

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo  
Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições  
de Contorno Não - Clássicas**

por

**Tânia Morelatto**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do  
Grau de Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre

Maio de 2000

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tânia Morelatto

Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não - Clássicas / Tânia Morelatto.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2000.

66 p.: il.

Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2000. Orientador: Ruiz, Teresa Tsukazan

Área: Engenharia Matemática e Matemática Industrial

Palavras chave: Euler-Bernoulli, Freqüências, Modos Não Clássicas, Base Espectral, Base Dinâmica

# **Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não - Clássicas**

por

**Tânia Morelato**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAP, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

**Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Engenharia Matemática e Matemática Industrial

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz

Aprovada por:

Prof. Dr. Jose Manuel Negron - UNISC

Prof. Dr. Julio Ruiz Claeysen - UFRGS

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha - UFRGS

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha

Coordenador do PPGMAP

Porto Alegre, maio de 2000

---

## **Agradecimentos**

À Prof<sup>ª</sup>. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz pela orientação e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Dr. German Ramon Canahualpa Suazo pela frutífera discussão durante a realização deste trabalho.

A todos os familiares pelo estímulo à realização do Curso no Programa de Pós-Graduação.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	iv
RESUMO . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
1 MODELAGEM . . . . .	3
1.1 Vibrações de uma Viga . . . . .	3
1.2 Condições Iniciais e de Contorno Não Clássicas . . . . .	6
2 FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO . . . . .	11
2.1 Ortogonalidade dos Modos de Vibração . . . . .	12
3 ESTUDO DA EQUAÇÃO $X^{(IV)} - \beta^4 X = 0$ . . . . .	15
3.1 Equação de Euler-Bernoulli . . . . .	15
3.2 A Abordagem Modal Matricial . . . . .	16
3.3 Base Espectral Clássica . . . . .	18
3.4 Base Dinâmica . . . . .	20
4 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS . . . . .	22
4.1 Viga de Molas Translacionais . . . . .	24
4.2 Viga de Molas Rotacionais . . . . .	27
4.3 Viga de Massas Inerciais . . . . .	30

4.4	Viga de Massas Atarrachadas . . . . .	33
4.5	Viga de Mola Translacional-Massa Atarrachada . . . . .	36
4.6	Viga de Mola Translacional-Massa Inercial . . . . .	39
4.7	Viga de Mola Translacional-Rotacional . . . . .	42
4.8	Viga de Mola Rotacional-Massa Inercial . . . . .	45
4.9	Viga de Mola Rotacional - Massa Atarrachada . . . . .	48
4.10	Viga de Massa Atarrachada-Massa Inercial . . . . .	51
5	VIBRAÇÕES FORÇADAS . . . . .	54
5.1	O Método Espectral . . . . .	54
5.2	Resultados Gráficos . . . . .	56
6	CONCLUSÕES . . . . .	63
	BIBLIOGRAFIA . . . . .	65

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	<i>Viga simples em vibração transversal e diagrama de corpo livre de um pequeno elemento da viga, quando deformada por uma força distribuída ao longo de uma unidade de comprimento, denotada por <math>f(t, x)</math></i> . . . . .	4
Figura 1.2	<i>Esquema das condições de molas translacionais</i> . . . . .	7
Figura 1.3	<i>Esquema das condições de molas rotacionais</i> . . . . .	8
Figura 1.4	<i>Esquema das condições de massa translacional</i> . . . . .	9
Figura 1.5	<i>Esquema das condições de inércia rotacional</i> . . . . .	10
Figura 4.1	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Molas Translacionais</i> .	26
Figura 4.2	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Molas Rotacionais</i> . .	29
Figura 4.3	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massas Inerciais</i> . . .	32
Figura 4.4	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massas Atarrachadas</i> .	35
Figura 4.5	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Massa Atarrachada</i> . . . . .	38
Figura 4.6	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Massa Inercial</i> . . . . .	41
Figura 4.7	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Rotacional</i> . . . . .	44
Figura 4.8	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Rotacional - Massa Inercial</i> . . . . .	47

Figura 4.9	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Rotacional - Massa Atarrachada . . . . .</i>	50
Figura 4.10	<i>Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massa Atarrachada - Massa Inercial . . . . .</i>	53
Figura 5.1	<i>Deslocamentos em 3D da Viga de Molas Translacionais e de Molas Rotacionais . . . . .</i>	58
Figura 5.2	<i>Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Inerciais e de Massas Atarrachadas . . . . .</i>	59
Figura 5.3	<i>Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Translacional-Massa Atarrachada e de Mola Translacional-Massa Inercial . . . . .</i>	60
Figura 5.4	<i>Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Translacional-Rotacional e de Mola Rotacional-Massa Inercial . . . . .</i>	61
Figura 5.5	<i>Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Rotacional-Massa Atarrachada e de Massa Atarrachada-Massa Inercial . . . . .</i>	62



**TÍTULO:** “CÁLCULO DE MODOS VIBRATÓRIOS NO MODELO ESTRUTURAL DE EULER-BERNOULLI COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO - CLÁSSICAS”

## **RESUMO**

O objetivo deste trabalho é a obtenção dos modos normais e das frequências naturais de vigas com condições de contorno não-clássicas, descritas pelo modelo estrutural de Euler-Bernoulli. Para a obtenção dos modos são consideradas duas bases, a base espectral clássica e a base dinâmica associada à resposta impulso do modelo. O deslocamento de uma viga sob ação de uma força periódica é obtido através da análise modal e apresentado de maneira gráfica para as diversas condições de contorno.

**TITLE:** "CALCULATION OF VIBRATION MODES IN THE STRUCTURAL EULER-BERNOULLI MODEL WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS"

## **ABSTRACT**

The objective of this work is the obtention of the normal modes and natural frequencies of beams with non-classical boundary conditions described by the structural Euler-Bernoulli model. For this, two basis are considered, a classical spectral basis and the dynamical basis associated with the impulse response of the model. The displacement of a beam under the action of a periodic force is obtained through modal analysis and presented graphically for such various boundary conditions.

# INTRODUÇÃO

O estudo das vibrações em vigas é muito importante no projeto de maquinária e estruturas. Esse assunto tem sido de grande interesse no mundo industrializado.

É reconhecido que para estas situações é necessária a análise das vibrações laterais ou torsionais para a obtenção das soluções. Basicamente, temos dois tipos de vibrações laterais em uma viga, livres ou forçadas. Na vibração livre de uma viga o movimento é oscilatório quando nenhuma força externa é aplicada, enquanto que no caso forçado a vibração da viga depende das forças externas.

Para entender os casos de vibrações forçadas de uma viga é necessário a compreensão prévia da vibração livre, tendo em vista a necessidade de resolver este caso que é mais complexo. Sabemos, no entanto, que a vibração lateral livre das vigas pode ocorrer com um número infinito de formas denominadas modos de vibração com uma frequência discreta associada.

A análise teórica tem mostrado que pequenas forças externas concentradas ou distribuídas de curta duração podem gerar vibrações de grande amplitude, quando são satisfeitas algumas condições. A condição mais importante é que as forças contenham frequências perto das frequências de vibração livre da viga. Nos casos específicos das forças concentradas, a força deve estar aplicada em diferentes pontos nodais da forma modal.

Em muitos problemas, nada pode ser feito para mudar a natureza das forças dirigidas, no entanto, com fim de minimizar a resposta da vibração altera-se a configuração do sistema da viga onde possível. Assim as frequências livres de vibração são removidas daquelas avaliadas nas forças dirigidas, permitindo que se avaliem as formas e frequências dos modos para qualquer sistema de viga.

O método mais comum utilizado para obter soluções para o problema de vibração livre das vigas, quando possível, é resolver a equação diferencial da viga que expressa o equilíbrio entre as forças de inércia e forças elásticas associadas com condições de contorno.

Neste trabalho estudamos a obtenção dos modos relativos às vibrações transversais de vigas finas e longas, descritas pela equação de Euler-Bernoulli com condições iniciais no tempo  $t = 0$ , para o deslocamento  $u(t, x)$  e para a velocidade  $u_t(t, x)$ , e quatro condições de contorno não clássicas, que correspondem a reações restritivas lineares associadas a elementos elásticos e inerciais.

No capítulo 1 é dada a dedução e descrição do modelo matemático correspondente a uma viga longa e fina, através das equações de Euler-Bernoulli.

No capítulo 2 é considerada a simetria do operador diferencial e a ortogonalidade dos modos de vibração.

No capítulo 3 estuda-se a equação diferencial ordinária  $X^{(iv)} - \beta^4 X(x) = 0$  com as condições de contorno que se apresentam nos diversos tipos de vigas. Verifica-se matricialmente as correspondentes equações modais.

No capítulo 4 são obtidos os resultados algébricos e os modos vibratórios das vigas.

No capítulo 5 apresentamos o uso dos modos de um problema relativo a uma viga de seção transversal constante, sob a aplicação de uma força normal.

E, por último, apresentam-se as conclusões pertinentes.

# 1 MODELAGEM

No modelo de Euler-Bernoulli, são desprezados cisalhamento e a inércia de rotação. Para deduzir o modelo de Euler, supomos que as seções transversais planas permanecem sempre planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após a deflexão, levando em consideração que, para altas frequências, este modelo não fornece bons resultados. As dimensões da seção transversal da viga são pequenas em comparação com o seu comprimento.

## 1.1 Vibrações de uma Viga

Neste trabalho, consideramos apenas as *vibrações transversais* ou *vibrações flexurais*, denominadas assim, por ocorrerem transversalmente ao comprimento da viga. A vibração transversal é facilmente sentida pelos seres humanos, por exemplo, quando caminham sobre uma ponte. O estudo das vibrações em vigas é de muita importância no projeto de maquinárias e estruturas. A derivação da equação do movimento é feita a seguir.

As grandezas físicas levadas em conta são a massa distribuída ao longo do eixo  $x$ ,  $\rho A(x)$ , sendo  $\rho$  a massa específica do material e  $A(x)$  a área da seção transversal retangular, com largura  $h_y$  e espessura  $h_z$ ; a deflexão,  $u(t, x)$ , que está na direção  $y$ ; e a força cortante,  $V(t, x)$ , devido a uma deformação por cisalhamento suficientemente pequena muito menor do que  $u(t, x)$  (isto é, assim que os lados do elemento  $dx$  não se curvam), conforme mostra a figura 1.1.

A superposição de forças na direção  $y$  produz

$$\left( V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right) - V(t, x) + dx f(t, x) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

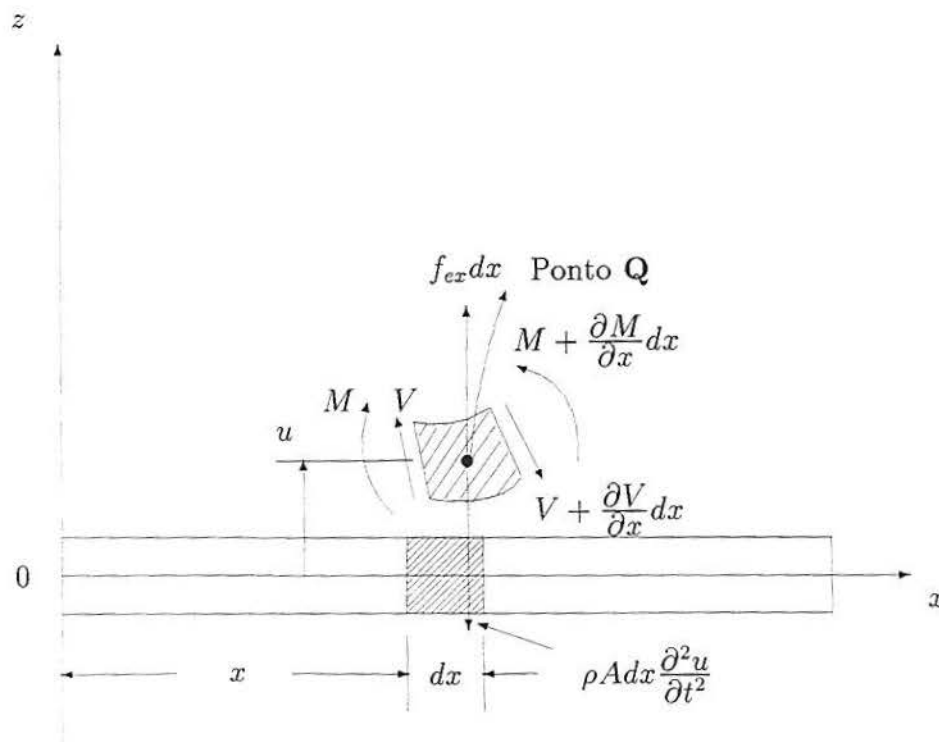


Figura 1.1 *Viga simples em vibração transversal e diagrama de corpo livre de um pequeno elemento da viga, quando deformada por uma força distribuída ao longo de uma unidade de comprimento, denotada por  $f(t, x)$*

onde a força  $V(t, x + dx)$  foi aproximada pelo seu polinômio de Taylor de primeiro grau ( $t$  fixo) e  $dx f(t, x)$  é a força total externa aplicada no elemento por unidade de comprimento. A aproximação é válida para  $\frac{L}{h_z} \geq 10$  e  $\frac{L}{h_y} \geq 10$ , onde  $L$  é o comprimento da viga (isto é, para uma viga longa e fina).

Assumindo a inércia de rotação do elemento  $dx$  ao redor do ponto  $Q$  com respeito do eixo  $z$ , obtemos

$$\left[ M(t, x) + \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} dx \right] - M(t, x) + \left[ V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right] + [f(t, x) dx] \frac{dx}{2} = 0. \tag{1.2}$$

Simplificando (1.2) obtem-se

$$\left[ \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} + V(t, x) \right] dx + \left[ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{f(t, x)}{2} \right] (dx)^2 = 0. \quad (1.3)$$

Assim, na primeira aproximação, considera-se que os termos em  $dx$  são zero, ou seja,

$$V(t, x) = -\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}; \quad (1.4)$$

isto significa que a força cortante é proporcional à variação espacial no momento fletor. Substituindo (1.4) na equação (1.1) temos que

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(t, x)] dx + f(t, x) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} dx. \quad (1.5)$$

Da mecânica dos materiais, a viga sustenta um momento fletor que está relacionado à deflexão da viga, ou deformação fletora,  $u(t, x)$ , por

$$M(t, x) = EI(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

onde  $EI(x)$  é a rigidez flexural, sendo  $E$  o módulo de elasticidade de Young para a viga e  $I(x)$ , o momento de inércia respeito do eixo  $z$ .

Além disso, substituindo a equação (1.6) em (1.5) e dividindo por  $dx$  obtemos a equação de Euler-Bernoulli

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right] = f(t, x). \quad (1.7)$$

Se  $EI(x)$  e  $A(x)$  são assumidas constantes, a equação (1.7) pode ser simplificada para

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x). \quad (1.8)$$

## 1.2 Condições Iniciais e de Contorno Não Clássicas

Para a resolução da equação (1.8) são necessárias duas condições iniciais no tempo  $t = 0$ , para o deslocamento  $u(t, x)$  e a velocidade  $u_t(t, x)$ , e quatro condições de contorno, envolvendo o deslocamento  $u(t, x)$ , a declividade  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , o momento fletor  $EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  e a força de cisalhamento  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ .

Na literatura, usualmente, encontramos as condições de contorno de tipo fixa, apoiada, deslizante e livre, denominadas *clássicas*, que não serão consideradas neste trabalho.

