

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

A Solução Dinâmica em Tratamento de Dados

por

Cláudio Rosito Jung

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Teresa Tsukazan
Orientador

Prof. Julio Ruiz Claeysen
Co-orientador

Porto Alegre, Agosto de 1995.

N.T.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Jung, Cláudio Rosito

A Solução Dinâmica em Tratamento de Dados / Cláudio Rosito Jung.—Porto Alegre: CPGMA da UFRGS, 1995.

63 p.: il.

Dissertação (mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1995. Orientador: Teresa Tsukazan; Co-orientador: Julio Ruiz Clayssen

Dissertação:

Aos meus amados pais José e Lígia.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Teresa Tsukazan, pela orientação do trabalho, e Julio Ruiz Claeysen, pelo acesso a suas pesquisas.

Ao CPGMA e CAPES, pelo apoio e auxílio recebidos.

Aos colegas German Canahualpa e Elisabeta Gallicchio, pelo seu apoio.

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 VIBRAÇÕES ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS	2
1.1 Resposta de Sistemas Lineares	2
1.2 Sinais Aleatórios	4
1.2.1 Classificação dos Dados Determinísticos	5
1.2.1.1 Dados Periódicos Senoidais	5
1.2.1.2 Dados Periódicos-complexos	5
1.2.1.3 Dados Quase-periódicos	6
1.2.1.4 Dados Transientes	7
1.2.2 Classificação dos Dados Aleatórios	7
1.2.2.1 Processos Aleatórios Estacionários	8
1.2.2.2 Processos Aleatórios Ergódigos	9
1.2.2.3 Processos Aleatórios Não-estacionários	10
1.2.3 Propriedades Descritivas Básicas de um Processo Aleatório	10
1.2.3.1 Valor Médio e Variância	11
1.2.3.2 Funções de Densidade de Probabilidade	12
1.2.3.3 Função de Autocorrelação	14

1.2.3.4	Função Densidade Espectral de Potência	16
1.2.4	Propriedades Conjuntas de Dados Aleatórios	19
1.2.4.1	Função Densidade de Probabilidade Conjunta	20
1.2.4.2	Função de Correlação Cruzada	21
1.2.4.3	Função Densidade Espectral Cruzada	23
2	SISTEMAS MULTIDIMENSIONAIS DETERMINÍSTICOS . .	26
2.1	O Método Matricial Operacional	26
2.2	Método de Cálculo para a Solução Dinâmica	29
2.3	A Matriz de Transferência	33
2.4	Polinômios de Lucas e a Solução Dinâmica	36
3	EXTENSÃO PARA O CASO MULTIDIMENSIONAL ALEATÓRIO	39
3.1	Resposta de Sistemas Lineares Multidimensionais	39
3.1.1	Resposta Impulsiva	39
3.1.2	Relação Entre a Resposta Impulsiva e a Solução Dinâmica	41
3.1.3	Resposta Freqüência	42
3.2	Funções Descritivas dos Processos Aleatórios Multidimensionais	43
3.2.1	Valor Médio	43
3.2.2	Matrizes de Correlação	43
3.2.3	Matrizes de Densidade Espectral	46

4 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	50
4.1 Método 1	50
4.2 Método 2	53
4.3 Método 3	55
4.4 Método 4	59
5 CONCLUSÕES	61
BIBLIOGRAFIA	62

RESUMO

O trabalho consiste no estudo de sistemas vibratórios lineares com n graus de liberdade, regidos pela equação diferencial vetorial linear

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$$

São analisados aspectos como a aplicação da solução dinâmica a vibrações aleatórias e métodos para a resolução do problema inverso (análise modal experimental).

ABSTRACT

The work consists on the study of vibrating systems with n degrees of freedom, described by the linear vectorial differential equation

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$$

We focus our analysis on applications of the dynamical solution to random vibration and methods for solving the inverse problem (experimental modal analysis).

INTRODUÇÃO

Consideremos a equação diferencial vetorial linear:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (0.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes quadradas de ordem n , \mathbf{q} é um vetor de ordem n de incógnitas que dependem de t , $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ são a primeira e segunda derivada de \mathbf{q} , respectivamente, $\mathbf{f}(t)$ é um vetor dado de ordem n de funções que dependem de t e n é um número inteiro maior do que 1, chamado de dimensão do sistema.

Muitos fenômenos vibratórios lineares com n graus de liberdade são bem descritos pela equação (0.1). Neste trabalho, estudaremos aplicações da solução dinâmica da equação (0.1) e de sua transformada de Laplace (que é praticamente a matriz de resposta em frequência) em problemas de vibrações aleatórias e na análise modal experimental.

No capítulo 1, descreveremos brevemente a resposta de sistemas lineares e tipos de dados (determinísticos e aleatórios). Definiremos as funções descritivas básicas dos processos aleatórios unidimensionais..

No capítulo 2, abordaremos um método não-modal que nos dá uma forma explícita para a solução dinâmica da equação (0.1).

No capítulo seguinte, estenderemos os conceitos estudados no capítulo 1 para problemas n dimensionais, obtendo uma formulação matricial. Veremos como a expressão da solução dinâmica obtida no capítulo 2 se encaixa na formulação matricial dos problemas de vibrações aleatórias multidimensionais.

No capítulo 4, estudaremos alguns métodos de análise modal experimental. Veremos como a solução dinâmica e sua transformada de Laplace podem ser utilizadas na resolução do problema inverso.

1 VIBRAÇÕES ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS

1.1 Resposta de Sistemas Lineares

No estudo de sistemas vibratórios (que suporemos serem lineares, embora isto nem sempre aconteça), é muito importante a determinação das características da saída do sistema. Para tal, estudaremos algumas funções que relacionam a entrada com a saída.

Consideremos uma entrada $x(t)$ do sistema, que produz uma saída $y(t)$. Para sistemas lineares, existe um operador linear \mathcal{G} tal que a entrada e a saída se relacionam por

$$y(t) = \mathcal{G}(x(t)).$$

Seja $\delta(t)$ um impulso unitário (delta de Dirac). Temos que, para qualquer função $x(t)$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

Consideremos agora a resposta impulsiva $h(t)$, que é a saída do sistema quando a entrada é um impulso unitário, isto é

$$h(t) = \mathcal{G}(\delta(t)), \tag{1.1}$$

então, dada uma entrada $x(t)$, temos que:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)x(\tau)d\tau \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\delta(t - \tau))x(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Para que um sistema seja fisicamente realizável, não podemos ter uma resposta antes que um sinal de entrada seja aplicado, isto é, $h(t) = 0$ para $t < 0$. O sinal $x(t)$ também é nulo para t negativo. Assim, teremos:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Então, se soubermos a resposta impulsiva do sistema, poderemos calcular o output do sistema para qualquer input simplesmente calculando a convolução acima.

Consideremos agora uma entrada senoidal $x(t) = e^{i\omega t}$. Procuraremos saída da forma $y(t) = H_w(\omega)e^{i\omega t}$, onde $H_w(\omega)$ é a resposta freqüência do sistema. Calculando $y(t)$, obtemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right) e^{i\omega t}.$$

Logo, a resposta freqüência é expressa como a transformada de Fourier da resposta impulsiva, e então $H_w(\omega)$ e $h(t)$ são pares na transformada de Fourier. Daí,

$$H_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad (1.2)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_w(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \quad (1.3)$$

A resposta freqüência é uma função complexa, e pode ser escrita na forma polar:

$$H_w(\omega) = M(\omega)e^{i\phi(\omega)},$$

onde $M(\omega)$ é chamado de ganho de sistema e $\phi(\omega)$ é a fase. Através da resposta freqüência, podemos descobrir se uma dada freqüência que compõe o sinal de entrada é amplificada ou reduzida, possibilitando o desenho de filtros.

Às vezes, é conveniente trabalharmos com a frequência f dada em Hz, ao invés da frequência angular w . As transformadas de Fourier ficam:

$$\begin{aligned} H_f(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_f(f) e^{2\pi i f t} df, \end{aligned}$$

com as funções $H_f(f)$ e $H_w(w)$ se relacionando através de:

$$\begin{aligned} H_f(f) &= H_w(w = 2\pi f) = H_w(2\pi f), \\ H_w(w) &= H_f(f = \frac{w}{2\pi}) = H_f(\frac{w}{2\pi}). \end{aligned}$$

A partir de agora, denotaremos $H_f(f)$ simplesmente por $H(f)$, assim como $H_w(w)$ será $H(w)$, por facilidade de notação.

1.2 Sinais Aleatórios

Basicamente, qualquer dado representando um fenômeno físico pode ser classificado como determinístico ou não determinístico.

Dados determinísticos são aqueles que podem ser descritos por uma relação matemática explícita. Por exemplo, a exata localização do corpo em um sistema massa-mola pode ser representado pela expressão $x(t) = X \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

Há vários fenômenos físicos que podem ser representados com exatidão razoável por relações matemáticas explícitas, como o movimento de um satélite em órbita, por exemplo. Entretanto, há vários outros fenômenos físicos que produzem dados não determinísticos. Como exemplo, podemos citar a altura das ondas em um mar tempestuoso, ou as oscilações de um edifício causadas pelo vento. Não

podemos prever um exato valor em um instante de tempo futuro, sendo necessária a utilização de conceitos probabilísticos e estatísticos.

1.2.1 *Classificação dos Dados Determinísticos*

Os dados determinísticos podem ser divididos em periódicos ou não-periódicos. Os dados periódicos se classificam entre senoidais e periódicos-complexos. Já os dados não-periódicos se dividem em quase-periódicos e complexos.

1.2.1.1 *Dados Periódicos Senoidais*

São dados que podem ser escritos na forma:

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

para

X = amplitude,

f_0 = frequência em ciclos por segundo,

θ = ângulo fase inicial,

$x(t)$ = valor instantâneo em um dado valor t .

1.2.1.2 *Dados Periódicos-complexos*

São dados que podem ser descritos exatamente pela relação

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$

onde T é o período.

Na grande maioria dos casos práticos, os dados periódicos-complexos podem ser expandidos em uma série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n f_0 t},$$

com

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{2\pi i n f_0 t} dt.$$

Tais dados produzem um espectro discreto, representado pelas amplitudes dos números complexos c_n

1.2.1.3 Dados Quase-periódicos

Quando somamos duas ou mais ondas senoidais em que a razão de todos os possíveis pares de frequências formam um número racional, a onda resultante será periódica. Por exemplo,

$$x(t) = 2 \sin 3t + 5 \sin(7t + 2) - \sin(2t - 3)$$

é uma função periódica.

Já a função

$$x(t) = \sin 5t + \sin(2\pi t + 3)$$

não é uma função periódica, pois $\frac{2\pi}{5}$ não é um número racional. Mas, observando a história temporal de $x(t)$, vemos que esta função tem uma característica quase-periódica, embora não exista um período fundamental T finito.

Em geral, definimos dados quase-periódicos com sendo aqueles que podem ser definidos matematicamente por uma função do tipo:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(2\pi f_n t + \theta_n),$$

onde f_n/f_m não é um número racional para todo $n \neq m$.

Assim como dados periódicos, dados quase-periódicos tem um espectro discreto, mas as razões entre as frequências do espectro nunca resultam em um número racional.

1.2.1.4 *Dados Transientes*

Tais dados descrevem fenômenos que tem início em um determinado instante de tempo e tendem a desaparecer a medida que o tempo passa.

