Pierre Oberson de Souza

Otimização de Portfólios de Investimento – A Estratégia de Paridade de Risco no Cenário Brasileiro

Porto Alegre

Agosto 2015

Pierre Oberson de Souza

Otimização de Portfólios de Investimento – A Estratégia de Paridade de Risco no Cenário Brasileiro

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Administração da Escola de Administração na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Escola de Administração

Programa de Pós-Graduação em Administração

Orientador: Prof. Tiago Pascoal Filomena, Ph.D

Porto Alegre
Agosto 2015

CIP - Catalogação na Publicação

Oberson de Souza, Pierre
Otimização de Portfólios de Investimento – A Estratégia de Paridade de Risco no Cenário Brasileiro / Pierre Oberson de Souza. -- 2015.
56 f.

Orientador: Tiago Pascoal Filomena.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Otimização de portfólios. 2. Paridade de Risco. 3. Efeito da matriz de covariância. 4. Distribuição do risco. I. Pascoal Filomena, Tiago, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pierre Oberson de Souza

Otimização de Portfólios de Investimento – A Estratégia de Paridade de Risco no Cenário Brasileiro

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Administração da Escola de Administração na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 6 de Agosto de 2015:

Prof. Tiago Pascoal Filomena, Ph.D.
PPGA/UFRGS
Orientador

Prof. João Luiz Becker, Ph.D.
PPGA/UFRGS
Convidado 1

Prof. Dr. João Fróis Caldeira
PPGA/UFRGS
Convidado 2

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler
PPGE/UFRGS
Convidado 3

Resumo

O presente trabalho busca dar início a estudos referentes ao modelo de otimização de portfolios de investimento denominado paridade de risco no cenário brasileiro. Neste trabalho, os índices setoriais da bolsa brasileira (Bovespa) foram utilizados como ativos e com os seus dados foram estimadas carteiras com os modelos de mínima variância, de pesos iguais e de paridade de risco. Verificou-se que no modelo de paridade de risco a forma de obtenção da matriz de covariância exerce pouca influência no resultado final, que é de carteiras com distribuição de pesos e volatilidades intermediárias com relação aos modelos de mínima variância e de pesos iguais. Estes resultados são condizentes com aqueles verificados na literatura que utilizam como base de dados os mercados europeus e americanos.

Palavras-chaves: Otimização de portfolios, Paridade de Risco, Matriz de covariância.

Abstract

This paper seeks to initiate studies for the investment portfolios optimization model called risk parity in the Brazilian scene. In this work, the sector indexes of the Brazilian Stock Exchange (Bovespa) were used as assets and their data were used to estimate portfolios with models of minimum variance, of equal weight and of risk parity. It was found that in the risk parity model the form to obtain the covariance matrix has little influence on the final result, that is of a portfolio with weights and distribution of intermediate volatility in relation to the minimum variance models and equal weights. These results are consistent with those found in the literature using as database the European and American markets.
Key-words: Portfolios optimization, Risk Parity, covariance matrix.

Lista de equações

Lista de tabelas

Lista de figuras

Lista de abreviaturas e siglas

1/n	Estratégia de pesos iguais.
BOVESPA	Bolsa de Valores do Estado de São Paulo.
CCC	*Constant Conditional Correlation* – Correlação Condicional Constante.
C-VaR	*Conditional Value at Risk* – Valor do Risco Condicional.
EWMA	*Exponentially weighted moving average* – médias móveis exponencialmente ponderadas.
ICON	Índice BOVESPA Consumo.
IEE	Índice BOVESPA Energia Elétrica.
IFNC	Índice BOVESPA Financeiro.
IMAT	Índice BOVESPA Materiais Básicos.
IMOB	Índice BOVESPA Imobiliário.
INDX	Índice BOVESPA Industrial.
MGARCH	*Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasiticity*
Min V	Estratégia da Mínima Variância.
PR	Estratégia de Paridade de Risco.
UTIL	Índice BOVESPA Utilidade Pública.
VaR	*Value at risk* – Valor do Risco.
VEC	*Vector Error Correction Model*

Lista de símbolos

$\sum$	Matriz de Covariância.
σ	Volatilidade.
$\in$	Pertence.
$c_i(x)$	Contribuição Relativa de cada ativo ao risco.

Sumário

1 Introdução

As estratégias de alocação de recursos em portfolios de investimento são as mais diversas, portanto, trata-se de uma área da ciência largamente estudada e com uma vasta gama de autores de grande relevância. A estratégia que certamente é mais conhecida e amplamente aceita é a de média variância proposta por Markovitz (1952). Entretanto, Chaves et. al (2011) defendem que esta abordagem tem como principal fator limitante a necessidade de estimação de retornos futuros, os quais são de difícil aferição por sua imprevisibilidade.

Tendo em vista as peculiaridades do método de média variância, Buder e Roncalli (2013) descrevem que existe um descolamento entre os portfolios utilizados no mercado e os portfolios de média variância. Este fato leva a uma diversidade de estudos na área de otimização de portfólios que busca a obtenção de modelos que possam ser utilizados de maneira eficiente. Dentre os diversos modelos propostos na literatura, grande parte tem por objetivo se basear apenas na volatilidade dos retornos dos ativos e nas correlações existentes entre as mesmas. Destes modelos, o de mínima variância vem sendo amplamente estudado, como pode ser visto em Caldeira et al. (2013) e Clarke et al. (2006). Ainda, outros autores trabalham com base no modelo de mínima variância, porém com a adição de diferentes restrições, visando aprimorar o modelo. Neto et al. (2011), por exemplo propõem um modelo de mínima variância com restrições adicionais de pesos máximos em cada ativo da carteira.

Outra abordagem cuja qual não há consideração da expectativa de retorno é a estratégia conhecida como 1/n, que pode ser verificada em Disatnik e Katz (2012), na qual se aplica o mesmo montante de capital em cada ativo que for escolhido para compor a carteira de investimento. Isto é, em termos práticos, em uma carteira composta por dez ativos será aplicado 10% do capital em cada ativo individualmente.

Certamente, a estratégia 1/n é bastante rudimentar, como comprovam DeMiguel et al. (2009), especialmente quando comparada à mínima variância, razão pela qual é possível constatar um importante distanciamento entre estas duas estratégias. A existência de um espaçamento latente tão acentuado entre as já mencionadas abordagens aponta para crença de que existiriam outras formas de otimização de portfólios entre elas.

É exatamente no espaço entre as estratégias da mínima variância e de 1/n que se encontra aquela que leva em conta a paridade de risco, vista em Maillard et al. (2010) . Esta, por sua vez, não leva em conta a expectativa de retorno e, ainda, não adota como simples objetivo a minimização da volatilidade da carteira. O que a abordagem da paridade de risco, que será devidamente detalhada a seguir, busca, diferentemente das demais estratégias já mencionadas, é a homogeneização do risco, como visto em Maillard et al. (2010).

1.1 Tema

O presente estudo propõe abordar o portfólio de investimento elaborado com base na paridade de risco, buscando elucidar esta forma alternativa de alocação de recursos em portfólios de investimento.

A estratégia de paridade de risco, que é descrita por Maillard et al. (2010), como o próprio nome sugere, propõe uma forma de alocação de recursos em diversos ativos na qual a contribuição total de cada um desses ativos para o risco será exatamente a mesma, considerando-se que cada ativo tem um risco próprio e terá uma correlação com os demais. Em termos práticos, pode-se dizer que em um portfólio de paridade de risco hipotético que tenha dois ativos sem qualquer correlação, tendo o primeiro ativo a volatilidade de 10% e o segundo a volatilidade de 20%, a alocação dos mesmos será de 66,66% para o de menor volatilidade e de 33,33% para o de maior volatilidade.

A abordagem de paridade de risco pode ser entendida como uma forma alternativa e bastante nova de otimização de portfólios, sendo um dos principais aspectos desta abordagem, como destacado por Maillard et. al (2010), a não necessidade da estimação de retornos futuros.

Ademais, Bruder e Roncalli (2013) apresentam como importante benefício desta estratégia a proximidade que existe entre os portfólios por ela elaborados e aqueles que são efetivamente utilizados no mercado de ações. Tanto indica que, intuitivamente, sempre se busca a diversificação do risco e é exatamente neste aspecto que se encontra o ponto chave da estratégia de paridade de risco: este modelo de otimização permite a obtenção de um portfólio no qual haja a paridade de risco de forma exata e sem a necessidade de grandes conhecimentos de mercado.

1.2 Objetivo

O objetivo deste estudo é analisar o comportamento de portfolios de investimento obtidos através do modelo de paridade de risco no cenário brasileiro, verificando a influência da forma de obtenção da matriz de covariância nos resultados.

1.3 Contribuições

O modelo de paridade de risco vem sendo estudado por diversos autores, como por exemplo, Maillard et al. (2010), Thiagarajan e Schachter (2011), Clarke et al. (2013) e Qian (2011); estes autores, assim como outros, tratam do tema da paridade de risco nos cenários europeus e americano, portanto, suas conclusões são baseadas nesta amostra afastada do cenário brasileiro. Dentre as contribuições deste estudo está o início da análise do modelo PR no Brasil, trazendo para a realidade nacional um modelo especificado e analisado em outras localidades.

Outro ponto relevante no quesito de contribuições deste trabalho está a análise da forma de obtenção da matriz de covariância (necessária para a estimação do modelo de paridade de risco) e a influência que as diferentes formas de obtenção de tais matrizes acarreta nos resultados obtidos através do modelo de paridade de risco. Para que esta análise possa ser feita satisfatoriamente, optou-se por comparar os resultados obtidos pelo o modelo PR com os resultados dos modelos de mínima variância e de pesos iguais.

1.4 Limitações

Como mencionado anteriormente, o modelo de paridade de risco é relativamente novo, tendo os primeiros estudos apresentados em meados da década de 2000, por tal razão não há uma gama extensa de trabalhos que tratam do assunto. Dentre os desafios encontrados durante o trabalho, esteve a dificuldade para implementação do modelo de paridade de risco com o uso de diferentes formas de estimação de matrizes de covariância, no entanto, tal obstáculo pôde ser transposto.

Poderá ser visto ao longo do trabalho que para a análise do modelo de paridade de risco no cenário brasileiro foram utilizados os índices setoriais, portanto as conclusões apresentadas neste estudo têm como base estes índices, os quais têm dados completos apenas a partir de 2008. O fato do período de estudo não ser prolongado devido à limitação de dados torna o estudo menos robusto, uma vez que o ideal seria analisar os resultados para um intervalo de tempo maior. Além do intervalo de tempo ser relativamente curto, análises futuras com outros grupos de ativos certamente corroborariam com este estudo, pois existe a limitação neste trabalho de se abordar apenas os índices setoriais da Bovespa.

2 Revisão bibliográfica

Para que se tenha uma compreensão do método de paridade de risco, é importante entender, primeiramente, de forma clara, os principais métodos de alocação de recursos em portfólios de investimento, dentre os quais estão os de média e mínima variância, assim como o modelo de pesos iguais (1/n). Além do entendimento destes métodos, é importante elucidar as principais formas de mensuração do risco em carteiras, uma vez que este aspecto é presente em todos os modelos estudados nesta dissertação.

Ademais, como citado anteriormente, a forma de obtenção das matrizes de covariância é um aspecto muito importante que será aprofundado no corpo do trabalho, razão pela qual nesta seção são apresentados alguns dos principais métodos de estimação destas matrizes. Por fim, será apresentada a paridade de risco, com o objetivo de elucidar os principais modelos existentes que se utilizam desta teoria como base.

2.1 Risco em Carteira

A base teórica a respeito do risco em carteira é extremamente vasta, uma vez que o tema vem sendo estudado há muito tempo e por uma diversidade importante de autores, sendo possível se encontrar pesquisas a partir das mais diversas óticas. Historicamente, o conceito de risco e retorno é amplamente discutido, contudo, muitos estudiosos ressaltam a dificuldade existente em se encontrar o método apropriado de estimação do risco, para assim se poder avaliar como esta medida se relaciona com o retorno a ser esperado do ativo em questão.

French et. al (1987), todavia, encontram sucesso em comprovar a relação positiva entre risco e retorno – isto é, quanto maior o risco, maior será o retorno. No entanto, os autores deixam claro que esta relação flutua muito, dependendo do período de avaliação. Logo, demonstra-se extremamente importante os estudos a respeito dos métodos de medida de risco.

