Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ESTABILIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA LINEAR DE ONDAS ELÁSTICAS

por

CARMEN VIEIRA MATHIAS

Porto Alegre, dezembro de 2000

Dissertação submetida por CARMEN VIEIRA MATHIAS como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dra. Eleni Bisognin

Banca Examinadora:
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dra. Vanilde Bisognin
Dr. Jardel Morais Pereira

Data de Defesa: 11 de dezembro de 2000.

Aos meus pais, Ione e Salvador
e ao meu amor Fernando.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, simplesmente por tudo.

Aos meus irmãos, pelo carinho e por compreenderem as minhas ausências.

Ao Fernando, meu amor, pelo carinho, pela compreensão e por compartilhar comigo minhas aflições e alegrias.

Ao Márcio, a Danusa, a Vera e aos demais colegas, pelo companherismo, pela paciência e pelo carinho.

A professora Eleni Bisognin pela excelente orientação, pela amizade, pelo incentivo e principalmente pela paciência ao longo do curso.

A professora Vanilde Bisognin, pela amizade, pelos ensinamentos e pelo incentivo ao longo desse período.

Aos professores Jaime Ripoll e Cydara Ripoll, pela preocupação e pela atenção que tiveram com a nossa turma.

Ao Centro Universitário Franciscano e ao Instituto de Matemática da UFRGS que oportunizaram a realização do Convênio Interinstitucional.

A CAPES e à FAPERGS pelo incentivo financeiro.

A todos os amigos e familiares pelo incentivo e pelo apoio.

Enfim, agradeço a Deus, pois sem ele, nada disso seria possível.

Resumo

Nessa dissertação estudamos a existência, unicidade e estabilização das soluções de um sistema de ondas elásticas linearmente perturbado. Para a existência e unicidade de solução foi utilizado o Teorema de Lumer-Phillips da teoria de semigrupos e, para a estabilização das soluções do sistema, utilizamos o método de Liapunov.

Abstract

In this work we studied the existence, uniqueness and stabilty of the perturbed linear elastic waves system's solutions. For the solutions' existence and uniquess we used the semigroups' theory by Lumer - Phillips Theorem and for the system solutions stability we used the Liapunov's Method.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é estudar a existência e a unicidade das soluções do sistema de ondas elásticas linearmente perturbado,

$$u_{tt} - b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu + q(x)u + \alpha u_t = 0 \tag{1.1}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x) \tag{1.3}$$

onde $x \in \Omega \subset \Re^3$, Ω um aberto, limitado com fronteira regular e $t \geq 0$.

Para estudar o problema (1.1) vamos assumir que o meio seja isotrópico, isto é, que as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções e que o deslocamento num tempo $t \geq 0$ é dado por $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t))$ para $x \in \Omega$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Em (1.1) Δ denota o operador de Laplace, isto é, $\Delta u = (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3)$. ∇ indica o operador gradiente e $divu$ é o divergente do campo vetorial u. As constantes a e b são constantes positivas com $a > b > 0$ e estão relacionadas às constantes de Lamé λ e μ, da teoria da elasticidade, por $b^2 = \mu$ e $a^2 = 2\mu + \lambda$. A constante α é positiva e $q(x)$ é uma função limitada , $q(x) \geq 0$.

Vamos considerar o sistema (1.1) com condições de fronteira de Dirichlet, isto é,

$$u^i(x,t) = 0 \quad para \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad i = 1,2,3 \tag{1.4}$$

Relacionados ao sistema de ondas elásticas temos os resultados de G. Perla Menzala [19] o qual estudou a existência e comportamento assintótico das soluções de um sistema de ondas elásticas considerando um meio não homogêneo.

Em [22], D. Pereira e G. Perla Menzala estudaram o decaimento exponencial das soluções de um sistema termoelástico linear. R. C. Charão e G. Perla Menzala [8] ,estudaram o sistema de ondas elásticas e obtiveram resultados relativos ao Princípio de Huygens, o Princípio da Amplitude Limite e ressonância. Em [15] P. Martinez e em [2] A. Aassila, obtiveram resultados da estabilização de soluções considerando um sistema não linear de ondas elásticas. Em [5], E. Bisognin, R. Charão e V. Bisognin, estudaram o decaimento exponencial das soluções de um sistema de ondas elásticas considerando uma dissipação não linear localizada. Em [10], [11] e [20] encontram-se outros resultados relativos a estabilização dos sistemas de ondas elásticas.

Nosso propósito neste trabalho é estudar o sistema (1.1)-(1.4) quanto a existência, unicidade e estabilização das soluções. Para mostrar a existência e unicidade das soluções utilizaremos o Teorema de Lumer-Phillips da teoria de semigrupos e, para o estudo da estabilização das soluções, seguiremos o método de Liapunov. Este método consiste em perturbar o funcional de energia do sistema para obter o funcional de Liapunov, através do qual, mostramos a estabilização das soluções.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 2, enunciamos os principais resultados e definições que serão utilizados no desenvolvimento desta dissertação.

No Capítulo 3, mostramos a existência e unicidade de solução do sistema (1.1) utilizando o Teorema de Lumer-Phillips da teoria de semigrupos.

No quarto Capítulo, mostramos a estabilização das soluções do sistema linear de ondas elásticas utilizando o Método do Funcional de Energia de Liapunov.

Na última parte do trabalho encontra-se o Apêndice . No Apêndice I mostamos os resultados relativos a teoria de semigrupos e demonstramos o Teorema de Lumer-Phillips. No Apêndice II demonstramos o Lema de Lax-Milgram que foi utilizado na demonstração da existência de solução do sistema linear de ondas elásticas (1.1)-(1.4).

Capítulo 2

Definições e Resultados Básicos

Nosso objetivo nesse capítulo é definir e enunciar os principais resultados que serão utilizados neste trabalho.

O Espaço $\Re^n$

Seja $\Re^n$ o Espaço Euclidiano n dimensional. Se X e Y são vetores do $\Re^n$ indicamos por $X.Y$ o produto interno de X por Y e:

$$X.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$$

Com este resultado podemos escrever a norma de X como:

$$\|X\| = (X.X)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Em $\Re^n$ vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz, isto é, se $X, Y \in \Re^n$ são dois vetores quaisquer então:

$$|X.Y| \leq \|X\| \, \|Y\|$$

O operador de Laplace, Gradiente e Divergente

Para uma função diferenciável f definida em $\Omega \subset \Re^n$, o operador de Laplace é definido por,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

O operador gradiente, denotado por ∇, é o operador definido como,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Se $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ é um campo vetorial de classe C^1 então o divergente de F é indicado por:

$$divF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Se F e G são dois campos vetoriais de classe C^1 e $\varphi : \Re \to \Re$ é um campo escalar de classe C^1, então valem as identidades:

$$\begin{aligned} div(\varphi F) &= \varphi divF + F.\nabla\varphi \\ div(F+G) &= divF + divG \end{aligned}$$

Teorema da Divergência e Identidades de Green

Sejam $\Omega \subset \Re^n$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $F : \overline{\Omega} \to \Re^n$ um campo vetorial de classe C^1. Então:

$$\int_{\Omega} (divF)\, ds = \int_{\partial\Omega} F.\eta d\Gamma.$$

onde η é a normal externa unitária.

Se u e $v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ são funções reais então valem a Primeira e a Segunda Identidades de Green, que são, respectivamente:

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} \left(v\Delta u + \nabla u.\nabla v\right) ds = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{du}{d\eta}d\Gamma$$

e

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} \left(v\Delta u + u\Delta v\right) ds = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) d\Gamma$$

onde $\frac{\partial}{\partial\eta}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária externa η.

