

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

LUCAS BASSANI DALMAGRO

AVALIAÇÃO DE DERIVATIVOS DE TAXAS DE JUROS: UMA APLICAÇÃO
DO MODELO CIR SOBRE OPÇÕES DE IDI

Porto Alegre - RS

Maio de 2015

LUCAS BASSANI DALMAGRO

AVALIAÇÃO DE DERIVATIVOS DE TAXAS DE JUROS: UMA APLICAÇÃO
DO MODELO CIR SOBRE OPÇÕES DE IDI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em preenchimento dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Administração de Empresas – Ênfase em Finanças.

Orientador: Prof. Dr. João Fróis Caldeira

Porto Alegre - RS

Maio de 2015

CIP - Catalogação na Publicação

Dalmagro, Lucas Bassani

Avaliação de derivativos de taxas de juros: uma aplicação do modelo CIR sobre opções de IDI / Lucas Bassani Dalmagro. -- 2015.

63 f.

Orientador: João Fróis Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Opções de taxas de juros. 2. Modelos de Taxas de Juros. 3. Modelo CIR. 4. Modelo de Black. 5. Opções sobre IDI. I. Caldeira, João Fróis, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: DALMAGRO, Lucas Bassani

Título: Avaliação de derivativos de taxas de juros: uma aplicação do modelo CIR sobre opções de IDI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em preenchimento dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Administração de Empresas – Ênfase em Finanças.

Aprovada em: _____

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Fróis Caldeira
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Aos meus pais e ao meu irmão,
pelo apoio incondicional e afetivo
em todas as etapas do curso.

AGRADECIMENTOS

A meu pai Sergio, minha mãe Neusa e meu irmão Tiago que, com muito carinho e paciência, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. Também agradeço a todos os meus familiares, os quais estiveram sempre presentes ao longo da minha caminhada.

Ao professor João Fróis Caldeira, pela orientação ao longo do curso de mestrado. Também agradeço a todos os meus professores, que de uma forma ou de outra, contribuíram para meu crescimento pessoal e intelectual.

Aos meus amigos, colegas de mestrado e de trabalho, pela convivência, amizade e companheirismo.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo principal aplicar o modelo de precificação de opções de taxas de juros proposto por Barbachan e Ornelas (2003), com base nos modelos de taxa de juro e avaliação de opções de Cox, Ingersoll e Ross (1985), para avaliação de opções de compra sobre o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI), negociadas na BM&FBovespa. Para estimação dos parâmetros deste modelo, foi empregado o método de Máxima Verossimilhança. Neste contexto, também fez-se uso da fórmula de precificação de opções proposta por Black (1976), adaptada para o mercado de derivativos brasileiros, conforme implementação verificada no trabalho de Gluckstern et al. (2002). Tal aplicação torna-se interessante, pois este modelo é amplamente utilizado pelo mercado brasileiro para avaliação de opções sobre o IDI. De forma a verificar a aderência dos preços teóricos gerados pelos modelos, em comparação aos preços de mercado, métricas de erro foram empregadas. De forma geral, nossos resultados mostraram que ambos os modelos apresentam erros sistemáticos de precificação, onde o modelo CIR subavalia os prêmios das opções e o modelo de Black superprecifica. No entanto, bons resultados foram encontrados ao avaliarmos opções *in-the-money* e *out-of-money* com o modelo de Black.

Palavras-chave: opções de taxas de juros, modelos de avaliação de opções, modelos de taxas de juros, modelo CIR, modelo de Black, máxima verossimilhança, opções sobre IDI.

ABSTRACT

This work aims to apply the interest rate option pricing model proposed by Barbachan and Ornelas (2003), based on the interest rate model and option pricing model developed by Cox, Ingersoll and Ross (1985), to evaluate call options on the 1 day Brazilian Interfinancial Deposits Index - IDI, traded at BM&FBovespa. The Maximum Likelihood method was applied to estimate the model parameters. In this context, the option pricing formula proposed by Black (1976), adapted for the Brazilian derivative Market, was also used, according implementation verified in Gluckstern et al. (2002). This application becomes interesting because this model is widely used by the Brazilian Market to evaluate options on IDI. In order to verify the adherence of theoretical prices generated by the models, in comparison to the Market prices, error metrics were applied. In general, our results pointed out that both models presented systematic pricing errors, in which the CIR model underestimates the option prices and Black's model overestimates. However, good results were found on the evaluation of options in-the-money and out-of-money with the Black's Model.

Keywords: interest rate options, interest rate option pricing models, interest rate models, CIR model, Black's model, maximum likelihood, options on IDI.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico1- Número de negócios de contratos de opções de compra sobre o Índice DI----- 18

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A tendência de retorno à média	28
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 para janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).	53
Tabela 2 – Aderência dos preços calculados pelo modelo de Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 para janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações diárias).....	54
Tabela 3 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Janeiro/2010 e Dezembro/2011 para janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).	55
Tabela 4 - Aderência dos preços calculados pelo modelo de Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Janeiro/2010 e Dezembro/2011 para janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações diárias).....	55
Tabela 5 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 de acordo com o grau de moneyness. Janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).	57
Tabela 6 - Aderência dos preços calculados pelo modelo de Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 de acordo com o grau de moneyness. Janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações diárias).	57

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 OPÇÕES DE TAXA DE JURO NEGOCIADAS NO BRASIL	17
3 MODELOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE O ÍNDICE DE TAXA MÉDIA DE DEPÓSITOS INTERFINANCEIROS DE UM DIA (IDI)	19
4 ABORDAGEM TEÓRICA	21
4.1 OPÇÕES SOBRE TAXAS DE JUROS	21
4.2 TAXAS DE JUROS DE CURTO PRAZO.....	22
4.3 ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS	23
4.4 PRECIFICAÇÃO LIVRE DE ARBITRAGEM.....	24
4.5 MODELOS DE TAXAS DE JUROS.....	24
4.5.1 Modelo de Merton.....	25
4.5.2 Modelo de Black.....	26
4.5.3 Modelos de Equilíbrio Geral.....	27
4.5.4 Modelos de Não-Arbitragem	33
4.5.5 Modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992)	36
4.6 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.....	37
5 METODOLOGIA	39
5.1 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO	39
5.1.1 Modelo CIR	39
5.1.2 Modelo de Black.....	48
5.2 AMOSTRA.....	50
5.3 MÉTRICAS DE ERRO	50
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
7. CONCLUSÕES	59
8. REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Derivativos são amplamente utilizados por agentes econômicos, pois apresentam uma grande versatilidade como instrumento financeiro, a iniciar pela realização de hedges contra variações indesejáveis de um ativo (objeto), passando pela possibilidade de obter lucros sem incorrer a riscos, até a especulação, onde os agentes assumem riscos maiores tentando prever movimentos futuros do ativo, de forma a obter retornos mais atraentes. De acordo com estimativas do BIS (*Bank of International Settlements*), o valor global de posições em derivativos, no final de Dezembro de 2014, chegou a 630 trilhões de dólares, sendo que, deste total, 10% (64 trilhões de dólares) refere-se a contratos de opções, onde 43 trilhões de dólares são somente sobre taxas de juros.

Um contrato de opção é um instrumento derivado de um determinado ativo objeto. Tal ativo pode ser uma ação, *commodity*, índice, taxa de juro, entre outros. O contrato dá ao seu detentor o direito de comprar ou vender determinada quantidade do respectivo ativo objeto, a um determinado preço, dentro de um período de tempo. Para que o contrato esteja disponível para compra, alguém deve ofertá-lo. Este agente é conhecido como lançador. No mercado de opções, não são negociados os ativos propriamente, mas sim os direitos sobre eles. Atualmente, contratos de opções são negociados em ambiente de bolsa, onde o agente pode adquiri-los desembolsando um determinado prêmio, que corresponde ao preço para obtenção do direito de exercer aquele contrato no futuro.

Tais contratos atingiram este nível de liquidez não só por serem instrumentos financeiros versáteis ou por estarem sendo negociados em ambiente de bolsa, mas também pela possibilidade de os agentes poderem avaliá-los ou precificá-los de forma eficiente. Nas últimas décadas, a teoria de avaliação de opções tem sido um dos temas que tem gerado mais estudos dentro do meio acadêmico ligado a finanças. Após a publicação do artigo seminal de Black e Scholes (1973), onde foi proposta a primeira fórmula consistente para avaliação de opções de ações, muito se evoluiu neste assunto, principalmente na avaliação de opções sobre taxas de juros. Segundo Nojima e Pinto (2014), apesar dos diversos estudos e aplicações na área de teoria da avaliação de opções, não existe um consenso no mercado em relação a um modelo amplamente aceito e utilizado para avaliação de opções sobre taxas de juros, como ocorre com o modelo Black e Scholes (1973), para opções sobre renda variável. As causas estariam

relacionadas à falta de eficiência ou à complexidade de alguns modelos propostos, uma vez que não possuem solução analítica e, assim, exigiriam tratamento numérico.

A primeira fórmula utilizada para precificação de opções sobre taxas de juros foi a de Black (1976). Apesar de apresentar limitações e inconsistências teóricas, visto haver sido proposta, inicialmente, para avaliar opções sobre futuros de *commodities*, sua aplicação é bastante simples devido à sua solução analítica, sendo até hoje amplamente utilizada, por apresentar resultados considerados satisfatórios pelo mercado. Esta fórmula considera que um contrato futuro sobre taxa de juros apresenta a mesma dinâmica de um contrato futuro sobre *commodities*, o que não se verifica na prática.

Posteriormente ao modelo de Black (1976), novos modelos de precificação de opções sobre taxas de juros surgiram, agora buscando incorporar a real dinâmica da taxa de juros. Esses modelos, da mesma forma que os de Black e Scholes (1973) e de Black (1976), foram derivados de equações diferenciais estocásticas que descrevem o comportamento do ativo objeto ao longo do tempo. De acordo com Brigo e Mercurio (2012), os modelos de taxas de juros, dos quais são derivadas as fórmulas de precificação de opções, podem ser classificados dentro de três categorias: (i) modelos de um fator; (ii) modelos de dois ou mais fatores (ii); (iii) modelo da classe HJM (1992). Os modelos de um fator podem ser separados dentro de duas categorias: (i) modelos de equilíbrio geral; e (ii) modelos de não-arbitragem. Os modelos de equilíbrio geral são os de Vasicek (1976) e o de Cox, Ingersoll e Ross (1985), os quais se baseiam na hipótese de uma dinâmica unidimensional para a taxa de juros de curto prazo. Modelando diretamente tal dinâmica, todos os valores (títulos, taxas, estrutura a termo) são prontamente definidos por argumentos de não-arbitragem, como expectativa em função do processo da taxa de juros de curto prazo. Foram os primeiros a incorporar o processo de reversão à média em suas equações diferenciais estocásticas. Os modelos de não-arbitragem, por sua vez, vêm na estrutura a termo das taxas de juros observada no mercado uma grande fonte de informações e a utilizam como um input em seus modelos, possibilitando melhores previsões para a taxa de juros de curto prazo, preços de títulos e derivativos. Os modelos pertencentes a esta classe são os de Ho e Lee (1986), Hull e White (1990), Black, Derman e Toy (1990), Black e Karasinski (1991). O modelo Heath, Jarrow e Morton (1992) é uma generalização dos anteriores.

No Brasil, com o advento da estabilidade econômica verificada após a implantação do Plano Real (1994) e a adoção do regime de metas de inflação (1999), novos instrumentos derivativos de taxas de juros passaram a ser oferecidos no mercado. Um deles é o contrato de opção sobre o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI), negociado

na BM&FBovespa. Este contrato possui características distintas daqueles negociados nos principais mercados de taxa de juros internacionais. No caso internacional, opções sobre taxa de juros geralmente possuem como ativo objeto títulos de renda fixa. Enquanto isso, nas opções sobre o IDI, não é negociado um contrato de renda fixa, mas sim a taxa de juros média acumulada entre a data corrente e sua própria data de vencimento. A peculiaridade das opções sobre IDI faz com que seu preço, assim como os fatores que o afetam, sejam distintos daqueles ligados às opções sobre juros tradicionais. Assim, modelos de avaliação de opções empregados nos mercados tradicionais não podem ser diretamente aplicados no caso de opções sobre o IDI. Neste contexto, diversos trabalhos têm sido propostos de forma a suprir esta carência metodológica em relação à avaliação desses contratos (Neto e Pereira, 1999; Gluckstern et al., 2002; Barbachan e Ornelas, 2003; Barbedo et al., 2010; Laurini e Muad, 2012; e Nojima e Pinto, 2014). Na prática, verificamos que os modelos propostos nesses trabalhos apresentaram erros sistemáticos na avaliação de opções de sobre o IDI. Observamos ainda que a fórmula de precificação derivada por Barbachan e Ornelas (2003) para avaliação de opções de compra de IDI, com base nos modelos de taxa de juros e de precificação de opções propostos por Cox, Ingersoll e Ross (1985), não foi devidamente calibrada, tampouco foi testada numa base de dados suficientemente grande.