Passando-se às diferentes formas para a estimação de risco dos ativos, verificou-se que a abordagem mais comumente utilizada é a denominada axiomática, descrita por Adam et al. (2008). Nela, os dados históricos do retorno dos ativos são utilizados como base para estimação dos riscos futuros.

Vale ressaltar, ainda, a existência de outras formas de medida do risco, sendo que as mais comumente utilizadas estão as descritas por Vidovic (2011), consistindo elas dos métodos VaR *(Value at Risk)* e C-VaR *(Conditional Value at Risk)*, nos quais se estima a perda máxima esperada para o portfolio selecionado. O autor busca, então, a partir destes dois métodos apresentados, verificar qual deles seria mais efetivo para a avaliação de risco. Vidovic (2011) conclui que a abordagem denominada de C-VaR é aquela que gera os resultados mais estáveis, sendo, portanto, a mais favorável.

Por sua vez, Brandtner (2013) avalia uma diferente forma de mensuração do risco, a qual é denominada medida de risco espectral. Nela, são dados maiores pesos para retornos negativos, abordagem que se demonstra positiva quando a aversão ao risco for alta. Todavia, o próprio autor confessa que esta abordagem, apesar de suas vantagens, acaba por gerar resultados paradoxais.

Ademais, dentre os estudos analisados encontram-se pesquisas que tratam de fatores de risco, como aquela desenvolvida por Fama e French (1993), na qual se busca determinar quais são os fatores mais importantes para a determinação do risco de certos ativos.

2.2 Da Estimação da Matriz de Covariância

O método utilizado para obtenção da matriz de covariância tem muita importância, e deverá ser observado com grande cuidado, quando se estiver diante de modelos de otimização de portfólios que utilizam como parâmetro simplesmente as volatilidades dos ativos da carteira e a correlação existente entre elas. Autores como Santos e Tessari (2012) e Caldeira et al. (2013) destacam o quão sensível modelos de otimização podem ser devido a alteração na forma de estimação destas matrizes.

Por este motivo, é importante apresentar algumas das principais formas de obtenção de matrizes de covariância. O método mais simples utilizado consiste simplesmente no uso da fórmula da covariância, sendo denominada covariância amostral:

$$S_{XY} = \sum_{I=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{n} \tag{2.1}$$

Onde S_{XY} é a covariância amostral entre os ativos x e y.

O segundo método utilizado para estimação da matriz de covariância é o método de decaimento exponencial (EWMA), o qual também é chamado de Riskmetrics, sendo descrito por Bauwens et al. (2006). Neste modelo, o fator de decaimento comumente utilizado para dados diários é igual a 0.94.

Encontra-se na literatura o modelo denominado Risketrics 2006, o qual é uma evolução do modelo Riskmetrics, sendo este uma combinação de dois modelos de decaimento exponencial. Tal estratégia foi descrita por Zumbach (2007), sendo os parâmetros indicados pelo autor para o modelo os que seguem:

Tabela 1 – Parâmetros para o modelo Riskmetrics 2006

TAU0 – meia vida do EWMA lento: 1560
TAU1 – meia vida do EWMA rápido: 4
KMAX – número de componentes do EWMA a serem utilizados: 14
RHO – fator de decaimento utilizado para as meias vidas: $\sqrt{2}$

Outros modelos amplamente utilizados são os que utilizam métodos GARCH multivariados. O primeiro deles, que se trata de uma generalização do modelo GARCH univariado, é o modelo VEC, descrito por Bauwens et al. (2006). Nele existe a necessidade de serem inseridos os parâmetros *P,O,Q*, os quais representam, respectivamente, o escalar positivo que define o número de passos no processo de inovação, o número de intervalos assimétricos a serem incluídos e, por fim, o número de passos a serem utilizados para estimação da covariância condicional.

O quinto modelo apresentado nesta seção, que também se trata de uma generalização do modelo GARCH univariado, é o MGARCH, descrito igualmente por Bauwens et al. (2006) e que possui os mesmos parâmetros que o modelo VEC.

Por fim, a última estratégia destacada consiste em uma combinação não linear de modelos GARCH univariados, sendo este um método que trata a correlação condicional como constante, denominado por Bauwens et.al (2006) simplesmente de “CCC”. Da mesma forma dos últimos modelos explanados, nele são inseridos os parâmetros *P*, *O* e *Q*.

2.3 Estratégias de Média Variância e Mínima Variância

As metodologias de otimização de carteiras de investimento vêm sendo estudadas há diversas décadas, já havendo sido desenvolvidas as mais diversas abordagens para aperfeiçoar portfólios. Entretanto, o precursor dos estudos nessa área da ciência foi Markovitz (1952), que desenvolveu a sua pesquisa a respeito da estratégia de seleção de carteiras de investimentos por meio do método da média variância.

Na abordagem de média variância, verifica-se o ponto muito positivo de uso de matrizes de covariância, uma vez que tais matrizes são capazes de demonstrar, ao mesmo tempo, a volatilidade de cada ativo e as suas inter-relações. Essas matrizes também serão utilizadas pela estratégia de otimização da mínima variância, a qual também é amplamente estudada, como pode ser visto em Engle et al. (2008), Ledooit e Wolf (2004), Neto et al. (2011), Santos e Tessari (2012) e Caldeira et al. (2013).

A abordagem de mínima variância é aquela na qual se busca a combinação de ativos que proporcione o portfólio de mínima volatilidade possível, isto é, a carteira deverá ter a menor variação admissível do retorno. Mesmo existindo um grande fator em comum entre as estratégias de média e mínima variância, cite-se a utilização de matrizes de covariância, estas abordagens se diferenciam no momento em que a primeira, em sua elaboração, leva em conta a expectativa de retorno, enquanto a segunda não.

Entretanto, mesmo sendo observadas diversas vantagens das estratégias de mínima e média variância, cumpre ressaltar que Santos e Tessari (2012), assim como Caldeira et al. (2013), ao estudar técnicas de otimização de portfólios no contexto do mercado financeiro brasileiro, observaram que a efetividade destes métodos é influenciada pela forma como é estimada a matriz de covariância. Este fato, portanto, pode ser igualmente relevante no método de paridade de risco, uma vez que são igualmente utilizadas as matrizes de variância e covariância.

As pesquisas a respeito das abordagens ora estudadas vêm cada vez mais aprofundando o estudo dos métodos de mínima e média variância. Como mencionado anteriormente, a maior diferença entre os dois métodos é a necessidade de estimação de ganhos futuros no método de média variância, tarefa que é bastante complicada devido a grande imprevisibilidade destes ganhos. Neste sentido, Merton (1980) defende que os erros de estimação dos retornos esperados são significativamente maiores que os erros de estimação das matrizes de covariância.

Observado este aspecto da média variância, Clarke et al. (2006) demonstram que a otimização de portfólios de investimento por meio do método de mínima variância não sofre da limitação mencionada para a estratégia de média variância. Tanto ocorre porque na mínima variância se busca simplesmente a combinação de pesos em diversos ativos para que se obtenha a menor volatilidade possível, levando-se em conta os retornos passados e a inter-relação entre os retornos dos diferentes ativos incluídos na carteira que se busca.

Um aspecto importante do método de mínima variância é descrito por Neto et al (2011), visto que os autores demonstraram uma tendência do método de trazer como resultado portfólios com grande concentração do peso em certos ativos (aqueles de baixa volatilidade), o que poderá gerar carteiras que podem ser consideradas muito desiguais. Buscando aprimorar o método de mínima variância, alguns autores, como Neto et al. (2011), propõem modelos de mínima variância com a adição de restrições em relação aos pesos máximos dos ativos, gerando carteiras menos concentradas.

Do mesmo modo, Behr et al. (2013) visam, em sua pesquisa, contornar a falta de diversificação do portfólio baseado na mínima variância, criando para tanto um modelo com restrições tanto de peso mínimo com de peso máximo para os ativos. Proposto o modelo, buscam verificar a eficiência de seus resultados, que em comparação aos encontrados em portfólios obtidos por meio da estratégia denominada 1/n se mostram extremamente positivos, o que corrobora a efetividade desta abordagem.

2.4 Estratégia de Pesos Iguais (1/n)

Dentre as abordagens possíveis para a elaboração de um portfólio de investimento, é possível encontrar estratégias de maior e menor complexidade. Em meio às abordagens mais simples encontra-se aquela denominada de 1/n, detalhada em DeMiguel et al. (2007). Esta estratégia é considerada simplificada uma vez que é extremamente intuitiva, consistindo da simples aplicação igualitária dos ativos, isto é, o mesmo montante em “n” ativos pré-determinados.

Entretanto, tal estratégia parece encontrar uma série de obstáculos para uma boa efetividade. Conforme descrevem Disatnik e Katz (2012), esta técnica pode inclusive ser considerada ingênua, todavia, ainda assim poderá ser aplicada como um bom indicador comparativo, razão pela qual é utilizada ainda por diversos autores, como Behr et al. (2013) e Santos e Tessari (2012).

O ponto comum que pode ser observado nestes autores que ainda utilizam a estratégia 1/n é a concordância deles a respeito do conceito de que a comparação de diferentes técnicas de otimização de carteiras de investimentos com a estratégia 1/n se mostra uma metodologia muito eficiente e, em razão disso, plenamente aceitável tanto para fins acadêmicos quanto para fins de mercado.

Diante da simplicidade que pode ser atribuída à abordagem 1/n, espera-se que novas técnicas propostas superem um portfólio desenvolvido a partir desta estratégia, evidenciando-se assim o poder da utilização dela como comparativa. Entende-se que uma abordagem, para ser considerada com um mínimo de potencial, deverá superar os rendimentos da modesta técnica 1/n.

2.5 Estratégia de Paridade de Risco

Outra abordagem que se encontra hoje para otimização de carteiras de investimento é a já mencionada paridade de risco, descrita por Maillard et al. (2010), segundo a qual se busca um portfólio no qual a contribuição para o risco da carteira de cada ativo seja a mesma. Não se leva em conta o montante aplicado em cada ativo, nem o retorno esperado, e sim a volatilidade que cada ativo apresenta e a correlação do risco de cada um deles com os demais que se encontram na carteira.

Por se tratar de uma abordagem mais recente, ela ainda não foi tão aprofundada pela doutrina quanto as abordagens mais tradicionais, sendo breve a lista de autores que já tenham tratado do tema. Talvez não se possa dizer que se trate de uma estratégia pouco intuitiva, uma vez que parece totalmente apropriada a diversificação do risco no mercado financeiro. O que sucede, em realidade, é que esta abordagem se demonstra de difícil aferição, uma vez que é necessário avaliar qual a contribuição para o risco, tanto marginal quanto total, de cada ativo e tal cálculo não se mostra tão simples.

2.5.1 Definição Matemática do Problema

Maillard et al. (2010), que são os autores que mais se aprofundaram no estudo desse tema, demonstram uma maneira de calcular os mencionados riscos de cada ativo em uma carteira de investimento. Quando há uma quantidade "n" de ativos em um determinado portfólio (x_1, x_2 ... x_n) deve-se buscar calcular a variância de cada ativo individualmente e a covariância existente entre os mesmos.