No caso em que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $v|_{\partial\Omega} = 0$ resulta:

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} v\Delta u dx = -\int\limits_{\overline{\Omega}} \nabla v.\nabla u dx \quad e \quad \int\limits_{\overline{\Omega}} v\Delta u dx = \int\limits_{\overline{\Omega}} u\Delta v dx$$

As demonstrações dessas identidades podem ser encontradas em [13]

Espaço L^P

Sejam $\Omega \subset \Re^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^P(\Omega)$ como sendo o conjunto:

$L^P(\Omega)$={$f : \Omega \longrightarrow K$ *tal que* f *é mensurável e* $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$}, *onde* $K = \Re$ *ou* $K = \mathcal{C}$.

Indicamos por:

$$\|u\|_{L^p}^p = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx$$

a norma deste espaço.

Se $p = \infty$ então $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções essencialmente limitadas, isto é,

$L^\infty(\Omega)$ ={$f : \Omega \longrightarrow K$ *tal que* f *é mensurável e* $\exists\ c > 0$ *tal que* $|f(x)| < c$ *quase sempre em* Ω}.

A norma desse espaço é dada por:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)|\,.$$

Quando $p = 2$ temos o espaço $L^2(\Omega)$ que possui produto interno definido por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx$$

e a norma definida por:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O Espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.(veja [4] ou [12])

Desigualdade de Hölder:

Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então $f.g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demonstração: veja [1]

Observe que $p' = 1$ se $p = \infty$ e $p' = \infty$ se $p = 1$.

No Espaço $L^2(\Omega)$ vale a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \left|(u, v)_{L^2(\Omega)}\right| &= \left|\int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

O Espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Para definir o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ precisamos da noção de derivada fraca para funções de $L^p(\Omega)$.

Seja $f \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \Re^n$ aberto. A função $g_j \in L^p(\Omega)$ é a derivada fraca de f em relação a x_j se:

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,onde $C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções de classe C^∞ em Ω com suporte compacto em Ω.

Para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \Re^n$ indicamos a derivada fraca por:

$$D_f^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}};$$

com $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$

Definimos então o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

A norma deste espaço é indicada por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u| \right)^{\frac{1}{p}}$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com esta norma é um espaço de Banach (veja [1]).

Quando $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por:

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

Indicamos o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O Espaço $H_0^m(\Omega)$

Definimos o espaço $H_0^m(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Desigualdade de Poincaré:

Seja Ω um aberto limitado do R^n. Então existe uma constante positiva c_o : $c_o = c_o(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 ds \quad \forall \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração: veja [1] ou [6]

Lema de Lax-Milgram

Seja V um espaço de Hilbert e seja $a : V \times V \rightarrow \Re$ uma aplicação bilinear, contínua e coerciva. Então, para toda função $f \in V'$, existe um único $u \in V$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle$, onde V' denota o espaço dual de V.

Teorema de Lumer-Phillips

Seja X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X. A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $Im(\lambda_0 I - A) = X$, se e só se, A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C^0 em X.

Um estudo sistemático dos espaços $L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ pode ser encontrado em [6]. No apêndice desta dissertação incluimos as demonstrações do Lema de Lax-Milgram e do Teorema de Lumer-Phillips

Capítulo 3

Problema de Cauchy para o sistema de ondas elásticas linear

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a existência e a unicidade de solução do sistema (1.1).

Para este estudo vamos utilizar a Teoria de Semigrupos. O resultado a ser utilizado é o Teorema de Lumer-Phillips, cuja demonstração e enunciado encontram-se no Apêndice I.

Vamos considerar o sistema de ondas elásticas:

$$\begin{cases} u_{tt} - b^2 \Delta u - (a^2 - b^2) \nabla divu + q(x)u + \alpha u_t = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $x \in \Omega \subset \Re^3$, Ω um aberto limitado com fronteira regular, $t \geq 0$, $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t))$, $q(x)$ um função limitada, $q \in L^\infty(\Omega)$, $q(x) \geq 0$. a, b e α são constantes positivas com $a > b$, e vamos assumir que os dados iniciais $u_0(x)$ e $u_1(x)$ pertencem aos seguintes espaços: $u_0 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ e $u_1 \in (H_0^1(\Omega))^3$.

Consideremos o operador elíptico:

$$A_1 = -b^2\Delta. - \left(a^2 - b^2\right)\nabla div.$$

com domínio $D(A_1) = \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right]^3$.

Primeiramente vamos mostrar que A_1 é um operador auto-adjunto e positivo de $\left[L^2(\Omega)\right]^3$

Para mostrar que A_1 é um operador positivo, basta mostrar que $(A_1 u, u)_{[L^2(\Omega)]^3} \geq 0$ para todo $u \in D(A_1)$.

Temos,

$$\begin{aligned}
(A_1 u, u)_{[L^2(\Omega)]^3} &= \left(-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu, u\right)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= -b^2(\Delta u, u)_{[L^2(\Omega)]^3} - \left(a^2 - b^2\right)(\nabla divu, u)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= -b^2\int_\Omega \Delta u.udx - \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega \nabla(divu).udx \\
&= -b^2\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Delta u^i u^i dx - \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega \nabla(divu).udx
\end{aligned}$$

Analisando a primeira parcela da igualdade acima, temos pela Identidade de Green:

$$\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Delta u^i u^i dx = -\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx. \tag{3.2}$$

E na segunda parcela, pela propriedade do divergente :

$$div(udivu) = \nabla(divu).u + (divu)(divu),$$

resulta que:

$$\int_\Omega \nabla divu.udx = -\int_\Omega (divu)^2 dx + \int_\Omega div(udivu)dx.$$

Do teorema da divergência, concluimos:

$$\int_{\Omega} div\,(udivu)\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,(divu)\,d\Gamma = 0,$$

pois $u\,(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega$ e para todo $t \geq 0$.

Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla divu.udx = -\int_{\Omega} (divu)^2\,dx. \tag{3.3}$$

Portanto de (3.2) e (3.3) obtemos,

$$\begin{aligned} -b^2\int_{\Omega} \Delta u.udx - \left(a^2 - b^2\right)\int_{\Omega} \nabla\,(divu)\,.udx &= \\ b^2\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \left(a^2 - b^2\right)\int_{\Omega} (divu)^2\,dx &\geq 0 \end{aligned}$$

o que nos mostra que A_1 é um operador positivo.

Vamos mostrar que A_1 é um operador auto-adjunto, isto é,

$$(A_1u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} = (u, A_1v)_{[L^2(\Omega)]^3}$$

para todo $u, v \in D\,(A_1)$ e

$$A_1 : \left[H^2\,(\Omega) \cap H_0^1\,(\Omega)\right]^3 \longrightarrow \left[L^2\,(\Omega)\right]^3$$

é sobrejetivo.

De fato , temos:

$$\begin{aligned} (A_1u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} &= \left(-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu, v\right)_{[L^2(\Omega)]^3} \\ &= \left(-b^2\Delta u, v\right)_{[L^2(\Omega)]^3} - \left(a^2 - b^2\right)(\nabla divu, v)_{[L^2(\Omega)]^3} \end{aligned}$$

Vemos que, pela Identidade de Green, resulta

$$\begin{aligned}
(\Delta u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \Delta u^i . v^i dx = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \nabla u^i . \nabla v^i dx \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} u^i . \Delta v^i dx = (u, \Delta v)_{[L^2(\Omega)]^3} . \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
(\nabla divu, v)_{[L^2(\Omega)]^3} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} divuv^i dx = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} divu \frac{\partial v^i}{\partial x_i} dx \\
&= -\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u^j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v^i}{\partial x_i} dx = -\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial uj}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v^i}{\partial x_i} dx \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial u^j}{\partial x_j} divvdx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} u^j \frac{\partial}{\partial x_j} divvdx \\
&= (u, \nabla divv)_{[L^2(\Omega)]^3} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

De (3.4) e (3.5) resulta que:

$$\begin{aligned}
(A_1 u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} &= -b^2 (\Delta u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} - \left(a^2 - b^2\right) (\nabla divu, v)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= -b^2 (u, \Delta v)_{[L^2(\Omega)]^3} - \left(a^2 - b^2\right) (u, \nabla divv)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= (u, A_1 v)_{[L^2(\Omega)]^3} .
\end{aligned}$$

Logo A_1 é um operador simétrico.

