UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOBRE A TRANSFORMADA GLOBAL DE ANÉIS NOETHERIANOS

LIANA BEATRIZ COSTI NÁCUL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PORTO ALEGRE, JULHO DE 1985

Dissertação realizada sob a orientação da Prof. Dra. Ada Maria de S. Doering e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Ada pela presença constante, pelo interesse, pelas sugestões e críticas e também pela paciência e a Vera pelo trabalho de datilografia.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Seja R um anel Noetheriano reduzido com anel total de frações $Q(R)$. Se R tem dimensão um, o Teorema de Krull-Akizuki afirma que $Q(R)$ é tal que todo sub-anel entre R e $Q(R)$ é Noetheriano. Uma questão natural é saber se este resultado vale para anéis reduzidos de dimensão maior que um.

No primeiro capítulo, depois de mostrarmos que ele não vale, procuramos um substituto para $Q(R)$. Seguindo Matijevic, introduzimos o conceito de *transformada global* $T(R)$, definido por $T(R) = \{\xi \in Q(R) \mid \exists\, M_1,\ldots,M_t$ ideais máximos de R tais que $\xi M_1,\ldots,M_t \subseteq R\}$. Mostramos que todo sub-anel entre R e $T(R)$ é Noetheriano; em dimensão um, $T(R) = Q(R)$, e portanto temos uma generalização do Teorema de Krull-Akizuki. Estudamos também o problema da "maximalidade" de $T(R)$ quando R é um domínio; mostramos que $T(R)$ é "maximal" se, e somente se, o fecho inteiro de R está contido em $T(R)$; mostramos que $T(R)$ é "o maior possível" se R é inteiramente fechado. No decorrer de nosso estudo, mostramos que se A é um sub-anel entre R e $Q(R)$, então todo anel entre R e A é Noetheriano se, e só se, para todo sub-anel B entre R e A e para todo $x \in R$, não divisor de zero, $\frac{B}{xB}$ é um R-módulo finito.

Observamos ainda que, no caso de R ser um domínio Noetheriano de dimensão 2, se $R^* = \bigcap_{\substack{\text{alt } P = 1 \\ P \in \text{Spec } R}} R_P$ então, $R^* \subseteq T(R)$ conseqüentemente, R^* é Noetheriano; isto responde a uma pergunta antiga de Krull.

No segundo capítulo, estudamos algumas propriedades da transformada global $T(R)$ no caso de R ser um domínio Noetheriano de dimensão maior que um. O resultado principal afirma que $T(R)$ é inteiro sobre R se, e só se, o fecho inteiro de R não possui ideais máximos de altura um; isto se obtém a partir de um resultado devido a Nishimura: se R é local, então $T(R)$ é uma localização de uma "certa" extensão inteira de R. Estudamos também a estrutura de ideais primos de $T(R)$. Mostramos que se P é um ideal primo de R não máximo, então existe um único primo Q de $T(R)$ que contrai a P; para este Q temos $R_P = T(R)_Q$; mostramos ainda que se M é um ideal máximo de R com altura maior que um, então existe um ideal máximo de $T(R)$ com a mesma altura que M que se contrai a M, e que cada ideal máximo de $T(R)$ se contrai a um ideal máximo de R; disto se obtém que $\dim T(R) = \dim R$.

I - SOBRE A PROPRIEDADE NOETHERIANA DOS SOBREANÉIS DE UM ANEL R

Se R é um domínio Noetheriano com corpo de frações K, uma questão natural é saber se todo o domínio compreendido entre R e K é Noetheriano.

O clássico Teorema de Krull-Akizuki responde afirmativamente esta questão, se $\dim R \leq 1$.

1.1 <u>*TEOREMA DE KRULL-AKIZUKI*</u>: [7, Teorema 93]

Seja R um domínio Noetheriano com corpo de frações K. Se $\dim R \leq 1$ então todo subanel entre R e K é Noetheriano.

Este teorema será obtido como caso particular de uma teoria mais geral que vamos desenvolver. Cabe aqui perguntar se o resultado é válido para um domínio R com $\dim R \geq 2$. Verificamos que, na realidade, o resultado é sempre falso, conforme mostra a próxima proposição.

1.2 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano com corpo de frações K. Se $\dim R > 1$, então existe um domínio não Noetheriano entre R e K.

Prova:

Suponhamos que $\dim R > 1$ e que todo o domínio entre R e K seja Noetheriano. Sejam P e Q ideais primos distintos de R com $(0) \subset P \subset Q$. Tomemos $x \in P$, $x \neq 0$ e $y \in Q$, y não pertencente a nenhum ideal primo mínimo de x. Seja $T = R[x, \frac{x}{y}, \frac{x}{y^2}, \ldots, \frac{x}{y^i}, \ldots]$ e $I = (x, \frac{x}{y}, \ldots, \frac{x}{y^i}, \ldots)T$. Como $R \subsetneq T \subsetneq K$ então, T é um domínio Noetheriano, portanto, I é um ideal finitamente gerado. Temos assim que, para algum $k \in N$, $I = (x, \frac{x}{y}, \ldots, \frac{x}{y^k})$. Uma vez que $\frac{x}{y^{k+1}} \in I$, existem $a_0, a_1, \ldots a_k$ elementos de T tais que $\frac{x}{y^{k+1}} = a_0 x + a_1 \frac{x}{y} + \ldots + a_k \frac{x}{y^k}$ logo, $1 = y.f_1$, com $f_1 \in T$. Portanto, $1 = y(a + \sum_{\substack{i>0 \\ j\geq 0}} a_{ij} \frac{x^i}{y^j})$ com a e a_{ij} elementos de R. Então, tomando $m = \max\{j/a_{ij} \neq 0\}$ segue que $y^m(1 - ay) \in xR$. Com isto, concluímos que, para algum $t \in N$, $(1 - ay)^t \in xR$, já que y não está em nenhum ideal primo mínimo de x. Como $xR \subseteq Q$, temos que $1 - ya \in Q$, o que é um absurdo pois $y \in Q$ e Q é um ideal primo próprio de R.

Δ

Observe que, dado um anel Noetheriano R com anel total de frações $Q(R)$, sempre existe um subanel B , entre R e $Q(R)$, tal que todo o subanel entre R e B seja Noetheriano. Basta tomar $B=R$ ou B um R-módulo finito. Em vista disto e da Proposição (1.2) é natural questionar a existência de um maior subanel B com esta propriedade.

Para facilitar a linguagem fazemos a seguinte definição:

1.3 *DEFINIÇÃO:*

Seja R um anel com anel total de frações $Q(R)$. Seja B um subanel entre R e $Q(R)$.

Dizemos que (R,B) é um *par Noetheriano* se todo o subanel entre R e B é Noetheriano; dizemos que o par Noetheriano (R,B) é *maximal* se $B \subseteq C \subseteq Q(R)$ e (R,C) é par Noetheriano implica que $B=C$; dizemos que (R,B) é o *maior* par Noetheriano se é o único par Noetheriano maximal.

Observemos que para domínios Noetherianos de dimensão maior que um, nem sempre existe um maior par Noetheriano, como mostra o exemplo seguinte.

1.4 *EXEMPLO:*

Seja R um domínio Noetheriano de dimensão dois, tal que, entre R e seu fecho $\overline{R}$ existe um domínio não Noetheriano [9, Apêndice, Exemplo 4]. Suponhamos que exista um maior par Noetheriano (R,B) . É claro que $\overline{R} \not\subseteq B$. Seja $x \in \overline{R} \setminus B$.

Como $R[x]$ é um R-módulo finito, $(R,R[x])$ é um par Noetheriano, conseqüentemente, $R[x] \subseteq B$, o que não pode acontecer visto que $x \notin B$.

Em virtude deste exemplo, devemos nos restringir a perguntar se, dado um anel Noetheriano R com anel total de frações $Q(R)$, existe um subanel B , entre R e $Q(R)$ de modo que (R,B) seja um par Noetheriano maximal. Vamos procurar um anel B que, no caso de R ser um domínio Noetheriano unidimensional, corresponda ao corpo de frações de R . Desta forma, teremos uma generalização do Teorema de Krull-Akizuki. É com este objetivo que Matijevic introduz o conceito seguinte:

1.5 <u>*DEFINIÇÃO:*</u>

Seja R um anel Noetheriano com anel total de frações $Q(R)$. A <u>*transformada global de R*</u> é $T(R) = \{x \in Q(R) / \exists M_1,\ldots,M_t \in \text{SpecMax}\, R \,,\ x M_1 \ldots M_t \subseteq R\}$.

A idéia de definir $T(R)$ como acima surge, segundo o próprio Matijevic, da observação do Teorema de Krull-Akizuki. Notemos que, quando R é um domínio Noetheriano unidimensional com corpo de frações K , $T(R) = K$. De fato, tomando $y \in K$ temos que $y = \frac{a}{b}$ com $a,b \in R$, $b \neq 0$. Sejam $M_1,\ldots,M_t$ os ideais primos associados a b . Tais ideais são em número finito, pois R é Noetheriano e são maximais pois R é unidimensional. Temos que $\sqrt{(b)} = M_1 \cap \ldots \cap M_t = M_1 \ldots M_t$ [1,Proposição 1.10] logo para algum $k \in N$ $(M_1 \ldots M_t)^k \subseteq (b)$ portanto, $y(M_1 \ldots M_t)^k \subseteq R$.

Para domínios Noetherianos podemos obter uma nova caracterização da transformada global, o que está feito na próxima proposição.

1.6 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano e $\mathcal{B} = \{P \in \operatorname{Spec} R /$ P não é ideal máximo de $R\}$. Temos que $T(R) = \bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P$.

Prova:

Se $\mathcal{B} = \phi$, então $\bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P = K = T(R)$.

Consideremos agora o caso $B \neq \phi$. Observemos inicialmente que, dado um ideal $P \in \mathcal{B}$, $\frac{a}{b} \in R_P$ se, e somente se, existem $r \in R$ e $s \in R \setminus P$ tais que $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ ou seja, $(b:a) \not\subseteq P$.

Mostremos que $T(R) \subseteq \bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P$. Para isto, notemos que, $\frac{a}{b} \in T(R)$ se, e somente se, existem $M_1, \ldots, M_t \in \operatorname{Spec} \operatorname{Max} R$ tais que $\frac{a}{b} M_1 \ldots M_t \subseteq R$, isto é, $a M_1 \ldots M_t \subseteq bR$, ou seja, $M_1 \ldots M_t \subseteq (b:a)$. Então, é claro que, se P é um ideal primo de R que não é máximo, devemos ter $(b:a) \not\subseteq P$ pois, do contrário, teríamos que, para algum i, $1 \leq i \leq t$, $P = M_i$. Decorre da observação feita no início que $\frac{a}{b} \in \bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P$.

Mostremos agora que $\bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P \subseteq T(R)$. Para isto, tomemos $\frac{a}{b} \in \bigcap_{P \in \mathcal{B}} R_P$. Decorre da observação inicial que, qualquer que seja o ideal primo $P \in \mathcal{B}$, $(b:a) \not\subseteq P$. Temos então dois casos a considerar:

a) Os únicos ideais primos que contém $(b:a)$ são ideais máximos. Então, como R é Noetheriano, temos um número finito de tais ideais, digamos $M_1,\ldots,M_t$ e $\sqrt{(b:a)} = \bigcap_{i=1}^{t} M_i$. Segue daí e do fato de ser R Noetheriano que, para algum $k \in N$, $[\prod_{i=1}^{t} M_i]^k = [\bigcap_{i=1}^{t} M_i]^k \subseteq (b:a)$. Portanto, $\frac{a}{b} \in T(R)$.

b) $(b:a) = R$. Neste caso, $1 \in (b:a)$ logo, $\frac{a}{b} \in R$ portanto, $\frac{a}{b} \in T(R)$.

Δ

1.7 *COROLÁRIO:*

Se R é um domínio Noetheriano com fecho inteiro $\overline{R}$ e B é um domínio Noetheriano entre R e $\overline{R}$, então $T(R) \subseteq T(B)$.