A técnica apresentada por Maillard et al (2010) consiste no cômputo da variância e das covariâncias em uma matriz, representada por $\sum$. Ainda, a volatilidade do portfólio será dada por $\sigma(x) = \sqrt{x^T \sum x}$, onde x é a matriz de n linhas e uma única coluna na qual são representadas o peso de cada ativo (x_1, x_2 ... x_n). Portanto, considerando que a variância do ativo i é σ_i^2 e a covariância entre os ativos i e j é σ_{ij}, tem-se que a contribuição marginal ao risco é dada por:

$$\boldsymbol{\partial x_i \sigma(x)} = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i{}^2 + \sum_{j \neq i} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(x)} \tag{2.2}$$

Visto que o que se busca na estratégia em foco é a paridade de risco, o que na realidade se quer é uma combinação de ativos na qual a contribuição de risco total de risco para cada ativo seja a mesma. Somente munido das contribuições marginais de cada ativo, como visto acima, que será possível verificar as contribuições totais dos mesmos, conforme segue:

$$\boldsymbol{\sigma_i(x) = x_i \times \partial x_i \sigma(x)} \tag{1.3}$$

Já foi demonstrada a forma de cálculo da volatilidade do portfólio, cite-se: $\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{x^T} \sum \mathrm{x}}$. Contudo, verifica-se que a mesma volatilidade corresponderá também a simples soma das contribuições totais ao risco de cada ativo ($\sigma_i(x)$). Vejamos:

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)} \tag{2.4}$$

Bruder e Roncalli (2013), este último tendo trabalho nos cálculos anteriores, trazem outra forma de cálculo dos riscos de cada ativo, sejam eles marginais ou totais. Nesse artigo mais recente, apresentou-se uma fórmula alternativa de verificação da contribuição marginal ao risco de um ativo, sendo ela:

$$\boldsymbol{\partial x_i \sigma(x)} = \frac{(\sum \mathbf{x})_\mathbf{i}}{\sqrt{\mathbf{x^T} \sum \mathbf{x}}} \tag{2.5}$$

Portanto, a contribuição ao risco de cada ativo será entendida como:

$$\boldsymbol{\sigma_i(x)} = \mathbf{x_i} \times \frac{(\sum \mathbf{x})_\mathbf{i}}{\sqrt{\mathbf{x^T} \sum \mathbf{x}}} \tag{2.6}$$

No que tange à paridade de risco, é evidente a busca pela igualdade das contribuições ao risco de cada ativo, onde os riscos: $\sigma_1(\mathrm{x}) = \sigma_2(\mathrm{x}) = \cdots = \sigma_n(\mathrm{x})$. Portanto, segundo os autores, o portfólio obtido com paridade de risco pode ser representado da seguinte forma, sendo x o peso de cada ativo, o qual deve estar entre 0 e 1 e, além disto, a soma dos pesos deve ser igual a 1:

$$\boldsymbol{\left\{x \in [0,1]^n : \sum x_i = 1;\ \ x_i \times \partial_{x_i} \sigma(x) = x_j \times \partial_{x_j} \sigma(x)\ para\ todo\ i, j\right\}} \tag{2.7}$$

Tendo em vista que já foi inteiramente definida a paridade de risco em um portfólio de investimento, deve-se agora buscar qual a melhor forma de obtenção desta carteira. Uma das abordagens propostas por Maillard et al. (2010) trata da relação entre portfólios obtidos com três diferentes estratégias: a paridade de risco (PR), o com pesos iguais (1/n) e o de mínima variância (min V). A relação entre as carteiras obtidas por meio destas abordagens pode ser representada por:

$$\boldsymbol{\sigma_{MV} < \sigma_{PR} < \sigma_{1/n}} \tag{2.8}$$

As diferenças encontradas entre estas três carteiras ainda poderá ser entendida de outra forma. Entretanto, para tanto, conforme afirma Scherer (2007), deve-se lembrar que no portfólio de mínima variância se busca que as contribuições marginais ao risco sejam iguais. Vejamos a representação alternativa da relação entre as carteiras mencionadas:

$$\boldsymbol{x_i = x_j} \qquad \text{(1/n)} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{x_i \times \partial_{x_i}\, \sigma(x) = x_j \times \partial_{x_j}\, \sigma(x)} \qquad \text{(PR)} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\partial_{x_i}\, \sigma(x) = \partial_{x_j}\, \sigma(x)} \qquad \text{(min V)} \tag{2.21}$$

<u>2.5.2 Exemplo de Aplicação da Paridade de Risco:</u>

Buscando uma demonstração clara destas relações, Maillard et al. (2010) apresentam um exemplo prático de uma carteira com quatro ativos que apresentam os seguintes parâmetros:

Tabela 2 – Volatilidade dos ativos

Ativos	Volatilidades
1	10%
2	20%
3	30%
4	40%

As correlações entre os ativos desta carteira hipotética, por sua vez, podem ser representados pela matriz que segue:

Tabela 3 - Correlações hipotéticas entre os diferentes ativos

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,8	0	0
x_2	0,8	1	0	0
x_3	0	0	1	-0,5
x_4	0	0	-0,5	1

Considerando-se as correlações entre os ativos e as volatilidades dos mesmos, já demonstradas, será possível obter a matriz de covariância, conforme segue:

Tabela 4 - Matriz de covariância resultante para o exemplo citado

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,01	0,016	0	0
x_2	0,016	0,04	0	0
x_3	0	0	0,09	-0,06
x_4	0	0	-0,06	0,16

Uma vez que se tiver a matriz de covariância, torna-se possível analisar os três portfólios já mencionados – obtidos com as estratégias 1/n, paridade de risco (PR) e mínima variância (min v). Nas tabelas que seguirão, pode-se verificar a volatilidade da carteira ($\sigma(x)$), os pesos de cada ativo (x_i), a contribuição marginal ao risco de cada ativo ($\partial x_i \sigma(x)$), a contribuição total ao risco de cada ativo ($x_i \times \partial x_i \sigma(x)$) e, por fim, a contribuição ao risco relativa de cada ativo ($c_i(x)$).

Sobre a contribuição relativa ao risco, que ainda não foi mencionada, esta se refere à contribuição do risco total de cada ativo à volatilidade da carteira. Ela poderá ser calculada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{c_i(x) = \frac{x_i \times \partial x_i \sigma(x)}{\sigma(x)}} \qquad (2.3)$$

Explanados estes conceitos, vejamos a tabela que representa a carteira 1/n:

Tabela 5 - Resultados relativos ao portfólio de pesos iguais (1/n)

$\sigma(x)$= 11,5%	x_i	$\partial x_i \sigma(x)$	$x_i \times \partial x_i \sigma(x)$	$c_i(x)$
x_1	0,25	0,0564684	0,0141171	0,1226415
x_2	0,25	0,1216242	0,0304061	0,2641509
x_3	0,25	0,0651558	0,0162890	0,1415094
x_4	0,25	0,2171861	0,0542965	0,4716981

Observa-se que a volatilidade total da carteira 1/n é de 11,5%. A seguir, verifica-se a tabela representativa do portfólio em paridade de risco (PR):

Tabela 6 - Resultados relativos ao portfólio em Paridade de Risco

$\sigma(x)$= 10,29%	x_i	$\partial x_i \sigma(x)$	$x_i \times \partial x_i \sigma(x)$	$c_i(x)$
x_1	0,3836125	0,0670821	0,0257335	0,25
x_2	0,1918064	0,1341641	0,0257335	0,25
x_3	0,2426177	0,1060660	0,0257335	0,25
x_4	0,1819633	0,1414213	0,0257335	0,25

Nota-se que se trata de uma carteira em paridade de risco uma vez que a contribuição relativa de cada ativo ($c_i(x)$) é igual. Ainda, vê-se que a volatilidade do referido portfólio é de 10,29%. Passa-se agora à análise da carteira de mínima variância (min v):

Tabela 7 - Resultados relativos ao portfólio de Mínima Variância

$\sigma(x)$ = 8,63%	x_i	$\partial x_i \sigma(x)$	$x_i \times \partial x_i \sigma(x)$	$c_i(x)$
x_1	0,7448276	0,0863034	0,0642811	0,7448276
x_2	0,0000000	0,1380854	0,0000000	0,0000000
x_3	0,1517241	0,0863034	0,0130943	0,1517242
x_4	0,1034483	0,0863034	0,0089279	0,1034483

Observável que a volatilidade da carteira acima é de 8,63%. Da análise comparativa dos três portfólios hipotéticos, é latente que a volatilidade da carteira baseada na estratégia 1/n é a mais elevada, enquanto a menor volatilidade encontrada está no portfólio de mínima variância (min v). A paridade de risco (PR), portanto, permite a obtenção de uma volatilidade média entre as duas mencionadas estratégias.

É possível elucidar ainda mais a situação comparativa entre as carteiras mencionadas por meio de gráficos. Senão vejamos:

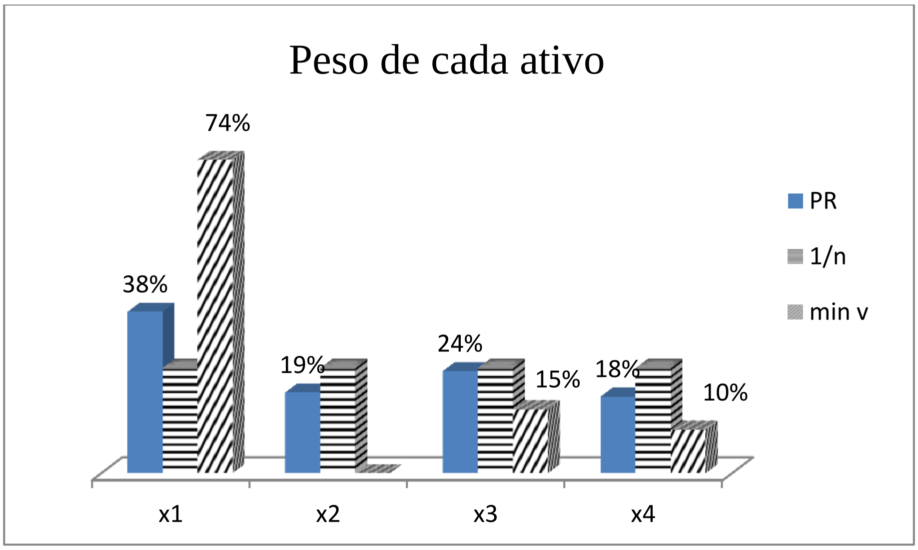

Figura 1 - Comparativo do peso com diferentes estratégias

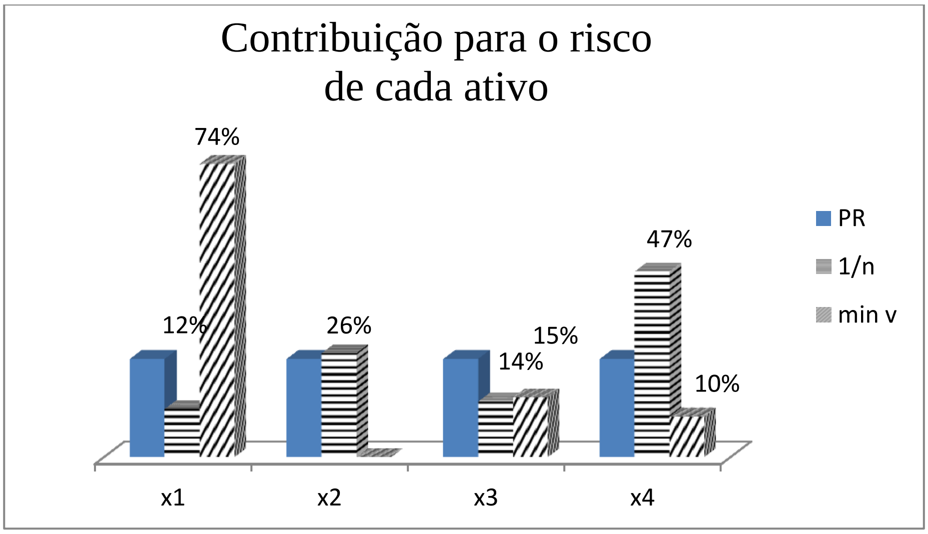

Figura 2 - Comparativo da contribuição total ao risco com diferentes estratégias

Pela análise dos gráficos acima se percebe que, a princípio, a carteira de paridade de risco tende a promover uma menor concentração do investimento em poucos ativos, ficando claro, mais uma vez, que esta estratégia é um meio termo entre a mínima variância e 1/n, pois se pode observar que a diversificação dos portfólios é máxima pelo método 1/n, um pouco menor na paridade de risco e, por fim, menor no método de mínima variância.

2.5.3 Modelo Alternativo de Solução do Problema de Paridade de Risco:

Maillard et al. (2010) desenvolveram um modelo de otimização de portfólios de investimentos para o qual vale uma maior explanação. Em razão das relações demonstradas entre as estratégias já mencionadas, o autor propõe um parâmetro denominado coeficiente de diversificação (c). Tal coeficiente poderá ser alterado e, dependendo do valor a ele atribuído, a otimização poderá resultar em qualquer um dos portfólios já mencionados (1/n, PR e min v).

Este modelo nada mais é do que um modelo de mínima variância acrescido de uma restrição relativa ao parâmetro c. Como já mencionado, os autores apresentaram quais são os valores limítrofes para o coeficiente c que levam aos diferentes portfólios descritos. Quando o valor de c for muito baixo, qualificado como $-\infty$, o resultado será o mesmo de uma otimização de mínima variância (min v), ou seja, o portfólio resultante será aquele que proporciona a mínima volatilidade possível.

