

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

**O PROBLEMA DE DIRICHLET  
PARA A EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS  
EM DOMÍNIOS NÃO LIMITADOS DO PLANO**

POR  
**LEANDRO SEBEN BELLINCANTA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

**Orientador  
Prof. Jaime Ripoll**

Porto Alegre, Novembro de 1994.

*R-16983*

UFRGS  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

*2590897  
ex 2  
clm em 1/10/94*

## AGRADECIMENTOS

Quero registrar meus agradecimentos ao Departamento de Matemática da Universidade do Rio Grande, pela compreensão e pelo auxílio que a mim dispensaram durante o período de conclusão deste trabalho.

Quero sinceramente agradecer ao Prof. Jaime Ripoll, pela orientação nesta dissertação e pelo sólido apoio prestado durante meus estudos na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Gostaria também de agradecer ao Prof. Eduardo Brietzke pelo exemplo de competência profissional e pelo auxílio na confecção desta dissertação.

Finalmente agradeço aos meus amigos e familiares, em particular a Alice, pelo carinho e pelo incentivo que nunca se fizeram ausentes.

16983

DISSERTACAO/MAT.  
B444P  
1994  
E.2

2

MAT  
1995/259083-1  
1998/09/02  
7401

## RESUMO

Esta dissertação trata do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não limitados do plano. Estabelecemos um teorema, devido a Collin-Krust, que fornece uma estimativa para a diferença de duas soluções distintas em uma vizinhança do infinito. Estudamos também a questão da existência e da unicidade de soluções em conjuntos convexos não limitados do plano. Entre tais conjuntos estão a faixa e o semi-plano. No apêndice apresentamos um exemplo de uma situação onde o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas não possui solução.

## ABSTRACT

This work deals with the Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-limited domains of the plane. A theorem based on Collin-Krust was stated. It provides an estimate for the difference between two distinct solutions in an infinite neighborhood. The solution unicity and existence in non-limited convex domains of the plane is also studied. Among these domains are the band and the half-plane. In the appendix an example where the Dirichlet problem for the minimal surface equation does not have a solution is presented.

# Índice

1	Introdução	5
2	Preliminares	7
2.1	Resultados Básicos . . . . .	8
3	Unicidade do problema de Dirichlet para domínios não limitados do plano	11
4	Existência e unicidade para o problema de Dirichlet em domínios convexos do plano	19
A	A não-solubilidade do Problema de Dirichlet	29

# Capítulo 1

## Introdução

Dados um domínio planar  $\Omega$  e uma função  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas consiste em determinar a existência e a unicidade das soluções do seguinte problema de valor de contorno:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u/\partial\Omega \equiv f. \quad (1.1)$$

Quando  $\Omega$  coincide com o plano  $x$  o  $y$ , S. Bernstein, em 1916, provou que a solução  $u = u(x, y)$  deve ser linear afim, ou seja, o gráfico da função  $u$  é um plano. No caso em que  $\Omega$  é limitado e convexo e  $f$  é contínua, Tibor Radó, em uma publicação que se tornou clássica, assegura a existência e a unicidade para o problema (1.1)[R1]. Johannes Nitsche generalizou este resultado para quando  $f$  é descontínua em um conjunto de medida linear nula (tomada com respeito ao comprimento de arco de  $\partial\Omega$ ), necessitando supor, entretanto, que a função  $f$  fosse limitada [Ni]. H. Jenkins e J. Serrin trataram o problema (1.1) quando  $f$  assume valores infinitos em alguma parte de  $\partial\Omega$ , como acontece, por exemplo, na solução encontrada em 1834 por H. F. Sherk, dada pela função

$$\log \cos x - \log \cos y \quad |x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2}.$$

Esta dissertação trata do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não limitados do plano. Vamos estabelecer um teorema, devido a Collin-Krust [CK], que nos fornece uma estimativa para a diferença entre duas soluções distintas

em uma vizinhança do infinito e que nos permitirá deduzir um teorema de unicidade e um princípio do máximo no infinito para a equação das superfícies mínimas. Faremos um estudo mais específico do problema (1.1) para alguns domínios especiais, como o setor, a faixa, o semi-plano e certos conjuntos convexos e não limitados do plano, discutidos nos trabalhos [ER], [CK] de Ricardo Sá Earp & Rosemberg e Collin & Krust. Para domínios mais gerais, o problema de Dirichlet para a equação das mínimas ainda permanece essencialmente em aberto. Recentemente em [RT] são obtidos teoremas de existência para alguns domínios não convexos e não compactos do plano.

No capítulo 2, vamos apresentar alguns resultados preliminares que são basicamente resultados de existência e unicidade de soluções para domínios limitados do plano. Também serão enunciados um princípio do máximo generalizado e um teorema de compacidade.

No capítulo 4, provaremos o seguinte princípio do máximo para domínios contidos em uma faixa ou em um setor: *Se os dados de contorno são limitados por uma constante  $A$ , então qualquer solução do problema de Dirichlet é também limitada por  $A$ .* Usaremos este resultado, bem como o teorema de Collin-Krust (capítulo 3), para obter alguns resultados quanto à unicidade das soluções. Ainda no capítulo 4, provaremos a existência de soluções em vários domínios do plano, adaptando os resultados obtidos em [ER] para uma classe um pouco mais geral de domínios planares, a saber, domínios convexos (não necessariamente estritamente convexos), cuja fronteira é suave por partes. Além disso, os dados na fronteira podem ser contínuos por partes.

Quando o domínio  $\Omega$  não é convexo, nem sempre o problema (1.1) possui solução. Podemos dizer até mais: *Se  $\Omega$  é limitado e não convexo, sempre existem dados contínuos  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  tais que o problema (1.1) não possui solução* [Ni, pág. 203]. Uma breve discussão deste fato poderá ser encontrada no apêndice.

# Capítulo 2

## Preliminares

Até 1930, todos os autores que trataram do problema de Dirichlet para equação das superfícies mínimas precisaram supor, no mínimo, que a curva  $\Gamma$ , descrita pela função contínua  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , satisfizesse uma hipótese adicional chamada de *hipótese dos três pontos*. A hipótese dos três pontos pode ser enunciada como segue:

Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan contida em  $\mathfrak{R}^3$  definida pela equação  $z = f(s)$ , com  $s \in \partial\Omega$ . Sejam  $P_1, P_2, P_3$  três pontos distintos em  $\Gamma$ ; denotamos por  $\theta$  o ângulo agudo positivo entre o plano  $x \circ y$  e o plano passando por  $P_1, P_2, P_3$ . Se o número  $\tan \theta$  é menor ou igual a alguma constante finita  $\Delta$ , então dizemos que a função  $f(s)$  satisfaz a hipótese dos três pontos com a constante  $\Delta$ .

A hipótese dos três pontos implica que não existem três pontos distintos  $P_1, P_2, P_3$  em um mesmo plano vertical (em relação ao plano  $x \circ y$ ), conseqüentemente, implica que  $\partial\Omega$ , onde são dados os valores de contorno, é uma curva estritamente convexa e ainda impõe restrições à função  $f(s)$  definida em  $\partial\Omega$ .

Foi Tibor Radó [R1] que removeu a hipótese dos três pontos e provou a existência e a unicidade para o problema (1.1), supondo apenas que  $\Omega$  fosse um conjunto limitado e convexo e que os dados na fronteira de  $\Omega$  fossem contínuos e limitados. A técnica utilizada é de natureza paramétrica para tratar este problema na forma não-paramétrica. Tal teorema foi enunciado sem demonstração por S. Bernstein em 1912. A hipótese que  $\Omega$  seja convexo é essencial para assegurar a existência de solução para dados contínuos e arbitrários na fronteira. O fato de o problema de Dirichlet não ser bem posto para

domínios limitados e não convexos será discutido no apêndice.

## 2.1 Resultados Básicos

Nesta dissertação usaremos um resultado de existência para dados que possuem descontinuidades [Ni], o qual está enunciado logo abaixo.