Ao contrário dos dados anteriormente analisados, os dados transientes possuem um espectro contínuo, que pode ser obtido através da integral de Fourier, dada por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t} dt.$$

Este espectro pode ser escrito na forma polar

$$X(f) = |X(f)|e^{-i\theta(f)},$$

onde $|X(f)|$ é a magnitude e $\theta(f)$ é o ângulo.

1.2.2 *Classificação dos Dados Aleatórios*

Para os fenômenos físicos aleatórios, temos que qualquer observação representa apenas um dos infinitos possíveis resultados que poderiam ter ocorrido.

Tal observação ao longo do tempo é uma amostra (ou registro, se observado em um intervalo finito de tempo), e a coleção de todas as possíveis amostras que o sistema aleatório poderia ter produzido é chamada de processo aleatório ou estocástico.

Processos aleatórios podem ser estacionários ou não-estacionários. Por sua vez, processos estacionários podem ser divididos em ergódigos ou não-ergódigos, e os processos não-estacionários podem ser classificados em termos de características próprias.

1.2.2.1 Processos Aleatórios Estacionários

Um proceso aleatório é caracterizado por um conjunto de parâmetros estatísticos. Dois desses parâmetros são o valor médio $\mu_x(t_1)$ e a função de autocorrelação $R_x(t_1, t_1 + \tau)$, que são definidos por:

$$\begin{aligned}\mu_x(t_1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1), \\ R_x(t_1, t_1 + \tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau).\end{aligned}$$

Para o caso em que as funções $\mu_x(t_1)$ e $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ variam com o tempo t_1 , o processo é dito não-estacionário. Caso $\mu_x(t_1)$ e $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ independam de t_1 , o processo é dito fracamente estacionário ou estacionário no sentido amplo. Nesse último tipo de processo, consideramos:

$$\begin{aligned}\mu_x(t_1) &= \mu_x, \\ R_x(t_1, t_1 + \tau) &= R_x(\tau).\end{aligned}$$

Ainda precisaríamos de uma coleção infinita dos momentos de ordem superior e dos momentos conjuntos do processo $\{x(t)\}$ para descrever o processo.

No caso em que todos os momentos e momentos conjuntos são independentes do tempo t_1 , dizemos que tal processo é fortemente estacionário ou estacionário no sentido estrito. Para nossos fins, a verificação de estacionariedade fraca justificará a suposição de estacionariedade forte.

1.2.2.2 Processos Aleatórios Ergódigos

Na maioria dos casos, é possível também descrever as propriedades de um processo estacionário analisando uma única amostra. Por exemplo, para a k -ésima amostra, temos uma média $\mu_x(k)$ e uma função de autocorrelação $R_x(\tau, k)$ dadas por:

$$\begin{aligned}\mu_x(k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt, \\ R_x(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt.\end{aligned}$$

Se o processo aleatório $x(t)$ é estacionário e tanto $\mu_x(k)$ quanto $R_x(\tau, k)$ são invariantes com relação a k , chamamos o processo de ergódigo. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}R_x(\tau, k) &= R_x(\tau), \\ \mu_x(k) &= \mu_x.\end{aligned}$$

A grande importância dos processos ergódigos consiste no fato de que todas suas propriedades podem ser determinadas através de uma só amostra. Na prática, os processos aleatórios representando fenômenos físicos são geralmente ergódigos.

1.2.2.3 Processos Aleatórios Não-estacionários

Processos aleatórios não-estacionários são todos os processos que não satisfazem as condições de estacionariedade definidas anteriormente. As propriedades desses processos são em geral funções variando no tempo que podem ser determinadas através de análises instantâneas de um conjunto de amostras.

Processos não-estacionários podem ser classificados em diversas categorias especiais. Por exemplo os processos $\{y(t)\}$ em que cada amostra é dada por $y(t) = A(t)x(t)$, onde $x(t)$ é uma amostra de um processo estacionário e $A(t)$ é uma função determinística formam uma categoria.

1.2.3 Propriedades Descritivas Básicas de um Processo Aleatório

As propriedades de um processo determinístico podem ser obtidas através de sua história temporal, e estes podem ser reproduzidos em circunstâncias idênticas. Já as propriedades de um processo aleatório são descritas em forma estatística, seja no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

As quatro principais funções estatísticas utilizadas para descrever as propriedades básicas de dados aleatórios são:

1. Valor médio: Fornece uma descrição rudimentar da intensidade do fenômeno
2. Função densidade de probabilidade: Fornece informação sobre propriedades dos dados no domínio de amplitude.
3. Função de autocorrelação: Fornece informação sobre a energia do processo, no domínio tempo.

4. Função densidade espectral de potência: Fornece informação sobre a energia do processo, no domínio frequência.

Na verdade, as duas últimas funções revelam o mesmo tipo de informação, já que são pares da Transformada de Fourier, como veremos a seguir.

1.2.3.1 Valor Médio e Variância

A intensidade geral de qualquer dado aleatório pode ser rudimentarmente descrito através do valor quadrático médio ψ_x^2 , que é a média dos valores quadráticos da sua história temporal. Mais precisamente,

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (1.4)$$

A raiz positiva do valor quadrático médio é a raiz quadrática média (ou valor rms, de *root mean square*).

Podemos ainda pensar sobre dados físicos em termos de suas componentes estática e dinâmica. A componente estática é representada pelo valor médio μ_x , e a componente dinâmica pode ser descrita pela variância σ_x^2 , dadas por:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.5)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)^2 dt. \quad (1.6)$$

A raiz positiva da variância é o desvio padrão. Expandindo a equação (1.6), vemos que

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2.$$

1.2.3.2 Funções de Densidade de Probabilidade

A função densidade de probabilidade de dados aleatórios descreve a probabilidade de que tais dados assumam um certo valor, dentro de um intervalo de tempo definido, em qualquer instante de tempo. Por exemplo, consideremos a história temporal de um registro $x(t)$ obtido em um intervalo de tempo T . A probabilidade de que $x(t)$ assumam valores entre x e $(x + \Delta x)$ é a razão T_x/T , onde T_x é o tempo total em que $x(t)$ fica entre x e $(x + \Delta x)$ durante o intervalo de tempo T . Quando T se aproxima do infinito, temos:

$$Prob[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}.$$

Para Δx indo para zero, temos a definição da função densidade de probabilidade $p(x)$:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Prob[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right]. \quad (1.7)$$

A probabilidade de que um valor instantâneo $x(t)$ seja menor ou igual a um valor dado x é definida por $P(x)$, chamada de função de distribuição de probabilidade, ou função de distribuição de probabilidade acumulada, e é dada pela expressão:

$$P(x) = Prob[x(t) \leq x] = \int_{-\infty}^x p(\zeta) d\zeta. \quad (1.8)$$

Claramente, a probabilidade de $x(t)$ ser menor ou igual a $-\infty$ é nula, assim como a probabilidade de $x(t)$ ser menor que ∞ é 1. A probabilidade de $x(t)$ estar no intervalo (x_1, x_2) é dada por:

$$Prob[x_1 < x(t) \leq x_2] = P(x_2) - P(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Podemos escrever o valor médio μ_x e o valor quadrático médio $\psi_x^2(t)$ através da densidade de probabilidade $p(x)$:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \\ \psi_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx.\end{aligned}$$

O valor médio pode ser visto como uma soma ponderada de $x(t)$ sobre todos os valores de x , e o valor quadrático médio é a soma ponderada do quadrado de $x(t)$. Tomemos agora a função determinística

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta). \quad (1.9)$$

Tal função pode ser considerada uma amostra de um processo aleatório

$$\{x(t)\} = \{X \sin(2\pi f_0 t + \theta_k)\},$$

onde o ângulo fase inicial θ_k de cada evento é uma variável aleatória. Assim, justificamos a utilização de ferramentas estatísticas para analisar a função senoidal. Para a função (1.9), obtemos a seguinte densidade de probabilidade $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} (\pi\sqrt{X^2 - x^2})^{-1} & \text{se } |x| < X \\ 0 & \text{se } |x| \geq X \end{cases}.$$

Pela expressão de $p(x)$, vemos que a função (1.9) não assume valores maiores que X nem valores menores que $-X$, e que o valor mais provável de obtermos em um instante de tempo t de $x(t)$ é $\pm X$.

A principal aplicação da função densidade de probabilidade de dados físicos é estabelecer uma descrição probabilística para valores instantâneos dos dados.

1.2.3.3 Função de Autocorrelação

A função de autocorrelação descreve a relação geral dos valores do processo em um determinado instante de tempo com valores futuros. A expressão para a função de autocorrelação é dada por:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt. \quad (1.10)$$

Fisicamente, a função $x(t)$ deve ser nula para valores negativos de t . Temos que a função de autocorrelação é simétrica, isto é,

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau). \quad (1.11)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz na definição (1.10), obtemos:

$$|R_x(\tau)| \leq |R_x(0)| = R_x(0). \quad (1.12)$$

Em termos da função de autocorrelação, o valor médio e o valor quadrático médio podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sqrt{R_x(\infty)} \text{ exceto para casos especiais como o seno,} \\ \psi_x^2 &= R_x(0). \end{aligned}$$

Considerando novamente a onda senoidal $x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta)$, temos que

$$R_x(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau.$$

Como vemos, a autocorrelação da função senoidal também é periódica (e com o mesmo período da onda senoidal), mas o ângulo fase é perdido.

Definamos agora o funcional linear E dado por

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[x(t)], \\ \psi_x^2 &= E[x^2(t)], \\ \sigma_x^2 &= E[(x(t) - \mu_x)^2], \\ R_x(\tau) &= E[x(t)x(t + \tau)]. \end{aligned}$$

Para um sistema linear cuja resposta impulsiva é $h(t)$, quando submetido a uma entrada $x(t)$ gera a saída $y(t)$, temos que

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t + \tau)] &= E\left[\int_0^\infty h(\xi)x(t - \xi)d\xi \int_0^\infty (h(\eta)x(t + \tau - \eta))d\eta\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi)h(\eta)x(t - \xi)x(t + \tau - \eta)d\xi d\eta\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi)h(\eta)E[x(t - \xi)x(t + \tau - \eta)]h(\eta)d\xi d\eta \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi)h(\eta)R_x(\xi - \eta + \tau)d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi)h(\eta)R_x(\xi - \eta + \tau)d\xi d\eta. \quad (1.13)$$

A principal aplicação para a função de autocorrelação é descobrir qual a relação entre valores da função em um determinado tempo com valores em outro tempo. Assim, podemos constatar se uma função é determinística, quando a autocorrelação persiste por todo eixo temporal, ou é aleatória, quando a autocorrelação tende a zero à medida que o tempo aumenta (supondo $\mu_x = 0$).

1.2.3.4 Função Densidade Espectral de Potência

A função densidade espectral de potência (também conhecida por função densidade autoespectral) descreve a decomposição em frequência dos dados através da densidade espectral do seu valor quadrático médio. O valor quadrático médio de uma amostra no intervalo de frequência $[f, f + \Delta f]$ pode ser obtido por um filtro passa-banda, e computando a média quadrática do resultado da filtragem. Explicitamente, temos:

$$\psi_x^2(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt,$$

onde $x(t, f, \Delta f)$ é a porção de $x(t)$ nas frequências entre f e $f + \Delta f$. Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, definimos a função densidade espectral de potência $G_x(f)$, através de:

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\psi_x^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right], \quad (1.14)$$

e o valor $G_x(f)$ é sempre um número real não negativo. A definição (1.14) não é muito útil na prática para o cálculo da densidade espectral de potência. Veremos a seguir uma importante relação entre a autocorrelação e a densidade espectral.