Devemos mostrar que o operador A_1 é sobrejetivo, isto é , dado $v \in [L^2(\Omega)]^3 \exists w \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ tal que $w = A_1 v$.

Para isso , utilizaremos o Lema de Lax-Milgram.

Seja $V = [H_0^1(\Omega)]^3$ e $a : V \times V \to \Re$ a forma bilinear definida por

$$a(u, v) = b^2 \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx + \left(a^2 - b^2\right) \int_{\Omega} (divu)(divv) dx$$

e $H = [L^2(\Omega)]^3$.

Queremos resolver o problema variacional

$$a(u,v) = \left(-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu, v\right)_{[L^2(\Omega)]^3} \quad \forall u,v \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^3$$

Temos que $a(u,v)$ é coerciva. De fato, por (3.2) e (3.3) , resulta :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \left(-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu, u\right)_{[L^2(\Omega)]^3} \\ &= -b^2\int_\Omega \Delta u.udx + \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega^2 \nabla divu.udx \\ &= b^2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega (divu)^2 dx \geq c\|u\|^2_{[H_1^0(\Omega)]^3}. \end{aligned}$$

E $a(u,v)$ é contínua,pois pela Identidade de Green e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\left(-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu, v\right)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| \\ &= \left|-b^2\int_\Omega \Delta u.vdx - \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega^2 \nabla divu.vdx\right| \\ &\leq \left|b^2\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx + \left(a^2 - b^2\right)\int_\Omega (divu)(divv)\,dx\right| \\ &\leq b^2\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(a^2 - b^2\right)\left(\int_\Omega (divu)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (divv)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\|u\|_{[H_1^0(\Omega)]^3}\|v\|_{[H_1^0(\Omega)]^3} \end{aligned}$$

Como $a(u,v)$ é contínua e coerciva, dada $f \in [L^2(\Omega)]^3$ existe um único $u \in [H_0^1(\Omega)]^3$ tal que

$$a(u,v) = (f,v)_{[L^2(\Omega)]^3} \quad \forall v \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^3,$$

isto é,

$$-b^2\Delta u - \left(a^2 - b^2\right)\nabla divu = f \quad \forall u \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^3.$$

Pela regularidade do problema eliptico $\Delta u = f, u\mid_{\partial\Omega} = 0$, temos que $u \in \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right]^3$ portanto $A_1 : \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right]^3 \longrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^3$ é sobrejetivo.

Como A_1 é um operador simétrico e sobrejetivo segue que A_1 é um operador auto-adjunto.

Consideremos a função $q : \Omega \subset \Re^3 \to \Re^+$ não negativa, a qual pertence a $L^\infty(\Omega)$. Seja $P : D(P) \subseteq \left[L^2(\Omega)\right]^3 \to \left[L^2(\Omega)\right]^3$ o operador multiplicação, ou seja

$$Pf = q(x)\, f.$$

P é um operador positivo e auto-adjunto, ver [19].

Como o operador A_1 é auto-adjunto e positivo, temos então que o operador $A = A_1 + P$ é também um operador auto-adjunto e positivo, portanto tem sentido considerarmos o operador raiz quadrada de A, ver [18].

Seja $A^{\frac{1}{2}}$ a raiz quadrada de A com domínio $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \left[H_0^1(\Omega)\right]^3$. O produto interno em $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$é definido do seguinte modo :

$$(u,v)_{D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)_{[L^2(\Omega)]^3} + (u,v)_{[L^2(\Omega)]^3}$$

para todo $u, v \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ e a norma definida por :

$$\|u\|_{D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} = \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|u\|_{[L^2(\Omega)]^3}$$

Seja $D(A) = \left[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right]^3$. Com esta notação o sistema (1.1) pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + \alpha u_t = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Vamos escrever o sistema (3.6) na forma de um sistema de primeira ordem. Se $v(x,t) = u_t(x,t)$, então:

$$\begin{cases} v_t + Au + \alpha v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

Consideremos o espaço de Hilbert $H = D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \times \left[L^2(\Omega)\right]^3$ e definamos para cada t, $w(t) = [u(x,t), u_t(x,t)]$, logo o sistema (3.6) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} w'(t) = Bw(t) \\ w(0) = w_0 = [u_0(x), u_1(x)] \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $w_0 \in D(A) \times D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\alpha I \end{pmatrix}$, com domínio $D(B) = D(A) \times D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$.

Como nosso propósito é usar o Teorema de Lumer-Phillips, devemos mostrar que B é um operador dissipativo e que $Im\,(I - B) = H$.

Vamos mostrar primeiramente que B é um operador dissipativo, isto é,

$$(BV, V)_H \leq 0 \quad \forall \quad V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(B).$$

De fato, temos,

$$BV = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -Au - \alpha v \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(BV, V)_H &= \left(\begin{pmatrix} v \\ -Au - \alpha v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \times [L^2(\Omega)]^3} \\
&= (v, u)_{D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} + (-Au - \alpha v, v)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= (v, u)_{D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} - (Au, v)_{[L^2(\Omega)]^3} - \alpha (v, v)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= \left(A^{\frac{1}{2}} v, A^{\frac{1}{2}} v\right)_{[L^2(\Omega)]^3} - \left(A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v\right)_{[L^2(\Omega)]^3} - \alpha \|v\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= -\alpha \|v\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \leq 0,
\end{aligned}$$

portanto, B é um operador dissipativo.

Mostraremos a seguir que $Im\,(I - B) = H$

Seja $f \in H$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Vamos mostrar que existe $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D\,(B)$ tal que $(I - B)\, w = f$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Temos que (3.9) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} u - v = f_1 \\ v + Au + \alpha v = f_2 \end{cases} \tag{3.10}$$

Da primeira equação de (3.10) obtemos $v = u - f_1$, e substituindo este valor na segunda equação, resulta:

$$Au + u - f_1 + \alpha (u - f_1) = f_2$$

$$Au + u + \alpha u = f_2 + f_1 + \alpha f_1,$$

ou

$$Au + (1 + \alpha) u = g. \tag{3.11}$$

Para mostrar a existência de uma função u que satisfaça (3.11), utilizaremos o Teorema de Lax-Milgram, cuja demonstração se encontra no Apêndice II. Este teorema nos diz que se $a(u, v)$ é uma forma bilinear contínua e coerciva, e f uma forma linear e contínua em V, onde V é um espaço de Hilbert , então para todo $v \in V$, o problema variacional abstrato $a(u, v) = (f, v)$ possui uma única solução $u \in V$.

