



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
TRABALHO DE CONCLUSÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE
E AUTOMAÇÃO

Controle robusto de nível de dois tanques acoplados

Autor: Paulo Antônio Brudna Sogari

Orientador: Luís Fernando Alves Pereira

Porto Alegre, julho de 2015

Sumário

Sumário	ii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Símbolos	ix
Lista de Abreviaturas e Siglas	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Estrutura do trabalho	1
2 Revisão bibliográfica	2
2.1 Controladores robustos	2
2.2 Desigualdades matriciais lineares	3
2.3 Critérios de desempenho de sistemas	3
2.3.1 D-estabilidade	4
2.3.2 Custo garantido	6
2.4 Parsers e solvers	7
3 Apresentação do sistema	8
3.1 Descrição do sistema	8
3.2 Modelagem	9
4 Projeto de controladores robustos	12
4.1 Algoritmo	14
4.2 Análise do controlador	14
5 Resultados e discussão	17
5.1 Análise temporal da resposta com o controlador	17
5.2 Análise da variação dos parâmetros de projeto	20
5.2.1 Variação de α	20
5.2.2 Variação de φ	21
5.2.3 Variação de r	23
5.2.4 Variação de D	25
6 Conclusões e trabalhos futuros	27
7 Referências	29
Apêndice	30
Apêndice 1 – Programa de cálculo dos ganhos em MATLAB	30

Apêndice 2 – Representação do modelo do tanque em Simulink	31
Apêndice 3 – Produto de Kronecker	34

Agradecimentos

Agradeço a toda a minha família e a todos os meus amigos, por estarem ao meu lado e me apoiarem sempre. A todos os meus professores, por cumprirem seu trabalho com louvor, e ainda por irem mais além. Em especial ao professor Luís Fernando Alves Pereira, meu orientador, por todas as oportunidades e ensino nos últimos anos. Aos meus colegas, por trilharem o caminho ao meu lado e por tornarem divertidas mesmo as situações mais adversas.

Resumo

Nesse trabalho, foi estudada uma metodologia de projeto de controladores robustos, aplicados a uma planta que consiste em dois tanques acoplados. A formulação das especificações de controle foi feita na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs), que foram definidas de forma a satisfazer uma série de critérios pré-definidos. Após definir uma topologia para o controlador, um modelo para a planta e uma forma de representação de requisitos de desempenho através de LMIs, essas foram resolvidas com o uso de pacotes computacionais para MATLAB®, resultando nos ganhos do controlador. Diferentes controladores foram obtidos variando os critérios de projeto, e foram realizadas simulações desses para entender seus efeitos sobre o resultado final.

Palavras-chave: Controle robusto, controle de nível, LMIs.

Abstract

In this work, a method for robust controller design, applied to a system of two coupled tanks, was studied. The formulation of the control specifications was made in the form of Linear Matrix Inequalities (LMIs), which were defined in order to satisfy certain pre-defined criteria. After defining a topology for the controller, a model for the plant and a form of representation of the performance requirements via LMIs, these were solved with the use of toolboxes available for MATLAB®, resulting in the controller's gains. Different controllers were obtained by varying the project's criteria, and simulations were made to understand their effects on the final result.

Keywords: Robust control, level control, LMIs.

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Regiões do plano complexo: semi-plano, setor cônico e disco.....	4
Figura 2.2 - Região definida pela intersecção de um semi-plano, um setor cônico e um disco.....	5
Figura 3.1 - Sistema de dois tanques acoplados por um orifício.....	8
Figura 3.2 - Topologia do controlador PI utilizado	10
Figura 5.1 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 5$ cm	17
Figura 5.2 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$	18
Figura 5.3 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$ e bloqueio do termo integral.....	19
Figura 5.4 – Simulações de $h_1(t)$ com variações em α	20
Figura 5.5 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em φ_{\max}	22
Figura 5.6 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em r	24
Figura 5.7 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em D	25

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a α	21
Tabela 5.2 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a α	21
Tabela 5.3 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a φ	22
Tabela 5.4 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a φ	22
Tabela 5.5 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a r	24
Tabela 5.6 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a r	24
Tabela 5.7 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a D	26
Tabela 5.8 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a D	26

Lista de Símbolos

- α – Limite do semi-plano no critério de D-estabilidade [s^{-1}]
- φ – Ângulo interno do cone no critério de D-estabilidade [°]
- r – Raio do disco no critério de D-estabilidade [s^{-1}]
- c – Centro do disco no critério de D-estabilidade [s^{-1}]
- A_1 – Área do primeiro tanque [cm^2]
- A_2 – Área do segundo tanque [cm^2]
- $h_1(t)$ – Altura do primeiro tanque [cm]
- $h_2(t)$ – Altura do segundo tanque [cm]
- h_0 – Altura do orifício [cm]
- h_{ref} – Altura de referência [cm]
- q_{in} – Vazão de entrada [cm^3/s]
- q_{out} – Vazão de saída [cm^3/s]
- $x(t)$ – Vetor de estados do sistema
- $e(t)$ – Erro no seguimento de referência de altura [cm]
- $u(t)$ – Variável de controle, igual à vazão de entrada [cm^3/s]
- u_{max} – Valor máximo da variável de controle [cm^3/s]
- M_o – Máximo sobrepasso da resposta
- t_s – Tempo de acomodação da resposta (faixa de 2%) [s]
- ξ – Fator de amortecimento
- p_n – Posição do polo “n” do sistema [s^{-1}]
- x_{inf} – Variável, vetor ou matriz “x” no sistema abaixo do orifício
- x_{sup} – Variável, vetor ou matriz “x” no sistema acima do orifício

Lista de Abreviaturas e Siglas

LMI – Desigualdade Matricial Linear

LQR – Regulador Linear Quadrático

PI – Proporcional e Integral

REDIC_ADAP – Rede de Pesquisa em Instrumentação e Controle - Estudo e Implementação de Controladores Avançados Adaptativos em Processos Industriais

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

1 Introdução

A descrição de sistemas em forma de modelos matemáticos para fins de controle é uma estratégia extremamente comum e bem-sucedida na maioria dos casos, sendo usada há muito tempo e para todos os tipos de problemas. No entanto, essa prática também apresenta diversas dificuldades, relacionadas à existência inata de erros em modelos. Isso ocorre pela impossibilidade de prever com completa precisão todo e qualquer fenômeno físico capaz de afetar o sistema, ao longo de todo o seu tempo de operação. Os controladores robustos são propostos de forma a tratar desse problema de uma maneira bastante direta, com o objetivo de garantir o bom funcionamento do sistema controlado mesmo com a existência dessas diferenças.

1.1 Motivação

A principal motivação desse trabalho é estudar a metodologia para a síntese de controladores robustos, de forma a verificar a complexidade de projeto e a qualidade dos resultados obtidos. Serão utilizados métodos que já foram estudados e desenvolvidos, porém cuja aplicação prática é ainda bastante incomum. O sistema de dois tanques acoplados foi escolhido por ter sido estudado na primeira etapa do projeto REDIC_ADAP, em 2011, no qual a equipe de pesquisa da UFRGS atuou com equipes de diversas universidades do Brasil. Sendo um sistema simples, a compreensão dos métodos utilizados nesse trabalho será mais fácil, mas os métodos nele empregados podem ser aplicados da mesma forma para outros casos. Assim, a ideia é possibilitar estudos e aplicações futuras em sistemas mais complexos e motivar o uso desses controladores, através da demonstração de suas vantagens.

1.2 Objetivos

Como em projetos clássicos de controladores, o objetivo principal é fazer com que o sistema controlado obedeça a certos requisitos de desempenho pré-definidos. A principal diferença é que isso deverá ocorrer para as diferentes condições do sistema através de um projeto único. Em outras palavras, todas as variações serão definidas antes de projetar o controlador, e os problemas serão resolvidos simultaneamente. Dessa forma, espera-se obter uma metodologia muito mais direta do que a síntese e o teste de controladores de forma iterativa até encontrar um que funcione para todos os casos.

1.3 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2, será feita uma revisão dos conceitos necessários para a compreensão da realização da tarefa proposta. No Capítulo 3, a planta a ser controlada será apresentada em detalhes, e será proposto um modelo para ela. No Capítulo 4, será mostrada a síntese dos controladores utilizados para o controle de nível do tanque. No Capítulo 5, serão mostrados os resultados obtidos nas simulações. Por último, no Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Controladores robustos

Quando se fala em incerteza em modelos, há dois pontos importantes a serem considerados: o primeiro é que modelos que tentam descrever de forma precisa todos os aspectos de sistemas físicos são difíceis de caracterizar e simular; o segundo é que, não importando o quão detalhado um modelo seja, ele jamais é uma representação completamente precisa de um sistema real. Nesse último aspecto, pode-se destacar ainda possíveis incertezas quanto a condições iniciais, distúrbios do ambiente no qual o sistema está inserido e a incerteza do próprio modelo, relacionada ao fato de ele negligenciar alguns fenômenos físicos. O principal desafio do controle em malha fechada é minimizar os efeitos de perturbações e do desconhecimento (ou conhecimento impreciso) das variáveis do sistema, sujeito à restrição de não se ter uma representação completa dele (Dullerud e Paganini, 2010).

Nesse contexto, a robustez de controladores surge como um critério importante no projeto. Ela representa a capacidade que o controlador tem de manter o sistema estável ou, em alguns casos, de satisfazer requisitos mínimos de desempenho, quando entram em cena as diferenças entre o modelo usado para o projeto e o sistema real. A robustez pode ser considerada então uma medida da insensibilidade de um controlador quanto às incertezas do modelo. Principalmente a partir do final da década de 70, esse aspecto se tornou um ponto muito importante no estudo e desenvolvimento de técnicas de projeto de controladores, de forma a aproximá-las de aplicações reais, tais como em ambientes industriais (Morari e Zafiriou, 1989).

Na síntese de controladores a partir de métodos clássicos, tais como alocação de polos por lugar das raízes, resposta em frequência ou mesmo espaço de estados, muitas vezes é problemático tratar dessa questão. Pode-se tentar projetar vários controladores para encontrar um que seja satisfatório em todas as condições de operação, ou chavar os seus ganhos conforme as variações de parâmetros ocorrem. É possível ainda impor margens de ganho e fase no projeto para tentar evitar que o sistema se instabilize, no caso do método por resposta em frequência.

No entanto, essas soluções não tratam do problema diretamente, pois são métodos determinísticos que são frequentemente aplicados sem quaisquer considerações quanto aos intervalos de variação dos parâmetros. Além disso, se há muitos parâmetros que podem variar ou muitas condições diferentes de operação, elas se tornam muito difíceis de aplicar (Ray e Stengel, 1992). E para os casos em que o controle consegue manter a estabilidade do sistema, pode ocorrer uma piora inaceitável no desempenho, o que pode prejudicar outros processos relacionados.