**TEOREMA 2.1:** *Seja  $\Omega$  um domínio convexo e limitado do plano. Supondo  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e limitada, exceto em um conjunto compacto contido em  $\partial\Omega$  com medida linear de Lebesgue nula (tomada com respeito ao comprimento de arco de  $\partial\Omega$ ), então existe solução para o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas.*

Em particular, tem-se que: se a função  $f$  é limitada e contínua por partes, segue a existência de solução para a equação (1.1) com  $f$  como dado de contorno.

Dois outros resultados que usaremos estão enunciados a seguir. São eles: o *Princípio de compacidade*, o qual é uma ferramenta essencial para as demonstrações de existência de soluções, e o *princípio geral do máximo*, que é indispensável nas discussões sobre unicidade.

**TEOREMA 2.2 (Princípio de compacidade):** *Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência uniformemente limitada de soluções da equação das superfícies mínimas em um domínio  $\Omega$ . Então existe uma subseqüência que converge a uma solução em  $\Omega$  e a convergência deve ser uniforme em qualquer subconjunto compacto de  $\Omega$ .*

Denotaremos por  $M(\Omega)$  o conjunto de todas as soluções da equação das superfícies mínimas sobre o domínio  $\Omega$ .

**TEOREMA 2.3 (Princípio geral do máximo):** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do plano e  $C \subset \partial\Omega$  o complemento de um conjunto finito de pontos. Suponhamos que  $u, v \in M(\Omega)$  satisfaçam  $\liminf(u - v) \geq 0$  quando nos aproximamos de qualquer ponto de  $C$ . Então  $u \geq v$  em  $\Omega$ .*

Vários exemplos nos mostram que as soluções da equação (1.1) comportam-se muito diferentemente das soluções das equações diferenciais elípticas lineares. Por exemplo, em



uma equação elítica linear é impossível a solução assumir valores infinitos na fronteira de um domínio limitado, enquanto que na equação das mínimas este fenômeno pode ocorrer, como mostra a superfície de Sherk onde são assumidos valores  $+\infty$  e  $-\infty$  em lados alternados da fronteira do domínio. Além disso, podemos encontrar funções harmônicas sobre uma faixa que assumem valores infinitos apesar de se anularem na fronteira, fenômeno este que não pode ocorrer na equação das superfícies mínimas, conforme TEOREMA 4.2. A razão para estas diferenças reside na forte não-linearidade da equação das superfícies mínimas. Nos últimos anos, a equação das mínimas tem tomado um lugar de destaque entre as equações não lineares elíticas, tanto que investigações específicas têm sugerido ser ela um protótipo de uma classe diferente de equações diferenciais (Equações do tipo Mínimo) para a qual novos e diferentes problemas têm sido considerados. Ver, por exemplo, R.Finn [F].

No início da década de 70, H.Jenkins e J.Serrin direcionaram suas atenções na tentativa de generalizar a situação onde valores infinitos são assumidos em alguns arcos da fronteira do domínio. Em [JS] eles desenvolveram uma teoria de existência e unicidade aplicável a situações onde dados contínuos são assumidos na fronteira, bem como valores infinitos em alguns arcos da fronteira. Em particular, eles demonstraram o seguinte teorema, o qual é fundamental em nossas demonstrações de existência de soluções para domínios não-limitados.

**TEOREMA 2.4 (Jenkins-Serrin):** *Seja  $\Omega$  um domínio plano limitado, cuja fronteira é formada por dois conjuntos de segmentos abertos de reta  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e  $B_1, B_2, \dots, B_l$ , com a propriedade de nunca dois segmentos  $A_i$  (nem dois  $B_j$ ) possuírem um ponto extremo em comum formando um ângulo convexo. O restante da fronteira de  $\Omega$  é formado pelos pontos extremos dos segmentos  $A_i$  e  $B_j$  e arcos convexos  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . Sobre o interior dos arcos  $C_k$  associamos dados contínuos, no interior de cada segmento  $A_i$  associamos  $+\infty$  e no interior de cada segmento  $B_j$  associamos  $-\infty$ . Chamaremos de  $f$  estes dados no contorno.*

*Seja  $\varphi$  um domínio poligonal conexo cujos vértices são escolhidos entre os pontos*

extremos das famílias  $\{A_i\}$ ,  $\{B_j\}$ ,  $\{C_k\}$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  denotando, respectivamente, o comprimento total dos segmentos  $A_i$  e o comprimento total dos segmentos  $B_j$  que estão sobre o contorno de  $\varphi$ , e seja  $\gamma$  o perímetro de  $\varphi$ .

Se a família  $\{C_k\}$  é não-vazia, então  $f$  se estende para uma  $u \in M(\Omega)$  se e somente se

$$2\alpha < \gamma \quad \text{e} \quad 2\beta < \gamma \tag{2.1}$$

para todos polígonos  $\varphi$ . A solução é única se existir.

Se a família  $\{C_k\}$  é vazia, então a solução existe se e somente se  $\alpha = \beta$ . Se existir, a solução é única a menos de uma constante aditiva [JS].

Alguns casos especiais deste teorema são de particular interesse para esta dissertação. Por exemplo, se a fronteira do domínio  $\Omega$  contém apenas um segmento  $A_i$  ou apenas um segmento  $B_j$ , então o problema de Dirichlet é sempre solúvel.

## Capítulo 3

# Unicidade do problema de Dirichlet para domínios não limitados do plano

Neste capítulo vamos demonstrar um teorema que nos fornece uma estimativa para a diferença entre duas soluções da equação (1.1) em uma vizinhança do infinito e nos permite deduzir um teorema geral de unicidade das soluções e um princípio do máximo no infinito. Embora estejamos interessados apenas na equação das mínimas, este teorema se aplica a uma classe mais geral de equações que são as equações das superfícies com curvatura média prescrita. Nesta dissertação, vamos enunciar e demonstrar o caso mais geral deste teorema.

Sejam  $u$  e  $u'$  duas funções de classe  $C^2$  sobre  $\Omega$ , contínuas por partes sobre  $\partial\Omega$  e tais que:

$$u = u' \text{ em } \partial\Omega - E, \quad H_u = H_{u'} \text{ em } \Omega,$$

onde  $E$  é um conjunto discreto de pontos de  $\partial\Omega$  e  $H_u$  a curvatura média do gráfico  $G$  de  $u$  no ponto  $(x, y, u(x, y))$  ( $H_{u'}$  é definido de maneira análoga).

Denotamos  $H$  a função  $H_u = H_{u'}$ , segue que  $u$  e  $u'$  são soluções da equação

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 2Hw^3, \tag{3.1}$$

onde

$$w = (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Sejam  $\omega$  e  $\omega'$  as formas diferenciais:

$$\omega = \frac{p}{w} dy - \frac{q}{w} dx, \quad \omega' = \frac{p'}{w'} dy - \frac{q'}{w'} dx.$$

Temos que

$$d\omega = d\omega' = 2H \, dx \wedge dy,$$

pois

$$d\omega = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) \right] dx \wedge dy = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx \wedge dy = 2H \, dx \wedge dy$$

Logo, a forma  $\omega' - \omega$  é fechada e então existe uma função  $\tilde{\Psi}$  tal que  $d\tilde{\Psi} = \omega' - \omega$  ( $\tilde{\Psi}$  pode ser multivalorada, se  $\Omega$  não for simplesmente conexo).

Vamos denotar por  $n = \left( \frac{-p}{w}, \frac{-q}{w}, \frac{1}{w} \right)$  o normal à  $G$  e  $\tilde{u} = u' - u$  ( $n'$  é definido de maneira análoga a  $n$ ).