Aqui serão abordadas as condições de contorno que correspondem a reações restritivas lineares associadas a elementos elásticos e inerciais. Estas condições podem ocorrer sozinhas ou em conjunto com as outras. As condições de contorno associadas a estas reações restritivas consistem basicamente de quatro tipos:

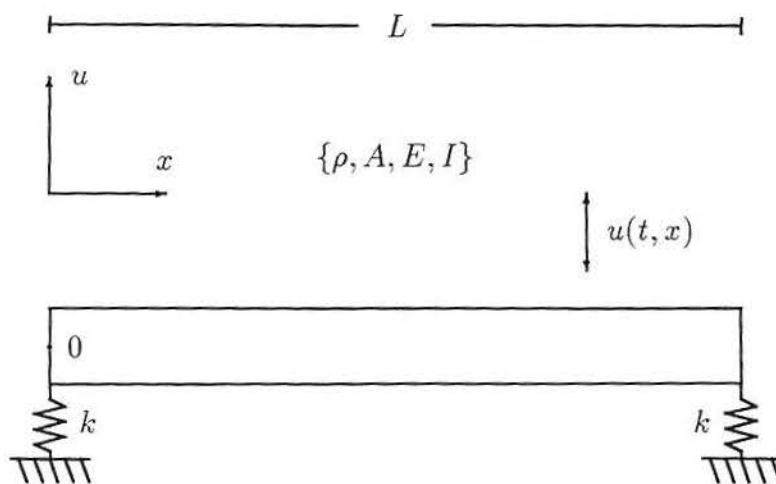
1. Uma *restrição elástica de transição* corresponde a uma força de reação da mola que é igual à força de cisalhamento, como se mostra na figura 1.2. No lado esquerdo:

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = -ku(t, 0) \quad (1.9)$$



No lado direito

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, L) = ku(t, L) \tag{1.10}$$



0: origem

Figura 1.2 Esquema das condições de molas translacionais

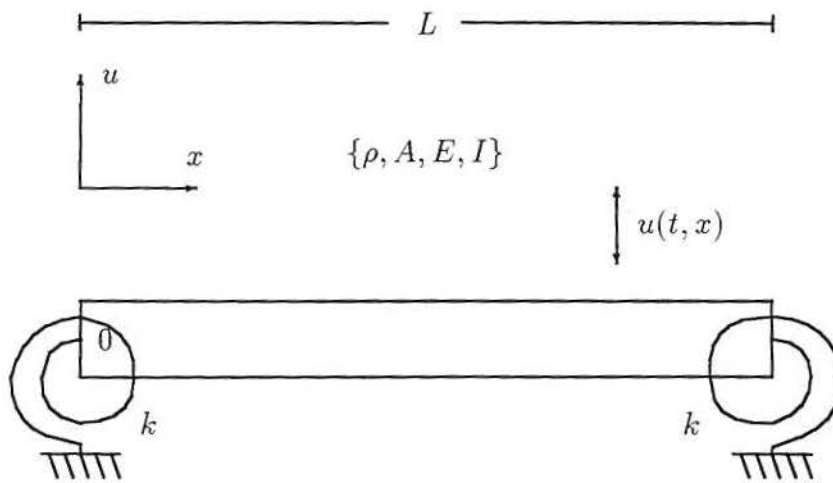
É visto que as condições anteriores diferem em sinal nos extremos opostos da viga. Notamos também que as condições (1.9) e (1.10) devem ser aumentadas por uma condição em cada extremo, pois são requeridas duas em cada extremo. Neste caso, a segunda condição é o momento fletor zero.

2. A restrição elástica rotacional corresponde a um momento de reação da mola que é igual ao momento fletor, como se mostra na figura 1.3. No lado esquerdo:

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = k \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \tag{1.11}$$

No lado direito:

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, L) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) \tag{1.12}$$



0: origem

Figura 1.3 Esquema das condições de molas rotacionais

Como no outro caso, os sinais diferem e mais uma condição é requerida para cada extremo.

3. A restrição da inércia translacional corresponde à força de inércia associada com a aceleração de um corpo rígido ou partícula de massa  $m_c$  fixada no extremo da viga. Essa força é igual à força de cisalhamento. No lado esquerdo

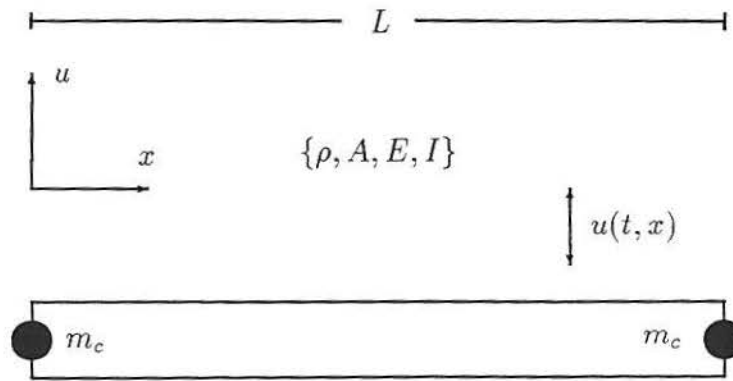
$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = -m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, 0) \quad (1.13)$$

No lado direito:

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, L) = m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, L) \quad (1.14)$$

As condições acima devem ser aumentadas por uma condição em cada extremo, pois são requeridas duas em cada extremo. Neste caso pode ser o momento fletor zero.

4. A restrição de inércia rotacional corresponde ao momento de reação inercial associado com a aceleração rotacional de corpo rígido em cada



0: origem

Figura 1.4 Esquema das condições de massa translacional

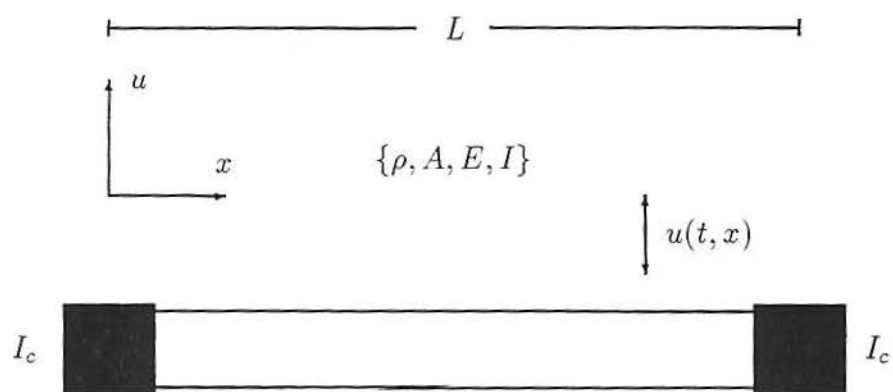
extremo da viga. Este momento é igual ao momento fletor. No lado esquerdo:

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = I_c \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}(t, 0) \quad (1.15)$$

No lado direito:

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, L) = -I_c \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}(t, L) \quad (1.16)$$

Notamos aqui, que quando a massa fixada é idealizada como uma partícula, então  $I_c = 0$ ; e a condição do momento reduz-se à mesma da massa translacional, isto é, o momento fletor é zero.



0: origem

Figura 1.5 Esquema das condições de inércia rotacional

## 2 FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO

A ortogonalidade dos modos permite utilizar o método espectral de Fourier para determinar movimentos sujeitos a variadas condições de contorno. Introduziremos os conceitos de *modos e frequências de vibração*, em vigas sem carga. Os modos estão associados a estados de deflexão possíveis diante das condições de contorno.

Quando nenhuma força externa é aplicada isto é,  $f(t, x) = 0$ , as vibrações livres são geradas pela equação

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = 0. \quad (2.1)$$

Para esta equação, a procura de soluções de (2.1) do tipo oscilatório  $u(t, x) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)X(x)$ , com  $X(x)$  uma função não identicamente nula, equivale a resolver

$$EIX^{(iv)}(x) - \omega^2 \rho AX(x) = 0 \quad (2.2)$$

ou

$$(-\omega^2 I + K) X(x) = 0, \quad X \neq 0, \quad (2.3)$$

onde  $K$  é um operador, isto é, atua sobre um domínio de funções reais, definidas no intervalo espacial  $[0, L]$ , que são quatro vezes diferenciáveis e é dado por

$$K(X(x)) = \frac{EI}{\rho A} X^{(iv)}(x). \quad (2.4)$$

Sob a hipótese de que  $X(x)$  satisfaz determinadas condições nos extremos da viga, o valor  $\omega$  será referido como *frequência característica* e  $X(x)$  como a *autofunção* ou

o modo associado com  $\omega$ . Por simplicidade, escreveremos a equação (2.3) como

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (2.5)$$

onde  $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}$  são os autovalores da equação (2.5).

Posteriormente, deveremos lembrar que a frequência característica  $\omega$  está dada por

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (2.6)$$

## 2.1 Ortogonalidade dos Modos de Vibração

Demonstraremos que as formas modais de uma viga satisfazem a condição de ortogonalidade, isto é, temos a igualdade

$$\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx = 0, \text{ para } i \neq j.$$

Denotaremos por  $\omega_i$  e  $\omega_j$  duas frequências naturais distintas com correspondentes formas modais  $X_i$  e  $X_j$ .

Demonstraremos a ortogonalidade para o caso de molas translacionais. O problema satisfeito pelas frequências naturais e as formas modais é

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} - \beta_i^4 X_i = 0 \quad (2.7)$$

com as condições de contorno

$$EI\omega_i^3 \frac{d^3 X_i}{dx^3}(0) = -kX_i(0), \quad \frac{d^2 X_i}{dx^2}(0) = 0, \quad EI\omega_i^3 \frac{d^3 X_i}{dx^3}(L) = -kX_i(L), \quad \frac{d^2 X_i}{dx^2}(L) = 0 \quad (2.8)$$

e

$$EI\omega_j^3 \frac{d^3 X_j}{dx^3}(0) = -kX_j(0), \quad \frac{d^2 X_i}{dx^2}(0) = 0, \quad EI\omega_j^3 \frac{d^3 X_j}{dx^3}(L) = -kX_j(L), \quad \frac{d^2 X_i}{dx^2}(0) = 0. \quad (2.9)$$

Multiplicando a equação (2.7) por  $X_j$  e integrando de 0 a  $L$  conduz para

$$\int_0^L X_j(x) \frac{d^4 X_i(x)}{dx^4} dx - \beta_i^4 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0$$

Utilizando a integração por partes quatro vezes, a primeira integral, temos

$$\begin{aligned} & X_j(L) \frac{d^3 X_i(L)}{dx^3} - X_j(0) \frac{d^3 X_i(0)}{dx^3} - \frac{dX_j(L)}{dx} \frac{d^2 X_i(L)}{dx^2} \\ & + \frac{dX_j(0)}{dx} \frac{d^2 X_i(0)}{dx^2} + \frac{d^2 X_j(L)}{dx^2} \frac{dX_i(L)}{dx} - \frac{d^2 X_j(0)}{dx^2} \frac{dX_i(0)}{dx} \\ & - \frac{d^3 X_j(L)}{dx^3} X_i(L) + \frac{d^3 X_j(0)}{dx^3} X_i(0) + \int_0^L X_i(x) \frac{d^4 X_j(x)}{dx^4} dx \\ & - \beta_i^4 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde, após a substituição das condições de contorno (2.8) e (2.9) obtemos

$$(\beta_j^4 - \beta_i^4) \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0. \quad (2.11)$$

A ortogonalidade dos modos, junto com a condição inicial, permite determinar  $A_n$  e  $B_n$  na solução em série de Fourier, para um deslocamento arbitrário, na forma real

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t] X_n(x). \quad (2.12)$$

Mais precisamente,

$$A_n = \frac{\int_0^L u_0(x) X_n(x)}{\int_0^L X_n^2(x) dx}$$

e

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{\int_0^L \dot{u}_0(x) X_n(x)}{\int_0^L X_n^2(x) dx},$$

sendo  $u_0(x) = u(0, x)$  e  $\dot{u}_0(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$ .



### 3 ESTUDO DA EQUAÇÃO $X^{(IV)} - \beta^4 X = 0$

Neste capítulo, obtemos os modos relativos às vibrações transversais de vigas longas e finas, descritas pela equação de Euler-Bernoulli. São consideradas duas bases: a base espectral clássica, obtida a partir das raízes da equação característica, associada com a equação diferencial ordinária linear de quarta ordem e a base dinâmica, obtida a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas.

#### 3.1 Equação de Euler-Bernoulli

Podemos escrever a equação de Euler-Bernoulli com parâmetros constantes da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{K}u = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{K}$  é o operador de quarta ordem

$$\mathcal{K} = c^2 \frac{d^4}{dx^4} \text{ e } c^2 = \frac{EI}{\rho A}.$$

Para esta equação, a procura de soluções é do tipo  $u(t, x) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)X(x)$  equivale a resolver

$$EIX^{(iv)}(x) - \omega^2 \rho AX(x) = 0 \quad (3.2)$$

ou

$$(-\omega^2 \mathcal{I} + \mathcal{K})X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (3.3)$$

Por simplicidade, escrevemos (3.2) como

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (3.4)$$

onde  $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}$ , sendo  $w$  a frequência característica.

### 3.2 A Abordagem Modal Matricial

As condições de contorno consideradas aqui podem ser escritas de maneira geral como

$$\left. \begin{aligned} A_{11}X + B_{11}X' + C_{11}X'' + D_{11}X''' = 0 \\ A_{12}X + B_{12}X' + C_{12}X'' + D_{12}X''' = 0 \end{aligned} \right\} \text{em } x = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\left. \begin{aligned} A_{21}X + B_{21}X' + C_{21}X'' + D_{21}X''' = 0 \\ A_{22}X + B_{22}X' + C_{22}X'' + D_{22}X''' = 0 \end{aligned} \right\} \text{em } x = L. \quad (3.6)$$

A solução da equação linear homogênea  $X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0$  é dada por

$$X = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 = \Phi \mathbf{c}, \quad (3.7)$$

onde  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$  é uma base de soluções, e

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4], \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo (3.7) em (3.5) e (3.6), temos que, para  $x = 0$

$$A_{11}\Phi(0)\mathbf{c} + B_{11}\Phi'(0)\mathbf{c} + C_{11}\Phi''(0)\mathbf{c} + D_{11}\Phi'''(0)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$A_{12}\Phi(0)\mathbf{c} + B_{12}\Phi'(0)\mathbf{c} + C_{12}\Phi''(0)\mathbf{c} + D_{12}\Phi'''(0)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

e para  $x = L$

$$A_{21}\Phi(L)\mathbf{c} + B_{21}\Phi'(L)\mathbf{c} + C_{21}\Phi''(L)\mathbf{c} + D_{21}\Phi'''(L)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$A_{22}\Phi(L)\mathbf{c} + B_{22}\Phi'(L)\mathbf{c} + C_{22}\Phi''(L)\mathbf{c} + D_{22}\Phi'''(L)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

As quatro igualdades anteriores podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

ou

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

De maneira compacta, temos a equação matricial em  $\mathbf{c}$

$$\boxed{(\mathcal{B}\Phi)\mathbf{c} = \mathbf{0}} \tag{3.10}$$

onde

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Base Espectral Clássica

A equação característica da equação diferencial linear ordinária

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0$$

é dada por

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0.$$

Esta equação possui as raízes

$$\lambda_1 = \beta, \quad \lambda_2 = -\beta, \quad \lambda_3 = \beta i, \quad \lambda_4 = -\beta i.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$X(x) = c_1 \text{sen}(\beta x) + c_2 \text{cos}(\beta x) + c_3 \text{senh}(\beta x) + c_4 \text{cosh}(\beta x).$$

As funções da base espectral clássica são escolhidas como

$$\begin{aligned} \phi_1(x; \beta) &= \text{sen}(\beta x), & \phi_2(x; \beta) &= \text{cos}(\beta x), \\ \phi_3(x; \beta) &= \text{senh}(\beta x), & \phi_4(x; \beta) &= \text{cosh}(\beta x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Substituindo as funções envolvidas (3.11) e suas derivadas, em (3.9), decorre que

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ -\beta^3 & 0 & \beta^3 & 0 \\ \text{sen}(\beta L) & \text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ \beta \text{cos}(\beta L) & -\beta \text{sen}(\beta L) & \beta \text{cosh}(\beta L) & \beta \text{senh}(\beta L) \\ -\beta^2 \text{sen}(\beta L) & -\beta^2 \text{cos}(\beta L) & \beta^2 \text{senh}(\beta L) & \beta^2 \text{cosh}(\beta L) \\ -\beta^3 \text{cos}(\beta L) & \beta^3 \text{sen}(\beta L) & \beta^3 \text{cosh}(\beta L) & \beta^3 \text{senh}(\beta L) \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

### 3.4 Base Dinâmica

A solução de

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0$$

pode ser escrita em termos da base dinâmica como

$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x),$$

onde

$$h^{(iv)}(x) - \beta^4 h(x) = 0 \tag{3.13}$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1.$$

Aqui a solução  $h(x)$  é definida como a *resposta impulso* ou a *solução dinâmica*. Como o wronskiano de  $h(x)$  e suas derivadas até terceira ordem é não-nulo, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^4 h(0) \\ 0 & 1 & \beta^4 h(0) & \beta^4 h'(0) \\ 1 & \beta^4 h(0) & \beta^4 h'(0) & \beta^4 h''(0) \end{bmatrix} = 1,$$

temos que  $\{h, h', h'', h'''\}$  constitui uma base de soluções.

Para calcular  $h(x)$ , utiliza-se a transformada de Laplace, i.e., escrevemos

$$(s^4 - \beta^4)H(s) = 1$$

onde  $H(s) = \mathcal{L}(h(x))$ .