A síntese robusta de controladores é proposta para lidar com essas questões de forma direta. No projeto, são feitas considerações sobre as variações de parâmetros ou configurações do modelo, e os ganhos do controlador são encontrados de forma a satisfazer as especificações mesmo com todas essas mudanças. Isso não quer dizer que o sistema não vá operar melhor em algumas condições do que em outras: o que ocorre é que sempre serão obedecidos os requisitos de estabilidade e desempenho, se existir uma solução que os satisfaça mesmo com as variações definidas previamente.

2.2 Desigualdades matriciais lineares

As desigualdades matriciais são bastante conhecidas através de aplicações clássicas, entre as quais uma das mais conhecidas é a análise de estabilidade por Lyapunov. De uma forma geral, são impostas restrições sobre uma ou mais variáveis, e uma solução do problema é dada por um conjunto de variáveis que satisfaça as desigualdades impostas. Para alguns casos, é possível fazer tentativas de resolver o problema através da proposição de um conjunto de variáveis de uma forma conhecida (funções candidatas à solução) e da verificação do atendimento dos critérios impostos.

Em vários casos, tais como em sistemas não-lineares, ou quando há incertezas de parâmetros ou esses variam no tempo, o problema é complexo demais para ser resolvido conforme descrito acima. A descrição desses tipos de problemas na forma de LMIs apresenta a vantagem de possibilitar soluções numéricas através de pacotes computacionais. Uma LMI é definida como

$$F(x) \stackrel{\Delta}{=} F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de variáveis de busca, e as matrizes $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são definidas conforme o problema a ser resolvido. Tal formulação tem diversas propriedades interessantes, tais como a convexidade do seu conjunto de soluções e a possibilidade de escrever um conjunto de múltiplas LMIs como uma única LMI. Isso favorece o uso de pacotes computacionais tanto para manipular esses problemas (conhecidos como *Parsers*) quanto para resolvê-los (sob a denominação de *Solvers*). Uma descrição mais detalhada das LMIs e de suas propriedades é feita por Boyd et al. (1994).

Por ter essas vantagens, LMIs podem ser aplicadas em várias áreas, tais como controle de sistemas, processamento de sinal, telecomunicações e estatística. Em especial, controladores robustos utilizam essa formulação para criar restrições no comportamento do sistema, que são colocadas na forma de matrizes. As variáveis de busca representam os ganhos do controlador. A solução numérica do problema dará então os ganhos capazes de satisfazer as restrições impostas. Tal metodologia foi aplicada em diversos trabalhos, como a compensação de incertezas de atraso em redes de controle industriais Ethernet (Joelianto et al., 2008), o controle robusto de rastreamento de vôo (Liao et al., 2002) e o projeto de controladores robustos para conversores PWM (El Aroudi et al., 2010).

2.3 Critérios de desempenho de sistemas

Critérios de desempenho são formas de avaliar o comportamento de um sistema. Qualquer projeto de controlador deve partir de uma série de especificações a serem cumpridas, tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Para a aplicação nesse trabalho, os critérios de desempenho serão usados para formular as desigualdades das LMIs, ou seja, eles representarão as restrições impostas na resposta do sistema. Os ganhos do controlador serão as variáveis de busca, logo a solução do problema consistirá nos valores de ganhos que satisfazem as especificações definidas.

Entre esses critérios, pode-se citar o de D-estabilidade e o de custo garantido, que são usados nesse trabalho. Há também outros que são importantes em diversas aplicações, tais como as normas H_2 e H_∞ , muito usadas para minimizar efeitos de perturbações.

Nas subseções a seguir, serão mostradas fórmulas para definir os critérios de desempenho D-estabilidade e custo garantido na forma de LMIs, mas não serão feitas suas demonstrações. As demonstrações completas foram feitas por Chilali e Gahinet (1996) e Apkarian et al. (1999). Coutinho e Pereira (2015) demonstram as aplicações dessas fórmulas para certos sistemas, tal como o proposto nesse trabalho. As equações finais aqui mostradas são resultado dessa metodologia.

2.3.1 D-estabilidade

Esse critério consiste na definição de uma região D dentro da qual os polos do sistema devem se situar em malha fechada. Um sistema é dito D-estável se seus polos pertencerem a uma dada região D. Define-se que um subconjunto D do semi-plano complexo negativo é chamado de uma região LMI se existirem matrizes $L = L^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tais que

$$D = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + s^*M^T < 0\} \quad (2.2)$$

onde $s = \sigma + j\omega$ e $s^* = \sigma - j\omega$.

Várias regiões podem ser representadas pela Equação 2.3. Três delas são de especial interesse nesse trabalho, por terem relação direta com a resposta transitória de um sistema. São o semi-plano com parte real menor que $-\alpha$, o setor cônico do semi-plano complexo negativo com ângulo interno igual a 2ϕ e o disco de raio r e centro $(-c, 0)$. A Figura 2.1 mostra a representação gráfica dessas regiões:

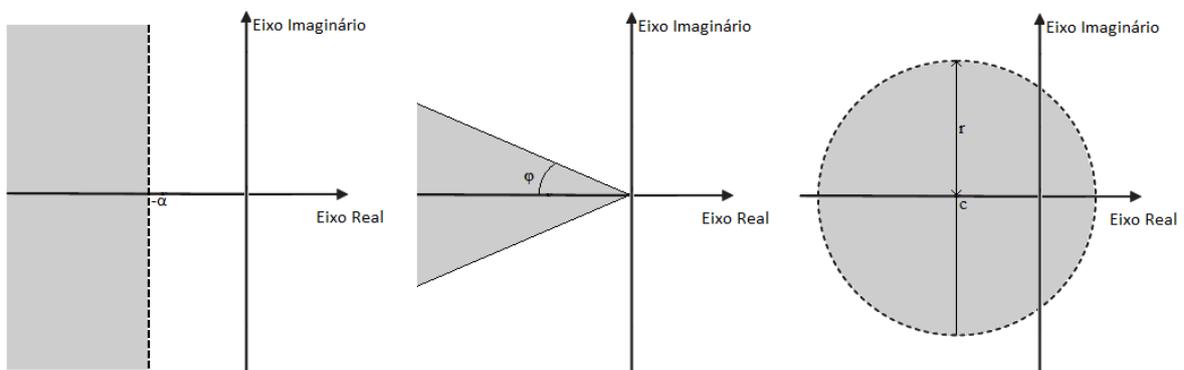


Figura 2.1 - Regiões do plano complexo: semi-plano, setor cônico e disco

A primeira região representa um limite para as partes reais dos polos do sistema. Um polo com parte real igual a $-\alpha$ gera um componente na resposta que é o mais lento aceitável. Qualquer polo mais distante do eixo imaginário terá um decaimento exponencial maior, relacionado a uma resposta transitória mais rápida. Essa região pode ser representada por uma LMI conforme a Equação 2.3 através das seguintes matrizes:

$$L = 2\alpha \quad M = 1 \quad (2.3)$$

A segunda região, o setor cônico, relaciona um máximo fator aceitável entre a parte imaginária de um polo e sua parte real, o que culmina no máximo sobrepasso aceitável na resposta transitória do sistema. Sua formulação LMI é dada através das matrizes a seguir:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi) & \text{cos}(\varphi) \\ -\text{cos}(\varphi) & \text{sen}(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Por último, o disco representa um modo de limitar o distanciamento máximo dos polos do eixo imaginário. Isso é interessante porque, quanto mais longe os polos em malha-fechada são alocados em relação a seus valores em malha aberta, maior é a intensidade da variável de controle necessária para fazê-lo. O disco é então uma maneira fácil de limitar a variável de controle utilizada, impedindo que os polos sejam alocados em posições inviáveis no que diz respeito aos atuadores do sistema, já que as outras regiões não impõem limites máximos nas posições dos polos. Isso as mantém sob o controle do projetista, em vez de confiá-las cegamente ao programa. As matrizes a seguir são empregadas na formulação LMI para descrever esse tipo de região:

$$L = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Uma consideração muito importante a ser feita é que as restrições relacionadas às regiões podem ser combinadas. Será criada então uma região formada pela intersecção das regiões que a compõem, já que todas as restrições devem ser satisfeitas conjuntamente, caracterizando a resposta desejada do sistema controlado. A Figura 2.2 mostra um exemplo de uma região desse tipo:

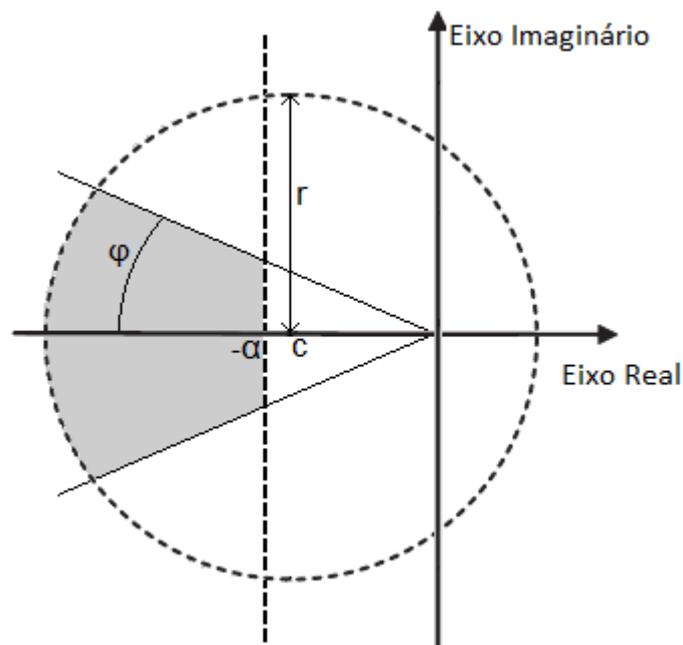


Figura 2.2 - Região definida pela intersecção de um semi-plano, um setor cônico e um disco

Com isso, é possível definir a região D na qual os polos do sistema devem ser inseridos. No entanto, ainda falta formular o problema da D -estabilidade em si, ou seja, a formulação LMI que impõe a posição dos polos dentro da região estabelecida. Conforme Coutinho e Pereira (2015), para um sistema representado em espaço de estados, do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

a formulação é dada por

$$L \otimes Q + M \otimes (AQ + BW) + M^T \otimes (W^T B^T + QA^T) < 0 \quad (2.7)$$

onde a operação \otimes representa o produto de Kronecker de duas matrizes.

2.3.2 Custo garantido

Para restringir a variável de controle, é possível definir uma região do tipo disco conforme a seção anterior, de forma a evitar soluções que sejam inviáveis do ponto de vista do atuador. No entanto, é interessante ter uma forma mais direta de tratar desse problema.

