; $c_2 = 2.8438E + 003$; $c_3 = 1.4219E + 003$

A massa da *ATMD* é dada por $m_d = 250.000 \text{ N/s}^2/cm$

A frequência natural f_n em *HZ* da *ATMD* é 0.8961;

O raio de amortecimento ξ da *ATMD* é 12.7270.

Na figura (4.2) são mostrados os deslocamentos dos andares sob a excitação sísmica para os dados I, antes de aplicar algum tipo de controle no prédio.

Tomamos a seguinte matriz de ponderação Q_i 8×8 do controle instantâneo ótimo:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 4} & 0_{7 \times 4} \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad (4.7.31)$$

onde:

$q_1 = [108.36 \quad 249.84 \quad 466.7325 \quad 0.03991875] * (-1E + 6)$

$q_2 = [668.925 \quad 764.325 \quad -2917.125 \quad -23656.5] * (-1E + 3)$ Os resultados corres-

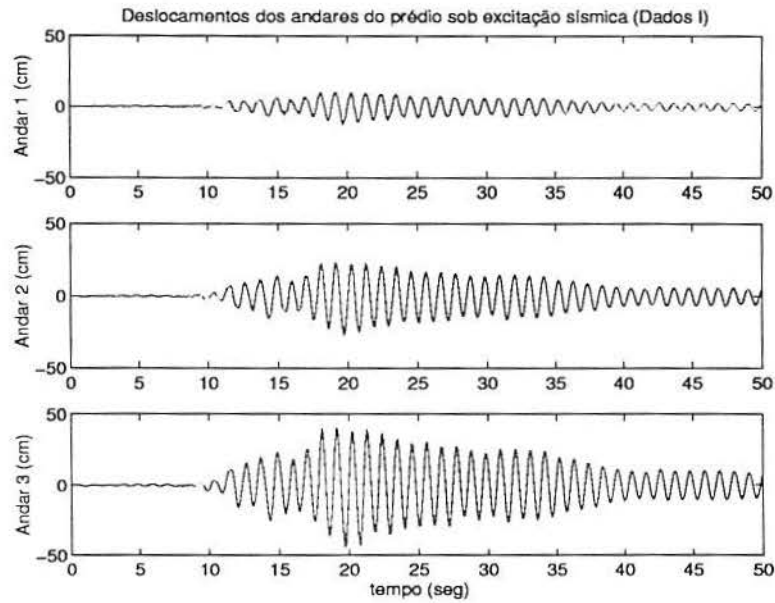


Figura 4.2: Deslocamentos dos andares sob excitação sísmica para os dados I (sem controle)

pondentes aos deslocamentos são mostrados na figura (4.3), sendo comparados com aqueles obtidos quando o prédio não tinha controle.

Na figura (4.4) mostramos o força de controle exercida pela massa ativa.

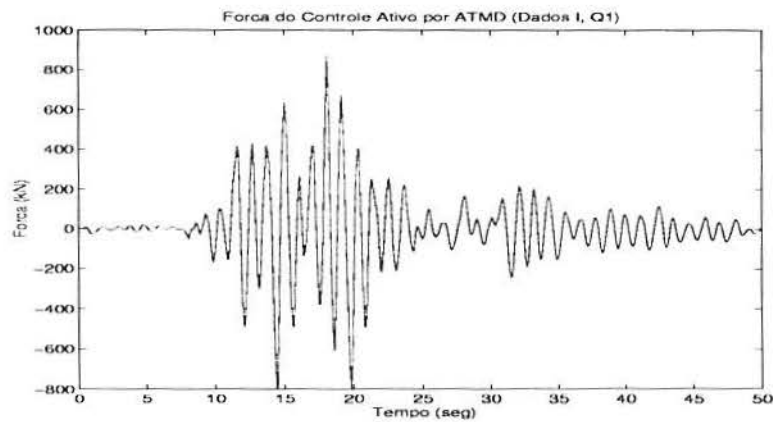


Figura 4.4: Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_1

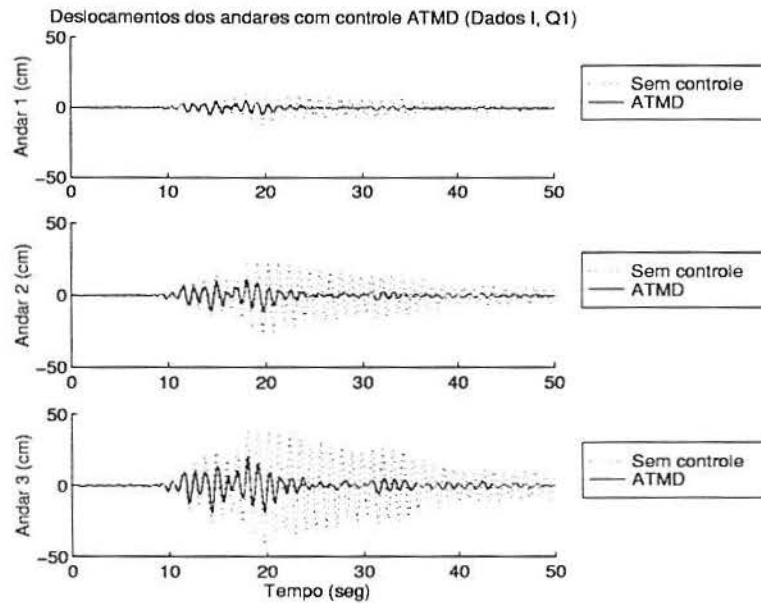


Figura 4.3: Deslocamentos do prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_1

Consideramos agora os dados estruturais I , mas tomando uma outra matriz de ponderação Q_2 da mesma forma, porém com:

$$q_1 = [108.36 \quad 249.84 \quad 466.7325 \quad 0.03991875] * (-1E + 6) * 15$$

$$q_2 = [668.925 \quad 764.325 \quad -2917.125 \quad -23656.5] * (-1E + 3) * 5$$

A força de controle para este caso é mostrada na figura (4.6).

4.7.2 DADOS II

A massa de cada andar é:

$m_1 = 3.5025E + 003$; $m_2 = 2.6269E + 003$; $m_3 = 1.7513E + 003$ O coeficiente de rigidez é dado por:

$k_1 = 4.7284E + 006$; $k_2 = 3.1523E + 005$; $k_3 = 1.5761E + 005$, onde os k_i estão em N/cm ;

O coeficiente de amortecimento interno de cada andar em $N/s/cm$ é dado por:

$$c_1 = 5.3172E + 003 \quad ; \quad c_2 = 3.5448E + 003 \quad c_3 = 1.7724E + 003$$

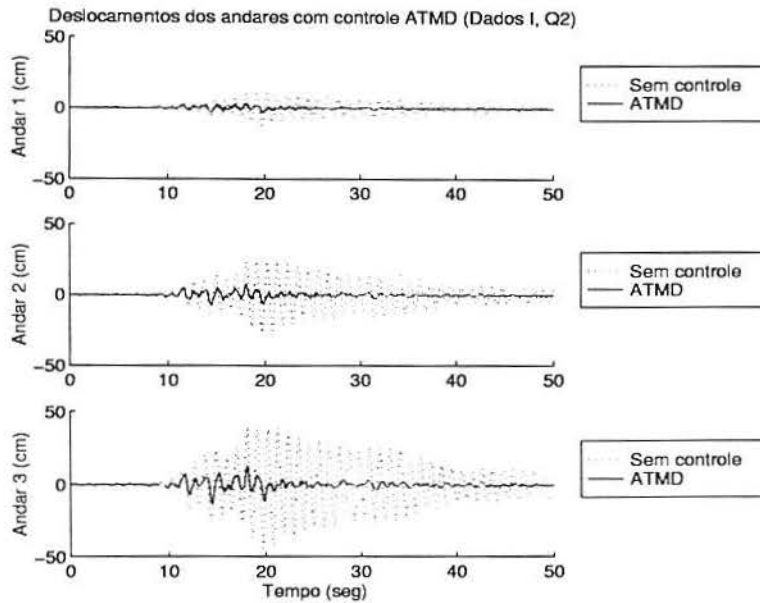


Figura 4.5: Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados I e Q_2

A massa da *ATMD* é dada por $m_d = 210.000 \text{ N/s}^2/\text{cm}$

A frequência natural f_n em *HZ* da *ATMD* é 2.5732:

O raio de amortecimento ξ da *ATMD* é 16.7850.

Tomamos a seguinte matriz de ponderação do controle instantâneo ótimo:

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 4} & 0_{7 \times 4} \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad (4.7.32)$$

onde: $q_1 = [-1.3881E + 9 \quad -2.2770E + 9 \quad -2.8391E + 9 \quad 2.0038E + 5]$

$q_2 = [-3.3773E + 7 \quad -4.9260E + 7 \quad -3.6175E + 7 \quad 7.1331E + 7]$

Na figura (4.9), mostramos a força de controle quando são usados os dados II e a matriz Q_3 .

Consideramos agora os dados estruturais II, mas tomando uma outra matriz de ponderação Q_4 da mesma forma, porém com:

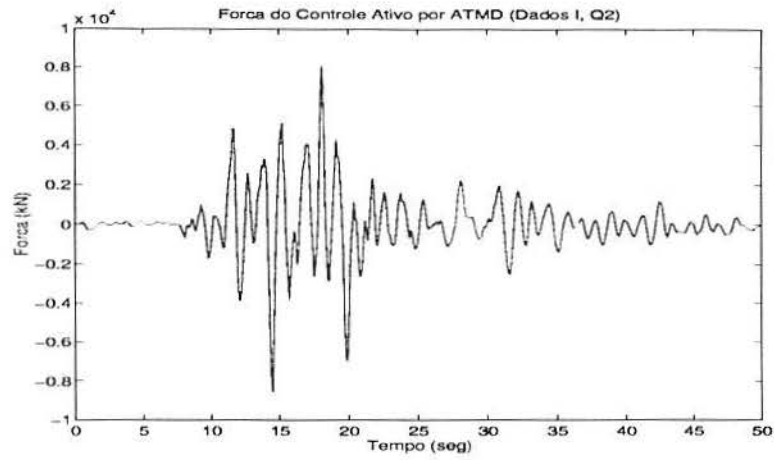


Figura 4.6: Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados I e matriz Q_2

$$q_1 = [-1.3881E + 9 \quad -2.2770E + 9 \quad -2.8391E + 9 \quad 2.0038E + 5] * 15$$

$$q_2 = [-3.3773E + 7 \quad -4.9260E + 7 \quad -3.6175E + 7 \quad 7.1331E + 7] * 5$$

e os resultados obtidos são mostrados na figura (4.10).

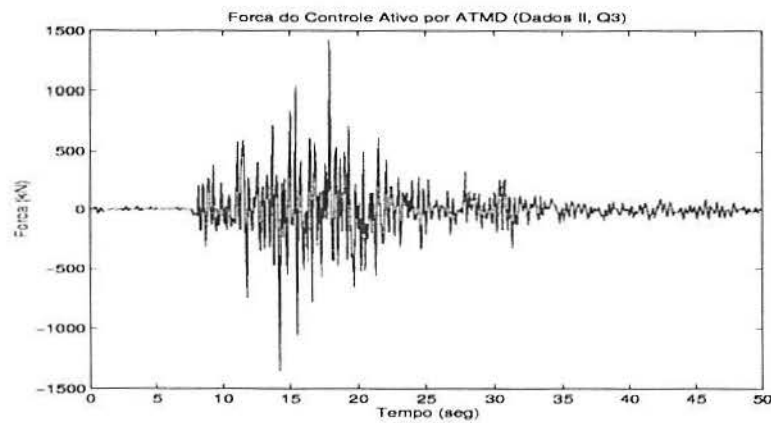


Figura 4.9: Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados II e matriz Q_3

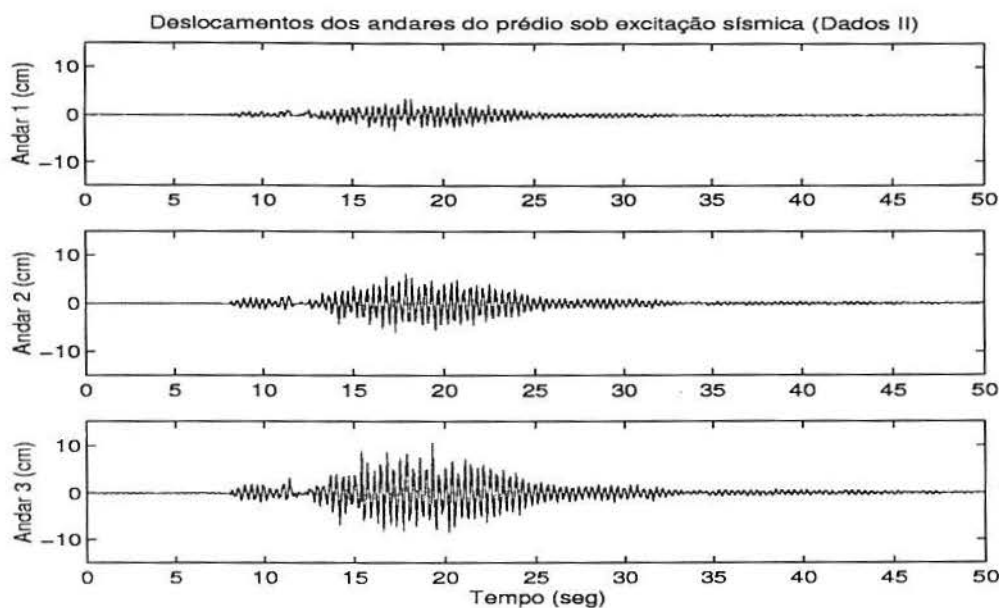


Figura 4.7: Deslocamentos dos andares sob excitação sísmica para os dados II (sem controle)

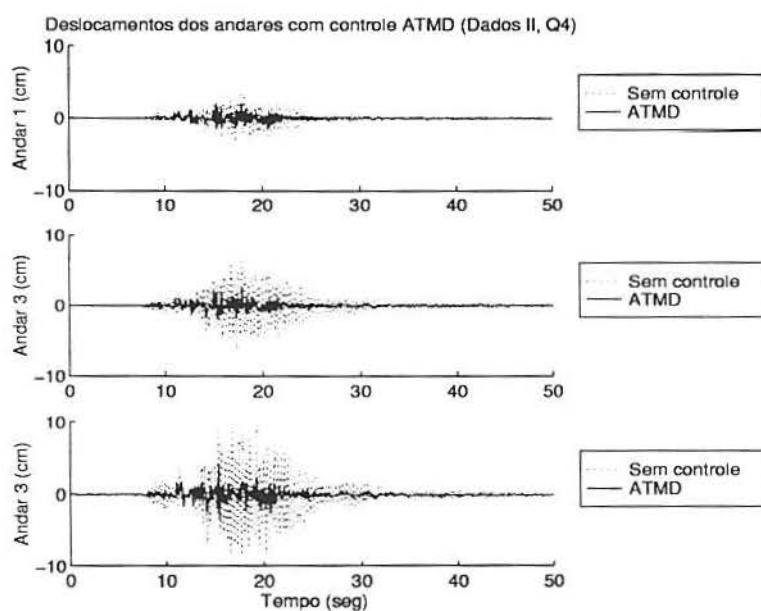


Figura 4.10: Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados II e Q_4

Na figura (4.11) mostramos a força de controle para os dados II e a matriz Q_4 .