A importância que vem sendo dada ao estudo da avaliação de opções sobre taxas de juros, especialmente no caso de opções sobre o IDI, aliada à falta de um consenso em relação a um modelo para precificação desses contratos, foram as principais razões para a escolha do tema desta dissertação. Neste contexto, como objetivo principal deste trabalho, iremos replicar o modelo de precificação proposto por Barbachan e Ornelas (2003), derivado dos modelos de taxa de juros e de precificação de opções propostos por Cox, Ingersoll e Ross (1985), para avaliação de opções de compra sobre o IDI. Para estimação dos parâmetros de reversão à média, taxa de juro de longo prazo e volatilidade, será utilizado o método de Máxima Verossimilhança, conforme implementação de Kládívko (2007) e Martin et al. (2012). Além disso, esses mesmos contratos serão avaliados através da fórmula de precificação de opções proposta por Black (1976), adaptada para o mercado de derivativos brasileiros, conforme implementação de Gluckstern et al. (2002). Tal aplicação torna-se interessante, pois este modelo é amplamente utilizado pelo mercado brasileiro para avaliação de opções sobre o IDI. Métricas de erros são empregadas para avaliar a aderência dos preços teóricos gerados por esses modelos, em comparação aos preços de mercado. Além disso, será feita uma breve caracterização do mercado de opções sobre taxas de juros no Brasil, com algumas estatísticas de negociações. Também apresentaremos uma breve caracterização das opções sobre taxas de

juros, bem como conceitos de taxa de juros de curto prazo, estrutura a termo das taxas de juros e precificação livre de arbitragem. Uma breve revisão dos trabalhos dedicados à avaliação de opções sobre o IDI no Brasil será apresentada. Ademais, serão elencados os modelos de taxas de juros de um fator e da classe HJM, dos quais são derivadas as fórmulas de apreçamento de opções. Por fim, será abordado de forma sucinta o método de Máxima Verossimilhança, o qual será empregado para estimação dos parâmetros do modelo de precificação proposto por Barbachan e Ornelas (2003). Além desta introdução, a dissertação está organizada da seguinte forma. Na Seção 2 é dado um panorama do mercado de opções sobre taxas de juros no Brasil. Na Seção 3 é apresentada uma revisão dos trabalhos dedicados a avaliação de opções sobre IDI nos últimos anos. A Seção 4 aborda a fundamentação teórica para este trabalho. A Seção 5 discorre sobre a metodologia empregada no trabalho e a caracterização da base de dados utilizada. Na Seção 6 são apresentados os resultados e algumas discussões. A Seção 7 conclui o trabalho.

2 OPÇÕES DE TAXA DE JURO NEGOCIADAS NO BRASIL

No Brasil, os contratos de opções sobre taxas de juros negociados em ambiente de bolsa estão referenciados direta ou indiretamente à Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, mais conhecida como taxa CDI. Atualmente são negociadas duas modalidades de opções sobre taxas de juros no ambiente de bolsa, sendo que cada uma possui seu respectivo contrato de compra e de venda.

A primeira modalidade é representada pelos contratos de opção de compra e venda sobre o contrato futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1). O contrato futuro DI1 reflete o acúmulo das taxas médias de depósitos interfinanceiros no período compreendido entre a data da negociação e o último dia de negociação do contrato. Este contrato futuro é o derivativo de taxas de juros mais líquido da BM&FBovespa em termos de volume financeiro, possuindo uma sistemática de ajustes diários e contratos vencendo a cada mês. As opções sobre este contrato futuro são do tipo europeu, ou seja, só podem ser exercidas na data de seu vencimento, sem a possibilidade de antecipação.

A segunda modalidade é representada pelos contratos de opção de compra e venda sobre o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI). O IDI é um número índice com valor inicial de 100.000 pontos, corrigido diariamente pela Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, a qual é calculada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (CETIP). A fórmula de atualização do índice é a seguinte:

$$IDI_t = IDI_{t-1} \left(\frac{i_{t-1}}{100} + 1 \right) \quad (1)$$

onde: IDI_t é o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia na data t , com duas casas decimais; IDI_{t-1} é o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, referente ao dia útil imediatamente anterior, com duas casas decimais; i_{t-1} é a Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, referente ao dia útil imediatamente anterior, calculada pela CETIP, expressa em percentual ao dia (efetiva). A BM&FBovespa é a instituição que divulga o índice para o mercado, sendo que hoje existem dois deles sendo calculados: um com valor base em 03/01/2003; e outro com valor base em 02/01/2009. No entanto, atualmente são negociados unicamente contratos de opções sobre o IDI com valor base em Janeiro/2009. Os contratos sobre o IDI com valor base em 2003 foram negociados até

meados de 2011. As opções são do tipo europeu, ou seja, só podem ser exercidas na data de vencimento. O tamanho dos contratos reflete os pontos do índice multiplicados por R\$ 1,00. Importante destacar que a opção sobre o IDI não negocia a expectativa da taxa de juros *forward*¹, mas sim a taxa de juros média compreendida entre a data de negociação e a data do vencimento do contrato. Pelo fato de negociar a taxa de juros média, a opção sobre o IDI também possui característica de opções do tipo asiática. O Gráfico (1) apresenta o número de negócios de opções de IDI nos últimos sete anos:

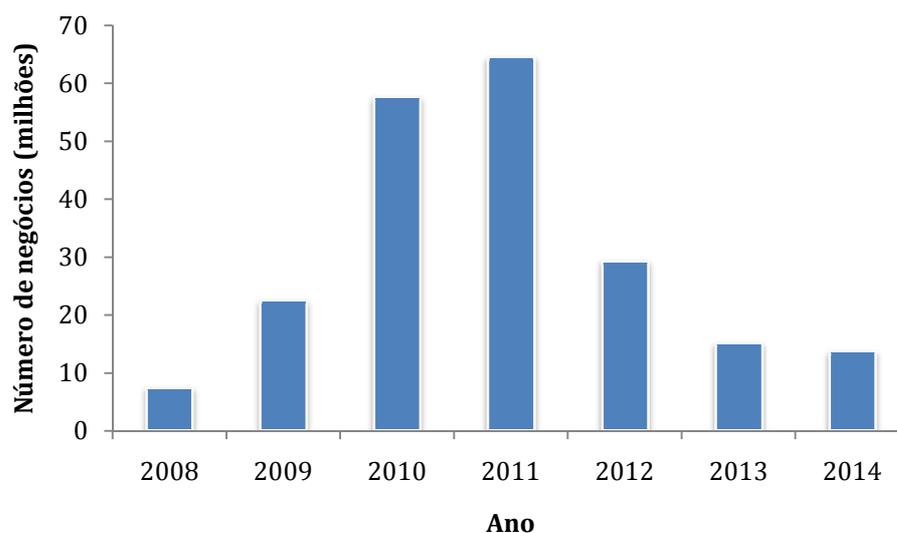


Gráfico 1- Número de negócios de contratos de opções de compra sobre o Índice DI entre 2008 e 2014.

Fonte: elaborado pelo autor.

Períodos de baixa liquidez, como é o caso dos anos de 2008, 2013 e 2014, refletem cenários econômicos de maior incerteza e menor crescimento.

¹Taxas *forward* são taxas de juros observadas no tempo t para um investimento em um período futuro entre os tempos T e S , sendo $t < S < T$.

3 MODELOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE O ÍNDICE DE TAXA MÉDIA DE DEPÓSITOS INTERFINANCEIROS DE UM DIA (IDI)

Os contratos de opções sobre taxa de juros negociados no Brasil possuem características distintas daqueles negociados nos principais mercados de taxa de juros internacionais. No caso internacional, opções sobre taxa de juros possuem como ativo objeto títulos de renda fixa, geralmente com maturidades superiores ao do contrato de opção. Por outro lado, nas opções sobre o IDI, não é negociado um contrato de renda fixa, mas sim a taxa de juros média acumulada entre a data corrente e sua própria data de vencimento, de maneira análoga ao que faz o contrato de DI Futuro.

A peculiaridade das opções sobre IDI faz com que seu preço, bem como os fatores que o afetam, sejam distintos daqueles ligados às opções sobre juros tradicionais. Neste sentido, modelos de avaliação empregados nos mercados tradicionais não podem ser diretamente aplicados no caso de opções sobre IDI.

Neste contexto, diversos trabalhos têm sido propostos de forma a suprir esta carência metodológica em relação à avaliação desses contratos.

Os primeiros a abordar esse problema foram Neto e Pereira (2000), os quais desenvolveram uma fórmula fechada para precificar o prêmio de uma opção de IDI, com base nos modelos de Vasicek (1997) e Jamshidian (1989). Derivada a fórmula, propuseram dois métodos para estimação dos parâmetros de volatilidade e reversão à média da taxa de juros de curto prazo: o método endógeno (estimação incondicional) e o exógeno (estimação condicional). Não realizaram uma aplicação empírica do modelo, dada a baixa liquidez dos contratos, uma vez que foram introduzidos na bolsa a partir de 1997.

Gluckstern et al. (2002) implementaram o modelo de Hull-White (1990) para avaliação de opções de compra de IDI negociadas no período de 1997 a 2001. Compararam os resultados com aqueles obtidos pelos modelos de Black (1976) e Black-Karasinski (1991). Através de resultados de diversas métricas de erro, concluíram que o modelo Hull-White performava melhor que os outros dois, apesar de apresentar erros sistemáticos de avaliação, com superavaliação dos prêmios das opções.

Barbachan e Ornelas (2003) propuseram uma fórmula fechada para avaliação de opções de IDI, com base no modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985). A fórmula busca superar as restrições apresentadas no trabalho de Neto e Pereira (1999), onde poderiam ocorrer taxas de juros negativas. Sua aplicação é feita sobre uma única série de opção de compra de IDI,

avaliada por quatro dias úteis seguidos, a partir de 12/04/2002. Uma amostra muito pequena para uma validação empírica. Esta mesma série teve seus prêmios avaliados pela fórmula proposta por Neto e Pereira (1999). Evidenciou-se que a fórmula baseada no modelo CIR obteve preços teóricos mais próximos dos preços de mercado, apesar da diferença entre esses preços apresentar erros consideráveis. Na fórmula de Barbachan e Ornelas (2003), são quatro os parâmetros que devem ser estimados: a velocidade de reversão à média; a taxa de juros de longo prazo; o preço do mercado para o risco; e a volatilidade.

Barbedo et al. (2010) realizaram o apreçamento das opções sobre IDI utilizando o modelo HJM (1992), com estimação de volatilidade das taxas de juros através da análise de componentes principais (PCA). Ao realizarem os testes empíricos sobre contratos de opções de compra de IDI, negociados entre Janeiro/2004 a Julho/2008, verificaram que o método empregado não era capaz de explicar o movimento dos prêmios de mercado, uma vez que apresentava erros sistemáticos na avaliação.

Posteriormente, Laurini e Muad (2012) realizaram o apreçamento de opções sobre IDI, também com base no modelo HJM (1992), porém a estimação da volatilidade da série de juros foi feita a partir do método de Kernel. Os autores avaliaram contratos de opções de compra de IDI, para um período entre 2012 e 2013. Os resultados apontaram erros menores em relação aos trabalhos anteriores, porém, ainda assim, erros sistemáticos foram observados quando comparados os preços teóricos em relação aos preços de mercado.

Por fim, Nojima e Pinto (2014) implementaram o modelo HJM (1992) com uma modificação desenvolvida por Brace e Musiela (1994), para avaliar derivativos de juros no Brasil. No caso específico de opções sobre IDI, avaliaram seis contratos de opção compra para dois dias de pregão. Os resultados apontaram preços teóricos bem próximos aos preços de mercado. Todavia, dado o tamanho da amostra, não podemos afirmar que o modelo realmente é eficiente.

Apesar das diversas metodologias utilizadas para precificação de opções sobre o IDI, ainda não foram apresentados resultados que confirmem a eficiência na geração de preços teóricos compatíveis com os preços de mercado, demandando ainda novas propostas a essa questão.

4 ABORDAGEM TEÓRICA

Nesta seção, serão abordados conceitos e referencial teórico, necessários para um melhor entendimento do método empregado neste trabalho, a iniciar pelas distinções apresentadas na avaliação de opções sobre taxas de juros em relação a outros ativos, passando pelos conceitos de taxa de juros de curto, estrutura a termo das taxas de juros e precificação livre de arbitragem. Também será apresentada uma evolução dos modelos de taxas de juros de um fator, os quais buscam descrever a dinâmica das taxas de juros e preços de títulos de renda fixa e de onde fórmulas para avaliação de opções sobre taxas de juros são derivadas. Finalmente, uma breve abordagem sobre o método de Máxima Verossimilhança será apresentada.