LEMA 3.1: *Seja  $D$  um domínio limitado tal que  $\bar{D} \subset \Omega$ .*

*Então:*

$$\int_{\partial D} \tilde{u} \, d\tilde{\Psi} \geq \iint_D |\nabla \tilde{\Psi}|^2$$

Demonstração do lema 3.1: Pelo teorema de Stokes temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \tilde{u} \, d\tilde{\Psi} &= \iint_D (p' - p) \, dx \wedge d\tilde{\Psi} + (q' - q) \, dy \wedge d\tilde{\Psi} = \\ &= \iint_D (p' - p) \left( \frac{p'}{w'} - \frac{p}{w} \right) dx \wedge dy + (q - q') \left( \frac{q}{w} - \frac{q'}{w'} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Agora, o integrando acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(wn - w'n').(n - n') &= (w + w')(1 - n.n') = \\ &= \frac{1}{2}(w + w')(n - n')^2 ,\end{aligned}$$

porém  $\frac{1}{2}(w+w') \geq 1$  e

$$(n - n')^2 = \left(\frac{p}{w} - \frac{p'}{w'}\right)^2 + \left(\frac{q}{w} - \frac{q'}{w'}\right)^2 + \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w'}\right)^2 \geq |\nabla\tilde{\Psi}|^2 ,$$

como queríamos mostrar.

LEMA 3.2: *Seja  $C \subset \Omega$  uma curva de nível de  $\tilde{u}$  e  $C'$  um arco de  $C$  sobre o qual  $\nabla\tilde{u}$  não se anula. Então  $\tilde{\Psi}$  é estritamente crescente ao longo de  $C'$  orientada pelo vetor diretamente ortogonal a  $\nabla\tilde{u}$ .*

Demonstração: Seja  $v(P) = (\nabla\tilde{u})^\perp$  o vetor diretamente ortogonal a  $\nabla\tilde{u}$  em um ponto  $P \in C' \subset \Omega$ . Temos que

$$\begin{aligned}d\tilde{\Psi} \cdot v(P) &= \left(\frac{q}{w} - \frac{q'}{w'}\right) dx \cdot (-(q' - q), (p' - p)) + \left(\frac{p'}{w'} - \frac{p}{w}\right) dy \cdot (-(q' - q), (p' - p)) = \\ &= (q' - q) \left(\frac{q'}{w'} - \frac{q}{w}\right) + (p' - p) \left(\frac{p'}{w'} - \frac{p}{w}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(w + w')(n - n')^2 > 0 ,\end{aligned}$$

pois  $P$  é ponto regular de  $C$ .

*c.q.d.*

Agora já estamos em condições de enunciar e demonstrar o

TEOREMA 3.1 (Collin-Krust): *Seja  $\Omega$  um domínio não limitado do plano  $\mathbb{R}^2$ , sejam  $u$  e  $u'$  duas funções distintas de classe  $C^2$ , tais que  $H_{u'}(x, y) = H_u(x, y)$  em  $\Omega$  e tais que  $u|_{\partial\Omega}$  e  $u'|_{\partial\Omega}$  sejam contínuas por partes e coincidentes em seus pontos de continuidade. Seja*

$$M(r) = \sup_{C_r} |u' - u| , \text{ onde } C_r = \Omega \cap \{X \in \mathbb{R}^2 ; |X| = r\} .$$

Então

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{M(r)}{\log r} \right) > 0$$

e, se o comprimento de  $C_r$  é uniformemente limitado, então

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{M(r)}{r} \right) > 0 .$$

É suficiente demonstrar o teorema supondo que as soluções  $u$  e  $u'$  satisfazem a condição  $u' > u$  em  $\Omega$  e em um prolongamento de  $\Omega$  a um domínio  $\Omega'$  contendo  $\bar{\Omega}$ . De fato, trocando  $u$  por  $u'$ , se necessário, podemos encontrar um ponto  $P$  tal que  $\tilde{u}(P) = a > 0$ . Consideramos então  $v$  e  $v'$  como sendo as restrições de  $u$  e  $u' - a$  a uma componente conexa de  $\{\tilde{u} > a\}$ . O resultado para  $u$  e  $u'$  decorre imediatamente do resultado sobre  $v$  e  $v'$ , já que o supremo da diferença das soluções só pode aumentar quando considerado com  $u$  e  $u'$ . Esta hipótese nos permitirá usar o LEMA 1 e o LEMA 2 no transcurso da demonstração.

Demonstração do teorema 3.1: Sejam  $\Omega_r = \{X \in \Omega; |X| < r\}$  e  $C_r = \{X \in \Omega; |X| = r\}$ .

Seja  $R_0$  tal que  $\mu = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 > 0$ . (Basta tomar  $\Omega_{R_0} \neq \emptyset$ ).

Para  $R > R_0$ , pelo LEMA 3.1, temos:

$$\mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \leq \int_{\partial\Omega_R} \tilde{u} d\tilde{\Psi} .$$

Como  $\tilde{u} = 0$  em  $\partial\Omega$ , podemos escrever:

$$\int_{\partial\Omega_R} \tilde{u} d\tilde{\Psi} = \int_{C_R} \tilde{u} d\tilde{\Psi} \leq M(R) \int_{C_R} |d\tilde{\Psi}| = M(R)\eta(R) ,$$

onde  $\eta(R) = \int_{C_R} |d\tilde{\Psi}|$ . Daí temos

$$\mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \leq M(R)\eta(R).$$

Pelo lema de Schwartz, para  $r \in [R_0, R]$  :

$$\eta(r) = \int_{C_r} 1 \cdot |d\tilde{\Psi}| \leq \left[ \int_{C_r} 1^2 \cdot \int_{C_r} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ (2\pi r) \int_{C_r} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

assim  $\int_{C_r} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \geq \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}$  e

$$\iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \geq \int_{R_0}^R \frac{\eta(r)^2}{2\pi r} dr. \quad (3.2)$$

Desta forma podemos escrever:

$$\mu + \int_{R_0}^R \frac{\eta(r)^2}{2\pi r} dr \leq M(R)\eta(R).$$

Como  $\tilde{u}$  é a diferença de duas soluções de 3.1,  $\tilde{u}$  verifica o princípio do máximo que, aplicado aos domínios  $\Omega_R$ , mostra que  $M(R)$  é uma função crescente de  $R$ .

Seja  $R_1$  fixo e  $A = M(R_1)$ . Para  $R_0 < R < R_1$  temos:

$$\mu + \int_{R_0}^R \frac{\eta(r)^2}{2\pi r} dr \leq A\eta(R).$$

Consideremos agora a função  $\zeta : J \rightarrow \mathfrak{R}$ , onde  $J = [R_0, R_0 \exp(\frac{4\pi A^2}{\mu})]$  definida por

$$\frac{2A}{\mu} - \frac{1}{\zeta(R)} = \frac{1}{2\pi A} \log \left( \frac{R}{R_0} \right).$$

Esta função verifica a equação diferencial:

$$\zeta'(r) = \frac{\zeta(r)^2}{2\pi Ar} \quad \text{e} \quad \zeta(R_0) = \frac{\mu}{2A}.$$

Assim

$$A\zeta(R) = \frac{1}{2}\mu + \int_{R_0}^R \frac{\zeta(r)^2}{2\pi r} dr$$

e o conjunto  $X = \{R \geq R_0 ; \forall R', R_0 \leq R' \leq R, \zeta(R') < \eta(R')\}$  é um aberto de  $[R_0, R_1] \cap J$ , pois é definido por uma condição aberta e  $R_0 \in [R_0, R_1] \cap J$ . Observamos que este con-

junto é também fechado.

De fato, dada uma seqüência convergente de pontos  $\{R_n\}_n$  com  $R_n \in X \forall n$ , tal que  $R_n \rightarrow L$ , é fácil concluir que  $L \in X$  pois, da definição de  $\eta$  e  $\zeta$ , temos:

$$A(\eta(R_n) - \zeta(R_n)) \geq \frac{\mu}{2} + \int_{R_0}^{R_n} \frac{\eta(r)^2 - \zeta(r)^2}{2\pi r} dr \quad \forall n,$$

logo

$$A(\eta(L) - \zeta(L)) \geq \frac{\mu}{2} + \int_{R_0}^L \frac{\eta(r)^2 - \zeta(r)^2}{2\pi r} dr,$$

mostrando que  $\eta(L) > \zeta(L)$ , ou seja,  $L \in X$ . Portanto, o conjunto  $X$  é igual a  $[R_0, R_1] \cap J$ . Porém, temos que  $\zeta \rightarrow +\infty$  ao  $r \rightarrow R_0 \exp(\frac{4\pi A^2}{\mu})$ . Assim, não podemos ter  $\eta > \zeta$ . Logo

$$R_1 < R_0 e^{\frac{4\pi A^2}{\mu}}$$

e isolando  $A$  na expressão acima obtemos uma primeira minoração de  $M(R)$ :

$$A = M(R_1) \geq \left( \frac{\mu}{4\pi} \log \frac{R_1}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

onde  $\mu = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2$ .