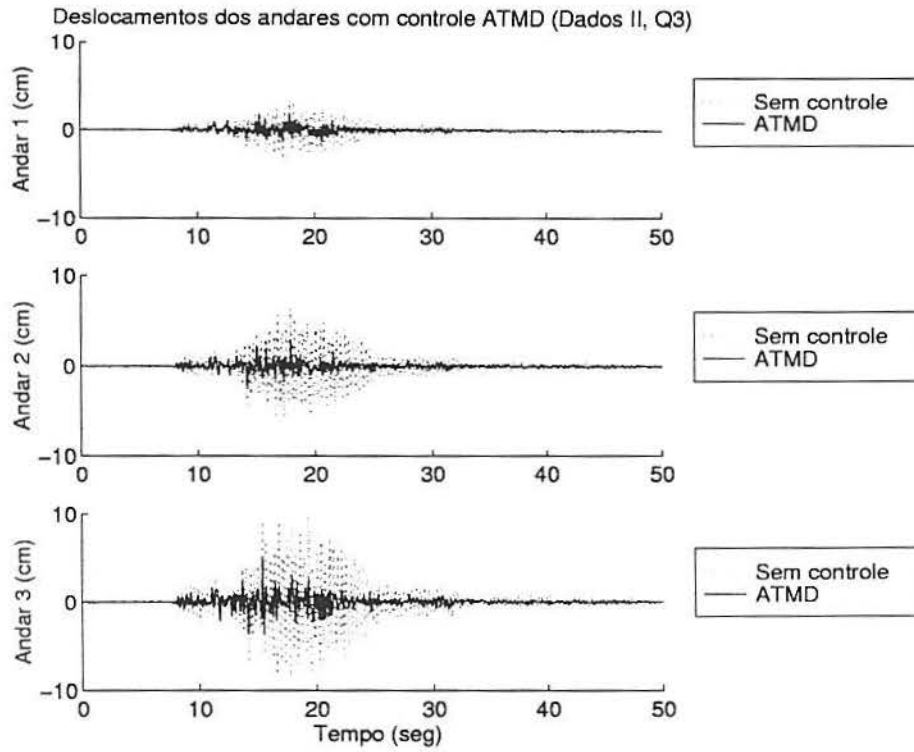


Figura 4.8: Controle por ATMD dos deslocamentos do prédio para os dados II e Q_3

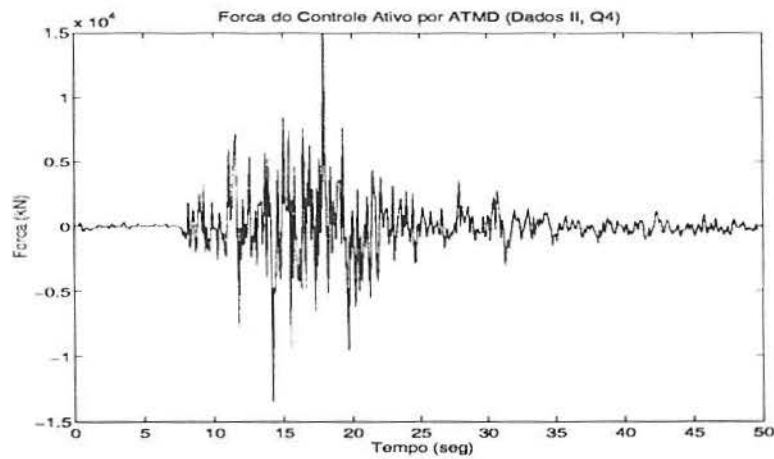


Figura 4.11: Força de controle exercida pela massa ativa, no prédio sob excitação sísmica para os dados II e matriz Q_4

4.8 Efeito da Matriz de Ponderação Q no Sistema de ATMD

Para examinar o efeito da matriz de ponderação Q foi utilizado o método da matriz de amortecimento modificado \bar{C} e da matriz de rigidez \bar{K} . Dois prédios de 3-andares, um menos rígido que o outro respectivamente, foram analisados. Os parâmetros estruturais foram mostrados como dados *I* e *II*. Duas estratégias de comparação foram estabelecidas: excitação do prédio *sem controle* e controle por **ATMD** localizado no topo (telhado) do prédio. Após simulação foi observado que:

1. Para os *DADOS I*, prédio menos rígido, multiplicando a matriz de ponderação Q por um escalar positivo, temos um maior controle; similarmente para os *DADOS II*;
2. Ao aumentar a magnitude da matriz de ponderação Q , o controle do deslocamento dos andares para o prédio com os *DADOS I* é maior;
3. A força exercida para controlar os deslocamentos do prédio com *DADOS I* e matriz Q_1 é menor que a exercida para controlar o prédio com *DADOS I* e matriz Q_2 . Similarmente para os *DADOS II* e matriz Q_3 a força de controle é menor que com a matriz Q_4 .

4.9 Controle por Retroalimentação Direta e Ótima da Saída

Um algoritmo para o cálculo da matriz de ganho da saída direta ótima é desenvolvido de um modo simples tal que um certo índice de performance é minimizado. Com a introdução de uma operação matricial especial [SOO 77b], o ganho de realimentação ótimo é obtido sistematicamente pela resolução simultânea de equações

algébricas lineares de modo iterativo. Ao invés de tentar estimar os estados totais do sistema, a medida da saída é diretamente multiplicada por um ganho de realimentação invariante no tempo e realimenta o sistema estrutural. Como a medida da saída contém informação limitada sobre o sistema, a realização do controle saída realimentada pode não ser tão bom quanto aquele do controle de realimentação do estado total. Portanto é ainda uma solução simples e de fácil implementação considerando o problema de medidas limitada [BAL 79],[LEV 71] e [IWA 90]. Nesta secção, o algoritmo de controle da saída ótima direta realimentada é derivada de um modo simples. A constante de ganho de realimentação da saída direta é obtida através de um processo de otimização de modo que um certo índice de realização é minimizado. Se o sistema realimentado é vulnerável a instabilidade, o ganho de realimentação determinado pelo processo de otimização será muito pequeno.

4.9.1 Algoritmo De Controle

A equação do movimento de uma estrutura de n-andares de parâmetros discreto sob uma carga dinâmica $w(t)$ e uma força de controle ativo $U(t)$ pode ser escrita como :

$$MX''(t) + CX'(t) + KX(t) = B_1U(t) + E_1W(t) \quad (4.9.33)$$

onde $X(t)=n \times 1$ vetor deslocamento, $M=n \times n$ matriz de massa; $C=n \times n$ matriz de amortecimento viscoso; $K=n \times n$ matriz de rigidez; $B_1=n \times m$ matriz de locação dos forças de controle; e $E_1=n \times q$ matriz de locação das cargas externas. A Eq. 4.9.33 pode ser reescrita na forma espaço estado:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + BU(t) + Ew(t) \quad (4.9.34)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (4.9.35)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \quad (4.9.36)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_1 \end{pmatrix} \quad (4.9.37)$$

Aqui a ordem das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{E} são $2n \times 2n$, $2n \times m$ e $2n \times q$, respectivamente. Porque o número de sensores é limitado, digo $p \ll 2n$, o vetor de saída $\mathbf{Y}(t)$ é apenas uma combinação linear do vetor estado $\mathbf{Z}(t)$. Estes estão relacionados por

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{Z}(t) \quad (4.9.38)$$

onde \mathbf{D} é a matriz de saída de ordem $p \times 2n$. Na saída direta realimentada, as forças de controle são calculadas diretamente da multiplicação da medida da saída por uma constante de ganho de realimentação, expressa como

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{G}\mathbf{Y}(t) \quad (4.9.39)$$

onde \mathbf{G} é a matriz de ganho de realimentação invariante no tempo de ordem $m \times p$. Em outras palavras, as forças de controle são apenas algumas combinações lineares das medida da saída, qual torna-se combinações dos estados do sistema. Então, as forças de controle são linearmente relacionadas com os estados do sistema

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{Z}(t) \quad (4.9.40)$$

substituindo 4.9.40 na 4.9.34 e rearranjando estas equações temos

$$\dot{z}(t) = A^i Z(t) + Ew(t) \quad (4.9.41)$$

onde

$$A^i = A + BGD$$

é definida para ser um sistema matricial equivalente com a aplicação das forças de controle. Comparando as duas equações de estado acima, o efeito das forças de controle é essencialmente a mudança da matriz do sistema e assim mudar os parâmetros do sistema. Parâmetros tais como frequência natural e fatores de amortecimento esperados de ambas as matrizes do sistema determinam a eficácia do controle.

4.9.2 Existência De Uma Matriz De Ganho De Realimentação Para Uma Saída Ótima

Para alguma saída medida, existe uma matriz de ganho de realimentação de saída ótima G tal que um certo índice de performance [chamado regulador]

$$J = \int_0^{\infty} [Z^T(t)QZ(t) + U^T(t)RU(t)]dt \quad (4.9.42)$$

é minimizado sujeito as restrições da Eq. 4.9.34 e 4.9.40. Na Eq. 4.9.42, o superescrito T denota uma matriz transposta; $Q = 2n \times 2n$ é a matriz ponderada simétrica positiva semidefinida para as variáveis de estado; $R = m \times m$ matriz ponderada simétrica positiva definida para as forças de controle seus valores relativos indicam o grau das forças de controle a serem aplicadas. Do argumento precedente, o efeito da saída realimentada é essencialmente aumentar as propriedades estruturais tais como frequências naturais e fatores de amortecimento.

4.9.3 (Cálculo Da Matriz G) OU minimização Do Índice de Realização

Se o sistema de controle realiza-se bem sob excitação aleatória, trabalhará igualmente bem para condições iniciais aleatórias, e vice-versa. Portanto apenas o distúrbio aleatório inicial é considerado aqui. Sob distúrbio aleatório inicial $Z(0) = Z_0$, a equação de estado realimentado equivalente 4.9.41 é resolvida como:

$$Z(t) = e^{(A+BGD)(t)} Z_0 \quad (4.9.43)$$

Após a Eq.4.9.40 e a Eq.4.9.43 são sequencialmente substituídas na Eq.4.9.42, as restrições das equações 4.9.34 e 4.9.40 são incorporadas na função custo J como

$$J = Z_0^T \left[\int_0^\infty e^{(A+BGD)^T t} (Q + D^T G^T R G D) e^{(A+BGD)(t)} dt \right] Z_0 \equiv Z_0^T H Z_0 \quad (4.9.44)$$

onde a matriz constante H é definida como

$$H = \int_0^\infty e^{(A+BGD)^T t} (Q + D^T G^T R G D) e^{(A+BGD)(t)} dt \quad (4.9.45)$$

Como a condição inicial Z_0 é aleatória, o índice quadrático de performance também é aleatório. Assim, ao invés do índice de performance propriamente dito, tomamos o seu valor esperado

$$\bar{J} = E[Z_0^T H Z_0] = \text{tr}(HZ) \quad (4.9.46)$$

é minimizado onde $E[\]$ denota a esperança; $\text{tr}(\)$ denota o traço de uma matriz; $eZ = E[Z_0 Z_0^T]$. A soma da premultiplicação de H por $(A + BGD)^T$ e a pós-multiplicação

de H por $(A + BGD)$ produz

$$(A + BGD)^T H + H(A + BGD) = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{(A + BGD)^T t} (Q + D^T G^T RGD) e^{(A + BGD)t}] dt \quad (4.9.47)$$

Porque um sistema estrutural é intrinsicamente estável, a matriz do sistema A é uma matriz estável na qual todos os autovalores possuem parte real negativa (Bellman 70). Além disso, a matriz de ganho de realimentação não deve desestabilizar o sistema, então a matriz equivalente do sistema $(A + BGD)$ é também uma matriz estável. Então, a integração no lado direito da Eq.4.9.47 existe. A Eq.4.9.47 pode ser calculada através de

$$(A + BGD)^T H + H(A + BGD) + (Q + D^T G^T RGD) = 0 \quad (4.9.48)$$

Como a matriz constante H no índice de performance esperado Eq.4.9.46 tem que satisfazer a Eq.4.9.48, o problema de otimização é agora convertido em um problema de minimizar a esperança do índice de performance \bar{J} sujeito à restrição da Eq.4.9.48. Incorporado à restrição, o Lagrangiano \bar{J}' pode ser introduzido como

$$\bar{J}' = \text{tr} L [A + BGD]^T H + H(A + BGD) + (Q + D^T G^T RGD) \quad (4.9.49)$$

Onde L é a matriz multiplicadores de Lagrange de ordem $2n \times 2n$. Como o índice de performance é quadrático, e as matrizes Q e R são respectivamente, positiva semidefinida e positiva definida, a condição necessária e suficiente para minimização são

$$\frac{\partial \bar{J}'}{\partial L} = (A + BGD)^T H + H(A + BGD) + (Q + D^T G^T RGD) = 0 \quad (4.9.50)$$

$$\frac{\partial \bar{J}'}{\partial H} = Z + L(A + BGD)^T + (A + BGD)L = 0 \quad (4.9.51)$$

$$\frac{\partial \bar{J}'}{\partial G} = 2B^T HLD^T + 2RGDLLD^T = 0 \quad (4.9.52)$$