Por sua vez, no momento em que se inserir o valor $c = -n \ln n$, sendo n o número de ativos presentes na carteira hipotética, o resultado da otimização será o portfólio de pesos iguais (1/n). Visto que, conforme já se observou, o portfólio de paridade de risco se encontra entre as duas abordagens mencionadas, Maillard et al. (2010) defendem que existe um valor de c que está entre o $c = -\infty$ e $c = -n \ln n$ que resulta em um portfólio de paridade de risco.

O modelo desenvolvido poderá ser expresso pela seguinte maneira:

$$x^*(c) = \arg\min \sqrt{x^T \Sigma x}$$
$$\boldsymbol{u.c.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \geq c \\ \mathbf{1}^T x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Como é possível observar na primeira restrição exposta, o que tem relação com o parâmetro c é o somatório dos logaritmos dos pesos ($\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$). Tal somatório, quando os pesos forem iguais – lembrando que o valor dos pesos deverá sempre contabilizar 1 –, atingirá o seu ponto de máximo. Verifica-se, portanto, que o portfólio de pesos iguais (1/n) é o único possível quando se estiver diante do ponto de máximo, que é exatamente $-n \ln n$.

Uma observação digna de nota é a dificuldade em definir o valor de “c” que proporcionará o portfólio de paridade de risco (PR) no modelo de otimização ora analisado, mesmo quando o parâmetro funciona da forma esperada. O autor não apresenta uma forma exata para que se estipule o seu valor, apenas concluindo pela existência dele, o qual se encontra dentro de um espectro bastante grande (entre $-\infty$ e $-n \ln n$).

Pela observação deste último aspecto apresentado, pode-se compreender que o modelo proposto não se mostra como a mais eficaz forma de otimização de carteiras de investimento, mostrando-se como uma ferramenta didática, em verdade, e não de resolução de problemas fáticos.

Analisado o modelo proposto por Maillard et al (2010) e observado que ele possui alguns pontos que podem causar a sua vulnerabilidade, procurou-se na doutrina outros autores que propusessem formas diversas para a obtenção do portfólio com paridade de risco.

Chaves et al. (2012) trazem em sua obra dois algoritmos eficazes para a obtenção da carteira com paridade de risco sem a necessidade do uso de métodos de otimização, e sim métodos numéricos. O primeiro algoritmo proposto consiste na aplicação do método de Newton para a solução de um sistema de equações não lineares, enquanto o segundo consiste na aplicação de um processo iterativo baseado no método iterativo conhecido pelo seu nome na língua inglesa: “Power Method”.

Já para problemas de maiores dimensões, com mais de 250 ativos, Richard e Roncalli (2013) apresentam um algoritmo denominado “*cyclical coordinate descent*”, o qual, segundo demonstrado pelos autores, se mostrou mais eficiente que os outros algoritmos propostos para a mesma função. Um destes algoritmos que se mostraram menos eficiente que o apresentado por Richard e Roncalli (2013) é o trazido, e já mencionado, por Chaves et al. (2012), que não se mostra muito eficaz para problemas de grandes dimensões.

Maillard et al. (2010), novamente, trazem outra abordagem para a obtenção de carteiras de investimento baseadas na paridade de risco, a qual leva em conta as contribuições de cada ativo ao risco do portfólio. Dessa forma, a função que o modelo de otimização proposto busca visa simplesmente igualar as contribuições de cada ativo aos riscos a eles inerentes, de maneira que quando a função assume o valor zero tem-se a certeza da carteira construída com base na paridade de risco. Este modelo de otimização poderá ser representado da forma que segue:

$$x^* = \arg min\ f(x)$$
$$u.c.\ 1^T x = 1$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1} \qquad (2.4)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_i(\Sigma x)_i - x_j(\Sigma x)_j\right)^2$$

Ressalta-se, no entanto, que para a simplificação do cálculo não se utiliza a contribuição total ao risco em si, uma vez que ela seria obtida por $\sigma_i(x) = \frac{x_i(\Sigma x)_i}{\sqrt{\mathbf{x}^T \sum \mathbf{x}}}$, isto é, dividindo-se $x_i(\Sigma x)_i$ e $x_j(\Sigma x)_j$ pela volatilidade da carteira, representada por $\sqrt{\mathbf{x}^T \sum \mathbf{x}}$. Todavia, como o próprio autor observa, trata-se da mesma expressão dividindo tanto o minuendo quanto o subtraendo da subtração pelo mesmo divisor, sendo a não utilização do último uma mera simplificação aritmética que em nada onera a obtenção do portfólio com paridade de risco. Estabelecido isto, verifica-se que a carteira referida será obtida no momento em que as parcelas contidas no somatório forem iguais. Vejamos:

$$\boldsymbol{x_i(\Sigma x)_i = x_j(\Sigma x)_j \; para \; todo \; i, j.} \qquad (2.5)$$

Quando estas parcelas forem iguais, tem-se que a função objetivo assumirá o valor zero e com isto o portfólio com paridade de risco certamente terá sido obtido, como se demonstra pela expressão $f(x^*) = 0$. Ainda, Maillard et al (2010) comprovam que, independentemente dos dados inseridos no modelo, sempre haverá a carteira com paridade de risco e esta será única.

3 Modelo de Otimização Escolhido

Uma vez bem compreendido o conceito de paridade de risco e, ainda, dos possíveis modelos a serem utilizados para a obtenção de um portfólio nela baseado, passa-se ao próximo passo da pesquisa que é, essencialmente, a eleição de qual modelo se mostrou mais apropriado para os objetivos estabelecidos para esta dissertação.

O primeiro aspecto a ser levado em conta para a escolha do modelo mais adequado é o fato de que o mercado financeiro de ações brasileiras, campo escolhido para a realização deste estudo, é de tamanho relativamente pequeno e, portanto, não necessita de um modelo complexo para grandes dimensões. Em razão disso, buscou-se um modelo mais robusto e, ao mesmo tempo, confiável, o qual, ainda, deverá apresentar uma capacidade considerável.

Pelo exposto, o modelo que foi eleito para a presente pesquisa se baseia no modelo desenvolvido Maillard et al. (2010), apresentado por último na seção anterior, o qual leva em conta a contribuição de cada ativo ao risco do portfólio sem, todavia, utilizar um parâmetro externo, como o “c” apresentado pelo autor em outro modelo. A abordagem escolhida pode ser implementada via software MATLAB®, sendo esta tarefa empreendida por Moussaoui[1] com êxito, razão pela qual o estudo em foco utiliza a implementação por ele proposta. Em suma, portanto, o modelo escolhido se fundamenta na seguinte otimização:

$$
\begin{gathered}
x^* = \arg min \ f(x) \\
u.c. \ 1^T x = 1 \\
\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1} \\
f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_i (\Sigma x)_i - x_j (\Sigma x)_j \right)^2
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

No enfoque que será utilizado, os dados históricos de preços dos ativos do mercado financeiro brasileiro deverão ser inseridos de forma cronológica, para que, dessa forma, as correlações dos retornos dos diversos ativos possam ser obtidas.

Somente assim é possível alcançar a matriz de covariância de todos os ativos inseridos no modelo e, a partir disto, se buscará igualar a zero a função objetivo. Somente quando isto ocorrer, segundo este modelo, se terá a certeza da obtenção de um portfólio com paridade de risco.

---

[1] Mais informações sobre o trabalho de Farid Moussaoui no site: <http://mfquant.net/erc_portfolio.html>

Delimitada a abordagem de otimização eleita em linhas gerais, cumpre a realização de uma tomada passo a passo do funcionamento desta abordagem. Em um primeiro momento, deverá ser feita uma pré-seleção de ativos a serem utilizados, uma vez que todos aqueles que forem inseridos no modelo farão parte da carteira obtida. A seguir, deverão ser inseridas nos modelos as séries históricas de preços dos ativos escolhidos, definindo-se neste instante o tamanho da amostra, isto é, se os dados utilizados se referirão ao último ano, ao último semestre e assim por diante. Uma vez inseridos os dados já referidos, o modelo criará uma matriz dos retornos, calculados para cada dia, quando forem diários os dados, sendo o retorno calculado da seguinte forma:

$$\boldsymbol{R_{ji}} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{P_{j\,i}}/\boldsymbol{P_{j\,i-1}}) \tag{3.2}$$

Onde,

$$R_{ji} = Retorno\ do\ ativo\ j\ do\ dia\ i$$

$$P_{ji} = Preço\ do\ ativo\ j\ do\ dia\ i$$

A partir da matriz dos retornos alcançada, será possível a obtenção da matriz de covariância dos retornos e, uma vez munido destes dados, minimizar-se-á a função objetivo até que esta atinja o valor igual a zero. Com o resultado em mãos, irá se verificar se, de fato, a carteira resultante é de paridade de risco, calculando-se para tanto a contribuição de cada ativo para o risco total do portfólio. Veja-se:

$$\boldsymbol{Contribuição\ ao\ risco} = \boldsymbol{x_i} \times \boldsymbol{\partial_{x_i}}\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \tag{3.3}$$

Na medida em que se obter a contribuição ao risco de cada ativo, dividir-se-á esse montante pela volatilidade da carteira resultante, verificando-se dessa forma a parcela de contribuição ao risco de cada ativo individualmente. Observa-se o mencionado também pela expressão que segue:

$$\boldsymbol{parcela\ de\ contribuição\ ao\ risco} = \frac{\boldsymbol{x_i} \times \boldsymbol{\partial_{x_i}}\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \sum \mathbf{x}}} \tag{3.4}$$

O valor obtido a partir da fórmula supra descrita demonstrará uma carteira com paridade de risco quando ele for igual para todos os ativos e, ainda, a soma destas parcelas for igual a 1.

4 Metodologia Utilizada

Como mencionando anteriormente, para avaliação dos modelos escolhidos foram criadas carteiras a partir dos sete índices setoriais da bolsa brasileira, sendo eles: IEE (Índice Energia elétrica), INDX (Índice Industrial), ICON (Índice Consumo), IMOB (Índice Imobiliário), IFNC (Índice Financeiro), IMAT (Índice Materiais Básicos) e UTIL (Índice Utilidade Pública). Em defesa desta opção de abordagem, verifica-se que a mesma já foi utilizada por outros autores, como Lee (2011), o qual utilizou índices setoriais da bolsa americana.

Tais índices, por sua vez, foram tratados como se ativos fossem, cabendo definir, munido dos modelos selecionados, qual será o peso de cada um destes ativos na carteira. Na literatura, o modelo de paridade de risco é avaliado de forma comparativa aos modelos de mínima variância e de pesos iguais, como ocorre, por exemplo, em Maillard et al. (2010) e Bruder e Roncalli (2013).