Podemos agora, com o auxílio do LEMA 3.2 e com uma escolha conveniente de  $R_0$  e  $R_1$ , melhorar este resultado estimando  $\mu = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2$ .

Seja  $\Lambda$  um arco conexo e limitado de  $\partial\Omega$  que não é um ponto. Então existe  $r_0 > 0$  tal que  $\Lambda \subset \Omega_{r_0}$ . Assim para  $r > r_0$  temos:

$$\eta(r) = \int_{C_r} |d\tilde{\Psi}| \geq \left| \int_{C_r} d\tilde{\Psi} \right| = \left| \int_{\partial\Omega_r} d\tilde{\Psi} - \int_{\partial\Omega_r - C_r} d\tilde{\Psi} \right|$$

e pelo teorema de Stokes,  $\int_{\partial\Omega_r} d\tilde{\Psi} = 0$ . Ainda  $\partial\Omega_r - C_r \subset \partial\Omega$  é uma curva de nível de  $\tilde{u}$ . Como supomos  $u' > u$ , decorre que  $\nabla \tilde{u}$  aponta para o interior de  $\Omega$  (a não ser, talvez, em pontos isolados onde  $\nabla \tilde{u} = 0$ ). Assim, a orientação de  $\partial\Omega$  pelo vetor diretamente



ortogonal a  $\nabla \tilde{u}$  é a inversa da orientação induzida por  $\mathfrak{R}^2$ . Deduzimos, então, pelo LEMA 2, que  $\int d\tilde{\Psi} < 0$  sobre qualquer arco  $\Lambda$  de  $\partial\Omega$ , o que implica  $|\int_{\partial\Omega_r - C_r} d\tilde{\Psi}| > |\int_{\Lambda} d\tilde{\Psi}|$  e denotado a constante  $c = |\int_{\Lambda} d\tilde{\Psi}|$ , obtemos:

$$\eta(r) \geq c > 0 \quad \forall r \geq r_0.$$

Então,

$$\mu(R_0) = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \geq \int_{r_0}^{R_0} \frac{\eta(r)^2}{2\pi r} dr \geq \frac{c^2}{2\pi} \log \left( \frac{R_0}{r_0} \right).$$

Substituindo agora em (3.3) e tomando  $R_1 = \frac{R_0^2}{r_0}$ , obtemos:

$$M(R_1) \geq \left( \frac{c^2}{8\pi^2} \log \frac{\sqrt{R_1 r_0}}{r_0} \log \frac{R_1}{\sqrt{R_1 r_0}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{4\pi\sqrt{2}} \log \frac{R_1}{r_0}$$

de onde segue o resultado.

Porém, supondo que exista  $b \in \mathfrak{R}$  tal que  $C_r < b \quad \forall r$ , temos

$$\eta(r) = \int_{C_r} |d\tilde{\Psi}| \leq 2\ell(C_r) \leq 2b,$$

já que  $\tilde{\Psi}$  é lipschitziana de grau 2 e  $\ell(C_r)$  é o comprimento do arco  $C_r$ .

Assim

$$\mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{r_0}} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \leq 2bM(R).$$

Pelo lema de Schwartz, para todo  $r > r_0$

$$c^2 < \eta(r)^2 \leq \ell(C_r) \int_{C_r} |\nabla \tilde{\Psi}|^2,$$

donde  $\int_{C_r} |\nabla \tilde{\Psi}|^2 \geq \frac{c^2}{b}$ . Assim

$$M(R) \geq \frac{\mu}{2b} + \int_{r_0}^R \frac{c^2}{2b^2} dr \geq \frac{\mu}{2b} + (R - r_0) \frac{c^2}{2b^2}. \quad \text{c.q.d}$$

OBSERVAÇÃO: Esta estimativa é a melhor possível, conforme nos mostra o seguinte exemplo:

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2; |X| > 1\},$$

$$u(X) = \cosh^{-1}(|X|) \quad (\text{catenóide}) \quad \text{e} \quad u'(X) = 0.$$

**COROLÁRIO 3.1:** *Seja  $\Omega$  um domínio não limitado do plano. Seja  $f$  uma função contínua por partes e  $H$  uma função definida sobre  $\Omega$ . Então o problema de Dirichlet para a equação (3.1) admite no máximo uma solução limitada de classe  $C^2$ .*

*A prova do corolário 3.1 é uma consequência imediata do teorema 1.*

**COROLÁRIO 3.2:** *Seja  $\Omega$  um domínio não limitado do plano e  $u, v$  duas soluções de (3.1) sobre  $\Omega$ , tais que  $\limsup(u - v) \leq 0$ , para toda seqüência de pontos tendendo para  $\partial\Omega - E$ , onde  $E$  é um conjunto discreto de pontos de  $\partial\Omega$ . Seja*

$$N(R) = \sup_{C_R}(u - v).$$

Se

$$\frac{N(R)}{\log(R)} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad R \rightarrow \infty,$$

então  $u \leq v$  sobre  $\Omega$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Raciocinando por absurdo: Seja  $P \in \Omega$ , tal que  $u(P) > v(P) + 2a$  com  $a > 0$ . Seja  $\Omega'$  a componente conexa do conjunto  $\{Q \in \mathbb{R}^2; u(Q) > v(Q) + a\}$  que contém  $P$ . Temos que  $\partial\Omega' \subset \Omega$  e  $u = v + a$  sobre  $\partial\Omega'$ . Além disso,  $\Omega'$  não é limitada pois, caso contrário, pelo princípio do máximo,  $u \equiv v + a$  em  $\Omega'$ , o que contradiz  $u(P) > v(P) + 2a$ . Logo,  $\Omega'$  é não-limitado e podemos aplicar o Teorema 3.1 com as funções  $u/\Omega'$  e  $u' = v + a/\Omega'$ .

Por construção temos que  $M(R) \leq N(R) - a$  (A igualdade ocorre quando  $\{Q \in \mathbb{R}^2; u(Q) > v(Q) + a\}$  é conexo.)

Portanto,  $u = u' = v + a$  sobre  $\Omega'$  que nos leva a nova contradição, demonstrando assim o corolário.

## Capítulo 4

# Existência e unicidade para o problema de Dirichlet em domínios convexos do plano

Neste capítulo vamos resolver o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas (1.1) em alguns casos particulares de domínios não limitados do plano. Denotaremos por  $C_p(\partial\Omega)$  o conjunto de todas as funções reais, contínuas por partes, definidas em  $\partial\Omega$ .

**TEOREMA 4.1:** *Seja  $\Omega$  uma faixa ou um domínio convexo, distinto do semi-plano, e  $g \in C_p(\partial\Omega)$ . Suponhamos que  $g$  admite uma única extensão  $G \in M(\Omega)$ . Seja  $F \in M(\Omega)$ ,  $f = F/\partial\Omega$ . Se  $f \leq g$  em  $\partial\Omega$ , então  $F \leq G$  em  $\Omega$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Construimos uma exaustão  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$  de  $\Omega$  por domínios nos quais podemos aplicar o TEOREMA 2.4 :  $\overline{\Omega_n}$  é compacto e  $\partial\Omega$  é uma união finita de arcos convexos  $C_i^n$  e segmentos de retas  $A_j^n$ , satisfazendo

$$\sum_j |A_j^n| < \sum_i |C_i^n|.$$

Se  $\Omega$  é uma faixa, então  $\Omega_n$  são retângulos conforme figura 1(a).