Consideremos $V = D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ e a forma bilinear $a(u, v) = (Au + (1 + \alpha) u, v)$, $u, v \in V$

Vamos mostrar que $a(u, v)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram, isto é, vamos mostrar que a forma bilinear $a(u, v)$ é coerciva e contínua.

i) A forma bilinear $a(u, v)$ é coerciva:

Devemos mostrar que existe uma constante $\beta > 0$, tal que $a(u, u) \geq \beta \|u\|_V^2$, para todo $u \in V$

De fato :

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= (Au + (1+\alpha)u, u)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= (Au, u)_{[L^2(\Omega)]^3} + (u,u)_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha (u,u)_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= (Au, u)_{[L^2(\Omega)]^3} + \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= (Au, u)_{[L^2(\Omega)]^3} + \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= \left(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u\right)_{[L^2(\Omega)]^3} + \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha \|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \geq \beta \|u\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}.
\end{aligned}$$

ii) A forma bilinear $a(u,v)$ é contínua, isto é, devemos mostrar que $|a(u,v)| \leq c\|u\|_V \|v\|_V$, onde $c > 0$ é uma constante.

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|(Au + u + \alpha u, v)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| \\
&\leq \left|(Au, v)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| + \left|(u, v)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| + \left|(\alpha u, v)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| \\
&\leq \left|\left(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\right)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| + (1+\alpha)\left|(u, v)_{[L^2(\Omega)]^3}\right| \\
&\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&= \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&\quad - (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&\quad - (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} \left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\
&\quad + (1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|v\|_{[L^2(\Omega)]^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\left\|v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\right) \\
&\quad + \left\|u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\left((1+\alpha)\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + (1+\alpha)\left\|v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\right) \\
&\leq c\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \left\|u\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\right)\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \left\|v\right\|_{[L^2(\Omega)]^3}\right) \\
&\leq c\left\|u\right\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\left\|v\right\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}.
\end{aligned}
$$

Portanto a forma bilinear $a(u,v) = (Au + (1+\alpha)u, v)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram, ou seja, existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall \quad v \in V,$$

isto é,

$$(Au + (1+\alpha)u, v)_{[L^2(\Omega)]^3} = (f,v)_{[L^2(\Omega)]^3}.$$

Considerando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, e passando para o espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\langle Au + (1+\alpha)u, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V,$$

como $f \in [L^2(\Omega)]^3$ então $Au + (1+\alpha)u = f$, quase sempre em Ω. Então u é solução do problema $Au + (1+\alpha)u = f$ em Ω $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, portanto $u \in D(A)$.

Mostramos assim que $Im(I - B) = H$, e concluimos pelo do Teorema de Lumer-Phillips que o problema (1.1) possui uma única solução dada por

$$W = e^{Bt}W_0.$$

Capítulo 4

Estabilização das soluções

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a estabilização das soluções do sistema (3.1). Para tanto vamos utilizar o método do funcional de energia de Liapunov para mostrar que a energia associada ao sistema (1.1)-(1.4) decai exponencialmente. Este método consiste em perturbar o funcional de energia por um funcional adequado e com o auxílio deste funcional perturbado obter a estabilidade (uniforme) da energia.

Considere o sistema de ondas elásticas (1.1).

Tomando o produto interno em $\Re^3$ da equação (1.1) com u_t e integrando em Ω resulta

$$\int_\Omega u_{tt}.u_t dx - b^2 \int_\Omega \Delta u.u_t dx - \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega \nabla divu.u_t dx + \int_\Omega q\left(x\right) u.u_t dx + \alpha \int_\Omega u_t.u_t dx = 0 \quad (4.1)$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx + \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx + \int_\Omega q\left(x\right) |u|^2 dx\right] + \alpha \int_\Omega |u_t|^2 dx = 0$$

Seja

$$E\left(t\right) = \int_\Omega |u_t|^2 dx + b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx + \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx + \int_\Omega q\left(x\right) |u|^2 dx \quad (4.2)$$

o funcional energia.

Temos então

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2\alpha \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx = 0. \tag{4.3}$$

Seja $G(t)$ o funcional definido por

$$G(t) = \int_{\Omega} u.u_t dx.$$

Definimos a energia perturbada $E_\varepsilon(t)$, para $\varepsilon > 0$, por

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon G(t).$$

Temos que, usando a desigualdade de Cauchy- Schwarz e as desigualdades de Poincaré e Hölder, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\Omega} u_t.u dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u_t| \, |u| \, dx \leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon \left(c_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \nabla u^i \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\varepsilon c_0} \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \nabla u^i \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{c_0 \varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \nabla u^i \right|^2 dx,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $c_0 > 0$ é a constante de Poincaré.

Então da definição da energia em (4.2) e de (4.4) resulta

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(t) \leq & \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \nabla u^i \right|^2 dx + \frac{c_0 \varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \left| \nabla u^i \right|^2 dx \\
& + \left(a^2 - b^2 \right) \int_{\Omega} (divu)^2 \, dx + \int_{\Omega} q(x) \, |u|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}(t) \;&\leq\; \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\left(1+\frac{c_0\varepsilon}{2b^2}\right)b^2\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx+ \\ &\left(a^2-b^2\right)\int_{\Omega}(divu)^2\,dx+\int_{\Omega}q(x)\,|u|^2\,dx. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante positiva $C_2>0$, $C_2=C_2(\varepsilon)$, tal que :

$$E_{\varepsilon}(t)\leq C_2(\varepsilon)\,E(t)\,, \tag{4.5}$$

onde $C_2(\varepsilon)=\max\left\{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right),\left(1+\frac{\varepsilon c_0}{2b^2}\right)\right\}$

Por outro lado

$$\begin{aligned} -\varepsilon\int_{\Omega}u_t.udx \;&\leq\; \varepsilon\left|\int_{\Omega}u_t.udx\right|\leq\varepsilon\int_{\Omega}|u_t.u|\,dx \\ &\leq\; \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\frac{\varepsilon c_0}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx. \end{aligned}$$

então

$$\varepsilon\int_{\Omega}u_t.udx\geq-\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\frac{\varepsilon c_0}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx.$$

Assim

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}(t) \;&\geq\; \int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+b^2\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx+\left(a^2-b^2\right)\int_{\Omega}(divu)^2\,dx \\ &+\int_{\Omega}q(x)\,|u|^2\,dx-\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\frac{\varepsilon c_0}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx \\ &\geq\; \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\left(1-\frac{\varepsilon c_0}{b^2}\right)b^2\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\nabla u^i\right|^2dx \\ &+\left(a^2-b^2\right)\int_{\Omega}(divu)^2\,dx+\int_{\Omega}q(x)\,|u|^2\,dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$E_\varepsilon(t) \geq C_1(\varepsilon)\, E(t), \tag{4.6}$$

onde C_1é uma constante positiva, $C_1 = C_1(\varepsilon)$, $C_1(\varepsilon) = \min\left\{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \left(1 - \frac{\varepsilon c_0}{2b^2}\right)\right\}$. $C_1(\varepsilon) > 0$ para $\varepsilon < \min\left\{1, \frac{b^2}{c_0}\right\}$.

De (4.5) e (4.6), resulta

$$C_1(\varepsilon)\, E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq C_2(\varepsilon)\, E(t), \tag{4.7}$$

ou seja, mostramos que a energia perturbada,

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega u.u_t dx,$$

está dominada pela energia do sistema.