Prova:

Seja P' um ideal primo não máximo de B e seja $P = P' \cap R$. Então, P é um ideal primo não máximo de R, uma vez que B é uma extensão inteira de R. Logo, $T(R) = \bigcap_{\substack{Q \in \operatorname{Spec} R \\ Q \notin \operatorname{Spec Max} R}} R_Q$ $\subseteq R_P \subseteq B_{P'}$. Portanto, $T(R) \subseteq \bigcap_{\substack{P' \in \operatorname{Spec} B \\ P' \notin \operatorname{Spec Max} R}} B_{P'}$, ou seja, $T(R) \subseteq T(B)$.

Δ

Um dos objetivos deste capítulo será mostrar que $(R,T(R))$ é um par Noetheriano, se R for um anel Noetheriano reduzido, isto é, sem elementos nilpotentes não nulos. Este resultado generaliza o Teorema de Krull-Akizuki. Um outro será investigar quando $(R,T(R))$ é um par Noetheriano maximal. Em vista disso, será conveniente caracterizarmos os pares Noetherianos.

Observamos que, para provar o Teorema de Krull-Akizuki, mostra-se inicialmente que, dado um domínio Noetheriano R, com corpo de frações K e $\dim R \leq 1$, afirmar que (R,K) é um par Noetheriano é equivalente a afirmar que, para todo o subanel A entre R e K e todo elemento não nulo $x \in R$, A/xA é um R-módulo finito [7, Teorema 93]. De fato, esta é a equivalência que pode ser generalizada para domínios Noetherianos de dimensão maior que um e até mesmo para anéis Noetherianos reduzidos. Isto é o que faremos no próximo Teorema, cuja prova é uma adaptação da demonstração feita por Wadsworth [12, Teorema 2].

1.8 <u>*TEOREMA:*</u>

Seja R um anel Noetheriano reduzido, $Q(R)$ seu anel total de frações e D um subanel entre R e $Q(R)$. O par (R,D) é Noetheriano se, e somente se, para todo subanel A entre R e D e qualquer que seja x não divisor de zero de R, A/xA é um R-módulo finito.

Antes de provarmos o Teorema, enunciamos e provaremos três lemas que serão utilizados na sua demonstração.

1.9 <u>*LEMA:*</u>

Se P é um ideal primo mínimo do anel A, então todo o elemento de P é divisor de zero.

<u>*Prova:*</u>

Denotemos por $\mathcal{D}$ o conjunto dos divisores de zero de A. Consideremos $S = \{ab \mid a \notin P \text{ e } b \notin \mathcal{D}\}$. S é um sistema multiplicativo de A que não contém zero. Seja Q um elemento máximo da família dos ideais de A que não encontram S. Q é um ideal primo de A [7, Teorema 1]. Afirmamos que $P = Q \subseteq \mathcal{D}$. De fato, caso existisse $x \in Q \setminus P$, como $x = x.1$ com $x \notin P$ e $1 \notin \mathcal{D}$, teríamos $x \in S$, o que contraria o fato de ser Q disjunto de S. Já que P é um ideal primo mínimo de A e $Q \subseteq P$, então $Q = P$. Por outro lado, se existisse $x \in Q \setminus \mathcal{D}$, como $x = 1.x$ com $1 \notin P$ e $x \notin \mathcal{D}$, teríamos $x \in S$, o que é absurdo pois $Q \cap S = \phi$. Com isto, fica provado que $P \subseteq \mathcal{D}$, logo, os elementos de P são divisores de zero.

Δ

1.10 LEMA:

Seja R um anel Noetheriano reduzido com anel total de frações $Q(R)$. Então, $\dim Q(R) = 0$ e, se B é um subanel qualquer entre R e $Q(R)$, o número de ideais primos mínimos de B é finito.

Prova:

Sejam $P_1, \ldots, P_t$ os ideais primos mínimos de R, que são em número finito pois R é Noetheriano. Como R é um anel reduzido, $(0) = \sqrt{(0)} = \bigcap_{i=1}^{t} P_i$. Pela unicidade da decomposição primária temos que o ideal (0) de R não possui primos imersos conseqüentemente, $Q(R)$ tem dimensão zero e possui um número finito de ideais primos, uma vez que $Q(R) = R_{\bigcup_{i=1}^{t} P_i}$.

Por outro lado, $Q(R)$ também é o anel total de frações de B logo, $Q(R) = B_{\mathcal{D}}$, onde $\mathcal{D} = \{x \in B \mid x$ não é divisor de zero de $B\}$. Então podemos afirmar que existe apenas um número finito de ideais primos de B que não encontram $\mathcal{D}$ e assim, concluir que B possui um número finito de ideais primos mínimos, já que qualquer ideal primo mínimo de B não encontra $\mathcal{D}$ (Lema 1.9).

Δ

1.11 LEMA:

Seja B um anel reduzido. Se B possui um número finito de ideais primos mínimos e, se para cada ideal primo mínimo P de B, $\frac{B}{P}$ é Noetheriano, então B é Noetheriano.

Prova:

Sejam $P_1, \ldots, P_t$ os ideais primos mínimos de B. Temos que $\bigcap_{i=1}^{t} P_i = (0)$ pois, do contrário, teríamos um elemento nilpotente não nulo em B. Então, como $B \simeq \frac{B}{(0)} = \frac{B}{\bigcap_{i=1}^{t} P_i}$, basta mostrar que $\frac{B}{\bigcap_{i=1}^{t} P_i}$ é Noetheriano para que possamos concluir a prova.

Mostremos por indução em n que, se $n \leq t$ então $\frac{B}{\bigcap_{i=1}^{n} P_i}$ é um B-módulo Noetheriano.

Para $n = 1$ a afirmativa é verdadeira pois, como para todo i, $1 \leq i \leq t$, por hipótese $\frac{B}{P_i}$ é um anel Noetheriano, então $\frac{B}{P_i}$ é um B-módulo Noetheriano.

Suponhamos que seja válida para $n < t$. Seja $P = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ e tomemos a seguinte seqüência de B-módulos

$$0 \longrightarrow \frac{P_{n+1}}{P \cap P_{n+1}} \xrightarrow{\ \tau\ } \frac{B}{P \cap P_{n+1}} \xrightarrow{\ \psi\ } \frac{B}{P_{n+1}} \longrightarrow 0$$

onde $\tau(x + P \cap P_{n+1}) = x + P \cap P_{n+1}$ e $\psi(x + P \cap P_{n+1}) = x + P_{n+1}$. Claramente esta é uma seqüência exata de B-módulos. Basta provar que $\frac{P_{n+1}}{P \cap P_{n+1}}$ e $\frac{B}{P_{n+1}}$ são B-módulos Noetherianos para concluir que $\frac{B}{P \cap P_{n+1}}$ é um B-módulo Noetheriano [1,Proposição 6.3] e com isto terminar a indução. E, de fato isto ocorre pois, $\frac{B}{P_{n+1}}$ é um B-módulo Noetheriano e $\frac{P_{n+1}}{P \cap P_{n+1}}$ é um B-módulo Noetheriano porque $\frac{P_{n+1}}{P \cap P_{n+1}} \simeq \frac{P + P_{n+1}}{P}$ e este último é um B-submódulo de $\frac{B}{P}$ que, pela hipótese de indução é um B-módulo Noetheriano.

Passamos agora a prova do Teorema já enunciado.

Prova do Teorema 1.8:

Suponhamos que (R,D) seja um par Noetheriano. Seja A um anel entre R e D e x um elemento de R, não divisor de zero de R, isto é, $\frac{1}{x} \in Q(R)$. Consideremos o anel $R + xA$. Como $R \subsetneq R + xA \subseteq A \subseteq D$, $R + xA$ é um anel Noetheriano. Por outro lado, $A \subseteq \frac{1}{x}(R + xA)$ portanto, A é um $R + xA$ módulo finito e, conseqüentemente, $\frac{A}{xA}$ é um $\frac{R + xA}{xA}$ módulo finito. Como $\frac{R + xA}{xA}$ é um R-módulo gerado por $1 + xA$, temos que $\frac{A}{xA}$ é um R-módulo finito.

Vale aqui observar que a hipótese de que R é um anel reduzido não foi utilizada nesta parte da demonstração.

Mostremos agora que vale a recíproca. Seja A um anel entre R e D. Como R é um anel reduzido então A também o é. Pelo Lema 1.10, A possui um número finito de ideais primos mínimos então, se mostrarmos que $\frac{A}{P}$ é um anel Noetheriano para todo o ideal primo mínimo P de A, decorrerá do Lema 1.11 que A é Noetheriano. Seja então Q um ideal primo mínimo de A. Vamos mostrar que todos os ideais primos de $\frac{A}{Q}$ são finitamente gerados [7, Teorema 8]. Seja $\mathcal{J}$ um ideal primo de $\frac{A}{Q}$. Podemos supor $\mathcal{J} \neq (0)$. Seja J o ideal primo de A tal que $Q \subsetneq J$ e $\mathcal{J} = \frac{J}{Q}$. Afirmamos que J possui um elemento não divisor de zero de A. Para justificar esta afirmação observemos primeiramente que pelo Lema 1.10, $\dim Q(R) = 0$. Por outro lado, $Q(R)$ também é o anel total de frações de A, portanto, $Q(R) = A_{\mathcal{D}}$, onde $\mathcal{D} = \{a \in A \mid a$ não é divisor de zero de $A\}$. Se todos os elementos de J fossem divisores de zero em A, teríamos $J \cap \mathcal{D} = \phi$ e, conseqüentemente, $Q.Q(R) \subsetneq J.Q(R) \subsetneq Q(R)$, o que contraria o fato de dimensão de $Q(R)$ ser zero. Seja $b \in J$, não divisor de zero de A. Existem, x e y em R tais que y não é divisor de zero de R e $b = \frac{x}{y}$. Então, x é um elemento não divisor de zero de $J \cap R$. Pela hipótese feita, o R-módulo $\frac{A}{xA}$ é finito logo, $\frac{A}{xA}$ é um anel Noetheriano; conseqüentemente, o ideal $\frac{J}{xA}$ é finitamente gerado portanto, J é um ideal finitamente gerado e daí decorre que $\mathcal{J} = \frac{J}{Q}$ é um ideal finitamente gerado.

Δ

O próximo Teorema é devido a Matijevic [8,Teorema]. Como conseqüência imediata teremos que, se R é um anel Noetheriano reduzido, então $(R,T(R))$ é um par Noetheriano.

1.12 <u>*TEOREMA*</u>: [8,Teorema]

Se R é um anel Noetheriano e A é um subanel entre R e $T(R)$ então, para cada $x \in R$, não divisor de zero, $\frac{A}{xA}$ é um R-módulo finito.

<u>*Prova*</u>:

Para provar que $\frac{A}{xA}$ é um R-módulo finito, mostraremos que existe $n \in N$ tal que $A \subseteq Rx^{-n} + xA$, de onde decorrerá que $\frac{A}{xA}$ é um R-submódulo de $\frac{Rx^{-n} + xA}{xA}$ e, como este é um R-módulo Noetheriano, uma vez que é gerado como R-módulo por $x^{-n} + xA$, teremos então a validade da tese.

Inicialmente mostremos que, para cada $a \in A$, existe $k \geq 0$ tal que $a \in Rx^{-k} + xA$. Tomemos $a \in A$. Se $a \in R$, basta tomar $k = 0$. Podemos supor então que $a \in A \setminus R$. Denotemos por J o seguinte conjunto $J = \{x \in R \mid xa \in R\}$. Como $a \in A$ e A, por sua vez, é um subconjunto de $T(R)$, existe um número finito de ideais máximos de R, digamos $M_1, \ldots, M_t$ tais que $aM_1 \ldots M_t \subseteq R$. Pela definição de J concluímos que $M_1 \ldots M_t \subseteq J$. Consideremos o anel $\frac{R}{J}$. Observemos que, por ser R um anel Noetheriano, $\frac{R}{J}$ também será. Além disto, todo o ideal primo $\mathcal{P}$ de $\frac{R}{J}$ é da forma $\mathcal{P} = \frac{P}{J}$, onde P é um ideal primo de R que contém J. Como $J \supseteq M_1 \ldots M_t$, temos que, para algum i, $1 \leq i \leq t$, $P = M_i$. Disto, decorre que todo o ideal primo de $\frac{R}{J}$ é um ideal máximo de $\frac{R}{J}$. Conseqüentemente, $\frac{R}{J}$ é um anel Artiniano [1, Teorema 8.5]. Portanto, a seqüência de ideais $\frac{(x)+J}{J}$ $\frac{(x^2)+J}{J}$ ... estabiliza-se. Logo, para algum $k \geqslant 0$ temos $(x^k)+J=(x^{k+1})+J$, o que implica a existência de elementos $r \in R$ e $j \in J$ tais que $x^k = r\,x^{k+1} + j$. Daí, temos que $a\,x^k = a\,r\,x^{k+1} + a\,j$ ou seja, $a = a\,r\,x + a\,j\,x^{-k}$, o que nos permite afirmar que $a \in (Ax+Rx^{-k})$, pois $a\,j \in R$, visto que $j \in J$.