Se  $\Omega$  é um domínio convexo limitado por uma curva convexa  $\partial\Omega$ , então  $\Omega_n$  é conforme a

figura 1(b).

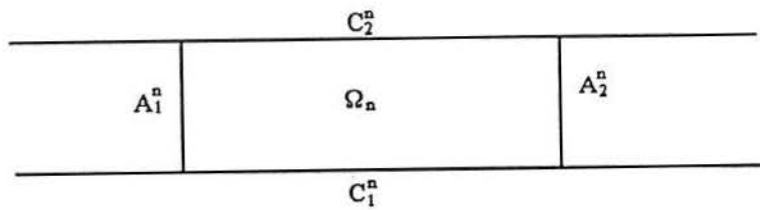


Figura 1.(a)

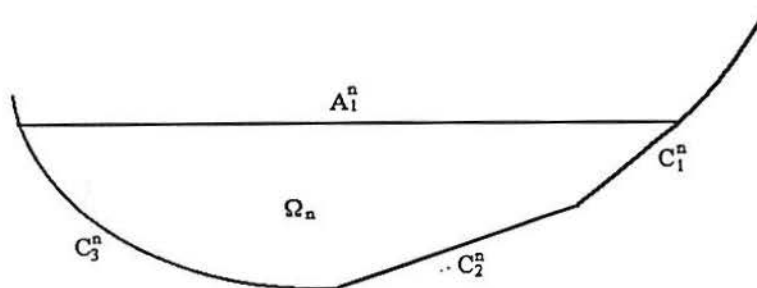


Figura 1.(b)

Aplicamos então o TEOREMA 2.4 a  $\Omega_n$  : Daí podemos afirmar que existe  $v_n \in M(\Omega_n)$ , tal que  $v_n / \partial\Omega_n \cap \partial\Omega = g$  e  $v_n / A_1^n = +\infty$ . Similarmente existe  $w_n \in M(\Omega)$ , tal que  $w_n / \partial\Omega_n \cap \partial\Omega = g$  e  $w_n / A_1^n = -\infty$ .

Usando o princípio do máximo generalizado,  $v_n$  é uma seqüência decrescente e  $w_n$  é uma seqüência crescente.

Se  $K \subset \Omega$  é compacto,  $K \subset \Omega_{n_0}$  para  $n_0$  suficientemente grande, então para  $n \geq n_0$ ,

$$\inf_K w_{n_0} \leq w_n / K \leq v_n / K \leq v_{n_0} / K \leq \sup_K v_{n_0}.$$

Pelo teorema de compacidade,  $v_n$  possui uma subseqüência que converge uniformemente em  $K$  para um elemento de  $M(K)$ . Seja  $\{K_j\}$  uma exaustão de  $\Omega$  por conjuntos compactos com  $K_j \subset \Omega_j$  e  $K_j \subset K_{j+1}$ . Para cada  $j$ , a seqüência  $v_n$  possui uma subseqüência

que converge uniformemente em  $K_j$  a um elemento de  $M(K_j)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \text{em } K_1 & \exists (v_{n_{1k}})_k \rightarrow \hat{v}_1 \in M(K_1), \\ \text{em } K_2 & \exists (v_{n_{2k}})_k \rightarrow \hat{v}_2 \in M(K_2), \\ & \quad \dots \\ \text{em } K_i & \exists (v_{n_{ik}})_k \rightarrow \hat{v}_i \in M(K_i), \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

e a convergência destas subsequências é uniforme em todos os casos. Escolhendo uma subsequência diagonal  $(v_{n_{kk}})_k$ , obtemos uma função  $\hat{v} \in M(\Omega)$  tal que  $v_{n_{kk}}$  converge uniformemente à  $\hat{v}$  em cada  $K_n$ . Como  $w_n \leq \hat{v} \leq v_n$  em  $\Omega_n$ , temos que  $\hat{v} = g$  em  $\partial\Omega$ , e pela hipótese de unicidade,  $\hat{v} = G$ .

Agora, se  $p \in \Omega$ ,  $p \in \Omega_n$  para algum  $n$  suficientemente grande, então, pelo princípio geral do máximo,  $F(p) \leq v_m(p)$  para  $m \geq n$ . Logo

$$F(p) \leq G(p) \quad \text{para todo } p \in \Omega.$$

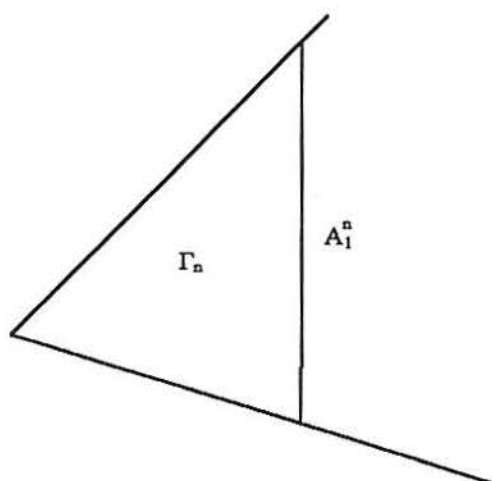
*c.q.d.*

Vamos provar agora um princípio do máximo para quando o domínio  $\Omega$  estiver contido em uma faixa ou em um setor próprio, isto é, um setor com ângulo menor que  $\pi$ .

**TEOREMA 4.2:** *Seja  $\Omega$  um domínio contido em uma faixa ou em um setor próprio  $\Gamma$ . Se  $F \in M(\Omega)$  e  $|F| \leq A$  em  $\partial\Omega$ , então  $|F| \leq A$  em  $\Omega$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Considere domínios  $\Omega$  em um setor  $\Gamma$ . Seja  $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$  uma

exaustão de  $\Gamma$  por domínios triangulares conforme figura.



Podemos aplicar o TEOREMA 2.4 em  $\Gamma_n$ ; então existe uma  $v_n \in M(\Gamma_n)$  tal que  $v_n = +\infty$  em  $A_n$  e  $v_n = A$  em  $(\partial\Gamma_n) \cap \partial\Gamma$ . Usando o mesmo argumento do teorema 4.1 podemos concluir que  $v_n$  converge para uma solução mínima em  $\Gamma$  que é igual a  $A$  em  $\partial\Gamma$ . Em [LLR] está mostrado que a única solução neste caso é uma constante, portanto  $v_n$  converge para  $A$  em  $\Gamma$ .

Se  $p \in \Omega$ , temos que  $p \in \Omega_n$  para algum  $n$  e pelo princípio geral do máximo  $F(p) \leq v_m(p)$  para  $m \geq n$ . Logo  $F(p) \leq A$  conforme queríamos demonstrar.

Se  $\Omega$  está contido em uma faixa  $B$ , tomamos a mesma exaustão  $\Omega_n$  de  $B$  por retângulos como no TEOREMA 4.1 (figura 1.a pág.20). Podemos tomar  $v_n \in M(\Omega_n)$  tal que  $v_n = A$  em  $\partial\Omega_n \cap \partial B$  e  $v_n = +\infty$  em  $\partial\Omega_n - (\partial\Omega_n \cap \partial B)$ .