Como a transposta das matrizes H e L também satisfaz as equações 4.9.50 e 4.9.51, respectivamente, e $(A + BGD)$ é uma matriz estável, as matrizes H e L são simétricas e positiva definida [BEL 70]. A solução das equações 4.9.50-4.9.52 podem ser simplificadas pela introdução das seguintes definições [SOO 77b]: O produto de Kronecker de duas matrizes Φ e Ψ é definido de modo que a ij -ésima submatriz do produto é formado como:

$$[\Phi \otimes \Psi]_{ij} = [\phi_{ij}\Psi] \quad (4.9.53)$$

se as dimensões das matrizes Φ e Ψ são, respectivamente, de ordem $n \times m$ e $p \times q$, então a dimensão de $\Phi \otimes \Psi$ é de ordem $np \times mq$. Aqui ϕ_{ij} é o ij -ésimo elemento da matriz ϕ . E a "vec" operação da matriz Φ é definida como:

$$Vec \ \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad (4.9.54)$$

onde ϕ_i é a i -ésima coluna da matriz Φ . Se Φ é uma matriz de ordem $n \times m$, então $[vec\Phi]$ é um vetor de ordem $nm \times 1$. Com a introdução das operações, as Eq. 4.9.50-4.9.52 podem ser reescrita como:

$$[I \otimes (A + BGD)^T + (A + BGD)^T \otimes I]vecH = -vec \ (Q + D^T G^T RGD) \quad (4.9.55)$$

$$[I \otimes (A + BGD) + (A + BGD) \otimes I] \text{vec} L = -\text{vec} Z \quad (4.9.56)$$

$$G = -R^{-1} B^T H L D^T (D L D^T)^{-1} \quad (4.9.57)$$

Supondo inicialmente que a matriz de ganho de realimentação $G = 0$ as equações 4.9.55 e 4.9.56 tornam-se simultaneamente equações algébricas lineares. As matrizes H e L podem ser resolvidas por algum método convencional. Então G é dado pela Eq.4.9.57. A matriz G é resolvida iterativamente até um erro relativo aceitável.

4.9.4 Teste De Convergência Para a Matriz Iterativa G

Nesta subseção subentenderemos que $\|\cdot\|$ é a norma de Frobenius. Aqui, consideramos as equações De acordo com a Eq.4.9.57 temos

$$\begin{aligned} G_k &= -R^{-1} B^T H_k L_k D^T (D L_k D^T)^{-1} \\ G_{k+1} &= -R^{-1} B^T H_{k+1} L_{k+1} D^T (D L_{k+1} D^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4.9.58)$$

Devido á decomposição espectral da matriz L_{k+1} temos:

$$L_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i x_i x_i^T \quad (4.9.59)$$

onde os vetores x_i são os autovetores de L_{k+1} correspondente a λ_i , $x_i^T x_j = 0$, $i \neq j$, $\|x_i\| = 1$.

Por outro lado, a matriz $D L_{k+1} D^T$ é definida positiva, pois

$$x^T D L D^T x = (P^T D^T x)^T \Lambda (P^T D^T x) = y^T \Lambda y > 0, \quad y \neq 0, \quad (4.9.60)$$

onde $\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$ Então,

$$DLD^T = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i D x_i x_i^T D^T = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i (D x_i)(D x_i)^T \quad (4.9.61)$$

e assim,

$$\|DLD^T\| = \left\| \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i (D x_i)(D x_i)^T \right\| \geq \min \{ \|\lambda_i (D x_i)(D x_i)^T\| \} = M \quad (4.9.62)$$

e portanto

$$\|(DLD^T)^{-1}\| \leq M \quad (4.9.63)$$

Tomando as seguintes equações:

$$\begin{aligned} G &= -R^{-1} B^T H L D^T (D L D^T)^{-1} \\ G_k &= -R^{-1} B^T H_k L_k D^T (D L_k D^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4.9.64)$$

com as seguintes suposições iniciais

- H_k converge a H
- L_k converge a L
- $\|(D L_k D^T)^{-1}\| \leq M$ e $\|(D L D^T)^{-1}\| \leq M$

fazendo

$$\begin{aligned}
\|G_k - G\| &= \|R^{-1}B^T [HLD^T(DLD^T)^{-1} - H_kL_kD^T(DL_KD^T)^{-1}]\| \\
&\leq \|R^{-1}\| \|B^T\| \|HLD^T(DLT^T)^{-1} - H_kL_kD^T(DL_KD^T)^{-1}\| \\
&\leq \|R^{-1}\| \|B^T\| \|HLD^T(DLT^T)^{-1} - H_kL_kD^T(DL_KD^T)^{-1} \\
&\quad + H_kL_kD^T(DL_KD^T)^{-1} - H_kL_kD^T(DL_KD^T)^{-1}\| \\
&\leq \|R^{-1}\| \|B^T\| \|(HLD^T - H_kL_kD^T)(DLD^T)^{-1} \\
&\quad + H_kL_kD^T[(DLD^T)^{-1} - (DL_kD^T)^{-1}]\| \\
&= \|R^{-1}\| \|B^T\| \|(HL - H_kL_k)D^T(DLD^T)^{-1} \\
&\quad + H_kL_kD^T[(DLD^T)^{-1} - (DL_kD^T)^{-1}]\| \tag{4.9.65}
\end{aligned}$$

4.10 Simulação Numérica para o Controle Por Retroalimentação Direta e Ótima da Saída

Tomemos como exemplos os mesmos dados estruturais dos prédios de 3 andares já mencionados no controle por *ATMD*. Suponhamos que tenham sido instalados alguns controladores ativos por tendão em determinados andares.

Para o cálculo do vetor deslocamento $X(t)$ e do vetor força de controle, escolhemos:

i) A matriz Q de ponderação

$$Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

ii) A matriz R de ponderação foi escolhida como $R = [\beta/(16k_c \cos^2 \alpha)]I$, onde I é matriz identidade de ordem $m \times m$ e m é o número de controladores;

iii) O coeficiente β determina a relativa importância da eficácia de controle (redução da resposta) e econômica (força de controle requerida).

a) β menor que 1 a eficácia do controle tem maior importância;

b) β maior que 1 a economia é mais importante;

c) β igual a 1 são igualmente importantes;

d) β

igual a infinito é o caso incontrolado. Aqui usamos $\beta = 1$;

iv) α representa a inclinação do ângulo do tendão. Tomemos $\alpha = 36$ graus;

v) k_c representa a rigidez do tendão. tomemos $k_c = 2,124$ (lb/in)

De acordo com resultados experimentais (Chung et al., 1993), a retroalimentação direta do deslocamento resulta ser ineficiente. Por este motivo, simularemos também o controle por retroalimentação direta da velocidade. Isto implica uma redução no número de controladores e sensores, que será comparada para vários casos.

Seguindo a notação descrita em (Chung et al., 1993), as localizações dos controladores e sensores são simbolizadas por U e v . Por exemplo, $U1v123$ indica que se coloca um controlador no primeiro andar e são medidas três velocidades, no primeiro, segundo e terceiro andar.

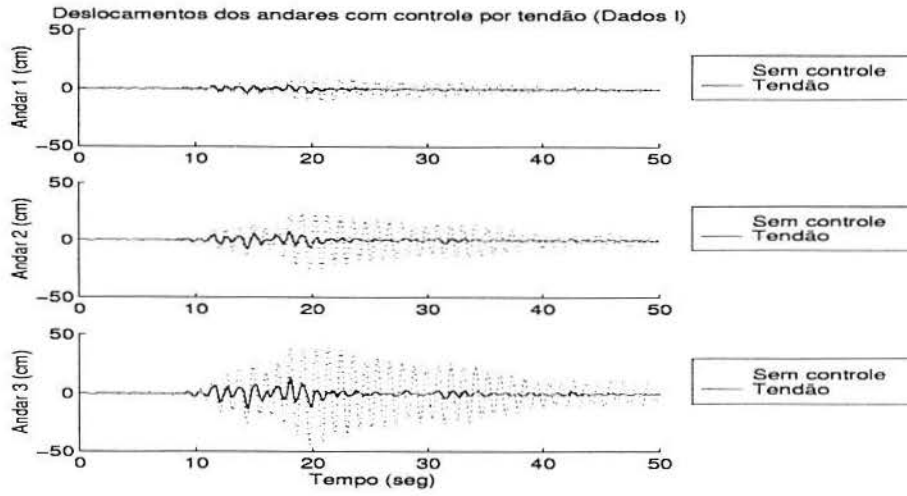


Figura 4.12: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I, sendo $D = I, u_{123}v_{Estado}$

A seguir, mostramos as forças de controle por tendão em todos os andares, para os dados I (figura (4.14) e para os dados II (figura(4.15)).

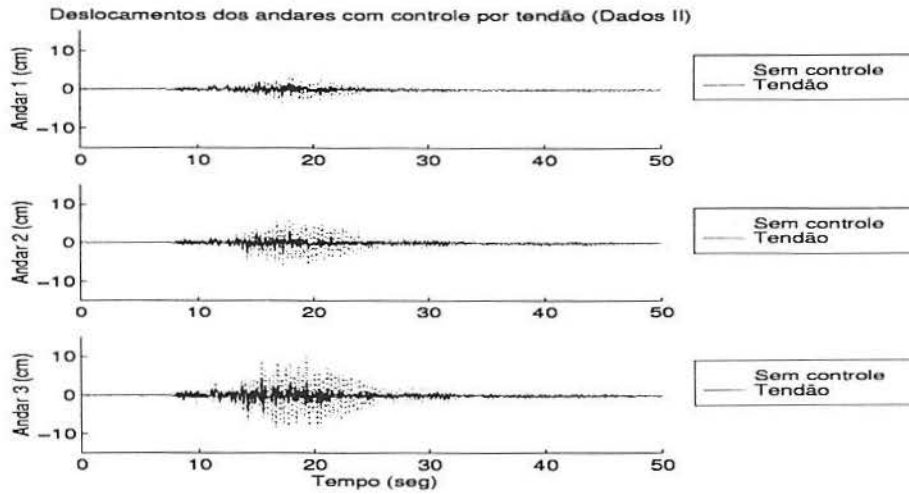


Figura 4.13: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II, sendo $D = I$, u_{123v} Estado

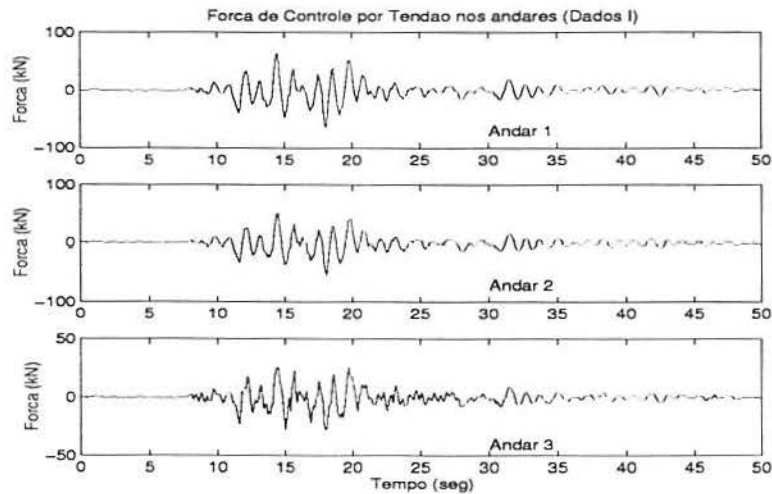


Figura 4.14: Força de controle por tendão no prédio sob excitação sísmica para os dados I

Agora, faremos um estudo sobre a colocação de diversos números de sensores e controladores.

4.10.1 Caso U123v123

Neste caso, vamos ter que $D = [0 \mid I]$ onde 0 e I são as matrizes nula e identidade de ordem 3×3 , respectivamente. Os resultados gráficos são muito

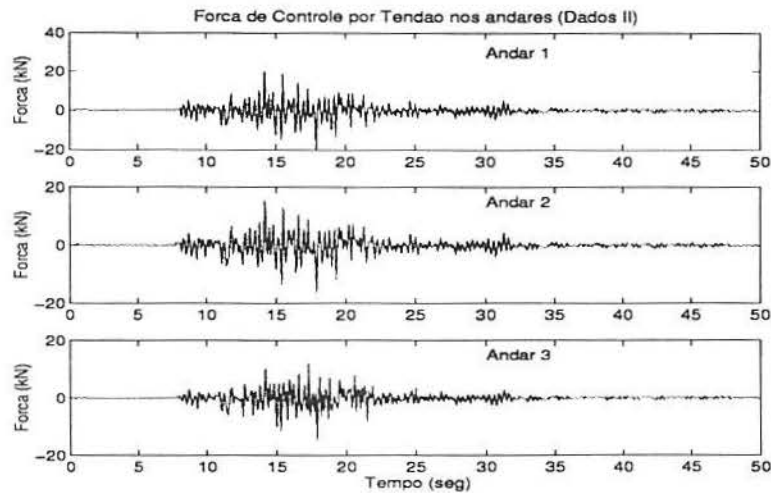


Figura 4.15: Força de controle por tendão no prédio sob excitação sísmica para os dados II

parecidos com aqueles obtidos nas figuras (4.12) e (4.13), como veremos depois, ao tabularmos alguns valores significativos dos resultados numéricos. Cabe lembrar que neste caso, estamos usando só a retroalimentação direta das velocidades.

4.10.2 Caso U1v123

Aqui, a matriz D é a mesma que na subseção anterior (pois o número de sensores é o mesmo), porém, teremos uma matriz B diferente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} * H \end{bmatrix}, \quad H = [-1 \ 1 \ 0]^T.$$

Nas figuras (4.16) e (4.17) mostramos os resultados obtidos para os dados I e os dados II, respectivamente.

As forças de controle serão mostradas só quantitativamente.