Um método comumente usado para realizar essa restrição é o LQR, que define uma função custo quadrática e a minimiza conforme a ponderação imposta em relação aos estados e às entradas do sistema. No entanto, esse método não se aplica para sistemas com matrizes incertas, caso em que a estratégia é minimizar um limitante superior para a função custo, levando em consideração todas as variações de parâmetros possíveis. Denomina-se esse problema como problema de custo garantido. Partindo-se de um vetor de condições iniciais x_0 , a função custo minimizada do ponto de vista de um vetor $z(t)$ é

$$J(x_0) = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt. \quad (2.8)$$

A formulação LMI do problema custo garantido é dada por

$$\min_{X, Y, \lambda} \lambda: \begin{bmatrix} P_0 & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} XA^T + AX + Y^T B^T + BY & XC^T + Y^T D^T \\ CX + DY & -\lambda I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (2.9)$$

onde X , Y e λ são as variáveis de decisão e I_n é a matriz identidade de dimensão igual ao número de saídas do sistema. A matriz C tem a função de atribuição de pesos para a minimização dos estados, e a matriz D faz o mesmo quanto à variável de controle. A matriz P_0 deve ser definida positiva, e é um limitante máximo da variação aceitável dos estados. A demonstração completa pode ser vista na obra de Coutinho e Pereira (2015).

Também é mostrado que a lei de controle que minimiza a variável de controle $u(t)$ conforme a Equação 2.9 é dada por

$$u(t) = YX^{-1}x(t), \quad (2.10)$$

onde $x(t)$ é o vetor de estados do sistema. Além disso, se forem usadas as variáveis de busca $X = Q$ e $Y = W$, as mesmas do critério de D-estabilidade, os dois problemas serão resolvidos de forma simultânea, e a solução deverá satisfazer a ambos.

2.4 Parsers e solvers

O termo *parsers* se refere a pacotes computacionais dedicados à manipulação de instruções recebidas de forma a organizá-las em diversas variáveis diferentes, que por sua vez são usadas por outros programas. No caso desse trabalho, o pacote computacional utilizado para essa função é o YALMIP, com o objetivo de manipular os problemas definidos na forma de LMIs de forma a possibilitar o uso de um *solver* para resolvê-los. Mais detalhes podem ser vistos na bibliografia indicada (Löfberg, 2004).

O *solver*, por sua vez, é um programa que contém um algoritmo capaz de calcular a solução de um determinado problema. Nesse caso, é usado o SeDuMi, um pacote computacional disponível para MATLAB que soluciona problemas de otimização cônica, sendo essa uma subárea da otimização convexa. Nesse trabalho, esse pacote é utilizado para a resolução das LMIs definidas. Mais informações podem ser encontradas na bibliografia (Sturm, 1999).

3 Apresentação do sistema

3.1 Descrição do sistema

O sistema estudado nesse trabalho foi uma planta proposta na primeira etapa do projeto REDIC_ADAP, em 2011. É uma planta didática do tipo T55552, da empresa Amatrol, em posse da equipe de pesquisa da UFRN. Trata-se de um modelo em escala de dois tanques de seção retangular acoplados por um orifício. De forma a auxiliar a descrição do funcionamento do processo, é feita uma ilustração dele na Figura 3.1:

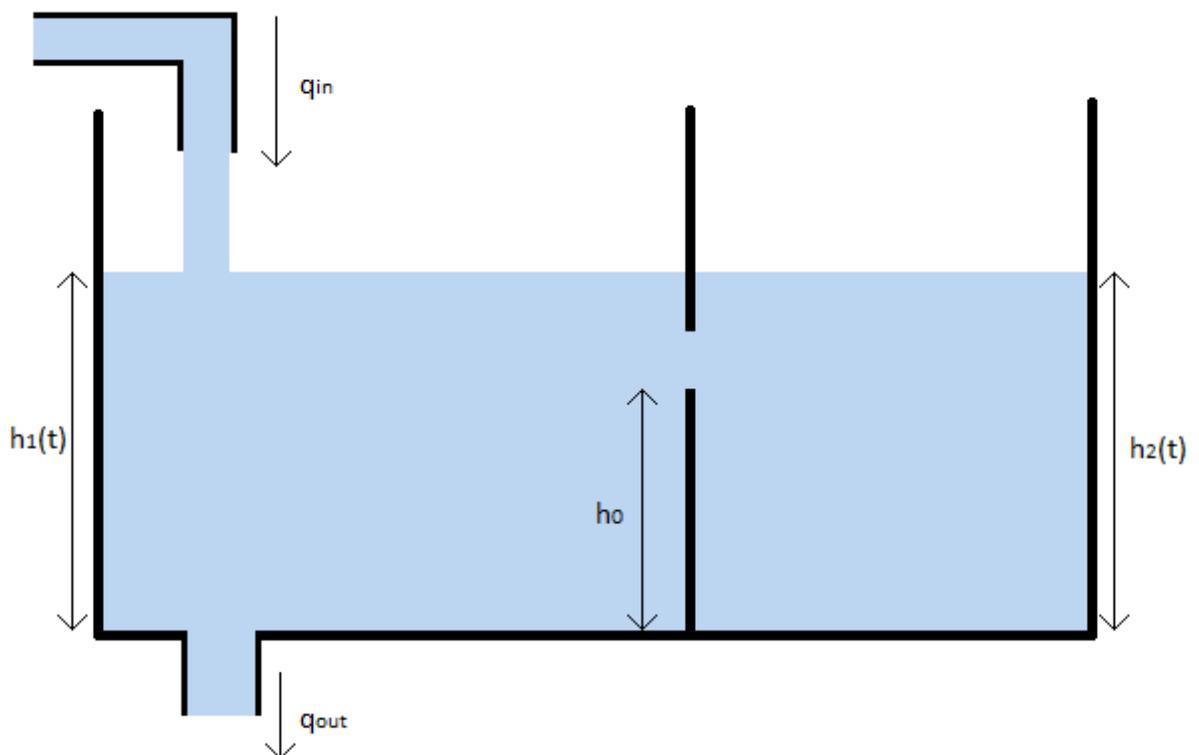


Figura 3.1 - Sistema de dois tanques acoplados por um orifício

Os tanques possuem áreas respectivas A_1 e A_2 , e níveis de líquido denominados $h_1(t)$ e $h_2(t)$. O orifício que os conecta está situado em uma altura h_0 . A vazão de entrada, que será a variável de controle do sistema, é q_{in} . A vazão de saída é denominada q_{out} . Ambas atuam apenas no primeiro tanque, e não há nenhuma vazão relacionada diretamente com o segundo tanque.

Supondo um estado inicial $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$, o nível $h_1(t)$ começará a crescer assim que for fornecida uma vazão de entrada q_{in} , e continuará enquanto essa superar q_{out} . Assim que o nível atingir a altura do orifício, h_0 , surgirá no sistema uma vazão do primeiro tanque para o segundo, cujo nível começará a aumentar. Dependendo da vazão de líquido no orifício e de q_{in} , o nível $h_1(t)$ poderá continuar crescendo, embora mais lentamente, ou poderá se manter na altura h_0 , caso em que a diferença de vazões de entrada e saída passa diretamente para o segundo tanque. Nesse último caso, assim que o nível $h_2(t)$ se igualar a $h_1(t)$, ambos irão crescer ou diminuir da mesma maneira, dado que eles se mantenham acima de h_0 . Por último, em caso de diminuição dos níveis até que cheguem novamente até a altura do orifício, o segundo tanque permanecerá com

nível h_0 , pois não possui vazão de saída própria, e apenas a altura da coluna de líquido do primeiro tanque irá mudar.

O interesse de estudar a aplicação de métodos de controle nesse processo vem da possibilidade de utilizá-los em modelos mais complexos, tais como vasos separadores. Nesses, a separação é feita através do controle do nível em relação a um vertedouro, que realiza a separação da mistura líquida. Essa operação é análoga à presença do orifício no modelo em escala.

3.2 Modelagem

A equação diferencial que relaciona as vazões de entrada e saída e a variação volumétrica do sistema é dada por

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_{in} - q_{out} \quad (3.1)$$

Como os tanques da planta em questão têm seções retangulares, a área deles é constante, não variando no tempo nem conforme a altura. Tem-se então $V(t) = A h(t)$ para ambos os tanques. Dessa forma, a equação se torna

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_{in} - q_{out}}{A} \quad (3.2)$$

A Equação 3.2 descreve as variações de altura de ambos os tanques, conforme as vazões que atuam em cada um deles. As vazões de entrada e saída do sistema, ligadas ao primeiro tanque, são conforme o mostrado na Figura 3.1, porém ainda é necessário determinar a vazão do orifício. Serão feitas duas considerações a respeito dela: a primeira é que a dinâmica dela é desprezível, ou seja, assim que o nível $h_1(t)$ atinge a altura h_0 a vazão do orifício já assume o seu valor total; a segunda é que não há nenhuma forma de saturação nela, ou seja, seu valor máximo pode ser tão grande quanto o necessário. Isso limita o sistema a três situações possíveis:

- $h_1(t) < h_0$: as vazões q_{in} e q_{out} atuam somente no primeiro tanque;
- $h_1(t) = h_0$ e $h_2(t) < h_0$: as vazões q_{in} e q_{out} atuam somente no segundo tanque, enquanto o primeiro permanece com a altura de coluna de líquido fixa em h_0 ;
- $h_1(t) \geq h_0$ e $h_2(t) \geq h_0$: os níveis de ambos os tanques crescem ou diminuem simultaneamente, com a distribuição de q_{in} e q_{out} dada conforme a altura. O sistema atua como se fosse um único tanque de área igual a $A_1 + A_2$.

Se a dinâmica da vazão do orifício não for desprezível, isso poderia causar apenas uma pequena variação no nível $h_1(t)$ durante o enchimento do segundo tanque. Mesmo se a vazão for pequena na altura exata h_0 , ela aumentaria conforme o nível, o que compensaria esse efeito. Uma possível saturação no seu valor pode ser mais problemática caso não seja respeitada, pois o nível $h_1(t)$ poderia aumentar mesmo durante o enchimento do segundo tanque, que estaria limitado à vazão máxima do

orifício, invalidando o modelo proposto. No entanto, isso depende apenas das dimensões do orifício. Se ele for grande o suficiente para permitir uma vazão pelo menos igual à maior diferença $q_{in} - q_{out}$, o modelo será válido. O cumprimento dessa consideração aproxima o sistema do caso de vasos separadores, onde o vertedouro não tem um limite de vazão máxima.