Para $x(t)$ tal que $|x(t)|$ e $|x(t)|^2$ são integráveis na reta, energia quadrática contida entre as frequências $w_0 = 2\pi f_0$ e $w_1 = 2\pi f_1$ é dada pela identidade de Parseval:

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{w_0}^{w_1} |X(w)|^2 dw + \frac{1}{2\pi} \int_{-w_1}^{w_0} |X(w)|^2 dw \\ &= 2 \int_{f_0}^{f_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i f t} dt \right) df. \end{aligned}$$

No nosso caso, em geral $|x(t)|$ e $|x(t)|^2$ não são integráveis na reta, e então a energia ponderada $\psi_x^2(f, \Delta f)$ fica:

$$\psi_x^2(f, \Delta f) = 2 \int_f^{f+\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi i \zeta t} dt \right) \left(\int_{-T}^T x(t) e^{2\pi i \zeta t} dt \right) \right] d\zeta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_x(f) &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \int_f^{f+\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi i \zeta t} dt \right) \left(\int_{-T}^T x(t) e^{2\pi i \zeta t} dt \right) \right] d\zeta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T x(t) e^{2\pi i f t} dt \right) \left(\int_0^T x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \int_{-T}^T x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} e^{2\pi i f t} d\tau dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \int_{-T}^T x(t + \tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \right) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \right) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$G_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, \quad (1.15)$$

o que mostra que a densidade espectral de potência é a transformada de Fourier da autocorrelação. Indo mais a fundo, vemos que

$$\begin{aligned} G_x(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(-2\pi f \tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin(-2\pi f \tau) d\tau \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau, \end{aligned}$$

já que $R_x(\tau)$ e $\cos(2\pi f \tau)$ são funções par, e $\sin(2\pi f \tau)$ é função ímpar. A função $G_x(f)$ é também chamada densidade espectral de potência unilateral, pois toda energia de $x(t)$ está concentrada nas frequências pertencentes ao intervalo $[0, +\infty)$.

Às vezes usamos a densidade espectral de potência bilateral $S_x(f)$, que distribui a energia de $x(t)$ também nas frequências negativas. A função $S_x(f)$ é definida como $\frac{1}{2}G_x(f)$. Em termos da densidade espectral de potência, o valor médio e o valor quadrático médio de $x(t)$ são dados por:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \left[\int_{0^-}^{0^+} G_x(f) df \right]^{1/2}, \\ \psi_x^2 &= \int_0^\infty G_x(f) df.\end{aligned}$$

A onda senoidal $X \sin 2\pi f_0 t$ tem como densidade espectral de potência uma função delta em $f = f_0$. Explicitamente,

$$G_x(f) = \frac{X^2}{2} \delta(f - f_0),$$

o que significa que toda energia da onda senoidal está concentrada na sua frequência f_0 .

A densidade espectral de potência bilateral da saída $S_y(f)$ de um sistema linear tem uma relação direta com a densidade espectral de potência bilateral $S_x(f)$ da entrada. Sabemos que

$$\begin{aligned}S_y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} \left(\iint_0^\infty h(\xi) R_x(\xi - \eta + \tau) h(\eta) d\xi d\eta \right) d\tau \\ &= \iiint_0^\infty h(\xi) e^{2\pi i f \xi} h(\eta) e^{-2\pi i f \eta} R_x(\xi - \eta + \tau) e^{-2\pi i f (\xi - \eta + \tau)} d\xi d\eta d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{2i\pi f \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-2i\pi f \eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-2i\pi f t} dt \\ &= \overline{H(f)} H(f) S_x(f) = |H(f)|^2 S_x(f),\end{aligned}$$

isto é,

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f). \quad (1.16)$$

A principal aplicação da função densidade espectral de potência é estabelecer a composição em frequências dos dados físicos, o que revela importantes relações entre as características do sistema físico envolvido.

1.2.4 Propriedades Conjuntas de Dados Aleatórios

Em muitos casos, é importante descrever algumas propriedades comuns ou conjuntas de dados diferentes de dois ou mais processos aleatórios. Por exemplo, podemos querer estudar a relação entre os deslocamentos de dois pontos diferentes de um sistema mecânico.

As três principais ferramentas para descrever as propriedades conjuntas de registros de um processo aleatório são:

1. Função densidade de probabilidade conjunta
2. Função de correlação cruzada
3. Função densidade espectral cruzada

Essas três funções são efetivamente extensões das formulações básicas usadas para descrever propriedades individuais de registros. Elas fornecem informações a respeito da amplitude, domínio tempo e domínio frequência, respectivamente.

1.2.4.1 Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função densidade de probabilidade conjunta de dois registros aleatórios descreve a probabilidade de que ambos registros assumam simultaneamente valores em uma faixa definida.

Analogamente à função densidade de probabilidade individual, tomamos um intervalo de observação $[0, T]$. Sendo $T_{x,y}$ o tempo total em que os registros aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ estejam simultaneamente nos intervalos $(x, x + \Delta x)$ e $(y, y + \Delta y)$ respectivamente, definimos a função densidade de probabilidade conjunta $p(x, y)$ por:

$$p(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)(\Delta y)} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_{x,y}}{T} \right]. \quad (1.17)$$

Novamente, a probabilidade de que os valores instantâneos $x(t)$ e $y(t)$ sejam menores ou iguais a valores fixos x e y é dada pela função de probabilidade acumulada conjunta $P(x, y)$, definida por:

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(\zeta, \eta) d\zeta d\eta. \quad (1.18)$$

Quando os dois fenômenos são estatisticamente independentes, a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$p(x, y) = p(x)p(y).$$

A principal aplicação para a função densidade de probabilidade conjunta é estabelecer a descrição probabilística de um evento que está associado com dois conjuntos de dados aleatórios relacionados. Por exemplo, a previsão do choque de duas estruturas que estão vibrando aleatoriamente, mas com alguma correlação, é uma aplicação direta desta função.

1.2.4.2 Função de Correlação Cruzada

A função de correlação cruzada de dois eventos aleatórios descreve a dependência geral de um em relação ao outro. Consideremos as histórias temporais $x(t)$ e $y(t)$ de dois eventos, durante um tempo de observação T . Definimos a função de correlação cruzada por

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = E[x(t)y(t+\tau)]. \quad (1.19)$$

Essa função sempre retorna um valor real, que pode ser positivo ou negativo. Ao contrário da autocorrelação, $R_{xy}(\tau)$ não tem necessariamente um máximo em $\tau = 0$, e também não é simétrica, mas satisfaz as seguintes relações:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau), \quad (1.20)$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_x(0)R_y(0), \quad (1.21)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)]. \quad (1.22)$$

Quando $R_{xy}(\tau) = 0$, $x(t)$ e $y(t)$ são ditos não correlacionados. Se $x(t)$ e $y(t)$ são estatisticamente independentes e um deles tem média 0, então $R_{xy}(\tau) = 0$ para todos os deslocamentos no tempo. No caso em que $x(t)$ e $y(t)$ não tem média zero, então temos $R_{xy}(\tau) = \mu_x\mu_y$.

Se tivermos um sistema linear com resposta impulsiva $h(t)$ e alimentarmos com uma entrada $x(t)$, obteremos uma saída $y(t)$. Nesse caso, observamos que:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t) \int_0^\infty x(t+\tau-\xi)h(\xi)d\xi] \\ &= \int_0^\infty E[x(t)x(t+\tau-\xi)]h(\xi)d\xi = \int_0^\infty R_x(\tau-\xi)h(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Então,

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_x(\tau - \xi)h(\xi)d\xi. \quad (1.23)$$

A função de correlação cruzada tem muitas aplicações importantes. Algumas delas são:

Medição do retardo - suponhamos que queremos determinar o tempo requerido por um sinal para que ele passe através de um sistema. Assumindo que o sistema seja linear, a correlação cruzada entre o sinal de entrada e o de saída dará diretamente esta informação, apresentando um pico no tempo desejado. Na prática, essa técnica pode falhar, porque a velocidade de transmissão pode depender da frequência. Então, usamos o espectro cruzado, que será visto a seguir.

Determinação do caminho da transmissão - consideremos o caso de um sistema linear no qual um sinal de entrada possa seguir dois caminhos e produzir um sinal de saída. Como cada transmissão demora um tempo diferente para cada meio, os picos ocorrerão separadamente na correlação cruzada para cada caminho que o sinal percorrer. Se o tempo de transmissão em cada meio pode ser calculado ou estimado, comparando com o valor experimental teremos detectado o caminho da energia.

Deteção e recuperação de sinais com ruído - como visto anteriormente, a função de autocorrelação serve também para detectar se um sinal era periódico ou senoidal. Se temos um sinal aleatório não necessariamente periódico com um ruído, a autocorrelação não conseguirá extrair o ruído deste sinal. Mas, se tivermos uma réplica do sinal sem ruído, fazemos a correlação cruzada entre o sinal original e o sinal com ruído, e extrairemos a correlação do sinal original. Ademais, no caso de sinais periódicos, a função de correlação cruzada dá uma relação sinal-ruído maior que a autocorrelação.

1.2.4.3 Função Densidade Espectral Cruzada

Definimos a função densidade espectral cruzada $G_{xy}(f)$ de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ com correlação cruzada $R_{xy}(\tau)$ analogamente à densidade autoespectral, através da integral de Fourier:

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (1.24)$$

Como a função $R_{xy}(\tau)$ não é simétrica, a função $G_{xy}(f)$ retornará em geral um número complexo não real. Assim, podemos escrever a densidade espectral cruzada com uma parte real e uma parte imaginária:

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) - iQ_{xy}(f),$$

onde a parte real $C_{xy}(f)$ é denominada função densidade espectral coincidente, e a parte imaginária $Q_{xy}(f)$ é denominada função densidade espectral de quadratura.

Em notação polar, temos:

$$G_{xy} = |G_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)},$$

com $|G_{xy}(f)|$ sendo a magnitude e $\theta_{xy}(f)$ sendo o ângulo. Uma propriedade importante da função de correlação cruzada é:

$$G_{xy}(f) = G_{yx}(-f) = \overline{G_{yx}(f)}. \quad (1.25)$$

Outra propriedade interessante é:

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_x(f)G_y(f). \quad (1.26)$$

Para a saída $y(t)$ de um sistema linear com entrada $x(t)$, temos que

$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} R_{xy}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i f(\tau-\xi)} R_x(\tau-\xi) h(\xi) e^{-2\pi i f \xi} d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} R_x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \xi} h(\xi) d\xi = H(f) S_x(f), \end{aligned}$$

e então

$$S_{xy}(f) = H(f) S_x(f) \quad (1.27)$$

Quando aplicamos a densidade espectral cruzada em problemas físicos, é geralmente interessante usarmos a quantidade real expressa por:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)} \leq 1, \quad (1.28)$$

onde $\gamma_{xy}^2(f)$ é chamada de função de coerência. Quando $\gamma_{xy}^2(f) = 0$ para alguma frequência, $x(t)$ e $y(t)$ são ditos incoerentes nessa frequência, o que é simplesmente uma outra palavra para incorrelatos. Se $x(t)$ e $y(t)$ são estatisticamente independentes, então $\gamma_{xy}^2(f) = 0$ para todas as frequências. Quando $\gamma_{xy}^2(f) = 1$ para todo f , $x(t)$ e $y(t)$ são ditos completamente coerentes.