Derivando $E_\varepsilon(t)$ em relação a t, resulta

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} E(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} G(t).$$

Mas por (4.3) temos

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = -2\alpha \int_\Omega |u_t|^2 dx + \varepsilon \frac{d}{dt} G(t).$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dt} G(t) = \int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega u.u_{tt} dx. \tag{4.8}$$

Substituindo em (4.8) o valor de u_{tt} obtido na equação (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &= \int_\Omega |u_t|^2 dx + b^2 \int_\Omega \Delta u.u dx + \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega \nabla divu.u dx \\ &\quad - \int_\Omega q(x)\, u.u dx - \alpha \int_\Omega u_t.u dx. \end{aligned}$$

Levando em consideração os resultados obtidos em (3.2) e (3.3), temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d}{dt} G(t) &\leq \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx - \varepsilon \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx \\
&\quad - \varepsilon \int_\Omega q(x) |u|^2 dx + \varepsilon\alpha \left| \int_\Omega u_t . u dx \right|. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Observemos agora que, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré, obtemos

$$
\begin{aligned}
\alpha\varepsilon \left| \int_\Omega u_t . u dx \right| &\leq \alpha\varepsilon \int_\Omega |u_t| |u| dx \leq \alpha\varepsilon \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \alpha\varepsilon \left(c_0 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon\sqrt{\alpha c_0} \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha} \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon^2 \alpha c_0}{2} \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Então de (4.9) e usando (4.10), segue que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d}{dt} G(t) &\leq \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx - \varepsilon \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx \\
&\quad - \varepsilon \int_\Omega q(x) |u|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{\varepsilon^2 \alpha c_0}{2} \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) &\leq -\left(\frac{3\alpha}{2} - \varepsilon\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon\alpha c_0}{2b^2}\right) b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx - \\
&- \ \varepsilon \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx - \varepsilon \int_\Omega q(x) |u|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Tomando $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{3\alpha}{2}, \frac{2b^2}{\alpha c_0}, \frac{b^2}{c_0}, 1\right\}$, resulta :

$$
\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) \leq -C(\varepsilon) \int_\Omega |u_t|^2 dx + b^2 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\nabla u^i\right|^2 dx + \left(a^2 - b^2\right) \int_\Omega (divu)^2 dx + \int_\Omega q(x) |u|^2 dx.
$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) \leq -C(\varepsilon)E(t),$$

onde $C(\varepsilon)$ é uma constante positiva dependendo de ε.

Mas de (4.7) vem que

$$E(t) \leq \frac{E_\varepsilon(t)}{C_1(\varepsilon)}.$$

então

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) \leq -D(\varepsilon)E_\varepsilon(t),$$

onde $D(\varepsilon) = \frac{C(\varepsilon)}{C_1(\varepsilon)}$ e $D(\varepsilon) > 0$.

Portanto

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) + D(\varepsilon)E_\varepsilon(t) \leq 0. \tag{4.11}$$

Para obter a solução de (4.8) vamos multiplicar a equação (4.11) pelo fator integrante $e^{D(\varepsilon)t}$, obtendo

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t)\,e^{D(\varepsilon)t} + e^{D(\varepsilon)t}E_\varepsilon(t) \leq 0.$$

Esta equação é equivalente à

$$\frac{d}{dt}\left(e^{D(\varepsilon)t}E_\varepsilon(t)\right) \leq 0. \tag{4.12}$$

Integrando (4.12) de 0 a t, resulta

$$\int_0^t \frac{d}{ds}e^{D(\varepsilon)t}E_\varepsilon(t)\,ds \leq 0,$$

então, $e^{D(\varepsilon)t}E_\varepsilon(t) - E_\varepsilon(0) \leq 0$.

Concluimos então que

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)\, e^{-D(\varepsilon)t}. \tag{4.13}$$

Observamos que quando $\varepsilon \to 0^+$, da definição de $E_\varepsilon(t)$, resulta que $E_\varepsilon(0)$ converge para $E(0)$, portanto de (4.7) e (4.13) temos que

$$E(t) \leq \frac{E_\varepsilon(t)}{C_1(\varepsilon)} \leq \frac{E_\varepsilon(0)}{C_1(\varepsilon)} e^{-D(\varepsilon)t} \leq B(\varepsilon)\, e^{-D(\varepsilon)t},$$

ou seja,

$$E(t) \leq B(\varepsilon)\, e^{-D(\varepsilon)t},$$

onde $B(\varepsilon) = \frac{E_\varepsilon(0)}{C_1(\varepsilon)}$, isto é, a energia do sistema (1.1) decai exponencialmente, ou seja,

$$E(t) \leq Ce^{-\sigma t},$$

onde C é uma constante que depende da energia no tempo inicial, e σ é uma constante positiva.

Capítulo 5

Apêndice

Apêndice I - Teorema de Lumer-Phillips

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o Teorema de Lumer-Phillips utilizado na demostração de existência e unicidade de solução do sistema de ondas elásticas (1.1).

Faremos inicialmente um estudo de alguns resultados da teoria de semigrupos, necessários para a demonstração deste teorema. Iniciamos com a definição de semigrupo.

Definição 5.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $T(t) : X \to X$ definida para cada valor do parâmetro $t \geq 0$, é um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0 em X, se:*

i) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade em X.*

ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$.

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(T(t) - I)\,x\| = 0 \quad \forall \quad x \in X.$

Definimos o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$ como sendo o operador linear A dado por:

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+T(x)}{dt} \right|_{t=0}$$

para $x \in D(A)$, onde $D(A)$ é o domínio de A, dado por :

$$D(A) = \left\{ x \in X, \quad \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad existe \right\}$$

Daremos a seguir alguns resultados básicos necessários para a demonstração do Teorema de Lumer Phillips.

Proposição 5.1 *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0. Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para $0 \leq t < \infty$.*

Demonstração: Mostraremos primeiramente que existe um $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. De fato, se isto não acontecesse existiria uma sucessão (t_n) onde $t_n \geq 0$ e $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$, tal que $\|T(t_n)\| \geq n \quad \forall \quad n \in N$. Mas então, pelo teorema da Limitação Uniforme (cujo enunciado e demonstração encontram-se em [1]) $\|T(t_n)x\|$ não seria limitado para pelo menos um $x \in X$; contradizendo (iii). Assim $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. Além disso, $M \geq 1$, pois $\|T(0)\| \leq I$, por (i).

Seja $w = \eta^{-1} \ln M \geq 0$. Dado $t \geq 0$ temos que $t = n\eta + \delta$ para algum inteiro não negativo n e algum real δ tal que $0 \leq \delta \leq \eta$ e pelas propriedades dos semigrupos, temos:

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(n\eta)T(t)\| = \|T(\eta)\|^n \|T(\delta)\| \\ &\leq M^{n+1} \leq MM^n \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = \leq M(e^{w\eta})^{\frac{t}{n}} = Me^{wt}. \end{aligned}$$

Observamos que quando $w = 0$ e $M = 1$, T é dito um semigrupo de contração de classe C_0

Proposição 5.2 *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 e seja A seu gerador infinitesimal.*

i) Se $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A) \quad \forall \quad t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{5.1}$$

ii) Se $x \in D(A)$, então:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)\,Adu = \int_s^t AT(u)\,du.$$

iii) Se $x \in X$, então :

$$\int_0^t T(u)\,xdu \in D(A)$$

e

$$T(t)x - x = A\left(\int_0^t T(u)\,xdu\right).$$

Demonstração:

i) Sejam $t \geq 0$ fixado e $h > 0$, temos que

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h}x = \frac{T(h) - I}{h}T(t)\,x = T(t)\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)x$$

quando $h \to 0$; $T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x$ converge para $T(t)\,Ax$, $x \in D(A)$.

Logo, $T(t)\,x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}^{+}T(x) = AT(t)\,x = T(t)\,Ax,$$

ou seja, a derivada à direita de $T(x)$ é $T(t)\,Ax$.

Para provar (5.1) devemos mostrar que para $t > 0$ a derivada à esquerda de $T(t)\,x$ existe e é igual a $T(t)\,Ax$, assim:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] \\
= &\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t+h-h)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)Ax + T(t-h)Ax - T(t)Ax\right] \\
= &\lim_{h\to 0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right] + \lim_{h\to 0}\left(T(t-h)Ax - T(t)Ax\right), \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

temos, pela Proposição (5.1) que $\|T(t-h)\|$ é limitado para $0 < h < t$, e como $x \in D(A)$, o primeiro membro da expressão (5.2) vale zero; além disso, por T ser de classe C_0, $T(t-h)Ax$ converge para $T(t)Ax$.