As três situações descritas acima são equivalentes à separação do processo em dois sistemas de primeira ordem. O primeiro sistema corresponde à primeira situação, onde há apenas o primeiro tanque. O segundo sistema corresponde à terceira situação, na qual ambos os níveis mudam simultaneamente. O que ocorre, do ponto de vista do controle, é um chaveamento entre esses sistemas. A situação intermediária pode ser vista apenas como um atraso nesse chaveamento.

A vazão de saída é determinada a partir de testes de identificação realizados pela equipe da UFRN. Cada uma das relações descreve o comportamento da vazão de saída abaixo do orifício (caso do primeiro sistema proposto acima) ou acima dele (caso do segundo sistema). A equação da vazão abaixo do orifício é

$$q_{out} = 1,0076 h_1(t) + 54,001 \text{ [cm}^3/\text{s]}, \quad (3.3)$$

e acima dele é

$$q_{out} = 1,4485 h_1(t) + 51,7862 \text{ [cm}^3/\text{s]}. \quad (3.4)$$

onde foram desprezados os termos quadráticos das equações. A presença de um termo constante nessas equações ocorre porque elas foram linearizadas em torno de pontos de operação diferentes de $h_1 = 0$, caso em que se esperaria $q_{out} = 0$.

Dessa forma, o que resta é definir a variável de controle $u(t) = q_{in}(t)$. A topologia proposta para o controlador é um PI, conforme será discutido no capítulo seguinte. Esse controlador está representado na figura a seguir:

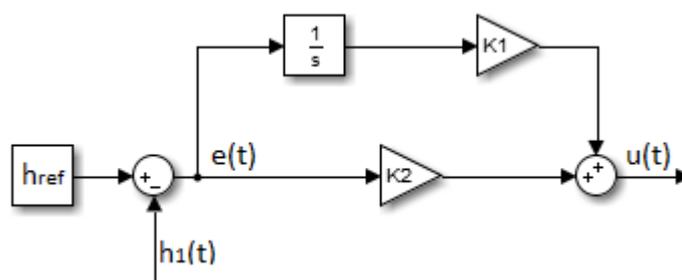


Figura 3.2 - Topologia do controlador PI utilizado

Como o sistema sem a inclusão do controlador é de primeira ordem, a inclusão do termo integral irá torná-lo de segunda ordem. Com isso, para modelar o sistema em espaço de estados conforme a Equação 2.7, é necessário escolher dois estados para representá-lo. Uma das possíveis escolhas é definir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int e(t) dt \\ x_2(t) &= e(t) = h_{ref} - h_1(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

de forma que as derivadas dos estados serão dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{h}_{ref} - \dot{h}_1(t) = -\dot{h}_1(t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

onde foi considerado que h_{ref} é constante, portanto tem derivada nula. A derivada de $h_1(t)$ é obtida conforme a Equação 3.2.

Além disso, a variável de controle poderá ser escrita na forma

$$u(t) = q_{in}(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t). \quad (3.7)$$

Para definir o modelo em espaço de estados do sistema abaixo do orifício, basta utilizar as equações definidas acima. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1,0076}{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ A_1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1,0076}{A_1} & \frac{54,001}{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ref} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Para o sistema acima do orifício, o modelo será

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1,4485}{A_1 + A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ A_1 + A_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1,4485}{A_1 + A_2} & \frac{51,7862}{A_1 + A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ref} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Nota-se que as dinâmicas das variáveis de estado são definidas por elas mesmas (matriz A) e pelas entradas (matriz B). Foi feita uma separação da matriz B em duas partes. A primeira, denominada B_u , diz respeito à parte controlável através da variável de controle $u(t)$. A segunda, chamada de B_e , contém as entradas externas do modelo, que não são utilizadas para controle. Essa parte modela a influência da referência de nível h_{ref} sobre o sistema e as vazões constantes das equações 3.3 e 3.4, que são definidas pelo comportamento das válvulas, e não pelo usuário. Por isso, é importante ressaltar que essa matriz representa apenas as relações do modelo, e não qualquer variável de controle.

Para fins de organização e para a melhor compreensão das formulações dos controladores, é interessante denominar as matrizes do sistema em espaço de estados também conforme os casos abaixo e acima do orifício. Assim, define-se:

$$A_{inf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1,0076}{A_1} \end{bmatrix}, B_{uinf} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ A_1 \end{bmatrix}, B_{einf} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1,0076}{A_1} & \frac{54,001}{A_1} \end{bmatrix} e \quad (3.10)$$

$$A_{sup} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1,4485}{A_1 + A_2} \end{bmatrix}, B_{usup} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ A_1 + A_2 \end{bmatrix}, B_{esup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1,4485}{A_1 + A_2} & \frac{51,7862}{A_1 + A_2} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde os subscritos “inf” e “sup” representam as situações abaixo e acima do orifício.

Por último, é necessário definir os valores para as áreas dos tanques. De acordo com os dados fornecidos pelos pesquisadores da UFRN, as áreas são $A_1 = 583 \text{ cm}^2$ e $A_2 = 384,25 \text{ cm}^2$.

4 Projeto de controladores robustos

O primeiro passo para projetar o controlador é definir sua topologia. Como visto anteriormente, para esse trabalho foi escolhido um controlador PI. O termo integral é importante porque se deseja um erro nulo em regime permanente, enquanto o termo proporcional auxilia na regulação da dinâmica da resposta. Como a planta é relativamente simples, essa estrutura é suficiente para atingir os objetivos propostos.

Do mesmo modo, essa topologia permite aplicações em praticamente quaisquer processos industriais, nos quais ainda há uma grande preferência pelos controladores PI e PID. No entanto, caso fosse usado um modelo mais complexo, poderia ser impossível impor um comportamento desejado com apenas dois ganhos para a regulação. Nesse caso, uma topologia de maior grau seria necessária. Isso poderia criar outra questão interessante, de flexibilidade de controle versus dificuldade de resolução do problema por parte dos algoritmos de otimização.

Outra observação importante é relativa às entradas do sistema. A matriz B_u se relaciona à vazão de entrada do sistema, que é usada para o controle. Este apenas será capaz de atuar sobre essa entrada, e o projeto só poderá ser feito através dessa matriz. Não há nenhuma forma de inclusão de B_e , o que causará uma diferença entre a resposta projetada e a resposta real do sistema. Desse ponto de vista, as entradas da matriz B_e atuam sobre o sistema da mesma forma que perturbações.

Para iniciar o projeto, o primeiro passo é definir as LMIs. Aquelas que dizem respeito à resposta dinâmica do sistema são definidas conforme a Equação 2.8. Definindo uma região composta pela intersecção de um semi-plano, um setor cônico e um disco, o resultado será de três LMIs para cada caso (abaixo e acima do orifício), um total de seis equações que dizem respeito à D-estabilidade. Esse sistema de equações será:

$$\begin{aligned} L_n \otimes Q + M_n \otimes (A_{\text{inf}} Q + B_{\text{uinf}} W) + M_n^T \otimes (W^T B_{\text{uinf}}^T + Q A_{\text{inf}}^T) < 0 \\ L_n \otimes Q + M_n \otimes (A_{\text{sup}} Q + B_{\text{usup}} W) + M_n^T \otimes (W^T B_{\text{usup}}^T + Q A_{\text{sup}}^T) < 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $n = 1, 2, 3$, L_1 e M_1 correspondem ao semi-plano, L_2 e M_2 ao setor cônico e L_3 e M_3 ao disco, e Q e W são as variáveis de busca. As matrizes L_n e M_n são definidas conforme discutido na seção 2.3.1, resultando nas equações a seguir:

$$L_1 = 2\alpha, \quad M_1 = 1, \quad (4.2)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} e \quad (4.3)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Os valores de α , φ , r e c dependem dos requisitos definidos pelo projetista, que por sua vez devem respeitar as características da planta. No caso desse trabalho, não há o objetivo de satisfazer quaisquer requisitos específicos, mas sim a análise dos resultados

conforme as especificações variam. Ainda assim, é necessário definir valores de base, a partir dos quais poderão ser feitas as variações.

Assim, definindo-se o tempo de acomodação t_s como o tempo necessário para a resposta entrar na faixa de 98% a 102% de seu valor final, deseja-se que esse valor seja menor ou igual a 670 s. Quanto ao máximo sobrepasso M_o , será utilizado um valor de referência de 5%. A vazão máxima desejada na válvula será considerada igual a 110 cm³/s.

Os valores de α e φ podem ser obtidos utilizando as fórmulas da resposta de sistemas de segunda ordem:

$$t_s = \frac{4}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{4}{t_s} \quad (4.5)$$

$$M_o = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \text{ou} \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2(M_o)}}} \quad (4.6)$$

onde $\xi = \cos(\varphi)$.

As soluções para $t_s = 670$ s e $M_o = 0,05$ são dadas por $\alpha = 0,00597$ e $\xi = 0,69$, o que resulta em $\varphi = 46,36^\circ$. Por fins de praticidade, serão usados $\alpha = 0,006$ e $\varphi = 45^\circ$, que deverá resultar em $t_s = 666,67$ s e $M_o = 0,0432$. Não há forma direta de definir os parâmetros do disco, mas fixando-se o centro $c = 0$, por exemplo, o raio r deverá necessariamente ser maior que α . Assim, será usado o valor $r = 0,02$, o que engloba a região em torno de 0,006 e dá certa flexibilidade para o programa encontrar soluções aceitáveis.

Uma consideração importante é que não há garantia que sejam atendidas as especificações mesmo que os valores impostos de α , φ e r sejam atingidos, pois o comportamento do sistema não é perfeitamente de segunda ordem. Isso porque ocorre o chaveamento de dois sistemas quando ocorre a transição no nível do orifício. Além disso, como discutido anteriormente, se os sistemas abaixo e acima do orifício fossem vistos como perfeitamente lineares, as matrizes B_e das equações 3.8 e 3.9 teriam o mesmo efeito do que perturbações sobre eles, já que se tratam de entradas que não estão na malha de controle.