Visto que o Índice Imobiliário (IMOB) só possui dados históricos a partir de janeiro de 2008, definiu-se que o estudo seria elaborado para o período, tendo seu final em julho de 2014. Para os modelos de otimização, foram utilizados dados dos últimos dois anos para cada carteira criada, sendo feitos rebalanceamentos das mesmas mensalmente. A título exemplificativo, para o primeiro portfólio obtido foram utilizados dados entre janeiro de 2008 e dezembro de 2009; o mesmo foi mantido durante o mês de janeiro de 2010 e rebalanceado com dados entre fevereiro de 2008 e janeiro de 2010; então, o portfólio foi avaliado em fevereiro de 2010. O esquema explicativo pode ser observado a seguir:

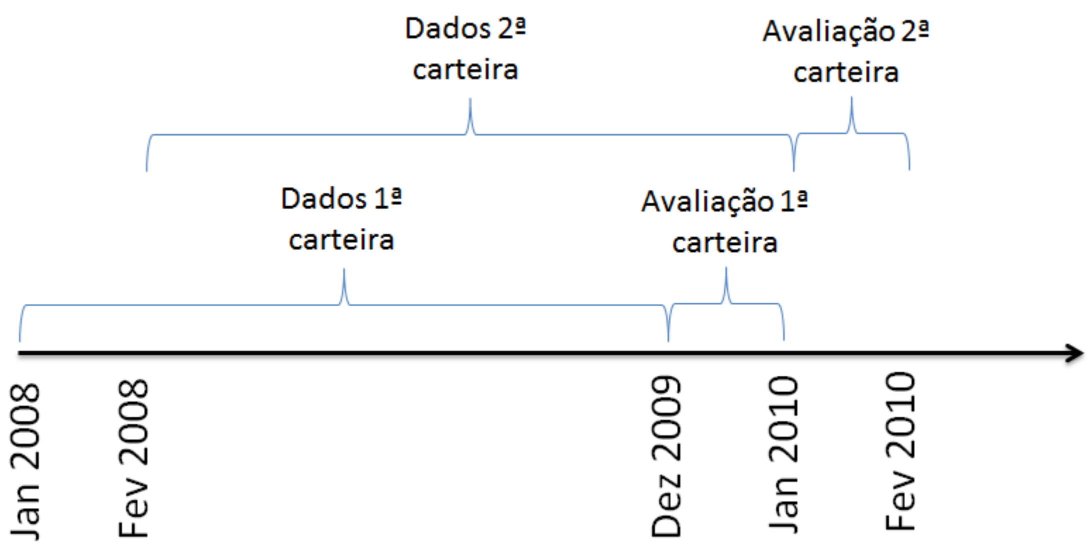

Figura 3 - Esquema explicativo do sistema de rebalanceamento adotado

Com o intuito de verificar a efetividade das diversas formas de obtenção da matriz de covariância, todos os portfólios verificados por meio dos modelos de otimização foram obtidos separadamente a partir de cada uma das seis formas de estimação da matriz anteriormente apresentadas. O parâmetro do modelo Riskmetrics utilizado, que é denominado fator de decaimento, é de 0.94, valor indicado para dados diários; para o modelo Riskmetrics 2006 os parâmetros são os que seguem:

Tabela 8 - Parâmetros para o modelo Riskmetrics 2006

TAU0 – meia vida do EWMA lento: 1560
TAU1 – meia vida do EWMA rápido: 4
KMAX – número de componentes do EWMA a serem utilizados: 14
RHO – fator de decaimento utilizado para as meias vidas: $\sqrt{2}$

Para os demais modelos (VEC, CCC e MGARCH), que têm os mesmos parâmetros (P,O e Q), foram utilizados os valores (1,0,1), os quais foram definidos de tal sorte para que a comparação seja a mais adequada possível.

5 Resultados

Esta seção tem por objetivo apresentar e analisar os resultados de maior relevância obtidos neste estudo. Primeiramente, é apresentada uma análise preliminar, onde são avaliadas as primeiras carteiras obtidas com as diferentes formas de estimação da matriz de covariância, sendo verificada a distribuição dos pesos. Em seguida, é ponderada a influência da forma de estimação da matriz de covariância no modelo de paridade de risco.

Ainda nesta seção, é aferida a performance dos diferentes modelos (mínima variância, pesos iguais e paridade de risco) ao longo do período de estudo, no qual são avaliados o comportamento do retorno, da volatilidade, do máximo drawdown e a influência dos custos de transação nos diferentes modelos.

Por fim, é apresentada uma análise dos resultados no que concerne ao risco de concentração, sendo analisado este risco para os modelos de mínima variância e paridade de risco.

5.1 Da Análise preliminar

A partir da obtenção dos primeiros resultados, se buscará, neste momento, verificar se a teoria, especialmente sobre a estratégia de paridade de risco, é ratificada por dados reais da bolsa brasileira. Nesta análise, o principal ponto a ser avaliado é a questão da diversificação do portfólio, que tende a ser na paridade de risco, segundo Maillard et al. (2010), um meio termo entre as estratégias de mínima variância e de pesos iguais.

De forma ilustrativa, podemos verificar a primeira carteira obtida no período de avaliação (dados entre janeiro de 2008 e dezembro de 2009) com a estimação da matriz de covariância realizada com cada uma das seis diferentes formas de estimação da mesma.

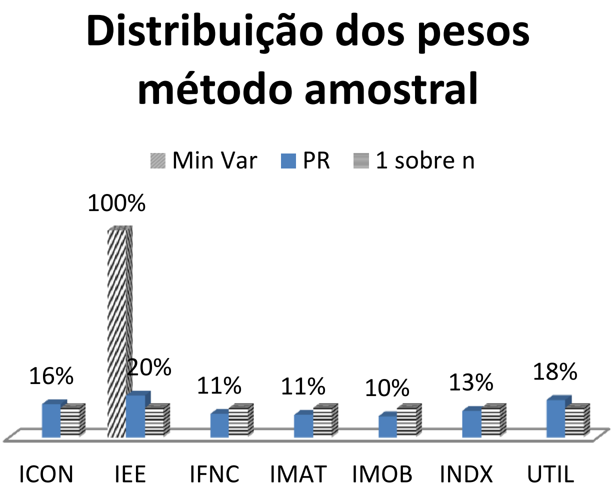

Figura 4 - Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método amostral de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/09

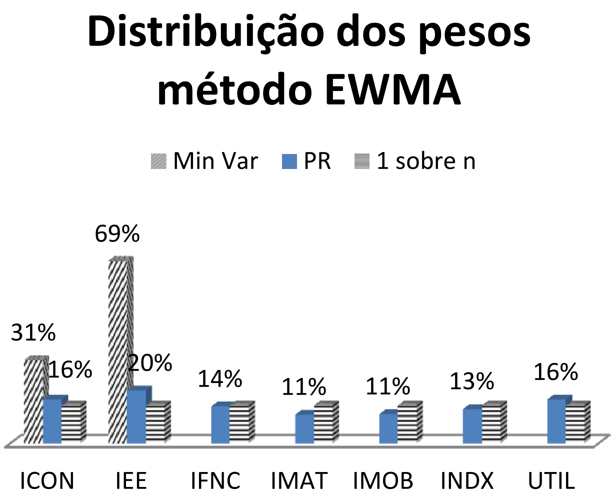

Figura 5 - Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método EWMA de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/2009

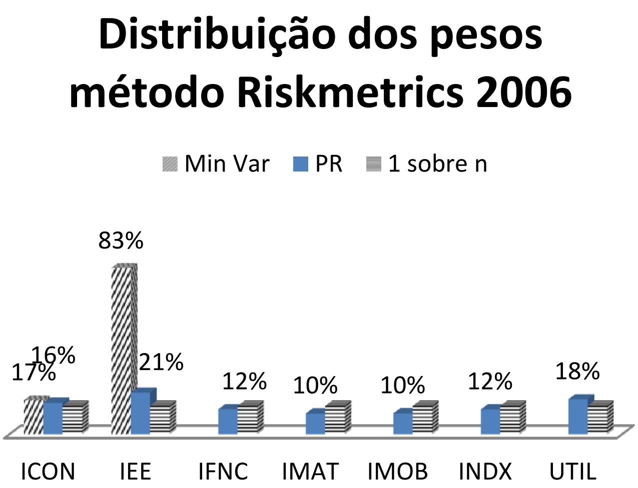

Figura 6 - Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método Riskmetrics 2006 de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/2009

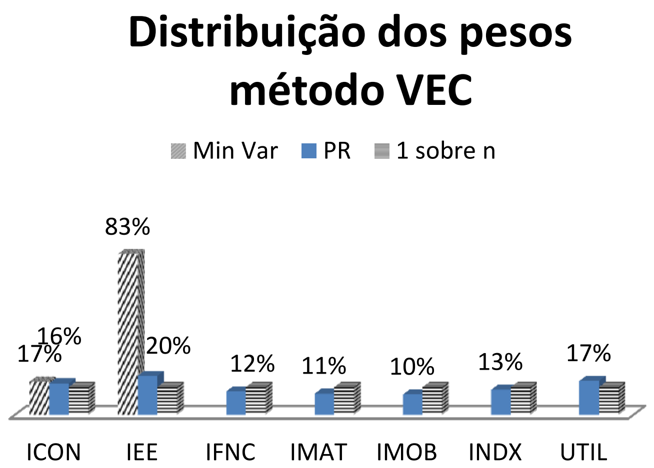

Figura 7 - Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método VEC de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/2009

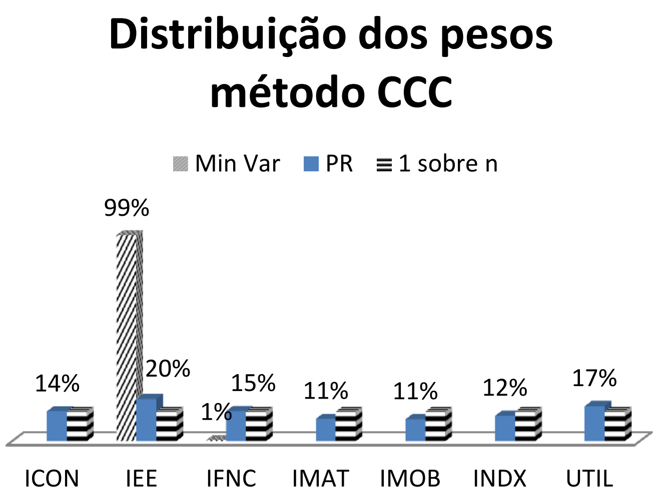

Figura 8 - Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método CCC de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/2009

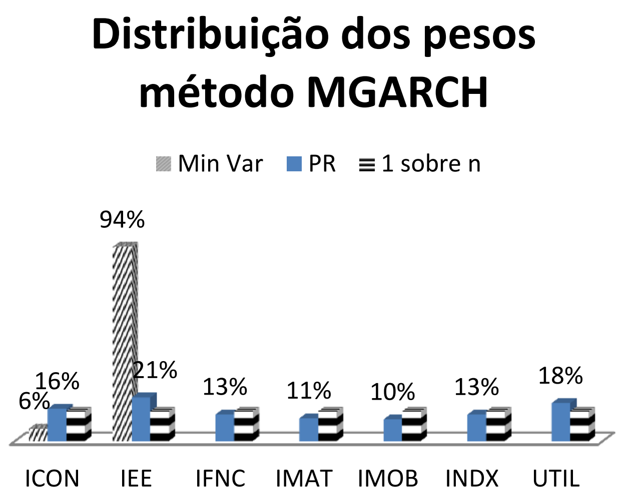

Figura 9 – Distribuição dos pesos nas carteiras obtidas através do método MGARCH de estimação da matriz de covariância com dados entre jan/08 e dez/09

Observadas as figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9, fica bastante clara a tendência da estratégia de paridade risco de proporcionar carteiras com pesos bem distribuídos, encontrando-se esta, de fato, entre os portfólios de mínima variância e de pesos iguais. Este resultado corrobora os dados encontrados por Chaves et al. (2011), demonstrando a forte tendência de que os demais aspectos defendidos pelos autores que trabalham com a paridade de risco em outros contextos tenham efetividade também para o cenário brasileiro.

5.2 Estimação da Matriz de Covariância e a Paridade de Risco

Não se encontrou na literatura estudos que avaliem a influência do método de estimação da matriz de covariância nos resultados obtidos através da estratégia de paridade de risco, uma vez que tais análises são comumente abordadas na avaliação da estratégia de mínima variância. Visando preencher esta lacuna na literatura nos propomos a avaliar se existem grandes variações nos resultados obtidos no modelo de paridade de risco quando o método de estimação da matriz de covariância é alterado.