Assim

$$h(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{s^4 - \beta^4} \right)$$

e utilizando frações parciais

$$\frac{1}{s^4 - \beta^4} = \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{s^2 - \beta^2} - \frac{1}{s^2 + \beta^2} \right]$$

obtem-se

$$h(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)}{\beta^3} \right].$$

Portanto, a base dinâmica fica estabelecida como

$$\Psi_1(x; \beta) = h(x; \beta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)}{\beta^3} \right],$$

$$\Psi_2(x; \beta) = h'(x; \beta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)}{\beta^2} \right],$$

$$\Psi_3(x; \beta) = h''(x; \beta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)}{\beta} \right],$$

$$\Psi_4(x; \beta) = h'''(x; \beta) = \frac{1}{2} [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)],$$

e escrevemos a matriz  $\Phi$  para a base considerada,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\sinh(\beta L)}{\beta^3} & \frac{-\frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L)}{\beta^2} & \frac{\frac{1}{2}\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\sinh(\beta L)}{\beta} & \frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L) \\ \frac{-\frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L)}{\beta^2} & \frac{\frac{1}{2}\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\sinh(\beta L)}{\beta} & \frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L) & -\frac{1}{2}\beta\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\beta\sinh(\beta L) \\ \frac{\frac{1}{2}\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\sinh(\beta L)}{\beta} & \frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L) & -\frac{1}{2}\beta\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\beta\sinh(\beta L) & -\frac{1}{2}\beta^2\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\beta^2\cosh(\beta L) \\ \frac{1}{2}\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\cosh(\beta L) & -\frac{1}{2}\beta\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\beta\sinh(\beta L) & -\frac{1}{2}\beta^2\cos(\beta L) + \frac{1}{2}\beta^2\cosh(\beta L) & \frac{1}{2}\beta^3\sin(\beta L) + \frac{1}{2}\beta^3\sinh(\beta L) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

## 4 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS

A equação da vibração transversal de uma viga sem carga e com parâmetros físicos constantes, segundo o modelo de Euler-Bernoulli, é dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = 0, \quad (4.1)$$

sendo que  $E$  é o módulo de Young,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga com relação a seu eixo neutral,  $\rho$  é a massa específica da viga e  $A$  é a área da seção transversal da viga.

Para cada vibração modal,  $u(t, x) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x)$  tem-se que  $X(x)$  satisfaz

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (4.2)$$

onde  $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}$ .

Neste capítulo, os modos  $X(x)$  serão obtidos para as condições de contorno usualmente encontradas em aeroelasticidade.

Serão consideradas duas bases:

**Base clássica:**

$$\begin{aligned} \phi_1(x; \beta) &= \sin(\beta x), & \phi_2(x; \beta) &= \cos(\beta x), \\ \phi_3(x; \beta) &= \sinh(\beta x), & \phi_4(x; \beta) &= \cosh(\beta x). \end{aligned}$$

**Base dinâmica:** Formada pela resposta-impulso (ou solução dinâmica),  $h(x)$ , que é a solução da equação  $X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0$  junto com as condições iniciais  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ ,  $h''(0) = 0$ ,  $h'''(0) = 1$ , e suas derivadas até terceira ordem.



Denotando

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x; \beta) &= h(x; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[-\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)]}{\beta^3}, \\
 \Psi_2(x; \beta) &= h'(x; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[-\text{cos}(\beta x) + \text{cosh}(\beta x)]}{\beta^2}, \\
 \Psi_3(x; \beta) &= h''(x; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)]}{\beta}, \\
 \Psi_4(x; \beta) &= h'''(x; \beta) = \frac{1}{2} [\text{cos}(\beta x) + \text{cosh}(\beta x)],
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para distinguir o uso da base, utilizamos os índices:  $C$  para o caso clássico e  $D$  para o caso dinâmico. Também introduzimos a matriz

$$\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi, \tag{4.4}$$

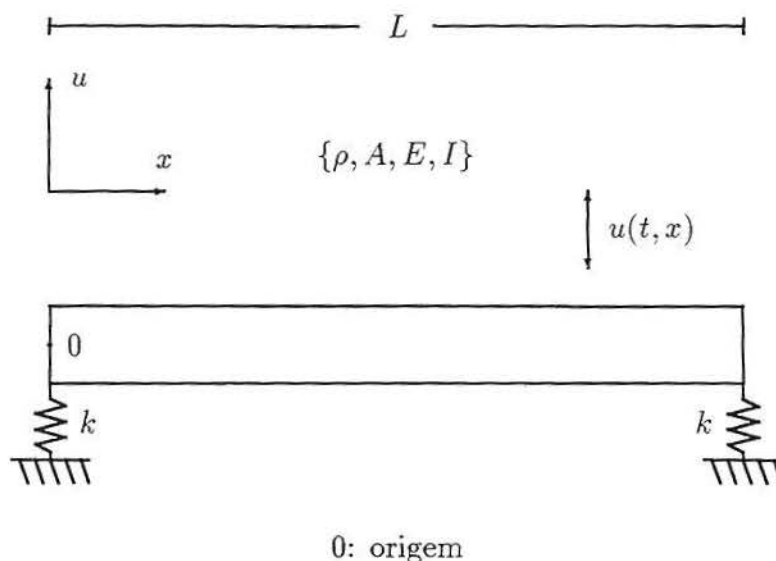
que incorpora os valores associados às condições de contorno.

O cálculo foi realizado de maneira simbólica com o auxílio do “software” MAPLE V Release 5. Foi calculado o determinante da matriz  $\mathcal{U}$ , para obter a equação característica e realizada uma decomposição LU da matriz  $\mathcal{U}$ .

Os valores utilizados dos parâmetros foram

$$\begin{aligned}
 L &= 1 \text{ m}, \\
 EI &= 8000, \text{ N m}, \\
 \rho A &= 3000, \text{ Kg m}, \\
 k_m &= 1000, \\
 k_r &= 1000, \\
 I_c &= 0.1, \\
 m_c &= 100, \text{ Kg}.
 \end{aligned}$$

### 4.1 Viga de Molas Translacionais



Neste caso, os deslocamentos, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned}
 u_{xx}(t, 0) = 0, \quad k_m u(t, 0) + EI u_{xxx}(t, 0) = 0, \\
 u_{xx}(t, L) = 0, \quad k_m u(t, L) - EI u_{xxx}(t, L) = 0,
 \end{aligned}$$

onde  $k_m$  é a rigidez translacional da mola.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned}
 X''(0) = 0, \quad k_m X(0) + EIX'''(0) = 0, \\
 X''(L) = 0, \quad k_m X(L) - EIX'''(L) = 0,
 \end{aligned}$$

#### Equação Característica

$$\begin{aligned}
 -E^2 I^2 \beta^6 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] - 2 EI \beta^3 k_m [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \text{sen}(\beta L) \cosh(\beta L)] \\
 - 2 k_m^2 \text{sen}(\beta L) \text{senh}(\beta L) = 0
 \end{aligned}$$

## Autovalores

Autovalores	0.7067387993	0.9305356184	4.732402302	7.8537200833	10.99579590
Frequências	0.8156469843	1.414003124	36.57191318	100.7245384	197.4411656

## Modos

Clássico	
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)$	
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n^3(\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L))}{-EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L) + 2\beta_n k_m \sin(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}$	
$\sigma_{n,2}^C = \frac{2\beta_n m \sinh(\beta_n L) - EI\beta_n^3 \cosh(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}{-EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L) + 2\beta_n k_m \sin(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}$	
Dinâmico	
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_1(x; \beta_n)$	
$\sigma_{n,1}^D = -\frac{-EI\beta_n k_m \cos(\beta_n L) + EI\beta_n^4 \cosh(\beta_n L) - \beta_n k_m \sin(\beta_n L) - \beta_n k_m \sinh(\beta_n L)}{\beta_n^3 k_m (\sin(\beta_n L) - \sinh(\beta_n L))}$	
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{EI}{\beta_n k_m}$	

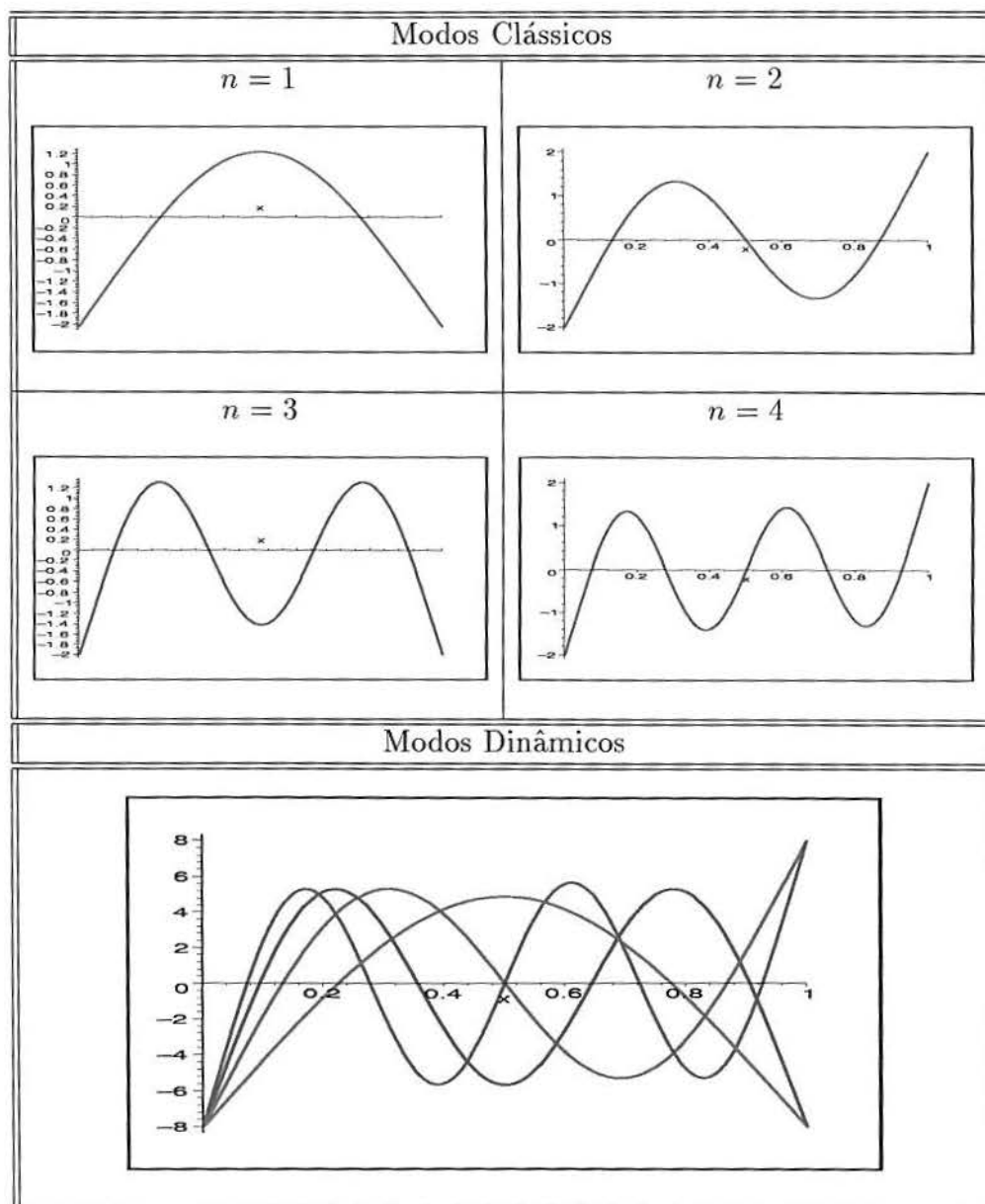
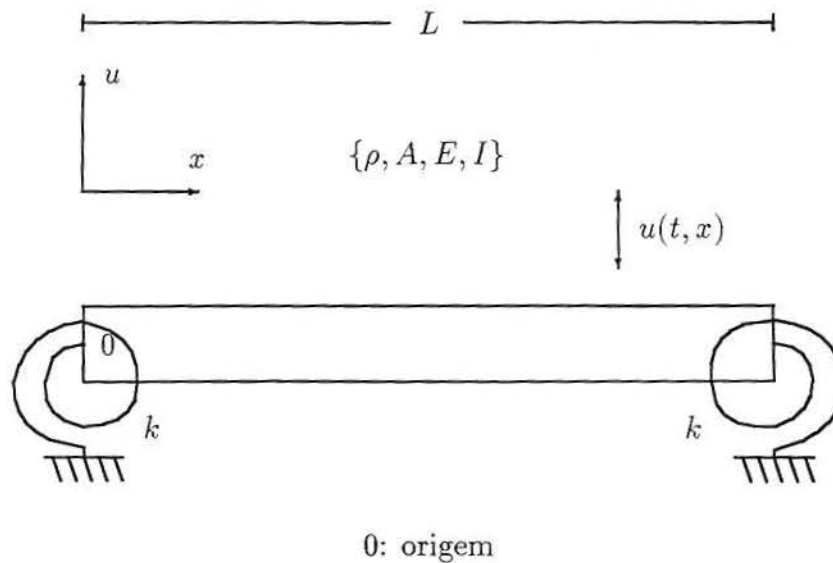


Figura 4.1 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Molas Translacionais

## 4.2 Viga de Molas Rotacionais



Neste caso, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xxx}(t, 0) = 0, \quad k_r u_x(t, 0) - EI u_{xx}(t, 0) = 0, \\ u_{xxx}(t, L) = 0, \quad k_r u_x(t, L) + EI u_{xx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $k_r$  é a rigidez rotacional da mola.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X'''(0) = 0, \quad k_r X'(0) - EIX''(0) = 0, \\ X'''(L) = 0, \quad k_r X'(L) + EIX''(L) = 0, \end{aligned}$$

### Equação Característica

$$\begin{aligned} -\beta^2 E^2 I^2 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] + 2k_r^2 \sin(\beta L) \sinh(\beta L) \\ + 2\beta k_r EI [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] = 0 \end{aligned}$$

## Autovalores

Autovalores	1.306267171	4.779301156	7.884462584	11.01804094	14.15467250
Frequências	2.786431627	37.30037182	101.5146121	198.2408403	327.1779426

## Modos

Clássico	
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_1(x; \beta_n) - \Phi_3(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)$	
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n(\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L))}{EI\beta_n(\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)) + 2\beta_n k_r \sin(\beta_n L)}$	
$\sigma_{n,2}^C = \frac{EI\beta_n(\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)) - 2\beta_n k_r \sinh(\beta_n L)}{EI\beta_n(\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)) + 2\beta_n k_r \sin(\beta_n L)}$	
Dinâmico	
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_2(x; \beta_n)$	
$\sigma_{n,1}^D = \frac{EI}{\beta_n k_r}$	
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{-EI\beta_n k_r(\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)) + \beta_n k_r \sinh(\beta_n L) - \beta_n \sin(\beta_n L)}{\beta_n^2 \sin(\beta_n L) + \beta_n k_r \sinh(\beta_n L)}$	

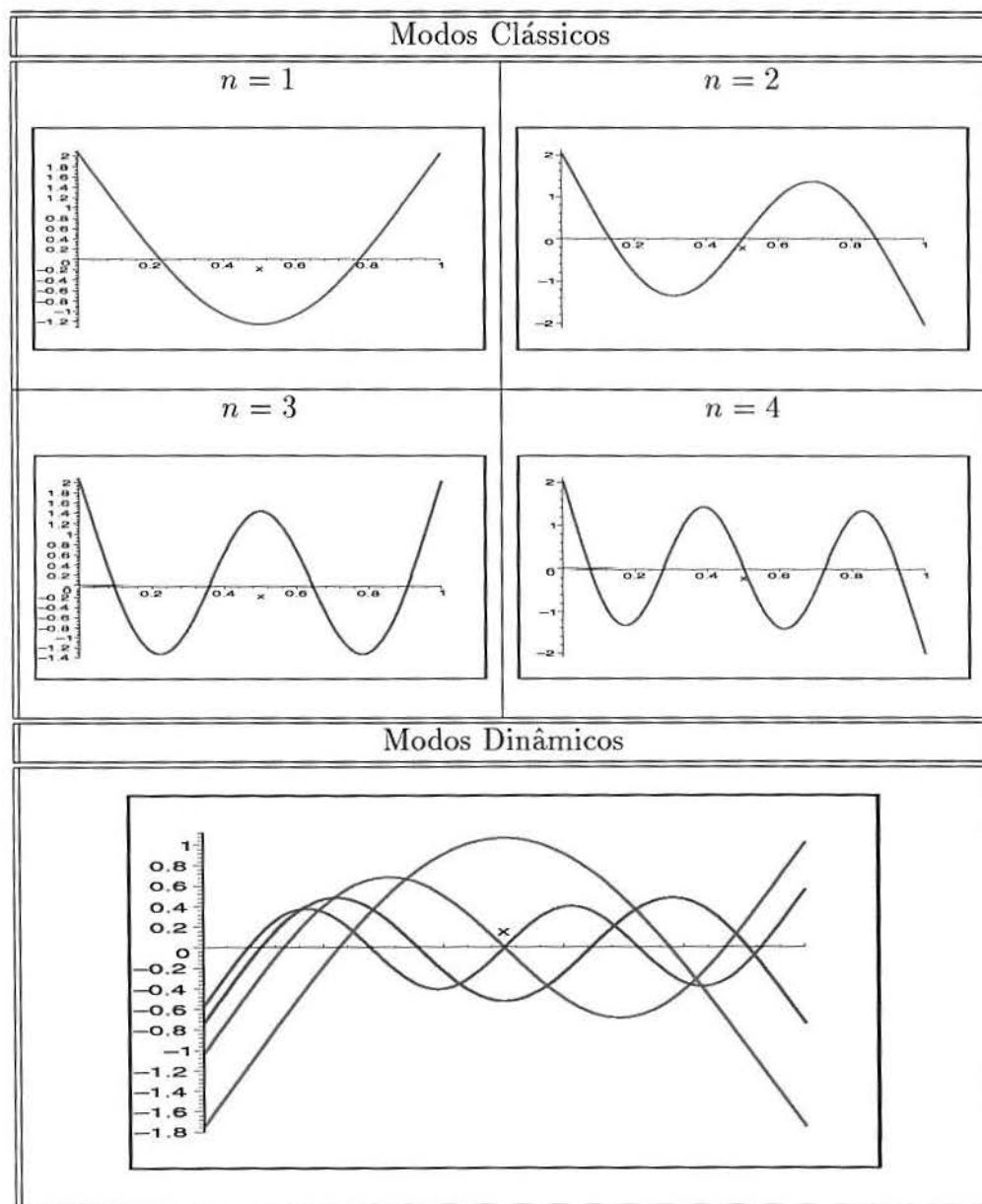
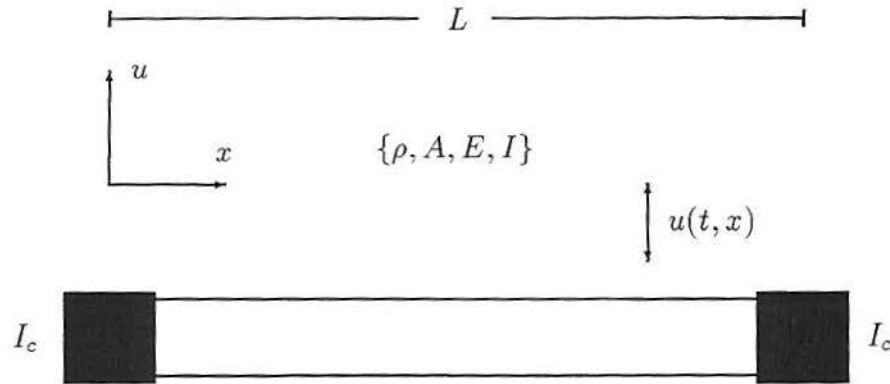