Já para o problema de custo garantido, utiliza-se a Equação 2.10, aplicada também para ambos os casos, e com as variáveis de busca $X = Q$ e $Y = W$, de forma a impor as restrições sobre as mesmas variáveis que foram usadas para definir a dinâmica da resposta. Isso resulta no conjunto de LMIs

$$\min_{Q,W,\lambda} \lambda : \begin{bmatrix} P_0 & I_n \\ I_n & Q \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} QA_{\text{inf}}^T + A_{\text{inf}}Q + W^T B_{\text{uinf}}^T + B_{\text{uinf}}W & QC^T + W^T D^T \\ CQ + DW & -\lambda I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} QA_{\text{sup}}^T + A_{\text{sup}}Q + W^T B_{\text{usup}}^T + B_{\text{usup}}W & QC^T + W^T D^T \\ CQ + DW & -\lambda I_n \end{bmatrix} < 0.$$

Por último, deve-se obter os ganhos de realimentação do sistema a partir da Equação 2.11, ou seja:

$$[K_1 \quad K_2] = K = WQ^{-1}. \quad (4.8)$$

4.1 Algoritmo

Tendo em base todo o desenvolvimento do modelo e das LMIs feito nas seções anteriores, é possível desenvolver um algoritmo capaz de solucioná-las, com o uso de pacotes computacionais de otimização. O algoritmo usado se resume a:

- 1) Inicialização dos parâmetros do sistema e das matrizes do sistema em espaço de estados, conforme as equações 3.10 e 3.11;
- 2) Inicialização das especificações do sistema em malha fechada, conforme as equações 4.5 e 4.6;
- 3) Definição das matrizes L_n e M_n conforme as equações 4.2 a 4.4, e inicialização das variáveis de busca Q e W ;
- 4) Definição das LMIs conforme os conjuntos de equações 4.1 e 4.7;
- 5) Uso dos pacotes computacionais para solucionar o problema conforme Q e W ;
- 6) Obtenção dos ganhos conforme a Equação 4.8.

O programa completo em código do MATLAB pode ser visto nos apêndices desse trabalho.

4.2 Análise do controlador

Conforme discutido anteriormente, as variáveis que definem a região do plano s para os polos do sistema foram $\alpha = 0,006 \text{ s}^{-1}$, $\varphi = 45^\circ$, $r = 0,02 \text{ s}^{-1}$ e $c = 0$. Além disso, inicialmente não será utilizado o critério de custo garantido, sendo seu efeito analisado posteriormente, no Capítulo 5.2.4. Isso equivale a remover suas LMIs do programa ou utilizar matrizes $C = [0 \quad 0]$ e $D = [0]$ nas LMIs da Equação 4.7.

Com isso, são obtidos os ganhos

$$K_1 = 0,1237 \text{ [cm}^2/\text{s}^2], \quad K_2 = 15,0675 \text{ [cm}^2/\text{s}]. \quad (4.9)$$

As matrizes que determinam o comportamento do sistema em malha-fechada são

$$A_{\text{inf}} + B_{\text{uinf}} K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2,1218 \cdot 10^{-4} & -2,7573 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$A_{\text{sup}} + B_{\text{usup}} K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1,2789 \cdot 10^{-4} & -1,7075 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

cujos autovalores determinam a posição dos polos para o sistema linear. Eles são:

$$p_{1\text{inf}} = -0,0138 + 0,0047i \quad p_{2\text{inf}} = -0,0138 - 0,0047i \quad (4.11)$$

$$p_{1\text{sup}} = -0,0085 + 0,0074i \quad p_{2\text{sup}} = -0,0085 - 0,0074i,$$

onde a unidade dos polos é dada em s^{-1} .

Analisando a posição dos polos em malha fechada, pode-se notar que os polos se mantiveram a esquerda do limite definido para α , o que significa que a especificação relacionada ao tempo de resposta foi respeitada. Quanto ao sobrepasso, para o sistema abaixo do orifício tem-se

$$\varphi_{\text{inf}} = \text{atan} \left(\frac{0,0047}{0,0138} \right) = 18,81^\circ, \quad (4.12)$$

e para o sistema acima do orifício, calcula-se

$$\varphi_{\text{sup}} = \text{atan} \left(\frac{0,0074}{0,0085} \right) = 41,04^\circ. \quad (4.13)$$

Como ambos os ângulos são menores do que o limite imposto de 45° , esse critério também foi atingido. Quanto à restrição imposta pelo disco, verifica-se o módulo dos polos. Para o sistema abaixo do orifício, o resultado é

$$r_{\text{inf}} = \sqrt{0,0138^2 + 0,0047^2} = 0,01458 \text{ s}^{-1}, \quad (4.14)$$

e acima do orifício o raio é obtido por

$$r_{\text{sup}} = \sqrt{0,0085^2 + 0,0074^2} = 0,01127 \text{ s}^{-1}. \quad (4.15)$$

Verifica-se então que os polos mantiveram-se dentro do círculo de raio $0,02 \text{ s}^{-1}$, como esperado.

Com isso, foi obtido um controlador que corresponde às restrições impostas sobre os polos do sistema. No entanto, como discutido anteriormente, isso não se traduz automaticamente no respeito das especificações temporais da resposta, pois o controle não é capaz de atuar sobre as matrizes B_{einf} e B_{esup} , nem pode ser controlada de forma direta a transição dos dois sistemas no nível do orifício. Além disso, se o sistema não é

perfeitamente de segunda ordem, as equações utilizadas para especificar o tempo de acomodação e o sobrepasso não são totalmente válidas.

5 Resultados e discussão

5.1 Análise temporal da resposta com o controlador

Primeiramente, interessa verificar o comportamento do sistema em malha fechada utilizando os ganhos da Equação 4.9, sem ainda levar em conta outros fatores que podem influenciar a resposta. Portanto, foram escolhidas as condições iniciais para as alturas $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 5$ cm. Nesse caso, quando o sistema atinge o orifício, do ponto de vista de $h_1(t)$, que é a variável a ser controlada, ocorre apenas uma mudança na dinâmica do sistema, mas não há nenhuma etapa intermediária de enchimento do segundo tanque. Além disso, foi imposta uma referência de altura h_{ref} igual a 10 cm. Para essas condições, foi obtido o seguinte resultado:

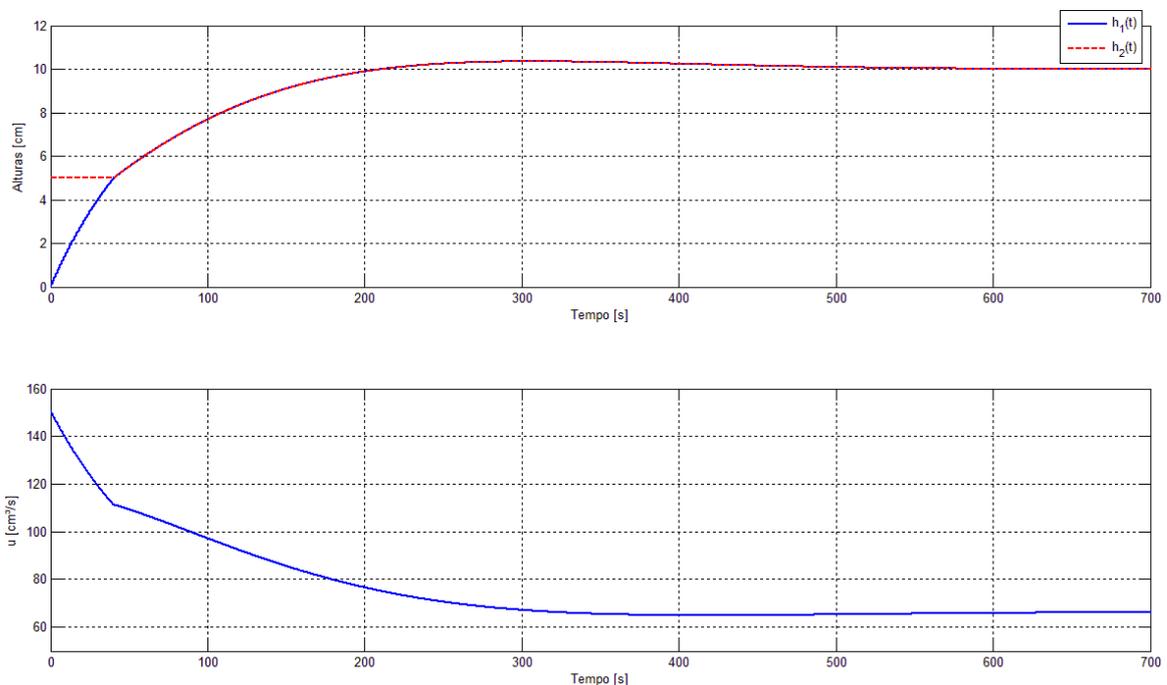


Figura 5.1 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 5$ cm

As informações temporais da resposta são $t_s = 422,56$ s, $M_o = 3,48\%$ e $u_{max} = 150,675$ cm^3/s .

Vê-se que o tempo de acomodação t_s foi bastante inferior ao valor especificado, que era igual a 666,67 s. Para entender esse fato, deve-se analisar os valores de α que são encontrados na Equação 4.11, sendo $\alpha_{inf} = 0,0138$ s^{-1} e $\alpha_{sup} = 0,0085$ s^{-1} . O valor de t_s pode ser estimado pela mesma relação da Equação 4.5, o que resultaria nas aproximações $t_{sinf} = 289,86$ s e $t_{ssup} = 470,59$ s. O tempo t_s resultante se manteve entre esses dois valores, o que faz sentido, já que o sistema é composto apenas pelo primeiro tanque durante parte da resposta. Como a área resultante é menor, a altura cresce mais rapidamente. Quando ocorre o chaveamento, no instante igual a 40,2 s, o sistema começa a responder de uma forma mais lenta, já que o líquido começa a passar pelo orifício e a área resultante aumenta.

A variável de controle segue a mesma lógica: inicialmente, ela tem o seu valor máximo, já que o erro é máximo. Como o sistema responde rapidamente, ela decresce

também dessa forma. Quando o sistema desacelera, ela também começa a variar mais devagar. Nota-se que o valor máximo dela, dado no momento inicial, é de $150,675 \text{ cm}^3/\text{s}$, o que excede o valor máximo desejado de $110 \text{ cm}^3/\text{s}$. Portanto, já é possível notar que para obedecer a esse critério, deverá ser usado um raio r menor (o que impediria o distanciamento excessivo dos polos) ou deverá ser ativado o critério de custo garantido.

Por último, o máximo sobrepasso depende dos ângulos $\varphi_{\text{inf}} = 18,81^\circ$ e $\varphi_{\text{sup}} = 41,04^\circ$, que correspondem, respectivamente, a sobrepassos de 0% e 2,71%. O valor de 3,48% encontrado para o sobrepasso da resposta não excede muito o valor estimado por φ_{sup} . A diferença entre o valor estimado e o real era esperada, pelo fato do sistema não ser perfeitamente de segunda ordem.