Logo:

$$\frac{d^-}{dt}T(x) = T(t)Ax.$$

ii) Integrando (5.1) de s a t, em u, obtemos:

$$T(s) - T(t) = \int_s^t \frac{d}{du}T(u)x\,du = \int_s^t AT(u)x\,du$$

iii) Seja $x \in X$ e $h > 0$.

Então:

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u-h)x\,du \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)x\,ds,
\end{aligned}
$$

e quando $h \to 0$, o membro da direita desta igualdade tende para $T(t)x - x$.

Proposição 5.3 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de classe C_0, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Sejam T um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Para todo $x \in X$, consideremos:

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^h T(s)\,ds$$

temos, pela Proposição (5.2 iii) que $x_t \in D(A)$ e como x_t converge para x quando $t \to 0$, o fecho de $D(A)$ é igual a X.

Vamos mostrar que o operador A é um operador linear fechado. Consideremos (x_n), $n \in N$ uma seqüência de elementos de $D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$. Pela Proposição (5.2 ii), temos:

$$T(t)\,x_n - x_n = \int_0^t T(s)\,Ax_n ds. \tag{5.3}$$

Mas pela Proposição (5.1), existe $M > 0$ tal que $\|T(t)\| < M \quad \forall \quad t \geq 0$, assim:

$$\|T(t)\,Ax_n - T(t)\,y\| \leq \|T(t)\|\,\|Ax_n - y\| \leq M\,\|Ax_n - y\|,$$

isto é, $T(t)\,Ax_n$ tende a $T(t)\,y$ uniformemente.

Portanto, no limite, quando $n \to \infty$, temos por (5.3)

$$T(t)\,x - x = \int_0^t T(s)\,yds.$$

Dividindo ambos os membros por $t > 0$, temos:

$$\frac{T(t)\,x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,yds$$

e fazendo $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0}\frac{T(t)\,x - x}{t} = \lim_{t \to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,yds = y.$$

Resulta daí que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Logo A é um operador fechado.

Definição 5.2 *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos valores de $\lambda \in C$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$. O operador linear $(I - \lambda A)^{-1}$, representado por $R(\lambda, A)$ é chamado resolvente de A .*

Com esses resultados e definições vamos demonstrar o Teorema de Hille-Yosida. O resultado desse Teorema é necessário para a demonstração do Teorema de Lumer-Phillips.

Teorema de Hille-Yosida: *Para que um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, é necessário e suficiente que:*

i) A seja fechado e $\overline{D(A)} = X$.

ii) O conjunto resolvente de A, $\rho(A)$ contém $\Re^+$ e $\quad \forall \lambda > 0 \ \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Demonstração : Vamos mostrar que as condições são necessárias.

i) Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, pela Proposição (5.3), A é fechado e $D(A)$ é denso em X.

ii) Para $\lambda > 0$ e $x \in X$, consideremos

$$R(\lambda) x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt;$$

Como o integrando é contínuo, $R(\lambda) x$ existe como integral imprópria, no sentido de Riemann.

Além disso, $R(\lambda)$ é um operador linear limitado, pois

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|\,dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Temos, para $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x + T(t)x)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)\,xdt + \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,xdt.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$, temos :

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda x}T(t)\,xdt - \frac{e^{\lambda x}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda x}T(t)\,xdt\right]$$

resulta $\lambda R(\lambda)x - x \quad \forall \quad x \in X$ e $\lambda > 0$; logo $R(\lambda)x \in D(A) \quad \forall \quad x \in X$ e:

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$$

então:

$$AR(\lambda) - \lambda R(\lambda) = I$$

ou seja,

$$(A - \lambda I)\,R(\lambda) = I. \tag{5.4}$$

Para $x \in A$ e pelas Proposições (5.2 iii) e (5.3), temos:

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}T(t)\,Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda x}AT(t)\,xdt \\
&= \int_0^\infty Ae^{-\lambda x}T(t)\,xdt = A\int_0^\infty e^{-\lambda x}T(t)\,xdt = AR(\lambda)\,x.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5) segue que

$$R(\lambda)(A - \lambda I)x = x \quad \forall \quad x \in D(A),$$

ou seja

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A) \quad \forall \quad \lambda > 0.$$

Logo:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Mostraremos agora que as condições (i) e (ii) são suficientes :

A demonstração da suficiência consiste em tomarmos:

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda(\lambda R(\lambda, A) - I) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

e mostrarmos que o semigrupo e^{tA_λ} tem como limite forte, quando $\lambda \to \infty$, um semigrupo de classe C_0 cujo gerador infinitesimal é A.

a) Em primeiro lugar, vamos mostrar que

$$\lim_{h \to \infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in D(A).$$

Por definição,

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I$$

então:

$$\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A) A,$$

e se $x \in D(A)$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A) Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$, isto é,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)\, x = x, \quad \forall \quad x \in D(A).$$

Mas, por hipótese $D(A)$ é denso em X e

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1;$$

segue daí que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)\, x = x, \quad \forall \quad x \in X.$$

Logo, levando em conta que $A_\lambda = \lambda R(\lambda, A) A$, para cada $x \in D(A)$ temos:

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A) Ax = Ax. \tag{5.6}$$

b) Da definição de A_λ e das hipóteses temos:

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= \left\|e^{t\left(\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda I\right)}\right\| = \\ e^{-\lambda t}\left\|e^{\lambda^2 tR(\lambda,A)}\right\| &\leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t\|R(\lambda,A)\|} \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t.\frac{1}{\lambda}} \leq 1, \end{aligned} \tag{5.7}$$

e portanto, e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações.

c) Mostraremos agora que e^{tA_λ} tende fortemente para um operador linear limitado quando $\lambda \to \infty$. Como para cada λ e cada μ, $R(\lambda, A)$ comuta com $R(\mu, A)$ temos que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ e conseqüentemente, pela Proposição (5.2i) e por (5.7), temos:

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) ds\right\| \\ &\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\left(A_\lambda x - A_\mu x\right)\right\| ds \leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \end{aligned}$$

Seja $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &\leq t\left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \\ &\leq t\left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t\left\| Ax - A_\mu x \right\| \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

então por (5.6), tem-se que $\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\|$ converge para zero quando $\lambda,\ \mu \to \infty$

Logo $\forall \quad x \in D(A)$, e^{tA_λ} converge uniformemente em intervalos limitados. Visto que $D(A)$ é denso em X e $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$, segue que

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} = T(t)x \forall \quad x \in X. \tag{5.8}$$

d) Vamos demonstrar que $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Assim:

$$\begin{aligned} T(0)x &= \lim_{\lambda \to \infty} e^{(0)A_\lambda}x = x \\ T(t+s)x &= \lim_{\lambda \to \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}.e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)x \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $t, s \geq 0$.

Além disso, $T(t)x$ é o limite uniforme de e^{tA_λ}, que é contínuo e $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$, portanto T é um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

e) Para concluírmos a demonstração, nós precisamos mostrar que o gerador infinitesimal de $T(t)$ é A.

De (5.8) e da Proposição (5.2), vem:

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to \infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x \right) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t T(s) Ax ds.$$

Da última igualdade segue que $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniformemente para $T(t)\,Ax$ em intervalos limitados. Seja B um gerador infinitesimal de $T(t)$ e seja $x \in D(A)$

$$Bx = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(u)\,Axdu = Ax.$$

Conseqüentemente $A \subseteq B$.