A função densidade espectral cruzada tem muitas aplicações, similarmente à função de correlação cruzada. Algumas dessas aplicações são:

Medida da função de resposta em frequência: esta é uma aplicação fundamental já que permite obtermos características básica de um sistema. Por exemplo, consideramos um sistema mecânico com uma função de resposta em frequência $H(f)$. Assumimos um sinal aleatório estacionário com uma densidade espectral $G_x(f)$ que é aplicado na entrada do sistema. O sinal de saída será um sinal aleatório estacionário com uma densidade espectral dada por $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$. Mas outra fórmula importante já vista que relaciona o espectro cruzado dos sinais entrada e

saida é:

$$G_{xy}(f) = H(f)G_x(f)$$

Através dela, podemos calcular a resposta frequência $H(f)$ do sistema, simplesmente fazendo $H(f) = G_{xy}(f)/G_x(f)$

Medição do retardo: conhecendo o ângulo de fase $\theta_{xy}(f)$ do espectro cruzado entre a entrada e a saída do sistema, teremos uma medida do retardo do sistema para a frequência f . Assim, o retardo estará dado por $\tau = \theta_{xy}(f)/2\pi f$. Vimos que a função de correlação cruzada não permitia obter o tempo de retardo como função da frequência, o que é possível com a utilização da função densidade espectral cruzada.

Predição linear e teoria de filtros: Em muitos problemas, queremos determinar um filtro linear ótimo que irá transmitir e prever informações desejadas de um sinal, enquanto rejeitará o ruído contido na informação. Os vários espectros e espectros cruzados entre sinais de entrada e ruídos, e entre sinais de saída e ruído determinarão o filtro ótimo.

2 SISTEMAS MULTIDIMENSIONAIS DETERMINÍSTICOS

Neste capítulo será apresentada uma fórmula explícita para determinar a solução $\mathbf{q}(t)$ da equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (2.1)$$

onde a matriz \mathbf{M} é não-singular e as matrizes \mathbf{C} e \mathbf{K} são arbitrárias. Os resultados apresentados neste capítulo, seguindo a teoria de Claeysen [CLA 90b],[CLA 95], e o trabalho de Gallicchio [GAL 87], estão fundamentados no conceito de solução dinâmica matricial.

2.1 O Método Matricial Operacional

Consideremos a equação diferencial vetorial (2.1) Aplicando a transformada de Laplace a esta equação, obtemos

$$\mathbf{M} [\lambda^2 \mathcal{Q}(\lambda) - \dot{\mathbf{q}}(0) - \lambda \mathbf{q}(0)] + \mathbf{C} [\lambda \mathcal{Q}(\lambda) - \mathbf{q}(0)] + \mathbf{K} \mathcal{Q}(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)$$

ou, de maneira mais compacta, resulta a equação operacional

$$\Delta(\lambda) \mathcal{Q}(\lambda) = H(\lambda) + \mathcal{F}(\lambda), \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}, \\ H(\lambda) &= \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(0) + (\lambda \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{q}(0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\mathcal{Q}(\lambda)$ e $\mathcal{F}(\lambda)$ são as transformadas de Laplace de $\mathbf{q}(t)$ e de $\mathbf{f}(t)$, respectivamente.

Agora, introduziremos formalmente o conceito de solução dinâmica, que é a base para a obtenção da solução $\mathbf{q}(t)$ de (2.1). A solução matricial do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{D}(0) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.4)$$

é denominada *solução dinâmica* associada à equação (2.1). Procedendo de maneira análoga à obtenção da equação operacional (2.2), de (2.4) resulta a equação

$$\Delta(\lambda)\mathcal{D}(\lambda) = \mathbf{I}, \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{D}(\lambda)$ é a transformada de Laplace de $\mathbf{D}(t)$ e é referida como a *matriz de transferência* do sistema (2.1).

Vemos de (2.5) que $\Delta^{-1}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)$. Levando em conta esta igualdade e pré-multiplicando (2.2) por $\Delta^{-1}(\lambda)$ segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\lambda) &= \mathcal{D}(\lambda)H(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)\mathcal{F}(\lambda) \\ &= \mathcal{D}(\lambda)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0) + (\lambda\mathcal{D}(\lambda)\mathbf{M} + \mathcal{D}(\lambda)\mathbf{C})\mathbf{q}(0) + \mathcal{D}(\lambda)\mathcal{F}(\lambda) \end{aligned}$$

e tomando a transformada inversa de Laplace obtemos

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0) + \left(\dot{\mathbf{D}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{D}(t)\mathbf{C}\right)\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{D}(t-s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) indica que para conhecer a *resposta* (solução) do sistema (2.1) é suficiente conhecer a solução dinâmica associada ao mesmo.

Vejamos, brevemente, duas alternativas teóricas para a obtenção da solução dinâmica $\mathbf{D}(t)$. Por um lado, se considerarmos a equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

as soluções da forma $\mathbf{q}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ (chamadas de *soluções próprias*) de (2.7) são obtidas resolvendo o sistema

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

o que equivale a achar as raízes (autovalores de (2.7)) do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = \det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i} \quad (2.8)$$

e determinar os autovetores \mathbf{v} . Além disso, como

$$\mathcal{D}(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) = \frac{\text{adj } \Delta(\lambda)}{p(\lambda)},$$

os pólos de $\mathcal{D}(\lambda)$ são os autovalores de (2.7) e, desde que existe um número finito deles, a integral de Bromwich para a transformada inversa de Laplace reduz-se a uma integral de contorno limitado

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathcal{D}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (2.9)$$

onde Γ é uma circunferência que encerra os autovalores de (2.7).

Por outro lado, quando a solução dinâmica é escrita como uma série de Taylor, ou seja,

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}_k \frac{t^k}{k!}, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}^{(k)}(0)$, e é substituída na equação (2.4), dá origem ao problema matricial em diferenças

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{D}_{k+2} + \mathbf{C}\mathbf{D}_{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{D}_k = \mathbf{O}, \\ \mathbf{D}_0 = \mathbf{O}, \quad \mathbf{M}\mathbf{D}_1 = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.11)$$

O cálculo numérico das fórmulas (2.9) e (2.11) apresenta dificuldades, pois no caso de (2.9) é necessário conhecer a matriz de transferência $\mathcal{D}(\lambda)$, e para (2.11) não é fácil gerar as matrizes \mathbf{D}_k para k muito grande. Na seção seguinte, veremos um método alternativo para calcular a solução dinâmica.

2.2 Método de Cálculo para a Solução Dinâmica

O sistema (2.1), no caso homogêneo, pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$ e cuja solução é $\mathbf{w}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{w}(0)$.

Além disso,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t) \\ \ddot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t) \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Aplicando a transformada de Laplace à igualdade $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ obtemos: $\lambda\mathcal{E}(\lambda) - \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathcal{E}(\lambda)$, isto é,

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathcal{E}(\lambda) = \mathbf{I}, \quad (2.14)$$

onde $\mathcal{E}(\lambda)$ é a transformada de Laplace de $e^{\mathbf{A}t}$. Então, de (2.14) segue que:

$$\mathcal{E}(\lambda) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}. \quad (2.15)$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= p_{\mathcal{E}}(\lambda) = \sum_{i=0}^{2n} p_i \lambda^{2n-i} = \det(\lambda^2\mathbf{I} + \lambda\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{M}} \det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} p(\lambda), \end{aligned}$$

onde $p(\lambda)$ é o polinômio característico já definido em (2.8). Então,

$$\det \mathbf{M} p_{\mathcal{E}}(\lambda) = p(\lambda). \quad (2.16)$$

Por outro lado, também temos a seguinte igualdade para a matriz adjugada

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} p_i \lambda^{j-i-1} \mathbf{A}^{2n-j}, \quad (2.17)$$

e, de (2.15), obtemos que

$$\mathcal{E}(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} p_i \lambda^{j-i-1} \mathbf{A}^{2n-j}}{p_{\mathcal{E}}(\lambda)}.$$

Utilizando a integral de Bromwich para determinar a inversa da transformada de Laplace, temos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})}{p_{\mathcal{E}}(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} p_i \det \mathbf{M} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{j-i-1} \frac{e^{\lambda t}}{p_{\mathcal{E}}(\lambda) \det \mathbf{M}} d\lambda \right) \mathbf{A}^{2n-j},$$

sendo Γ uma circunferência que encerra todas as raízes de $p_{\mathcal{E}}(\lambda)$ (e conseqüentemente, as raízes de $p(\lambda)$). Por (2.16), temos

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{j-i-1} \frac{e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda \right) \mathbf{A}^{2n-j}. \quad (2.18)$$

A função

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda \quad (2.19)$$

é de classe C^{∞} e suas derivadas são dadas por

$$d^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\lambda^m e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda,$$

e satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)}(t) = 0, \\ b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1, \quad d(0) = d'(0) = \dots = d^{(2n-2)}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

de modo que

$$\mathcal{L}[d] = \frac{1}{p(\lambda)}. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.19) em (2.18) obtemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{A}^{2n-j} \quad (2.22)$$

De (2.13), temos que $\frac{d^k}{dt^k} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$ e, em $t = 0$, $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(k)}(0) \\ \mathbf{D}^{(k+1)}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_k \\ \mathbf{D}_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad k \geq 0. \quad (2.23)$$

Através de (2.13) e (2.22), podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{A}^{2n-j} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{2n-j} \\ \mathbf{D}_{2n-j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo que a última igualdade foi obtida de (2.23). Deste modo, uma fórmula para a solução dinâmica é

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{D}_{2n-j}. \quad (2.25)$$

onde os coeficientes matriciais \mathbf{D}_{2n-j} , $j = 1 : 2n$ podem ser determinados recursivamente pela aplicação de (2.11). Cabe salientar que somente precisamos calcular um número finito de matrizes \mathbf{D}_k .

Para efeito numérico[CAN 95], enfatizamos a segunda igualdade obtida a partir (2.24), ou seja,

$$\dot{\mathbf{D}}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{D}_{2n-j+1}. \quad (2.26)$$

2.3 A Matriz de Transferência

Observamos que $\mathcal{L}[d^{(j-i-1)}(t)] = \frac{\lambda^{j-i-1}}{p(\lambda)}$, $i = 0 : j - 1$, $j = 1 : 2n$, por (2.20) e (2.21), e definindo

$$q_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1}, \quad j = 1 : 2n, \quad (2.27)$$

aplicamos a transformada de Laplace a (2.25), e obtemos que a matriz de transferência é dada pela seguinte fórmula:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{q_j(\lambda)}{p(\lambda)} \mathbf{D}_{2n-j}. \quad (2.28)$$

Devemos observar que ésta é uma fórmula alternativa para a inversão do polinômio matricial $\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}$, pois $\mathcal{D}(\lambda) = (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$.