Em seguida, é interessante verificar a influência da condição inicial do segundo tanque. Escolhendo-se $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$, quando o sistema atingir a altura do orifício, ocorrerá uma etapa de enchimento do segundo tanque. A altura do primeiro tanque não deverá mudar enquanto isso. Após essa etapa, o sistema continua com o enchimento de ambos os tanques, mas com uma dinâmica mais lenta que anteriormente. Também foi mantida a referência de 10 cm. Para essas condições, o resultado é mostrado na figura a seguir:

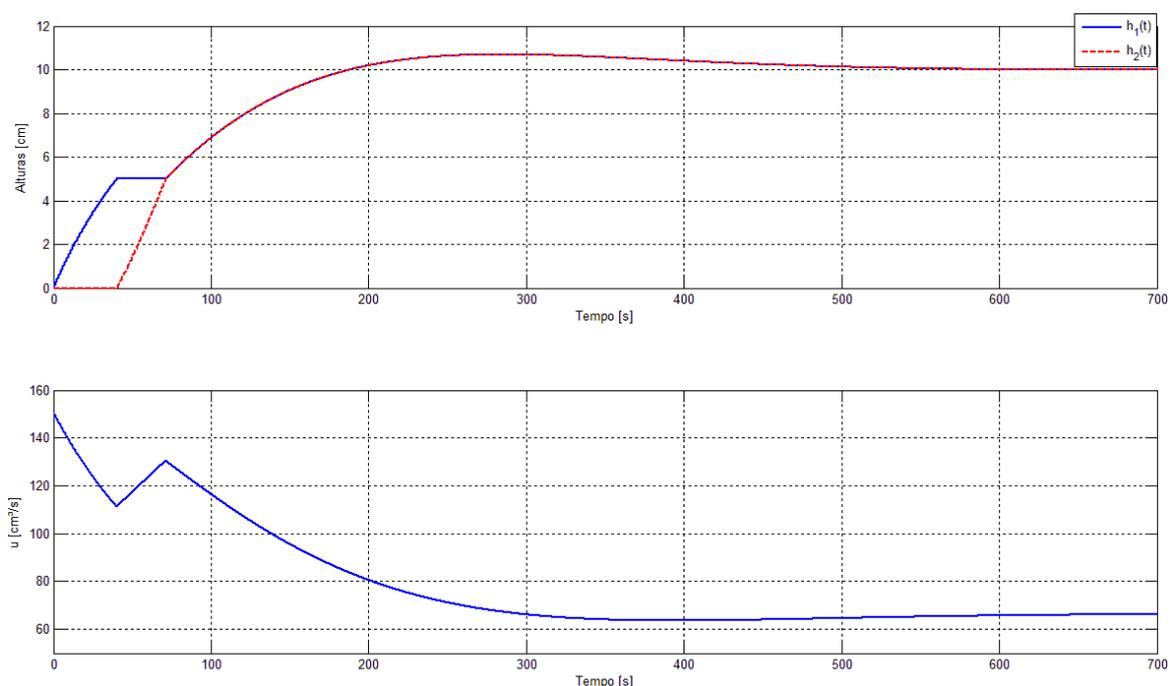


Figura 5.2 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$

Nesse caso, os valores obtidos para as especificações temporais foram $t_s = 465,5 \text{ s}$, $M_o = 6,91\%$ e $u_{\text{max}} = 150,675 \text{ cm}^3/\text{s}$ (com um segundo pico em $130,565 \text{ cm}^3/\text{s}$).

Apenas uma análise superficial da resposta obtida já mostra que há uma grande diferença em relação à anterior, da Figura 5.1. No instante igual a 40,2 s, o segundo tanque começa a encher, enquanto a altura do primeiro permanece constante. Do ponto de vista do controlador, o erro permanece constante nesse período. Como se trata de um controlador PI, a parte proporcional ao erro também se manterá em um valor fixo, enquanto a parte integral continuará a crescer. Isso causa o segundo pico da variável de

controle, que ainda é menor que o primeiro, no instante igual a 71,23 s. Nesse instante, a altura $h_2(t)$ alcança o mesmo valor que $h_1(t)$, e a etapa intermediária é terminada.

Comparando as características das respostas, vê-se que o tempo de acomodação t_s aumentou. Isso já era esperado, já que é necessário um tempo adicional para que o segundo tanque atinja o nível do primeiro. O aumento no sobrepasso é causado pela impossibilidade do controlador prever o congelamento da variável controlada. O aumento na variável de controle durante o enchimento do segundo tanque tem o efeito de acelerar um pouco o crescimento da altura, mas também de aumentar o sobrepasso. O primeiro fator tende a diminuir o tempo de acomodação, mas o segundo tende a aumentá-lo, já é necessário esperar a compensação do sobrepasso.

Para evitar essas diferenças, uma solução simples é bloquear o integrador durante a etapa intermediária, através do uso de variáveis lógicas. Com isso, a variável de controle não aumentará nesse período, e o sobrepasso se manterá igual ao do caso com $h_2(0) = 5$ cm. Isso resulta na resposta da figura a seguir:

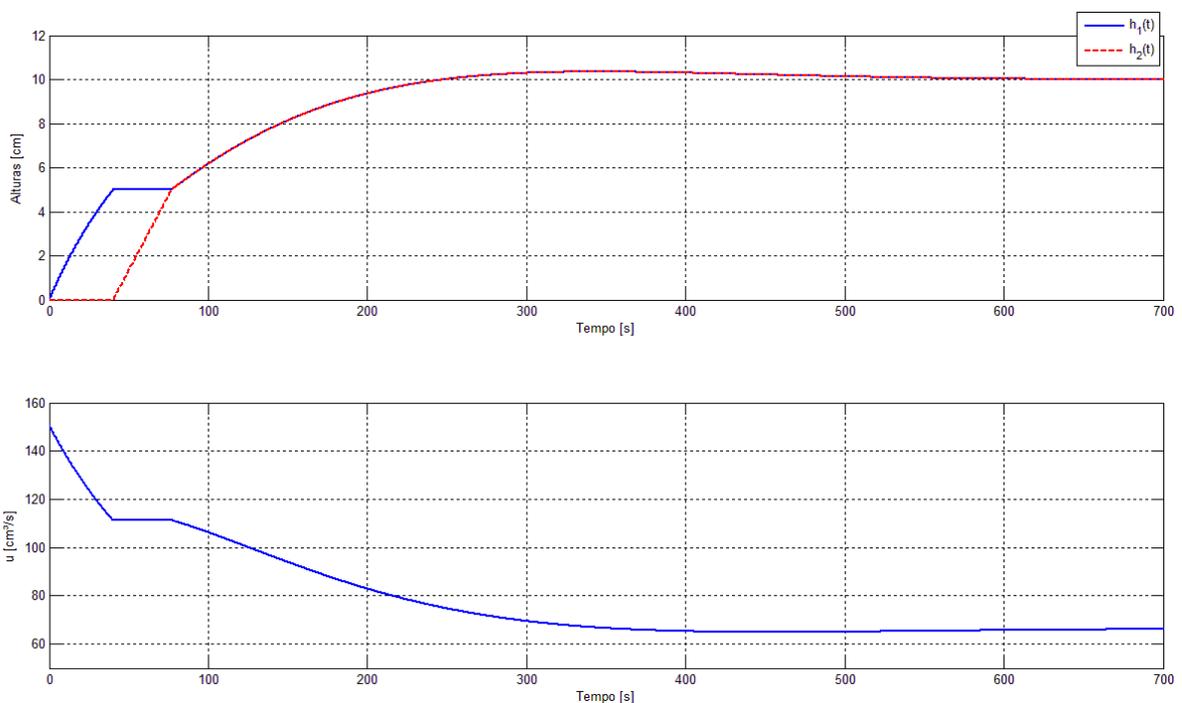


Figura 5.3 - Simulação para $h_1(0) = 0$ e $h_2(0) = 0$ e bloqueio do termo integral

Os valores obtidos para as características temporais foram $t_s = 459,26$ s, $M_o = 3,48\%$ e $u_{\max} = 150,675$ cm^3/s .

Essa resposta é exatamente igual à primeira, exceto pelo fato de que ocorre o enchimento do tanque. Assim, todas as características obtidas são também iguais, exceto pelo tempo de acomodação, que é aumentado pelo período necessário para encher o segundo tanque com a vazão constante de 111,4 cm^3/s .

Em relação à Figura 5.2, vê-se que o sobrepasso maior, causado pelo aumento da variável de controle, também prejudicou um pouco o tempo de acomodação, já que é necessário mais tempo para compensá-lo. Essa diferença é muito baixa, no entanto, sendo em torno de 6,24 s.

5.2 Análise da variação dos parâmetros de projeto

É bastante importante avaliar qual o efeito da variação dos parâmetros utilizados para o projeto. Como mostrado no Capítulo 2, no problema de D-estabilidade o semi-plano é definido por α , o cone é dependente de φ e o disco do centro c e do raio r . Já o critério de custo garantido pode ser variado através das matrizes C , que tenta minimizar a função custo conforme os estados do sistema, e D , que o faz através da variável de controle.

5.2.1 Variação de α

Inicialmente, realiza-se um teste com diferentes valores de α . Isso impõe diferentes valores mínimos (em módulo) para as partes reais dos polos, que por sua vez afetam o tempo de estabilização do sistema. O projeto é realizado da mesma forma que no Capítulo 4, mantendo-se os critérios $\varphi = 45^\circ$, $c = 0$ e $r = 0,02$. O primeiro controlador mostrado na simulação é o mesmo usado anteriormente, dado pela Equação 4.9, com $\alpha = 0,006$. Para o projeto do segundo controlador, foi utilizado $\alpha = 0,012$, e para o terceiro, $\alpha = 0,003$. Os outros parâmetros não foram alterados. Para todos os casos, foi usada a mesma referência de $h_{ref} = 10$ cm.