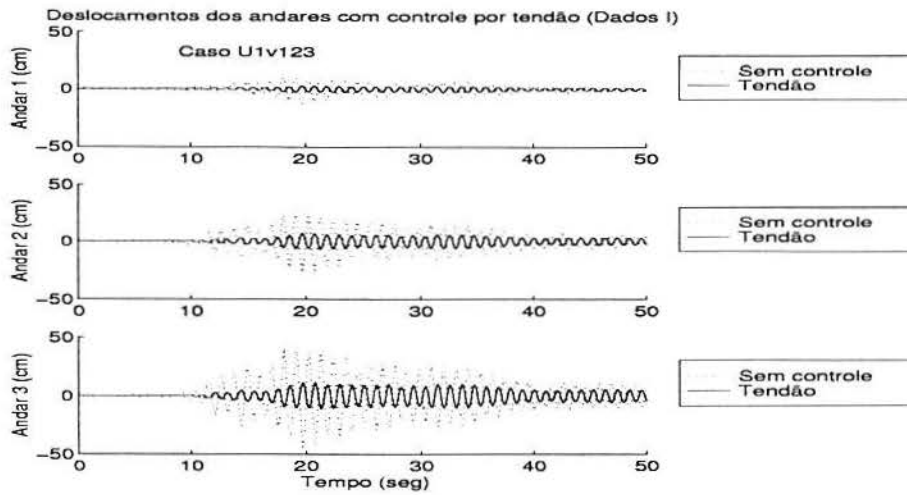


Figura 4.16: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I

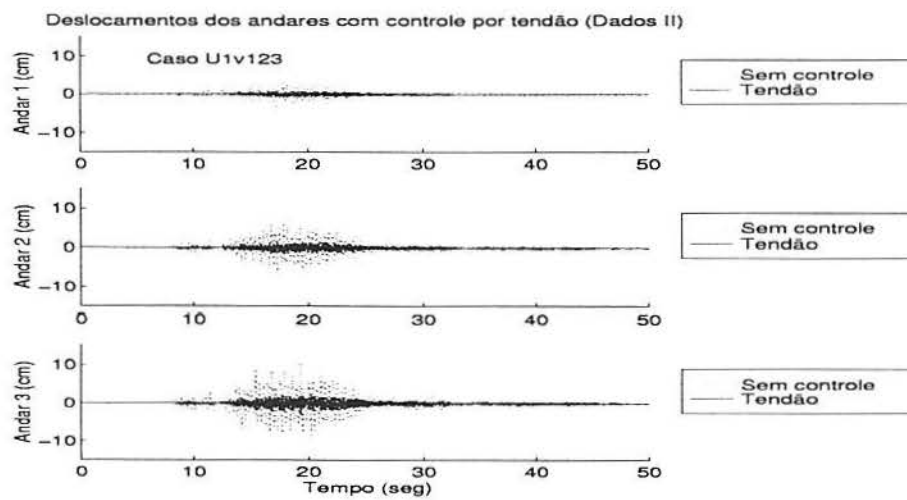


Figura 4.17: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os -dados II

4.10.3 Caso U1v1

Aqui, a matriz D é

$$D = [000100]^T$$

pois, agora, tem-se só um sensor e a matriz B será a mesma que na subseção anterior.

Nas figuras (4.18) e (4.19) mostramos os resultados obtidos para os dados I e os dados II, respectivamente.

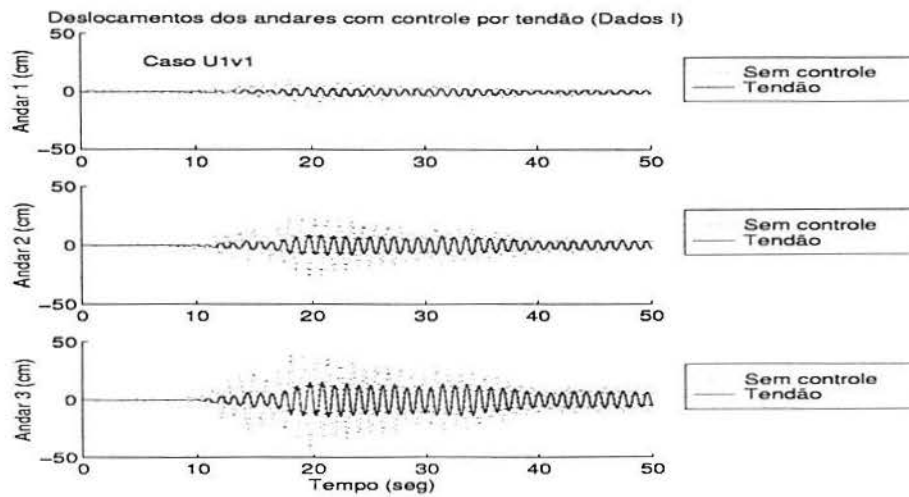


Figura 4.18: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I

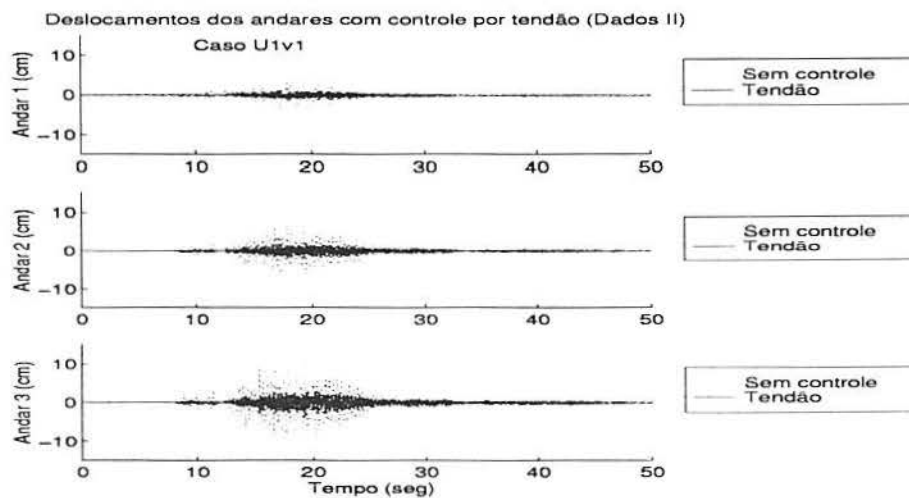


Figura 4.19: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II

4.10.4 Caso U1v3

Aqui, a matriz D é

$$D = [000001]^T$$

pois, agora, tem-se só um sensor e a matriz B será a mesma que na subseção anterior.

Nas figuras (4.20) e (4.21) mostramos os resultados obtidos para os dados I e os dados II, respectivamente.

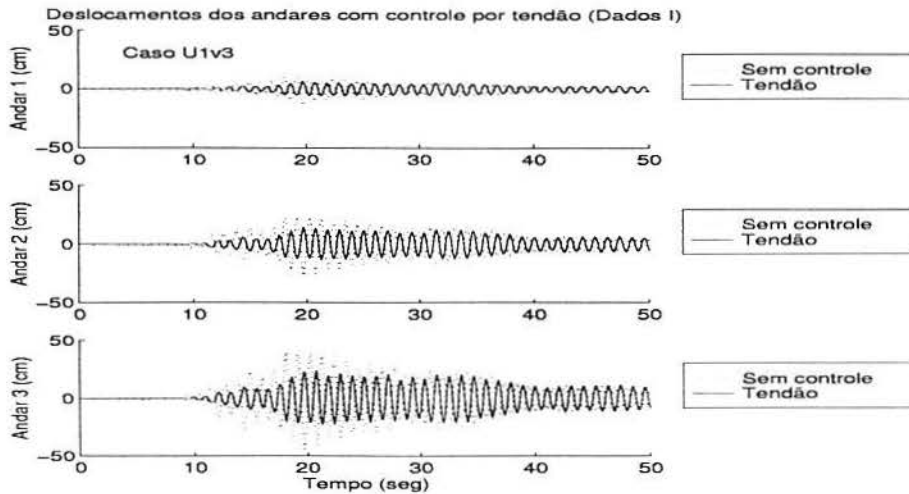


Figura 4.20: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I

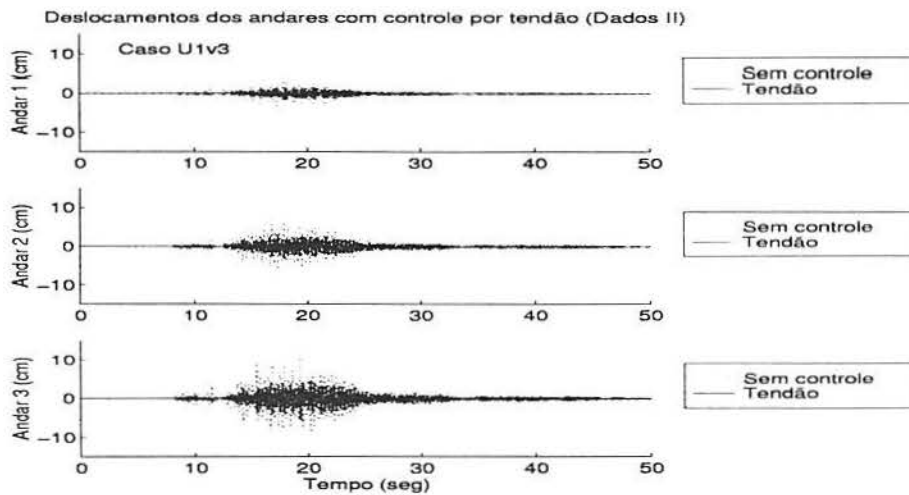


Figura 4.21: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II

4.10.5 Caso U1v1[D_1]

Aqui, a matriz D é

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 4.116 \ -1.785 \ 0.240]^T$$

e a mesma matriz B do que na subseção anterior.

Nas figuras (4.22) e (4.23) mostramos os resultados obtidos para os dados I e os dados II, respectivamente.

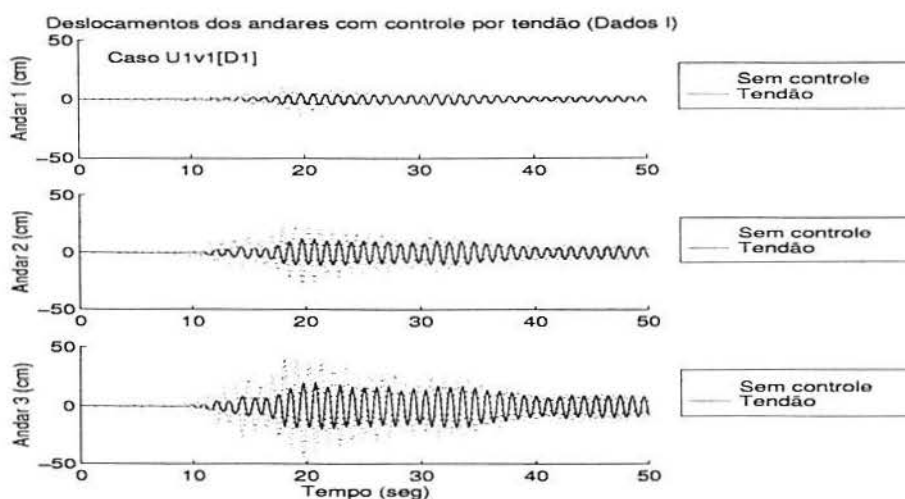


Figura 4.22: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I

4.10.6 Caso U1v3[D_1]

Aqui, a matriz D é

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 0.060 \ -1.210 \ 1.125]^T$$

e a mesma matriz B do que na subseção anterior.

Nas figuras (4.24) e (4.25) mostramos os resultados obtidos para os dados I e os dados II, respectivamente.

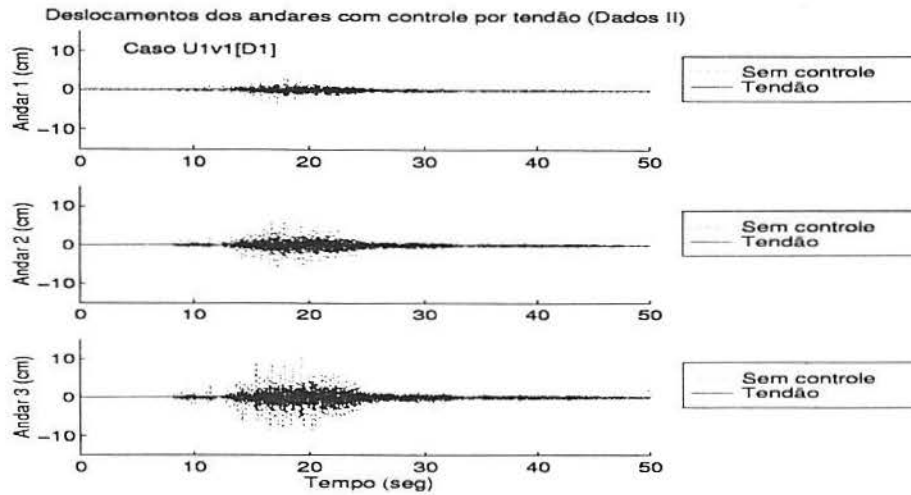


Figura 4.23: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II

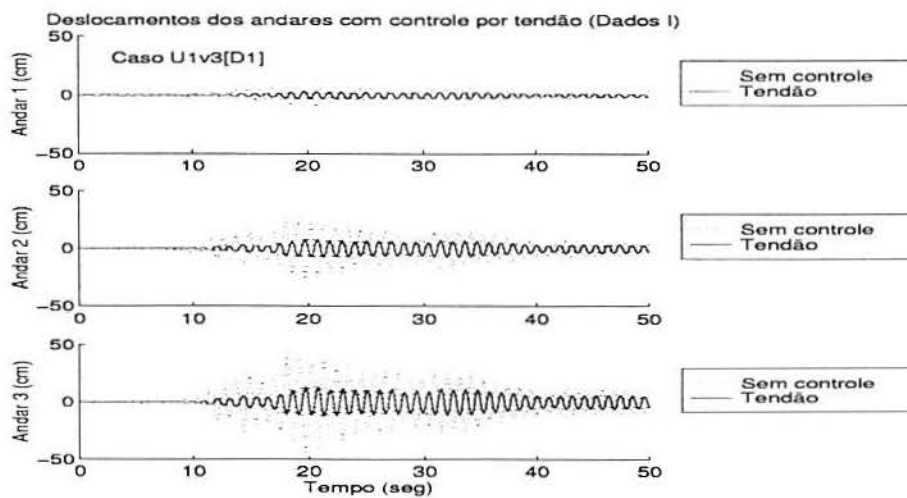


Figura 4.24: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados I

4.10.7 Resumo dos Resultados Numéricos

Apresentamos uma tabela com as respostas e forças de controle pico.