Escrevendo o polinômio característico $p(\lambda)$ como

$$p(\lambda) = b_0 \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

onde λ_k , $k = 1 : s$ são as raízes de $p(\lambda)$ com multiplicidade m_k , respectivamente. Temos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{q_j(\lambda)}{p(\lambda)} \right] = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{m_k} \frac{r_{ji}(\lambda_k)}{(m_k - i)!} t^{m_k - i} e^{\lambda_k t}, \quad (2.29)$$

sendo que $r_{ji}(\lambda_k)$ denota os resíduos de $\frac{q_j(\lambda)}{p(\lambda)}$ em $\lambda = \lambda_k$. De (2.28) e (2.29) segue que

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{m_k} \mathbf{E}_{ki} \frac{t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}}{(m_k - 1)!}, \quad (2.30)$$

com $\mathbf{E}_{ki} = \sum_{j=1}^{2n} r_{ji}(\lambda_k) \mathbf{D}_{2n-j}$, e, considerando a transformada de Laplace de (2.30) resulta

$$\mathcal{D}(\lambda) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\mathbf{E}_{ki}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k - i + 1}}. \quad (2.31)$$

A solução dinâmica e sua transformada, para o caso de autovalores de multiplicidade 1 podem ser escritas através das fórmulas (2.30) e (2.31), resultando em:

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{E}_k e^{\lambda_k t} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\mathbf{E}_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (2.32)$$

de modo que as matrizes \mathbf{E}_k correspondentes a $k = 1 : 2n$, são dadas por

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{p'(\lambda_k)} \sum_{j=1}^{2n} q_j(\lambda_k) \mathbf{D}_{2n-j},$$

desde que os resíduos de $\frac{q_j(\lambda)}{p(\lambda)}$, em $\lambda = \lambda_k$, são obtidos pelo processo habitual, ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{(\lambda - \lambda_k) q_j(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{q_j(\lambda_k)}{p'(\lambda_k)}.$$

Exemplo : Consideremos a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix}.$$

A equação está escrita na forma (2.1) com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico $p(\lambda)$ é

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 13\lambda^2 - 38\lambda - 24 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda - 4),$$

com coeficientes

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = -13, \quad b_3 = -38, \quad b_4 = -24,$$

e autovalores

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3, \quad \lambda_4 = 4.$$

Os polinômios $q_j(\lambda)$ definidos por (2.27), para $n = 2$, são

$$q_1(\lambda) = 1, \quad q_2(\lambda) = \lambda + 2, \quad q_3(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 13.$$

Além disso, como

$$p'(\lambda) = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 26\lambda - 38,$$

obtemos que

$$p'(-1) = -10, \quad p'(-2) = 6, \quad p'(-3) = -14, \quad \text{e} \quad p'(4) = 210.$$

Resolvendo o problema em diferenças (2.11) obtemos

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -19 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}.$$

Por (2.32) a solução dinâmica e a matriz de transferência são, respectivamente,

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{E}_k e^{\lambda_k t}, \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(\lambda) = \sum_{k=1}^4 \frac{\mathbf{E}_k}{\lambda - \lambda_k},$$

onde

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{p'(\lambda_k)} \sum_{j=1}^4 q_j(\lambda_k) \mathbf{D}_{4-j} = \frac{1}{p'(\lambda_k)} \begin{bmatrix} 8\lambda_k + \lambda_k^2 & 6 + 4\lambda_k - \lambda_k^2 \\ 4 - 3\lambda_k & -5 - 3\lambda_k + \lambda_k^2 \end{bmatrix}.$$

Usando os valores numéricos, decorre que

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \frac{7}{10}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{15}{14}e^{-3t} + \frac{8}{35}e^{4t} & -\frac{1}{10}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{15}{14}e^{-3t} + \frac{1}{35}e^{4t} \\ -\frac{7}{10}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{13}{14}e^{-3t} - \frac{4}{105}e^{4t} & \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-2t} - \frac{13}{14}e^{-3t} - \frac{1}{210}e^{4t} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\lambda) &= \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda + 1} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda + 2} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{15}{14} & \frac{15}{14} \\ -\frac{13}{14} & -\frac{13}{14} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda + 3} + \begin{bmatrix} \frac{8}{35} & \frac{1}{35} \\ -\frac{4}{105} & -\frac{1}{210} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda - 4}. \end{aligned}$$

2.4 Polinômios de Lucas e a Solução Dinâmica

A relação entre uma equação linear de ordem superior e a exponencial da correspondente matriz companheira é uma questão bem conhecida. Queremos agora discutir o contrário, isto é, como a exponencial de uma matriz quadrada arbitrária se relaciona com alguma equação linear de ordem superior. Veremos que há uma relação que pode ser interessante do ponto de vista algébrico e numérico.

Dada uma matriz quadrada \mathbf{A} de ordem n , consideramos a equação diferencial escalar

$$u^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n a_j u^{(n-j)}(t) \quad (2.33)$$

associada com o polinômio característico

$$P(\lambda) = \det |\lambda I - \mathbf{A}| = \lambda^n - \sum_{j=1}^n a_j \lambda^{n-j}$$

da matriz \mathbf{A} . Do teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que qualquer potência de \mathbf{A} pode ser escrita como

$$\mathbf{A}^k = \sum_{j=1}^n \alpha_j(k) \mathbf{A}^{n-j}; \quad k = 1, 2, \dots,$$

para certos escalares $\alpha_j(k)$. Conseqüentemente,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^n \beta_{n-j}(t) \mathbf{A}^{n-j},$$

onde os coeficientes

$$\beta_{n-j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_j(k) \frac{t^k}{k!}$$

devem ser determinados. Bakarar e Baumann [BAK 69] estabeleceram que os valores $\alpha_j(k)$ podem ser expressos em termos dos polinômios de Lucas generalizados

$$d_k = d_k(a_1, \dots, a_n),$$

obtidos resolvendo a equação linear escalar de ordem n

$$\begin{cases} d_k = \sum_{j=1}^n a_j d_{k-j}, & k \geq n \\ d_{n-1} = 1, d_0 = d_1 = \dots = d_{n-2} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Nenhuma fórmula compacta para os α_j 's foi dada; mais tarde, Lavoie [LAV 75] mostrou sua relação com os polinômios de Bell, enquanto Bruschi e Ricci [BRU 82] exibiram uma função geradora para os polinômios de Lucas generalizados d_k .

Claeyssen [CLA 90b] identificou os $\alpha_j(k)$ com os coeficientes dos polinômios de Lucas. Fica bem claro que esses polinômios são simplesmente as derivadas da solução dinâmica $d(t)$ da equação escalar (2.33) avaliadas em zero. Então, qualquer fórmula para os α_j deve envolver a solução dinâmica escalar $d(t)$. De fato, se fizermos $d_k = 0$ para valores negativos de k e $a_0 = 1$, poderemos escrever a fórmula de Bakarat e Baumann na forma compacta

$$\begin{aligned}\alpha_j(k) &= \sum_{i=0}^{n-j} a_{j+i} d_{k-i-1} = \sum_{i=j}^n a_i d_{k+j-i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i d_{k+j-i-1} - \sum_{i=1}^{j-1} a_i d_{k+j-i-1} = d_{k+j-1} - \sum_{i=1}^{j-1} a_i d_{k+j-i-1}.\end{aligned}$$

Fazendo $b_0 = a_0$, $b_i = -a_i$, teremos

$$\alpha_j(k) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1},$$

e então

$$\beta_{n-j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1} \right) \frac{t^k}{k!},$$

que são nada mais que as soluções de base complementares $c_{n-j}(t)$ da equação (2.33), com as funções $c_j(t)$ satisfazendo (2.33) e tendo valores iniciais $c_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3 EXTENSÃO PARA O CASO MULTIDIMENSIONAL ALEATÓRIO

No capítulo 1, estudamos o caso de sinais aleatórios unidimensionais. No capítulo 2, vimos que muitos problemas relacionados com vibrações são multidimensionais, resultando em sistemas lineares com n graus de liberdade.

Neste capítulo, estenderemos o conteúdo de capítulo 1 para o caso multidimensional, relacionando os resultados com o que foi obtido no capítulo 2. Uma idéia fundamental é utilizar a expressão (2.25) para relacionar as correlações e densidades espectrais de entrada e saída de um sistema linear descrito pela equação (2.1).

3.1 Resposta de Sistemas Lineares Multidimensionais

Consideraremos nesta seção um sistema linear com n graus de liberdade, tendo como entrada e saída os vetores $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, respectivamente.

3.1.1 Resposta Impulsiva

Pela linearidade do sistema, podemos escrever a solução como:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j(t),$$

com $\mathbf{y}_j(t) = \begin{pmatrix} y_{1j}(t) \\ y_{2j}(t) \\ \vdots \\ y_{nj}(t) \end{pmatrix}$ resposta do sistema para $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_j(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para cada componente $y_i(t)$ de $\mathbf{y}(t)$, associamos uma resposta impulsiva $\mathbf{h}^i(t) = \begin{pmatrix} h_{i1}(t) & h_{i2}(t) & \cdots & h_{in}(t) \end{pmatrix}$, onde $h_{ij}(t)$ é a resposta impulso da componente unidimensional $y_{ij}(t)$.

A resposta impulso do sistema é a matriz:

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1(t) \\ \mathbf{h}^2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}^n(t) \end{bmatrix}.$$

Temos que $y_i(t) = \int_0^\infty \mathbf{h}^i(\tau) \mathbf{x}(t - \tau) d\tau$, e então:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1(t) \\ \mathbf{h}^2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}^n(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty \mathbf{h}(\tau) \mathbf{x}(t - \tau) d\tau.$$

Analisando com outro enfoque, consideremos:

$$\delta_i(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i - \text{ésimo}.$$

Sendo $\mathbf{h}_i(t)$ a resposta do sistema com entrada $\delta_i(t)$, temos que a resposta impulsiva pode ser escrita como:

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(t) & \mathbf{h}_2(t) & \dots & \mathbf{h}_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Fisicamente, notamos que cada componente $h_{ij}(t)$ da matriz $\mathbf{h}(t)$ é a resposta da j -ésima componente do sistema para um impulso unitário na i -ésima componente de entrada.

3.1.2 Relação Entre a Resposta Impulsiva e a Solução Dinâmica

Para o caso estudado em que os problemas vibratórios com n graus de liberdade são regidos pela equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

temos que a resposta impulsiva do sistema é obtida resolvendo

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) = \delta(t)\mathbf{I} \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{O}, \quad \dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{O} \end{cases}. \quad (3.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (3.2), obtemos

$$\mathbf{M}\lambda^2\mathcal{H}(\lambda) + \mathbf{C}\lambda\mathcal{H}(\lambda) + \mathbf{K}\mathcal{H}(\lambda) = \mathbf{I},$$

ou seja,

$$\Delta(\lambda)\mathcal{H}(\lambda) = \mathbf{I}, \quad (3.3)$$

para $\Delta(\lambda)$ definido como em (2.3).

Comparando as expressões (3.3) e (2.5), observamos claramente que

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda).$$

Isso implica que a resposta impulsiva $\mathbf{h}(t)$ e a solução dinâmica $\mathbf{D}(t)$ coincidem para todo $t > 0$. Em outras palavras, basta encontrarmos a resposta impulsiva e automaticamente teremos a solução dinâmica.

3.1.3 Resposta Freqüência

Uma analogia direta com o caso unidimensional nos leva à definição da matriz de resposta freqüência. Seja \mathbf{v} um vetor n -dimensional constante. Para uma entrada $\mathbf{x}(t) = e^{i\omega t}\mathbf{v}$, esperamos uma saída da forma $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}\mathbf{v}$, onde $\mathbf{H}(\omega)$ é a matriz de resposta freqüência.