Foram monitoradas a variável de saída $h_1(t)$ e a variável de controle $u(t)$. O resultado da simulação é mostrado na figura a seguir:

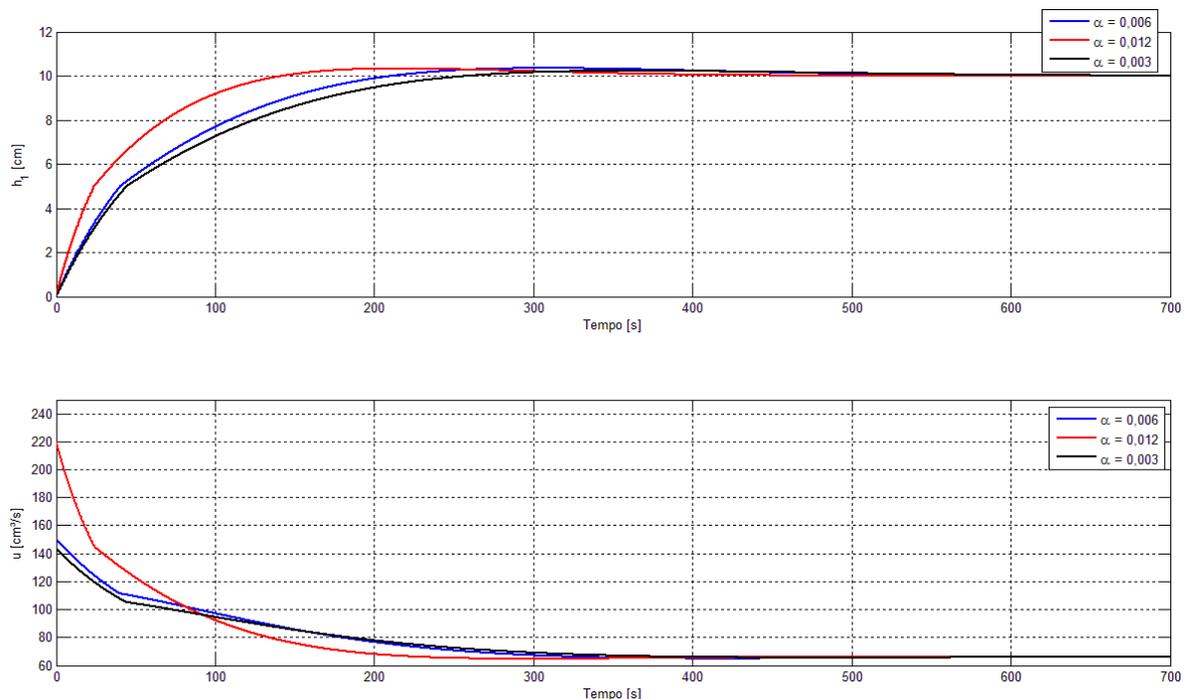


Figura 5.4 – Simulações de $h_1(t)$ com variações em α

Os ganhos dos controladores, as características temporais das respostas e os polos dos sistemas abaixo (p_{ninf}) e acima (p_{nsup}) do orifício são mostrados nas tabelas a seguir:

Tabela 5.1 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a α

Nome	α [s ⁻¹]	K_1 [cm ² /s ²]	K_2 [cm ² /s]	t_s [s]	M_o [%]	u_{max} [cm ³ /s]
K	0,006	0,1237	15,0675	422,56	3,48	150,675
$K_{\alpha 1}$	0,012	0,2042	22,0215	302,67	3,31	220,215
$K_{\alpha 2}$	0,003	0,1035	14,3969	419,94	2,28	143,969

Tabela 5.2 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a α

Nome	p_{1inf} [s ⁻¹]	p_{2inf} [s ⁻¹]	p_{1sup} [s ⁻¹]	p_{2sup} [s ⁻¹]
K	-0,0138 + 0,0047i	-0,0138 - 0,0047i	-0,0085 + 0,0074i	-0,0085 - 0,0074i
$K_{\alpha 1}$	-0,0134	-0,0261	-0,0121 + 0,0080i	-0,0121 - 0,0080i
$K_{\alpha 2}$	-0,0132 + 0,0017i	-0,0132 - 0,0017i	-0,0082 + 0,0063i	-0,0082 - 0,0063i

O controlador $K_{\alpha 1}$ foi projetado como o esperado. Os polos do sistema com esse controlador se mantiveram próximos ao limite imposto por α , logo a resposta foi mais rápida que com o controlador K. Para que o sistema seja capaz de responder dessa forma, é necessário um aumento na variável de controle, o que também foi verificado. O sobrepasso também diminuiu, já que os polos foram posicionados com menor parte imaginária pelo algoritmo. Esse se preocupou apenas em manter o limite imposto de $\varphi = 15^\circ$.

Para o outro controlador, $K_{\alpha 2}$, o resultado tem vários aspectos interessantes. Apesar de ser usado um valor duas vezes menor para α , a solução encontrada para os ganhos posicionou os polos muito próximos aos do sistema com o controlador K. Mesmo que o tempo de acomodação tenha diminuído um pouco, isso se deve apenas à diminuição do sobrepasso, e não é um efeito direto da diminuição de α . Normalmente, o resultado esperado seria o contrário. De fato, na Figura 5.4 é possível verificar que o controlador K impõe uma rapidez um pouco maior no sistema do que $K_{\alpha 2}$. Por último, nota-se que a variável de controle também sofreu uma pequena diminuição, efeito de uma ação menor sobre os polos do sistema em relação aos de malha aberta.

5.2.2 Variação de φ

A seguir, foi feita uma variação no parâmetro φ , mantendo-se os outros constantes. O controlador de base usa $\varphi = 45^\circ$, enquanto os outros utilizam $\varphi = 15^\circ$ e $\varphi = 60^\circ$. Da mesma forma que antes, foram verificadas a $h_1(t)$ e a variável de controle $u(t)$. O resultado é mostrado na Figura 5.5:

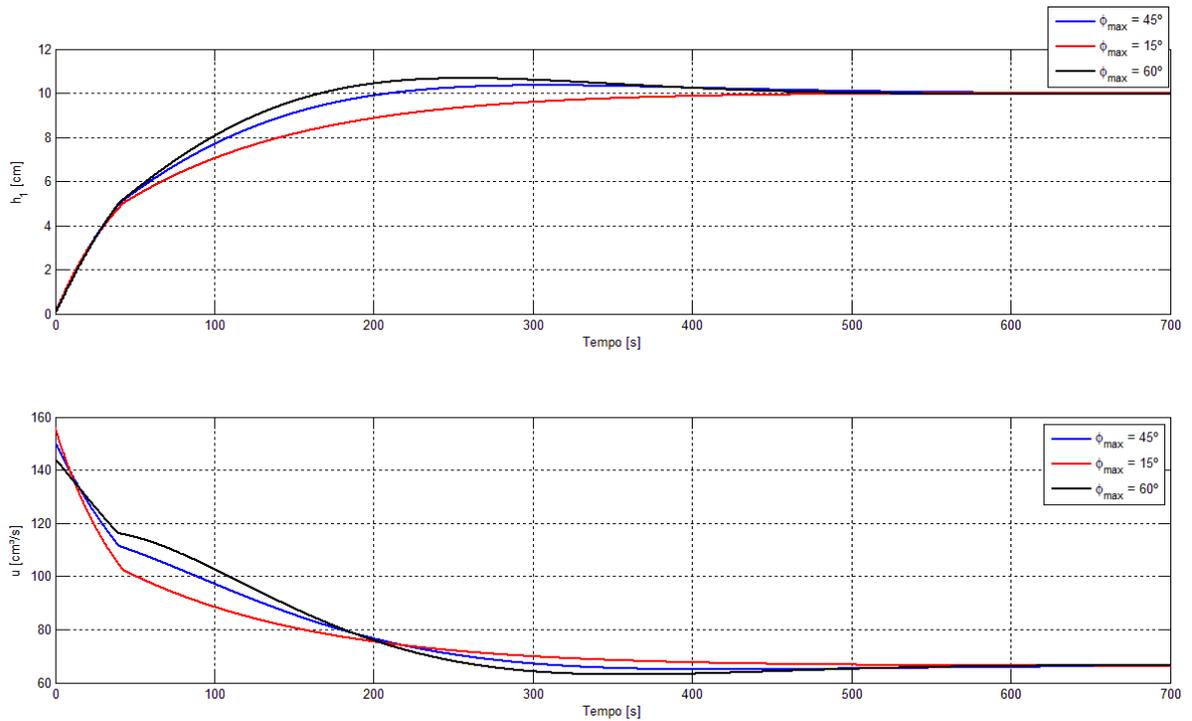


Figura 5.5 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em φ_{\max}

Os ganhos dos controladores, as características temporais das respostas e os polos dos sistemas são mostrados nas tabelas abaixo:

Tabela 5.3 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a φ

Nome	φ_{\max}	K_1 [cm ² /s ²]	K_2 [cm ² /s]	t_s [s]	M_o [%]	u_{\max} [cm ³ /s]
K	45°	0,1237	15,0675	422,56	3,48	150,675
$K_{\varphi 1}$	15°	0,08	15,6127	367,68	0,012	156,127
$K_{\varphi 2}$	60°	0,1512	14,4381	407,96	6,7	144,381

Tabela 5.4 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a φ

Nome	$p_{1\text{inf}}$ [s ⁻¹]	$p_{2\text{inf}}$ [s ⁻¹]	$p_{1\text{sup}}$ [s ⁻¹]	$p_{2\text{sup}}$ [s ⁻¹]
K	-0,0138 + 0,0047i	-0,0138 - 0,0047i	-0,0085 + 0,0074i	-0,0085 - 0,0074i
$K_{\varphi 1}$	-0,0061	-0,0224	-0,0088 + 0,0022i	-0,0088 - 0,0022i
$K_{\varphi 2}$	-0,0132 + 0,0092i	-0,0132 - 0,0092i	-0,0082 + 0,0094i	-0,0082 - 0,0094i

Os polos correspondem a ângulos de 18,81° e 41,04° para o controlador K, 0° e 14,04° para $K_{\varphi 1}$ e 34,88° e 48,9° para $K_{\varphi 2}$. Portanto, todos os limites impostos para φ foram

respeitados. Além disso, verifica-se que, quanto maior o ângulo permitido para os polos, maior foi o sobrepasso. Também pode-se notar que o ganho integral K_1 foi diminuído para possibilitar ângulos menores, enquanto o ganho proporcional K_2 foi aumentado.

Quanto ao tempo de acomodação, é difícil traçar qualquer relação direta. Para o caso do controlador $K_{\phi 1}$, como o sobrepasso é muito baixo, o critério do tempo de acomodação é satisfeito quando o sistema atinge 98% do valor final da resposta. Para os outros casos, como o sobrepasso é maior que 2%, isso ocorre apenas quando o crescimento excessivo da altura é compensado e o valor se mantém abaixo dos 102%. O fato de o sistema com o controlador $K_{\phi 2}$ ser mais rápido que o com o controlador K se deve, provavelmente, ao fato de que o ganho integral desse sistema é bem maior do que o com o controlador K , o que causa uma resposta mais rápida quando o erro é baixo.

Já a variável de controle variou muito pouco, mas a relação é bastante clara. Quanto maior o ganho proporcional, maior a variável de controle máxima, já que o momento de máximo erro é no início da simulação. Nesse momento, o integrador não tem influência nenhuma sobre a variável de controle.

5.2.3 Variação de r

Os últimos parâmetros relativos à D-estabilidade correspondem ao centro e ao raio do disco, que tem como função principal restringir o posicionamento dos polos do sistema, de forma a evitar que eles sejam excessivamente afastados de suas posições originais. No caso desse trabalho, preferiu-se manter o centro do disco na origem do plano s . Supondo que fosse mantida no mesmo ponto a intersecção do círculo e do eixo das abscissas, mudar o centro e o raio só iria causar uma mudança no ângulo permitido para os polos, o que não é de muito interesse para esse caso. Assim, o centro será mantido fixo, e apenas o raio será variado.