4.1 OPÇÕES SOBRE TAXAS DE JUROS

Opções sobre taxa de juros são instrumentos nos quais os *payoffs* dependem de alguma maneira do nível da taxa de juros, isto é, são contratos que dão ao seu portador o direito de pagar ou receber uma determinada taxa sobre um principal pré-determinado, por um período de tempo. Pelo fato de o portador do contrato ter o direito e não a obrigação de exercê-lo terá de desembolsar um prêmio para obter este benefício, que nada mais é que o preço do contrato de opção. Pela teoria da avaliação de opções, quanto maior for a probabilidade do contrato ser exercido no futuro, maior será o seu valor no presente. Segundo Hull (2014), a avaliação de opções sobre taxas de juros é muito mais complexa se comparada à avaliação de opções sobre ações, *commodities* e moedas estrangeiras. Tal fato pode ser justificado pelas seguintes razões:

- O comportamento das taxas de juros ao longo do tempo tende a apresentar uma reversão à sua média de longo prazo, isto é, verifica-se uma tendência a um estado de equilíbrio. Modelar este comportamento é muito mais difícil do que modelar a dinâmica de um dos ativos acima citados;
- Os modelos de taxas de juros devem captar o comportamento de toda curva de juros, dada a variedade de prazos de vencimento de títulos existentes no mercado, o que não se verifica no caso de uma ação, *commodity* ou moeda estrangeira;
- As volatilidades de pontos na curva de juros costumam ser distintas;

- As taxas de juros são usadas para descontar o derivativo, ao mesmo tempo em que definem seu *payoff*.

Dessa maneira, modelar o comportamento do ativo objeto de uma opção de taxa de juros, ou seja, o movimento da taxa de juros de curto prazo requer metodologias capazes de descrever a estrutura a termo derivada de tal taxa.

4.2 TAXAS DE JUROS DE CURTO PRAZO

O juro exprime o preço de troca de ativos disponíveis em diferentes momentos no tempo. Trata-se de uma remuneração pela alocação de capital. Neste contexto, a taxa de juros de curto prazo, r , pode ser definida como uma taxa continuamente capitalizada na qual os agentes podem emprestar recursos por um período de tempo infinitesimal. Assim, assumindo que $B(t)$ é o valor do investimento no tempo $t \geq 0$ e $B(0) = 1$, sua remuneração pode ser representada pela seguinte equação diferencial:

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad B(0) = 1, \quad (2)$$

onde r_t é uma função positiva em relação ao tempo. Como consequência,

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (3)$$

Dessa forma, uma unidade monetária investida no tempo 0 (zero) remunera no tempo t o valor representado pela equação (3), onde r_t é a taxa de juros de curto prazo. A taxa de juros de curto prazo também é usualmente referida como taxa instantânea ou taxa *spot* instantânea.

Uma vez definido o conceito de taxa de juros de curto prazo, torna-se importante identificar onde realmente podemos observá-la. Neste contexto, Brigo e Mercurio (2012) apresentam os conceitos e distinções entre taxas de juros interbancárias e taxas de juros governamentais. Segundo eles, taxas de juros governamentais são usualmente deduzidas por títulos de governos, emitidos para captar recursos no mercado. Já as taxas de juros interbancárias denotam aquelas em que os depósitos são emprestados entre diferentes instituições financeiras, isto é, taxas nas quais ocorrem operações de permuta entre bancos. As

taxas governamentais e interbancárias precificam os ativos no mercado, constituindo as taxas de juros base do sistema econômico. Filipovic (2009) coloca da seguinte maneira: as taxas de juros interbancárias são amplamente utilizadas como *proxies* para taxa de juro de curto prazo e, assim, são fundamentais para o apreçamento de títulos e opções. Considerando o mercado financeiro global, a principal taxa de juros interbancária usada como referência é a LIBOR (*London Interbank Rate*), que apresenta uma série de maturidades possíveis, que vão do *overnight* aos 12 meses. É considerada a taxa na qual as grandes instituições financeiras internacionais emprestam e tomam emprestado no mercado interbancário. No Brasil, é a Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, mais conhecida como taxa CDI (Certificados de Depósitos Interbancários) que assume esse papel. As estatísticas da Taxa CDI são calculadas e divulgadas pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip), apuradas com base nas operações de emissão de Certificados de Depósitos Interfinanceiros pré-fixados, pactuadas por um dia útil e registradas e liquidadas pelo sistema Cetip, conforme determinação do Banco Central do Brasil. No universo do mercado interbancário são selecionadas as operações de 1 (um) dia útil de prazo (*over*), considerando apenas as operações realizadas entre instituições financeiras de conglomerados diferentes (*extra-grupo*), desprezando-se as demais (*intra-grupo*).

4.3 ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

A estrutura a termo é uma função que relaciona determinada variável financeira, ou parâmetros, às suas maturidades. No caso da estrutura a termo da taxa de juros, são relacionados valores de taxas de juros em função da maturidade dos seus respectivos contratos. De acordo com Caldeira (2011), o uso da estrutura a termo da taxa de juros tem sido alvo de uma ativa linha de pesquisa nos últimos anos. Ela pode fornecer informações valiosas em relação ao comportamento futuro das taxas de juros, permitindo que títulos de renda fixa e derivativos de taxas de juros sejam avaliados com maior exatidão. Além disso, fornecem informações importantes a respeito da inflação futura e do crescimento do produto.

Na literatura, são encontradas duas abordagens desses modelos. Uma delas parte da especificação direta do processo estocástico dos preços dos títulos, em vez de derivar este processo da taxa de juros de curto prazo ou da taxa *forward*. Segundo Franklin Jr. et al. (2012), os modelos mais proeminentes desta classe são os de Nelson e Siegel (1987) e Svensson

(1994). A outra abordagem de modelos de estrutura a termo da taxa de juros parte da especificação do processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo e pela taxa *forward*. Processos estocásticos que descrevem a dinâmica das taxas de juros são conhecidos como modelos de taxas de juros. Nas próximas seções discorreremos sobre eles.

4.4 PRECIFICAÇÃO LIVRE DE ARBITRAGEM

A avaliação do preço de uma opção de compra de um título pré-fixado e de outros derivativos de taxas de juros pode estar baseada em metodologias que fazem uso da precificação livre de arbitragem (“*arbitrage-free pricing*”).

De acordo com Barbachan e Ornelas (2003), as metodologias de avaliação neutra ao risco ou livre de arbitragem consideram como dados os preços de um conjunto de ativos primários, assim como sua evolução estocástica, para então apreçar um conjunto de ativos secundários. A precificação dos ativos secundários se faz pela construção de uma carteira composta por ativos primários, dinamicamente rebalanceada no tempo, de tal maneira que o fluxo de caixa e o valor dessa carteira replicam o fluxo de caixa e o valor do ativo secundário. Neste contexto, tem-se um mundo neutro ao risco, dentro do qual são precificados títulos e opções.

Originalmente, a hipótese de um mundo neutro ao risco foi desenvolvida no artigo seminal de Black e Scholes (1973), a qual leva imediatamente à equação diferencial parcial dos preços de uma ação e, através da solução desta, para sua prestigiada fórmula de precificação de opções sobre ações.

4.5 MODELOS DE TAXAS DE JUROS

Os modelos de taxas de juros são representados por equações diferenciais estocásticas que buscam descrever a dinâmica das taxas de juros ao longo do tempo. De acordo com Brigo e Mercurio (2012), esses modelos podem ser classificados dentro de três diferentes classes. A primeira, por sua vez, é representada pelos modelos de um fator, isto é, a única variável estocástica é a taxa de juros de curto prazo, e é em função dela que as taxas de juros futuras, preços de títulos e opções são determinados. Esta classe é composta pelos modelos de Merton

(1973), Black (1976), além dos modelos de equilíbrio geral e de não-arbitragem. A segunda classe é composta por modelos com mais de um fator, onde se procura explicar o comportamento futuro das taxas de juros em função não apenas do nível atual da taxa de juros de curto prazo, mas também das características da estrutura a termo (nível, inclinação, curvatura etc.). Por fim, tem-se o modelo da classe HJM (1992), o qual parte de uma equação diferencial para o preço de um título zero-cupom, em vez de uma equação para a taxa de juros de curto prazo, para assim determinar o comportamento futuro das taxas de juros e obter os preços de títulos e opções. No presente trabalho, serão abordados somente os modelos de um fator e o modelo da classe HJM.

Os modelos de taxa de juro são essenciais para o estudo da avaliação de opções, pois através deles são obtidas as fórmulas de precificação. Neste contexto, torna-se importante apresentar a evolução desses modelos ao longo do tempo. Uma atenção especial será dada aos modelos equilíbrio geral e também ao modelo de Black (1976), uma vez que os modelos de precificação que serão empregados neste trabalho foram derivados desses modelos de taxa de juros.

4.5.1 Modelo de Merton

Em seu artigo seminal, *Theory of Rational Pricing*, Merton (1973) apresenta um dos primeiros modelos para a taxa de juros de curto prazo. Os preços dos títulos podem ser obtidos em função de um processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo. Merton (1973) representa este processo através da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dz(t) \quad (4)$$

onde $r(t)$ é a taxa de juros de curto prazo; μ e σ são constantes que representam a taxa de juros de longo prazo e a volatilidade da taxa de juros de curto prazo, respectivamente; e z é um processo de *Wiener* unidimensional. Este processo possibilita probabilidades positivas para taxas de juros negativas, fato que, segundo o autor, o torna irrealista, devendo assim ser considerado apenas como um exemplo ilustrativo.

A ideia é de que toda a incerteza contida na economia é representada pelo processo de *Wiener* unidimensional $z(t)$, sendo a única fonte capaz de afetar o movimento do preço de um

título referenciado à taxa de juro de curto prazo. Assim, a dinâmica dos retornos de um dado título com preço $P(\tau)$, pode ser descrita por

$$\frac{dP}{P} = \mu(\tau)dt + \delta(\tau)dz(t; \tau), \quad (5)$$

onde μ é o retorno esperado instantâneo, δ^2 é a variância instantânea, e $dz(t; \tau)$ é um processo de *Wiener* em função da maturidade do título. Num caso hipotético, onde a taxa de juros é não estocástica e constante ao longo do tempo, a volatilidade do título será equivalente a zero, e assim, $P(\tau) = e^{-r\tau}$.

4.5.2 Modelo de Black

Posteriormente, Black (1976) propôs um modelo para apreçar opções sobre futuros de *commodities*, sendo este, segundo Barbachan e Ornelas (2003), amplamente utilizado para a avaliação de opções sobre títulos pré-fixados. Trata-se de uma variação do modelo de Merton (1973), onde o ativo objeto é um contrato futuro, em vez de um ativo à vista. A equação diferencial estocástica desse modelo tem a seguinte forma:

$$dF = \sigma dz(t) \quad (6)$$

em que F é o preço futuro do ativo, e σ é a volatilidade de F . A volatilidade é constante ao longo do tempo e segue uma distribuição Log-Normal. O modelo permite taxas de juros nominais negativas.

As fórmulas do preço de uma opção de compra (*call*) e de uma opção de venda (*put*) do Modelo de Black são:

$$c_t = e^{-RT} [FN(d_1) - EN(d_2)] \quad (7)$$

$$p_t = e^{-RT} [EN(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (8)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

em que c_t é o preço da opção de compra no instante t ; p_t é o preço da opção de venda no instante t ; F é o preço futuro do ativo objeto; E é o preço de exercício da opção; T é a maturidade do contrato de opção; R é a taxa de juros livre de risco; e σ é a volatilidade do preço futuro F . A expressão $N(d_2)$ é a probabilidade de a opção de compra ser exercida num mundo neutro ao risco, de maneira que $EN(d_2)$ seja o preço de exercício multiplicado pela probabilidade de o preço de exercício ser pago. A expressão $SN(d_1)$ é o valor esperado de uma variável que é igual a S_T , se $S_T > X$.

O retorno da opção de compra é $\max(F_t - E, 0)$ no instante T . Já o retorno da opção de venda é $\max(E - F_t, 0)$.

O fato deste modelo pressupor uma volatilidade constante do preço futuro ao longo do tempo, não o torna a melhor escolha para avaliação de opções sobre taxas de juros. No caso de um título zero-cupom, observa-se que sua volatilidade não é constante ao longo do tempo, uma vez que quanto maior é o tempo até o seu vencimento maior é a volatilidade. Somente no caso em que o tempo até o vencimento da opção for muito curto em relação à vida do título-objeto, faria sentido considerar uma volatilidade quase constante durante a vida da opção. Apesar dessas inconsistências, o modelo ainda é amplamente empregado no mercado de derivativos brasileiro.

4.5.3 Modelos de Equilíbrio Geral

Os primeiros modelos de taxa de juros pressupõem que a taxa de juros de curto prazo, preços de títulos e outras variáveis, comportam-se como o preço de uma ação ou de um contrato futuro de *commodity*. Tal pressuposto é um bom ponto de partida, porém está longe do que seria o ideal para descrever a variação das taxas de juros ao longo do tempo.

Os modelos de equilíbrio geral deram um importante passo em relação a esta questão, ao incorporarem a tendência de reversão à média em suas equações diferenciais estocásticas.