Mostremos agora que $\frac{xA \cap R}{xR}$ é um R-módulo de comprimento finito. Como $xA \cap R$ é um ideal do anel Noetheriano R , é finitamente gerado. Sejam $x\,a_1, \ldots, x\,a_w$ os seus geradores, onde para cada i , $1 \leqslant i \leqslant w$, $a_i \in A$. Então, $\frac{xA \cap R}{xR}$ será um R-módulo gerado por $x\,a_1 + xR, \ldots, x\,a_w + xR$. Como $a_i \in A$ e $A \subseteq T(R)$, para cada i , $1 \leqslant i \leqslant w$, existe um ideal I_i , que é um produto finito de ideais máximos de R , tal que $I_i\,a_i \subseteq R$. Tomando $I = I_1 \ldots I_w$ temos que, para todo i , $1 \leqslant i \leqslant w$, $Ia_i \subseteq R$. Com isto, $I\,\frac{xA \cap R}{xR} \subseteq \frac{xR}{xR} = 0$ logo, $I \subseteq an(\frac{xA \cap R}{xR})$. Decorre daí que $\frac{xA \cap R}{xR}$ é um $\frac{R}{I}$-módulo finitamente gerado. O anel $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano e Artiniano, uma vez que R é um anel Noetheriano e I é um produto de ideais máximos de R [1,Teorema 8.5]. Por outro lado, $\frac{xA \cap R}{xR}$ é um $\frac{R}{I}$-módulo finito, portanto, é um $\frac{R}{I}$-módulo Artiniano e Noetheriano, de onde se conclui que é um R-módulo Artiniano e Noetheriano, uma vez que I está contido no anulador do R-módulo $\frac{xA \cap R}{xR}$. Logo, $\frac{xA \cap R}{xR}$ é um R-módulo de comprimento finito [1,Proposição 6.8].

Consideremos agora a seqüência de ideais de R $I_h = (x^h A \cap R,\ xR)$, $h \in N$. Como $xR \subseteq I_h \subseteq xA \cap R$ para todo $h \in N$ e, como $\frac{xA \cap R}{xR}$ é um R-módulo de comprimento finito, a seqüência de R-módulos $\{\frac{I_h}{xR}\}_{h>0}$ estabiliza-se. Portanto existe $n \in N$ tal que $\frac{I_h}{xR} = \frac{I_n}{xR}$, para todo $h \geqslant n$, logo $I_h = I_n$. Mostremos que este é um valor de n para o qual temos que $A \subseteq R x^{-n} + x A$. Suponhamos que exista $a \in A \setminus R$ tal que $a \notin R x^{-n} + x A$. Como sabemos que existe $k \in N$ tal que $a \in R x^{-k} + x A$, devemos ter $k > n$ pois, do contrário como $a = r x^{-k} + x a_1$ com $r \in R$ e $a_1 \in A$, teremos $a = r x^{n-k} x^{-n} + x a_1$ e, conseqüentemente, $a \in R x^{-n} + x A$, uma vez que $n - k \geq 0$. Seja m o menor natural maior que ou igual a n, para o qual temos que $a \in R x^{-m} + x A$. Existem $r' \in R$ e $a' \in A$ tais que $a = r' x^{-m} + x a'$. Daí decorre que $a x^m = r' + x^{m+1} a'$, de onde segue que $x^m (a - x a') = r'$. Portanto, $x^m (a - x a') \in x^m A \cap R$ logo, $x^m (a - x a') \in I_m$. Como $m \geqslant n$, $I_m = I_{m+1}$ logo, $x^m (a - x a') = x^{m+1} a'' + x r''$, para algum $r'' \in R$ e $a'' \in A$. Daí obtemos que $a = x(a'' + a') + r'' x^{-(m-1)}$, o que implica que $a \in R x^{-(m-1)} + x A$ e isto contraria a hipótese feita para m. Assim, fica provado que $A \subseteq R x^{-n} + x A$, o que completa a demonstração.

Δ

O próximo Teorema é, de fato, um corolário do Teorema 1.12 e se constitui num dos resultados relevantes deste capítulo. É uma generalização do Teorema de Krull-Akizuki para anéis Noetherianos reduzidos.

1.13 <u>*TEOREMA:*</u> [8, Corolário]

Se R é um anel Noetheriano reduzido, então $(R, T(R))$ é um par Noetheriano.

Prova:

Decorre imediatamente de 1.8 e 1.12.

Δ

Na próxima Proposição, obtemos um resultado interessante sobre a contração de ideais máximos em pares Noetherianos.

1.14 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano com $\dim R \geq 2$.

Se (R,D) é um par Noetheriano e M é um ideal máximo de D, então $M \cap R$ é um ideal máximo de R.

Em particular, se M é um ideal máximo de $T(R)$, então $M \cap R$ é um ideal máximo de R.

Prova:

Seja M um ideal máximo de D. Como $\dim R > 1$ e (R,D) é um par Noetheriano, então D não é corpo de frações de R. Logo, existe um elemento não nulo x, $x \in M \setminus R$. Pelo Teorema 1.8, $\frac{D}{xD}$ é um R-módulo finito. Portanto, $\frac{D}{M}$ é um R-módulo finito, uma vez que existe um homomorfismo de R-módulos de $\frac{D}{xD}$ sobre $\frac{D}{M}$. Assim sendo, $\frac{D}{M}$ é um $\frac{R}{M \cap R}$-módulo finito. Temos então que a extensão $\frac{R}{M \cap R} \hookrightarrow \frac{D}{M}$ é inteira. Como M é um ideal máximo de D, $\frac{D}{M}$ é um corpo. Segue daí e do fato da extensão $\frac{R}{M \cap R} \hookrightarrow \frac{D}{M}$ ser inteira que $M \cap R$ é um ideal máximo de R.

Δ

Como já vimos anteriormente, se R é um anel Noetheriano e B é um R-módulo finito, (R,B) é um par Noetheriano. É importante aqui salientar que $T(R)$ nem sempre será um R-módulo finito. Conforme veremos no Teorema 2.6, basta que o fecho inteiro de R possua um ideal máximo de altura um para que $T(R)$ não seja um R-módulo finito já que, neste caso, não será uma extensão inteira de R.

É natural, neste ponto, questionar a possibilidade de generalização dos Teoremas 1.8 e 1.13, para um anel Noetheriano qualquer R, retirando-se a hipótese de que R deve ser um anel reduzido. Veremos um exemplo, no final do próximo capítulo, de um anel local R, Noetheriano, não reduzido e cuja transformada global não é Noetheriana. Com isto, é imediato que o Teorema 1.13 não pode ser generalizado. O mesmo vale para o Teorema 1.8 pois, se fosse possível uma generalização teríamos, como decorrência do Teorema 1.12 que $T(R)$ seria um anel Noetheriano.

Observando a definição da transformada global de um anel Noetheriano R verificamos que, quando R é um anel semi-local com ideais máximos $M_1,\dots,M_t$ e radical $\mathcal{M}$, temos que, $x \in T(R)$ se, e somente se, existem $i_1,\dots,i_t \in N$ tais que $x M_1^{i_1} \dots M_t^{i_t} \subseteq R$ ou seja, $x \mathcal{M}^k \subseteq R$, para algum $k \in N$. O conjunto dos elementos x do anel total de frações de R para os quais temos que, para algum $k \in N$, $x\mathcal{M}^k \subseteq R$ é exatamente o que chamamos de transformada global do ideal $\mathcal{M}$. Mais genericamente, fazemos a seguinte definição:

1.15 <u>*DEFINIÇÃO:*</u>

Seja R um anel com anel total de frações $Q(R)$ e I um ideal de R. A *transformada do ideal I*, que denotamos por $R(I)$, é definida da seguinte maneira: $R(I) = \{x \in Q(R) \mid \exists\, n \in N, x I^n \subseteq R\}$.

Com base nesta definição, a observação anterior nos diz que, quando R é um anel semi-local Noetheriano com radical M, $T(R) = R(M)$. Assim sendo, se R é reduzido, pelo Teorema 1.13 temos que $(R,R(M))$ é um par Noetheriano. Mais geralmente, se R é um anel Noetheriano e M é um produto finito de ideais máximos de R, $R(M) \subseteq T(R)$ portanto, se R é reduzido, $(R,R(M))$ é um par Noetheriano. Visto isto, é natural questionar a possibilidade de generalização deste fato para transformadas de ideais outros que não máximos.

Mostraremos com um exemplo que, mesmo tomando um domínio local Noetheriano e um ideal primo P não máximo, não é possível garantir que o par $(R,R(P))$ seja Noetheriano.

1.16 EXEMPLO:

Seja $R = k[X,Y]_{(X,Y)}$, onde X e Y são indeterminadas e k é um corpo qualquer. Seja $P = (X)$.

Afirmamos que $R(P) = R_S$ onde $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$. De fato, se $\alpha \in R(P)$, então existe $n \in N$ tal que $\alpha P^n \subseteq R$. Portanto, $\alpha X^n \in R$ e com isto temos que $\alpha \in R_S$, o que prova a inclusão $R(P) \subseteq R_S$. Para provar a inclusão no outro sentido, tomemos $\alpha \in R_S$. Pela definição de S devemos ter que, para algum $n \in N$, $\alpha X^n \in R$ e conseqüentemente, $\alpha P^n \subseteq R$, uma vez que $P^n = (X^n)$.

Seja $A = k[X,Y/X,\ldots,Y/X^n,\ldots]_N$, onde $N = (X,Y/X,\ldots)$. Afirmamos que $R \subsetneq A \subseteq R(P)$. Para provarmos que $R \subsetneq A$, basta observarmos que $k[X,Y] \subseteq k[X,Y/X,\ldots,Y/X^n,\ldots]$ e que $(X,Y) = (X,Y/X,\ldots,Y/X^n,\ldots)k[X,Y/X,\ldots,Y/X^n,\ldots] \cap k[X,Y]$. Portanto, $R = k[X,Y]_{(X,Y)} \subseteq k[X,Y/X,\ldots]_N = A$. Para provarmos que $A \subseteq R(P) = R_S$, observemos que, como $k[X,Y/X,\ldots] \subseteq k[X,Y]_S \subseteq R_S = R(P)$, basta mostrarmos que, se $\beta \in k[X,Y/X,\ldots] \setminus (X,Y/X,\ldots)$, então $\frac{1}{\beta} \in R_S$. De fato, isto ocorre pois, para um tal elemento β, existem $i,j,m \in N$ e $\gamma(X,Y) \in k[X,Y] \setminus (X,Y)$ tais que $\beta = \frac{X^i Y^j \gamma(X,Y)}{X^m}$

Devemos ter $m \geq i$ e $j = 0$. Caso contrário, $\beta \in (X,Y/X,\ldots,Y/X^n,\ldots)k[X,Y/X,\ldots]$. Portanto, $\beta = \frac{\gamma(X,Y)}{X^{m-i}}$ logo, $\frac{1}{\beta} \in k[X,Y]_{(X,Y)} = R$, uma vez que $\gamma(X,Y) \in k[X,Y] \setminus (X,Y)$. O anel A não é Noetheriano, já que $\bigcap_{n>0} X^n.A \supsetneq \{Y\}$ [1, Corolário 10.18].

Dado um domínio Noetheriano R, já vimos que o problema de determinação do maior par Noetheriano pode não ter solução. Mas, caso R seja inteiramente fechado, a solução existe, conforme mostra o Teorema seguinte.

1.17 *TEOREMA:*

Se R é um domínio Noetheriano inteiramente fechado, então $(R, T(R))$ é o maior par Noetheriano.

Na prova do Teorema 1.17 utilizamos o resultado particular seguinte.

1.18 LEMA: [12, Teorema 9]

Seja R um domínio local, com $\dim R \geq 2$. Se (R,D) é um par Noetheriano e R é inteiramente fechado em D, então $R = D$.