Figura 4.2 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Molas Rotacionais

### 4.3 Viga de Massas Inerciais



0: origem

Neste caso, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xxx}(t, 0) = 0, \quad I_c u_{ttt}(t, 0) - EI u_{xx}(t, 0) = 0, \\ u_{xxx}(t, L) = 0, \quad I_c u_{ttt}(t, L) + EI u_{xx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $I_c$  é a inércia rotacional.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X'''(0) = 0, \quad \frac{I_c \beta^4}{\rho A} X'(0) + X''(0) = 0, \\ X'''(L) = 0, \quad \frac{I_c \beta^4}{\rho A} X'(L) - X''(L) = 0, \end{aligned}$$

#### Equação Característica

$$\begin{aligned} -\rho^2 A^2 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] + 2 I_c^2 \beta^6 \text{sen}(\beta L) \text{senh}(\beta L) \\ - 2 \rho A I_c \beta^3 [\text{sen}(\beta L) \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \text{senh}(\beta L)] = 0 \end{aligned}$$



## Autovalores

Autovalores	4.723237091	7.820749152	10.90530762	13.93932762	16.89987979
Frequências	36.43039321	99.88058531	194.2049109	317.2984987	466.3925420

## Modos

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C \Phi_2(x; \beta_n) + \sigma_{n,2}^C \Phi_4(x; \beta_n) + \Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{-\rho A \cosh(\beta_n L) + \rho A \cos(\beta_n L) + 2I_c \beta_n^3 \sinh(\beta_n L)}{\rho A (\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L))}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{-\rho A \cosh(\beta_n L) + \rho A \cos(\beta_n L) - 2I_c \beta_n^3 \sinh(\beta_n L)}{\rho A (\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L))}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_2(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_3(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = -\frac{I_c \beta_n^4}{\rho A}$
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{I_c \beta_n^3 [\sin(\beta_n L) - \sinh(\beta_n L)] - \rho A [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}{\beta_n \rho A [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)]}$

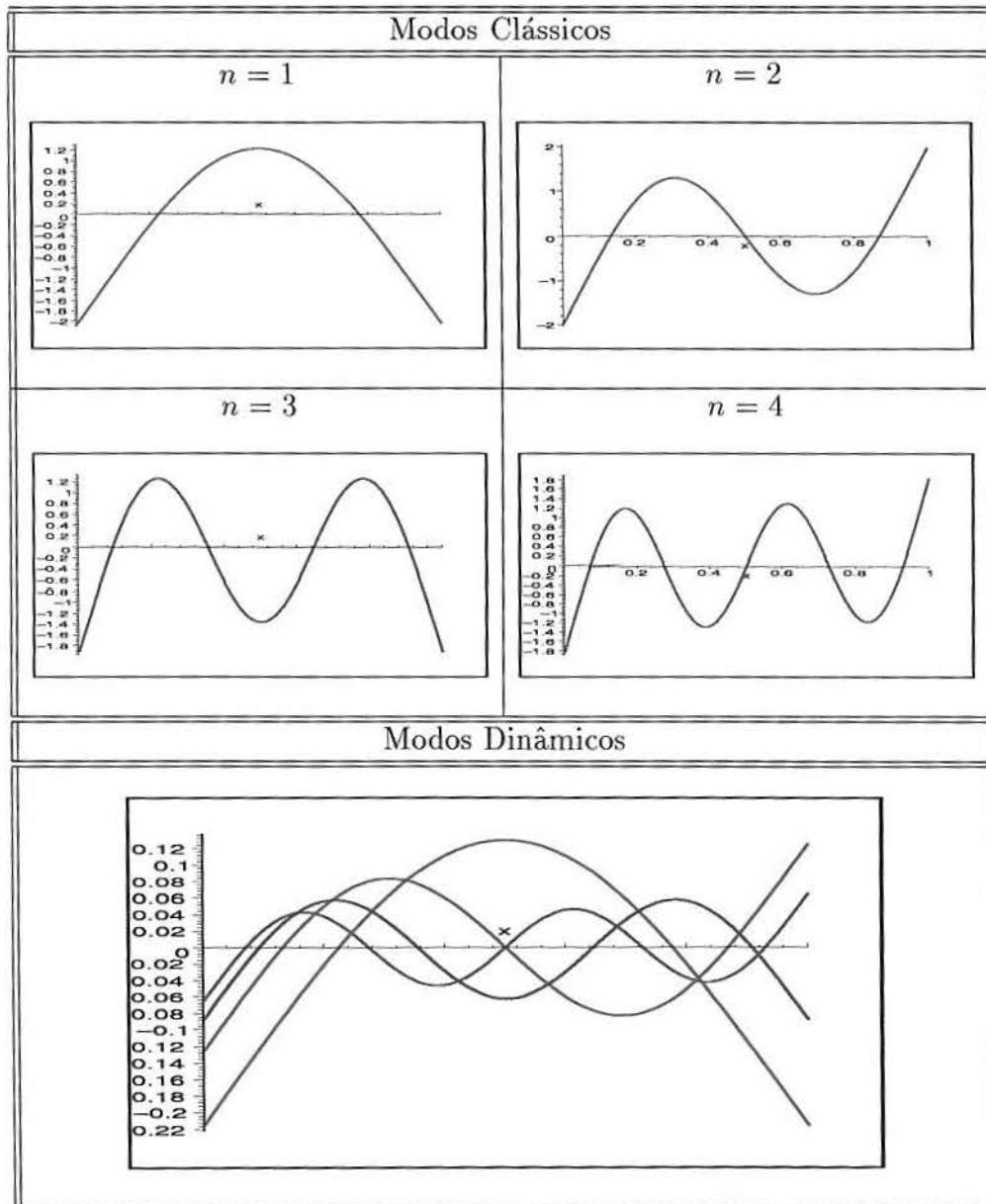
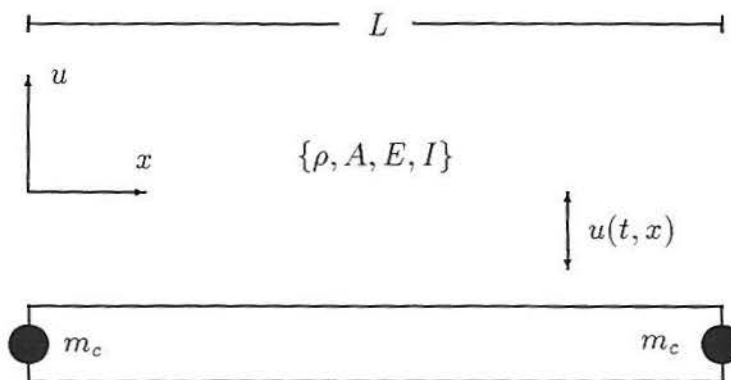


Figura 4.3 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massas Inerciais

### 4.4 Viga de Massas Atarrachadas



0: origem

Neste caso, os deslocamentos, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, 0) = 0, \quad mu_{tt}(t, 0) + EIu_{xxx}(t, 0) = 0, \\ u_{xx}(t, L) = 0, \quad mu_{tt}(t, L) - EIu_{xxx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $m$  é a massa atarrachada.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$X''(0) = 0, \quad \frac{m\beta^4}{\rho A}X(0) - X'''(0) = 0,$$

$$X''(L) = 0, \quad \frac{m\beta^4}{\rho A}X(L) + X'''(L) = 0,$$

#### Equação Característica

$$\begin{aligned} -\rho^2 A^2 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] - 2m^2 \beta^2 \text{sen}(\beta L) \text{senh}(\beta L) \\ + 2m\rho A\beta [\cos(\beta L) \text{senh}(\beta L) - \text{sen}(\beta L) \cosh(\beta L)] = 0 \end{aligned}$$

**Autovalores**

Autovalores	4.723237091	7.820749152	10.90530762	13.93932762	16.89987979
Frequências	36.43039321	99.88058531	194.2049109	317.2984987	466.3925420

**Modos**

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)] + \Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{-\rho A \cosh(\beta_n L) + \rho A \cos(\beta_n L) - 2m\beta_n \sinh(\beta_n L)}{\rho A (\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L))}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_1(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_3(x; \beta_n) + \Psi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{m\beta_n^4}{\rho A}$
$\sigma_{n,2}^D = \frac{\beta_n \{ \rho A [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)] - m\beta_n [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)] \}}{\rho A [\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)]}$

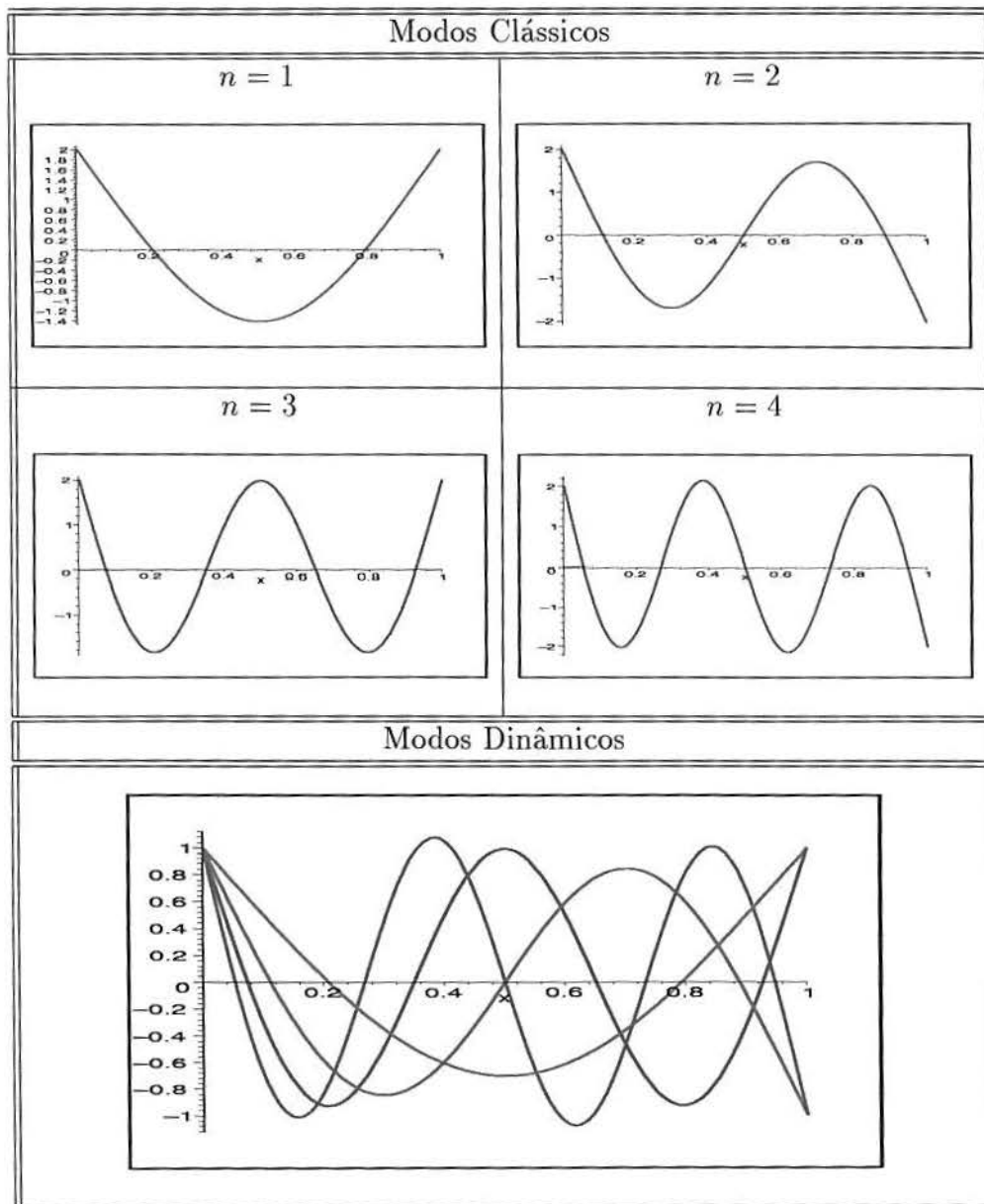
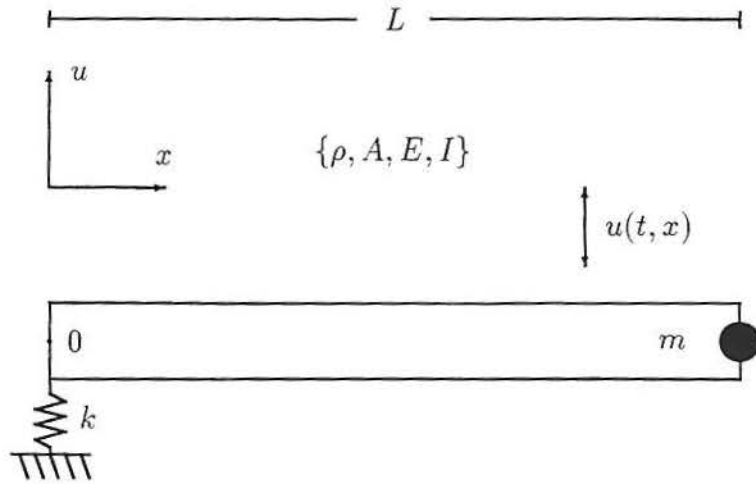


Figura 4.4 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massas Atarrachadas

### 4.5 Viga de Mola Translocional-Massa Atarrachada



0: origem

Neste caso, os deslocamentos, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, 0) = 0, \quad k_m u(t, 0) + EIu_{xxx}(t, 0) = 0, \\ u_{xx}(t, L) = 0, \quad mu_{tt}(t, L) - EIu_{xxx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $k_m$  é a rigidez translacional da mola e  $m$  é a massa atarrachada.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$X''(0) = 0, \quad k_m X(0) + EIX'''(0) = 0,$$

$$X''(L) = 0, \quad \frac{m\beta^4}{\rho A} X(L) + X'''(L) = 0,$$

#### Equação Característica

$$\begin{aligned} -\rho AEI\beta^3 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] - EI\beta^4 m [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] \\ + k_m \rho A [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] + 2k_m m \beta \sin(\beta L) \sinh(\beta L) = 0 \end{aligned}$$

**Autovalores**

Autovalores	4.598848988	7.652999912	10.73798166	13.83154145	16.93253542
Frequências	34.53684519	95.64180920	188.2910520	312.4104348	468.1967037

**Modos**

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n^3 [\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)]}{-EI\beta_n^3 \cosh(\beta_n L) + 2k_m \sin(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{2k_m \sinh(\beta_n L) - EI\beta_n^3 \cosh(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}{-EI\beta_n^3 \cosh(\beta_n L) + 2k_m \sin(\beta_n L) + EI\beta_n^3 \cos(\beta_n L)}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_1(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = -\frac{-EI\beta_n^3 [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)] - k_m m [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)]}{\beta_n^2 k_m m [-\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{EI}{k_m m}$