Uma importante diferença entre as taxas de juros e os preços de ações e *commodities*, reside no fato de as taxas de juros parecerem retroceder para determinado nível médio de longo prazo no decorrer do tempo. Tal fenômeno é conhecido como tendência de reversão a média. Em outras palavras, quando a taxa de juros de curto prazo está alta, a tendência de retorno a média faz com que ela possua desvio negativo. Entretanto, quando a taxa é baixa, tal tendência a faz possuir desvio positivo. Este comportamento pode ser observado mais claramente na Figura (1).

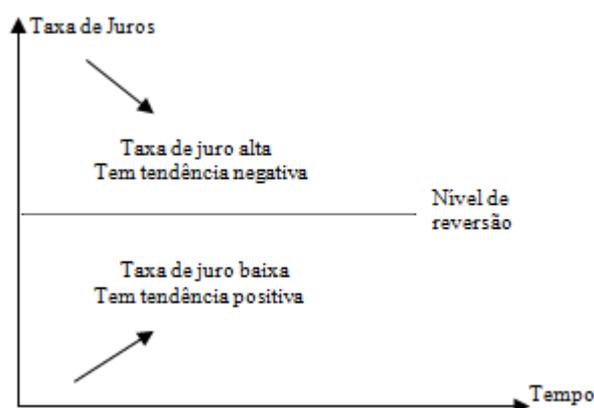


Figura 1 – A tendência de retorno à média

Fonte: Hull (2014)

Cabe salientar que existem argumentos econômicos que dão embasamento para este processo. Quando as taxas de juros estão mais altas, a economia tende a desacelerar, pois se torna mais dispendioso tomar recursos emprestados, havendo menor demanda. Como consequência, as taxas de juros caem. No caso contrário, em um cenário de taxas de juros baixas, a tendência é de que haja uma forte demanda por recursos, fazendo com que as taxas subam.

Tais modelos também estão baseados numa dinâmica unidimensional para a taxa de juros de curto prazo, r . De acordo com Brigo e Mercurio (2012), uma vez modelada tal dinâmica, todos os preços de títulos e opções são prontamente definidos por argumentos de não-arbitragem, como expectativa em função do processo de r .

De fato, a existência da avaliação neutra ao risco implica que o preço livre de arbitragem, no tempo t , de um direito contingencial com *payoff* H_T , na data T , é dado por

$$H_t = E_t\{D(t, T)H_T\} = E_t\left\{e^{-\int_t^T r(s)ds}H_T\right\}, \quad (9)$$

com E_t denotando a expectativa no tempo dimensional- t . Assim, o preço de um título zero-cupom no tempo t , com maturidade T e valor de face de uma unidade monetária ($H_T=1$), pode ser representado através da seguinte forma:

$$P(t, T) = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right\}. \quad (10)$$

Visualizando esta última expressão, fica claro que sempre é possível caracterizar a distribuição da equação (10) em termos da escolha da dinâmica para a taxa de juros de curto prazo, r , condicionado às informações disponíveis no instante t , sendo possível assim, computar o preço P de um título.

Seja $R(t, T)$ a taxa de juro continuamente capitalizada que o investidor espera receber ao comprar um determinado título (taxa *spot*), para o período $T-t$, podemos reescrever a equação (10) da seguinte forma

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (11)$$

de maneira que:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (12)$$

Considerando a equação (12), temos:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \quad (13)$$

Esta equação permite que a estrutura a termo das taxas de juros seja obtida em determinado instante, a partir da taxa de juros de curto prazo r , considerando um mundo neutro ao risco.

4.5.3.1 Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek (1977) foi o primeiro a incorporar o acima mencionado processo de reversão à média, também conhecido como *Ornstein-Uhlenbeck*². Neste caso, o processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo, r , pode ser representado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr_t = b(\alpha - r_t)dt + \sigma dz, \quad r(0) = r_0 \quad (14)$$

em que r_t é a taxa de juros de curto prazo; b é a taxa de reversão à média; α é a taxa de juros de longo prazo; σ é a volatilidade instantânea da taxa de juros de curto prazo; e z um processo de *Wiener*.

O primeiro termo do lado direito da equação significa que a taxa de juros de curto prazo, r , deve ficar em torno da taxa de juros de longo prazo α . Assim, o *drift* instantâneo $b(\alpha - r_t)$ representa a velocidade com que a reversão a media deve ocorrer, sendo $b - r_t > 0$. Quanto maior for b , mais intensa será a velocidade de queda ou de alta. O elemento estocástico σdz possui uma variância constante σ^2 , onde o processo de flutuação da taxa de juros de curto prazo em torno da taxa de juros de longo prazo ocorre de forma errática e contínua. Isso significa que o termo estocástico está sobreposto a essa tendência. Importante destacar que, o modelo possibilita a ocorrência de taxas de juros negativas, sendo este considerado o seu principal ponto negativo.

Dado tal processo, Vasicek (1977) obteve uma expressão analítica para o preço de um título zero-cupom. Assim, o preço de um título zero-cupom no instante t , que paga uma unidade monetária no instante T , é dado por:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (15)$$

onde

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2b^2} \right) [B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4b} B(t, T)^2 \right\}$$

²Processo Ornstein-Uhlenbeck é um processo estocástico que descreve a velocidade de uma partícula Browniana sobre a influência de fricções. Ao longo do tempo, o processo tende a um *drift* de sua média de longo prazo.

$$B(t, T) = \frac{1}{b} [1 - e^{-b(T-t)}]$$

quando $b = 0$, $B(t, T) = T - t$ e $A(t, T) = \exp[\sigma^2 (T - t)^3 / 6]$. A partir da equação (15) temos:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r(t). \quad (16)$$

A equação (16) mostra que toda a estrutura a termo das taxas de juro pode ser definida em função de $r(t)$, quando b , a e σ já tiverem sido escolhidos. O $R(t, T)$ depende linearmente de $r(t)$.

Através da equação diferencial estocástica de Vasicek (1977), Jamshidian (1989) desenvolveu uma fórmula de precificação de contratos de opções do tipo europeu sobre títulos zero-cupom. As fórmulas do preço de uma opção de compra e venda, no instante t , vencendo no instante T , sobre um título zero-cupom com vencimento s , são as seguintes:

$$c_t = LP(t, s)N(h) - EP(t, T)N(h - \sigma_p) \quad (17)$$

$$p_t = EP(t, T)N(-h - \sigma_p) - LP(t, s)N(-h) \quad (18)$$

onde,

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(t, s)}{P(t, T)X} + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \frac{1}{b} [1 - e^{-b(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2b(T-t)}}{2b}}$$

em que c_t é o preço da opção de compra no instante t ; p_t é o preço da opção de venda no instante t ; L é o valor de face do título; s é o vencimento do título; e E é o preço de exercício da opção.

O modelo de Vasicek (1977) apresenta algumas deficiências no que tange à determinação do comportamento das taxas de juros. Primeiro, as taxas de juros nominais

podem se tornar negativas, o que não condiz com a realidade. Além disso, a volatilidade da taxa de juros é constante, o que não é observado na prática.

4.5.3.2 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

Uma das principais deficiências do modelo de Vasicek (1977), apresentado anteriormente, diz respeito a ele aceitar taxas de juros negativas. Cox, Ingersoll e Ross (1985) propuseram um modelo alternativo que superou tal problema. O que eles fizeram foi introduzir um termo de “raiz-quadrada” no coeficiente de difusão na dinâmica da taxa de juros de curto prazo, r , da equação diferencial estocástica de Vasicek. Assim, quando a taxa de juros cresce, sua variância e desvio padrão também crescem, ocorrendo também o inverso quando há decréscimo na taxa. Conseqüentemente, a taxa de juros de curto prazo é sempre não-negativa. Em contrapartida, segundo Neto e Pereira (1999), a tratabilidade analítica do modelo anterior é perdida pela sua complexidade.

Neste caso, o processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo, r , pode ser representado pela seguinte equação:

$$dr = b(\alpha - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz, \quad r(0) = r_0 \quad (19)$$

em que r_t é a taxa de juros de curto prazo; b é a taxa de reversão à média; α é a taxa de juros de longo prazo; σ a volatilidade instantânea da taxa de juros de curto prazo; e z um processo de *Wiener*. Os termos r_0, b, α, σ são constantes ao longo do tempo. A condição $2ba > \sigma^2$ tem de ser imposta para garantir que as taxas de juros sejam sempre não-negativas. A partir deste modelo, Cox, Ingersoll e Ross (1985) desenvolveram um uma fórmula fechada para precificar títulos zero-cupom. Dessa maneira, o preço de um título zero-cupom, no instante t , que paga uma unidade monetária no instante T , é dado por:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (20)$$

onde:

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + b)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(b+\gamma)/2}}{(\gamma+b)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \right]^{2b\alpha/\sigma^2}$$

$$\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2}$$

No mesmo trabalho, os autores desenvolveram um modelo para precificação de opções de compra do tipo europeu para títulos de renda fixa. O preço em t , de uma opção de compra europeia vencendo em T , sobre um título de renda fixa com maturidade S , é dado pela seguinte fórmula:

$$c(t, r, T; S; X) = P(t, S)\chi^2 \left(2\bar{r}[\rho + \psi + B(T, S)]; \frac{4b\alpha}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)e^{\{\gamma(T-t)\}}}{\rho + \varphi + B(T, S)} \right) - EP(t, T)\chi^2 \left(2\bar{r}[\rho + \psi]; \frac{4b\alpha}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)e^{\{\gamma(T-t)\}}}{\rho + \varphi} \right) \quad (21)$$

onde

$$\rho = \rho(T-t) = \frac{2h}{\sigma^2(e^{\{\gamma(T-t)\}} - 1)}$$

$$\varphi = \frac{b + \gamma}{\sigma^2}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(S-T) = \frac{\ln(\ln(A(T, S)/X))}{B(T, S)}$$

$$\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2}$$

Em que c_t é preço da opção de compra no instante t ; S o vencimento do título; e E o preço de exercício da opção. A notação $\chi^2(x; A, B)$ refere-se a uma distribuição qui-quadrada não central em χ .

4.5.4 Modelos de Não-Arbitragem

A maior desvantagem dos modelos de Equilíbrio Geral reside no fato da estrutura a termo não se ajustar automaticamente à estrutura a termo observada no mercado. Isto é, os parâmetros estimados com base em dados passados não irão gerar necessariamente uma estrutura a termo ajustada ao mercado real. Segundo Hull (2014), *traders* consideram este

problema bastante insatisfatório, pois argumentam que não podem confiar no preço de uma opção sobre um título quando o modelo usado não precifica o título subjacente de forma adequada. O erro de 1% na precificação do título objeto pode levar a um erro de 25% no preço de seu respectivo contrato de opção.

Os modelos de não-arbitragem, diferentemente dos de equilíbrio geral, são capazes de gerar uma estrutura a termo das taxas de juros consistente com aquela observada no mercado. Nesses modelos, a estrutura a termo observada no mercado é um *input*, ao contrário dos modelos de equilíbrio geral, onde a estrutura a termo é um *output*.

4.5.4.1 Modelo Ho-Lee

O modelo de Ho-Lee (1986) foi o primeiro modelo de não-arbitragem proposto na literatura. Foi inicialmente desenvolvido em tempo discreto, na forma de uma árvore binomial dos preços dos títulos. Posteriormente foi transformado em um modelo de tempo contínuo bem definido. É composto por dois parâmetros: a volatilidade da taxa de juros de curto prazo; e o preço do risco desta mesma taxa. A equação diferencial estocástica que representa o comportamento da taxa de juros de curto prazo é:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (22)$$

Onde σ é a volatilidade instantânea da taxa de juros de curto prazo, constante ao longo do tempo, e $\theta(t)$ é o preço do risco em função do tempo. Este último parâmetro garante que o modelo se ajuste à estrutura a termo inicial observada no mercado. O termo z é um processo de *Wiener* unidimensional, com espaço de probabilidade da medida *martingale*³ equivalente Q .

O modelo permite a derivação de fórmulas fechadas para o apereçamento de títulos e contratos de opções. Sua maior limitação consiste em não incorporar o processo de reversão à média.

³Martigale é uma sequência de variáveis aleatórias (processo estocástico) para a qual a expectativa do próximo valor é igual ao valor observado no presente. Dessa forma, eventos passados não podem ajudar a prever eventos futuros.

4.5.4.2 Modelo de Hull-White

O modelo de Hull e White (1990) pode ser considerado uma extensão do modelo de Vasisek (1977) e do modelo de Hoo e Lee (1986), pois incorpora as duas principais características desses dois modelos. Dessa forma, o modelo é capaz de prover um ajuste exato da estrutura a termo inicial das taxas de juros e ao mesmo tempo introduzir em sua equação o processo de reversão à média, agora dependente do tempo. O processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo é definido por:

$$dr = [\theta(t) - br]dt + \sigma dz \quad (23)$$

onde b (parâmetro de reversão a média) e σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) são constantes. O modelo Ho-Lee é um caso particular do modelo Hull-White, onde $b = 0$. Também permite a derivação de fórmulas fechadas para o apreçamento de títulos e contratos de opções.