Para cumprir tal tarefa foram estimadas as carteiras de paridade de risco com cada um dos seis modelos de estimação da matriz de covariância e as mesmas foram avaliadas conforme descrito na figura 3, onde se explica a metodologia utilizada. Os resultados obtidos com cada um dos métodos são apresentados na figura 10:

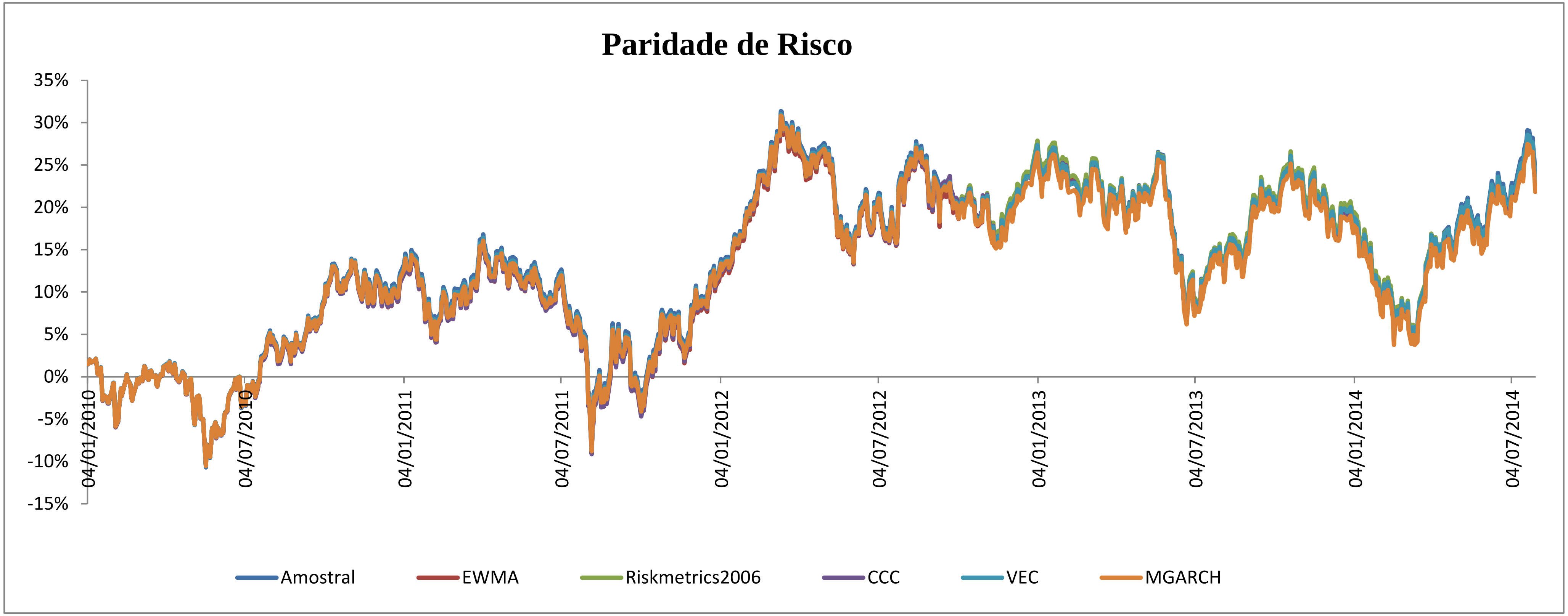

Figura 10 - Influência do método de estimação da matriz de covariância na estratégia de paridade de risco

Da análise da Figura 10, fica claro que a influência do método de estimação da matriz de covariância na estratégia de paridade de risco é praticamente nula, visto que o retorno obtido com os diferentes modelos é basicamente o mesmo, além de o retorno ser muito similar independente do estimador utilizado. A volatilidade, como pode ser visto na tabela 9 que segue, também pouco se altera, o que consequentemente leva a um resultado de índice Sharpe muito similar para todos os casos.

Tabela 9 - Retorno, volatilidade e Índice Sharpe nos modelos de paridade de risco

	Amostral	EWMA	Riskmetrics2006	CCC	VEC	MGARCH
Retorno anual	4.71%	4.52%	4.54%	4.52%	4.62%	4.40%
Risco anual	16.19%	16.06%	16.08%	16.10%	16.16%	16.18%
SHARPE	**0.291**	**0.282**	**0.282**	**0.281**	**0.286**	**0.272**

Vale ressaltar que, neste caso, o índice Sharpe foi calculado simplesmente dividindo o retorno anual pelo risco, sem levar em consideração o risco de um ativo livre de risco. Essa metodologia foi escolhida por que o se busca nesta etapa é simplesmente uma comparação entre os modelos utilizados.

Analisando-se os dados nesta seção resta claro que a influência do método de estimação da matriz de covariância não é relevante na abordagem de paridade de risco, tal fato tem como principal explicação a estrutura da estratégia de paridade de risco, a qual pondera os pesos de forma muito mais igualitária de a abordagem de mínima variância, onde o pesos tendem a ser concentrados em um ou dois ativos apenas. Visto que na abordagem de mínima variância existe esta tendência à concentração, pequenas alterações na matriz de covariância levam a grandes diferenças na carteira final, no entanto isto não ocorre na estratégia de paridade de risco.

Uma vez estabelecido que a estratégia de paridade de risco se mostra pouco influenciável pelo método de estimação da matriz de covariância, utilizar-se-á, para a comparação deste modelo e os demais métodos de otimização de carteiras de investimento, os resultados obtidos pelo método amostral de estimação de matriz de covariância.

5.3 Mínima Variância, Paridade de Risco e um sobre n: retorno e volatilidade

Neste momento, demonstrada a forma pela qual será realizado o confronto, se passará à comparação entre os três modelos de otimização de carteiras de investimento abordados no estudo. Para realizar tanto, conforme já mencionado, os portfólios utilizam dados diários do período de dois anos e são rebalanceados no primeiro útil de cada mês.

No primeiro cenário apresentado, compara-se a estratégia de paridade de risco estimada a partir do método amostral de obtenção da matriz de covariância com as estratégias de pesos iguais (um sobre n) e com a estratégia de mínima variância aferida com os seis diferentes estimadores para a matriz de covariância. Na figura 11, pode-se ver uma vantagem clara do modelo de mínima variância, que com todos os estimadores se apresenta superior às estratégias de paridade de risco e de pesos iguais. Tais resultados são apresentados na figura 11 a seguir:

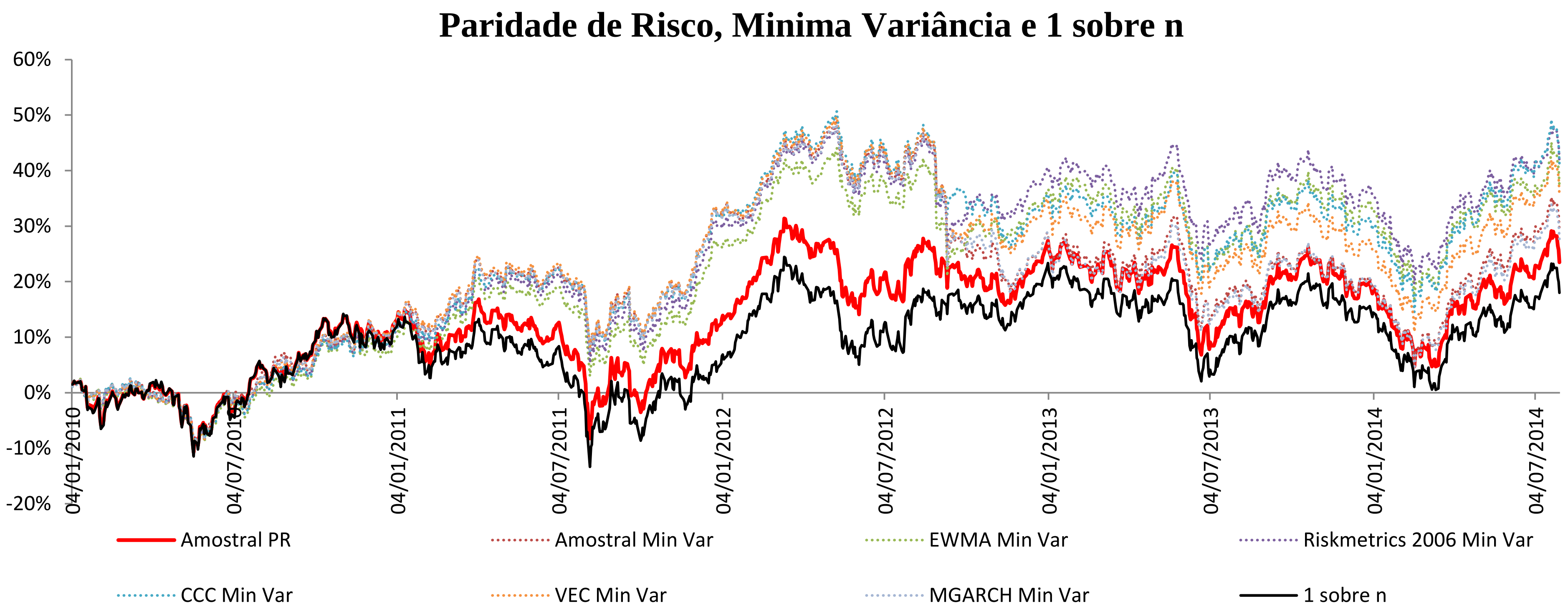

Figura 11 - Retorno dos modelos estudados para todo o período

Ainda, observando a figura 11, percebe-se que há um descolamento significativo entre os modelos de mínima variância e os demais no ano de 2011, porém o comportamento do gráfico dos retornos a partir de 2012 parece ser similar para os diferentes modelos. Visando elucidar este aspecto foi feita uma avaliação ano a ano dos mesmos dados, produzindo-se gráfico o qual apresenta o comportamento anual dos retornos de cada método, sendo tal avaliação retomada a cada início de ano, obtendo-se os dados seguintes apresentados na figura 12:

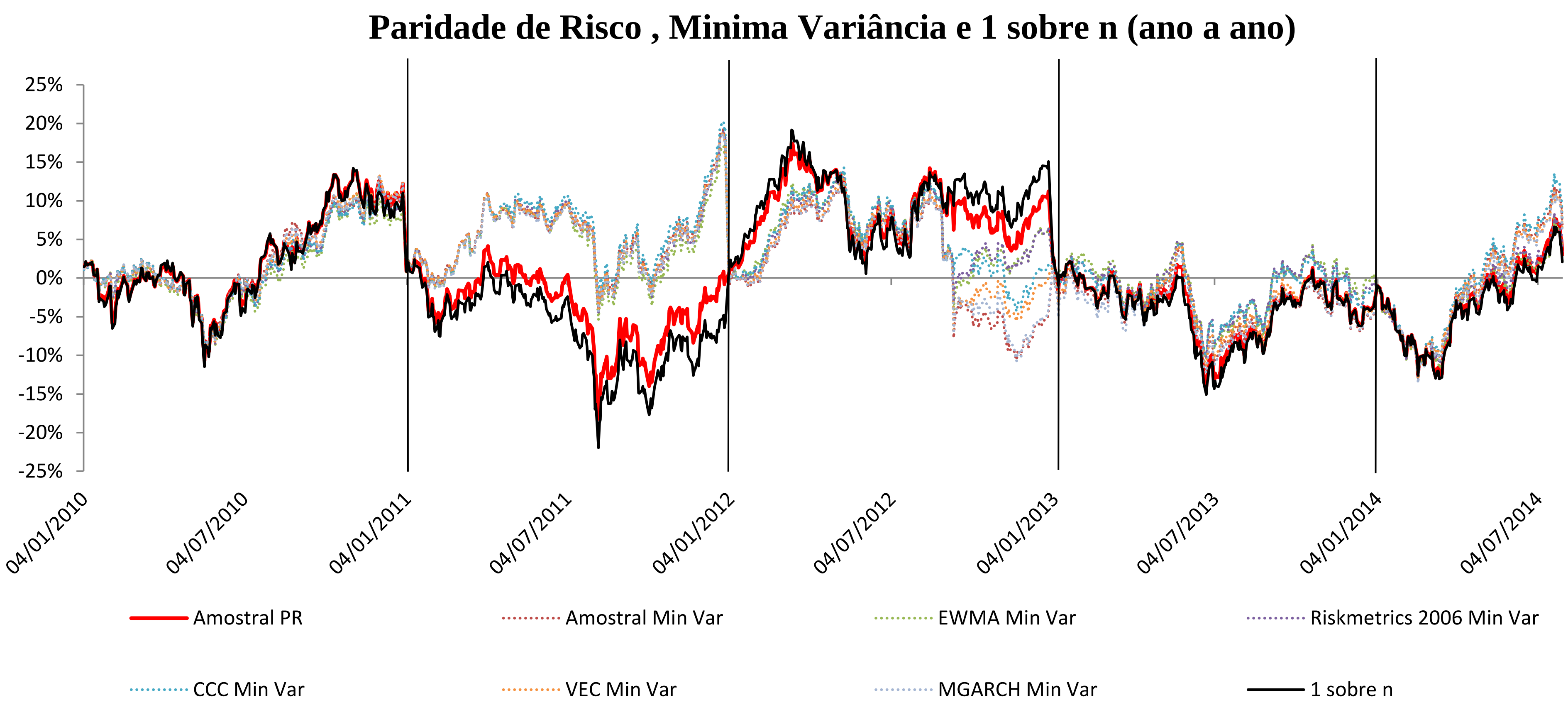

Figura 12 - Retorno dos modelos estudados ano a ano

Os dados apresentados na figura 12 consolidam a análise de que a variação de desempenho entre os modelos de mínima variância, de paridade de risco e de pesos iguais se dá de forma significativa no ano de 2011 apenas. Logo, pode-se entender tal dissonância como um caso isolado, concluindo-se que a tendência dos modelos é de manter a equivalência de rendimento.