Em particular, se R é inteiramente fechado e (R,D) é um par Noetheriano, então $R = D$.

Prova:

Seja K o corpo de frações de R. Suponhamos que (R,D) seja um par Noetheriano. Seja M o ideal máximo de R.

Suponhamos que exista $d \in D \setminus R$. Seja X uma indeterminada e $\phi : R[X] \to R[d]$ o homomorfismo canônico que envia X em d. Vamos considerar dois casos: $N(\phi) \subseteq M[X]$ e $N(\phi) \not\subseteq M[X]$, onde $N(\phi)$ é o núcleo de ϕ.

Se $N(\phi) \subseteq M[X]$ então $N(\phi) \subset M[X]$, uma vez que, dado $m \in M - \{0\}$, temos que $m \in M[X]$ e $m \notin N(\phi)$. Assim sendo, temos que o ideal $\frac{M[X]}{N(\phi)}$ é um ideal próprio de $\frac{R[X]}{N(\phi)}$. Além disto, $\frac{R[X]/N(\phi)}{M[X]/N(\phi)} \simeq \frac{R[X]}{M[X]} \simeq \frac{R}{M}[X]$ portanto, $\frac{R[X]/N(\phi)}{M[X]/N(\phi)}$ não é um R-módulo finito. Como $R[d] \simeq \frac{R[X]}{N(\phi)}$ podemos garantir a existência de um ideal próprio I de $R[d]$ tal que $\frac{R[d]}{I}$ não é um R-módulo finito. $I \cap R \neq (0)$, uma vez que $I \neq (0)$. Logo, tomando $x \in (I \cap R) \setminus (0)$, temos que $\frac{R[d]}{x\,R[d]}$ não é um R-módulo finito, caso contrário, $\frac{R[d]}{I}$ seria um R-módulo finito, já que existe um homomorfismo de R-módulos de $\frac{R[d]}{x\,R[d]}$ sobre $\frac{R[d]}{I}$. Como estamos supondo que o par (R,D) é Noetheriano, pelo Teorema 1.8, $\frac{R[d]}{x\,R[d]}$ é um R-módulo finito, o que contradiz o que já foi visto.

Se $N(\phi) \not\subseteq M[X]$, existe um polinômio $f(X) \in R[X]$ que se anula em d e que possui um dos coeficientes fora de M, isto é, inversível. Por [7,Teorema 67] temos que $d^{-1} \in R$, uma vez que $d \notin R$ (observe que a demonstração de [7,Teorema 67] é válida com a hipótese R inteiramente fechado em $R[u]$). Seja I um ideal máximo de $R[d]$. Como $(R, R[d])$ é um par Noetheriano e $\dim R \geq 2$, pela Proposição 1.14 temos que $I \cap R = M$, já que R é um domínio local. Como $d^{-1} \in M$, pois $d^{-1} \in R$ e $d \notin R$, temos que $1 = d.d^{-1} \in I$, o que é um absurdo.

Portanto, como a) e b) conduzem a contradições, concluímos que não existe $d \in D \setminus R$. Assim, devemos ter $D \subseteq R$.

Δ

Prova do Teorema 1.17:

Seja K o corpo de frações de R.

Quando $\dim R = 1$, $T(R) = K$ e o teorema é válido.

Suponhamos $\dim R > 1$. Mostremos por redução ao absurdo. Seja D um subanel entre R e K tal que (R,D) seja um par Noetheriano. Suponhamos que exista $t \in D \setminus T(R)$. Pela Proposição 1.6, existe um ideal primo não máximo P de R, tal que $t \notin R_P$. Claramente, $(0) \subsetneq P$ pois, se $P = (0)$ então $t \in R_P = K$. Além disso, existe um ideal máximo M de R tal que $P \subset M$, logo, $R_M \subseteq R_P$ portanto, $t \notin R_M$. Afirmamos que $(R_M, D_{R \setminus M})$ é um par Noetheriano. De fato, se A é um subanel entre R_M e $D_{R \setminus M}$, temos que $A \cap D$ é um domínio Noetheriano, já que $R \subseteq A \cap D \subseteq D$. Portanto, $(A \cap D)_{R \setminus M}$ é um domínio

Noetheriano. Por outro lado, $(A\cap D)_{R\setminus M} = A_{R\setminus M} \cap D_{R\setminus M} = A \cap D_{R\setminus M}$ $= A$ logo, A é um domínio Noetheriano.

Como R é inteiramente fechado, então R_M também o é. Além disso, $\dim R_M \geq 2$, pois $\mathrm{alt}(M) \geq 2$, uma vez que $(0) \subset P \subset M$. Portanto, pelo Lema 1.18, $D_{R\setminus M} = R_M$. Mas, isto é absurdo pois $t \in D_{R\setminus M} \setminus R_M$.

Δ

Se R é um domínio e (R,D) é um par Noetheriano, não sabemos, em geral, determinar se (R,D) é maximal. A solução deste problema para $D = T(R)$, que é um dos objetos deste capítulo, é obtida no próximo Teorema.

1.19 *TEOREMA:*

Seja R um domínio Noetheriano com fecho inteiro $\overline{R}$.

O par Noetheriano $(R,T(R))$ é maximal se, e somente se, $\overline{R} \subsetneq T(R)$.

Antes de provarmos o Teorema queremos observar que exemplos onde $\overline{R} \not\subseteq T(R)$ são abundantes. Se R possui um ideal primo não máximo P, sobre o qual existe mais que um ideal primo de $\overline{R}$, então $\overline{R} \not\subseteq T(R)$. De fato, se $\overline{R} \subseteq T(R)$, então $R \subsetneq \overline{R}$ $\subsetneq T(R) \subseteq R_P$ conseqüentemente, $R_P \subsetneq \overline{R}_{R\setminus P} \subseteq R_P$ portanto, existe um só ideal primo de $\overline{R}$ sobre o ideal P de R. Um exemplo de domínio onde $\overline{R} \not\subseteq T(R)$ é $R = Z[X^2 - 1]$, sendo X uma indeterminada. Neste caso, $\overline{R} = Z[X]$ e o ideal $(X^2 - 1)R$ é um ideal primo não máximo de R, sobre o qual existem dois ideais primos de $\overline{R}$, a saber $(X-1)\overline{R}$ e $(X+1)\overline{R}$.

O próximo Lema é uma decorrência do Teorema 1.13 e do Corolário 1.7 e será utilizado para a prova do Teorema 1.19 e também no segundo capítulo.

1.20 <u>*LEMA:*</u>

Seja R um domínio Noetheriano com fecho inteiro $\overline{R}$ e seja $\tilde{R}=\overline{R}\cap T(R)$. Então, $T(R)=T(\tilde{R})$.

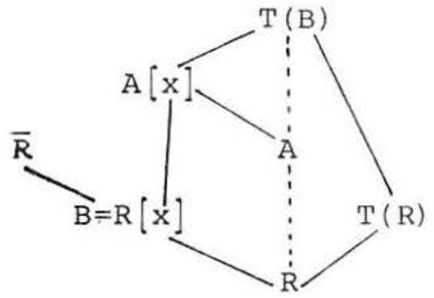
<u>*Prova:*</u>

Decorre do Corolário 1.7 que $T(R)\subseteq T(\tilde{R})$, uma vez que $\tilde{R}$ é um domínio Noetheriano pelo Teorema 1.13. Para provarmos a outra inclusão tomemos P um ideal primo não máximo de R . Como $R\subseteq \tilde{R}\subseteq T(R)\subseteq R_P$, localizando, obtemos $R_P\subseteq \tilde{R}_{R\setminus P}\subseteq T(R)_{R\setminus P}\subseteq R_P$ logo, $\tilde{R}_{R\setminus P}=R_P$. Assim, existe um único ideal primo $\tilde{P}$ de $\tilde{R}$ tal que $\tilde{P}\cap R=P$. Além disto, $\tilde{P}$ é um ideal não máximo de $\tilde{R}$ pois P é um ideal primo não máximo de R e a extensão $R\hookrightarrow\tilde{R}$ é inteira. Também temos que $\tilde{R}_{\tilde{P}}=R_P$. Portanto, $T(\tilde{R})=\bigcap\limits_{\substack{\tilde{Q}\in \operatorname{Spec}\tilde{R}\\ \tilde{Q}\notin \operatorname{Spec\,Max}\tilde{R}}}\tilde{R}_{\tilde{Q}}\subseteq \tilde{R}_{\tilde{P}}=R_P$. Logo, $T(\tilde{R})\subseteq T(R)$.

<u>*Prova do Teorema 1.19:*</u>

O teorema é óbvio se $\dim R\leqslant 1$. Suponhamos que $\dim R\geqslant 2$.

Mostremos inicialmente que, se $\overline{R}\nsubseteq T(R)$ então $(R,T(R))$ não é maximal. Seja $x\in\overline{R}\setminus T(R)$ e $B=R[x]$. Como a extensão $R \hookrightarrow B$ é inteira, pelo Corolário 1.7 $T(R) \subseteq T(B)$. Mostraremos que $(R,T(B))$ é um par Noetheriano, com o que fica concluída uma das partes do Teorema. Seja A um domínio compreendido entre R e $T(B)$. Observemos que $B = R[x] \subseteq A[x] \subseteq T(B)$ portanto, $A[x]$ é um domínio Noetheriano, já que B é um domínio Noetheriano (Teorema 1.13). Como x é inteiro sobre R , x é inteiro sobre A portanto, $A[x]$ é um A-módulo finito, de onde decorre que A é um anel Noetheriano [5,Teorema 2].



Para provarmos o outro sentido do Teorema, consideramos um domínio R tal que $\overline{R} \subseteq T(R)$. Para este domínio temos $\overline{R} \cap T(R) = \overline{R}$, portanto, pelo Lema 1.20, $T(R) = T(\overline{R})$. Seja D um domínio entre $T(R)$ e K tal que (R,D) seja um par Noetheriano. Queremos mostrar que $T(R) = D$, para concluir a prova. Como $R \subseteq \overline{R} \subseteq T(\overline{R}) \subseteq D$, então $(\overline{R},D)$ é um par Noetheriano. Segue do Teorema 1.17 que $T(\overline{R}) = D$ portanto, $T(R) = D$.

Δ

Se R é um domínio Noetheriano e $\tilde{R} = T(R) \cap \overline{R}$, onde $\overline{R}$ é o fecho inteiro de R , claramente temos que $(R,\tilde{R})$ é um par Noetheriano. É natural perguntar se $(R,\tilde{R})$ é um elemento maximal entre os pares Noetherianos (R,D) para os quais $D \subseteq \overline{R}$. De fato isto nunca ocorre, a não ser, como mostra a próxima Proposição, no caso em que $\overline{R} = \tilde{R}$. Neste caso temos $\overline{R} \subseteq T(R)$ e portanto, $(R,T(R))$ é um par Noetheriano maximal.