4.5.4.3 Modelo de Black, Derman e Toy

Em 1991, Black, Derman e Toy propuseram um modelo de árvore binomial onde o processo da taxa de juros de curto prazo é considerado log-normal. A equação diferencial estocástica apresenta a seguinte forma:

$$dr = [\theta(t) - b(t)lnr]dt + \sigma(t)dz \quad (24)$$

com

$$a(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

onde $\sigma'(t)$ é a derivada de σ em relação à t . Ao se aplicar a log-normal na taxa de juros de curto prazo, não há possibilidade de ocorrerem taxas de juros negativas. De acordo com Hull (2014), o modelo apresenta algumas desvantagens: ele não possui propriedades analíticas, ou seja, não é possível chegar a uma fórmula fechada para o preço de uma opção européia; e a

forma com que a árvore binomial é construída impõe uma relação entre o parâmetro de volatilidade, $\sigma(t)$, e o parâmetro de reversão à média $b(t)$, em que a taxa de reversão é positiva somente se a volatilidade da taxa de juros de curto prazo for uma função decrescente em relação ao tempo.

4.5.4.4 Modelo de Black e Karasinski

O modelo de Black e Karasinski (1991) é uma extensão do modelo de Black, Derman e Toy (1990), onde o processo de reversão à média e a volatilidade são determinados de forma independente entre si. A equação diferencial estocástica do modelo apresenta a seguinte forma:

$$dr = [\theta(t) - b(t)\ln r]dt + \sigma(t)dz \quad (25)$$

O modelo é praticamente igual ao desenvolvido por Black, Derman e Toy, exceto pelo fato de não haver relação entre $b(t)$ e $\sigma(t)$. Na prática, os parâmetros de reversão à média e volatilidade tornam-se constantes, podendo o modelo ser restringido da seguinte maneira:

$$dr = [\theta(t) - b\ln r]dt + \sigma dz \quad (26)$$

A desvantagem do modelo está em não possuir propriedades analíticas, ou seja, não é possível chegar a uma fórmula fechada para o preço de uma opção do tipo europeu.

4.5.5 Modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992)

Em 1992, Heath, Jarrow e Morton propuseram um modelo de estrutura a termo das taxas de juros baseado em condições de não-arbitragem. A sua metodologia geral incorpora grande parte das características dos modelos de não-arbitragem apresentados anteriormente. O modelo HJM não parte de uma equação diferencial estocástica para a taxa de juros de curto prazo, mas sim de uma equação diferencial para o preço de um título zero-cupom. Dessa forma, o processo estocástico seguido por um título zero-cupom é definido por:

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T)P(t, T)dz(t) \quad (27)$$

Onde $P(t, T)$ representa o preço de um título zero-cupom negociado em t , com maturidade T , sendo $t < T$; e $v(t, T)$ é a sua volatilidade.

Neste modelo, torna-se necessário especificar as volatilidades de todas as taxas a termo (taxas *forward*) para o futuro. A taxa de juros de curto prazo, r , segue um processo não-Markov. Assim, para obter o comportamento estocástico da taxa de juros de curto prazo em um determinado período de tempo no futuro, é necessário saber não apenas o valor de r no início do período, mas também o caminho percorrido para chegar até ele.

4.6 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O método de Máxima Verossimilhança, assim como o método de mínimos quadrados, permite a estimação dos parâmetros de modelos econométricos. Seja $y' = [y_1 y_2 \dots y_n]$ um vetor de valores amostrais, dependentes de um vetor de k de parâmetros desconhecidos, $\theta' = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_k]$, com densidade de probabilidade representada pela função $f(y; \theta)$, a qual indica a dependência em θ . Para um dado vetor de parâmetros θ , esta densidade reflete a probabilidade de um conjunto de resultados amostrais. Alternativamente, esta densidade pode ser interpretada como uma função de θ , condicional a um conjunto de resultados amostrais. Esta última interpretação é conhecida como função de verossimilhança. A definição formal é a seguinte:

$$L(y; \theta) = f(y; \theta) \quad (28)$$

Maximizar a função verossimilhança em relação ao vetor de parâmetros θ , significa encontrar um vetor de parâmetros $\hat{\theta}$ que maximize a probabilidade de se obter os valores amostrais observados. Então, $\hat{\theta}$ é chamado de estimador de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros desconhecidos, θ . Segundo Johnston e Dinardo (1997), a maior parte das aplicações utiliza o logaritmo da função de verossimilhança, pois maximizar o logaritmo natural geralmente é mais simples e produz os mesmos resultados obtidos através da maximização da função original. Assim, a definição formal da função log-verossimilhança é dada por:

$$l = \ln L. \quad (29)$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

e o $\hat{\theta}$ que maximiza l também maximizará L . A derivada de l em relação a θ é conhecida como o *score*, $s(\theta; y)$. O estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$, é obtido fixando-se esse *score* em zero, ou seja,

$$s(\theta; y) = \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0.$$

Ainda segundo Johnston e Dinardo (1997), o uso difundido do método de máxima verossimilhança decorre, principalmente, de sua gama de propriedades desejadas, como consistência e eficiência assintótica dos parâmetros.

O método de máxima verossimilhança empregado na estimação de equações diferenciais estocásticas tem apresentado uma extensa linha de pesquisa nos últimos anos, principalmente para equações que buscam descrever o comportamento da taxa de juros de curto prazo. Trabalhos importantes como os de Pearson e Sun (1994), Aït-Sahalia (2002), e Durhan e Gallant (2002), apresentam diferentes abordagens para estimação de equações diferenciais estocásticas por máxima verossimilhança.

5 METODOLOGIA

Na presente seção serão apresentados os métodos empregados para avaliação das opções de compra sobre o IDI. Nesse sentido, discorreremos sobre os dois modelos de precificação aqui empregados, partindo de suas fórmulas até a definição dos seus parâmetros. Além disso, será caracterizada a base de dados utilizada neste trabalho e também serão apresentadas as métricas de erro empregadas para avaliar a aderência dos preços teóricos obtidos pelos modelos, em comparação aos preços observados no mercado.

5.1 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Os contratos de opções de compra sobre o IDI serão avaliados seguindo o modelo proposto por Barbachan e Ornelas (2003), derivado dos modelos de taxa de juros e precificação de Cox, Ingersoll e Ross (1985). Também será empregado o modelo de Black (1976), igualmente adaptado para precificar essa modalidade de contratos de opção, conforme implementação verificada no trabalho de Gluckstern et al. (2002).

5.1.1 Modelo CIR

Barbachan e Ornelas (2003) derivaram sua fórmula de precificação de opções de compra sobre o IDI, com base na equação diferencial estocástica para a taxa de juros de curto prazo e na fórmula para precificação de opções de compra de taxas de juros propostas por Cox, Ingersoll e Ross (1985).

O modelo é derivado considerando ativos da economia negociados em tempo contínuo. Posteriormente, sua forma discreta é apresentada. Dado um horizonte de tempo T , com um espaço de probabilidade (Ω, ξ, P) , onde Ω é o espaço amostral, ξ a sigma-álgebra e P a medida de probabilidade, sendo que ξ_t é um filtro crescente de ξ , com $0 \leq t \leq T$. Define-se $A(t, \omega)$ como sendo uma conta remunerada pela taxa de juros de curto prazo, representada pelo seguinte processo:

$$dA(t, \omega) = r(t, \omega)A(t, \omega)dt \quad A(0, \omega) = 1. \quad (30)$$

onde $r(t, \omega)$ é a taxa de juros de curto prazo, no caso brasileiro a taxa do CDI; e $\omega \in \Omega$ o estado de natureza.

O processo para a taxa de juros de curto prazo, r , será a do modelo de taxa de juros proposto por Cox, Ingersoll e Ross (1985), conforme equação (19):

$$dr(t, \omega) = b(\alpha - r(t, \omega))dt + \sigma\sqrt{r}dz(t, \omega), \quad b, \alpha \text{ e } \sigma > 0 \quad (31)$$

Por motivos de simplificação, $r_{(t, \omega)}$ passa a ser representado simplesmente por $r_{(t)}$. O ativo A , acima descrito, é equivalente ao IDI num modelo de tempo contínuo. Aplicando o lema de Itô ao processo de Itô descrito na equação (30) para o $\ln(A(t))$, obtemos a seguinte equação:

$$A(t) = A(0)e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (32)$$

Como $A(0)$ é igual a um, elimina-se este termo da expressão. Dessa maneira, o valor (*pay-off*) de uma opção de compra sobre A_0 com preço de exercício E , no vencimento T , será:

$$c(T) = \max\{0, A(T) - E\} = \max\left\{0, e^{\int_0^T r(s)ds} - E\right\} \quad (33)$$

A partir desta expressão é possível determinar, através da precificação livre de arbitragem, a fórmula para uma opção de compra de IDI, para qualquer $t < T$. O mercado do modelo é considerado incompleto. Para um mercado incompleto, existem diversas medidas *martingales* equivalentes, sendo a escolha de uma delas feita pela aplicação do Teorema de Girsanov, como será apresentado posteriormente.

5.1.1.1 Derivação da Fórmula

Existe uma medida *martingale* equivalente, se e somente se não existirem oportunidades de arbitragem e presença de fricções. Supõe-se que não existam fricções no mercado brasileiro de IDI. Para que uma medida $\mathbb{Q} \in (\Omega, \xi)$ seja *martigale* equivalente a P , às seguintes condições devem ser satisfeitas:

- I. P e \mathbb{Q} são medidas equivalentes, isto é, $P(A) = 0$ se e somente se $\mathbb{Q}(A) = 0$, qualquer que seja $A \in \xi$;
- II. A derivada de Radon-Nokodym $d\mathbb{Q}/dP \in L^2(\Omega, \xi, P)$, isto é, o seu quadrado é integrável com relação à P ;
- III. $E^{\mathbb{Q}}(A(t)|\xi_u) = A_i(u)$, para todo $i=0\dots n-1$ e $0 \leq u \leq t \leq T$;

onde $E^{\mathbb{Q}}(A(t)|\xi_u)$ é a esperança sobre \mathbb{Q} , condicionada à filtração ξ_u de ξ que leva em conta somente os eventos até o tempo u .

De forma a tornar mais fácil o entendimento das fórmulas, estipula-se uma variável auxiliar $B_{u,t}$ com $u \geq t$, que representa o resultado do investimento inicial, remunerado à taxa de juros de curto prazo, de uma unidade monetária no período $[u, t]$. A expressão para $B_{u,t}$ é

$$B_{u,t}(r) = e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (34)$$

Logo, pela solução de Feynman-Kac, o valor do prêmio de uma opção de compra em t pode ser definido como sendo o valor esperado, via \mathbb{Q} , do *pay-off* da opção no vencimento T descontado para t . A expressão para o *pay-off* é

$$C(t) = E^{\mathbb{Q}}[C(T)/B_{t,T}|\xi_t] \quad (35)$$

Substituindo (33) em (35)

$$C(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\max \left\{ 0, e^{\int_0^T r(s)ds} - E \right\} B_{t,T}^{-1} \middle| \xi_t \right] \quad (36)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\max \left\{ 0, e^{\int_0^{t+\varepsilon} r(s)ds} - E e^{-\int_{t+\varepsilon}^T r(s)ds} \right\} e^{-\int_0^{t+\varepsilon} r(s)ds} \middle| \xi_t \right] \quad (37)$$

Foi incluído um termo ε (infinitesimal) na hora de particionar a integral de 0 a T .