Apresentamos aqui a matriz de saída $[D_1]$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 4.116 & -1785 & 0.240 \\ -1.642 & 2.254 & -0.686 \\ 0.060 & -1.210 & 1.125 \end{bmatrix} \quad (4.10.66)$$

Casos	Desloc. máx. (cm)	Acel. máx. (cm/s ²)	F. máx. (kN)
Sem Controle	12.48	5.48	---
	27.10	10.17	---
	43.94	15.69	---
U123Estado	3.51	4.80	27.94
	7.76	4.06	53.74
	13.80	6.68	62.20
U123v123	4.32	4.82	30.01
	8.21	4.10	53.80
	15.13	6.86	71.31
U1v123	5.20	5.21	143.22
	11.64	5.10	---
	21.07	7.00	---
U1v1	5.80	5.31	90.73
	14.08	8.57	---
	18.83	9.07	---
U1v3	10.17	5.40	18.90
	24.10	9.76	---
	32.14	13.40	---
U1v1[D ₁]	9.97	5.04	30.08
	21.08	8.97	---
	28.76	12.91	---
U1v3[D ₁]	5.40	5.25	148.97
	11.89	5.10	---
	23.00	7.62	---

Tabela 4.1: Tabela de resultados pico para os dados I

Casos	Desloc. máx. (cm)	Acel. máx. (cm/s ²)	F. máx. (kN)
Sem Controle	3.47	8.82	---
	6.40	15.64	---
	10.53	26.73	---
U123Estado	0.79	7.772	19.90
	1.46	6.24	16.54
	2.30	11.38	17.82
U123v123	0.98	7.770	17.08
	1.80	6.305	17.56
	2.52	11.69	20.01
U1v123	1.17	8.390	81.50
	2.21	7.844	---
	3.51	11.93	---
U1v1	1.30	8.564	51.63
	2.64	13.18	---
	3.15	13.75	---
U1v3	2.29	8.702	17.55
	4.53	14.87	---
	5.36	22.22	---
U1v1[D ₁]	2.25	8.691	18.11
	3.98	13.80	---
	4.80	21.98	---
U1v3[D ₁]	1.22	8.434	87.47
	2.23	7.843	---
	3.82	12.30	---

Tabela 4.2: Tabela de resultados pico para os dados II

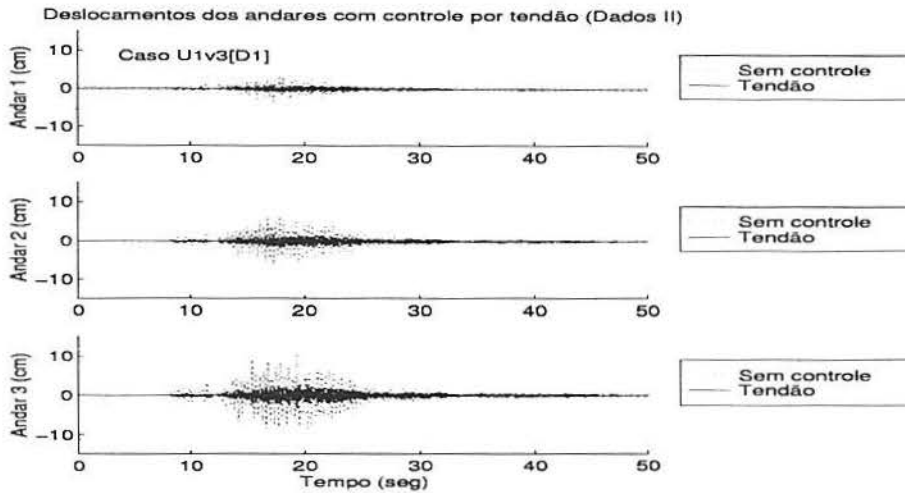


Figura 4.25: Controle por Tendão dos deslocamentos do prédio para os dados II

4.11 Conclusões Sobre o Algoritmo de Retroalimentação Direta e Ótima Saída (vide secção 4.10)

O desenvolvimento teórico e a verificação numérica mostraram que o controle por retroalimentação direta e ótima saída é viável para estruturas de engenharia civil. Após simulações numéricas observamos que:

1. O número de controladores e sensores pode ser muito pequeno comparado com a dimensão de estados, mas a eficiência do controle é ainda muito significativa:
2. Com a introdução das matrizes de operações especiais a matriz de ganho de realimentação e ótima saída pode ser obtida através de resolução iterativa de equações algébricas lineares simultâneas. Como a matriz de ganho de retroalimentação é invariante no tempo e pré-calculada, a força de controle é obtida da multiplicação da saída medida pela matriz de ganho de retroalimentação pre-determinada. Portanto, os cálculos são bastante simples:

3. O problema de otimização pode ser resolvido para vários padrões de localização de sensores e controladores;
4. O número de sensores é reduzido ao número de controladores, o qual é usualmente muito pequeno comparado ao grau de liberdade da estrutura;
5. A melhor resposta apresentada é quando temos um controlador no primeiro andar, velocidade do terceiro andar realimentada.

4.12 Controle Ótimo De Estruturas Com Aceleração ,Velocidade E Deslocamento Realimentados

Um algoritmo de controle ótimo com realimentação da aceleração é proposto. O algoritmo, o qual é derivado pela minimização de um índice de performance quadrático dependente do tempo, inclui ganhos de controle constante que necessitam ser calculados uma vez no início do processo de controle. A inclusão da aceleração realimentada no algoritmo de controle é habilitada estendendo o controle ótimo híbrido de estruturas, previamente desenvolvido [TAD 92]. Esta aceleração pode ser de diversos ou de todos os andares da construção.

4.13 Construções Com Base-Isolada

Um índice de performance que inclui a medida quadrática do deslocamento, velocidade, aceleração e esforço de controle é considerado para cada intervalo de controle como segue:

$$J(t) = \frac{1}{2} \dot{X}^T Q_1 \dot{X} + \frac{1}{2} X^T Q_2 X + \frac{1}{2} \ddot{X}^T Q_3 \ddot{X} + \frac{1}{2} U^T R U \quad (4.13.67)$$

onde Q_1, Q_2, Q_3 são matrizes ponderadas positivas semidefinidas, enquanto R é uma matriz positiva definida. As forças de controle são obtidas minimizando o índice de performance ($J(t)$) para algum intervalo $t_0 < t < t_f$. A variação de $J(t)$ devido a uma variação arbitrária da forças de controle δu torna-se

$$\delta J = \dot{X}^T Q_1 \delta \dot{X} + X^T Q_2 \delta X + \ddot{X}^T Q_3 \delta \ddot{X} + u^T R u \quad (4.13.68)$$

as variações $\delta X, \delta \dot{X}$, e $\delta \ddot{X}$ podem serem escritas em termos de suas expansões em autofunção

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \Phi \delta \dot{Z} & \delta X &= \Phi \delta Z \\ \delta \ddot{X} &= \Phi \delta \ddot{Z} \end{aligned} \quad (4.13.69)$$

substituindo a Eq.4.13.69 em 4.13.68 resulta em

$$\delta J = \dot{Z}^T \Psi_1 \delta \dot{Z} + Z^T \Psi_2 \delta Z + \ddot{Z}^T \Psi_3 \delta \ddot{Z} + u^T R \delta u \quad (4.13.70)$$

onde

$$\Psi_i = \Phi^T Q_i \Phi: \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13.71)$$

de [TAD 92] a variação de Z, \dot{Z} e \ddot{Z} são encontradas

$$\delta z = \int_{t_0}^t G^S(t - \tau) \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau \quad (4.13.72)$$

$$\delta \dot{Z} = \int_{t_0}^t [G^c(t - \tau) - \Theta G^S(t - \tau)] \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau \quad (4.13.73)$$

$$\delta \ddot{Z} = \Phi^T B \delta u(t) + \int_{t_0}^t [-2\Theta G^S(t - \tau) - \Lambda_d G^S(t - \tau) + \Theta^T \Theta G^S(t - \tau)] \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau \quad (4.13.74)$$

onde

$$\Lambda_d = \text{diagonal}(\omega_{di}^2) \quad (i = 1 \dots n) \quad (4.13.75)$$

substituindo 4.13.72-4.13.74 na 4.13.70 tem-se

$$\begin{aligned} \delta J = & \dot{Z}^T \Psi_1 \int_{t_0}^t [-\Theta G^S(t-\tau) + G^C(t-\tau)] \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau \\ & + Z^T \Psi_2 \int_{t_0}^t G^S(t-\tau) \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau + \ddot{Z}^T \Psi_3 \int_{t_0}^t [(\Theta^T \Theta - \Lambda_d) G^S(t-\tau) \\ & + 2\Theta G^C(t-\tau)] \Phi^T B \delta u(\tau) d\tau + [\ddot{Z}^T \Psi_3 \Phi^T B + u(\tau) R] \delta u(t) \end{aligned} \quad (4.13.76)$$

os termos do lado direito da Eq.4.13.76 podem ser incorporados em um simples intregando usando a função $\delta u(t)$

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^t (\dot{Z}^T \Psi_1 \int_{t_0}^t [-\Theta G^S(t-\tau) + G^C(t-\tau)] + Z^T \Psi_2 G^S(t-\tau) \\ & + \ddot{Z}^T \Psi_3 [\Theta^T \Theta - \Lambda_d] G^S(t-\tau) - 2\Theta G^C(t-\tau)] \Phi^T B \\ & + \delta(t-\tau) [\ddot{Z}^T \Psi_3 \Phi^T B u^T(\tau) R] \delta u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.13.77)$$

colocar δJ igual a zero implica em zerar o coeficiente do δu no integrando. Assim

$$\begin{aligned} & \{ \dot{Z}^T \Psi_1 [-\Theta G^S(t-\tau) + G^C(t-\tau)] + Z^T \Psi_2 G^S(t-\tau) \\ & + \ddot{Z}^T \Psi_3 [\Theta^T \Theta - \Lambda_d] G^S(t-\tau) - 2\Theta G^C(t-\tau) \} \Phi^T B \\ & + \delta(t-\tau) [\ddot{Z}^T \Psi_3 \Phi^T B + u^T(\tau) R] = 0 \end{aligned} \quad (4.13.78)$$

a integração de 4.13.78 com respeito a τ para $t_0 < \tau < t$ produz

$$\begin{aligned} u^T(\tau)R + \left\{ \ddot{Z}^T \Phi_1 \int_0^t [-\Theta G^S(t-\tau) + G^C(t-\tau)] d\tau \right. \\ \left. Z^T \Phi_1 \int_0^t G^S(t-\tau) d\tau + \ddot{Z}^T \Psi_3 \int_0^t [\Theta^T \Theta - \Lambda_d] G^S(t-\tau) \right. \\ \left. - 2\Theta G^C(t-\tau) d\tau + I \right\} \Phi^T B = 0 \end{aligned} \quad (4.13.79)$$

onde I é a matriz Identidade. Assumindo pequenos intervalos de controle, essas integrais podem ser aproximadas pelo uso da regra de integração trapezoidal

$$\begin{aligned} u^T(t)R + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \dot{Z}^T(t) \Psi_1 [I - \Theta G^S(\Delta t) + G^C(\Delta t)] + Z^T(t) \Psi_2 G^S(\Delta t) \right. \\ \left. + \ddot{Z}^T(t) \Psi_3 \left[\frac{2}{\Delta t} I + (\Theta^T \Theta - \Lambda_d) G^S(\Delta t) - 2\Theta - 2\Theta G^C(\Delta t) \right] \right\} \Phi^T B = 0 \end{aligned} \quad (4.13.80)$$

Onde $\Delta t = (t - t_0)$ é o intervalo de controle. Se apenas um certo número de modos estão envolvidos no processo de controle, então as amplitudes modais podem ser divididas em modos controlados Z_C e modos residuais Z_R . Similarmente dividimos outros vetores e matrizes, e expressamos o resultado como

$$Z = \begin{bmatrix} Z_C \\ Z_R \end{bmatrix} \quad G^S = \begin{bmatrix} G_C^S & 0 \\ 0 & G_R^S \end{bmatrix} \quad G^C = \begin{bmatrix} G_C^C & 0 \\ 0 & G_R^C \end{bmatrix} \quad (4.13.81)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_C & \Phi_R \end{bmatrix} \quad \Lambda_d = \begin{bmatrix} \Lambda_{Cd} & 0 \\ 0 & \Lambda_{Rd} \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_C & 0 \\ 0 & \Theta_R \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} G^S(t-t_0) &= \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i \omega_i (t-t_0)} \text{sen } \omega_{di} (t-t_0) \right] \\ G^C(t-t_0) &= \text{diag} \left[e^{-\zeta_i \omega_i (t-t_0)} \text{cos } \omega_{di} (t-t_0) \right] \end{aligned}$$

sendo $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ e $\Theta = \text{diag} (\zeta_i \omega_i)$.

As forças de controle dependem assim apenas dos modos controlados e podem ser descrita pela equação

$$u(t) = -F\Psi_{3C}^T \ddot{Z}_C(t) - D\Psi_{1C}^T \dot{Z}_C(t) - E\Psi_{2C}^T Z_C(t) \quad (4.13.82)$$

onde

$$\Psi_{iC}^T = \Phi_C^T Q_i^T \Phi_C; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13.83)$$

$$D = \frac{\Delta t}{2} R^{-1} B^T \Phi_C [I - \Theta_C G_C^S(\Delta t) + G_C^c(\Delta t)] \quad (4.13.84)$$

$$E = \frac{\Delta t}{2} R^{-1} B^T \Phi_C G_C^S(\Delta t) \quad (4.13.85)$$

$$F = \frac{\Delta t}{2} R^{-1} B^T \Phi_C \left\{ \frac{2}{\Delta t} I + (\Phi_C^T \Phi_C - \Lambda_{dC}) G_C^S(\Delta t) - 2\Phi_C [I + G_C^c(\Delta t)] \right\} \quad (4.13.86)$$

a Eq.4.13.82 define as forças de controle em termos dos deslocamentos, velocidades e acelerações modais.