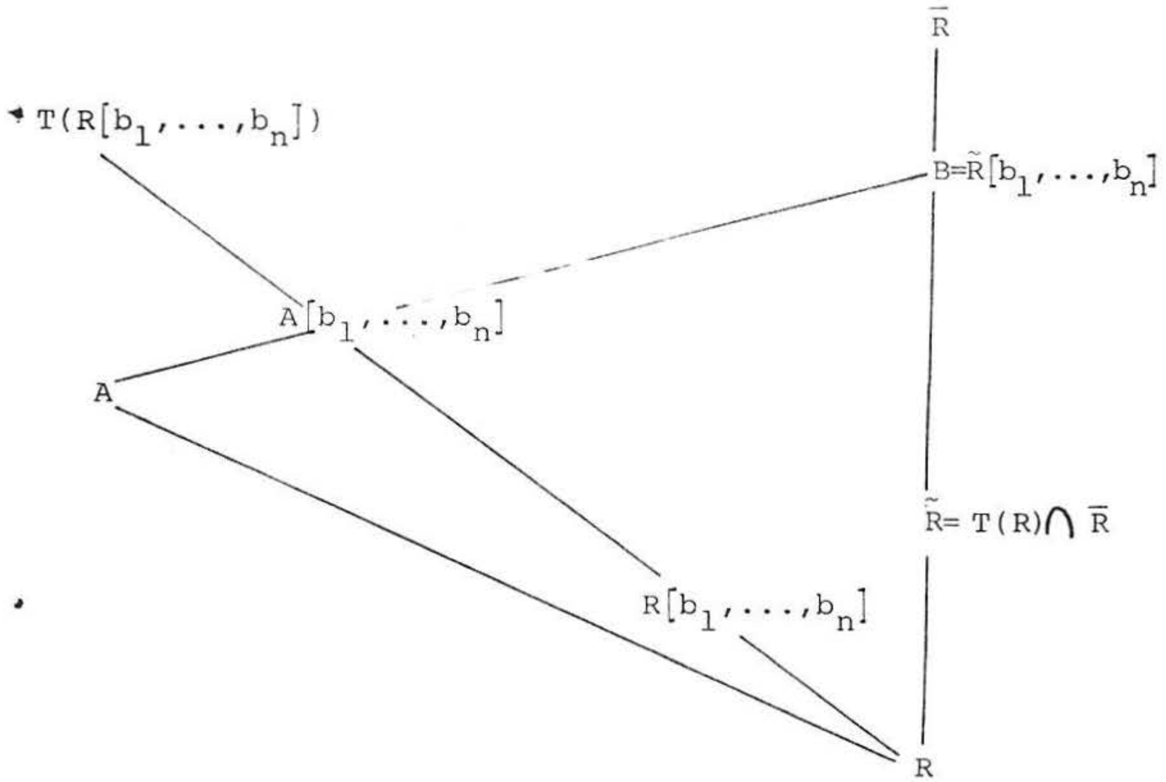
Podemos então afirmar que, $(R,\tilde{R})$ é um par Noetheriano maximal entre os pares (R,D) para os quais $D \subseteq \overline{R}$ se, e somente se, $(R,T(R))$ é um par Noetheriano maximal.

1.21 <u>*PROPOSIÇÃO:*</u>

Seja R um domínio Noetheriano com fecho inteiro $\overline{R}$ e $\tilde{R} = T(R) \cap \overline{R}$. Se B é um subanel entre $\tilde{R}$ e $\overline{R}$ e B é um $\tilde{R}$-módulo finito, então (R,B) é um par Noetheriano.

<u>*Prova:*</u>

Sejam $b_1,\ldots,b_n \in B$ tais que $B = \tilde{R}[b_1,\ldots,b_n]$. Seja A um domínio entre R e B. Temos então $R[b_1,\ldots,b_n] \subseteq A[b_1,\ldots,b_n] \subseteq \tilde{R}[b_1,\ldots,b_n] \subseteq T(R)[b_1,\ldots,b_n]$.



Por outro lado, pelo Corolário 1.7 temos que $T(R) \subseteq T(R[b_1,\dots,b_n])$ pois $R[b_1,\dots,b_n] \subseteq \overline{R}$ e tanto R com $R[b_1,\dots,b_n]$ são domínios Noetherianos. Assim sendo, temos $T(R)[b_1,\dots,b_n] \subseteq T(R[b_1,\dots,b_n])$. Segue daí que $R[b_1,\dots,b_n] \subseteq A[b_1,\dots,b_n] \subseteq T(R[b_1,\dots,b_n])$. Portanto, pelo Teorema 1.13, $A[b_1,\dots,b_n]$ é um anel Noetheriano. Como $A[b_1,\dots,b_n]$ é um A-módulo finito, uma vez que $b_1,\dots,b_n$ são inteiros sobre A, podemos concluir que A é um domínio Noetheriano [5,Teorema 2].

Δ

O próximo Teorema mostra um resultado interessante para domínios cujo fecho inteiro não possui ideais máximos de altura um. Sua demonstração decorre facilmente da seguinte proposição:

1.22 *PROPOSIÇÃO:* [12,Teorema 10]

Seja R um domínio Noetheriano com fecho inteiro $\overline{R}$. Se (R,D) é um par Noetheriano e $A = D \cap \overline{R}$, então

$$D \subseteq \bigcap_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} A \\ \operatorname{alt} N > 1}} A_N$$

Prova:

Seja N um ideal máximo de A com altura maior que um. Já que $R \subseteq A \subseteq D$, (A,D) é um par Noetheriano. Decorre daí que $(A_N, D_{A\setminus N})$ é um par Noetheriano pois, se B é um domínio tal que $A_N \subseteq B \subseteq D_{A\setminus N}$, então $B = (B \cap D)_{A\setminus N}$, portanto, B é um domínio Noetheriano. Por outro lado, A_N é um domínio local, inteiramente fechado em $D_{A\setminus N}$ e com dimensão maior que um, pois A é inteiramente fechado em D e $\operatorname{alt} N > 1$. Segue então do Lema 1.18 que $A_N = D_{A \setminus N}$. Então, $D \subseteq \bigcap_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} A \\ \operatorname{alt} N > 1}} A_N$.

△

1.23 *TEOREMA:* [12, Teorema 11]

Seja R um domínio cujo fecho inteiro $\overline{R}$ não possui ideais máximos de altura um. Se (R,D) é um par Noetheriano, então $D \subseteq \overline{R}$.

Prova:

Seja (R,D) um par Noetheriano e $A = D \cap \overline{R}$. Como $\overline{R}$ é uma extensão inteira de A , temos que A não possui ideais máximos de altura um, uma vez que $\overline{R}$ não possui, [1, Corolário 5.9]. Desta forma, temos que $A = \bigcap_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} A \\ \operatorname{alt} N > 1}} A_N$. Por outro lado, pela Proposição 1.22, $D \subseteq \bigcap_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} A \\ \operatorname{alt} N > 1}} A_N$ logo, $D \subseteq A = D \cap \overline{R}$. Portanto, $D \subseteq \overline{R}$.

△

Obtemos a seguir um resultado interessante para localizações. Dado um domínio Noetheriano R e um sistema multiplicativo S de R , o próximo Teorema diz exatamente quando (R, R_S) é um par Noetheriano.

1.24 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano e S um sistema multiplicativo de R .

(R,R_S) é um par Noetheriano se, e somente se,

$$S \subseteq R \setminus \bigcup_{\substack{M \in \operatorname{Spec\,Max} R \\ \operatorname{alt} M > 1}} M$$

Prova:

Se $\dim R = 1$, o resultado é óbvio. Suponhamos $\dim R \geq 2$.

Mostremos inicialmente que $R_S \subseteq T(R)$. Para isto basta mostrar que, dado $s \in S$, $\frac{1}{s} \in T(R)$. Seja $s \in S$. Se s é inversível em R, então $\frac{1}{s} \in R \subseteq T(R)$. Se s não é inversível em R, então os primos associados a s são ideais máximos de altura um. Temos então que existem finitos ideais máximos de R, digamos $M_1,\ldots,M_t$ tais que $\bigcap_{i=1}^{t} M_i = \sqrt{(s)}$. Como $\prod_{i=1}^{t} M_i = \bigcap_{i=1}^{t} M_i$ e R é Noetheriano concluímos que $(\prod_{i=1}^{t} M_i)^k \subseteq (s)$. Logo, $\frac{1}{s}(\prod_{i=1}^{t} M_i)^k \subseteq R$ isto é, $\frac{1}{s} \in T(R)$.

Por 1.13 sabemos que $(R,T(R))$ é um par Noetheriano. Portanto, (R,R_S) é um par Noetheriano.

Suponhamos agora que (R,R_S) seja um par Noetheriano. Seja $s \in S$ e $S' = \{1,s,s^2,\ldots\}$. Seja M um ideal máximo de $R_{S'}$ e $P = M \cap R$. Como $\dim R \geq 2$ e $(R,R_{S'})$ é um par Noetheriano, segue da Proposição 1.14 que P é um ideal máximo de R. Portanto, os ideais primos P de R, máximos para a propriedade de não conter s, são de fato, ideais máximos de R. Decorre daí que $s \notin \bigcup_{\substack{M \in \operatorname{Spec\,Max} R \\ \operatorname{alt} M > 1}} M$. Com efeito, se $s \in M$ para algum ideal máximo M de R com $\operatorname{alt} M > 1$, exis-

O próximo Corolário, responde a questão colocada por Krull.

1.26 *COROLÁRIO:*

Se R é um domínio Noetheriano com dimensão um ou dois, então R^* é Noetheriano.

Prova:

Decorre imediatamente de (1.25.1) e do Teorema 1.13.

Δ

As próximas proposições contém alguns resultados sobre R^*.

1.27 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano.

$R = R^*$ se, e somente se, os ideais primos associados a ideais principais de R tem todos altura um.

Em particular, R é um domínio inteiramente fechado se, e somente se, $R = R^*$ e, para todo ideal primo P de R com $\operatorname{alt} P = 1$, R_P é inteiramente fechado.

Prova:

Se os ideais principais de R não possuem primos imersos, então $R = R^*$ [7,Teorema 53]. Reciprocamente, se $R=R^*$ então os ideais principais de R não possuem ideais primos associados imersos. De fato, se Q é um ideal primo associado ao ideal principal (b) então, existe $a \in R$ tal que

$(b:a) = Q$. Como $\frac{a}{b} \notin R$ e $R = R^*$, existe um ideal primo P de R , com $\operatorname{alt} P = 1$ tal que $\frac{a}{b} \notin R_P$. Segue daí que $(b:a) \subseteq P$, logo, $Q \subseteq P$, o que implica $Q = P$ pois $\operatorname{alt} P = 1$.

Se R é um domínio inteiramente fechado, $R = R^*$ [7, Teorema 104] e, obviamente, para todo ideal primo P de R , R_P é inteiramente fechado. Por outro lado, se $R = R^*$ e R_P é inteiramente fechado para todo o ideal primo de R cuja altura é um, então R é inteiramente fechado [7, Teorema 54].

Δ

1.28 *PROPOSIÇÃO:*

Se R é um domínio, então $(R^*)^* = R^*$.

Prova:

A inclusão $R^* \subseteq (R^*)^*$ é óbvia. Resta mostrar que $(R^*)^* \subseteq R^*$. Para tanto, tomemos $w \in (R^*)^*$ e suponhamos que $w \notin R^*$. Então, para algum ideal primo P de R , com $\operatorname{alt} P = 1$, $w \notin R_P$. Mas, $R \subseteq R^* \subseteq R_P$ logo, localizando obtemos, $R_P \subseteq R^*_{R\setminus P} \subseteq R_P$. Assim sendo, $R^*_{R\setminus P} = R_P$. Como R_P é local e unidimensional, devemos ter $R^*_{R\setminus P} = R^*_{P^*}$, para algum ideal primo P^* de R^* com $\operatorname{alt} P^* = 1$ e $P^* \cap R = P$. Como tomamos $w \in (R^*)^*$, então $w \in R^*_{P^*}$, logo, $w \in R_P$ o que é uma contradição.

Δ

II - ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA GLOBAL

Nosso objetivo neste capítulo é obter condições necessárias e suficientes para que a transformada global de um domínio Noetheriano R seja inteira sobre R.

Pelo Teorema 1.23 sabemos que, se o fecho inteiro de um domínio Noetheriano R não possui ideais máximos de altura um, então $T(R)$ é uma extensão inteira de R. O exemplo seguinte mostra que, de fato, existem domínios Noetherianos R onde a extensão $R \hookrightarrow T(R)$ não é inteira.

2.1 <u>*EXEMPLO*</u>:

Este exemplo é obtido por um processo de colagem, desenvolvido por A.M.S. Doering e Y. Lequain, em [3]. Mais precisamente, com este processo é possível construir um domínio local R, de dimensão dois, com ideal máximo M, cujo fecho inteiro $\overline{R}$ possui extamente dois ideais máximos M_1 e M_2, um dos quais tem que ter certamente altura dois e o outro podemos escolher com altura um. Vale ainda nestes exemplos que $\overline{R}$

é um R-módulo finito e que, para todo o ideal primo P de R, $P \neq M$, existe um só ideal primo $\overline{P}$ de $\overline{R}$ tal que $\overline{P} \cap R = P$ e, além disto, $R_P = \overline{R}_{\overline{P}}$. Assim, temos:

$$T(R) = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} R \\ P \notin \operatorname{Spec Max} R}} R_P = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} R \\ P \neq M}} R_P = \bigcap_{\substack{\overline{P} \in \operatorname{Spec} \overline{R} \\ \overline{P} \neq M_1, M_2}} \overline{R}_{\overline{P}} = \bigcap_{\substack{\overline{P} \in \operatorname{Spec} \overline{R} \\ \overline{P} \subset M_2}} \overline{R}_{\overline{P}} =$$

$$= \bigcap_{\substack{\overline{P} \in \operatorname{Spec} \overline{R} \\ \overline{P} \subset M_2 \\ \operatorname{alt} \overline{P} = 1}} R_{\overline{P}} = \overline{R}_{M_2}$$

, sendo a última igualdade válida por [7, Teorema 104]. Portanto, como $\overline{R}_{M_2} \supset \overline{R}_{M_1} \cap \overline{R}_{M_2} = \overline{R}$, podemos concluir que $T(R)$ não é inteira sobre R.