Visto que B é o gerador infinitesimal de T segue da condição necessária que $1 \in \rho(B)$. Pela hipótese (ii) temos que $1 \in \rho(A)$, como $B \supseteq A$,

$$(I - B)\,D(A) = (I - A)\,D(A) = X,$$

o que implica que :

$$D(B) = (I - B)^{-1} X = D(A).$$

Logo $A = B$ e, assim, A é gerador infinitesimal de T.

O que estudaremos a seguir é uma outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações lineares de classe C_0, devido a Lumer e Phillips, o que segue algumas considerações que faremos agora.

Definição 5.3 *Sejam X um espaço de Banach,X^* seu dual e $\langle .,. \rangle$ e a dualidade entre X e X^*. Para todo $x \in X$ definiremos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por*

$$F(x) = \left\{ x^* \in X^* \quad tal \quad que \quad \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

O Teorema de Hahn-Banach, (cujo enunciado e demonstração encontram-se em [6]), nos garante que $F(x) \neq \phi \quad \forall \quad x \in X$.

Definição 5.4 *Um operador linear A é dito dissipativo se para todo $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $R\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

A proposição a seguir nos dá uma caracterização usual dos operadores dissipativos.

Proposição 5.4 *Se um operador linear é dissipativo então $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.*

Demonstração: Sejam A um operador dissipativo,para $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se x^* e $F(x)$ e $R\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, então:

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\| \|x\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \\ &\geq R\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

Teorema de Lumer-Phillips: *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X. A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, se e somente se, A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 em X. Além disso, para todo $x \in A$ e todo $x^* \in F(x)$, $R\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Demonstração: Seja $\lambda > 0$, como A é dissipativo pela Proposição (5.4) resulta que:

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\| \quad \forall \lambda > 0 \quad e \quad x \in D(A). \tag{5.9}$$

Por hipótese $Im(\lambda_0 I - A) = X$, segue de (5.9) com $\lambda = \lambda_0$ que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado portanto fechado. Mas então $\lambda_0 I - A$ é fechado logo também A é fechado. Se $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ então $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e $R(\lambda, A) \leq \frac{1}{\lambda}$ por (5.9). Segue então do teorema de Hille-Yosida que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

Para completar a demonstração devemos mostrar que :

$$Im\,(\lambda I - A) = X \quad \forall \quad \lambda > 0.$$

Consideramos o conjunto :

$$\Lambda = \{\lambda; 0 < \lambda < \infty \quad e \quad Im\,(\lambda I - A) = X\}.$$

Seja $\lambda \in \Lambda$, por (5.9), $\lambda \in \rho(A)$ resulta que $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$ não é vazio e como $\rho(A)$ é aberto, Λ em $(0, \infty)$. Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda > 0$. Para todo $y \in X$ existe um $x_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y. \tag{5.10}$$

Por (5.9) segue que $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|y\| \leq C$ para algum $C > 0$ e ainda:

$$\lambda_m \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\|. \tag{5.11}$$

Da definição de x_n, vem:

$$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0$$

e portanto

$$\lambda_n x_n - \lambda_n x_m + \lambda_n x_m - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0$$

e assim

$$\lambda_n (x_n - x_m) + x_m (\lambda_n - \lambda_m) - A(x_n - x_m) = 0$$

Logo

$$\lambda_n (x_n - x_m) - A(x_n - x_m) = (\lambda_m - \lambda_n) x_m. \tag{5.12}$$

De (5.11) e (5.12) vem:

$$\begin{aligned}\lambda_n \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m - \lambda_n\| x_m \\ &\leq |\lambda_m - \lambda_n| \|x_m\| \leq C |\lambda_m - \lambda_n|\end{aligned}$$

donde tendo em vista que $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$, segue-se que (x_n) é uma seqüencia de Cauchy. Seja $x_n \rightarrow x$. Como $\lambda_n \rightarrow \lambda$ temos por (5.10) que $Ax_n \rightarrow Ax - y$, mas como já foi visto, A é fechado, $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = y$. Portanto $I(\lambda I - A) = X$ e $\lambda \in \Lambda$. Desse modo Λ é também fechado em $(0, \infty)$ e visto que $\lambda_0 \in \Lambda$ por hipótese $\Lambda \neq \phi$, e portanto $\Lambda = (0, \infty)$. Isto completa a demonstração da primeira parte do teorema.

Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de contrações de clase C_0 em X, então pelo teorema de Hille-Yosida $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e, portanto:

$$Im\,(\lambda I - A) = X \quad \forall \quad \lambda > 0.$$

Além disso, se $x \in D(A)$, $x^* \in F(x)$ então

$$|\langle T(t)\,x, x^* \rangle| \leq \|T(t)\,x\| \, \|x^*\| \leq \|x\|^2$$

e portanto

$$Im\,\langle T(t)\,x - x, x^* \rangle = Im\,\langle T(t)\,x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0$$

Dividindo a igualdade acima por $t > 0$ e fazendo $t \rightarrow 0$ resulta:

$$Im\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0 \quad \forall \quad x^* \in F(x),$$

o que completa a demonstração.

Para a demonstração do Teorema de Lumer-Phillips usamos como referência [21] e [9]

Apêndice II - Lema de Lax-Milgram

Nesta seção, faremos a demonstração do Lema de Lax Milgram que foi utilizado no capítulo 3, para mostrarmos a existência e unicidade de soluções do sistema de ondas elásticas (1.1). Faremos inicialmente algumas considerações sobre formas bilineares e o Teorema de Riesz-Frechét.

Seja V um espaço de Hilbert, com produto interno $((.,.))$ e norma dada por $\|.\|$. Vamos indicar por V' o dual de V.

Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear em V, isto é, a função $a : V \times V \rightarrow \Re$ que a cada $(u,v) \in V \times V$ associa $a(u,v) \in \Re$ é linear em cada coordenada.

Dizemos que $a(u,v)$ é contínua se existe uma constante $M > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall \quad u,v \in V$.

Dizemos que a forma bilinear $a(u,v)$, $\quad u,v \in V$ é coerciva em V se existe $\alpha > 0$ constante, tal que, $a(u,v) \geq \alpha \|v\|^2$.

Seja $f : V \rightarrow \Re$ que a cada $v \in V$ associa $\langle f,v \rangle \in \Re$ uma função linear e contínua em V, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que $|\langle f,v\rangle| \leq c\|v\| \quad \forall \quad v \in V$, então $f \in V'$.

O teorema da Representação de Riesz-Frechét nos diz que num espaço de Hilbert V, dada $f \in V'$ existe um único $\varphi \in V$ tal que $\langle f,v\rangle = (\varphi, v) \quad \forall \quad v \in V$ e $|\varphi|_V = \|f\|_{V'}$.

Utilizamos este resultado na demonstração do Lema de Lax-Milgam.