Visando aprofundar o estudo neste sentido, é apresentado a seguir um quadro comparativo ano a ano, no qual são apresentados os retornos, volatilidades e índices Sharpe para cada ano e para cada modelo. Ainda, no esquema serão apresentados os retornos corrigidos devido aos custos de transação, os quais, segundo Anderson et al. (2012) podem ser relevantes no que tange as diferenças entre paridade de risco e outras abordagens, considerando-se que cada uma terá um custo variável de 0,06% do seu valor. Ademais, tendo em vista que para cada transação realizada nos rebalancementos da carteira é necessária a venda de certo montante e este mesmo valor será realocado para outro ativo através de uma compra, o custo total por transação (venda + compra) é considerado de 0,12%.

Esclarecendo este conceito em ordem prática, se a carteira é composta de 50% do ativo A e 50% do ativo B em um primeiro momento e, em seguida, a composição é alterada para 40% de A e 60% de B, faz-se necessário que seja vendido 10% do montante aplicado em A para que este valor seja realocado em B, sendo o custo de transação 0,12% do montante de 10% que foi transacionado. Visando apresentar as diferenças de custos de transação das diferentes abordagens, calculou-se o turnover médio, valor que representa da porcentagem da carteira, em termos financeiros, que é rebalanceada após cada período de avaliação, tal resultado é apresentado na tabela 10:

Tabela 10 - Turnover médio das diferentes abordagens

Turnover médio			
	1/N	PR	Min Var
amostral	1.35%	1.40%	2.02%
EWMA	1.35%	5.47%	25.59%
Riskmetrics 2006	1.35%	4.61%	21.12%
CCC	1.35%	5.03%	22.70%
VEC	1.35%	2.29%	9.00%
MGARCH	1.35%	2.51%	10.63%

Observando-se a tabela 10 fica claro que a estabilidade verificada na abordagem de paridade de risco é muito maior que àquela aferida quando o critério de mínima variância é utilizado, resultado que leva a maiores custos de transação quando este último critério é utilizado.

A tabela 11 explicita os retornos de cada um dos modelos para cada ano de estudo:

Tabela 11 - Retornos ano a ano dos modelos selecionados

Retorno anual	1 sobre n	PR	Mínima Variância Amostral	EWMA	Riskmetrics 2006	CCC	VEC	MGARCH
2010	11.01%	12.19%	11.92%	9.01%	10.39%	10.60%	12.39%	12.15%
2011	-5.94%	-0.31%	18.39%	15.71%	17.64%	18.85%	17.88%	17.69%
2012	15.00%	11.16%	-4.33%	5.58%	5.75%	0.95%	-0.03%	-4.22%
2013	-3.86%	-3.73%	-4.85%	-0.87%	-1.64%	-2.72%	-4.41%	-5.22%
2014	3.52%	5.20%	12.06%	0.81%	2.93%	10.71%	10.10%	9.19%

Observando a tabela 11 é possível verificar numericamente o que é vislumbrado nas figuras 11 e 12, restando claro o desempenho superior do modelo de mínima variância no ano de 2011 e inicio de 2014. Além disto, é possível observar que em 2012 os modelos de pesos iguais e PR foram superiores no quesito do retorno absoluto. Na tabela 12 são apresentadas as volatilidades anuais dos modelos:

Tabela 12 - Volatilidades ano a ano dos modelos selecionados

Risco anual	1 sobre n	PR	Mínima Variância Amostral	EWMA	Riskmetrics 2006	CCC	VEC	MGARCH
2010	16.9%	15.5%	12.3%	12.50%	12.3%	12.2%	12.2%	12.2%
2011	20.3%	18.6%	14.2%	14.4%	14.4%	14.1%	14.1%	14.1%
2012	15.6%	14.6%	14.5%	13.4%	13.0%	12.7%	14.2%	14.5%
2013	15.1%	14.8%	14.0%	13.5%	13.3%	13.3%	13.7%	14.1%
2014	16.9%	16.7%	15.4%	15.8%	15.5%	16.1%	15.3%	15.7%

Observando-se a tabela 12, um fato chama a atenção: a presença em todos os casos de volatilidade intermediária do modelo PR, sendo este resultado verdadeiro independentemente da forma de estimação da matriz de covariância no modelo de mínima variância. Isto é, em todos os casos, o modelo PR produz resultados condizentes com os encontrados por Maillard et al. (2010). Munido dos retornos e volatilidades anuais foi possível produzir a tabela 13, onde são apresentados os índices Sharpe para cada ano de estudo, cabendo ressaltar que tal índice foi calculado exclusivamente se observando a relação entre o retorno e a volatilidade, sem ser considerado um ativo livre de risco, sendo tal metodologia utilizada em razão da intenção ser unicamente a comparação entre os modelos.

Tabela 13 - Índice Sharpe ano a ano dos modelos selecionados

			Mínima Variância					
Sharpe	1 sobre n	PR	Amostral	EWMA	Riskmetrics 2006	CCC	VEC	MGARCH
2010	0.65	0.79	0.97	0.72	0.84	0.87	1.02	1.00
2011	-0.29	-0.02	1.29	1.09	1.23	1.33	1.26	1.25
2012	0.96	0.77	-0.30	0.42	0.44	0.07	0.00	-0.29
2013	-0.26	-0.25	-0.35	-0.06	-0.12	-0.20	-0.32	-0.37
2014	0.21	0.31	0.78	0.05	0.19	0.66	0.66	0.59

Para uma melhor visualização, é apresentada a seguir a tabela 14, na qual os índices Sharpe obtidos para cada um dos estimadores da matriz de covariância são calculados unidos através da média aritmética simples dos mesmos. Assim, analisa-se o modelo de mínima variância como um modelo singular e a comparação pode ser mais facilmente realizada. Vejamos:

Tabela 14 - Índice Sharpe ano a ano para os modelos estudados

Sharpe	1 sobre n	PR	Min Var
2010	0.65	0.20	0.90
2011	-0.29	-0.02	1.24
2012	0.96	0.77	0.06
2013	-0.26	-0.25	-0.24
2014	0.21	0.31	0.49

A partir da análise das tabelas 13 e 14, novamente se verifica uma diferença de performance favorável aos modelo de mínima variância, entretanto, no ano de 2012 este modelo apresentou um rendimento menor. Um fato chama a atenção, que é a análise do ano de 2014, onde mesmo tendo retornos maiores, tais rendimentos só são alcançados com volatilidades maiores, acarretando em um índice Sharpe sem a grande diferença observada na tabela 11.

Uma forma alternativa de se analisar o risco de uma abordagem é através da obtenção do máximo drawdown de uma carteira, onde é possível verificar a perda máxima em um certo intervalo de tempo, tal resultado é apresentado na tabela 15:

Tabela 15 - Máximo Drawdown

		Máximo Drawdown					
		2010	2011	2012	2013	2014	2010-2014
	1/n	-13.4%	-23.8%	-15.6%	-17.3%	-12.2%	-24.1%
	PR	-12.6%	-21.5%	-13.1%	-16.1%	-11.8%	-21.5%
Min. Var.	Amostral	-11.7%	-13.9%	-20.4%	-15.0%	-11.8%	-29.3%
	EWMA	-12.3%	-14.7%	-16.0%	-14.5%	-12.1%	-18.9%
	Risskmetrcs 2006	-12.0%	-13.8%	-14.9%	-14.3%	-11.8%	-19.2%
	VEC	-11.9%	-13.5%	-17.7%	-14.7%	-11.8%	-25.9%
	CCC	-11.7%	-12.3%	-16.5%	-14.0%	-12.1%	-24.0%
	MGARCH	-11.7%	-13.4%	-20.6%	-14.7%	-12.7%	-29.8%

Observando-se a tabela 15 fica claro que o máximo drawdown observado na abordagem de paridade de risco é menor quando comparado ao portfólio de pesos iguais, em relação as carteiras de mínima variância os resultados são mistos, onde a paridade de risco apresenta drawdown maior em 2011 e menor em 2012, sendo similar nos outros anos.

Com a análise dos dados obtidos nesta seção fica clara a disparidade entre o ano de 2011 e os restantes, dentre as possíveis explicações para esta diferença é a influência do governo sobre o setor elétrico, a qual sabidamente é bastante grande e foi importante no ano em questão. Este fato é ainda mais relevante devido à tendência de concentração do peso na abordagem de mínima variância no índice IEE, fato que torna a influência governamental neste setor mais importante. Além do desempenho superior do critério de mínima variância em 2011 ter como possível explicação a influência governamental, o desempenho inferior desta abordagem em 2012 tem a mesma explicação, pois o ano de 2012 foi percebido com insegurança pelos investidores no setor energético pela insegurança jurídica criada pelo governo naquele ano.

5.4 Concentração do peso *vs* Estratégias de otimização

Um aspecto positivo descrito pelos autores que trabalham com paridade de risco, dentre eles Maillard et al. (2010), é a sua baixa tendência de concentração de grande parte dos recursos em apenas um ou poucos ativos, o que significaria a grande vantagem de se ter a proteção em caso de uma eventual grande volatilidade repentina de um ativo, sendo este denominado risco de concentração. Caso contrário, estando os recursos alocados com grande volúpia em um ativo e o mesmo apresentasse queda acentuada em um curto período, a carteira em questão teria uma queda abrupta em seus rendimentos.

No intuito de verificar se este resultado se reproduziria no cenário brasileiro, avaliou-se de forma comparativa a tendência de concentração dos recursos para as diferentes estratégias. Sendo evidente que a estratégia de pesos iguais não pode apresentar concentração do peso em um ativo, a comparação, neste caso, se limita entre o modelo de paridade de risco e o de mínima variância. O primeiro passo é avaliar as carteiras como um todo, de forma que, para verificar a concentração o risco, calculou-se o desvio padrão dos pesos de cada portfólio. Dessa forma, é possível perceber quão diversificada, ou não, é um carteira, sendo tais dados computados na figura 13, na qual se pode perceber, claramente e novamente, que a estratégia de paridade de risco é intermediária aos modelos de pesos iguais e de mínima variância.

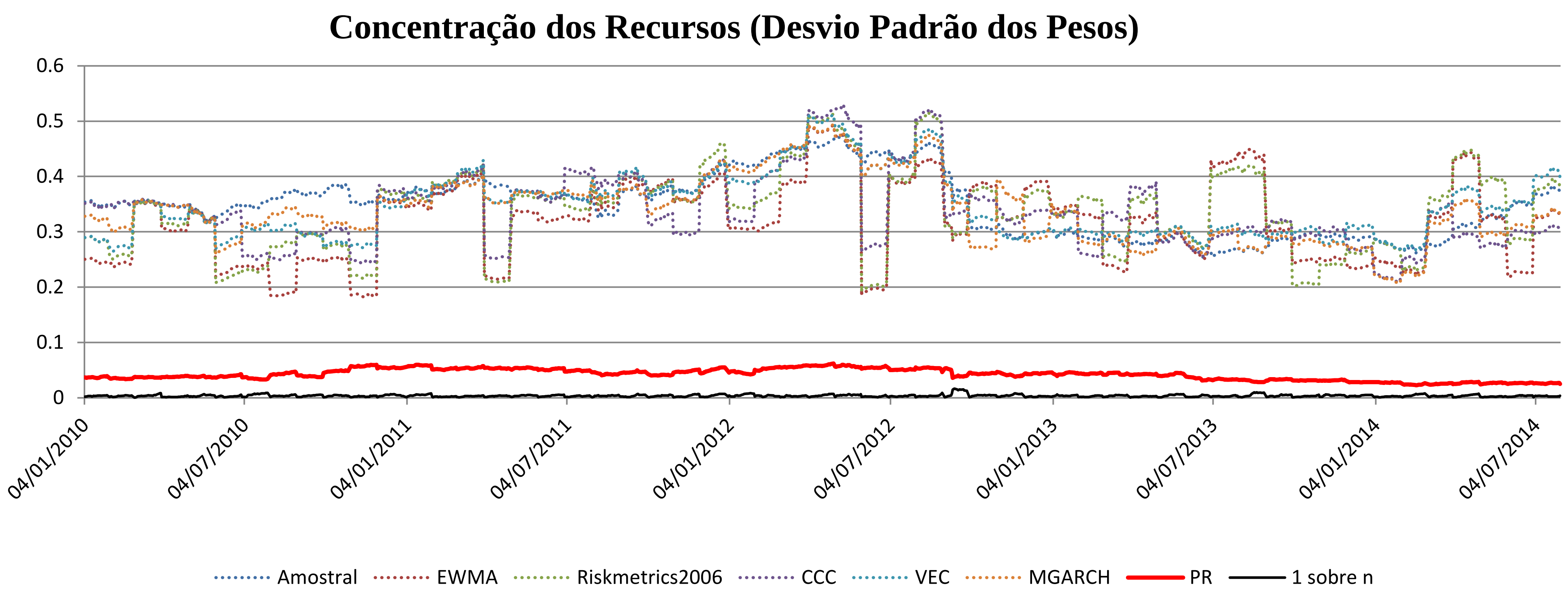

Figura 13 - Concentração dos recursos (desvio padrão dos pesos)

Visto que o desvio padrão dos pesos é igual a zero quando a carteira é perfeitamente diversificada em pesos (todos os pesos são iguais), percebe-se uma nítida diferença de diversificação entre os modelos de paridade de risco e o de mínima variância, sendo que no último, independentemente do estimador da matriz de covariância utilizado, é verificada uma grande diferença no nível de diversificação da carteira.