Para dar continuidade ao cálculo da esperança de \mathbb{Q} , usa-se o Teorema de Girsanov para converter a equação (37), que descreve a dinâmica dos preços no “mundo real” (Ω, ξ, ξ_t, P) , na equação que descreve a dinâmica dos preços num mundo neutro ao risco $(\Omega, \xi, \xi_t, \mathbb{Q})$. Para manter a equação do mundo neutro ao risco com o mesmo formato da antiga dinâmica é necessário que seja escolhido um λ , que é o preço do mercado ao risco, apropriado:

$$\lambda(r, t) \equiv \frac{\lambda\sqrt{r}}{\sigma} \quad (38)$$

Usando o Teorema de Girsanov, chegamos à expressão do processo de Wiener em \mathbb{Q} :

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = -\lambda(r, t)dt + dW_t \quad (39)$$

Substituindo (39) em (19), tem-se:

$$dr_t = b(\alpha - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}(+dW_t^{\mathbb{Q}} + \lambda(r, t)dt) \quad (40)$$

Substituindo (38) em (40) e rearranjando os termos, temos:

$$dr_t = (b - \lambda) \left(\left(\frac{\alpha b}{b - \lambda} \right) - r_t \right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (41)$$

Definindo novos parâmetros b^* e α^* , de modo a manter o formato anterior:

$$dr_t = -b^*(\alpha^* - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (42)$$

onde:

$$b^* = (b - \lambda) \text{ e } \alpha^* = \left(\frac{\alpha b}{b - \lambda} \right)$$

Encontrada a equação no mundo neutro ao risco (associado à \mathbb{Q}), cabe agora definir a distribuição de probabilidade de $\int r(s)ds$ em \mathbb{Q} , para que a equação (37) possa ser solucionada. Do trabalho de Cox, Ingersoll e Ross (1985), sabe-se que a densidade de probabilidade de $r(s)$ condicionada a $r(t)$ com $s > t$ em \mathbb{Q} é Qui-quadrada não-central. Barbachan e Ornelas (2003) apresentam da seguinte forma:

$$r(s)|\xi_t \sim^{\mathbb{Q}} \chi^2(cr(s); n, p)/c \quad (43)$$

onde

$$c \equiv \frac{4b^*}{\sigma^2(1 - e^{-b^*(s-t)})}$$

$$p \equiv cr(t)e^{-b^*(s-t)}$$

$$n \equiv \frac{4b^* \alpha^*}{\sigma^2}$$

Para simplificar a notação, cria-se uma nova variável γ da seguinte forma:

$$\gamma_{a,b}(r) = \int_a^b r(s)ds \quad (44)$$

Assim, é possível reescrever (37) da seguinte forma (usando 34 e 44):

$$C(t) = E^{\mathbb{Q}}[\max\{0, B_{0,t} - Ee^{-\gamma(t+\varepsilon, T)}\} | \xi_t] \quad (45)$$

Torna-se necessário calcular a distribuição condicionada de γ em \mathbb{Q} para continuar o cálculo de $C(t)$, que será obtida através do seguinte teorema⁴:

TEOREMA:

A distribuição de γ em \mathbb{Q} será a seguinte:

$$\gamma(t + \varepsilon, T) | \xi_t \sim^{\mathbb{Q}} k\chi^2(c^*\gamma; n^*, p^*) \quad (46)$$

onde

$$p^* \equiv \frac{4r(t)}{\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{1 - e^{b^*(t-T)}}{1 - e^{-b^*\varepsilon}} \right) \right)$$

$$n^* \equiv \frac{4b^* \alpha^* \Delta t}{\sigma^2}$$

⁴ A demonstração do teorema pode ser verificada com maiores detalhes em Barbachan e Ornelas (2003).

$$k \equiv \frac{\sigma^2}{4b^*} + \frac{\sigma^2}{4\Delta t} (e^{-b^*(T-t)} - e^{-b^*\varepsilon})$$

$$c^* \equiv \frac{\sigma^2 p^*}{16r(t)b^{*2}}$$

Uma vez determinada à distribuição de probabilidade em γ , a fórmula de precificação para uma opção de compra, para qualquer $t < T$, é obtida através da esperança condicionada presente em c^* . A fórmula apresenta a seguinte forma:

$$c(t) = (k/c^*)B_{0,t} (1 - \chi^2[\ln(E/B_{0,t+\mu})c^*; n^*, p^*]) - \frac{kEc^* \binom{n^*-2}{2} e^{\frac{-p^*}{c^*}}}{(2+c^*)B_{t,t+\varepsilon}} (1 - \chi^2[\ln(E/B_{0,t+\varepsilon})(2+c^*); n^*, p^{**}]) \quad (47)$$

onde $p^{**} = p^*c^*/(2+c^*)$.

A fórmula (47) em sua forma discreta, com variáveis temporais em dias úteis, pode ser representada da seguinte maneira:

$$c(t) = c^*IDI_t(1 - \chi^2[\ln(E/IDI_{t+1}); n^*, p^*]) - Ec^*3^{\frac{-n^*}{2}} e^{-p^{**}} (1 - \chi^2[\ln(E/IDI_{t+1})/3; n^*, p^{**}]) / (1 + CDI_t) \quad (48)$$

onde:

$$p^* = \frac{4CDI_t}{\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{1 - e^{b^*(t-T)}}{1 - e^{-b^*}} \right) \right)$$

$$n^* = \frac{4b^*\alpha^*\Delta t}{\sigma^2}$$

$$c^* = \frac{\sigma^2}{4b^*} + \frac{\sigma^2}{4\Delta t e^{b^*}} (e^{(T-t)} - 1)$$

Sendo:

$r(t)$ = taxa anual do CDI intra-day;

$$IDI_{t+1} = IDI_t * (1 + CDI \text{ intra-day});$$

T = data de vencimento do contrato de opção;

t = data de avaliação.

O modelo foi discretizado em decorrência do IDI ser um índice diário. No que se refere à taxa de juros r , esta é representada pela taxa do CDI *intra-day* do dia da avaliação. Todas as datas são expressas em anos úteis.

5.1.1.2 Parâmetros

O modelo apresentado anteriormente é composto basicamente por oito parâmetros, sendo quatro deles observáveis e quatro não observáveis. Os parâmetros observáveis são aqueles que podem ser facilmente visualizados no mercado. No presente caso, são eles: o IDI (Índice de Depósitos Interfinanceiros), que é o ativo-objeto da opção; E , que representa o preço de exercício da opção de compra sobre o IDI; $T - t$, que representa o período entre a avaliação da opção e o seu vencimento; e r_t , que é taxa de juros de curto prazo, aqui representada pela taxa do CDI.

Os quatro parâmetros não observáveis demandam um pouco mais de atenção, uma vez que precisam ser estimados, com exceção do preço de mercado do risco, representado por λ . Neste caso, utilizaremos o valor -1, que é o mesmo definido por Barbachan e Ornelas (2003). Hull (2014) também define o preço do mercado próximo ao valor definido por Barbachan e Ornelas (2003). Ele é negativo, pois o risco é algo indesejável e significa que para cada unidade adicional de risco, o investidor exige uma unidade a mais de retorno.

Já os parâmetros b (velocidade de reversão à média da taxa de juros de curto prazo r_t), α (taxa de juros de longo prazo), e σ (volatilidade esperada da taxa de juros de curto prazo) serão estimados pelo método de Máxima-Verossimilhança, conforme implementação de Kládívko (2007) e Martin et al. (2012).

Antes de prosseguirmos com o desenvolvimento do método de estimação, é importante levar em conta algumas considerações: os parâmetros b , α e σ são todos positivos, sendo que $2b\alpha > \sigma^2$; o processo CIR é bem definido e tem uma distribuição estacionária (*steadystate*); a densidade marginal é uma distribuição Gama.

Para a estimação de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\theta \equiv (b, \alpha, \sigma)$, às transições das densidades são requeridas. De acordo com Kladívko (2007), o processo CIR é um dos poucos casos, entre outros processos de difusão, onde a densidade de transição tem uma expressão fechada. Dado r_t no tempo t , a densidade de transição de $r_{t+\Delta t}$ no tempo $t + \Delta t$ é a seguinte:

$$p(r_{t+\Delta t}|r_t; \theta, \Delta t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (49)$$

onde

$$c = \frac{2b}{\sigma^2(1 - e^{-b\Delta t})}$$

$$u = cr_t e^{-b\Delta t}$$

$$v = cr_{t+\Delta t}$$

$$q = \frac{2b\alpha}{\sigma^2} - 1$$

$eI_q(2\sqrt{uv})$ é uma função modificada de Bessel do primeiro tipo e de ordem q .

De forma alternativa, pode-se transformar $2cr_{t+\Delta t}$ em $s_{t+\Delta t}$, e assim a densidade de transição é redefinida para:

$$g(s_{t+\Delta t}|s_t; \theta, \Delta t) = g(2cr_{t+\Delta t}|2cr_t; \theta, \Delta t) = \frac{1}{2c} p(r_{t+\Delta t}|r_t; \theta, \Delta t) \quad (50)$$

a qual segue uma distribuição χ^2 com $2q + 2$ graus de liberdade e um parâmetro de não-centralidade $2q + 2$.

A função de verossimilhança para uma série de tempo da taxa de juros de curto prazo com N observações é a seguinte:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N-1} p(r_{i+1}|r_i; \theta, \Delta t) \quad (51)$$

Como visto anteriormente, é conveniente trabalhar com a função log-verossimilhança, logo, devemos modificar a função (51) da seguinte maneira:

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln p(r_{i+1}|r_{t_i}; \theta, \Delta t), \quad (52)$$

da qual é derivada a função log-verossimilhança do processo CIR:

$$\ln L(\theta) = (N - 1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ -u_{t_i} - v_{t_{i+1}} + 0,5q \ln \left(\frac{v_{t_{i+1}}}{u_{t_i}} \right) + \ln \{ I_q(2\sqrt{u_{t_i} v_{t_{i+1}}}) \} + 2\sqrt{u_{t_i} v_{t_{i+1}}} \right\} \quad (53)$$

onde $u_{t_i} = cr_{t_i} e^{-\alpha \Delta t}$ e $v_{t_{i+1}} = cr_{t_{i+1}}$. Assim, torna-se possível encontrar a estimação de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros θ , maximizando a função log-verossimilhança (52) sobre seu espaço paramétrico

$$\hat{\theta} \equiv (\hat{b}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta). \quad (54)$$

Considerando que a função logarítmica aumenta monotonicamente, maximizando a função log-verossimilhança, espera-se que ela também maximize a função verossimilhança.

Os pontos iniciais de otimização são cruciais para convergência ao ótimo global. Esses pontos serão estimados por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), seguindo a versão discretizada da equação (19):

$$r_{t+\Delta t} - r_t = b(\alpha - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t, \quad (55)$$

onde ε_t é normalmente distribuído com média zero e variância Δt (ruído branco). Para que seja procedida a estimação por MQO, a equação (55) deverá ser normalizada da seguinte forma:

$$\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{b\alpha\Delta t}{\sqrt{r_t}} - b\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t. \quad (56)$$

As estimações dos *drifts* iniciais são encontradas minimizando a função objetivo

$$(\hat{b}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{\alpha, \mu} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{b\alpha\Delta t}{\sqrt{r_{t_i}}} + b\sqrt{r_{t_i}}\Delta t \right)^2, \quad (57)$$

a qual pode ser resolvida por

$$\hat{b} = \frac{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}{\left(N^2 - 2N + 1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} \right) \Delta t} \quad (58)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}} \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i}}{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}. \quad (59)$$

O parâmetro de difusão, $\hat{\sigma}$, é dado pelo desvio padrão dos resíduos.

Neste trabalho optaremos por estimar os parâmetros empregando a função densidade de transição de Bassel, ao invés da transformação para qui-quadrada não-central. Segundo Kladívko (2007), a otimização da função densidade de transição da qui-quadrada é muito mais custosa em termos computacionais, em comparação a densidade de Bassel. Os parâmetros serão estimados utilizando-se quatro diferentes janelas de dados da taxa de juros de curto prazo, sendo elas definidas em 2, 4, 6 e 8 anos úteis.

5.1.2 Modelo de Black

O modelo de Black (1976), adaptado para o mercado brasileiro de opções de IDI, foi apresentado no trabalho de Glückstern et al. (2002). Sua fórmula possui o mesmo formato daquela derivada por Black (1996), para precificar opções sobre futuros.

A adaptação ocorre na determinação do preço do contrato futuro (ativo-objeto), no caso, na determinação do valor do IDI na data de vencimento da opção. Este preço é calculado multiplicando o valor do IDI na data de avaliação pela taxa de juros efetiva expressa no contrato de DI Futuro, vencendo na mesma data do contrato de opção. Dessa maneira, cria-se um preço a termo para o IDI, representado pela notação IDI_{termo} . A fórmula para avaliar uma opção de compra sobre IDI na data t é:

$$c(t) = e^{-RT} [IDI_{termo} N(d_1) - EN(d_2)] \quad (60)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_{termo}}{E}\right) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_{termo}}{E}\right) - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

em que c_t é preço da opção de compra no instante t ; E é o preço de exercício da opção; T é a maturidade do contrato de opção; e σ é a volatilidade do preço a termo do IDI até a data de vencimento da opção. $N(d_i)$, onde $i=1,2$, é a função de distribuição acumulada da normal reduzida. Com exceção da volatilidade, os outros parâmetros são diretamente observáveis.

Conforme modelo original de Black (1976), o parâmetro da volatilidade refere-se à volatilidade do preço futuro do ativo objeto. No caso, seu cálculo deveria ser obtido com base nos contratos de DI Futuro vencendo na mesma data de vencimento da opção. Entretanto, Gluckstern et al. (2002) sugerem a utilização de taxa do CDI diária, uma vez que efeitos de heterocedasticidade cíclica são encontrados na série do DI Futuro. Para o cálculo da volatilidade sobre a taxa DI, os autores utilizam o modelo EWMA com dois diferentes fatores de decaimento exponencial e o desvio padrão das variações logarítmicas de um dia para o dia seguinte, com taxas diárias em termos anuais e diários. Essas medidas foram calculadas para uma janela móvel de dados de vinte e um dias. Além disso, foi calculada a volatilidade da taxa a termo implícita nos contratos de DI Futuro, por meio do modelo EWMA (0,91).

Quando comparados os preços teóricos com os preços de exercício, os modelos EWMA e o desvio padrão das variações logarítmicas da série do CDI diário em termos anuais obtiveram resultados bastante próximos.

No nosso caso, optamos por utilizar o desvio padrão das variações logarítmicas da série do CDI diário para o cálculo da volatilidade, dados os bons resultados apresentados e sua fácil tratabilidade. Para esta estimativa, utilizaremos janelas de um mês, três meses, seis meses, doze meses, dois anos, quatro anos, seis anos e oito anos.