Observe que, no exemplo acima, o fecho inteiro de R possui ideais máximos de altura um. Mostraremos que esta é a condição suficiente para que a transformada global de um domínio Noetheriano não seja inteira sobre R, obtendo a recíproca do Teorema 1.23. Antes porém, na próxima proposição, apresentaremos uma caracterização dos domínios R para os quais $T(R) = R$.

2.2 *PROPOSIÇÃO:*

Seja R um domínio Noetheriano. Então, $T(R) = R$ se, e somente se, os ideais primos associados a ideais principais de R, não são ideais máximos de R.

Em particular, se R é inteiramente fechado, $T(R)=R$ se e somente se, R não possui ideais máximos de altura um.

Prova:

Suponhamos $T(R) \neq R$. Seja $\frac{a}{b} \in T(R) \setminus R$. Neste caso, existem ideais máximos de R, $M_1, \ldots, M_t$ tais que $M_1 \ldots M_t \subseteq (b : a) \subset R$. Seja $F = \{(b : x) \mid (b : a) \subseteq (b : x) \subset R\}$ e P um elemento maximal de F. Sabemos que P é um ideal primo associado ao ideal (b) [1,Proposição 7.17]. Como $M_1 \ldots M_t \subseteq (b:a) \subseteq P$, temos que, para algum i, $1 \leq i \leq t$, $P = M_i$. Portanto, M_i é um ideal primo associado a um ideal principal.

Por outro lado, se M é um ideal máximo e é um ideal primo associado ao ideal principal (b) de R, então, para algum $a \in R$, $M = (b : a)$ [1,Proposição 7.17]. Logo, $\frac{a}{b} \in T(R) \setminus R$ pois $M \subseteq (b : a) \subsetneq M \subsetneq R$.

Se R for um domínio inteiramente fechado então os ideais primos associados a ideais principais de R tem altura um [7,Teorema 103]. Portanto, $T(R) = R$ se, e somente se, R não possui ideais máximos de altura um.

Os três próximos Lemas contêm resultados auxiliares que serão utilizados no final do capítulo.

2.3 *LEMA:*

Seja R um anel Noetheriano e I um ideal de R que possui um elemento não divisor de zero. Então, I pode ser gerado por elementos não divisores de zero.

Prova:

Sendo R um anel Noetheriano, o ideal I será finitamente gerado. Seja a_1 um elemento de I, não divisor de zero e sejam $a_2,\ldots,a_k$ tais que $I=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$. Ordenemos os geradores de modo que, para algum j, $1\leqslant j\leqslant k$, tenhamos que, a_i é não divisor de zero se, e somente se, $1\leqslant i\leqslant j$. Se $j=k$, nada temos a mostrar pois, neste caso, I já é gerado por elementos não divisores de zero. Se $j<k$, basta mostrarmos que existe b_{j+1}, não divisor de zero de R, tal que $I=(a_1,\ldots,a_j,a_{j+1},\ldots,a_k)=(a_1,\ldots,a_j,b_{j+1},a_{j+2},\ldots,a_k)$ e repetirmos o argumento, se necessário.

Sejam $P_1,\ldots,P_m$ os ideais primos associados ao ideal (0). Como $\{x\in R\mid x$ é divisor de zero$\}=\bigcup_{j=1}^{m} P_j$, queremos encontrar $b_{j+1}\notin\bigcup_{i=1}^{m} P_i$. Então, podemos considerar apenas os ideais absolutamente necessários nesta união. Sejam $P_1,\ldots,P_r$ tais ideais. Observemos que não existe relação de inclusão entre eles. Se $a_{j+1}\in\bigcap_{i=1}^{r} P_i$, tomemos $b_{j+1}=a_{j+1}+a_1$. É claro que $I=(a_1,\ldots,a_j,b_{j+1},a_{j+2},\ldots,a_k)$. Além disto, b_{j+1} não é divisor de zero pois $b_{j+1}\notin\bigcup_{i=1}^{r} P_i$, uma vez que $a_1\notin\bigcup_{i=1}^{r} P_i$ e $a_{j+1}\in\bigcap_{i=1}^{r} P_i$. Se $a_{j+1}\notin\bigcap_{i=1}^{r} P_i$, existe i, $1\leqslant i\leqslant r$, tal que $a_{j+1}\notin P_i$. Reordenando os ideais $P_1,\ldots,P_r$, podemos supor que existe t, $1\leqslant t\leqslant r-1$ tal que $a_{j+1}\in\bigcap_{i=1}^{t} P_i$ e $a_{j+1}\notin\bigcup_{i=t+1}^{r} P_i$. Observe que $\bigcap_{i=t+1}^{r} P_i\nsubseteq\bigcup_{s=1}^{t} P_s$ pois, caso contrário, existiria algum s, $1\leqslant s\leqslant t$ tal que $\bigcap_{i=t+1}^{r} P_i\subseteq P_s$ e, conseqüentemente, $P_i\subseteq P_s$, para algum i, $t+1\leqslant i\leqslant r$ [1,1.11]. Tal fato não pode ocorrer, pois não existe entre $P_1,\ldots,P_r$, relação de inclusão. Então, tomemos $x\in\bigcap_{i=t+1}^{r} P_i\setminus\bigcup_{s=1}^{t} P_s$ e seja

$b_{j+1} = a_{j+1} + \lambda a_1$. É claro que $I = (a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_k)$ e além disto, b_{j+1} não é divisor de zero pois, $a_{j+1} \in \bigcap_{s=1}^{t} P_s \setminus \bigcup_{i=t+1}^{r} P_i$ e $\lambda a_1 \in \bigcap_{i=t+1}^{r} P_i \setminus \bigcup_{i=1}^{t} P_i$.

2.4 LEMA: [10,Teorema 1.1]

Seja R um anel e I um ideal de R . Se $I = b_1R + \ldots + b_kR$, com todos os geradores não divisores de zero, então:

(2.4.1) $R(I) = \bigcap_{j=1}^{k} R_{b_i}$

(2.4.2) Se B é uma R-álgebra plana, então $B(IB) = R(I) \otimes_R B$.

Prova:

(2.4.1) Mostremos que $R(I) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} R_{b_i}$. Para isto, tomemos $a \in R(I)$. Existe $n \in N$ tal que $I^n a \subseteq R$ e, conseqüentemente, para cada i , $1 \leq i \leq k$, $b_i^n a \in R$. Segue daí que $a \in \bigcap_{i=1}^{k} R_{b_i}$.

Para provarmos a outra inclusão, tomemos $a \in \bigcap_{i=1}^{k} R_{b_i}$. Para cada i , $1 \leq i \leq k$, podemos encontrar $n_i \in N$ e $a_i \in R$ tais que $a = \dfrac{a_i}{b_i^{n_i}}$. Seja $n = n_1 + \ldots + n_k$ e tomemos $i_1, \ldots, i_k \in N$ tais que $i_1 + \ldots + i_k = n$. É claro que, para algum j , $1 \leq j \leq k$, $i_j \geq n_j$ portanto, $a b_j^{i_j} \in R$ e, conseqüentemente $a b_1^{i_1} \ldots b_k^{i_k} \in R$. Como os elementos da forma $b_1^{i_1} \ldots b_k^{i_k}$ com $i_1 + \ldots + i_k = n$, geram I^n , obtemos que $a I^n \subseteq R$, portanto, $a \in R(I)$.

(2.4.2) Observemos que, como B é uma R-álgebra, existe um homomorfismo de anéis $\tau : R \to B$, dado por $\tau(r) = r.1_B$, onde 1_B é a unidade de B.

Afirmamos que, se B é uma R-álgebra plana, o ideal IB pode ser gerado por elementos não divisores de zero de B. De fato, como $IB = \tau(b_1)B + \ldots + \tau(b_k)B$, onde $(b_1,\ldots,b_k)=I$, basta mostrarmos que, se x é não divisor de zero de R, $\tau(x)$ é não divisor de zero de B. Com efeito, tomando $S = \{x \in R \mid x$ não é divisor de zero$\}$, a seqüência de R-módulos $0 \to R \xrightarrow{f} R_S$, sendo $f(a) = \frac{a}{1}$, é exata. Como B é uma R-álgebra plana, a seqüência $0 \to B \otimes_R R \xrightarrow{1 \otimes f} B \otimes_R R_S$ também é exata. Como $B \otimes_R R \simeq B$ e $B \otimes_R R_S \simeq B_S$ [1,2.14 e 3.5] temos que a função $B \xrightarrow{g} B_S$, definida por $g(b) = \frac{b}{1}$ é injetora. Suponhamos agora que o elemento $\tau(s)$ de $\tau(S)$ seja divisor de zero de B. Então, para algum $b \in B$, $b \neq 0$, temos $\tau(s)b = 0$ isto é, $s.1_B.b=0$ ou seja, $sb = 0$. Portanto, $\frac{b}{1} = \frac{0}{1}$. Logo, como g é injetora, $b = 0$, o que contraria a hipótese feita para b.

2.5 <u>*PROPOSIÇÃO:*</u> [10,Lema 1.1]

Seja R um anel Noetheriano.

(2.5.1) Se M é um ideal máximo de R, $T(R)_{R\setminus M} = T(R_M)$.

(2.5.2) Se P é um ideal primo de R que não é máximo, $T(R)_{R\setminus P} = R_P$. Conseqüentemente, existe um único ideal primo Q de $T(R)$ tal que $Q \cap R = P$ e, além disto, $T(R)_Q = R_P$.

<u>*Prova:*</u>

(2.5.1) Mostremos inicialmente que $T(R)_{R\setminus M} \subseteq T(R_M)$. Para isto, tomemos $x \in T(R)_{R\setminus M}$. Existe $s \in R\setminus M$ tal que $x\,s \in T(R)$. Portanto, pela definição de $T(R)$, existem $M_1, \ldots, M_t$ ideais máximos de R , distintos de M e entre si, tais que $x\,s\,M^{j_0} M_1^{j_1} \ldots M_t^{j_t} \subseteq R$. Podemos considerar $j_0 \geq 1$ pois, do contrário, multiplicando por M temos que $x\,s\,M_1^{j_1} \ldots M_t^{j_t} M \subseteq MR \subseteq R$. Afirmamos que $x\,M^{j_0} \subseteq R_M$. Disto decorre que $x \in T(R_M)$, o que conclui a prova da inclusão. Para provar a afirmativa, tomemos $m \in M^{j_0}$. Para cada ℓ , seja $m_\ell \in M_\ell \setminus M$. Temos então que $m\,m_1^{j_1} \ldots m_t^{j_t} \in M^{j_0} M_1^{j_1} \ldots M_t^{j_t}$ logo, $s\,x\,m\,m_1^{j_1} \ldots m_t^{j_t} \in R$. Como $s \notin M$ e $m_1^{j_1} \ldots m_t^{j_t} \notin M$ temos que $x\,m \in R_M$, o que mostra a afirmação.

Mostremos agora a outra inclusão. Tomemos $x \in T(R_M)$. Existe $k \in N$ tal que $x(M\,R_M)^k \subseteq R_M$ isto é, $x\,M^k R_M \subseteq R_M$. Sejam $m_1, \ldots, m_n$ os geradores de M^k , que são finitos pois R é um anel Noetheriano. Para cada i , $1 \leq i \leq n$, existem $a_i \in R$ e $s_i \in R\setminus M$ tais que $x\,m_i = \frac{a_i}{s_i}$. Seja $s = s_1 \ldots s_t$. Então, para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s\,x\,m_i \in R$. Mostremos que $s\,x \in T(R)$ o que, junto ao fato de que $s \in R\setminus M$, permite concluir que $x \in T(R)_{R\setminus M}$. De fato, $s\,x \in T(R)$ pois, tomando $m \in M^k$ temos que $m = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i$ portanto, $s\,x\,m = s\,x\,(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (s\,x\,m_i)$ logo, $s\,x\,m \in R$.