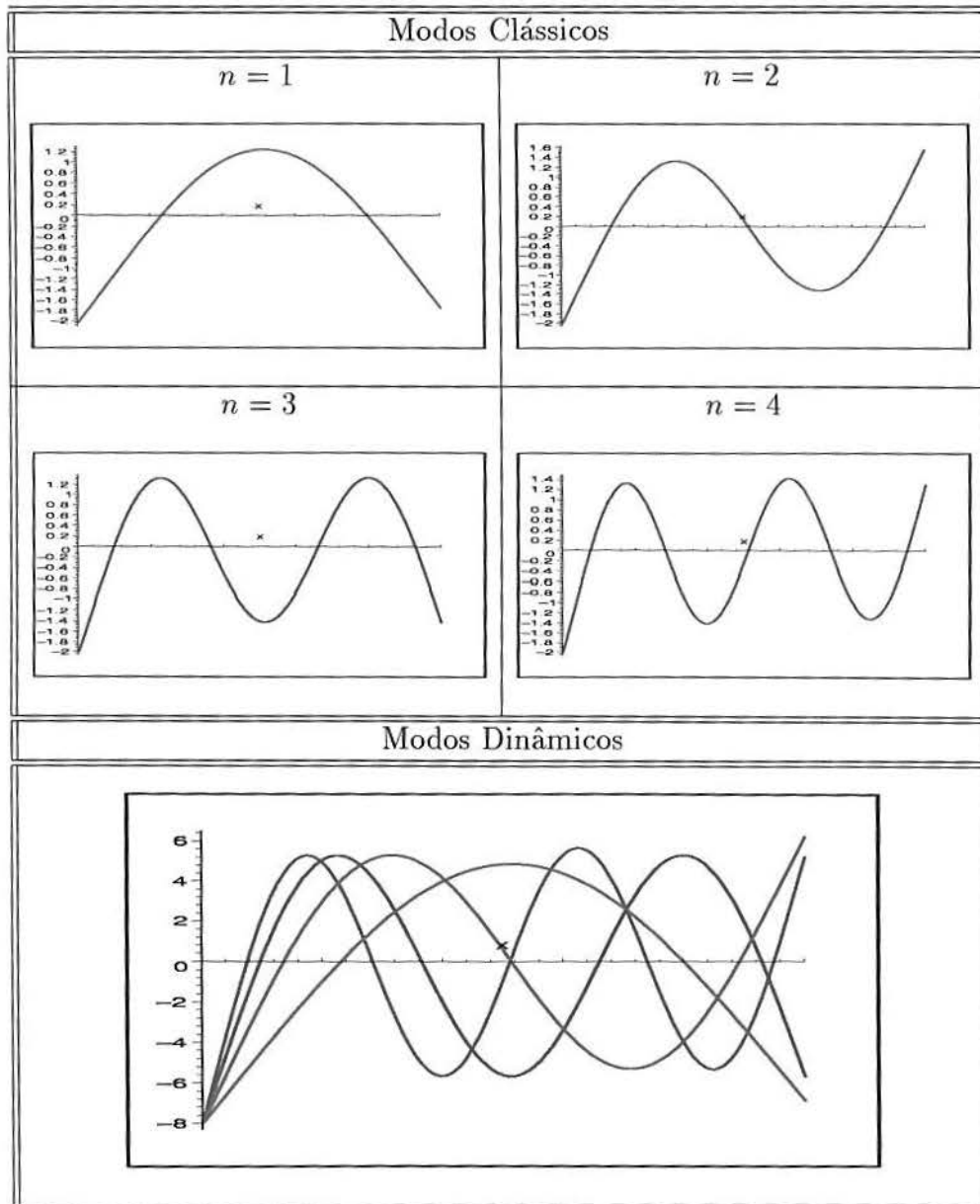
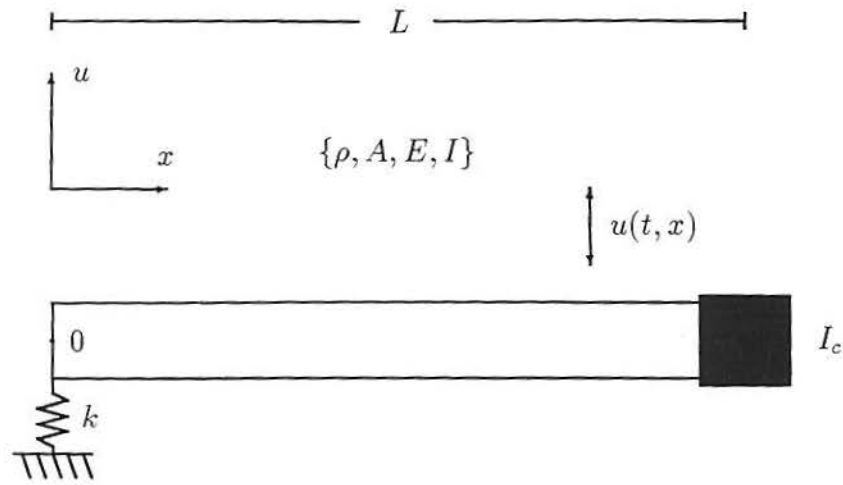


Figura 4.5 *Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Massa Atarrachada*



## 4.6 Viga de Mola Translacional-Massa Inercial



0: origem

Neste caso, os deslocamentos, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, 0) = 0, \quad k_m u(t, 0) + EI u_{xxx}(t, 0) = 0, \\ u_{xxx}(t, L) = 0, \quad I_c u_{ttt}(t, L) + EI u_{xx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $k_m$  é a rigidez translacional da mola e  $I_c$  é a inércia rotacional.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X''(0) = 0, \quad k_m X(0) + EIX'''(0) = 0, \\ X'''(L) = 0, \quad \frac{I_c \beta^4}{\rho A} X'(L) - X''(L) = 0, \end{aligned}$$

### Equação Característica

$$\begin{aligned} -\rho AEI \beta^3 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] + k_m I_c \beta^2 [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] \\ + k_m \rho A [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] + EII_c \beta^5 \sin(\beta L) \sinh(\beta L) = 0 \end{aligned}$$

**Autovalores**

Autovalores	4.730490092	7.851406543	10.99167490	14.13055413	20.40648702
Frequências	36.54236410	100.6651853	197.2931995	326.0639251	486.9797363

**Modos**

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n^3 [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}{\beta_n^3 [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)] - \cos(\beta_n L)}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{-2k_m m \cosh(\beta_n L) + \beta_n^3 EI [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)]}{\beta_n^3 [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)] - \cos(\beta_n L)}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) - \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_1(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{EI\beta_n^3 [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)] - k_m m [\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}{\beta_n^2 k_m m [-\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{EI}{k_m m}$

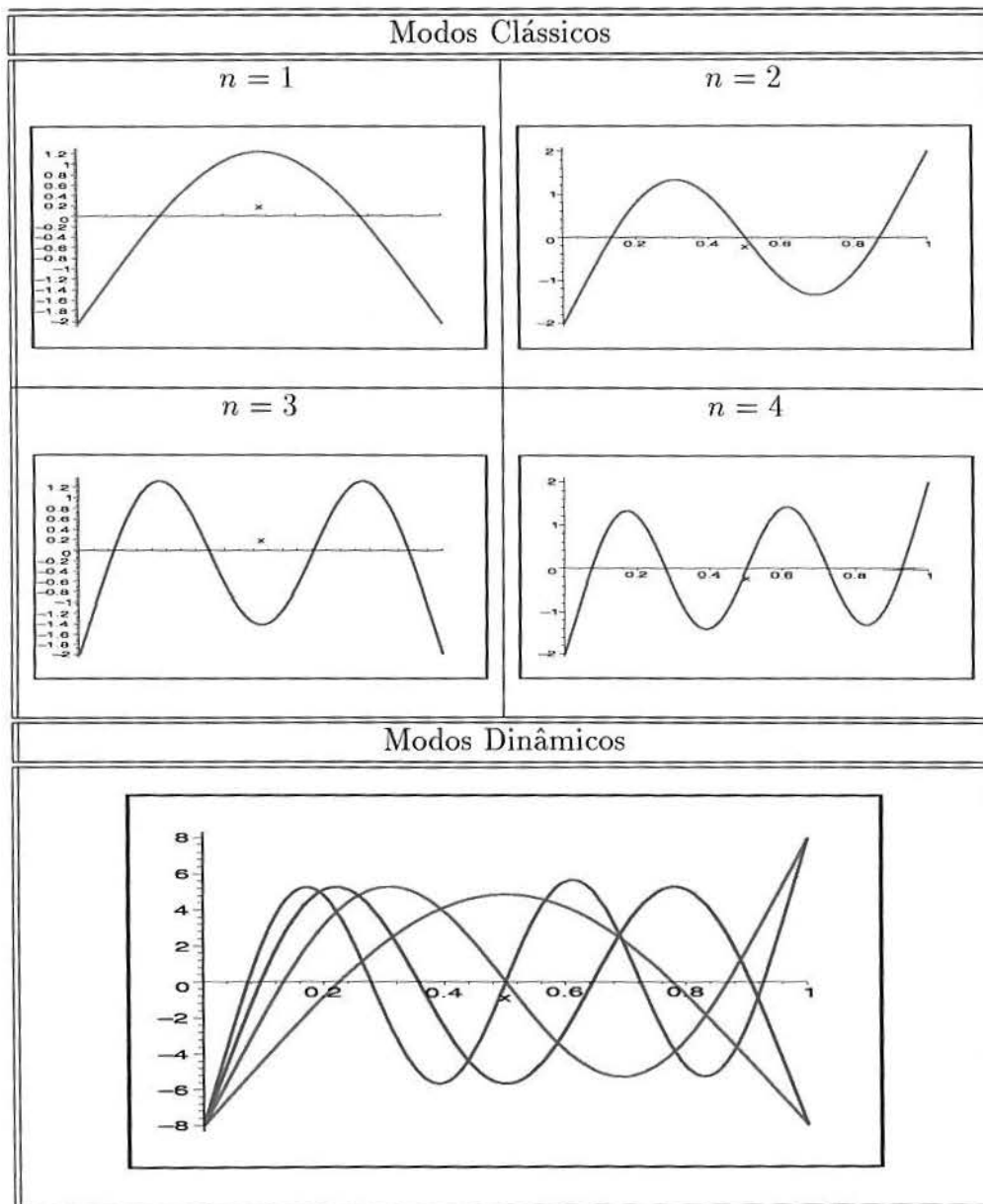
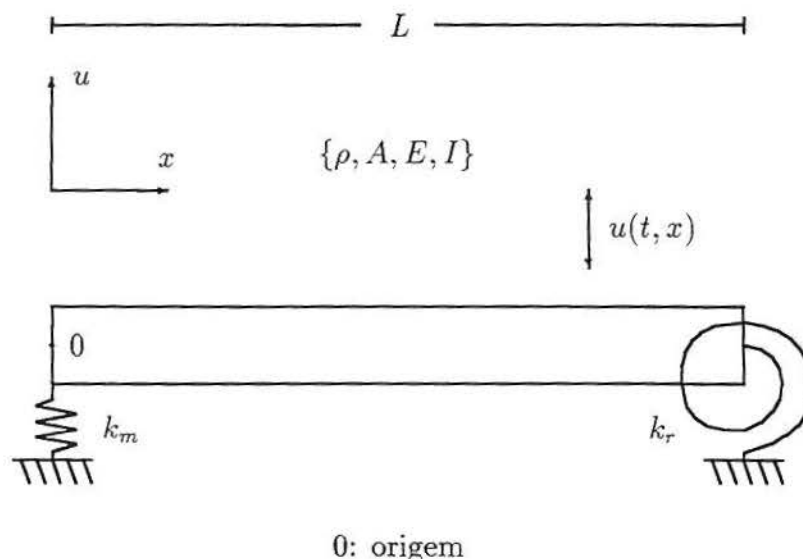


Figura 4.6 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Massa Inercial

### 4.7 Viga de Mola Translacional-Rotacional



Neste caso, os deslocamentos, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$u_{xx}(t, 0) = 0, \quad k_m u(t, 0) + EIu_{xxx}(t, 0) = 0,$$

$$u_{xxx}(t, L) = 0, \quad k_r u_x(t, L) + EIu_{xx}(t, L) = 0,$$

onde  $k_m$  é a rigidez translacional da mola e  $k_r$  é a rigidez rotacional da viga.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$X''(0) = 0, \quad k_m X(0) + EIX'''(0) = 0,$$

$$X'''(L) = 0, \quad k_r X'(L) + EIX''(L) = 0,$$

#### Equação Característica

$$-E^2 I^2 \beta^4 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] - EIk_r \beta^3 [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \sinh(\beta L)]$$

$$-EIk_m \beta [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] + 2k_m k_r \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0$$

## Autovalores

Autovalores	4.755930841	7.869120559	11.00692932	14.14596849	17.28596312
Frequências	36.93647337	101.1199309	197.8411928	326.7756889	487.9457396

## Modos

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n^3 [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}{-EI\beta_n^3 [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)] + 2k_m \cos(\beta_n L)}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{2k_m \cosh(\beta_n L) + EI\beta_n^3 [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)]}{2k_m \cos(\beta_n L) + EI\beta_n^3 [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)]}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) + \sigma_{n,2}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \Psi_1(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{EI\beta_n^3 [\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)] - k_m [\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}{\beta_n^2 k_m [-\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = -\frac{EI}{k_m}$

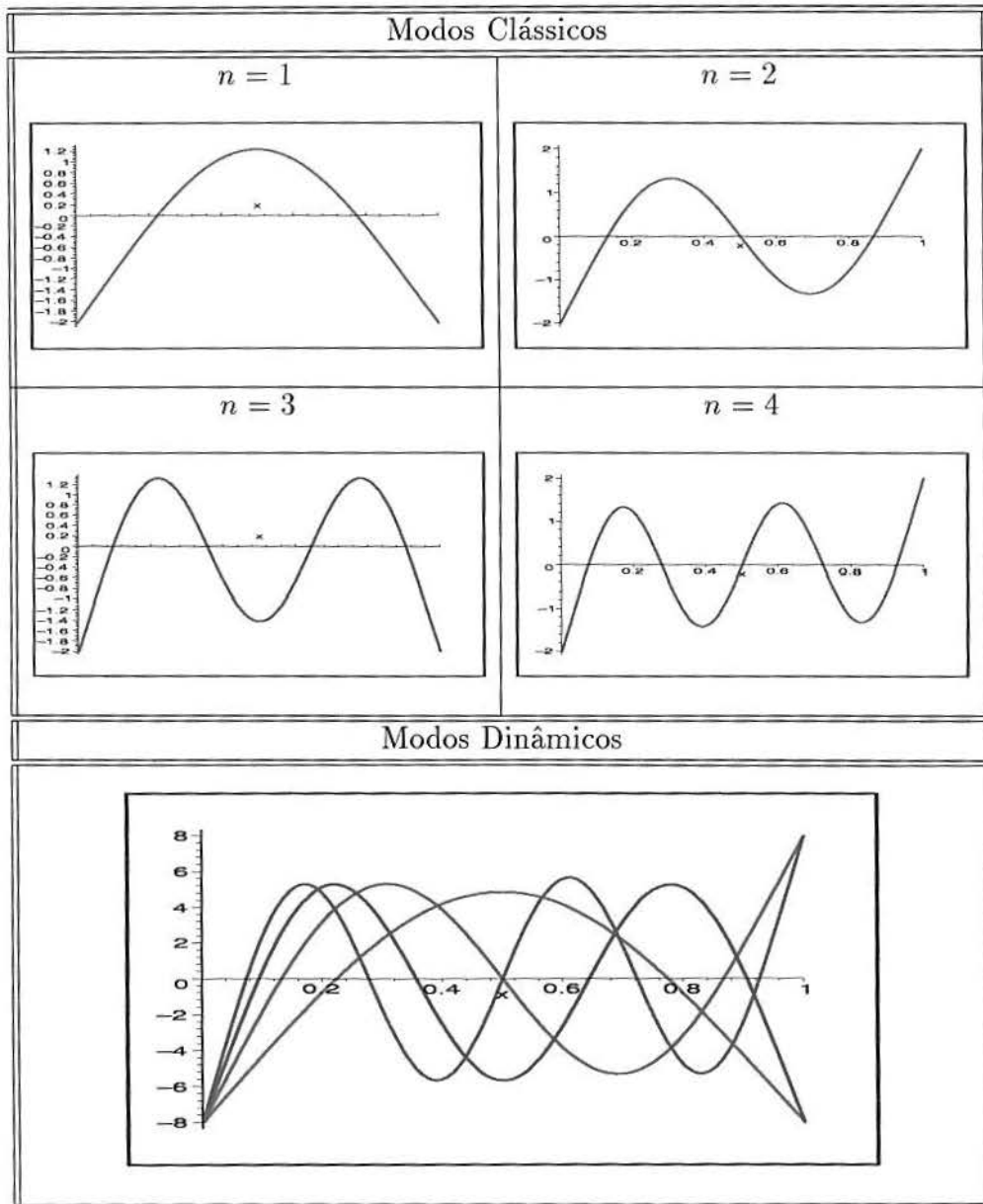
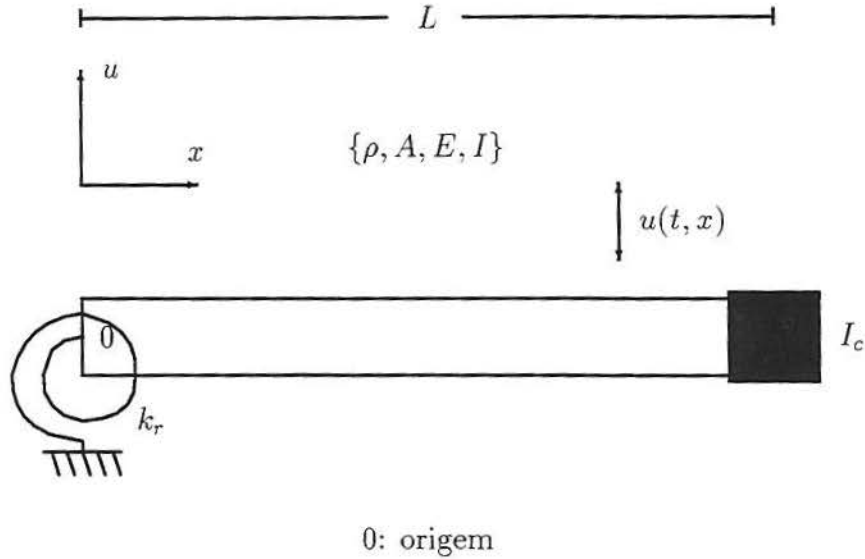