4.14 Equações Do Movimento Para Os Modos Controlados E Residuais

Após fazermos as devidas substituições temos as equações de movimento para os modos controlados e residuais como segue:

$$(I + \Phi_C^T B F \Psi_{3C}^T) \ddot{Z}_C + (2\Phi_C + \Phi_C^T B D \Psi_{1C}^T) \dot{Z}_C + (\Lambda_C + \Phi_C^T B E \Psi_{2C}^T) Z_C = \Phi_C^T p \quad (4.14.87)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_R + 2\Phi_R \dot{Z}_R + \Lambda_R Z_R = & -\Phi_R^T B F \Psi_{3C}^T \ddot{Z}_C \\ & - \Phi_R^T B D \Psi_{1C}^T \dot{Z}_C - \Phi_R^T B E \Psi_{2C}^T Z_C + \Phi_R^T p \end{aligned} \quad (4.14.88)$$

$$\text{onde } \Lambda = \text{diagonal}(\omega_i^2); \quad (i = 1 \dots n) \quad (4.14.89)$$

e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_C & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{bmatrix} \quad (4.14.90)$$

4.15 Controle Híbrido

Tomemos a estrutura dos dados I e II acrescentando o isolamento da base com as seguintes características estruturais:

$$k_b = 1200kN/m$$

$$c_b = 2.4kN \cdot s/m$$

$$m_b = 6800Kg$$

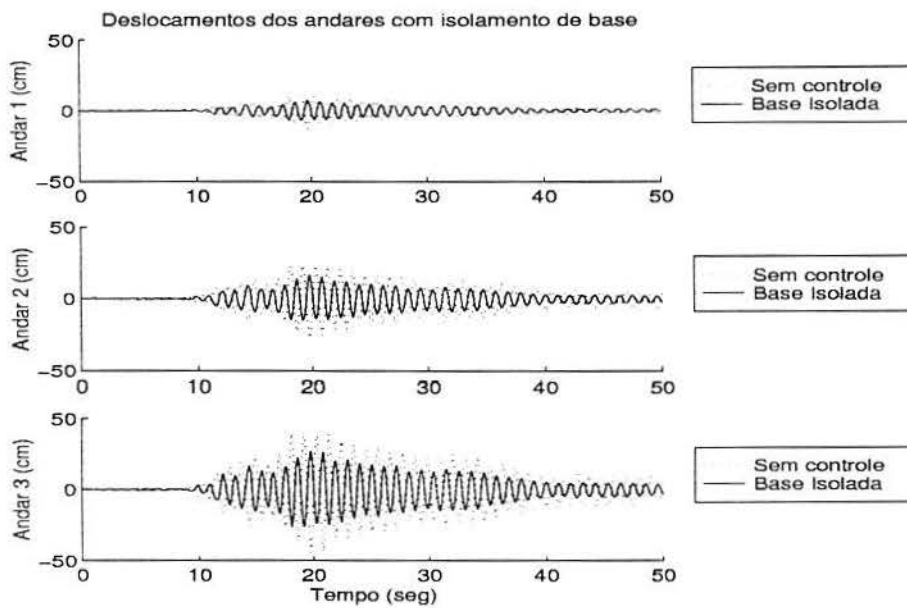


Figura 4.26: Controle por Isolamento de Base dos deslocamentos do prédio para os dados I

A figura (4.26) mostra os deslocamentos dos andares da estrutura com os dados I acrescentada de isolamento da base sem controle ativo. O amortecimento proporcional é determinado como $C = 0.005K$, onde K é a matriz de rigidez correspondente. Na figura (4.27) são mostrados os resultados com isolamento de base para os dados II.

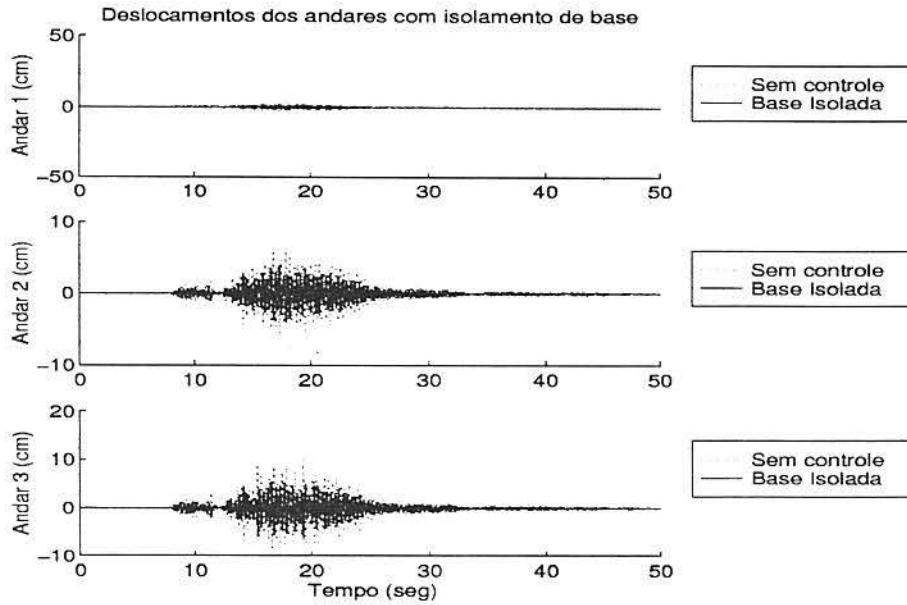


Figura 4.27: Controle por Isolamento de Base dos deslocamentos do prédio para os dados II

O controle ativo será feito no primeiro modo e em todos os modos.

4.15.1 Controle no Primeiro Modo

Consideramos a matriz de ponderação $R = 1$, pois apenas um controlador é colocado no piso-base.

A resposta dos diferentes andares do prédio são determinados usando deslocamento-velocidade realimentados. Os elementos não zero das matrizes Q_i são selecionados como

$$Q_1(1,1) = 17 \times 10^4$$

$$Q_2(1,1) = 17 \times 10^6$$

$$Q_3(i,j) = 0. (i,j = 1, \dots, 4)$$

A escolha dos parâmetros das matrizes Q_i depende da rigidez da estrutura e das magnitudes das forças externas que estão sendo exercidas sobre a estrutura.

Eles podem ser determinados por um ensaio até que os valores selecionados resultem em uma redução significativa da resposta enquanto as forças de controle são aceitáveis.

Na figura (4.28) são mostrados os resultados obtidos com os dados I para a matriz Q indicada no gráfico.

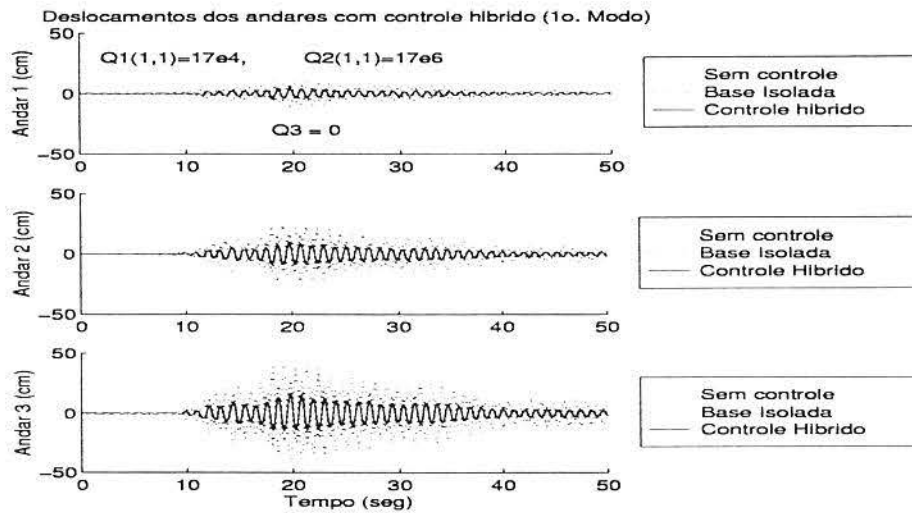


Figura 4.28: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando o Primeiro Modo

Agora mostramos também a força de controle no piso-base para este caso, na figura (4.29).

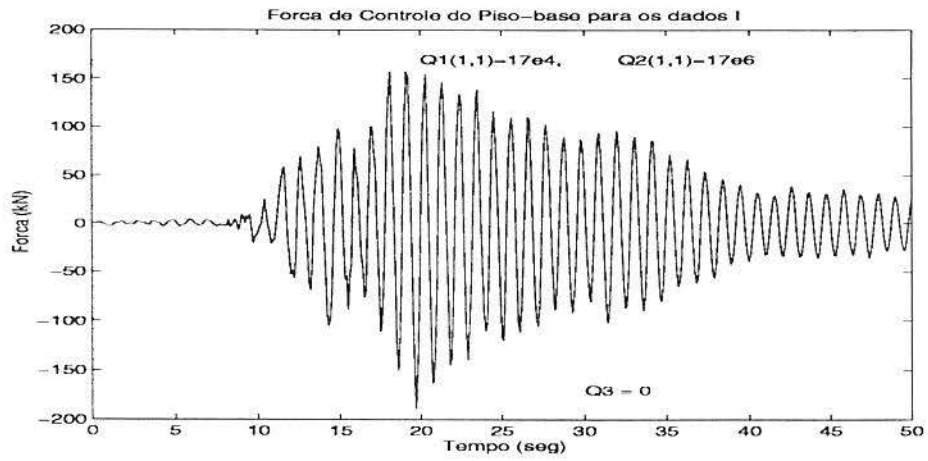


Figura 4.29: Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando o Primeiro Modo

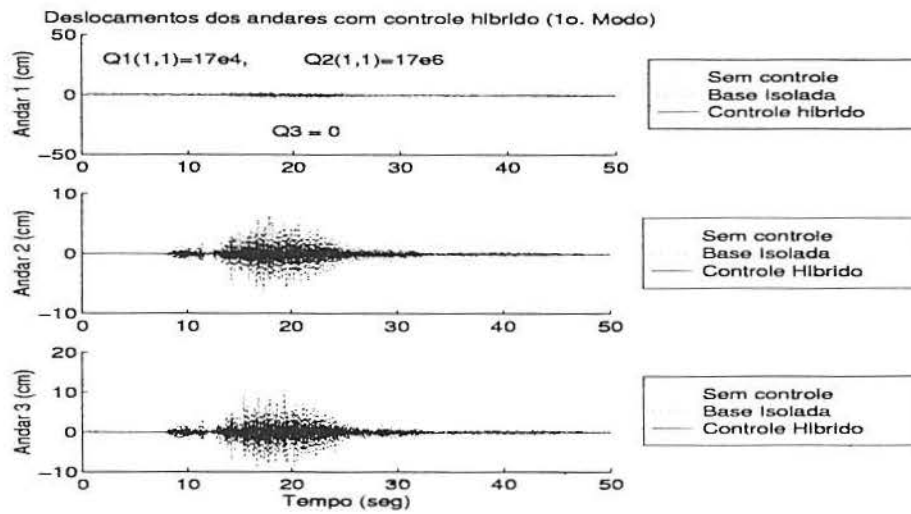


Figura 4.30: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando o Primeiro Modo

Os deslocamentos dos andares para os dados II com a matriz Q escolhida são mostrados na figura (4.30).

Na figura (4.31) mostramos a força de controle para os dados II para a matriz Q escolhida.

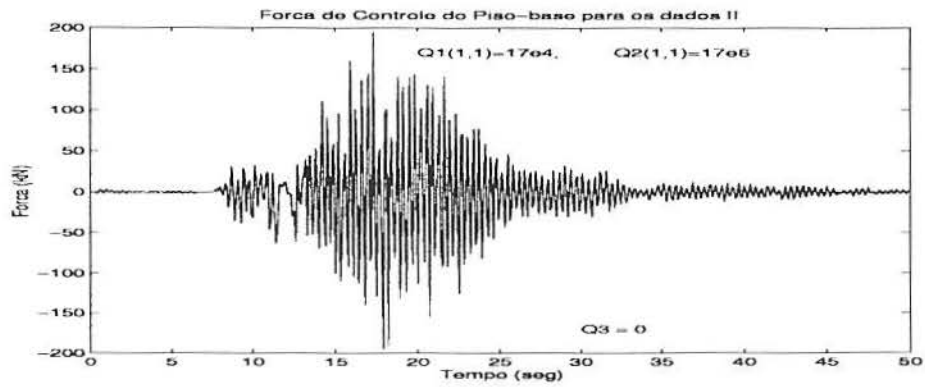


Figura 4.31: Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando o Primeiro Modo

Usamos agora aceleração e velocidade realimentados com os seguintes valores para os elementos não zeros de Q_1, Q_2 e Q_3

$$Q_1(1,1) = 18 \times 10^4$$

$$Q_3(1,1) = 120$$

$$Q_2(i,j) = 0, (i,j = 1, \dots, 4)$$

Na figura (4.32) são mostrados os resultados obtidos com os dados I para a matriz Q indicada no gráfico

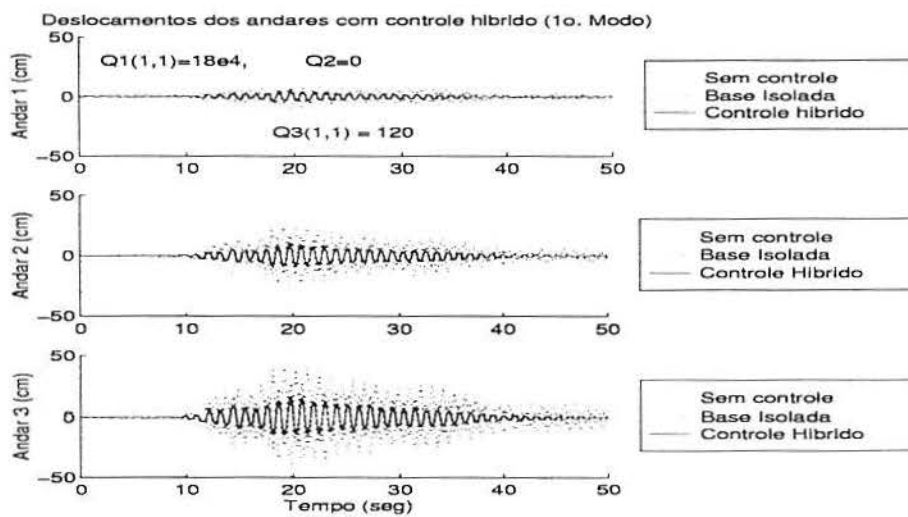


Figura 4.32: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando o Primeiro Modo

Agora mostramos também a força de controle no piso-base para este caso, na figura (4.33).