Sabemos que:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathbf{v}d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right) e^{i\omega t}\mathbf{v} = \mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}\mathbf{v}.$$

Logo, a resposta freqüência é a transformada de Fourier da resposta impulsiva:

$$\mathbf{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau)e^{-2\pi if\tau}d\tau, \quad (3.4)$$

e como temos que $\mathbf{h}(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, chegamos a

$$\mathbf{H}(f) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(\tau)e^{-2\pi if\tau}d\tau = \int_0^{\infty} \mathbf{D}(\tau)e^{-2\pi if\tau}d\tau = \mathcal{D}(2\pi if). \quad (3.5)$$

3.2 Funções Descritivas dos Processos Aleatórios Multidimensionais

3.2.1 Valor Médio

Se definirmos:

$$\mu_x = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = E[\mathbf{x}(t)],$$

temos:

$$\begin{aligned} \mu_y &= E[\mathbf{y}(t)] = E\left[\int_0^\infty \mathbf{h}(\tau)\mathbf{x}(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^\infty \mathbf{h}(\tau)E[\mathbf{x}(t-\tau)]d\tau = \left(\int_0^\infty \mathbf{h}(\tau)d\tau\right)\mu_x = \mathbf{H}(0)\mu_x. \end{aligned}$$

3.2.2 Matrizes de Correlação

Definimos as matrizes de autocorrelação:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(\tau) &= \begin{pmatrix} R_{x_1}(\tau) & R_{x_1x_2}(\tau) & \cdots & R_{x_1x_n}(\tau) \\ R_{x_2x_1}(\tau) & R_{x_2}(\tau) & \cdots & R_{x_2x_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_nx_1}(\tau) & R_{x_nx_2}(\tau) & \cdots & R_{x_n}(\tau) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_{yy}(\tau) &= \begin{pmatrix} R_{y_1}(\tau) & R_{y_1y_2}(\tau) & \cdots & R_{y_1y_n}(\tau) \\ R_{y_2y_1}(\tau) & R_{y_2}(\tau) & \cdots & R_{y_2y_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{y_ny_1}(\tau) & R_{y_ny_2}(\tau) & \cdots & R_{y_n}(\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{yy}(\tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t+\tau)] = E\left[\int_0^\infty \mathbf{h}(\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi \int_0^\infty (\mathbf{h}(\eta)\mathbf{x}(t+\tau-\eta))^T d\eta\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{h}(\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\mathbf{x}^T(t+\tau-\eta)\mathbf{h}^T(\eta)d\xi d\eta\right] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{h}(\xi)E[\mathbf{x}(t-\xi)\mathbf{x}^T(t+\tau-\eta)]\mathbf{h}^T(\eta)d\xi d\eta \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{h}(\xi)\mathbf{R}_{xx}(\xi-\eta+\tau)\mathbf{h}^T(\eta)d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

e então

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{h}(\xi)\mathbf{R}_{xx}(\xi-\eta+\tau)\mathbf{h}^T(\eta)d\xi d\eta, \quad (3.7)$$

que é uma expressão analoga à expressão (1.23) obtida para o caso unidimensional.

Da expressão para a solução dinâmica (2.25), tiramos que

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(\xi) \mathbf{D}_{2n-j} \right) \mathbf{R}_{xx}(\xi-\eta+\tau) \left(\sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=0}^{j-1} b_l d^{(k-l-1)}(\eta) \mathbf{D}_{2n-k}^T \right) d\xi d\eta.$$

Definindo

$$\alpha_j(t) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t), \quad (3.8)$$

obtemos

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{D}_{2n-j} \alpha_j(\xi) \alpha_k(\eta) \mathbf{R}_{xx}(\xi-\eta+\tau) \mathbf{D}_{2n-k}^T \right) d\xi d\eta.$$

Se fizermos

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{2n-1} & \mathbf{D}_{2n-2} & \cdots & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{R}(\xi, \eta, \tau) = \mathbf{R}_{xx}(\xi - \eta + \tau) \begin{bmatrix} \alpha_1(\xi)\alpha_1(\eta)\mathbf{I} & \alpha_1(\xi)\alpha_2(\eta)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_1(\xi)\alpha_{2n}(\eta)\mathbf{I} \\ \alpha_2(\xi)\alpha_1(\eta)\mathbf{I} & \alpha_2(\xi)\alpha_2(\eta)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_2(\xi)\alpha_{2n}(\eta)\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2n}(\xi)\alpha_1(\eta)\mathbf{I} & \alpha_{2n}(\xi)\alpha_2(\eta)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{2n}(\xi)\alpha_{2n}(\eta)\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

poderemos escrever

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \mathbb{D} \left(\iint_0^\infty \mathbb{R}(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \right) \mathbb{D}^T, \quad (3.9)$$

onde as matrizes \mathbb{D} e $\mathbb{R}(\xi, \eta, \tau)$ tem respectivamente dimensões $n \times 2n^2$ e $2n^2 \times 2n^2$.

Analogamente, temos a matriz de correlação cruzada:

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \begin{pmatrix} R_{x_1y_1}(\tau) & R_{x_1y_2}(\tau) & \cdots & R_{x_1y_n}(\tau) \\ R_{x_2y_1}(\tau) & R_{x_2y_2}(\tau) & \cdots & R_{x_2y_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_ny_1}(\tau) & R_{x_ny_2}(\tau) & \cdots & R_{x_ny_n}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xy}(\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(t+\tau)] = E[\mathbf{x}(t) \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t+\tau-\xi)\mathbf{h}^T(\xi)d\xi] \\ &= \int_0^\infty E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau-\xi)]\mathbf{h}^T(\xi)d\xi = \int_0^\infty \mathbf{R}_{xx}(\tau-\xi)\mathbf{h}^T(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \int_0^\infty \mathbf{R}_{xx}(\tau-\xi)\mathbf{h}^T(\xi)d\xi, \quad (3.11)$$

semelhantemente à expressão (1.23).

Substituindo $h(\xi)$ pela solução dinâmica $\mathbf{D}(\xi)$, e usando a definição (3.8), chegamos a

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \int_0^\infty \mathbf{R}_{xx}(\tau - \xi) \left(\sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(\xi) \mathbf{D}_{2n-j}^T \right) d\xi = \sum_{j=1}^{2n} \left(\int_0^\infty \mathbf{R}_{xx}(\tau - \xi) \alpha_j(\xi) d\xi \right) \mathbf{D}_{2n-j}^T,$$

para

$$\mathbb{R}'(\tau, \xi) = \mathbf{R}_{xx}(\tau - \xi) \begin{bmatrix} \alpha_1(\xi) \mathbf{I} & \alpha_2(\xi) \mathbf{I} & \dots & \alpha_{2n}(\xi) \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n , temos que a matriz $\mathbb{R}'(\tau, \xi)$ tem dimensão $n \times 2n^2$ e

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \left(\int_0^\infty \mathbb{R}'(\tau, \xi) d\xi \right) \mathbb{D}^T. \quad (3.12)$$

Da propriedade (1.20), tiramos que $R_{x_i y_j}(\tau) = R_{y_j x_i}(-\tau)$, e então obtemos:

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \mathbf{R}_{yx}^T(-\tau). \quad (3.13)$$

Em particular, a autocorrelação fica:

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \mathbf{R}_{xx}^T(-\tau).$$

3.2.3 Matrizes de Densidade Espectral

Para a matriz densidade espectral definida como

$$\mathbf{S}_{yy}(f) = \begin{pmatrix} S_{y_1}(\tau) & S_{y_1 y_2}(\tau) & \dots & S_{y_1 y_n}(\tau) \\ S_{y_2 y_1}(\tau) & S_{y_2}(\tau) & \dots & S_{y_2 y_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{y_n y_1}(\tau) & S_{y_n y_2}(\tau) & \dots & S_{y_n}(\tau) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{yy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{yy}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} \int \int_0^{\infty} \mathbf{h}(\xi) \mathbf{R}_{xx}(\xi - \eta + \tau) \mathbf{h}^T(\eta) d\xi d\eta d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\xi) e^{2i\pi f \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}(t) e^{-2i\pi f t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(\eta) e^{-2i\pi f \eta} d\eta \\
&= \overline{\mathbf{H}(f)} \mathbf{S}_{xx}(f) \mathbf{H}^T(f) = (\mathbf{H}(f) \mathbf{S}_{xx}^T(f) \mathbf{H}^*(f))^T,
\end{aligned}$$

ou, utilizando a frequência angular,

$$\mathbf{S}_{yy}(w) = \overline{\mathbf{H}(w)} \mathbf{S}_{xx}(w) \mathbf{H}^T(w). \quad (3.15)$$

Utilizando a relação (3.5), e a expressão (2.28) para a matriz de transferência, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{yy}(w) &= \left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{q_j(-iw)}{p(-iw)} \overline{\mathbf{D}_{2n-j}} \right) \mathbf{S}_{xx}(w) \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{q_k(iw)}{p(iw)} \mathbf{D}_{2n-k}^T \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{D}_{2n-j} \frac{q_j(-iw) q_k(iw)}{|p(iw)|^2} \mathbf{S}_{xx}(w) \mathbf{D}_{2n-k}^T.
\end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbb{S}(w) = \frac{1}{|p(iw)|^2} \mathbf{S}_{xx}(w) \begin{bmatrix} q_1(-iw)q_1(iw)\mathbf{I} & q_1(-iw)q_2(iw)\mathbf{I} & \cdots & q_1(-iw)q_{2n}(iw)\mathbf{I} \\ q_2(-iw)q_1(iw)\mathbf{I} & q_2(-iw)q_2(iw)\mathbf{I} & \cdots & q_2(-iw)q_{2n}(iw)\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2n}(-iw)q_1(iw)\mathbf{I} & q_{2n}(-iw)q_2(iw)\mathbf{I} & \cdots & q_{2n}(-iw)q_{2n}(iw)\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

chegamos à seguinte expressão para $\mathbf{S}_{yy}(w)$:

$$\mathbf{S}_{yy}(w) = \mathbb{D} \mathbb{S}(w) \mathbb{D}^T, \quad (3.16)$$

onde $\mathbb{S}(w)$ tem dimensão $2n^2 \times 2n^2$.

A matriz densidade espectral cruzada é:

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = \begin{pmatrix} S_{x_1y_1}(\tau) & S_{x_1y_2}(\tau) & \cdots & S_{x_1y_n}(\tau) \\ S_{x_2y_1}(\tau) & S_{x_2y_2}(\tau) & \cdots & S_{x_2y_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_ny_1}(\tau) & S_{x_ny_2}(\tau) & \cdots & S_{x_ny_n}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if\tau} \mathbf{R}_{xy}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if(\tau-\xi)} \mathbf{R}_{xx}(\tau-\xi) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if\xi} \mathbf{h}^T(\xi) d\xi,$$

e então

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = \mathbf{S}_{xx}(f) \mathbf{H}^T(f). \quad (3.18)$$

Se a entrada $\mathbf{x}(t)$ for um vetor de sinais aleatórios, podemos obter as matrizes $\mathbf{S}_{yy}(f)$ e $\mathbf{S}_{xy}(f)$ experimentalmente. Daí, podemos extrair a resposta frequência $\mathbf{H}(f)$ através de:

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{S}_{xy}^T(f) (\mathbf{S}_{xx}(f)^T)^{-1}, \quad (3.19)$$

desde que a matriz $\mathbf{S}_{xx}(f)$ seja inversível.

Utilizando a frequência angular e a expressão (2.28), podemos escrever

$$\mathbf{S}_{xy}(w) = \mathbf{S}_{xx}(w) \sum_{j=1}^{2n} \frac{q_j(iw)}{p(iw)} \mathbf{D}_{2n-j}^T = \sum_{j=1}^{2n} \frac{q_j(iw)}{p(iw)} \mathbf{S}_{xx}(w) \mathbf{D}_{2n-j}^T.$$

Fazendo

$$\mathbf{S}'(w) = \frac{1}{p(iw)} \mathbf{S}_{xx}(w) \begin{bmatrix} q_1(iw) \mathbf{I} & q_2(iw) \mathbf{I} & \cdots & q_{2n}(iw) \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n , chegamos a

$$\mathbf{S}_{xy}(w) = \mathbb{S}'(w)\mathbb{D}^T, \quad (3.20)$$

com a matriz $\mathbb{S}'(w)$ tendo ordem $n \times 2n^2$.