(2.5.2) Sabemos que, para qualquer primo P de R , não máximo, $R \subseteq T(R) \subseteq R_P$, por 1.6 . Localizando, temos $R_P \subseteq T(R)_{R\setminus P} \subseteq R_P$ logo, $T(R)_{R\setminus P} = R_P$. Conseqüentemente, já que $T(R)_{R\setminus P}$ é local, existe um único ideal primo Q de $T(R)$ tal que $Q \cap R = P$ e além disso, $T(R)_Q = R_P$ [7, Teorema 2].

O próximo Teorema é o principal resultado deste capítulo e estabelece uma condição necessária e suficiente para que a transformada global de um domínio Noetheriano seja inteira sobre R. Nishimura prova este Teorema em [10], considerando R um domínio local.

2.6 *TEOREMA:*

Seja R um domínio Noehteriano cujo fecho inteiro é $\overline{R}$. A extensão $R \hookrightarrow T(R)$ é inteira se, e somente se, $\overline{R}$ não possui ideais máximos de altura um.

Já provamos em 1.23 um dos sentidos do Teorema. A demonstração do outro sentido depende de alguns resultados que a seguir obteremos, sob a forma de Lemas e Proposições.

2.7 *LEMA:*

Seja R um domínio local, com fecho inteiro $\overline{R}$ e com $\dim R \geq 2$. Sejam $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_t$ os ideais máximos de $\overline{R}$. Seja, para cada i, $1 \leq i \leq t$, $x_i \in \overline{M}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \overline{M}_j$ e $B = R[x_1, \ldots, x_t]$.

Então:

(2.7.1) B é um R-módulo finito e sobre cada ideal máximo de B existe um único ideal máximo de $\overline{R}$.

(2.7.2) Se $N_1, \ldots, N_t$ são os ideais máximos de B, então

$T(B)$ é inteiro sobre B_S, onde $S = B \setminus \bigcup_{\text{alt} N_i \geq 1} N_i$ e, conseqüentemente, $T(B)$ é semi-local.

<u>*Prova:*</u>

(2.7.1) B é um R-módulo finito, já que $x_1, \ldots, x_t$ são inteiros sobre R.

Como a extensão $R \hookrightarrow B$ é inteira, então $\bar{R}$ é inteiro sobre B portanto, sobre cada ideal máximo de B existe pelo menos um ideal máximo de $\bar{R}$ [1, 5.8 e 5.10]. A unicidade pode ser vericada observando-se que os ideais máximos de B são do tipo $\bar{M}_i \cap B$ e, para estes temos $\bar{M}_i \cap B \neq \bar{M}_j \cap B$, se $i \neq j$, pois, $x_i \in \bar{M}_i \cap B$ e $x_i \notin \bar{M}_j \cap B$.

(2.7.2) Por 1.13, $(B, T(B))$ é um par Noetheriano portanto, por 1.22, $T(B) \subseteq \bigcap_{\substack{N \in \text{Spec Max } \tilde{B} \\ \text{alt} N > 1}} \tilde{B}_N$, onde $\tilde{B} = T(B) \cap \bar{B}$. Conseqüentemente, $T(B) \subseteq \bigcap_{\substack{N \in \text{Spec Max } \tilde{B} \\ \text{alt} N > 1}} \bar{B}_{\tilde{B} \setminus N}$. Ordenemos os ideais $\bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_t$ de $\bar{R}$ de modo que $\bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_r$ tenham altura maior que um e $\bar{M}_{r+1}, \ldots, \bar{M}_t$ tenham altura um. Seja $\tilde{N}_i = \bar{M}_i \cap \tilde{B}$. Uma vez que, por 2.9.1, sobre cada ideal máximo de B existe um único ideal máximo de $\bar{R}$, esta mesma propriedade é válida para os ideais máximos de $\tilde{B}$, portanto, $\bar{M}_i$ é o único ideal máximo de $\bar{R}$ que se contrai a $\tilde{N}_i$. Assim sendo, temos que $T(B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \bar{B}_{\bar{M}_i}$, já que $\bar{B} = \bar{R}$.

Por outro lado, se $N_i = \bar{M}_i \cap B$, $\overline{B_S} = \bar{B}_{S^*}$ onde $S^* = \bar{B} \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \bar{M}_i$. Portanto, $\bar{B}_S = \bigcap_{i=1}^{r} \bar{B}_{\bar{M}_i}$. Com isto, temos que $T(B) \subseteq \overline{B_S}$. Pela prova de 1.24, $B_S \subseteq T(B)$. Conseqüentemente, $T(B)$ é uma extensão inteira de B_S .

Para provarmos que $T(B)$ é semi-local observamos que, como B é semi-local, então B_S é semi-local [1,Proposição 7.3]. Portanto, $T(B)$ é semi-local pois é um domínio Noetheriano e é uma extensão inteira de B_S .

2.8 *LEMA:* [10,Teorema 1.4]

Sejam A,B domínio Noetheriano com o mesmo corpo de frações. Se B é um A-módulo finito, então $T(B)$ é um $T(A)$-módulo finito.

Prova:

Suponhamos que $B = Ab_1 + \ldots + Ab_n$, onde para cada i , $1 \leq i \leq n$, $b_i = \frac{c_i}{d_i}$ com c_i, d_i elementos de A , $d_i \neq 0$. Seja $\xi = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$. Então $\xi B \subseteq A$. Mostremos que $\xi T(B) \subseteq T(A)$. Com isto, teremos que $T(B) \subseteq \frac{1}{\xi} T(A)$ e disto decorre o Lema . De fato, por 1.13 $T(A)$ é Noetheriano portanto, $\frac{1}{\xi} T(A)$ é um $T(A)$-módulo Noetheriano logo, $T(B)$ é um $T(A)$-módulo finito, por ser um $T(A)$-módulo de $\frac{1}{\xi} T(A)$.

Para mostrar que $\xi T(B) \subseteq T(A)$ tomemos $b \in T(B)$. Existem $N_1, \ldots, N_t$ ideais máximos de B tais que $bN_1 \ldots N_t \subseteq B$. Se $M_i = N_i \cap A$, então M_i é um ideal máximo de A e $\xi b (M_1 \ldots M_t) \subseteq \xi b (N_1 \ldots N_t) \subseteq \xi B \subseteq A$. Portanto, $\xi b \in T(A)$.

Λ

A próxima proposição é importante pois dela decorre facilmente o caso local do teorema que desejamos provar.

2.9 <u>*PROPOSIÇÃO:*</u> [10, Teorema 1.6]

Seja R um domínio local, $\bar{R}$ seu fecho inteiro e $\tilde{R} = T(R) \cap \bar{R}$. Se $\mathcal{M} = \{M \in \text{Spec Max } \tilde{R} \mid \text{alt } M = 1\}$ e $S = \tilde{R} \setminus \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ ($S = \tilde{R} - \{0\}$, se $\mathcal{M} = \emptyset$), então $T(R) = \tilde{R}_S$. Em particular, $T(R)$ não possui ideais máximos de altura um.

Além disto, $\bar{R}$ possui ideais máximos de altura um se, e somente se, R também possui.

<u>*Prova:*</u>

Quando $\mathcal{M} = \emptyset$ temos que $\tilde{R}_S$ é igual ao corpo de frações de R que, por 1.6 é igual a $T(R)$. Portanto, $\tilde{R}_S = T(R)$.

Consideremos então o caso em que $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Pela Prosição 1.22 sabemos que $T(R) \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \tilde{R}_M$. Mas, $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \tilde{R}_M = \tilde{R}_S$ pois $\tilde{R}$ é semi-local. Portanto, $T(R) \subseteq \tilde{R}_S$. Mostremos a outra inclusão. Da prova de 1.24 temos que $\tilde{R}_S \subseteq T(\tilde{R})$. Por 1.20, $T(\tilde{R}) = T(R)$. Logo, $\tilde{R}_S \subseteq T(R)$.

Mostremos agora que $\bar{R}$ possui ideais máximos de altura um se, e somente se, R também possui.

Como $R \subseteq \tilde{R} \subseteq \bar{R}$, se R possui um ideal máximo de altura um, então $\bar{R}$ também possui.

Suponhamos agora que R não possua ideais máximos de altura um. Então, todos os ideais máximos de $\tilde{R}$ tem altura maior que um, portanto, $\tilde{R} = \tilde{R}_S$. Como $T(R) = \tilde{R}_S$, temos que $T(R) = \tilde{R}$ e daí, $T(R) \subseteq \bar{R}$. Seja B construído como no Lema 2.7. De 2.8 decorre que $T(B)$ é um $T(R)$-módulo finito, pois B é um R-módulo finito. Portanto, $\overline{T(B)} = \overline{T(R)} = \bar{R}$. Por outro lado, $T(B)$ é uma extensão inteira de $B_{\mathcal{U}}$, onde $\mathcal{U} =$

$B \setminus \bigcup_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} B \\ \operatorname{alt} N > 1}} N$. Logo, $\overline{T(B)} = \overline{B}_{U}$. Como sobre cada ideal máximo de B existe exatamente um ideal máximo de $\overline{B}$, estes ideais tem a mesma altura. Então, o saturamento do sistema multiplicativo U em $\overline{B}$ é $U^* = \overline{B} \setminus \bigcup_{\substack{\overline{M} \in \operatorname{Spec Max} \overline{B} \\ \operatorname{alt} \overline{M} > 1}} \overline{M}$. Temos assim que $\overline{R} = \overline{R}_{U^*}$. Conseqüentemente, $\overline{R}$ não possui ideais máximos de altura um.

$\wedge$

O próximo resultado é o caso local do Teorema 2.6.

2.10 *COROLÁRIO:* [10, Corolário 1.7]

Seja R um domínio local, com fecho inteiro $\overline{R}$. Se $T(R)$ é uma extensão inteira de R , então $\overline{R}$ não possui ideais máximos de altura um.

Prova:

Seja $\tilde{R} = T(R) \cap \overline{R}$. Suponhamos que $\overline{R}$ possua um ideal máximo cuja altura é um. Se tal acontece, pelo Lema 2.9, $\tilde{R}$ também possui. Pelo mesmo Lema também temos que $T(R)$ não possui ideais máximos de altura um. Portanto, $\tilde{R} \neq T(R)$. Conseqüentemente, $T(R) \not\subseteq \overline{R}$, uma vez que $\tilde{R} = T(R) \cap \overline{R}$.

$\wedge$

Do caso local mostrado em 2.10, decorre facilmente a prova do caso geral.

Prova do Teorema 2.6:

Já provamos no Teorema 1.23 que, se $\bar{R}$ não possui ideais máximos de altura um, então $T(R) \subseteq \bar{R}$. Mostremos agora que vale a recíproca. Seja $\bar{M}$ um ideal máximo de $\bar{R}$ e $M = \bar{M} \cap R$. M é certamente um ideal máximo de R e a extensão $R_M \hookrightarrow T(R)_{R \setminus M}$ é inteira. Portanto, $T(R_M)$ é uma extensão inteira de R_M já que, por 2.5.1, $T(R_M) = T(R)_{R \setminus M}$. Assim sendo, pela Corolário 2.10 temos que, $\overline{R_M}$ não possui ideais máximos de altura um. Portanto, os ideais máximos de $\bar{R}$ que se contraem a M não tem altura um, já que $\overline{R_M} = \bar{R}_{\bigcup_{\substack{N \in \operatorname{Spec Max} \bar{R} \\ N \cap R = M}} N}$. Logo, $\operatorname{alt} \bar{M} \neq 1$.

Δ

A próxima proposição relaciona os ideais máximos de R com os ideais máximos de $T(R)$.

2.11 PROPOSIÇÃO:

Seja R um domínio Noetheriano com $\dim R \geq 2$. Então:

a) Se N é um ideal máximo de $T(R)$, $N \cap R$ é um ideal máximo de R;

b) Se M é um ideal máximo de R e $\operatorname{alt} M \geq 2$, existe um ideal máximo N de $T(R)$ tal que $N \cap R = M$ e $\operatorname{alt} N = \operatorname{alt} M$;

c) $\dim R = \dim T(R)$.