Os deslocamentos dos andares para os dados II com a matriz Q escolhida são mostrados na figura (4.34).

Na figura (4.35) mostramos a força de controle para os dados II para a matriz Q escolhida.

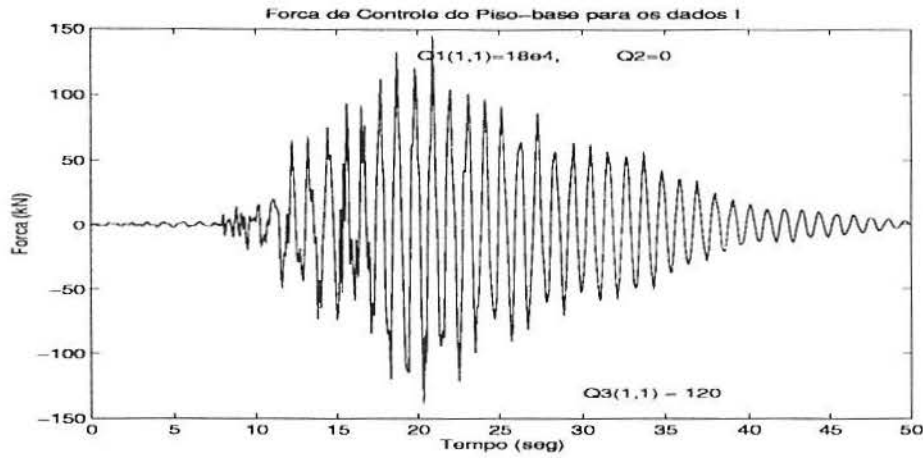


Figura 4.33: Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando o Primeiro Modo

4.15.2 Controle em Todos os Modos

Agora, procedemos a controlar todos os modos do sistema desacoplado. Nas figuras (4.36) e (4.37) apresentamos os resultados numéricos para os dados I com as duas escolhas das matrizes Q , respectivamente.

Nas figuras (4.38) e (4.39) mostramos as forças de controle para os casos anteriores correspondentes.

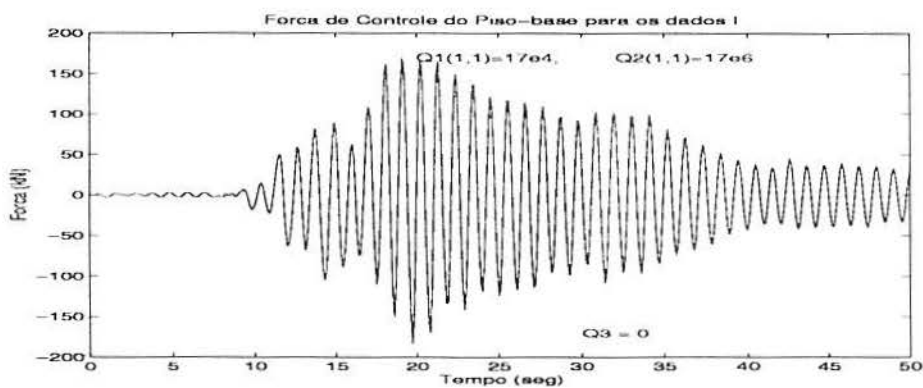


Figura 4.38: Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando todos os modos(deslocamento-velocidade realimentados)

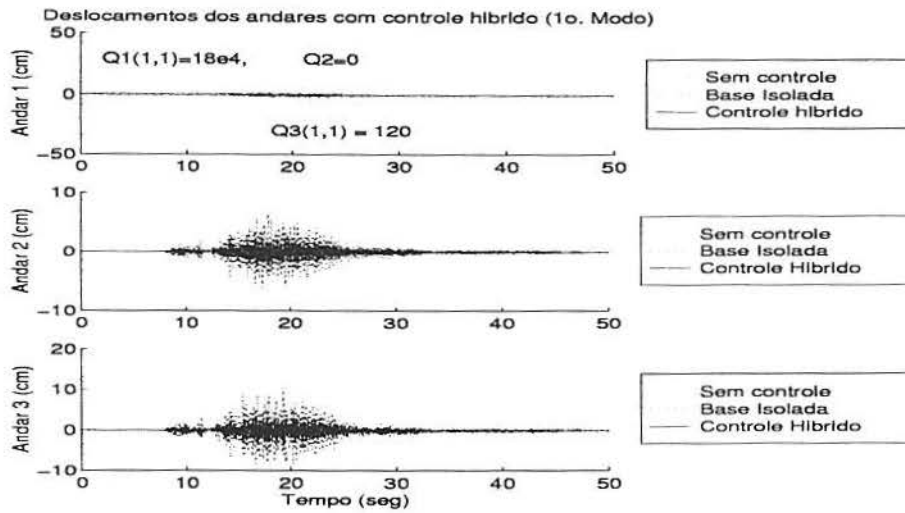


Figura 4.34: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando o Primeiro Modo

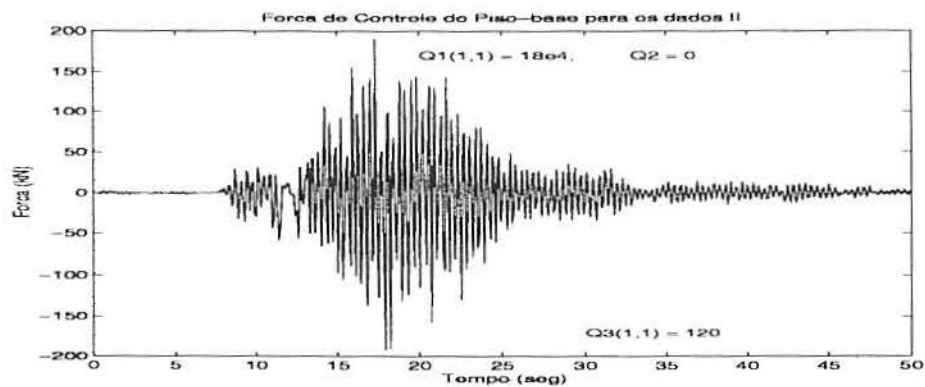


Figura 4.35: Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando o Primeiro Modo

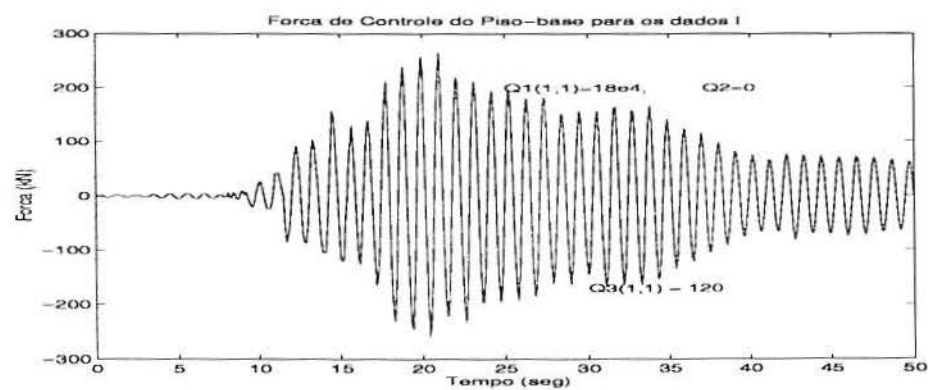


Figura 4.39: Força de Controle no Piso-base para os dados I controlando todos os modos (aceleração-velocidade realimentados)

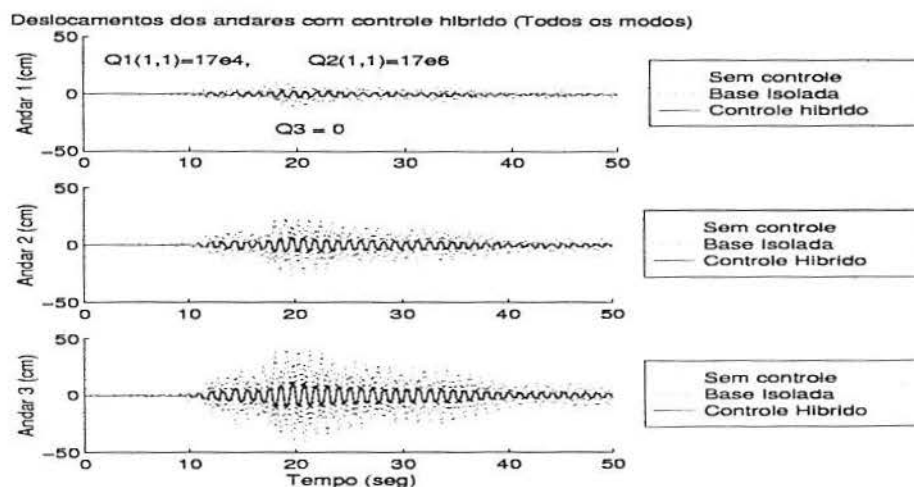


Figura 4.36: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando todos os Modos(velocidade-deslocamento realimentados)

A seguir, aplicamos o mesmo procedimento numérico quando a estrutura possui os dados II. Primeiro, mostramos os deslocamentos dos andares para estes dados, com as duas escolhas das matrizes Q , nas figuras (4.40) e (4.41).

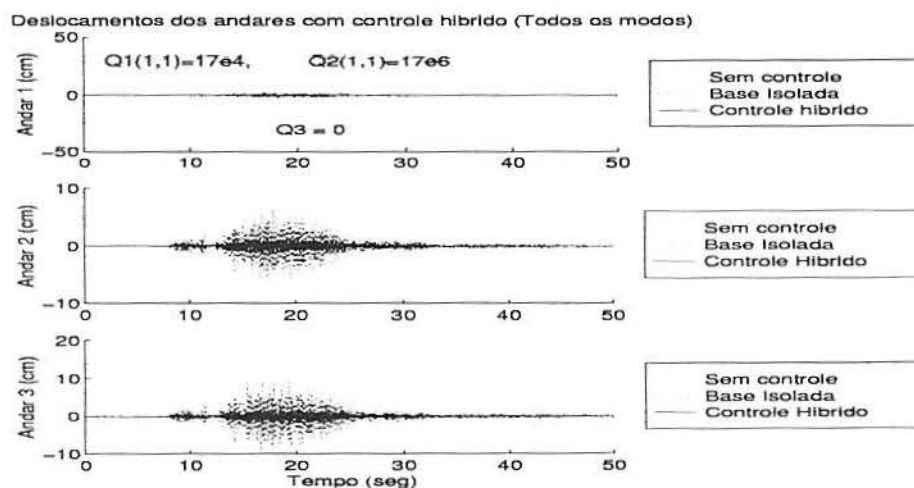


Figura 4.40: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando todos os Modos(deslocamento-velocidade realimentados)

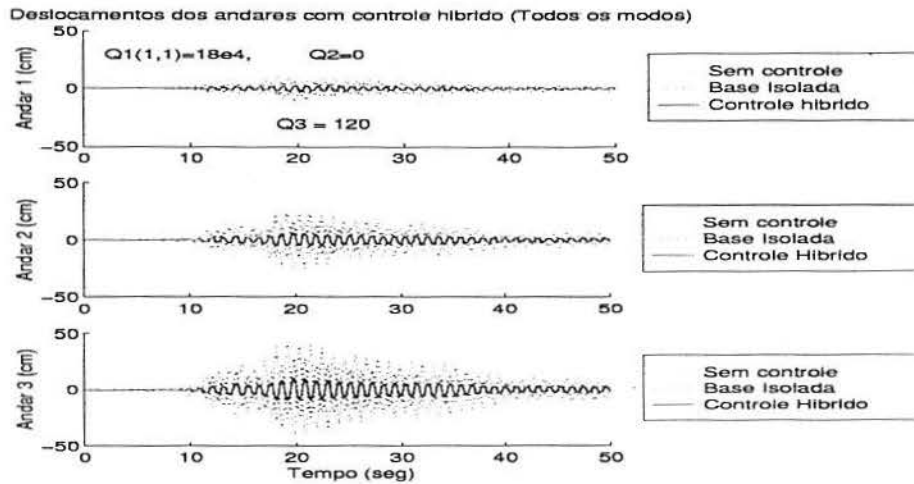


Figura 4.37: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados I controlando todos os Modos(aceleração-velocidade realimentados)

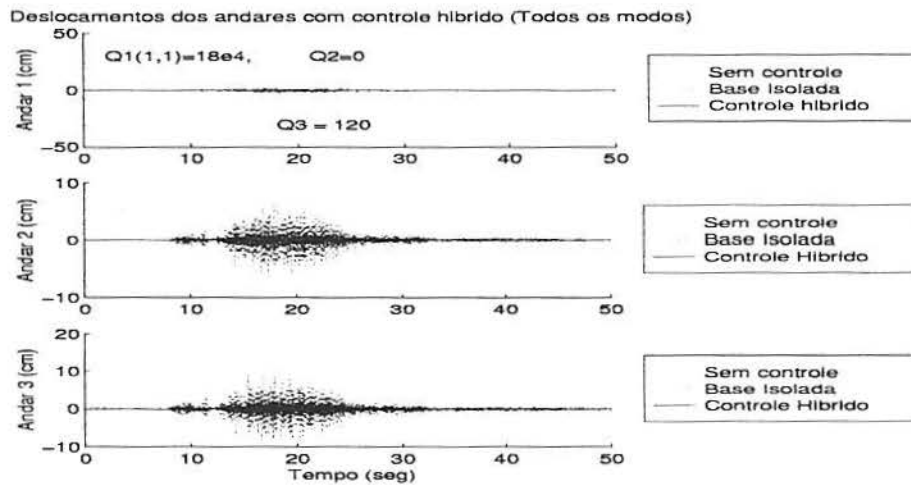


Figura 4.41: Controle Híbrido dos deslocamentos do prédio para os dados II controlando todos os Modos(aceleração-velocidade realimentados)

Nas figuras (4.42) e (4.43) mostramos as forças de controle no piso-base, para as duas escolhas das matrizes Q usando os dados II.