Figura 4.7 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Translacional - Rotacional

## 4.8 Viga de Mola Rotacional-Massa Inercial



Neste caso, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xxx}(t, 0) = 0, \quad k_r u_x(t, 0) - EI u_{xx}(t, 0) &= 0, \\ u_{xxx}(t, L) = 0, \quad I_c u_{tt}(t, L) + EI u_{xx}(t, L) &= 0, \end{aligned}$$

onde  $k_r$  é a rigidez rotacional da mola e  $I_c$  é inércia rotacional.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X'''(0) = 0, \quad k_r X(0) - EIX''(0) &= 0, \\ X'''(L) = 0, \quad \frac{I_c \beta^4}{\rho A} X'(L) - X''(L) &= 0, \end{aligned}$$

### Equação Característica

$$\begin{aligned} -EI\rho A\beta[1 - \cos(\beta L)\cosh(\beta L)] - \rho A k_r [\sin(\beta L)\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)\sinh(\beta L)] \\ + EII_c \beta^4 [\sin(\beta L)\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)\sinh(\beta L)] + 2k_r I_c \beta^3 \sin(\beta L)\sinh(\beta L) = 0 \end{aligned}$$

## Autovalores

Autovalores	4.751321284	7.852468663	10.96100551	14.04459710	17.08905836
Frequências	36.86490872	100.6924226	196.1937455	322.1090569	476.8926532

## Modos

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)]}{EI\beta_n [\text{cos}(\beta_n L) - \text{cosh}(\beta_n L)] + 2k_r \text{sen}(\beta_n L)}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{-2k_r \text{senh}(\beta_n L) + EI\beta_n [\text{cos}(\beta_n L) - \text{cosh}(\beta_n L)]}{EI\beta_n [\text{cos}(\beta_n L) - \text{cosh}(\beta_n L)] + 2k_r \text{sen}(\beta_n L)}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \sigma_{n,2}^D \Psi_3(x; \beta_n) + \Psi_2(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{EI\beta_n [\text{cos}(\beta_n L) + \text{cosh}(\beta_n L)] + k_r [\text{sen}(\beta_n L) - \text{senh}(\beta_n L)]}{\beta_n^2 k_r [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = \frac{EI}{k_r}$



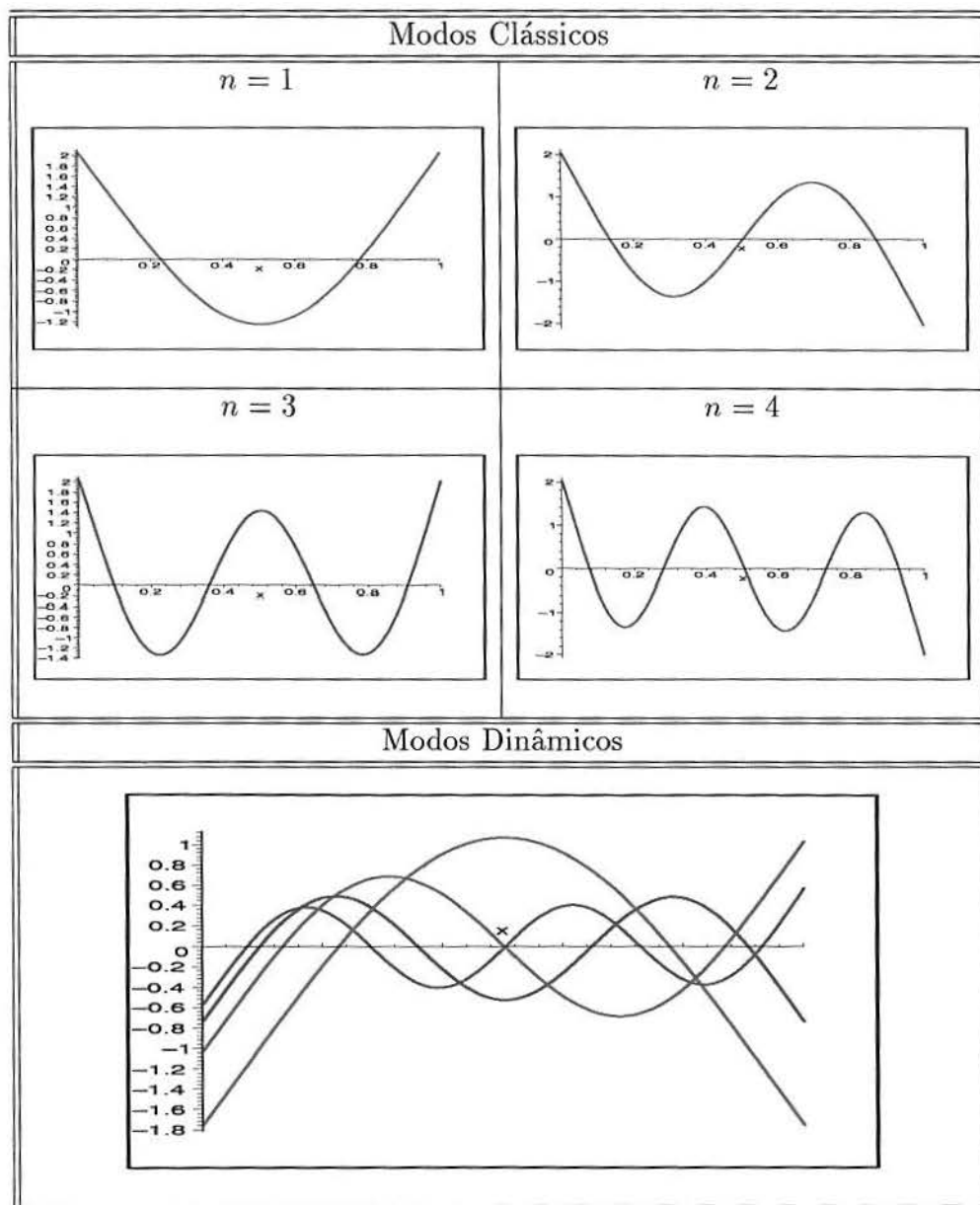
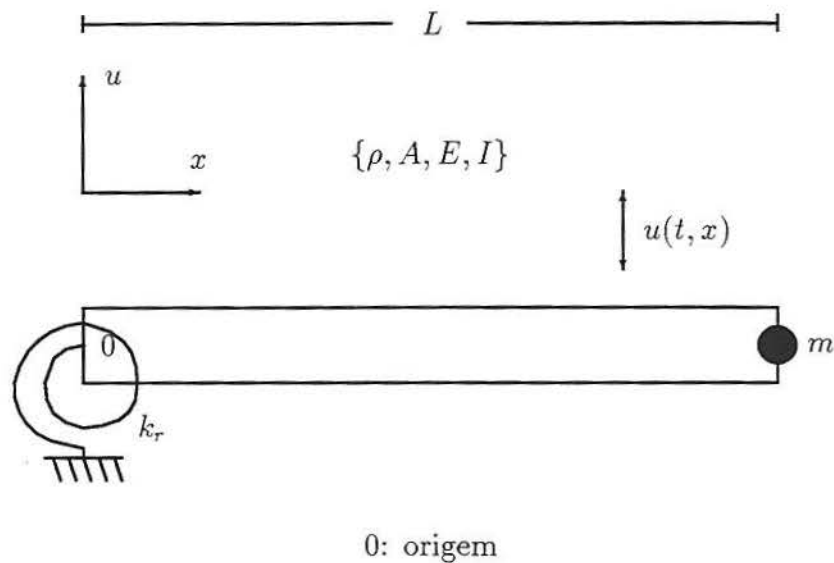


Figura 4.8 *Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Rotacional - Massa Inercial*

## 4.9 Viga de Mola Rotacional - Massa Atarrachada



Neste caso, os deslocamentos, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$\begin{aligned} u_{xxx}(t, 0) = 0, \quad k_r u_x(t, 0) - EI u_{xx}(t, 0) = 0, \\ u_{xx}(t, L) = 0, \quad m_c u_{tt}(t, L) - EI u_{xxx}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

onde  $k_r$  é a rigidez rotacional da mola e  $m_c$  é a massa atarrachada.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X'''(0) = 0, \quad k_r X'(0) - EIX''(0) = 0, \\ X''(L) = 0, \quad \frac{m_c \beta^4}{\rho A} X(L) + X'''(L) = 0, \end{aligned}$$

### Equação Característica

$$\begin{aligned} -EI\rho A\beta[1 - \cos(\beta L)\cosh(\beta L)] - EIm\beta^2[\sin(\beta L)\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)\sinh(\beta L)] \\ + \rho Ak_r[\sin(\beta L)\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)\sinh(\beta L)] + 2k_r m\beta \cos(\beta L)\cosh(\beta L) = 0 \end{aligned}$$

## Autovalores

Autovalores	4.622418412	7.668468196	10.74918528	13.84032011	16.93974768
Frequências	34.89175988	96.02882339	188.6841691	312.8071245	468.5956369

## Modos

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)] + \sigma_{n,2}^C \Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{EI\beta_n [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}{EI\beta_n [\sinh(\beta_n L) - \text{sen}(\beta_n L)] + 2k_r \cos(\beta_n L)}$
$\sigma_{n,2}^C = \frac{2k_r \cosh(\beta_n L) + EI\beta_n [\sinh(\beta_n L) - \text{sen}(\beta_n L)]}{EI\beta_n [\sinh(\beta_n L) - \text{sen}(\beta_n L)] + 2k_r \cos(\beta_n L)}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_4(x; \beta_n) + \sigma_{n,2}^D \Psi_3(x; \beta_n) + \Psi_2(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{EI\beta_n [-\text{sen}(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)] + k_r [\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}{\beta_n^2 k_r [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = \frac{EI}{k_r}$

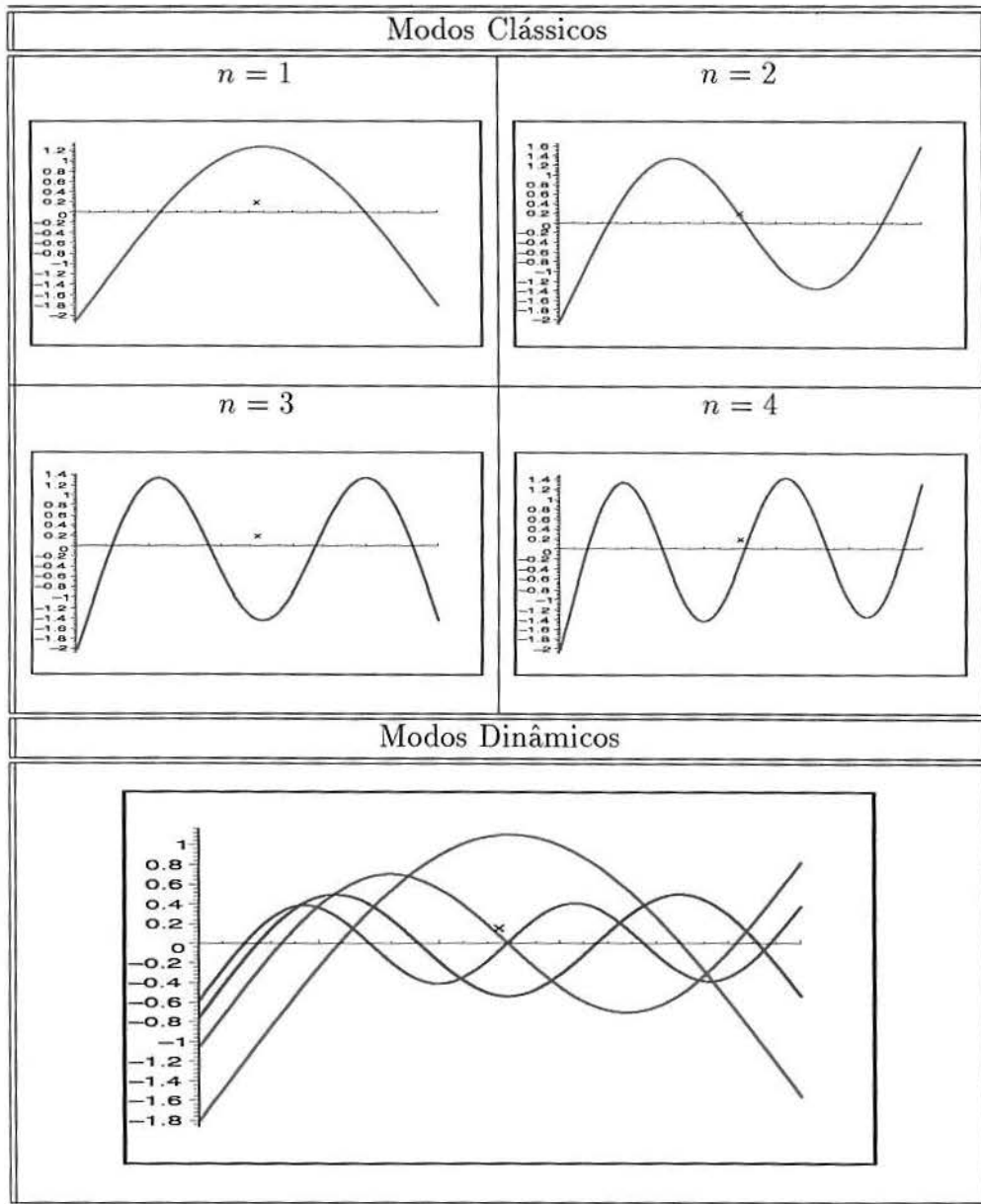
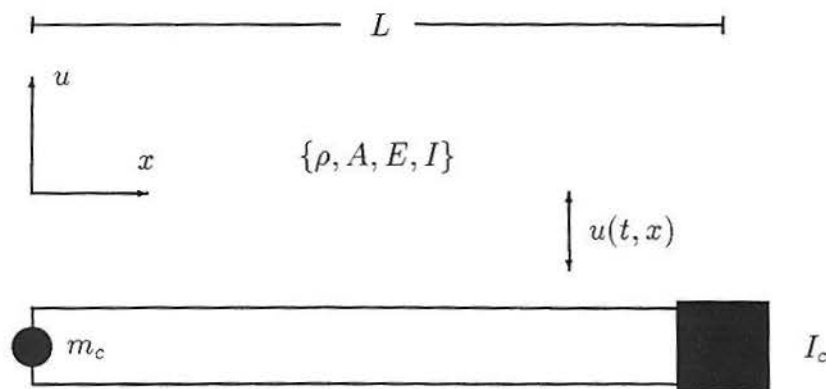


Figura 4.9 Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Mola Rotacional - Massa Atarrachada

### 4.10 Viga de Massa Atarrachada-Massa Inercial



0: origem

Neste caso, os deslocamentos, as declividades, os momentos fletores e as forças de cisalhamento estão relacionados como segue

$$u_{xx}(t, 0) = 0, \quad m_c u_{tt}(t, 0) + EI u_{xxx}(t, 0) = 0,$$

$$u_{xxx}(t, L) = 0, \quad I_c u_{ttx}(t, L) + EI u_{xx}(t, L) = 0,$$

onde \$m\_c\$ é a massa atarrachada e \$I\_c\$ é a inércia.