Temos que  $v_n$  converge a uma solução  $v \in M(B)$ , a qual é igual a  $A$  em  $\partial B$ . Através de sucessivas reflexões em  $\partial B$ , a solução  $v$  estende-se a todo plano, o que implica ela ser uma constante (*Teorema de Bernstein*). Logo  $v \equiv A$  em  $\Omega$ . Assim, se  $p \in \Omega$ ,  $p \in \Omega_n$  para algum  $n$  e, pelo princípio geral do máximo,  $F(p) \leq v_n(p)$ . Logo  $F(p) \leq A$ .  $\square$

**COROLÁRIO:** *Seja  $S$  uma superfície mínima cuja interseção com o plano  $P$  é uma curva  $C$ . Suponhamos que  $C$  é o bordo de um domínio  $\Omega$ ,  $S$  é gráfico sobre  $\Omega$  e  $\Omega$  está contido em uma faixa ou um setor próprio de  $\mathbb{R}^2$ . Então  $S = P$ .*

TEOREMA 4.3: *Seja  $\Gamma$  uma curva plana, suave por partes, convexa, diferente de uma linha reta, separando o plano em dois domínios (cada qual homeomorfo a um semiplano) e seja  $\Omega$  o domínio convexo determinado por  $\Gamma$ . Seja  $f$  uma função contínua por partes definida em  $\partial\Omega$ . Então existe solução para o problema de Dirichlet.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos construir uma extensão mínima de  $f$  à  $\Omega$ . Seja  $A_n$  um segmento de reta ligando dois pontos de  $\partial\Omega$ ,  $A_n \subset \Omega$  e seja  $\Omega_n$  o domínio convexo determinado por  $A_n$  e o arco compacto  $C_n$  de  $\Gamma - \partial A_n$ , conforme figura 1.b pág.20. Escolhemos  $A_n$  de tal forma que  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$  e  $\cup \Omega_n = \Omega$ .

Podemos aplicar o TEOREMA 2.4 a  $\Omega_n$  para obter  $v_n \in M(\Omega_n)$  tal que  $v_n = f$  em  $C_n$ ,  $v_n = +\infty$  em  $A_n$ .

Pelo teorema de compacidade e um argumento diagonal,  $v_n$  converge para uma  $F \in M(\Omega)$ , tal que  $F = f$  em  $\partial\Omega$  (o argumento é o mesmo que o usado no teorema 4.1). Observe que não sabemos se esta extensão é única. (Ver teorema 4.4).

*Se o domínio  $\Omega$  for uma faixa, também podemos construir uma extensão minimal de qualquer função  $f \in C_p(\partial\Omega)$ .*

Basta tomarmos os conjuntos  $\Omega_n$  como sendo os retângulos da figura 1.a pág.20

Assim usando o teorema 2.4, existe  $v_n \in M(\Omega_n)$ , tal que  $v_n = f$  em  $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$  e  $v_n = +\infty$  em  $A_n^?$ . Exatamente como no teorema 4.1  $v_n$  converge para  $F \in M(\Omega)$ , tal que  $F = f$  em  $\partial\Omega$ .

Na verdade, se  $\Omega$  é uma faixa, podemos assegurar a existência de extensões mínimas para funções mais gerais que as funções contínuas por partes definidas em  $\partial\Omega$ , como mostra o exemplo abaixo.

Sejam  $\Omega$  uma faixa,  $\{A_i\}$  e  $\{B_j\}$  famílias de intervalos de  $\partial\Omega$ , dois a dois disjuntos.

Seja  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$\begin{aligned} f &= +\infty && \text{em } A_i \quad \forall i \\ f &= -\infty && \text{em } B_j \quad \forall j \end{aligned}$$

e  $f$  é uma função contínua por partes no complemento, em relação a  $\partial\Omega$ , de  $\{A_i\} \cup \{B_j\}$ .

Se os comprimentos dos segmentos  $A_i$  e  $B_j$  e sua distribuição em  $\partial\Omega$  satisfazem as hipóteses do teorema 2.4, então  $f$  se estende à  $F \in M(B)$ . No caso dos conjuntos  $\{A_i\}$  e  $\{B_j\}$  serem vazios caímos no caso anterior em que  $f$  é contínua por partes em  $\partial\Omega$ . (Quanto à unicidade, ver teorema 4.6).

- **TEOREMA 4.4:** *Seja  $\Omega$  um domínio convexo distinto do semiplano e  $f$  uma função contínua por partes e limitada. Então existe uma única solução para o problema de Dirichlet.*

**DEMONSTRAÇÃO:** Este teorema é uma consequência do teorema 4.3, do teorema 4.2 e do corolário 3.1.  $\square$

O TEOREMA 4.4 resume alguns dos resultados obtidos até aqui. Vejamos agora como fica quando  $\Omega$  é um semiplano.

**TEOREMA 4.5:** *Sejam  $\Omega = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; x > 0\}$  e  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função contínua por partes e limitada. Sejam  $m = \inf_{\partial\Omega} f$  e  $M = \sup_{\partial\Omega} f$ . Então, para todo  $\lambda \in \mathfrak{R}$ , existe um único prolongamento minimal  $u_\lambda$  de  $f$  à  $\Omega$  que verifica:*

$$m + \lambda x \leq u_\lambda \leq M + \lambda x. \quad (4.1)$$

*Todas as soluções são assim descritas. Além disso, se  $\lambda \leq \lambda'$  então  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $\lambda \in \mathfrak{R}$ . Vamos construir  $u_\lambda$  da seguinte maneira. Seja  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , e  $\Omega_n = \Omega \cap \{|X| < n\}$ . Consideraremos a função  $v_n$  definida sobre  $\partial\Omega_n$  por:

- $v_n = f$  em  $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$
- $v_n(X) = m + \lambda x$  em  $\partial\Omega_n \cap \Omega$ , (onde  $X = (x, y)$ ).



Como  $\Omega_n$  é convexo, existe um prolongamento de  $v_n$  a todo  $\Omega_n$  que satisfaz a equação (1.1) a qual denotaremos também por  $v_n$ .

Sobre  $\Omega_n$  temos a seguinte desigualdade:

$$m + \lambda x \leq v_n(X) \leq M + \lambda x ,$$

já que  $z_1(x, y) = m + \lambda x$  e  $z_2 = M + \lambda x$  são soluções de (1.1) no conjunto convexo limitado  $\Omega_n$  e  $z_1 \leq v_n \leq z_2$  em  $\partial\Omega_n$ . Seja  $n' > n$ . Então, em  $\partial\Omega_n$ , temos  $v_n \leq v_{n'} \leq M + \lambda x$  e, pelo princípio do máximo, também sobre  $\Omega_n$ . Pelo princípio de compacidade,  $v_n$  converge uniformemente sobre qualquer compacto contido em  $\Omega$  para uma solução  $u_\lambda$  de (1.1).

Definimos outra função  $V_n$  sobre  $\Omega_n$  que vale  $f$  sobre  $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$  e  $M + \lambda x$  sobre  $\partial\Omega_n \cap \Omega$ . Assim  $v_n \leq u_\lambda \leq V_n$  em  $\Omega_n$ , e então temos  $u_\lambda / \partial\Omega = f$ .

É fácil concluir, usando o TEOREMA 3.1, que duas soluções verificando (4.1) são idênticas.

Seja  $\lambda' > \lambda$ . A função  $u_{\lambda'}$  é o limite de uma seqüência  $v'_n$  que, por construção, verifica  $v'_n \geq v_n$ . Portanto  $u_{\lambda'} \geq u_\lambda$ .

Reciprocamente, seja  $u$  uma solução do problema. Vamos mostrar que existe  $\lambda \in \mathfrak{R}$ , tal que  $u = u_\lambda$ . Sejam  $w_n$  e  $W_n$  duas funções definidas sobre  $\partial\Omega_n$  por:

- $w_n = W_n = 0$  em  $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$
- $w_n = u - m$ ,  $W_n = u - M$  em  $\partial\Omega_n \cap \Omega$ .

Note que  $f - m \geq w_n = W_n \geq f - M$ . Como anteriormente,  $w_n$  e  $W_n$  possuem prolongamentos à  $\Omega_n$  que são soluções de (1.1) verificando, pelo princípio do máximo,

$$u - m \geq w_n \geq W_n \geq u - M. \quad (4.2)$$

Para todo  $n' > n$ , temos então que, sobre  $\partial\Omega_n \cap \Omega$ :

$$w_n = u - m \geq w_{n'} \geq W_{n'} \geq u - M = W_n$$

Podemos deduzir então que  $w_n$  e  $W_n$  convergem a duas soluções  $w$  e  $W$  de (1.1) sobre  $\Omega$ , verificando  $w|_{\partial\Omega} = W|_{\partial\Omega} = 0$ . Como  $0 \leq w_n - W_n \leq M - m$ ,  $w - W$  é limitada e, pelo TEOREMA 3.1,  $w = W$ . Através de uma simetria com relação ao eixo  $Oy$ , podemos construir um prolongamento de  $w$  à  $\mathbb{R}^2$  que, pelo teorema de *Bernstein*, é linear, ou seja,  $w(X) = \lambda x$ . Por (4.2), temos então:

$$m + \lambda x \leq u \leq M + \lambda x.$$

Quando o domínio considerado é uma faixa  $B$ , Collin-Krust em ([CK, pág. 444-451]), mostraram que a única solução do problema (1.1) para dados lineares em  $\partial B$  é um pedaço do plano ou um pedaço do helicóide. Usando este resultado, podemos demonstrar um teorema um pouco mais geral.