De (1.25), tiramos que $S_{x_i y_j}(f) = \overline{S_{y_j x_i}(f)}$, e então o caso multidimensional fica:

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = \mathbf{S}_{yx}^*(f). \quad (3.21)$$

Como caso particular, obtemos a autocorrelação:

$$\mathbf{S}_{xx}(f) = \mathbf{S}_{xx}^*(f).$$

4 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Nos capítulos anteriores, nós supomos conhecidos os parâmetros das equações que regem os fenômenos de vibrações, e então poderíamos prever a resposta de um sistema sabendo a entrada do sistema. Neste capítulo consideraremos o *problema inverso*, ou seja, queremos determinar os parâmetros das equações a partir de medições em estruturas vibratórias.

Assumiremos que os problemas vibratórios com n graus de liberdade são bem modelados pela equação diferencial linear matricial (2.1). Nosso objetivo será determinar os autovalores λ_i e seus correspondentes autovetores \mathbf{v}_i satisfazendo o problema

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Outro problema mais complicado é a reconstituição completa das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , a partir de resultados experimentais. A seguir, veremos alguns métodos que se propõem a resolver o problema inverso, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, estendendo, em particular, o método de Ibrahim [INM 89] e as idéias em [CLA 95].

4.1 Método 1

Para um sistema de n graus de liberdade, e supondo que cada autovalor λ_i de (4.1) com multiplicidade m_i tem exatamente m_i autovetores linearmente independentes, podemos escrever a solução geral como:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t},$$

onde os λ_i são os autovalores e os \mathbf{v}_i são os autovetores. O autovetor \mathbf{v}_i pode absorver a constante c_i , resultando em

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{p}_i e^{\lambda_i t}. \quad (4.2)$$

Podemos obter a solução $\mathbf{q}(t)$ avaliada em $2n$ tempos distintos t_1, t_2, \dots, t_{2n} experimentalmente através de medições em n pontos da estrutura em $2n$ tempos distintos. Definindo

$$\mathbf{X}(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1) & \mathbf{q}(t_2) & \dots & \mathbf{q}(t_{2n}) \end{bmatrix},$$

observamos que $\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{P}\mathbf{E}(t_i)$, para

$$\mathbf{E}(t_i) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2n}} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \dots & e^{\lambda_2 t_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2n} t_1} & e^{\lambda_{2n} t_2} & \dots & e^{\lambda_{2n} t_{2n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_{2n} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Também podemos obter a solução medida Δt segundos mais tarde, isto é, medida em $t_i + \Delta t$. Se definirmos

$$\mathbf{Y}(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1 + \Delta t) & \mathbf{q}(t_2 + \Delta t) & \dots & \mathbf{q}(t_{2n} + \Delta t) \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\mathbf{Y}(t_i) = \mathbf{X}(t_i + \Delta t) = \mathbf{P}'\mathbf{E}(t_i),$$

onde a matriz \mathbf{P}' tem em sua i -ésima coluna o vetor $\mathbf{p}_i e^{\lambda_i \Delta t}$, já que

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \Delta t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_{2n} \Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 \Delta t} & \mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 \Delta t} & \dots & \mathbf{p}_{2n} e^{\lambda_{2n} \Delta t} \end{bmatrix}.$$

Analogamente podemos calcular a solução em Δt segundos mais tarde, isto é, em $t_i + 2\Delta t$, obtendo uma matriz $\mathbf{Z}(t_i)$ que satisfaz a seguinte equação:

$$\mathbf{Z}(t_i) = \mathbf{Y}(t_i + \Delta t) = \mathbf{P}''\mathbf{E}(t_i),$$

com

$$\mathbf{Z}(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1 + 2\Delta t) & \mathbf{q}(t_2 + 2\Delta t) & \dots & \mathbf{q}(t_{2n} + 2\Delta t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{P}' \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \Delta t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_{2n} \Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}'_1 e^{\lambda_1 \Delta t} & \mathbf{p}'_2 e^{\lambda_2 \Delta t} & \dots & \mathbf{p}'_{2n} e^{\lambda_{2n} \Delta t} \end{bmatrix}.$$

Podemos juntar as equações acima, obtendo duas equações matriciais:

$$\Phi(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_i) \\ \mathbf{Y}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}' \end{bmatrix} \mathbf{E}(t_i) = \Psi \mathbf{E}(t_i),$$

$$\Phi'(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(t_i) \\ \mathbf{Z}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}' \\ \mathbf{P}'' \end{bmatrix} \mathbf{E}(t_i) = \Psi' \mathbf{E}(t_i).$$

Daí,

$$\mathbf{I} = \Phi^{-1}(t_i) \Psi \mathbf{E}(t_i) \Rightarrow \Phi'(t_i) \Phi^{-1}(t_i) \Psi \mathbf{E}(t_i) = \Psi' \mathbf{E}(t_i) \Rightarrow \Phi'(t_i) \Phi^{-1}(t_i) \Psi = \Psi'.$$

Sendo Ψ_i , Ψ'_i respectivamente as colunas de Ψ e Ψ' , e utilizando a relação $\Psi'_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Psi_i$, reescrevemos a equação anterior na forma:

$$\Phi'(t_i) \Phi^{-1}(t_i) \Psi_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Psi_i.$$

Isto nos revela que $e^{\lambda_i \Delta t}$ é um autovalor da matriz $\Phi'(t_i) \Phi^{-1}(t_i)$, com respectivo autovetor Ψ_i . Os primeiros n componentes do vetor Ψ_i formarão um autovetor \mathbf{v}_i

satisfazendo a equação (4.1). Já os autovalores λ_i podem ser calculados através do logaritmo complexo de $e^{\lambda_i \Delta t}$, que pode ser explicitado como:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_i) &= \frac{1}{(2\Delta t)^2} \ln(\gamma^2 + \beta^2), \\ \operatorname{Im}(\lambda_i) &= \frac{1}{\Delta t} \arctan\left(\frac{\gamma}{\beta}\right), \end{aligned}$$

para β, γ sendo respectivamente as partes real e imaginária da exponencial complexa $e^{\lambda_i \Delta t}$

4.2 Método 2

Suporemos as mesmas hipóteses do Método 1 sobre os autovalores e autovetores de (4.1), e então podemos escrever a solução $\mathbf{q}(t)$ na forma (4.2), ou seja,

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{p}_i e^{\lambda_i t}.$$

Novamente, podemos obter a solução $\mathbf{q}(t)$ avaliada em $2n$ tempos distintos t_1, t_2, \dots, t_{2n} experimentalmente através de medições em n pontos da estrutura em $2n$ tempos distintos. Definindo

$$\mathbf{X}(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1) & \mathbf{q}(t_2) & \dots & \mathbf{q}(t_{2n}) \end{bmatrix},$$

observamos que $\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{P}\mathbf{E}(t_i)$, para $\mathbf{E}(t_i), \mathbf{P}$ definidas conforme (4.3).

Se dispusermos de instrumentos de medição apropriados, também podemos obter também a velocidade da estrutura nos tempos t_1, t_2, \dots, t_{2n} , obtendo a matriz $\dot{\mathbf{X}}(t_i)$ expressa como:

$$\dot{\mathbf{X}}(t_i) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t_1) & \dot{\mathbf{q}}(t_2) & \dots & \dot{\mathbf{q}}(t_{2n}) \end{bmatrix}.$$

Obtemos

$$\dot{\mathbf{X}}(t_i) = \mathbf{P}'\mathbf{E}(t_i),$$

onde a matriz \mathbf{P}' tem em sua i -ésima coluna o vetor $\lambda_i \mathbf{p}_i$, já que

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \lambda_{2n} \mathbf{p}_{2n}].$$

Também podemos medir a aceleração da estrutura nesses mesmos instantes de tempo, obtendo a matriz $\ddot{\mathbf{X}}(t_i)$ que satisfaz a seguinte equação:

$$\ddot{\mathbf{X}}(t_i) = \mathbf{P}''\mathbf{E}(t_i),$$

com

$$\ddot{\mathbf{X}}(t_i) = [\ddot{\mathbf{q}}(t_1) \quad \ddot{\mathbf{q}}(t_2) \quad \dots \quad \ddot{\mathbf{q}}(t_{2n})],$$

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{P}' \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{p}'_1 \quad \lambda_2 \mathbf{p}'_2 \quad \dots \quad \lambda_{2n} \mathbf{p}'_{2n}].$$

Juntando as equações acima, chegamos a:

$$\Theta(t_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_i) \\ \dot{\mathbf{X}}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}' \end{bmatrix} \mathbf{E}(t_i) = \mathbf{\Pi} \mathbf{E}(t_i),$$

$$\dot{\Theta}(t_i) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t_i) \\ \ddot{\mathbf{X}}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}' \\ \mathbf{P}'' \end{bmatrix} \mathbf{E}(t_i) = \mathbf{\Pi}' \mathbf{E}(t_i).$$

Daí,

$$\mathbf{I} = \Theta^{-1}(t_i)\Pi\mathbf{E}(t_i) \Rightarrow \dot{\Theta}(t_i)\Theta^{-1}(t_i)\Pi\mathbf{E}(t_i) = \Pi'\mathbf{E}(t_i) \Rightarrow \dot{\Theta}(t_i)\Theta^{-1}(t_i)\Pi = \Pi'.$$

Sendo Π_i , Π'_i respectivamente as colunas de Π e Π' , e utilizando a relação $\Pi'_i = \lambda_i\Pi_i$, reescrevemos a equação anterior na forma:

$$\dot{\Theta}(t_i)\Theta^{-1}(t_i)\Pi_i = \lambda_i\Pi_i.$$

Isto nos revela que λ_i é um autovalor da matriz $\dot{\Theta}(t_i)\Theta^{-1}(t_i)$, com respectivo autovetor Π_i . Os primeiros n componentes do vetor Π_i formarão um autovetor \mathbf{v}_i satisfazendo a equação (4.1).

Comparando com o método anterior, observamos que os autovalores de (4.1) são exatamente os autovalores da matriz $\dot{\Theta}(t_i)\Theta^{-1}(t_i)$, e ademais não precisamos fazer as medições adicionais nos tempos $t_{1+\Delta t}, t_{2+\Delta t}, \dots, t_{2n+\Delta t}$ e $t_{1+2\Delta t}, t_{2+2\Delta t}, \dots, t_{2n+2\Delta t}$, que são necessárias no método 1.

4.3 Método 3

Em muitos casos, é interessante sabermos a solução dinâmica do problema. Este método utilizará expressões envolvendo a solução dinâmica para achar os autovalores desejados. Consideremos o caso de autovalores distintos.

Introduzindo as matrizes

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_{2n} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \text{diag} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

podemos escrever a equação (4.1) na forma $\mathbf{M}\mathbf{V}\Lambda^2 + \mathbf{C}\mathbf{V}\Lambda + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{O}$. Multiplicando a equação por $\Lambda^k\Omega$ à direita, para uma determinada matriz Ω de dimensão $2n \times n$,

obtemos

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}\Lambda^{k+2}\Omega) + \mathbf{C}(\mathbf{V}\Lambda^{k+1}\Omega) + \mathbf{K}(\mathbf{V}\Lambda^k\Omega) = \mathbf{O},$$

que é a equação (2.11) com

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{V}\Lambda^k\Omega,$$

desde que Ω seja escolhida de forma que

$$\mathbf{M}\mathbf{D}_1 = \mathbf{M}\mathbf{V}\Lambda\Omega = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{V}\Omega = \mathbf{O}. \quad (4.4)$$

Neste caso, temos que

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}_k \frac{t^k}{k!} = \mathbf{V} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \right) \Omega = \mathbf{V}e^{\Lambda t}\Omega.$$

Veremos agora a construção da matriz Ω . Já vimos que podemos escrever a solução geral do caso não forçado como:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{2n} q_j \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t}.$$

Para cada coluna $\mathbf{q}_k(t)$ da solução dinâmica $\mathbf{D}(t)$ teremos seus multiplicadores q_{kj} .