5.2 AMOSTRA

A base de dados deste trabalho é composta pelos preços de fechamento dos contratos de opções de compra europeias sobre o IDI, negociadas na BM&FBovespa, entre os períodos de 01 de Fevereiro de 2008 e 31 de Março de 2015, totalizando 1.824 dias úteis de pregões e 9.144 observações. A amostra é composta somente por contratos com mais de 800 negócios no pregão diário. A filtragem foi realizada com o objetivo de eliminar contratos com preços distorcidos, ocasionado pela falta de liquidez.

Além disso, temos associado, para cada contrato de opção, o seu respectivo preço de exercício, data de vencimento, prazo em dias úteis até o vencimento, número de contratos negociados, além do preço do contrato de DI Futuro com a mesma data de vencimento da opção.

Também coletamos a série temporal da taxa do CDI (Certificados de Depósitos Financeiros) com frequência diária, capitalizada em termos anuais, que tem início em 03 de Janeiro de 2000 e término em 31 de Março de 2015, totalizando 3.832 observações.

Toda a base de dados acima mencionada pode ser obtida nos *websites* da BM&FBovespa, Banco Central do Brasil, e Cetip (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos).

5.3 MÉTRICAS DE ERRO

Uma vez precificados os contratos de opções, cabe avaliarmos a aderência dos preços teóricos em relação aos preços observados no mercado. Para isso, utilizaremos algumas métricas de erro de predição: erro médio (EM), erro absoluto médio (EAM), raiz do erro quadrático médio (REQM); coeficiente de desigualdade de Theil (TIC); coeficiente de determinação, R^2 .

O erro médio (EM) reflete o viés do modelo em relação aos preços de mercado dos respectivos contratos de opções, sendo definido por:

$$EM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{c}_i - c_i \quad (61)$$

em que c_i é o valor observável; \hat{c}_i o valor calculado; e N o número de observações.

O erro absoluto médio (EAM), por sua vez, corresponde à média dos módulos dos erros, de forma que não haja valores negativos. Sua fórmula é a seguinte:

$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{c}_i - c_i|. \quad (62)$$

A raiz do erro quadrático médio (REQM) reflete não só o viés, mas também a variância das diferenças entre preços de mercado e preços teóricos. Sua fórmula pode ser representada da seguinte forma:

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{c}_i - c_i)^2}. \quad (63)$$

Nessas métricas usuais de erro, quanto menor o valor apresentado, mais consistente e eficiente é o modelo de precificação.

O mesmo é observado no valor do coeficiente de desigualdade de Theil, o qual varia entre zero e um, onde zero indica a aderência perfeita dos preços teóricos em relação aos preços de mercado. O coeficiente de desigualdade é obtido através da seguinte fórmula:

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{c}_i - c_i)^2}{N}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \hat{c}_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N c_i^2}{N}}}. \quad (64)$$

Ademais, estimou-se o coeficiente de determinação, R^2 , da regressão linear dos preços demercado em relação aos preços teóricos. Neste caso, quanto maior o coeficiente melhor é o modelo de precificação.

Os resultados também foram avaliados de acordo com o grau de *moneyness* (M) do preço da opção. Para classificarmos os preços dentro do grau de *moneyness* utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = \frac{IDIt}{E.e^{-R.T}} \quad (65)$$

onde o $IDIt$ representa o valor do índice (ativo-objeto) na data t ; E é o preço de exercício do contrato de opção; e R é a taxa implícita (taxa *spot* anualizada) associada ao contrato de DI Futuro com mesmo vencimento da opção.

Uma vez obtido o M para cada contrato de opção, a amostra é separada de acordo com os seguintes critérios: *out-of-the-money* ($M \leq 1 - 2\%$), *at-the-money* ($1 - 2\% < M < 1 + 2\%$) e *in-the-money* ($M > 1 + 2\%$).

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho fizemos uma aplicação do modelo de precificação proposto por Barbachan e Ornelas (2003), derivado da equação diferencial e da fórmula de precificação de opções de compra propostas por Cox, Ingersoll e Ross (1985), para avaliação de opções de compra sobre o Índice da Taxa Média dos Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI). Também foi realizado o apreçamento dos mesmos contratos de opções utilizando o modelo de Black (1976), com base na adaptação apresentada por Gluckstern et al.(2002).

A Tabela (1) apresenta as estimativas das métricas de erro em relação aos preços teóricos obtidos através dos modelos CIR e Black, comparados com os preços observados no mercado para todos os contratos da base de dados. Os parâmetros foram estimados com janelas de taxas de juros de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias). Através da métrica de erro médio (EM), podemos observar o viés dos preços calculados pelos dois modelos, onde os prêmios das opções foram subavaliados pelo CIR e superavaliados pelo modelo de Black. Em relação às outras métricas, evidentemente os resultados do modelo de Black superam os do CIR, principalmente quando observamos os coeficientes de desigualdade de Theil e de determinação (R^2). No primeiro caso, o modelo de Black apresenta um coeficiente bem mais próximo de zero em comparação ao modelo CIR, o que comprova sua superioridade. No caso do R^2 , também se evidencia a superioridade do modelo de Black, uma vez que o coeficiente é muito mais próximo de um, em comparação ao coeficiente do modelo CIR.

	2 anos	4 anos	6 anos	8 anos
EM (CIR)	-161,57	-198,51	-194,23	-156,18
EM (BLACK)	345,67	297,03	295,32	362,15
EAM (CIR)	273,74	265,58	256,31	258,54
EAM (BLACK)	363,95	318,94	312,49	372,12
REQM (CIR)	1007,80	1014,74	1000,41	989,06
REQM (BLACK)	421,39	360,75	343,15	414,89
TIC (CIR)	0,82	0,87	0,85	0,81
TIC (BLACK)	0,19	0,17	0,16	0,19
R^2 (CIR)	0,07	0,06	0,08	0,10
R^2 (BLACK)	0,84	0,88	0,89	0,84

Tabela 1 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 para janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).

Na Tabela (1), conforme já mencionado, as janelas de dados para estimação dos parâmetros foram definidas em 2, 4, 6 e 8 anos. A explicação reside no fato de que janelas menores geravam distorções nos parâmetros estimados da equação diferencial estocástica do modelo CIR. Estudos como o de Kládívko (2007) e Feng e Xie (2012) também usam janelas maiores ou iguais a dois anos. No entanto, no caso do modelo de Black, achamos conveniente estimar o parâmetro de volatilidade utilizando janelas menores de dados, sendo elas de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses, acreditando que este parâmetro poderia estar absorvendo choques ocorridos há muito tempo atrás, distorcendo, assim, os preços teóricos do modelo. A Tabela (2) apresenta a aderência dos preços teóricos calculados com parâmetros de volatilidade estimados com janelas menores. Evidencia-se uma leve melhora em alguns resultados, principalmente, nos casos das estatísticas de erro médio (EM) e erro absoluto médio (EAM). No entanto, se observa uma leve piora nos resultados da raiz do erro quadrático médio (REQM) e nos coeficientes de determinação. Tais resultados demonstram que a utilização de janelas menores não trouxe melhorias significativas nos resultados de apreçamento do modelo de Black para o período de análise. Em relação à eficiência das janelas de estimação, quando comparadas as métricas de erro, comprova-se, em termos gerais, que a janela de oito anos apresenta os melhores resultados, no caso do modelo CIR. No modelo de Black, a janela de seis anos é a que apresenta os menores erros.

	1 mês	3 meses	6 meses	12 meses
EM (BLACK)	204,41	261,44	291,50	337,41
EAM (BLACK)	278,47	312,13	321,81	355,70
REQM (BLACK)	446,80	427,19	415,16	417,13
TIC (BLACK)	0,20	0,20	0,19	0,19
R ² (BLACK)	0,82	0,83	0,84	0,84

Tabela 2 – Aderência dos preços calculados pelo modelo de Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 para janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações diárias).

De acordo com as estatísticas do Gráfico (1), apresentado anteriormente, os contratos de opções de compra de IDI tiveram os níveis mais altos de liquidez (negócios realizados) nos anos de 2010 e 2011. Dessa forma, com o objetivo de selecionar aqueles contratos com maior liquidez e com a menor distorção possível para fins de comparação com os preços dos modelos, fizemos os mesmos testes de erro, selecionando contratos negociados em 2010 e 2011. Os resultados são apresentados na Tabela (3). As estimativas das métricas de erro básicas (EM, EAM e REQM) para o modelo CIR apresentam um melhora considerável quando

comparadas com aquelas estimadas para todo o período da base de dados. Entretanto, no caso dos coeficientes R^2 e TIC , os resultados são praticamente os mesmos. No geral, a aderência dos preços do modelo CIR em relação aos preços de mercado apresenta uma leve melhora, quando comparados nos dois anos de maior liquidez. Já às métricas do modelo de Black tem uma leve piora.

	2 anos	4 anos	6 anos	8 anos
EM (CIR)	-28,91	-87,34	-128,35	-64,22
EM (BLACK)	504,22	428,48	367,00	457,44
EAM (CIR)	221,81	193,75	188,89	204,62
EAM (BLACK)	507,35	431,21	370,91	460,19
REQM (CIR)	786,11	789,55	796,38	789,48
REQM (BLACK)	542,74	458,81	397,59	488,24
TIC (CIR)	0,75	0,82	0,87	0,80
TIC (BLACK)	0,29	0,25	0,22	0,27
R^2 (CIR)	0,08	0,07	0,05	0,07
R^2 (BLACK)	0,56	0,69	0,76	0,64

Tabela 3 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Janeiro/2010 e Dezembro/2011 para janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).

No entanto, quando essas métricas são estimadas para os contratos precificados com janelas menores os resultados tendem a melhorar, como podemos ver na Tabela (4). Ainda assim, são resultados piores daqueles obtidos para todo o período da base de dados.

	1 mês	3 meses	6 meses	12 meses
EM (BLACK)	201,04	236,76	257,88	397,85
EAM (BLACK)	259,21	277,10	281,46	403,30
REQM (BLACK)	432,69	384,96	349,97	436,94
TIC (BLACK)	0,25	0,22	0,20	0,24
R^2 (BLACK)	0,72	0,78	0,82	0,71

Tabela 4 - Aderência dos preços calculados pelo modelo de Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Janeiro/2010 e Dezembro/2011 para janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações diárias).

De forma geral, não se observou uma melhora expressiva nos resultados ao selecionarmos apenas os contratos negociados em 2010 e 2011. Uma explicação para isso reside no fato da base de dados de opções já ter sido filtrada anteriormente, através da seleção daqueles contratos com mais de 800 negócios no dia do pregão.

Foram avaliados, ainda, os resultados dos modelos de acordo com o grau de *moneyness* (*M*) das opções. A Tabela (5) apresenta os resultados das métricas de erro para todo o conjunto da amostra de contratos. Nas opções *at-the-money*, o modelo CIR apresentou menores vieses e menor variância, porém os coeficientes R^2 e *TIC* foram piores em relação àqueles do modelo de Black. Este resultado demonstra a falta de sensibilidade do modelo CIR a mudanças nos seus respectivos parâmetros. No caso das opções *out-of-the-money* e *in-the-money*, o modelo de Black apresentou uma grande superioridade em relação ao modelo CIR, com uma maior aderência dos preços teóricos em relação aos preços de mercado.

<i>At-the-money</i>				
	2 anos	4 anos	6 anos	8 anos
EM (CIR)	-84,34	-121,27	-117,64	-79,45
EM (BLACK)	350,86	301,56	299,81	367,55
EAM (CIR)	197,45	188,70	180,01	182,61
EAM (BLACK)	368,43	322,80	316,30	376,73
REQM (CIR)	499,53	505,88	486,96	470,90
REQM (BLACK)	424,15	363,08	345,37	417,62
TIC (CIR)	0,68	0,75	0,71	0,64
TIC (BLACK)	0,33	0,29	0,28	0,32
R^2 (CIR)	0,18	0,16	0,22	0,27
R^2 (BLACK)	0,41	0,57	0,61	0,43

(continua)

<i>Out-of-the-money</i>				
	2 anos	4 anos	6 anos	8 anos
EM (CIR)	72,80	69,98	69,20	75,29
EM (BLACK)	-1,47	-1,05	-1,35	-0,98
EAM (CIR)	72,80	69,98	69,20	75,29
EAM (BLACK)	1,53	1,85	1,51	1,03
REQM (CIR)	101,30	87,33	96,20	126,15
REQM (BLACK)	6,59	6,81	6,54	3,89
TIC (CIR)	0,35	0,31	0,34	0,41
TIC (BLACK)	0,03	0,03	0,03	0,02
R^2 (CIR)	0,01	0,26	0,11	0,00
R^2 (BLACK)	0,996	0,996	0,996	0,999

<i>In-the-money</i>				
	2 anos	4 anos	6 anos	8 anos
EM (CIR)	-8266,31	-8317,04	-8243,52	-8206,40
EM (BLACK)	-49,49	-49,50	-46,95	-47,35
EAM (CIR)	8266,31	8317,04	8243,52	8206,40
EAM (BLACK)	49,49	49,50	46,95	47,35
REQM (CIR)	8992,34	9037,54	8977,17	8933,48
REQM (BLACK)	95,90	95,95	87,87	89,69

	(conclusão)			
TIC (CIR)	0,97	0,98	0,96	0,95
TIC (BLACK)	0,01	0,01	0,00	0,00
R ² (CIR)	0,03	0,02	0,03	0,04
R ² (BLACK)	0,99	0,99	0,99	0,99

Tabela 5 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 de acordo com o grau de *moneyness*. Janelas de estimação de 2, 4, 6 e 8 anos (observações diárias).