TEOREMA 4.6:— *Sejam  $B = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1\}$  e  $g$  uma função contínua por partes, definida sobre  $\partial B$ , tal que existem e são finitos os limites:*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(0, y)}{y} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{g(0, y)}{y} \quad e$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(1, y)}{y} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{g(1, y)}{y} .$$

Então existe uma única função  $G \in M(B)$ , tal que  $g = G|_{\partial B}$  e ainda, se  $F \in M(\bar{B})$ ,  $f = F|_{\partial B}$  com  $f \leq g$  em  $\partial B$ , então  $F \leq G$  em  $B$ .

DEMONSTRAÇÃO: A existência fica assegurada pelo teorema 4.3. Para mostrar a unicidade, vamos supor, por absurdo, que existam duas soluções  $u$  e  $u'$  que satisfaçam as hipóteses do teorema. Neste caso vamos mostrar que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r} = 0$ , onde  $M(r) = \sup_{I_r} |u' - u|$  e  $I_r = \{(x, y); |y| = r\}$ , o que contradiz o teorema 3.1.

Sejam  $B^+$  a semifaixa  $\{y > 0\} \cap B$  e  $v$  uma função definida em  $B^+$  por

$$v(x, y) = y \tan(\alpha(1 - x) + \alpha'x),$$

onde  $\alpha$  e  $\alpha' \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ , tais que

$$\tan \alpha = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(0, y)}{y}, \quad \tan \alpha' = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(1, y)}{y}.$$

O gráfico de  $v$  é uma parte de um helicóide  $H$ . A parte do helicóide  $H_\epsilon$ , obtido por uma rotação de um ângulo  $\epsilon$  ao redor do eixo orientado  $Ox$ , é o gráfico, para  $\epsilon$  pequeno, de uma função  $v_\epsilon$  sobre  $B^+$ . É fácil ver que  $v_\epsilon / \partial B^+$  é linear e, portanto, (conforme observação feita imediatamente antes do enunciado deste teorema)  $v_\epsilon$  é o único prolongamento minimal à  $B^+$  de  $v_\epsilon / \partial B^+$ . Para cada escolha de  $\epsilon > 0$ , existe  $b_\epsilon$ , tal que sobre  $\partial B^+$ :

$$v_{-\epsilon} - b_\epsilon \leq u \leq v_\epsilon + b_\epsilon \quad \text{e} \quad v_{-\epsilon} - b_\epsilon \leq u' \leq v_\epsilon + b_\epsilon.$$

Pelo princípio do máximo (teorema 4.1), estas desigualdades se prolongam à semifaixa  $B^+$ . Assim  $|u - u'| \leq |v_\epsilon - v_{-\epsilon}| + 2b_\epsilon$  e usando que  $v_\epsilon(x, y) = yv_\epsilon(x, 1)$  tem-se que :

$$\frac{|u - u'|}{y} \leq \frac{2b_\epsilon}{y} + \sup_{\{y=1\}} |v_\epsilon - v_{-\epsilon}|$$

Passando o limite quando  $y \rightarrow \infty$  e como a desigualdade vale para qualquer  $\epsilon$ , podemos concluir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \sup_{\{x_2=r\}} \frac{|u - u'|}{r} \right) = 0.$$

Com um raciocínio análogo ao feito acima, agora sobre  $B^- = \{y, 0\} \cap B$ , concluímos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(r)}{r} = 0,$$

o que contradiz o TEOREMA 3.1. Logo existe uma única extensão minimal de  $g$  à  $B$ .

Para mostrar a segunda parte do teorema, basta observar que, se  $F \in M(B)$ ,

$f = F/\partial B$  com  $f \leq g$  em  $\partial B$ , podemos aplicar o teorema 4.1, já que acabamos de demonstrar que existe uma única extensão  $G$  de  $g$  com  $G \in M(B)$ .

Usando a mesma notação do teorema acima, podemos enunciar o seguinte

**COROLÁRIO:** *Se  $g$  é linear, então  $F$  está abaixo do plano ou do helicóide determinado por  $g$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** A demonstração é uma consequência imediata da observação feita antes do enunciado do teorema 4.6 junto com o próprio teorema 4.6.

# Apêndice A

## A não-solubilidade do Problema de Dirichlet

Nesta seção vamos discutir alguns aspectos interessantes do problema de Dirichlet para a equação (1.1) em domínios limitados não convexos do plano. A hipótese de o domínio limitado  $\Omega$  ser convexo é essencial para assegurarmos a existência de soluções para dados contínuos arbitrários na fronteira. No trabalho de Nitsche [Ni] encontramos o seguinte resultado: *Para qualquer domínio limitado não convexo existem dados contínuos em seu contorno para os quais o problema de Dirichlet não possui solução.*

Para ilustrar este fato vamos apresentar um exemplo para o qual a solubilidade do problema de Dirichlet não é possível. Este exemplo foi apresentado por Tibor Radó ([R2],pág.37) como uma aplicação de seu teorema de unicidade, o qual enunciaremos a seguir.

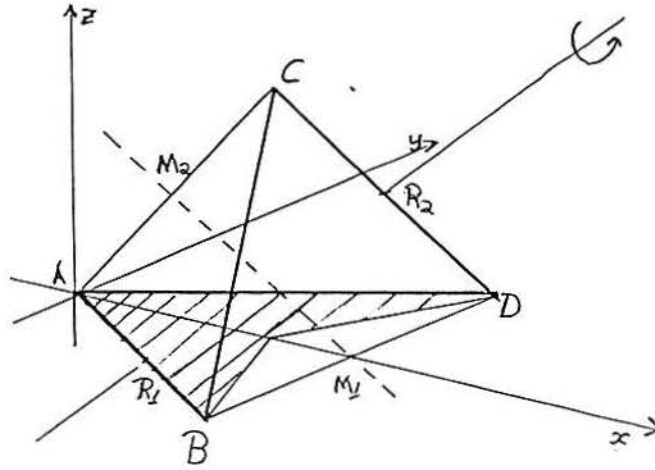
**TEOREMA A:** *Seja  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo, contido no plano  $x$  o  $y$ , tal que  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  seja uma função contínua. Se  $z_1(x, y)$  e  $z_2(x, y)$  são soluções de (1.1), as quais coincidem com  $\varphi$  em  $\partial\Omega$ , então  $z_1(x, y) \equiv z_2(x, y)$  em  $\Omega$ .*

Denotamos por  $\Gamma^*$  a curva de Jordan em  $\mathfrak{R}^3$ , determinada pela equação  $z = \varphi(P), P \in \partial\Omega$ . O teorema A assegura que  $\Gamma^*$  não pode limitar mais que uma superfície mínima que tenha a propriedade de possuir uma projeção ortogonal injetiva sobre o plano  $x$  o  $y$ .

**O CONTRA-EXEMPLO DO TETRAEDRO:**

Considere um tetraedro regular de vértices  $A, B, C, D$  cujo triângulo  $A, B, D$  está

contido no plano  $x$  o  $y$  e o ponto  $A$  é a origem (conforme figura).