Definindo

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} q_{k1} \\ q_{k2} \\ \vdots \\ q_{k2n} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_n \end{bmatrix},$$

e tomando as condições iniciais $\mathbf{q}_k(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_k(0) = \mathbf{e}_k$, onde \mathbf{e}_k é a k -ésima coluna da matriz identidade de ordem n , podemos verificar que a matriz Ω acima definida satisfaz as condições (4.4).

Tomemos então a expressão para a solução dinâmica:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{V}e^{\Lambda t}\Omega.$$

Através de entradas impulsivas no sistema e medições na posição, velocidade, aceleração e "jerk" da estrutura, podemos determinar a solução dinâmica da estrutura em um dado tempo t_0 , isto é, $\mathbf{D}(t_0)$, $\dot{\mathbf{D}}(t_0)$, $\ddot{\mathbf{D}}(t_0)$ e $\mathbf{D}^{(3)}(t_0)$. Chegamos às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t_0) &= \mathbf{V}e^{\Lambda t_0}\Omega, \\ \dot{\mathbf{D}}(t_0) &= \mathbf{V}\Lambda e^{\Lambda t_0}\Omega = \mathbf{V}'e^{\Lambda t_0}\Omega, \mathbf{V}' = \mathbf{V}\Lambda \Rightarrow \mathbf{V}'_i = \lambda_i \mathbf{V}_i, \\ \dot{\mathbf{D}}(t_0) &= \mathbf{V}e^{\Lambda t_0}\Lambda\Omega = \mathbf{V}e^{\Lambda t_0}\Omega', \Omega' = \Lambda\Omega, \\ \ddot{\mathbf{D}}(t_0) &= \mathbf{V}\Lambda e^{\Lambda t_0}\Lambda\Omega = \mathbf{V}'e^{\Lambda t_0}\Omega', \\ \ddot{\mathbf{D}}(t_0) &= \mathbf{V}\Lambda^2 e^{\Lambda t_0}\Omega = \mathbf{V}''e^{\Lambda t_0}\Omega, \mathbf{V}'' = \mathbf{V}'\Lambda, \Rightarrow \mathbf{V}''_i = \lambda_i \mathbf{V}'_i, \\ \mathbf{D}^{(3)}(t_0) &= \mathbf{V}\Lambda^2 e^{\Lambda t_0}\Lambda\Omega = \mathbf{V}''e^{\Lambda t_0}\Omega'. \end{aligned}$$

Formamos as equações matriciais:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t_0) & \dot{\mathbf{D}}(t_0) \\ \dot{\mathbf{D}}(t_0) & \ddot{\mathbf{D}}(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix} e^{\Lambda t_0} \begin{bmatrix} \Omega & \Omega' \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t_0) & \ddot{\mathbf{D}}(t_0) \\ \ddot{\mathbf{D}}(t_0) & \mathbf{D}^{(3)}(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{V}'' \end{bmatrix} e^{\Lambda t_0} \begin{bmatrix} \Omega & \Omega' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t_0) &= e^{\Lambda t_0} \begin{bmatrix} \Omega & \Omega' \end{bmatrix}, \\ \Phi(t_0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t_0) & \dot{\mathbf{D}}(t_0) \\ \dot{\mathbf{D}}(t_0) & \ddot{\mathbf{D}}(t_0) \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix}, \\ \dot{\Phi}(t_0) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t_0) & \ddot{\mathbf{D}}(t_0) \\ \ddot{\mathbf{D}}(t_0) & \mathbf{D}^{(3)}(t_0) \end{bmatrix}, \quad \Psi' = \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{V}'' \end{bmatrix},\end{aligned}$$

temos:

$$\mathbf{I} = \Phi^{-1}(t_0)\Psi\mathbf{E}(t_0) \Rightarrow \dot{\Phi}(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\Psi\mathbf{E}(t_0) = \Psi'\mathbf{E}(t_0) \Rightarrow \dot{\Phi}(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\Psi = \Psi'.$$

Como $\Psi'_i = \lambda_i\Psi_i$, chegamos a $\dot{\Phi}(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\Psi_i = \lambda_i\Psi'_i \Rightarrow \lambda_i$ é autovalor de $\dot{\Phi}(t_0)\Phi^{-1}(t_0)$, e os primeiros n componentes de Ψ_i formam um vetor \mathbf{v}_i que satisfaz (4.1).

Da definição de solução dinâmica, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}(t) &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{M}\mathbf{D}^{(3)}(t) + \mathbf{C}\ddot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{D}}(t) &= \mathbf{O},\end{aligned}$$

e então:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t) & \ddot{\mathbf{D}}(t) \\ \ddot{\mathbf{D}}(t) & \mathbf{D}^{(3)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) & \dot{\mathbf{D}}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) & \ddot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix},$$

independente de t , e também sem fazer nenhuma hipótese sobre os autovalores ou autovetores do problema (4.1).

Então, o método 4 é genérico, para quaisquer matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} . Ademais, podemos reconstruir as matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ diretamente do produto $\dot{\Phi}(t_0)\Phi^{-1}(t_0)$.

4.4 Método 4

Para o estudo de vibrações aleatórias, é interessante sabermos a matriz de resposta frequência $\mathbf{H}(f)$ (ou $\mathbf{H}(w)$), definida anteriormente. Podemos determinar a resposta frequência experimentalmente, a a partir daí, tentaremos reconstruir as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

Conforme as expressões (3.5) e (2.5), e utilizando a frequência angular, temos que

$$\mathbf{H}(w) = \mathcal{D}(iw) = (-\mathbf{M}w^2 + i\mathbf{C}w + \mathbf{K})^{-1}.$$

Tomemos uma frequência w_0 . Se iw_0 não for autovalor de (4.1), podemos inverter a matriz $\mathbf{H}(w_0)$, obtendo

$$\mathbf{H}(w_0)^{-1} = -\mathbf{M}w_0^2 + i\mathbf{C}w_0 + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -w_0^2\mathbf{I} & iw_0\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix},$$

para \mathbf{I} sendo a matriz identidade de ordem n .

Analogamente, avaliamos a resposta frequência em outros dois pontos w_1 e w_2 . Assim, formamos um equação matricial por blocos, dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(w_0)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_1)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_2)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_0^2\mathbf{I} & iw_0\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -w_1^2\mathbf{I} & iw_1\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -w_2^2\mathbf{I} & iw_2\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix},$$

e então podemos reconstruir as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} através de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_0^2 \mathbf{I} & iw_0 \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -w_1^2 \mathbf{I} & iw_1 \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -w_2^2 \mathbf{I} & iw_2 \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(w_0)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_1)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Na verdade, ao invés de fazermos uma inversão matricial, podemos resolver o sistema através de uma decomposição LU por blocos. A equação fica:

$$\mathbf{LU} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(w_0)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_1)^{-1} \\ \mathbf{H}(w_2)^{-1} \end{bmatrix},$$

para

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \frac{w_1^2}{w_0^2} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \frac{w_2^2}{w_0^2} \mathbf{I} & \frac{w_2(w_0-w_2)}{(w_0-w_1)w_1} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -w_0^2 \mathbf{I} & iw_0 \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & iw_1 \frac{w_0-w_1}{w_0} \mathbf{I} & \frac{w_0^2-w_1^2}{w_0^2} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \frac{(w_1-w_2)(w_0-w_2)}{w_0 w_1} \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

e então basta resolvermos dois sistemas triangulares, onde as matrizes que compõem as matrizes por bloco \mathbf{L} e \mathbf{U} são ou nulas ou diagonais, e então teremos a reconstrução completa das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

5 CONCLUSÕES

1. A solução dinâmica permite determinar a resposta no domínio tempo para sistemas vibratórios lineares não-conservativos com matrizes de rigidez e de amortecimento arbitrárias, com a única hipótese sendo que a matriz de massa seja inversível; já métodos modais e das funções matriciais são essencialmente limitados ao caso conservativo.
2. Com a formulação matricial dos problemas de vibrações aleatórias, surgem equações matriciais que nos revelam a matriz de resposta em frequência através de resultados experimentais, como a equação (3.19).
3. A utilização da solução dinâmica em problemas de vibrações aleatórias nos fornece relações diretas entre correlações de entrada e saída do sistema, assim como o uso da matriz de transferência nos dá relações explícitas entre densidades espectrais de entrada e saída do sistema.
4. A análise modal experimental com a utilização da matriz de resposta em frequência permite a reconstrução completa das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} . Já o uso da solução dinâmica não faz qualquer hipótese sobre os autovalores de (4.1), sendo, então, totalmente genérico.
5. Salientamos também que, na Seção 2.3, é dada uma fórmula alternativa para a inversão do polinômio $\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}$ que evita o cálculo dos autovalores do sistema (evitando, assim, a determinação da forma diagonal ou da forma canônica de Jordan).

BIBLIOGRAFIA

- [BAK 69] BAKARAT R, E. BAUMANN, Mth power of an $N \times N$ matrix and its connection with the generalized Lucas polynomials. *J. Math. Phys.*, Vol 10, 1969.
- [BEN 71] BENDAT, J., PIERSOL, A. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley-Interscience, 1971.
- [BRU 82] BRUSCHI M, RICCI P. E., An explicit formula for $f(A)$ and the generalized Lucas Polynomials. *SIAM J. Math Anal.*, Vol. 13, 1982.
- [CAN 95] CANAHUALPA, G., CLAEYSSSEN J.C.R., Numerical Integration of Damped Systems, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.
- [CLA 90a] CLAEYSSSEN, J.C.R. On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSSEN, J.C.R., TSUKAZAN, T. Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLVIII, N^o 1, 1990.
- [CLA 90c] CLAEYSSSEN, J.C.R., GALLICCHIO, E., VILHENA, M.T. Inversion of Higher Matrix Difference and Differential Equations through their Dynamical Solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 149(2): 369-376, July 1990.
- [CLA 95] CLAEYSSSEN, J.C.R., Time and Frequency Response, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.
- [GAL 87] GALLICCHIO, E. Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGM, Porto Alegre, 1987.

- [GAL 95] GALICCHIO, E. Vibration Analysis of a Bus Driver Model, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.
- [IBR 76] IBRAHIM, S.R., MIKWLICIK, E.C., The Experimental Determination of Vibration Parameters for Time Responses, *Shock and Vibration Bulletin*, n^o 46, 1976.
- [INM 89] INMAN, D. *Vibration with Control, Measurement and Stability*, Prentice Hall, 1989.
- [INM 94] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [JOH 65] JOHN, F. *Ordinary Differential Equations*. Notes of Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1965
- [LAV 75] LAVOIE, J. L., The mth power of an $n \times m$ matrix and the Bell polynomials, *SIAM J. App. Math*, Vol. 29, (3), 1975.
- [LEU 86] LEURIDAN, J.M., BROWN, D.L. and ALLEMANG, R.J. Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1986
- [MEI 75] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975
- [NEW 89] NEWLAND, D.E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical, London, 1989
- [NEW 93] NEWLAND, D.E. *Random Vibration, Spectral and Wavelet Analysis*., Longman Scientific & Technical, London, 1993
- [SES 93] SESTIERI, A., IBRAHIM S., Analysis of Errors and Approximations in the Use of Modal Coordinates, *Universita di Roma, "La Sapienza", Dipartimento di Meccanica*, 1993