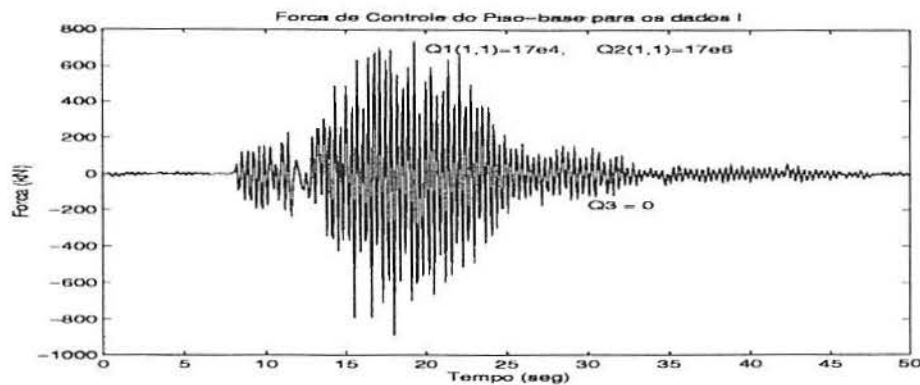


Figura 4.42: Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando todos os modos(deslocamento-velocidade realimentados)

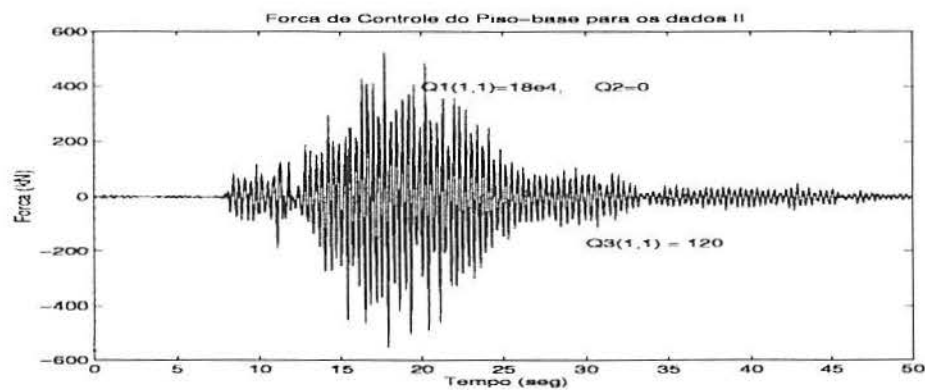


Figura 4.43: Força de Controle no Piso-base para os dados II controlando todos os modos(aceleração-velocidade realimentados)

4.16 Conclusões Sobre o Algoritmo Ótimo De Estruturas Com Aceleração , Velocidade E Deslocamento Realimentados 4.12

1. O uso da aceleração-velocidade realimentada indica considerável redução na aceleração de diferentes andares [TAD 93] enquanto conserva os deslocamentos dos andares quase ao mesmo nível de [TAD 92]. Este novo esquema, portanto, requer uma força de controle relativamente maior;

2. Como a redução na aceleração dos andares cria uma medida de segurança para os ocupantes da construção durante um terremoto, podemos concluir que a apresentação de [TAD 92] e o algoritmo acima são equivalentes. Maior redução na resposta da estrutura é possível dispendendo-se de forças de controles maiores:
3. Como indica 4.13.82 a aceleração realimentada causa um aumento na massa do sistema, o qual tem como efeito equivalente a redução no coeficiente de amortecimento da estrutura. Por outro lado, a realimentação da velocidade tende a aumentar o amortecimento da estrutura. Assim certas combinações dos parâmetros Q_1 e Q_3 podem ter um efeito adverso na realização da lei de controle comparada aos casos com velocidade e aceleração realimentados sozinhos;
4. Fisicamente o algoritmo de retroalimentação da aceleração velocidade e deslocamento é o melhor resultados numéricos fornece; porém, o custo computacional de tal método é considerável.

4.17 Tabelas Comparativas para os Deslocamentos no Terceiro Andar

A seguir, apresentamos duas tabelas comparativas, uma para cada tipo de dados, contendo os diversos deslocamentos máximos do terceiro andar em valor absoluto alcançados por cada um dos métodos considerados neste trabalho, para poder ter uma visão da eficácia numérica destes.

Algoritmo	Deslocamento do Terceiro Andar (cm)
Sem Controle	43.94
ATMD, Q_1	20.63
ATMD, Q_2	13.58
Tendão, U123vEstado	13.79
Tendão, U123v123	15.13
Tendão, U1v123	21.07
Tendão, U1v1	18.83
Tendão, U1v3	32.14
Tendão, U1v1 [D1]	28.76
Tendão, U1v3 [D1]	23.00
Base Isolada	27.72
Base Isolada, Primeiro Modo, $Q_3 = 0$	15.86
Base Isolada, Primeiro Modo, $Q_2 = 0$	15.91
Base Isolada, Todos os Modos, $Q_3 = 0$	11.43
Base Isolada, Todos os Modos, $Q_2 = 0$	10.60

Tabela 4.3: Tabela Comparativa dos Deslocamentos de Terceiro Andar (Dados I) para os diversos algoritmos considerados

Algoritmo	Deslocamento do Terceiro Andar (cm)
Sem Controle	10.53
ATMD, Q3	4.84
ATMD, Q4	4.26
Tendão, U123vEstado	2.30
Tendão, U123v123	2.52
Tendão, U1v123	3.51
Tendão, U1v1	3.15
Tendão, U1v3	5.36
Tendão, U1v1 [D1]	4.80
Tendão, U1v3 [D1]	3.82
Base Isolada	6.66
Base Isolada, Primeiro Modo. $Q_3 = 0$	3.81
Base Isolada, Primeiro Modo. $Q_2 = 0$	3.80
Base Isolada, Todos os Modos, $Q_3 = 0$	2.38
Base Isolada, Todos os Modos, $Q_2 = 0$	2.85

Tabela 4.4: Tabela Comparativa dos Deslocamentos de Terceiro Andar (Dados II) para os diversos algoritmos considerados

BIBLIOGRAFIA

- [ABD 80] ABDEL-ROHMAN,M.& QUINTANA , V.H.,& LEIPHOLZ, H.H.,
Optimal Control of Civil Engineering Structures. *Journal of Engineering Mechanics Division*,ASCE,vol.106,NO.EM1.Feb.,1980,pp.57-73.
- [BAL 79] BALAS,M.J., Direct Output Feedback Control Of Large Space Structures.*Journal Astronautical Sci.*, vol.27,1979,pp.157-180.
- [BEL 70] BELLMAN,R. *Introduction To Matrix Analysis*,2and Ed.,Mcgraw-Hill Book Co.,New York,N.Y..1970
- [CAN 95] CANAHUALPA,G.R. A Solução Dinamica em Sistemas Mecânicos Amortecidos.*Dissertação de Mestrado*.UFRGS-CPGMAP,Porto Alegre.
- [CAU 60] CAUGHEY,T.K., Classical Normal Modes In Damped Linear Dynamics Systems.*Journal Applied Mechanics*,vol.27.1960,pp.269-271.
- [CHA 80] CHANG,J.,& SOONG,T.T., Structural Control using Active Tuned Mass Dampers.*Journal of the Engineering Mechanics*,ASCE,vol.106,No.EM6,Dec.,1980,pp.1091-1098.
- [CHO 96] CHOPRA,A. Modal Analysis of Linear Dynamic System:physical interpretation.*Journal of Structural Engineering*,ASCE,vol.122,No.5,May,1996,pp.
- [CHU 93] CHUNG,L.L.,&LIN,C.C., Optimal Direct Output Feedback of Structural Control.*Journal of Engineering Mechanics*,ASCE,vol.119, No.11,Nov.1993,pp.2157-2191.

- [CLA 90a] CLAEYSSEN, J.C.R. On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSEN, J.C.R. & GALLICHO, E., and, VILHENA, M. T. Inversion of Higher Matrix Difference and Differential Equations Through Their Dynamical Solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 149(2) pp. 369-376, 1990
- [CON 93] CONSTANTINOUS, M.C. & TADJBAKHSI, I.G., Probabilistic Optimal Base Isolation of Structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 109, No. 3, Mar. 1993, pp. 676-689.
- [INM 89] INMAN, D.J., *Vibration With Control, Measurement and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1989, p. 351
- [INM 94] INMAN, D.J., *Engineering Vibration*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [IWA 90] IWAN, W.D. & HOU, Z. Some Issues Related To Active Control Algorithms. *Proc. U.S. Nat. Workshop On Struct. Control Res.*, G.W. Housner, and S.F. Masri, eds., University of Southern California, Los Angeles, Calif., 1990, pp. 131-135.
- [JAR 96] JARA, FIDEL H *Controle de Estruturas Lineares Sujeitas a excitações Sísmicas*. Dissertação de mestrado, Dez. de 1996
- [KIK 70] KIRK, D.E., *Optimal Control Theory-an introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1970, p. 452.
- [KAY 81] KAYNIA, A.M. & VEMEZIANO, D. & BIGGS, J. *Seismic Effectiveness Of Tuned Mass Dampers*, *Journal of the structural Division*, ASCE, vol. 107, No. ST8, aug. 1981, pp. 1465-1485.

- [LEI 79] LEIPHOLZ, H. E. & ABDEL-ROHMAN, M., General Approach To Active Structural Control. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 105, No. EM6, Dec., 1979, pp. 1007-1023.
- [LEV 71] LEVINE, W. S. & JOHNSON, T. L., & ATHENS, M. Optimal Limited State Variable Feedback Controllers For Linear Systems. *Automatic Control*, 1971, pp. 785-792.
- [LOH 94] LOH, C. H., & CHERN, W. Y. Seismic effectiveness of active tuned mass dampers for the control of flexible structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 9, 1994, pp. 225-234.
- [LOH 96] LOH, C. H. & CHAO, C. H.. Effectiveness of Active Tuned Mass Damper and Seismic Isolation on Vibration Control of Multi-storey Building. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 193, No. 4, 1996, pp. 773-792.
- [MAR 76] MARTIN, C. R. & SOONG, T. T., Modal Control Of Multi-stories Structures. *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 102, 1976, pp. 613-623.
- [MEI 75] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975
- [MIL 88] MILLER, R. K., & MARSILIO, S. F., & DEGHANYAR, T. J., & CAUGHEY, T. K., Active Vibrational Control of Large Civil Structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114 No. 09 Set., 1988, pp. 1542-1570.
- [SAM 85] SAMALI, B., & YANG, J. N., & LIU, S. C., Active Control of Seismic-Excited Building. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 111, No. 10, Oct., 1985, pp. 2165-2180.
- [SOO 77a] SOONG, T. T., & LIN, R. C., & CHUNG, L. L., & REINHORN, A. M., Experimental Evaluation of Optimal Control Algorithms

for Seismic Application. *Proc. of ASCE Engineering Mechanics Division 6th Specialty Conference*, May 20-22, 1987, at SUNY, Buffalo, N.Y.

- [SOO 77b] SOONG, T. T.. ON Model Reduction Of Large-scale System. *Journal Mathematical Analysis And Application*, vol.60.1977, pp.477-482.
- [SOO 81] SOONG, T. T., & SKINNER, G. T., Experimental Study of Active Structural Control. *Journal of the Engineering Mechanics . ASCE*, Vol. 107, No. 6, Dec., 1981, pp. 1057-1067.
- [TAD 82] TADJBAKHSI, I. G. & MA, J., Base Isolation Of Rigid-Body Response Of Structures. *Journal of the Structural Division. ASCE*, vol.108, No. ST8, Aug., 1982, pp.1806-1814.
- [TAD 92] TADJBAKHSI, I. G., & ROFOOEI, F. R., Optimal Hybrid Control of Structures Under Earthquake Excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol.21, No.3.1992, pp.233-252.
- [TAD 93] TADJBAKHSI, I. G., & ROFOOEI, F. R., Optimal Control of Structures with Acceleration, Velocity and Displacement Feedback. *Journal of Engineering Mechanics .ASCE*, vol.199, No.10, Oct., 1993, pp.1993-2009.
- [THO 73] THOMSON, W. T., *Theory of Vibration With Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1973, p.178
- [THO 74] THOMSON, W. T. & CALHINS, T. & CARAVANI, P., A Numerical Study of Damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol.3, 1974, pp.97-103.
- [UDW 81] UDWADIA, F. E., & TABAIE, S., Pulse Control of Structural and Mechanical Systems. *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*, Vol. 107, No. 6, Dec., 1981, pp. 1011-1028.

- [WIR 70] WIRSCHING,P.H.&YAO,J.T.P., Modal Res-
ponse Of Structures.*Journal of Structural
Division,ASCE*,vol.96,No.ST4,Apr.,1970,pp.879-883.
- [YAN 75] YANG, J. N., Aplication of Optimal Control Theory to Civil Engi-
neering Structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division,*
ASCE, Vol. 101, No. 6 Dec., 1975, pp. 818-838.
- [YAN 82] YANG,J.N., Control of Tall Building under Eart-
hquake Exitation.*Journal of Engineering Mechanics
Division,ASCE*,vol.108,No.5,Oct.,1982,pp.833-849.
- [YAN 87] YANG.J.N.,& AKBARPOUR .A.,& GHAEMMAGHMI,P., New
Optimal Control Algorithms for Structural Control *Journal of En-
gineering Mechanics,ASCE*, vol.113.No.9, Sept.,1987,pp.1369-1386.
- [YAN 91] YANG,J.N.& DINIELLANS,A.&LIU,S.C. Aseismic Hybrid con-
trol Systems for Building Structures.*Journal of Engineering
Mechanics,ASCE*,vol.117,No.4,Apr.,1991,pp.836-853.
- [YAN 94] YANG,J.N.,& VONGCHAVALIKUL.S. Generalization of Optimal
Control Theory:Linear and Nonlinear Control.*Journal of Engige-
ering Mechanics, ASCE*.vol.120.No.2.Feb.,1994,pp.266-283.