Na Tabela (6) são apresentados os resultados do modelo de Black calibrado com parâmetros de volatilidade estimados com janelas de até um ano, de acordo com o grau de *moneyness*. Em geral, as métricas apresentam valores muito próximos daqueles da Tabela (5), onde os parâmetros foram estimados com janelas maiores.

<i>At-the-money</i>				
	1 mês	3 meses	6 meses	12 meses
EM (BLACK)	207,74	265,65	296,15	342,71
EAM (BLACK)	281,49	315,73	325,56	359,92
REQM (BLACK)	449,35	429,65	417,52	419,51
TIC (BLACK)	0,35	0,34	0,32	0,32
R ² (BLACK)	0,34	0,39	0,43	0,42
<i>Out-of-money</i>				
	1 mês	3 meses	6 meses	12 meses
EM (BLACK)	7,33	1,94	0,78	-0,85
EAM (BLACK)	8,17	2,95	3,06	1,76
REQM (BLACK)	32,18	9,35	8,58	6,08
TIC (BLACK)	0,71	0,52	0,59	0,66
R ² (BLACK)	--	--	--	--
<i>In-the-money</i>				
	1 mês	3 meses	6 meses	12 meses
EM (BLACK)	-36,90	-45,92	-48,19	-49,16
EAM (BLACK)	60,20	51,48	49,42	49,17
REQM (BLACK)	119,65	97,19	95,53	95,90
TIC (BLACK)	0,01	0,01	0,01	0,01
R ² (BLACK)	0,99	0,99	0,99	0,99

Tabela 6 - Aderência dos preços calculados pelos modelos CIR e Black aos preços de fechamento de opções de compra de IDI entre Fevereiro/2008 e Março/2015 de acordo com o grau de *moneyness*. Janelas de estimação de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses (observações).

De forma geral, os resultados do modelo CIR são bem inferiores aos obtidos pelo modelo de Black, principalmente quando os preços teóricos são comparados aos preços de

mercado de contratos de opções in-the-money e out-of-money. No que tange à eficiência dos modelos em relação às janelas de dados para estimação dos parâmetros, no caso do modelo CIR, a janela com oito anos de observações apresenta os melhores resultados. Já em relação ao modelo de Black, a janela de seis anos foi a que mostrou os resultados mais acurados.

Apesar de não ser diretamente possível comparar os resultados obtidos com trabalhos anteriores na literatura de precificação, como Barbachan e Ornelas (2003), Gluckstern et al. (2002), Neto e Pereira (1999), Barbedo et al. (2010), Laurini e Muad (2013) e Nojima e Pinto (2014) devido a diferenças nos bancos de dados utilizados e métricas empregadas, mesmo assim, algumas comparações quantitativas podem ser realizadas. No caso do trabalho de Barbachan e Ornelas (2003), onde o modelo CIR para opções de IDI foi proposto, os resultados apresentados vão de encontro aos nossos resultados, uma vez que em ambos os casos o modelo subavalia os contratos de opções de compra de IDI, quando os parâmetros são obtidos através de dados de frequência diária. Neste mesmo trabalho, os autores também testam o modelo proposto por Neto e Pereira (2000), baseado no trabalho de Vasicek (1977), verificando erros sistemáticos nos preços teóricos, com subavaliação dos prêmios, quando os parâmetros são obtidos através de dados de frequência diária. No trabalho de Barbedo et al. (2010) é observado o oposto, uma vez que o modelo HJM por eles aplicado superprecifica os contratos de opções de compra de IDI. Os melhores resultados foram encontrados nos trabalhos Gluckstern et al. (2002), Laurini e Muad (2013) e Nojima e Pinto (2014) onde foram aplicados os modelos de Hull-White no primeiro, o e modelo HJM nos outros dois. No entanto, mesmo com resultados melhores, os erros sistemáticos foram significativos. Além disso, no trabalho de Gluckstern et al. (2002), o modelo de Black também é aplicado para avaliação de opções de compra sobre o IDI. Os resultados foram parecidos com os deste trabalho, uma vez que ocorreram erros sistemáticos de precificação, com superprecificação dos contratos de opções.

7. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo principal aplicar o modelo de precificação proposto por Barbachan e Ornelas (2003), com base nos modelos de taxa de juros e precificação de Cox, Ingersoll e Ross (1985), para avaliação de opções de compra sobre o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI). O motivo para a escolha deste modelo reside no fato de que quando foi proposto, não se apresentou uma metodologia clara para calibrá-lo, uma vez que os parâmetros não-observáveis foram estimados de forma separada e ou arbitrados. Neste trabalho, fizemos uso do método de Máxima Verossimilhança para estimar os parâmetros da equação diferencial estocástica que representa o modelo de taxa de juro CIR e com eles, calibramos o modelo de precificação de opções. Além disso, quando foi proposto, o modelo não foi testado em uma base de dados suficientemente grande, uma vez que, segundo os autores, a liquidez dos contratos de compra de IDI era muito baixa e, assim, muitos dos prêmios não podiam ser usados como comparação.

Ainda neste trabalho, aplicamos o modelo de precificação de Black (1976) para avaliação de opções de comprasobre IDI, com base na adaptação apresentada no trabalho de Gluckstern et. al (2002). Neste caso, optamos por testá-lo por ser ainda hoje amplamente utilizado pelos agentes de mercado para avaliação de contratos opções sobre o IDI.

De forma geral, após análise dos resultados, constatou-se que o modelo de precificação CIR, na forma como foi calibrado, não é capaz de captar de maneira eficiente os preços de mercado das opções de compra sobre o IDI, uma vez que seus preços teóricos apresentaram erros sistemáticos (subavaliação) quando comparados aos prêmios de mercado. Tal fato também é constatado por Barbachan e Ornelas (2003) ao compararem os preços teóricos com os preços de mercado de sua pequena base de dados. Além disso, nosso resultado vai de encontro ao que foi verificado por Chan et al. (1992), onde ao testar o modelo de taxa de juros CIR, observa que o mesmo não é capaz de explicar mudanças na taxa de juros de curto prazo. Tal fato põe em cheque a precisão dos modelos de avaliação de opções sobre taxa de juros dele derivados.

Para os testes com o modelo de Black (1976), também se verificou erros sistemáticos de apreçamento, neste caso com superapreçamento dos prêmios das opções. No entanto, quando a amostra de contratos foi separada de acordo com o grau de *moneyness*, verificou-se que no caso das opções *out-of-money* e *in-the-money*, o modelo performou muito bem, uma

vez que os preços teóricos apresentaram erros muito pequenos quando comparados aos preços de mercado.

Se comparados os resultados dos dois modelos, conclui-se que a adaptação do modelo de Black é de longe mais sensível e mais precisa na avaliação de opções de compra sobre o IDI, em comparação ao modelo de precificação CIR.

8. REFERÊNCIAS

- AÏT-SAHALIA, Y.; KIMMEL, R. *Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models*. **Journal of Financial Economics**, 83, p. 413-452, 2007.
- BANK OF INTERNATIONAL SETTLEMENTS. *Statistical Release: OTC derivatives statistics at end-december 2014*. Monetary and Economic Department. Suíça: **BIS**, 2014. Disponível em: www.bis.org/publ/otc_hy1311.pdf. Acesso em: 04 de maio de 2015.
- BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. Apreçamento de opções de IDI usando o modelo CIR. **Estatística Econômica**, v.33, n.2, p. 287-323, 2003.
- BARBEDO, C. H. S.; VICENTE, J. V. M.; LION, O. M. B., 2009. *Pricing Asian interest rate options with a three-factor HJM model*. Working Paper. **Banco Central do Brasil**, 2009.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. *Analyzing convertible bonds*. **Journal of Finance and Quantitative Analysis**, 15, p. 907-929, 1980.
- BLACK, F.; DERMAN, E.; TOY, W. *A one factor model of interest rates and its application to Treasury Bonds Option*. **Financial Analysts Journal** 46, p. 33-39, 1990.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. *The Pricing of options and corporate liabilities*. **Journal of Political Economy** 81, p. 637-659, 1973.
- BLACK, F. *The pricing of commodity contracts*. **Journal of Financial Economics**, v 3, p. 167-179, 1976.
- BLACK, F.; KARASINKI, P. *Bond and Option pricing when Short rates are Lognormal*. **Financial Analysts Journal**, vol. 47, n° 4, p. 52-59, 1991
- BRIGO, D.; MERCURIO, F. *Interest rate models: theory and practice*. **Editora Springer**, 2012.
- CALDEIRA, J. F. Estimação da estrutura da curva de juros no Brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. **Análise Econômica**, v.55, p. 95-122, 2011.
- CHAN, K. C.; KAROLYI, G. A.; LONGSTAFF, F. A.; SANDERS, A. B. *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*. **Journal of Finance**, 47, p. 1209-1227, 1992.
- COX, J.; INGERSOLL, L.; ROSS, S. *A theory of the term structure of interest rates*. **Econometrica**, v. 53, n.2, p. 385-407, 1985.
- DURHAM, G. B., and GALLANT, A. R. *Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous-time diffusion processes*. **Journal of Business and Economic Statistics**, 20, p. 325-327, 2002.

- EID JUNIOR, W. Avaliação de opções: o caso brasileiro. Utilização de modelos ARCH na estimação dos parâmetros. Tese de doutoramento. **Fundação Getúlio Vargas**, 1995.
- FRANKLIN JR., Sergio L.; DUARTE, Thiago B.; NEVES, César R. and MELO, Eduardo F. L.. A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação e testes. **Econ. Apl. [online]**. 2012, vol.16, n.2, pp. 255-290.
- FENG, X.; XIE, D. *Bayesian Estimation of CIR Model*. **Journal of Data Science**, n. 10, p. 271-280, 2012.
- FILIPOVIC, D. *Term-structure models: a graduate course*. **Springer Finance**, 2009.
- GLUCKSTERN, M. C.; FRANCISCO, G.; JR, W. E. Aplicação do modelo Hull-White à precificação de opções de IDI. In: **Anais do II Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças**. Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- HEATH, D.; JARROW R.; MORTON, A. *Bond pricing and term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation*. **Econométrica**, v. 60, n. 1, p. 77-105, 1992.
- HO, T. S. Y.; LEE, S. B. *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*. **Journal of Finance**, v 41, p. 1011-1029, 1986.
- HULL, J; WHITE, A. *Pricing interest rate derivative securities*. **Review of Financial Studies**, v. 3, n. 4, p. 573-592, 1990.
- HULL, J.; *Options, Futures, and Other Derivatives*, v. 9. **Pearson**, 2014.
- JAMSHIDIAN, F. *An exact bond option formula*. **Journal of Finance**, v.44, p. 205-209, 1989.
- JOHNSTON, J.; DINARDO, J. *Econometric Methods*. v. 4. **McGraw Hill Higher Education**, 1997.
- LAURINI, M. P.; MAUAD, R. B. *Non-Parametric Pricing of Interest Rate Options*. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 32, p. 1-41, 2012.
- MARTIN, V; HURN, S.; HARRIS, D. *Econometric Modeling with Time Series: Specification, Estimation and Testing*, v. 1. **Cambridge University Press**, 2012.
- MERTON, R. *The theory of rational option pricing*. **Bell Journal of Economics and Management Science**, vol.4, p. 141-183.
- NOJIMA, N. K.; PINTO, A. C. Precificação de derivativos de taxas de juros utilizando o modelo HJM multifatorial com estrutura de volatilidade não-paramétrica. In: **XLI Encontro Nacional de Economia**, 2014, Niterói.
- NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. *Parsimonious modeling of yield curves*. **The Journal of Business**, v. 60, n. 4, p. 473-489, 1987.

PEARSON, N.; T., SUN. *Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure : An Application to the CIR Model*. **Journal of Finance**, 46, 1279-1304, 1994.

SMITH JR, C. W. *Option pricing: a review*. **Journal of Financial Economics**, v.3, p. 3-51, 1975.

SVENSSON, L. E. O. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. IMF Working Papers n. 94/114. **International Monetary Fund**, 1994.

VASICEK, O. *An equilibrium characterization of the term structure*. **Journal of Financial Economics**, v.5, p.177-188, 1977.

VIEIRA, C. A.; PEREIRA, P. L. V. *Closed form formula for the price of the options on the 1 day Brazilian Interfinancial Deposits Index – IDI*. **Anais do XXII Congresso Brasileiro de Econometria**, 2000.