Essas condições de contorno implicam as seguintes condições de contorno para \$X(x)\$

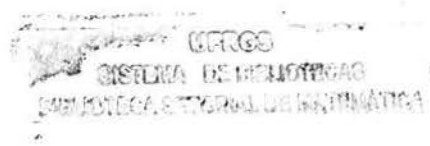
$$X''(0) = 0, \quad -\frac{m_c \beta^4}{\rho A} X'(0) + X'''(0) = 0,$$

$$X'''(L) = 0, \quad \frac{I_c \beta^4}{\rho A} X'(L) - X''(L) = 0,$$

#### Equação Característica

$$-\rho^2 A^2 [1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)] - \rho A I_c \beta^3 [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \sinh(\beta L)]$$

$$-\rho A I_c \beta^3 [\sin(\beta L) \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \sinh(\beta L)] - 2m_c I_c \beta^4 \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0$$



**Autovalores**

Autovalores	4.594536083	7.637929195	10.69609324	13.73848542	16.75101790
Frequências	34.47209670	95.26549367	186.8248862	308.2208973	458.2123302

**Modos**

Clássico
$X_n^C(x) = \sigma_{n,1}^C [\Phi_1(x; \beta_n) + \Phi_3(x; \beta_n)] + \Phi_2(x; \beta_n) + \Phi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^C = \frac{\rho A [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)] + 2m_c \beta \cosh(\beta_n L)}{\rho A [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}$
Dinâmico
$X_n^D(x) = \sigma_{n,1}^D \Psi_3(x; \beta_n) + \sigma_{n,2}^D \Psi_2(x; \beta_n) + \Psi_4(x; \beta_n)$
$\sigma_{n,1}^D = \frac{\rho A \beta_n [\text{sen}(\beta_n L) + \text{senh}(\beta_n L)] + m_c \beta^2 [\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)]}{\rho A [\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)]}$
$\sigma_{n,2}^D = \frac{m_c \beta^4}{\rho A}$

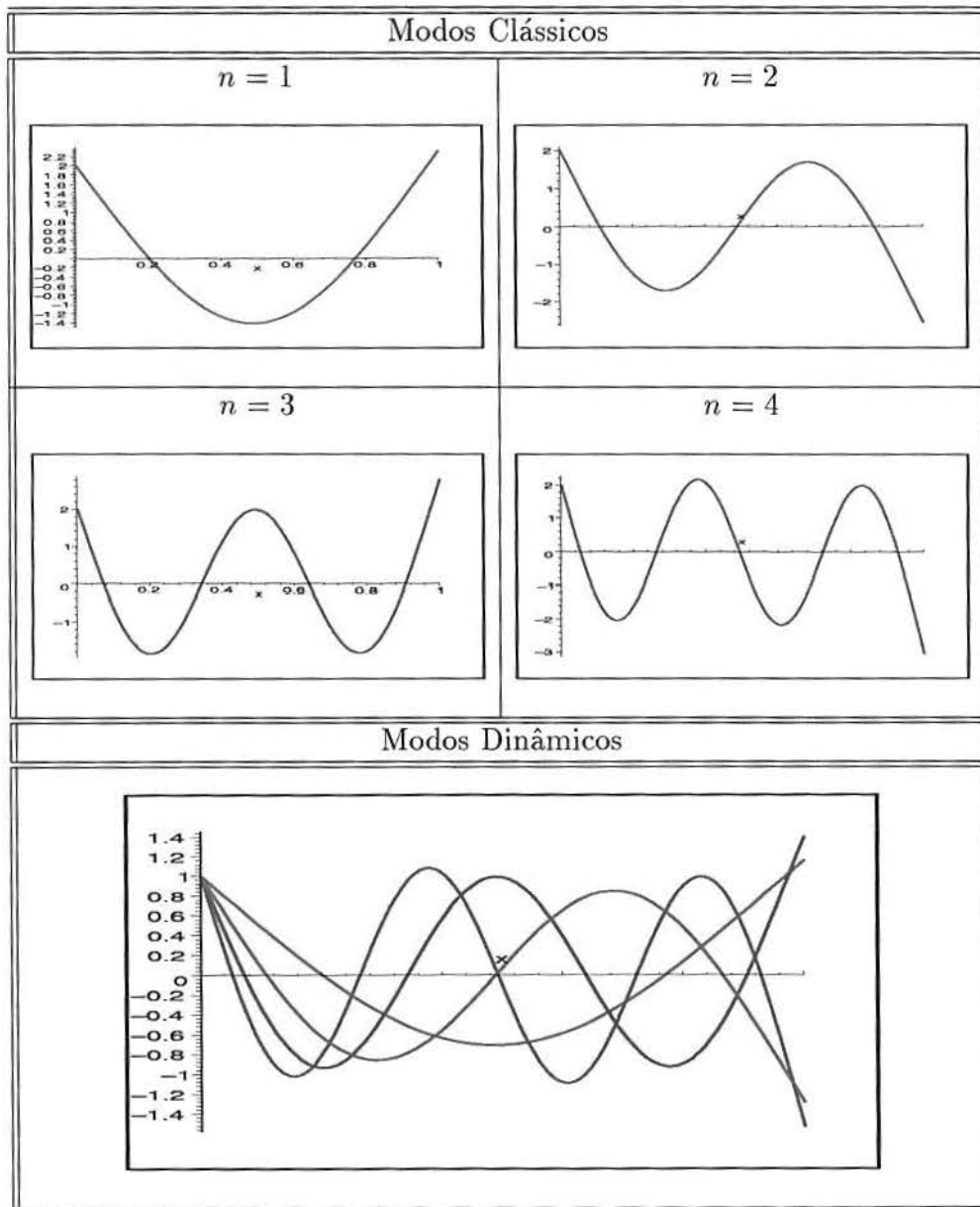


Figura 4.10 *Modos Clássicos e Dinâmicos da Viga de Massa Atarrachada - Massa Inercial*

## 5 VIBRAÇÕES FORÇADAS

Neste capítulo, apresentamos um problema relativo a uma viga de seção transversal constante, utilizando os modos obtidos no capítulo 4, sob a aplicação de uma força normal. As condições de contorno podem ser qualquer uma das consideradas anteriormente. A solução deste problema é obtida através do método espectral de Fourier.

### 5.1 O Método Espectral

Consideremos a equação do movimento de uma viga sob a ação de uma carga  $p(t, x)$

$$EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = p(t, x) - \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

e com condições iniciais prescritas

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_{t,0}(x).$$

As condições de contorno podem ser qualquer uma das consideradas no capítulo 4.

No método espectral, a solução tem a forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (5.2)$$

onde os  $X_n(x)$  são os modos relativos às condições do problema.



Substituindo a equação (5.2) em (5.1), resulta

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} f_n(t) = p(t, x) - \rho A \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2}. \quad (5.3)$$

Como  $X_n(x)$  é um modo, a equação (5.3) pode ser escrita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 X_n(x) f_n(t) = \frac{1}{\rho A} p(t, x) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2}. \quad (5.4)$$

Multiplicando ambos os membros de (5.4) por  $X_m(x)$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ), e integrando de 0 a  $L$  e utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \|X_n\|^2, & \text{se } n = m \end{cases} \quad (5.5)$$

decorre a equação

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega_n^2 f_n = \frac{1}{\rho A \|X_n\|^2} Q_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

onde

$$Q_n(t) = \int_0^L p(t, x) X_n(x) dx. \quad (5.7)$$

A equação (5.6) é essencialmente a mesma que a equação diferencial, no caso de vibração forçada de um sistema subamortecido, com um grau de liberdade. Portanto, a solução geral da equação (5.6) é

$$f_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{1}{\rho A \|X_n\|^2} \int_0^t Q_n(\tau) \frac{\text{sen } \omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau, \quad (5.8)$$

e a equação (5.2) torna-se

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\omega_n t) + B_n \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{1}{\rho A \|X_n\|^2} \int_0^t Q_n(\tau) \frac{\text{sen } \omega_n(t - \tau)}{\omega_n} d\tau \right] X_n(x). \quad (5.9)$$

As constantes  $A_n$  e  $B_n$  são determinadas das condições iniciais. Tem-se

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

e

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x).$$

Aplicando a ortogonalidade, temos

$$A_n = \frac{\int_0^L u(0, x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2}$$

e

$$B_n = \frac{\int_0^L u_t(0, x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2}$$

## 5.2 Resultados Gráficos

Para fins de simulação, é aplicada uma força harmônica

$$p(t, x) = P_0 \cos(\hat{\omega}t) \delta(x - a)$$

na seção  $x = a$  de uma viga.

Neste caso,

$$Q_n(t) = P_0 \cos(\hat{\omega}t) X_n(a), \quad (5.10)$$

e a integral de convolução está dada por

$$\int_0^t Q_n(\tau) \cos \omega_n(t - \tau) d\tau = \frac{P_0 X_n(a)}{\hat{\omega}^2 - \omega_n^2} [\hat{\omega} \text{sen}(\hat{\omega}t) - \omega_n \text{sen}(\omega_n t)]. \quad (5.11)$$

Em geral, temos

$$u(t, x) = \frac{P_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\omega_n t) + B_n \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{X_n(a) [\hat{\omega} \text{sen}(\hat{\omega}t) - \omega_n \text{sen}(\omega_n t)]}{\|X_n\|^2 (\hat{\omega}^2 - \omega_n^2)} \right] X_n(x). \quad (5.12)$$

Consideremos os seguintes valores para os parâmetros da entrada harmônica:

$$P_0 = 1000 \text{ N},$$

$$\hat{\omega} = 10 \text{ rad},$$

$$a = \frac{L}{2}$$

e escolhamos, para os outros parâmetros, valores encontrados na literatura relativa a medições experimentais

$$L = 1 \text{ m},$$

$$EI = 8000, \text{ N m},$$

$$\rho A = 3000, \text{ Kg m},$$

$$k_m = 1000,$$

$$k_r = 1000,$$

$$I_c = 0.1,$$

$$m_c = 100, \text{ Kg},$$

A seguir são mostrados os resultados gráficos obtidos com o “software” Maple V Release 5. Cada curva representa  $u(t, x)$  para  $t$  fixo. Os tempos finais foram escolhidos após várias tentativas para otimizar a visualização.

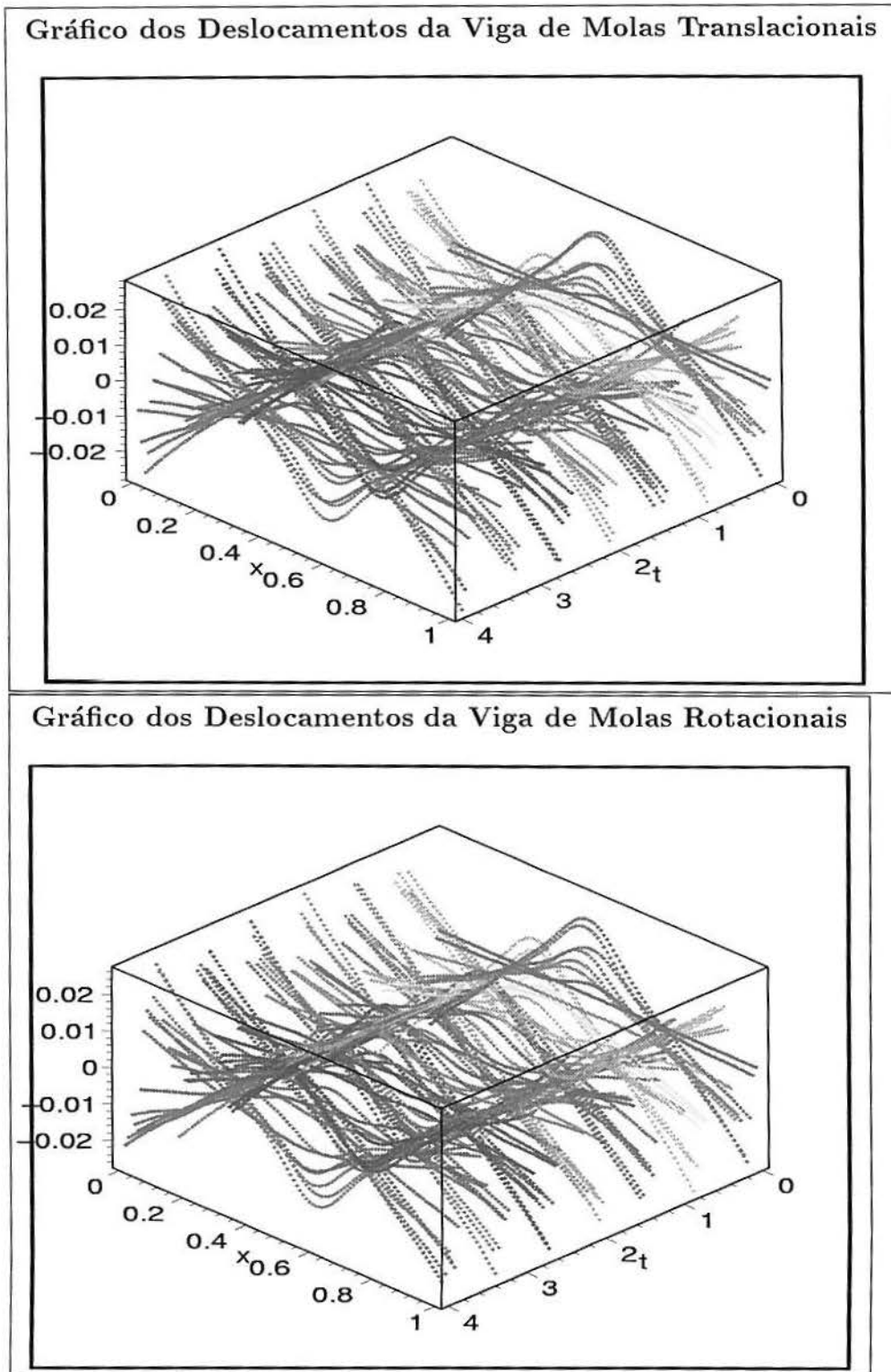


Figura 5.1 *Deslocamentos em 3D da Viga de Molas Translacionais e de Molas Rotacionais*

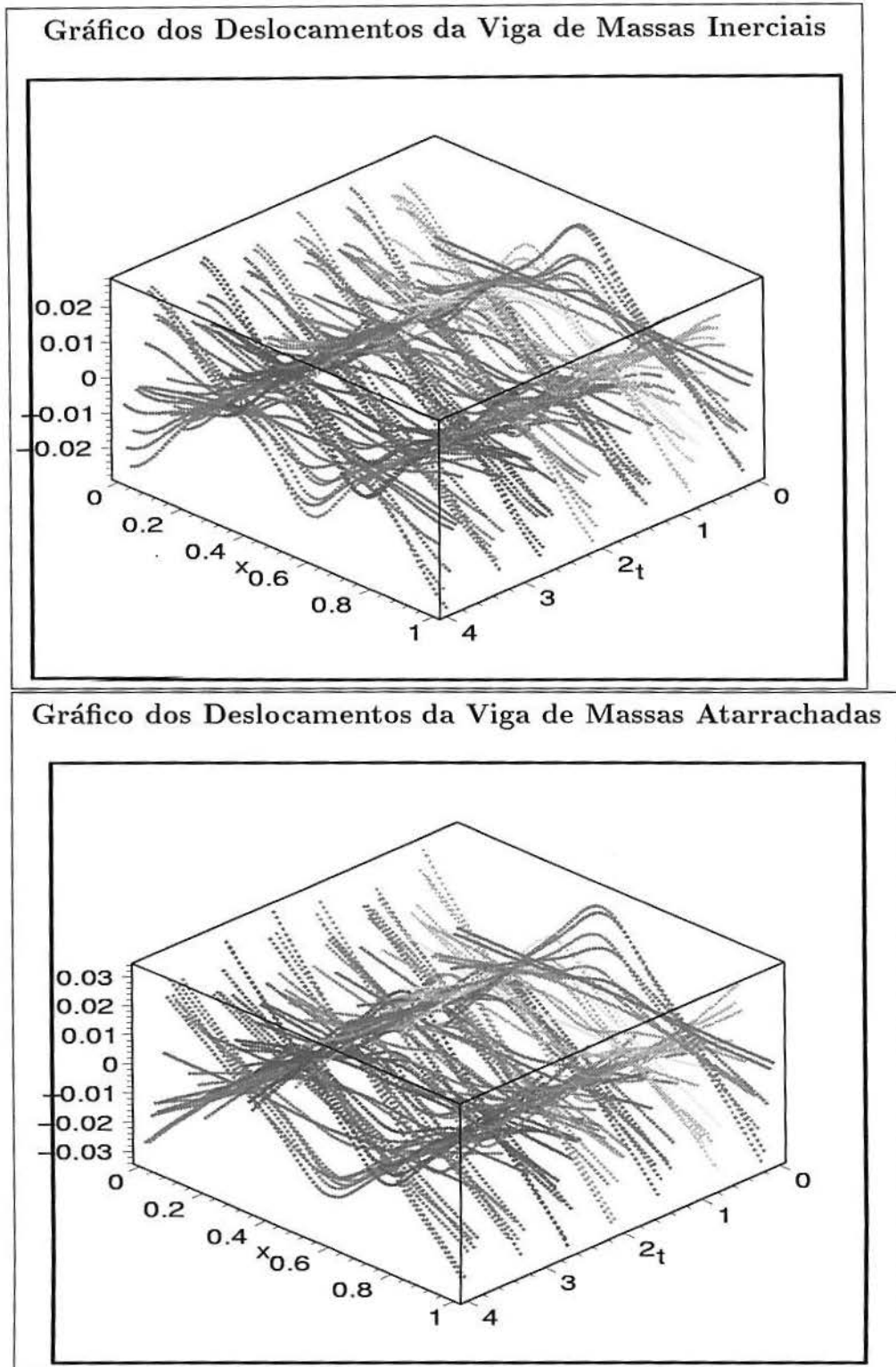


Figura 5.2 Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Inerciais e de Massas Atarrachadas