Consideramos a curva contínua  $\Gamma^*$  formada pelas arestas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  deste tetraedro e seja  $C'$  a projeção ortogonal do ponto  $C$  sobre o plano  $x$  o  $y$ . Temos que, neste caso,  $\Gamma^*$  é determinada pela função  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , onde  $\Omega$  é o polígono contido no plano  $x$  o  $y$ , cujos vértices são  $ABC'D$  definida por:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv 0 \text{ em } \overline{AB} \cup \overline{AD} , \\ \varphi &\text{ é linear com } \varphi(B) = 0 \text{ e } \varphi(C') = C \text{ em } \overline{BC'} \text{ e} \\ \varphi &\text{ é linear com } \varphi(C') = C \text{ e } \varphi(D) = 0 \text{ em } \overline{C'D} . \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Unicidade, se existir uma função  $z : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  que satisfaça (1.1) e  $z|_{\partial\Omega} \equiv \varphi$ , então ela é única. Suponhamos então que exista tal função  $z$  e seja  $S = \{(x, y, z(x, y)); (x, y) \in \Omega\}$  o gráfico da função  $z$ .

Denominamos  $M_1$  o ponto médio da aresta  $BD$  e  $M_2$  o ponto médio da aresta  $AC$ . Seja  $P$  o ponto de interseção da reta determinada pelos pontos  $M_1$  e  $M_2$  com a superfície

$S$ , isto é:

$$P = S \cap \overline{M_1 M_2}.$$

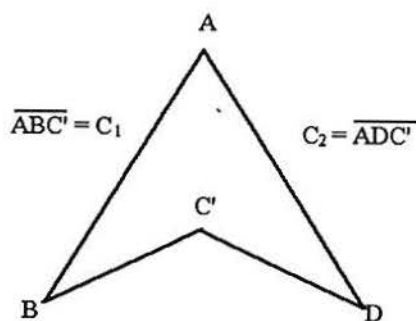
Chamaremos de  $O$  o centro do tetraedro (isto é, o ponto que é equidistante dos vértices  $A, B, C$  e  $D$ ) que é também ponto médio de  $\overline{M_1 M_2}$ .

Queremos mostrar que  $P = (P_x, P_y, P_z)$  coincide com  $O = (O_x, O_y, O_z)$ . Suponhamos então, por absurdo, que a distância de  $P$  ao ponto  $M_2$  é menor que a distância de  $P$  ao ponto  $M_1$ , isto é, o ponto  $P$  está acima de  $O$  ( $O_z < P_z$ ). Agora, já determinada a superfície  $S$ , vamos fazer nela uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $r$  determinado pelos pontos  $R_1$  e  $R_2$ , onde  $R_1$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $R_2$  é o ponto médio de  $\overline{CD}$ . Com esta rotação o vértice  $A$  vai parar no vértice  $B$  e o vértice  $B$  vai parar no vértice  $A$ , o vértice  $C$  vai parar no vértice  $D$  e o vértice  $D$  vai parar no vértice  $C$ . Mas o ponto  $P$  fica agora abaixo do ponto  $O$  ( $P_z < O_z$ ).

Notamos, porém, que a curva  $\Gamma^*$  fica invariante por esta rotação, ou seja, a função  $\varphi$  e o domínio  $\Omega$  permanecem inalterados. Logo, pela unicidade da superfície que  $\Gamma^*$  determina, teríamos também a invariância de  $S$ , o que leva a uma contradição com a suposição feita sobre o ponto  $P$ . A única posição possível do ponto  $P$  é que ele coincida com o ponto  $O$ , ponto médio de  $\overline{M_1 M_2}$ . Ou seja, neste caso, o ponto  $O \in S$ . Mostramos então que existem dois pontos de  $S$ , a saber,  $C$  e  $O$ , que possuem a mesma projeção ortogonal  $C'$  sobre o plano  $xoy$ . Logo, não pode existir uma função  $z(x, y)$  que resolva o Problema de Dirichlet com domínio no quadrilátero não convexo contido no plano  $xoy$  de vértices  $A, B, C'$  e  $D$ .

Na seção dos preliminares, pág.9, enunciamos o TEOREMA 2.4, o qual assegura a existência e unicidade para o problema de Dirichlet em domínios limitados  $\Omega$  do plano, cuja fronteira é formada por segmentos abertos de reta  $\{A_i\}$  e  $\{B_i\}$  e por arcos convexos  $\{C_i\}$ , onde dados contínuos são associados no interior dos  $C_i$ 's, valores  $+\infty$  nos  $A_i$ 's e  $-\infty$  nos  $B_i$ 's, desde que ocorra uma certa desigualdade entre os comprimentos dos segmentos das famílias  $\{A_i\}$  e  $\{B_i\}$ , ver pág.10. Um fato é que quando as famílias  $\{A_i\}$  e  $\{B_i\}$  são vazias, a condição (2.1) sempre é satisfeita e, em particular, quando o conjunto

$\Omega$  é um quadrilátero não convexo como o  $ADC'B$  do exemplo de Radó-Schwartz. O TEOREMA 2.4 assegura então a existência e unicidade de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , solução de (1.1), tal que  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  nos arcos convexos abertos  $C_1$  e  $C_2$ .



Este fato entra em aparente contradição com o exemplo do tetraedro. A solução deste "paradoxo" reside na observação que no TEOREMA 2.4 não exigimos que a solução satisfizesse qualquer condição nos pontos extremos dos arcos  $C_i$ 's, enquanto no exemplo Radó-Schwartz é exigido que a solução coincida com os dados contínuos em cada ponto do bordo.

Assim, no caso do TEOREMA 2.4, o problema de valores de contorno para dados contínuos por partes é bem-posto, enquanto que para dados contínuos não. No entanto, apesar de nem sempre existir solução para dados contínuos, em alguns casos especiais a solução pode existir e, neste caso, ela coincide com aquela do TEOREMA 2.4.



# Bibliografia

- [MM] U. MASSARI AND MIRANDA, *Minimal Surfaces of Codimension One*, North-Holland Math. Studies, 91, 1984.
- [Ni] NITSCHKE (J. C. C.), *On New Results in the Theory of Minimal Surfaces* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 71, 1963, pp. 195-270).
- [Hw] HWANG (J.F), *Comparison principles and Liouville theorems for prescribed mean curvature equation in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), t. 15, 1988, p. 341-355.
- [JS] JENKINS (H.) AND SERRIN (J.), *Variational problems of minimal surface type II. Boundary value problems for the Minimal Surface Equation*, Arch. Rational Mech. Anal., t. 21, 1963, p. 321-342.
- [LR] LANGEVIN (R.), LEVITT (G.) AND ROSENBERG (H.), *Complete minimal surfaces with long line boundaries*, Duke Math. J., t. 55, 4, 1987, p. 1-11.
- [ER] SA EARP (R.) AND ROSENBERG (H.), *The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains*, J. Math. Pures Appl., t. 68, 1989, p. 163-183.
- [S] SERRIN (J.), *A priori estimates for solutions of the minimal surface equation*, Arch. Rational Mech. Anal., t. 14, 1963. p 376-383.
- [R1] RADÓ (T.), *The problem of least area and the problem of Plateau*. Math. Z. t. 32, 1930 p. 763-796.
- [R2] RADÓ (T.), *The problem of Plateau*. Berlin: Springer 1932.

- [F] FINN (R.), *New estimates for equations of minimal surface type*. Arch. Rational Mech. Anal., t. 14, 1963 p. 185-212.
- [CK] COLLIN (P.) ET KRUST (R.) *Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés*. Bull. Soc. Math. France, t. 119, 1991, p. 443-462.
- [LLR] LANGEVIN (R.), LEVITT (G.) AND ROSENBERG (H.), *Complete Minimal Surfaces With Long Line Boundaries*. Duke Math. Journ., Vol. 55 No. 4, 1987, p. 985-995.
- [DT] GILBARG (D.) AND TRUDINGER (N.S.), *Elliptic Partial Equations of Second Order*, Springer Verlag, 1983.
- [RT] RIPOLL (J.) AND TOMI (F.), *Some Existence Theorems for Minimal Graphs Over Non Convex Planar Domains*. Preprint.