Lema de Lax-Milgram: *Seja V um espaço de Hilbert e $a : V \times V \rightarrow \Re$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda forma linear contínua f em V, isto é, $f \in V'$, existe um único $u \in V$ tal que $a(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall \quad v \in V$.*

Demonstração: Seja $f : V \rightarrow \Re$ uma forma linear e contínua, pelo Teorema de Riesz-Frechét resulta que para cada $f \in V$ existe um único v_f tal que:

$$f(v) = \langle f, v \rangle = ((v_f, v)) \quad \forall \quad v \in V$$

e

$$\|v_f\| = \|f\|_{V'}$$

Seja

$$\begin{aligned} T : V' &\rightarrow V \\ f &\rightarrow T_f = v_f \end{aligned}$$

T é um isomorfismo isométrico, de fato:

$$\|T_f\|_v = \sup_{v \neq 0, v \in V} \frac{|((T_f, v))|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0, v \in V} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|} = \|f\|_{V'} .$$

Então podemos escrever:

$$\langle f, v \rangle = ((T_f, v)) \quad \forall \quad v \in V.$$

Fixado $u \in V$, seja

$$g_u(v) = \langle g_u, v \rangle = a(u, v) \quad \forall \quad v \in V$$

então $g_u : V \rightarrow \Re$ é uma forma linear contínua em V, isto é,

$$|g_u(v)| = |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| .$$

Assim

$$\|g_u, v\|_{V'} \leq c \|u\| \quad e \quad |g_u(v)| \leq \bar{c} \|v\| .$$

Logo existe $z \in V$ tal que:

$$g_u(v) = \langle g_u, v \rangle = ((z, v)).$$

Deste modo fica definida uma aplicação:

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V \\ u &\longrightarrow z = Au \end{aligned}$$

então

$$a(u, v) = g_u(v) = ((Au, v)) \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Temos que:

a) A é linear e contínua,

De fato:

$$\|Au\|_V = \|z\|_V = \|g_u\|_{V'} = \sup_{v \neq 0, v \in V} \frac{|g_u(v)|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0, v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} \leq M \|u\|_V$$

pois $a(u, v)$ é contínua.

b) A é injetiva:

Como $a(u, v)$ é coerciva e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta que:

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(u, v) = ((Av, v)) \leq \|Av\| \|v\| \quad \forall \quad v \in V,$$

ou seja,

$$\alpha \|v\| \leq \|Av\| \tag{5.13}$$

Se $\|Av\| = 0$, como $0 \leq \alpha \|v\|^2 \leq \|Av\|$ temos $\|v\| = 0$, então $v = 0$, o que prova que A é injetiva.

c) A é sobrejetora.

Mostraremos que A é sobrejetiva, isto é, $A(V) = V$. Para isto precisamos mostrar que:

i) $A(V)$ é fechado em V.

ii) $\overline{A(V)} = V$, o que é equivalente a mostrar que o perpendicular de $A(V)$, dado por

$$[A(V)]^{\perp} = \{u \in V / ((u, v)) = 0 \quad \forall \quad v \in A(V)\}$$

é o espaço nulo.

i) Vamos mostrar primeiramente que $A(V)$ é fechado:

Seja $\overline{A(V)}$ o fecho de $A(V)$ e (Av_n) uma seqüência de elementos de $A(V)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} Av_n = w, \quad w \in V.$$

Por (5.13) resulta que $\|Av_n\| \geq \alpha \|v_n\|$, logo como A é linear, resulta:

$$\|Av_m - Av_n\| = \|A(v_m - v_n)\| \geq \alpha \|v_n - v_m\| \quad \forall \quad n, m \in N$$

portanto (v_n) é uma seqüência de Cauchy em V. Seja $v = \lim_{n \to \infty} v_n$, como V é contínua, $\lim_{n \to \infty} Av_n = Av$ em V

ii) Vamos mostrar que $A(V)$ é denso em V.

Temos $A(V) \subset V$. Seja $v_0 \in V$ tal que:

$$((v_0, v)) = 0 \quad \forall \quad v \in A(V)$$

portanto:

$$((v_0, Av)) = 0 \quad \forall \quad u \in V.$$

Tomando-se $u = v_0$, implica $((v_0, Av_0)) = 0$, logo $a(v_0, v_0) = 0$ e, portanto, $v_0 = 0$. Isto mostra que $\overline{A(V)} = V$ e A é sobrejetora.

Sendo A injetora e sobrejetora, existe $A^{-1} : V \to V$ tal que A^{-1} é linear e contínua.

De fato, da coercividade de $a(u, v)$, resulta que

$$\|Au\| \geq \alpha \|u\| \quad \forall \quad u \in V \tag{5.14}$$

Como A é sobrejetora, dado $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $Au = v$, logo $u = A^{-1}v$. Substituindo em (5.14) resulta:

$$\left\|A^{-1}v\right\| \leq \frac{1}{\alpha} \|v\| \quad \forall \quad v \in V,$$

logo A^{-1} é limitada. Sendo A^{-1} linear e limitada A^{-1} é contínua.

Concluimos então que existe $u \in V$ tal que $Au = T_f$ o qual é dado por $u = A^{-1}T_f$

Devemos mostrar que a solução do problema variacional: achar $u \in v$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle = ((v_f, v)) \quad \forall \quad v \in V$, sendo $f \in V'$ é única. Para isso suponhamos que existam $u, u^* \in V$ soluções da equação $a(u, v) = \langle f, v \rangle$. temos que:

$$a(u, v) - a(u^*, v) = 0,$$

ou seja,

$$a(u - u^*, v) = 0 \quad \forall \quad u \in V$$

Tomando $v = u - u^*$ e como por hipótese $a(.,.)$ é coerciva, temos:

$$0 \leq \alpha \|u - u^*\|^2 \leq a(u - u^*, u - u^*) = 0,$$

portanto

$$\|u - u^*\| = 0,$$

logo $u = u^*$ assim existe um único $u \in V$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ para todo $v \in V$.

Para a demonstração do Lema de Lax-Milgram usamos como referê ncia [17]

Referências

[1] Adams, R. A. ,*Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Assila, M., *Strong asymptotic stability of isotroptic sistem with internal damping*, Acta. Sci. Math., (to appear).

[3] Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, New York, 1973.

[4] Bachman, G. and Narici, L. , *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[5] Bisognin, E., Charão, R. C. e Bisognin, V., *Decaimento exponencial das soluções do sistema de ondas elásticas com dissipação não linear localizada*, 51º Seminário Brasileiro de Análise (2000), 377-382.

[6] Brézis, H. , *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[7] Charão, R. C., *On the principle of limiting amplitude for pertubed elastic waves in 3D*, Bolletino U.M.I., (**7**)10-B (1996), 781-797.

[8] Charão, R. C. and Menzala, G. P., *On Huygen's principle and perturbed elastic waves in 3D*, Differential and Integral Equations, **5** (3)(1992), 631-646.

[9] Gomes, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Textos de Métodos Matemáticos, nº 19, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[10] Kapitonov, B., *Decrease of a solution of an exterior boundary value problem for a system elasticity theory*, J. Differential Equations, **22**(1986), 332-337.

[11] Komornik, V., *Rapid boundary stabilization of the wave equation*, SIAM J. Control and Optimization, **29**(1)(1991), 197-208.

[12] Kreiysizig, *Functional Analysis with Applications*, Wiley, N Y, 1989.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. II, Projeto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[14] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[15] Martinez, P., *Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation*, Asymptotic Analysis, **19**(1999), 1-17.

[16] Medeiros, L. A., *Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações*, Textos de Métodos Matemáticos, nº 16, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[17] Medeiros, L. A. e Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Impressos do IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1988.

[18] Medeiros, L. A., *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert*, Textos de Métodos Matemáticos, nº 04, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1988.

[19] Menzala, G. P., *Large time behavior of elastic waves in inhomogeneous medium*, Bolletino UMI, **7** 3-B(1989), 95-108.

[20] Nakao, M., *Stabilization of local energy in an exterior domain for the wave equation with a localized dissipation*, Journal of Differential Equations, **148** (1998), 388-406.

[21] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] Pereira, D. C. and Menzala, G. P., *Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity*, Comp. Appl. Math., **8**(1989), 193-204.

[23] Reed, M. and Simon, B., *Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

[24] Renardy, M. and Rogers, R. C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[25] Rudin, W. *Functional Analysis*, MacGraw- Hill, 1973.

[26] Yosida, K. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

GRÁFICA UFRGS

Impressão: Gráfica UFRGS
Rua Ramiro Barcelos, 2705 - 1º andar
Fone: 316 5088 Fax: 316 5083 - Porto Alegre - RS
E-mail: grafica@vortex.ufrgs.br