Outro método possível para verificar o nível de concentração dos recursos é a análise do número de casos nos quais o ativo mais presente no portfólio é detentor de certa porcentagem dos recursos disponíveis. Desta forma, é possível criar um histograma que tende a deixar bastante claro qual o nível de concentração encontrado para cada modelo. A seguir, na figura 14, apresenta-se, conjuntamente, os histogramas para os modelos de paridade de risco e de mínima variância, de forma que, buscando dar clareza aos resultados, foram computadas todas as carteiras modeladas e se analisou o número de vezes que o nível de concentração indicado foi encontrado. Segue:

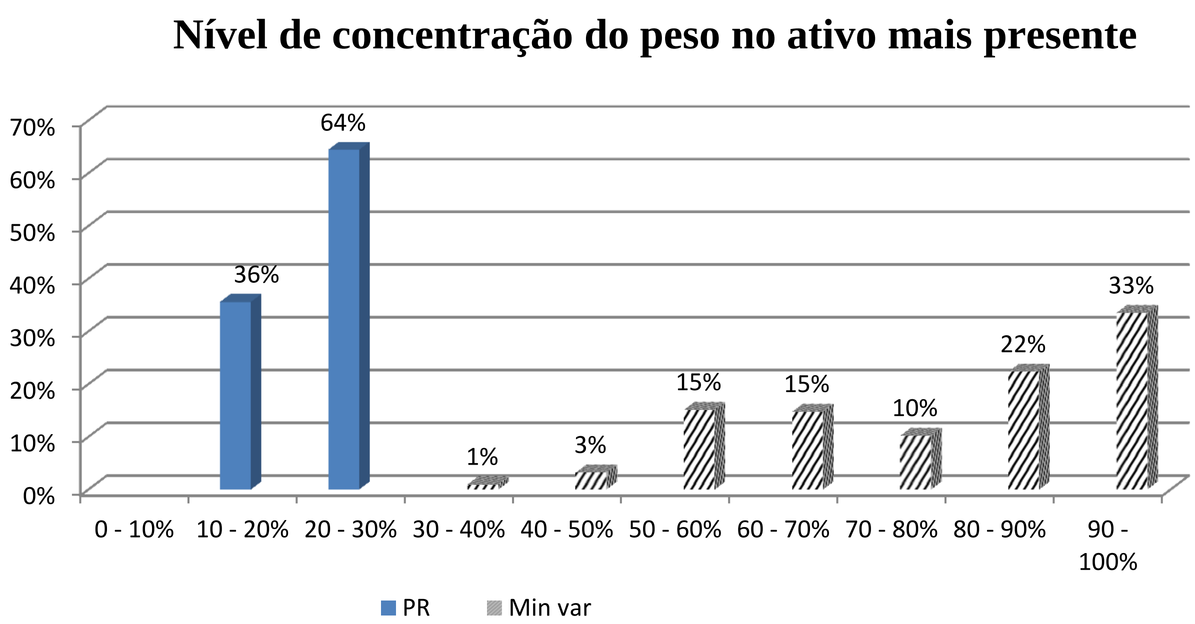

Figura 14 - Nível de concentração do peso do ativo mais presente

Analisando o histograma apresentado, se verifica que em 33% das carteiras formadas a partir da estratégia de mínima variância o ativo com mais recursos alocados tinha entre 90 e 100% destes recursos acumulados. Por sua vez, em 64% das carteiras formadas a partir da estratégia de paridade de risco este ativo tinha apenas entre 20 e 30% dos recursos acumulados.

Resta claro que os principais resultados obtidos neste estudo são a verificação de volatilidade e distribuição de pesos intermediária no modelo de paridade de risco com relação aos modelos de mínima variância e de pesos iguais, fato que é muito importante para demonstrar que resultados obtidos por diversos autores de outras localidades foram igualmente verificados no cenário brasileiro. É de grande relevância a análise das diferentes formas de obtenção da matriz de covariância e sua relação com aos resultados obtidos no modelo de paridade de risco, na qual é demonstrada a baixíssima influência no resultado final devido a alterações nestes estimadores.

6 Considerações finais

Primeiramente, mostra-se fundamental destacar, sem dúvida, que a presente pesquisa se trata do primeiro estudo sobre paridade de risco no cenário brasileiro que utiliza como ativos um grupo especifico de índices. Dessa forma, os resultados obtidos, principalmente em relação ao retorno absoluto das carteiras formadas, não podem ser considerados como uma verdade absoluta para todo o mercado de ações brasileiro. Todavia, certos aspectos demonstrados apresentaram coerências com teorias concebidas com base em outros mercados, o que é extremamente positivo e abre portas para novos estudos nesta área.

É temerário acreditar na existência de uma estratégia de otimização de carteiras de investimento que seja absoluta, uma vez que cada modelo apresenta determinados aspectos positivos e negativos, razão pela qual somente no caso concreto poderá se optar pelo modelo que seria mais apropriado. Caso houvesse uma estratégia que se mostrasse muito superior às demais, o presente estudo, assim como diversos outros realizados, perderia o seu propósito.

Dito isso, exatamente o que se buscou neste trabalho é verificar se os pontos positivos defendidos pelos autores que trataram do modelo de paridade de risco, observando o mercado americano e europeu, seriam reproduzidos no mercado brasileiro. Os estudiosos desta estratégia de otimização de carteiras defendem, como seus pontos altos, a tendência à diversificação do portfólio e a obtenção de volatilidades intermediárias entre as estratégias de mínima variância e de pesos iguais.

Partindo-se destes pontos, o estudo cumpriu seu objetivo, visto que para todo o período estudado a carteira formada a partir da estratégia de paridade de risco esteve neste nível intermediário de volatilidade, razão pela qual se pode presumir a transposição das análises realizadas no mercado europeu e no americano, ao menos em parte, para o cenário financeiro brasileiro. Além de observado um nível de volatilidade intermediário, também foi verificado um nível intermediário de diversificação em pesos, diminuindo riscos de concentração geralmente observados em carteiras formadas a partir do modelo de mínima variância.

É evidente que mais estudos sobre o tema devem ser realizados, preenchendo lacunas que ainda existem a respeito do assunto, buscando-se, principalmente, formas de realização da escolha sobre quais ativos devem estar presentes na carteira de paridade de risco para que esta estratégia seja a mais eficiente possível. É de suma importância a realização deste aprofundamento em outro momento, visto que é o único ponto da estratégia a ser definido pelo analista, pois a carteira obtida através desta sempre faz com que recursos sejam destinados a todos os ativos que já tenham sido pré-definidos.

7 Referências Bibliográficas

ADAM, A.; HOUKARI, M.; LAURENT, J. Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, v. 32, p. 1870-1882, 2008.

ANDERSON, R. M.; BIANCHI, S. W.; CFA; GOLDBERG, L. R. Will My Risk Parity Strategy Outperform? *Financial Analysts Journal,* v. 68, n. 6, p. 75-93, 2012

BAUWENS, L.; LAURENT, S. ROMBOUTS, J.V.K. Multivariate garch models: a survey. *Journal of applied econometrics*, v. 21, p. 79-109, 2006.

BEHR, P.; GUETTLER, A.; MIEBS, F. On portfolio optimization: Imposing the right constraints. *Journal of Banking & Finance*, v. 37, p. 1232-1242, 2013.

BRANDTNER, M. Conditional Value-at-Risk, spectral risk measures and (non-) diversification in portfolio selection problems – A comparison with mean–variance analysis. *Journal of Banking & Finance.* v. 37, p. 5526-5536, 2013.

BRUDER, B.; RONCALLI, T. Managing Risk Exposures using the Risk Parity Approach. Lyxor Asset Management. Jan 2013. Disponível em:<http://www.lyxor.com/fileadmin/_fileup/lyxor_wp/document/Lyxor_20Research_20-_20Managing_20Risk_20Measures_2c_20Jan_202013_03.pdf>

CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. P. Seleção de Carteiras Utilizando o Modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*. v. 67, p. 45-65, 2013.

CHAVES, D.; HSU, J.; LI, F.; SHAKERNIA, O. Risk Parity Portfolio vs. Other Asset Allocation Heuristic Portfolios. *The Journal of Investing*, v. 20, n. 1, p. 108–118, 2011

CHAVES, D.; HSU, J.; LI, F.; SHAKERNIA, O. Efficient Algorithms for Computing Risk Parity Portfolio Weights. *The Journal of Investing*, v. 21, n. 3, 2012.

CLARKE, R.; DE SILVA, H.; THORLEY, S. Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market. *The Journal of Portfolio Management*, v. 33, n. 1, p. 10-24, 2006.

CLARKE, R., HARINDRA, S.; THORLEY, S. Risk Parity, Maximum Diversification, and Minimum Variance: An Analytic Perspective. The *Journal of Portfolio Management*, v. 39, n. 3, p. 39-53, 2013.

DEMIGUEL, V.; GERLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naïve diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, v. 22. n.5, p. 1915-1953, 2009.

DISATNIK, D.; KATZ, S. Portfolio Optimization Using a Block Structure for the Covariance Matrix. *Journal of Business Finance & Accounting*, v. 39, p. 806-843, 2012.

ENGLE, R.; SHEPPARD, K. Evaluating the specification of covariance models for large portfolios. Working Paper, *Department of Economics, University of Oxford.* 2008. Disponível em: <http://www.kevinsheppard.com/Main_Page>

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stock and bonds. *Journal of Financial Economics.* v. 33, p.3-56, 1993.

LEDOOIT, O.; WOLF, M. (2004). Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. In Journal of Portfolio Management, Vol 30, n^0 4. 2004. Pgs 110-119

LEE, W. Risk-Based Asset Allocation: A New Answer to an Old Question? *The Journal of Portfolio Management*, v. 37, n. 4, p. 11-28, 2011.

MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEILETCHE, J. On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, v. 36, n. 4, p. 60-70, 2010.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1. p. 77-91, mar 1952.

MERTON, R. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, v. 8, n. 4, p. 323-361, 1980.

NETO, C. T.; LEAL, R. P. C.; DE SOUZA E ALMEIDA, V. Um Índice De Mínima Variância De Ações Brasileiras. *Economia Aplicada*, v. 15, n. 4, p. 535-557, 2011.

QIAN, E. Risk Parity and Diversification. *The Journal of Investing,* v. 20, n. 1, p. 119-127, 2011.

RICHARD, J.; RONCALLI, T. A fast algoritim for computing high dimensional risk parity portfolios. *Lyxor Asset Management.* 2013. Disponível em: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2325255>

SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 10, n. 3, p. 369-394, 2012.

SCHERER, B. Portfolio construction & risk budgeting. Apud: MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEILETCHE, J. On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, v. 36, n. 4, p. 60-70, 2010.

THIAGARAJAN, S. R.; SCHACHTER, B. Risk Parity: Rewards, Risks, and Research Opportunities. *The Journal of Investing*, v.20, n.1, p. 79-89, 2011.

VIDOVIC, J. Performance of Risk Measures in Portfolio Construction on Central and South-East European Emerging Markets. *American Journal of Operations Research*, v. 1, p. 236-242, 2011.

ZUMBACH, G. A gentle introduction to the RM2006 methodology. *Technical report, RiskMetrics Group.* 2007. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=1420183>