A demonstração desta proposição decorre do caso particular seguinte:

2.12 LEMA:

Seja R um domínio local com $\dim R \geqslant 2$ e seja M o ideal máximo de R. Então, $T(R)$ é um domínio semi-local com a mesma dimensão de R. Além disto, se N é um ideal máximo de $T(R)$, então $N \cap R = M$.

Prova:

Seja $\overline{R}$ o fecho inteiro de R e $R = T(R) \cap \overline{R}$. Pela Proposição 2.11, $T(R) = R_S$, onde $S = R \setminus \bigcup_{\substack{M \quad \mathrm{Spec\,Max}\,R \\ \mathrm{alt}\ M \quad 1}} M$. Portanto, $T(R)$ é um anel semi-local pois $T(R)$ é Noetheriano e $\tilde{R}$ possui finitos ideais máximos, já que $R \subsetneq \overline{R}$.

$\dim T(R) = \dim R_S = \dim R = \dim R$.

Além disto, como $(R, T(R))$ é um par Noetheriano, pela Proposição 1.14, os ideais máximos de $T(R)$ se contraem a ideais máximos de R.

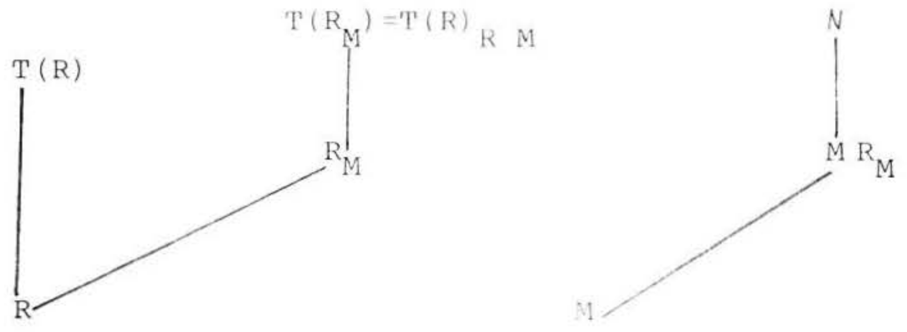
Δ

Passamos agora a prova da Proposição já enunciada.

Prova:

a) Como $(R, T(R))$ é um par Noetheriano, sabemos por 1.14, que os ideais máximos de $T(R)$ se contraem a ideais máximos de R.

b) Seja M um ideal máximo de R com $\operatorname{alt} M \geq 2$. Seja $\mathcal{N}$ um ideal máximo de $T(R_M)$ tal que $\operatorname{alt} \mathcal{N} = \operatorname{alt} M.R_M$. Tal ideal existe, pelo Lema 2.12. Além disto, pelo mesmo Lema, $\mathcal{N} \cap R_M = M R_M$.



Temos por 2.5.1, que $T(R)_{R \setminus M} = T(R_M)$. Seja $\mathcal{W} = T(R) \cap \mathcal{N}$. Então, $\mathcal{W} \cap R = \mathcal{N} \cap T(R) \cap R = \mathcal{N} \cap R = \mathcal{N} \cap R_M \cap R = M R_M \cap R = M$. Além disto, $\operatorname{alt} \mathcal{W} = \operatorname{alt} \mathcal{N} = \operatorname{alt} M R_M = \operatorname{alt} M$.

Resta ver que $\mathcal{W}$ é um ideal máximo de $T(R)$. De fato, isto ocorre, pois, do contrário, existiria um ideal máximo de $T(R)$, $\mathcal{W}'$ tal que $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{W}'$. Como $\mathcal{W}' \cap R$ é um ideal máximo de R (Proposição 1.14) e $\mathcal{W}' \cap R \supseteq \mathcal{W} \cap R = M$, então $\mathcal{W}' \cap R = M$. Logo, $\mathcal{W}' \cap (R \setminus M) = \phi$. Daí, segue que $\mathcal{W}'\, T(R)_{R \setminus M}$ é um ideal próprio de $T(R)_{R \setminus M}$ e contém $\mathcal{W}\, T(R)_{R \setminus M} = \mathcal{N}$, o que é absurdo pois $\mathcal{N}$ é ideal máximo de $T(R)_{R \setminus M}$. Logo, $\mathcal{W}$ é um ideal máximo de $T(R)$.

c) De b) temos que $\dim R \leq \dim T(R)$.

Seja $\mathcal{N}$ um ideal máximo de $T(R)$ e $M = \mathcal{N} \cap R$. Pela Proposição 1.14 temos que M é um ideal máximo de R. Como $\mathcal{N} \cap (R \setminus M) = \phi$, então $\mathcal{N}\, T(R)_{R \setminus M}$ é um ideal máximo de $T(R)_{R \setminus M} = T(R_M)$. Daí, segue que $\operatorname{alt} \mathcal{N} = \operatorname{alt} \mathcal{N}\, T(R)_{R \setminus M} =$

$= \operatorname{alt} N\, T(R_M) \leq \dim T(R_M) = \dim R_M \leq \dim R$, já que pelo Lema anterior, $\dim T(R_M) = \dim R_M$. Portanto, $\operatorname{alt} N \leq \dim R$ logo , $\dim T(R) \leq \dim R$.

É natural perguntarmos se existe um domínio R cuja transformada global seja inteira sobre R mas, não seja um R-módulo finito. O próximo exemplo mostra que anéis nestas condições existem.

2.13 EXEMPLO:

D. Ferrand e M. Raynaud construíram em [6] um domínio local R , bidimensional, com ideal máximo M , cujo completamento para a topologia M-ádica $\hat{R}$, tem um primo imerso associado e cujo fecho $\bar{R}$ é local. Para este domínio R temos que a extensão $R \hookrightarrow T(R)$ é inteira e $T(R)$ não é um R-módulo finito.

Para mostrarmos que a extensão $R \hookrightarrow T(R)$ é inteira observamos que, como $\bar{R}$ possui um só ideal máximo, este deve ter altura dois, visto que $\dim \bar{R} = \dim R = 2$. Portanto, decorre de 2.6 a afirmativa.

Para justificarmos que $T(R)$ não é um R-módulo finito, devemos utilizar um resultado de Nishimura [11,Corolário 2.4], que afirma o seguinte:

"Em um anel semi-local R que contém um elemento não divisor de zero, $T(R)$ é um R-módulo finito se, e somente se, os ideais primos associados do completamento de R tem co-altura maior que um".

Como neste caso $\hat{R}$ é local [1,Proposição 10.16], bi-dimensional [7,17.12] e possui um ideal primo imerso associado, claramente tal primo não pode ter co-altura maior que um. Portanto, $T(R)$ não é um R-módulo finito.

No primeiro capítulo nos perguntávamos se os Teoremas 1.8 e 1.12 ainda valeriam se o anel em questão ainda possuísse elementos nilpotentes não nulos. O próximo exemplo mostra que tal não ocorre.

2.14 <u>*EXEMPLO:*</u>

O anel R que utilizaremos aqui é o mesmo do exemplo anterior, construído por D. Ferrand e M. Raynaud em [6]. Vamos mostrar que a transformada global do completamento $\hat{R}$ de R, não é um anel Noetheriano, muito embora $\hat{R}$ o seja.

Como já foi observado no exemplo anterior, $\hat{R}$ é um anel local. Além disto, $\hat{R}$ é uma R-álgebra plana [1, Proposição 10.14]. Portanto, decorre de 2.4.2 que, se M é o ideal máximo de R, então $T(\hat{R}) = \hat{R}(\hat{M}) = R(M) \otimes_R \hat{R} = T(R) \otimes_R \hat{R}$. Como a extensão $R \hookrightarrow T(R)$ é inteira, então a extensão $R \otimes_R \hat{R} \hookrightarrow T(R) \otimes_R \hat{R}$ também o é [3,chap V,§ 1, nº 1, Prop 5]. Assim sendo, temos que a extensão $\hat{R} \hookrightarrow T(\hat{R})$ é inteira, uma vez que $R \otimes_R \hat{R} = \hat{R}$ [1,Proposição 2.14].

Suponhamos que $T(\hat{R})$ seja um anel Noetheriano. Afirmamos que $T(\hat{R})/\hat{M}\,T(\hat{R})$ é um $\hat{R}$-módulo finito. De fato, como $\hat{M}$ possui pelo menos um elemento não divisor de zero, digamos $\hat{x}$, e como existe um homomorfismo de $\hat{R}$-módulos de $\dfrac{T(\hat{R})}{\hat{x}\,T(\hat{R})}$ sobre $\dfrac{T(\hat{R})}{\hat{M}\,T(\hat{R})}$, então $\dfrac{T(\hat{R})}{\hat{M}\,T(\hat{R})}$ é um $\hat{R}$-módulo finito pois, pelo Te orema 1.12, $\frac{T(\hat{R})}{\hat{x}\,T(\hat{R})}$ o é. Disto decorre que $T(\hat{R})$ é um $\hat{R}$-módulo finito [9,Teorema 30.6].

Por outro lado, $\hat{R}$ é um R-módulo fielmente plano [2,Chap 3,§ 3, nº 3,exemplo 3] e [2,Chap 3,§ 3, nº 5,Proposição 9]. Reunindo isto ao fato de que $T(\hat{R})$ é um $\hat{R}$-módulo finito, por [2,chap I,§ 3, nº 6,Proposition 11] concluímos que $T(R)$ é um R-módulo finito, já que $T(\hat{R}) = T(R) \otimes_R \hat{R}$ e $\hat{R} = R \otimes_R \hat{R}$. Isto contraria a conclusão do exemplo anterior.

De fato, o que mostramos é que, se R é um domínio local tal que $T(R)$ é uma extensão inteira de R mas não é um R-módulo finito, então $T(\hat{R})$ não é anel Noetheriano. Conseqüentemente, $\hat{R}$ possui elementos nilpotentes não nulos.

III - BIBLIOGRAFIA

[1] ATIYAH, M. e DONALD, I. Mac. Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, (Massachussets, 1969).

[2] BOURBAKI, N. Algèbre Commutative, Livre 7, chap. 1-2-3-4 Hermann, (Paris, 1961).

[3] BOURBAKI, N. Algèbre Commutative, Livre 7, chap. 5-6 Hermann, (Paris, 1964)

[4] DOERING, A.M.S e LEQUAIN, Y. The gluing of maximal ideals- Spectrum of a Noetherian ring - Going-up and going-down in polynomial rings, Transaction of the American Math. Soc., 260, nº 2, 1980.

[5] EAKIN, P. The converse to a well known theorem on Noetherian rings, Math. Ann., 177, 1968, 278-282.

[6] FERRAND, D. e RAYNAUD, M. Fibres fornelles d'un anneau local Noetherian, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup, 4ª série, t.3, 1970, 295-311.

[7] KAPLANSKY, I. Commutative Rings, Allyn and Bacon, (Boston 1970).

[8] MATIJEVIC, Maximal ideal transforms of Noetherian rings, Procedures Americ. Math. Soc., 54, 1976, 49-52.

[9] NAGATA, M. Local Rings, Interscience Tracts, (New York, 1962).

[10] NISHIMURA, J. On ideal transforms of Noetherian rings , I, J. Math. Kyoto Univ, 19-1, 1979, 41-46.

[11] ___________. On ideal transforms of Noetherian rings , II, J. Math. Kyoto Univ., 20-1, 1980, 149-154.

[12] WADSWORTH. Pairs of domains where all intermediate domains are Noetherian, Trans. Amer. Math. Soc., 195 (1974), 201-211.

RESUMO

No primeiro capítulo deste trabalho mostramos que, se R é um anel Noehteriano reduzido, qualquer anel entre R e sua transformada global $T(R)$ é Noetheriano. Estudamos também o problema da "maximalidade" de $T(R)$ quando R é um domínio.

No segundo capítulo estudamos algumas propriedades da transformação global $T(R)$ no caso de R ser um domínio Noetheriano de dimensão maior que um.

O resultado principal afirma que $T(R)$ é inteira sobre R se, e só se, o fecho inteiro de R não possui ideais máximos de altura um.

A B S T R A C T

In the first chapter of this work we show that any ring between R and its global transform T(R) is Noetherian whenever R is a reduced Noetherian ring. We also study the maximality problem of T(R) if R is a domain.

In the second chapter we study some properties of the global transform T(R) considering R a Noetherian domain of dimension larger than one.

The main result states that T(R) is integral over R if and only if the integral closure of R does not have maximal ideals of height one.