Gráfico dos Deslocamentos da Viga de Mola Translacional-Massa Atarrachada

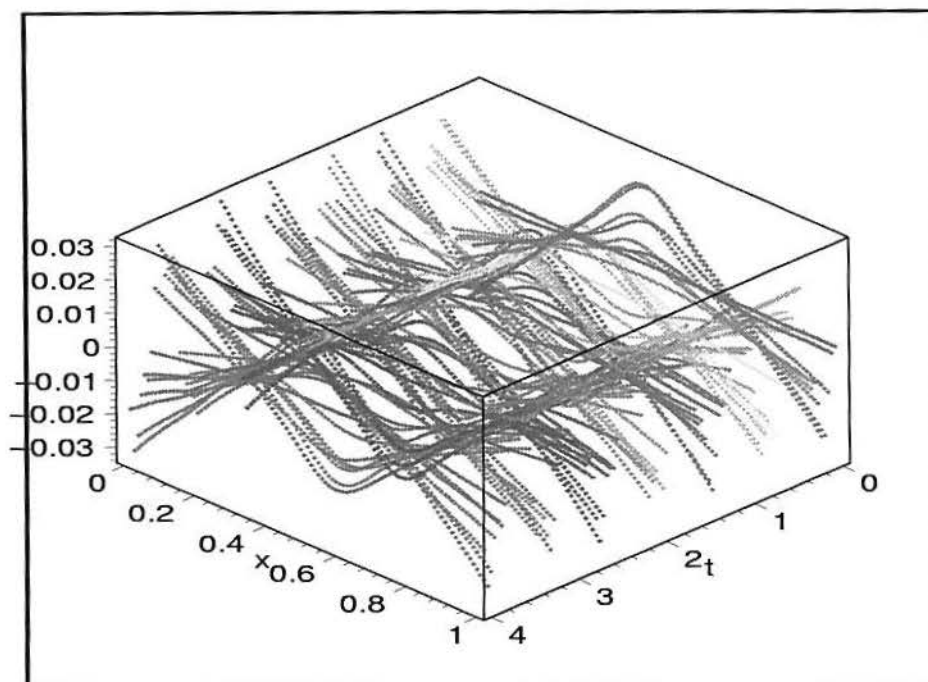


Gráfico dos Deslocamentos da Viga de Mola Translacional-Massa Inercial

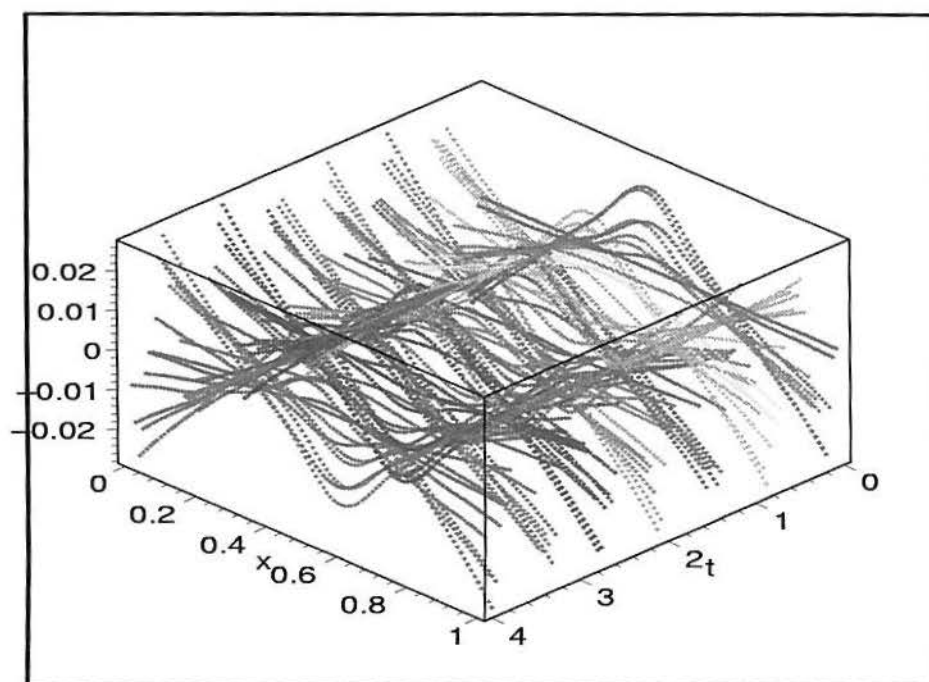


Figura 5.3 Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Translacional-Massa Atarrachada e de Mola Translacional-Massa Inercial

Gráfico dos Deslocamentos da Viga de Mola Translacional-Rotacional

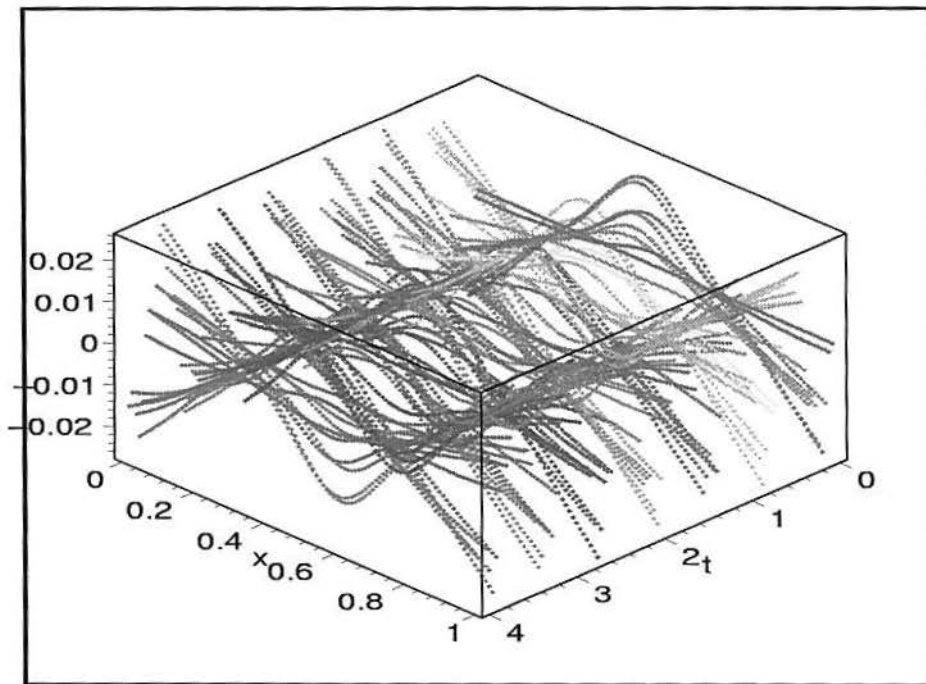


Gráfico dos Deslocamentos da Viga de Mola Rotacional-Massa Inercial

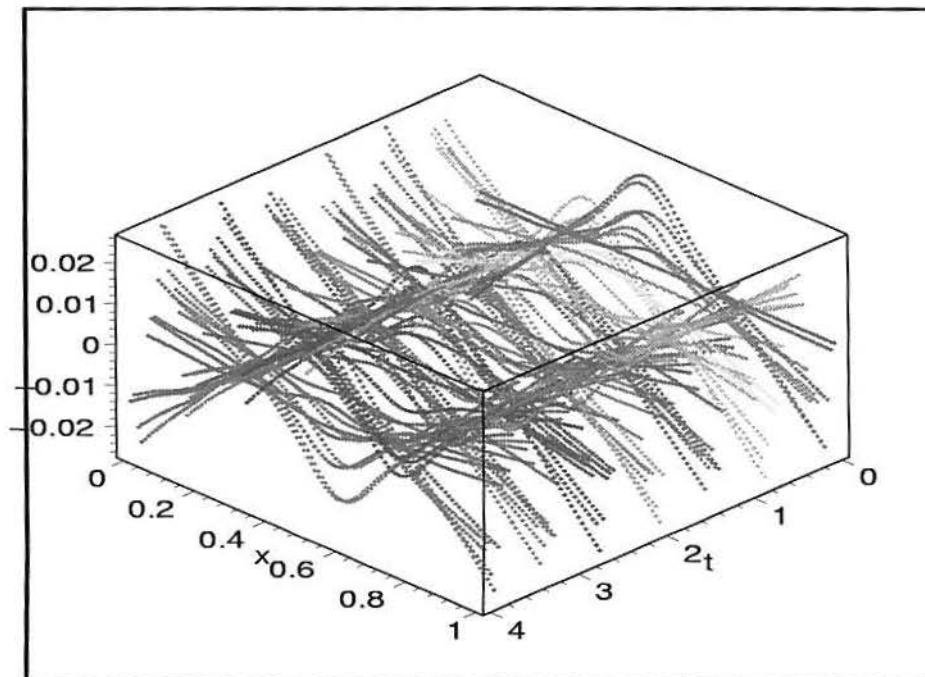


Figura 5.4 Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Translacional-Rotacional e de Mola Rotacional-Massa Inercial

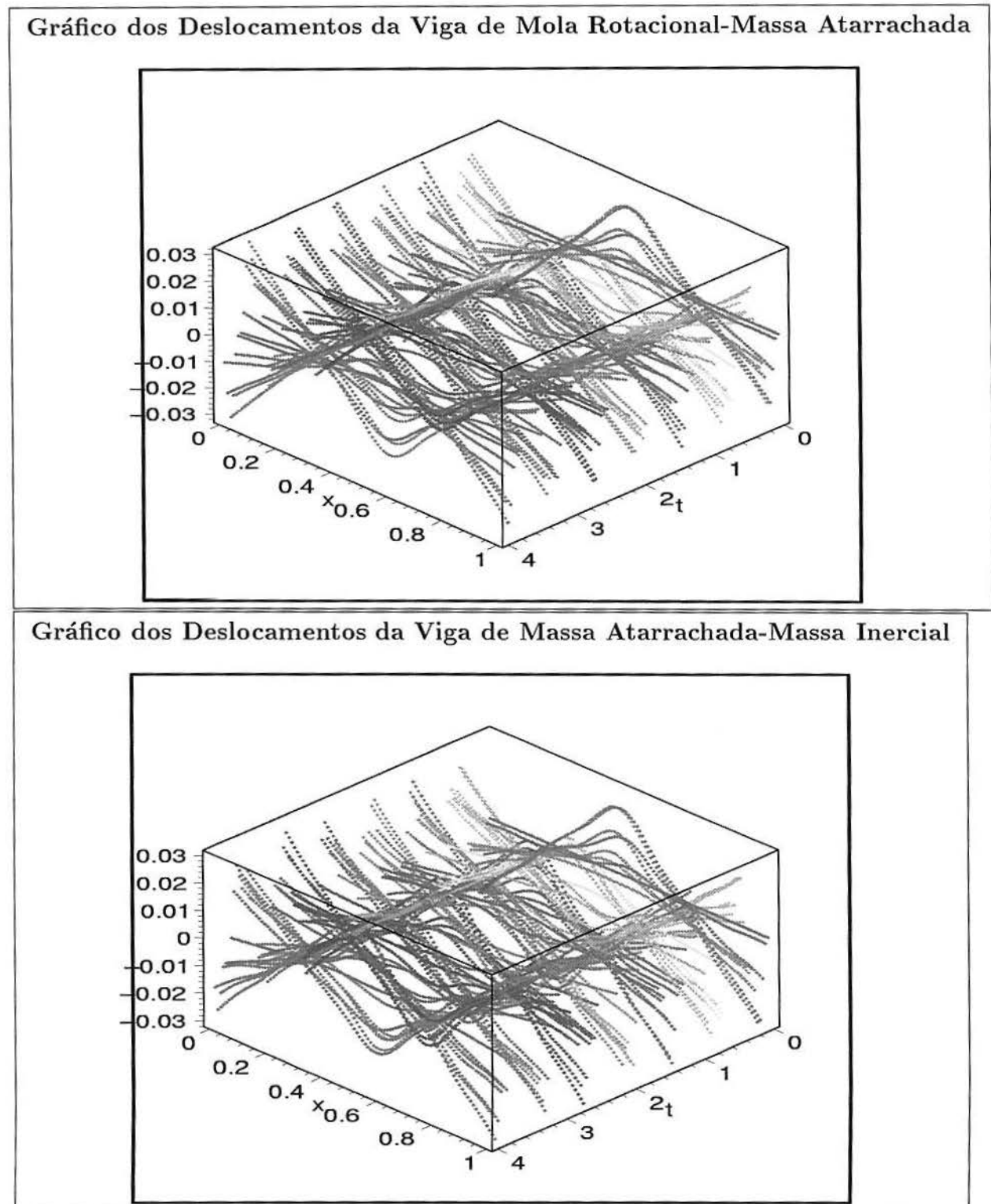


Figura 5.5 Deslocamentos em 3D da Viga de Massas Mola Rotacional-Massa Atarrachada e de Massa Atarrachada-Massa Inercial



## 6 CONCLUSÕES

No modelo de Euler-Bernoulli para uma viga elástica determinamos os modos relativos com variadas condições de contorno.

Os modos foram obtidos de maneira matricial unificada, permitindo o uso da base clássica, geralmente encontrada na literatura, e da base dinâmica, recentemente introduzida, em termos da resposta impulso. Para determinar os modos, foi realizada a decomposição LU no sistema algébrico linear singular com o uso do software Maple V5.

O uso da base clássica ou dinâmica é irrelevante na determinação das frequências. Ambas possuem a mesma equação característica e, portanto, os mesmos autovalores ou frequências características.

Os modos dinâmicos em todos os casos apresentados, precisam de três funções de base, enquanto os modos clássicos precisam de quatro funções de base. A base dinâmica têm uma ponderação de acordo com a sua numeração, porém, eles coincidem com os modos clássicos quando normalizados.

Se os dispositivos físicos, que geram as condições de contorno, fossem removidos, isto é,  $k_m = 0$ ,  $k_r = 0$ ,  $I_c = 0$  ou  $m_c = 0$ , o correspondente contorno fica livre, assumindo as condições

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (t, 0) = 0.$$

Quando  $k_m \rightarrow \infty$  ou  $m_c \rightarrow \infty$ , isto é, quando os dispositivos tiverem seus parâmetros aumentados para o infinito, o contorno assume as condições

$$u(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0,$$

que corresponde ao caso de uma viga apoiada.

Quando  $k_r \rightarrow \infty$  ou  $I_c \rightarrow \infty$ , o contorno assume as condições

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0,$$

que corresponde ao caso de uma viga deslizante.

Os resultados obtidos foram tabelados através da equação governante, das condições de contorno, da equação modal, da equação característica, dos autovalores, das frequências características, dos modos clássicos e dinâmicos e da matriz associada para a determinação dos modos na base espectral e na base dinâmica.

E, por fim, utilizamos o método modal em um problema relativo a uma viga de seção transversal constante com a aplicação de uma força transversal harmônica concentrada.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CLAEYSSSEN, J. C. R.            On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [2] CLAEYSSSEN, J. C. R., TSUKAZAN, T.    Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLVIII, n° 1, 1990.
- [3] CLAEYSSSEN, J.C.R., CANAHUALPA, G., JUNG,C.    A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations, *Applied Numerical Mathematics*, vol.30,1999.
- [4] CLAEYSSSEN, J.,    The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems, *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, vol.2, ABCM-SBMAC-SIAM, Ed. J. Baltazhar, 1999.
- [5] CLAEYSSSEN, J., MOSCHEN, I.    Computing Euler-Benoulli Modes with the Dynamical Impulse Response. *III Panamerican Workshop on Applied and Computational Mathematics*, Trujillo, 2000.
- [6] CUDNEY, H. H., INMAN, D. J.    Determining Damping Mechanisms in a Composite Beam. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*. vol 4., no. 4, 138-143. 1989.
- [7] COWPER, G. R.    The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 33: 335-340, 1966.
- [8] DATTA, B. N.    *Numerical Linear Algebra and Applications*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1995.

- [9] GALLICCHIO, E. Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior. *Dissertação de Mestrado*. UFRGS/CPGM, Porto Alegre, 1987.
- [10] GLADWELL, G.M.L. *Inverse Problems in Vibration*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [11] GORMAN, D. J. *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*. John Wiley & sons, New York, 1975.
- [12] INMAN, D. *Vibration, with Control, Measurement, and Stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [13] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [14] JENNINGS, A. C. *Matrix Computations for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, 1980.
- [15] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975.
- [16] NASHIF, A. D., JONES, D. I. *Vibration Damping*. Wiley, New York, 1985.
- [17] NEWLAND, D. E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical, London, 1989.
- [18] PILKEY, W. D. *Formulas for Strain, Stress and Structural Matrices*. John Wiley & sons, New York, 1994.
- [19] TIMOSHENKO, S. P. & WEAVER, W. Jr. *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley, New York, 1974.



Impressão: Gráfica UFRGS  
Rua Ramiro Barcelos, 2705 - 1º andar  
Fone: 316 5088 Fax: 316 5083 - Porto Alegre - RS  
E-mail: [grafica@vortex.ufrgs.br](mailto:grafica@vortex.ufrgs.br)