O controlador de base foi encontrado utilizando um raio $r = 0,02 \text{ s}^{-1}$. Os outros foram projetados com $r = 0,04 \text{ s}^{-1}$ e $r = 0,014 \text{ s}^{-1}$. O resultado da simulação, novamente verificando-se $h_1(t)$ e $u(t)$, é o seguinte:

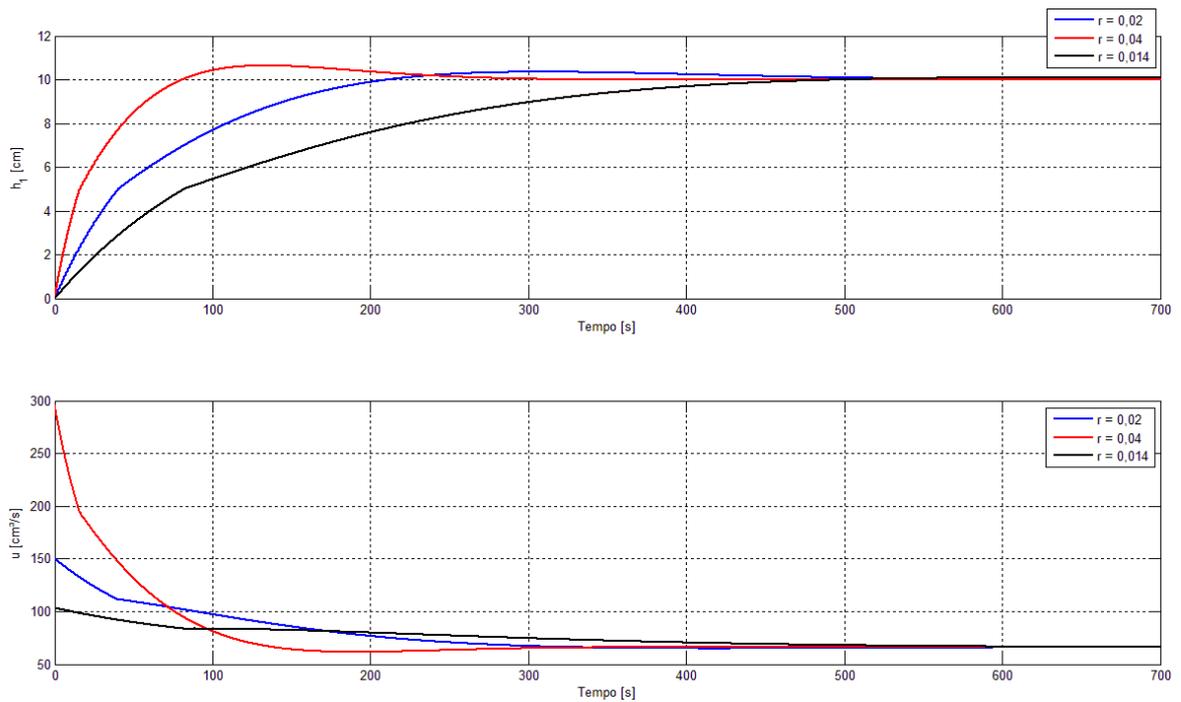


Figura 5.6 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em r

Os ganhos dos controladores, as características temporais das respostas e os polos dos sistemas são informados nas tabelas a seguir:

Tabela 5.5 – Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a r

Nome	r [s^{-1}]	K_1 [cm^2/s^2]	K_2 [cm^2/s]	t_s [s]	M_o [%]	u_{max} [cm^3/s]
K	0,02	0,1237	15,0675	422,56	3,48	150,675
K_{r1}	0,04	0,3988	29,5815	233,28	6,36	295,815
K_{r2}	0,014	0,0538	10,3457	426,82	0,96	103,457

Tabela 5.6 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a r

Nome	p_{1inf} [s^{-1}]	p_{2inf} [s^{-1}]	p_{1sup} [s^{-1}]	p_{2sup} [s^{-1}]
K	$-0,0138 + 0,0047i$	$-0,0138 - 0,0047i$	$-0,0085 + 0,0074i$	$-0,0085 - 0,0074i$
K_{r1}	-0,0242	-0,0283	$-0,016 + 0,0125i$	$-0,016 - 0,0125i$
K_{r2}	-0,0081	-0,0113	$-0,0061 + 0,0043i$	$-0,0061 - 0,0043i$

Comparando o controlador K_{r1} com o controlador K, vê-se que ele impõe uma resposta muito mais rápida ao sistema, e seus ganhos são bem maiores. Assim, ele

consegue obter um tempo de acomodação menor, mas a sintonia mais agressiva resulta também em um aumento considerável do sobrepasso e, principalmente, da variável de controle. Os polos na região acima do orifício têm um ângulo correspondente a 38° e um módulo igual a $0,0203 \text{ s}^{-1}$. O sobrepasso, então, não é devido a um aumento inesperado do ângulo, sendo causado principalmente pela aceleração da resposta, que amplia o efeito das não idealidades do sistema.

Já o controlador K_{r2} torna a resposta do sistema mais lenta que a dos outros, tendo ganhos menores. No entanto, seu sobrepasso é quase nulo, e ele requer muito menos da variável de controle, sendo o único a atingir a especificação de manter u_{\max} abaixo de $110 \text{ cm}^3/\text{s}$. O tempo de acomodação não atingiu um valor muito maior do que aquele obtido com o controlador K , mesmo que a resposta tenha sido visivelmente mais lenta. Isso ocorreu porque o sobrepasso do sistema é menor do que a tolerância do critério do tempo de acomodação, então esse é satisfeito quando a resposta atinge 98% do seu valor final.

Uma observação importante é que foram feitas tentativas de projeto com raios menores. Porém, a região para o posicionamento dos polos é limitada de um lado pelo raio e do outro por α , nesse caso igual a $0,006 \text{ s}^{-1}$. Com a utilização de raios inferiores a $0,014 \text{ s}^{-1}$, a região se torna excessivamente restritiva, o que impossibilita a alocação dos polos dentro dela. O programa acusa, nesse caso, que o problema é infactível.

5.2.4 Variação de D

Por fim, será variado o parâmetro referente ao critério de custo garantido. O controlador base utiliza a matriz $D = [0]$, ou seja, ignora esse critério. Outros dois controladores foram projetados utilizando $D = [3 \cdot 10^{-5}]$ e $D = [10^{-4}]$. O resultado da simulação é mostrado abaixo:

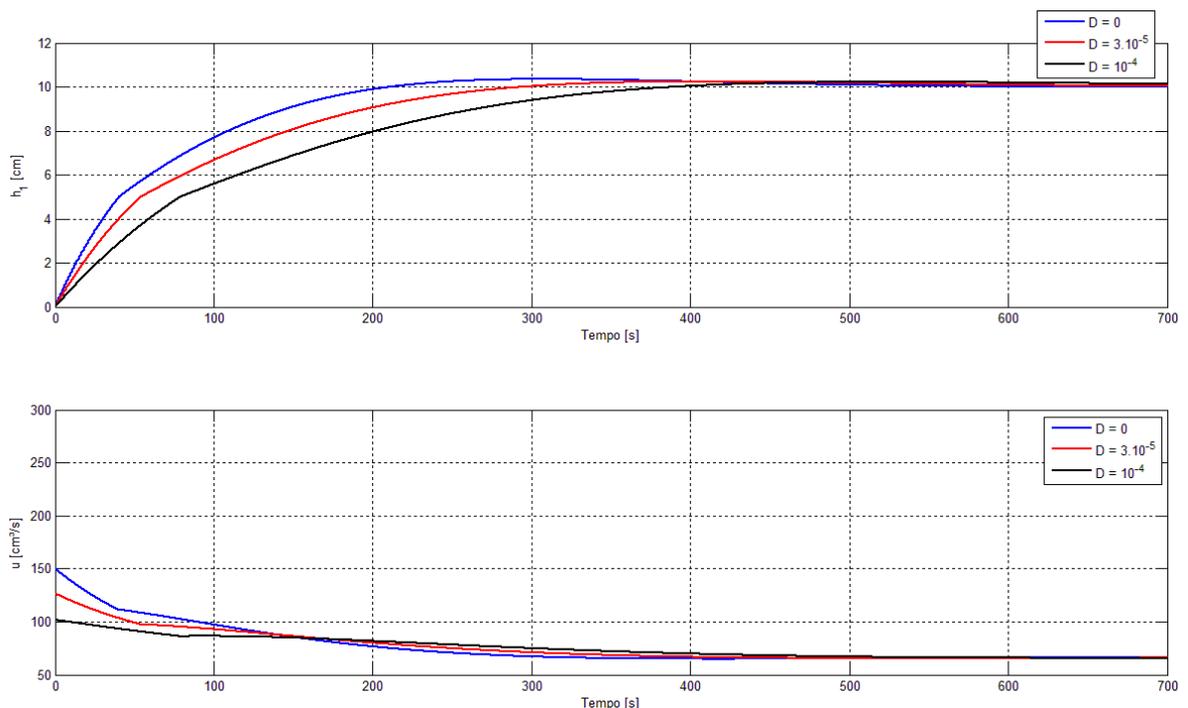


Figura 5.7 - Simulações de $h_1(t)$ com variações em D

As tabelas abaixo mostram as características das respostas e dos polos do sistema para os três controladores:

Tabela 5.7– Ganhos e características temporais do sistema com os controladores variando em relação a D

Nome	D	K_1 [cm ² /s ²]	K_2 [cm ² /s]	t_s [s]	M_o [%]	u_{max} [cm ³ /s]
K	0	0,1237	15,0675	422,56	3,48	150,675
K_{D1}	$3 \cdot 10^{-5}$	0,0872	12,6835	481,59	2,39	126,835
K_{D2}	10^{-4}	0,0617	10,18	591,49	2,22	101,8

Tabela 5.8 – Posição dos polos do sistema com os controladores variando em relação a D

Nome	p_{1inf} [s ⁻¹]	p_{2inf} [s ⁻¹]	p_{1sup} [s ⁻¹]	p_{2sup} [s ⁻¹]
K	-0,0138 + 0,0047i	-0,0138 - 0,0047i	-0,0085 + 0,0074i	-0,0085 - 0,0074i
K_{D1}	-0,0117 + 0,0034i	-0,0117 - 0,0034i	-0,0073 + 0,0061i	-0,0073 - 0,0061i
K_{D2}	-0,0096 + 0,0037i	-0,0096 - 0,0037i	-0,006 + 0,0053i	-0,006 - 0,0053i

A inclusão do critério de custo garantido teve exatamente o efeito esperado. Com o controlador K_{D1} , houve uma diminuição dos ganhos, do sobrepasso e da variável de controle, e um aumento do tempo de acomodação. Pode-se notar que os polos do sistema acima do orifício foram deslocados de forma a se aproximarem da região com parte real igual a $-0,006 \text{ s}^{-1}$. A parte imaginária também diminuiu para respeitar a restrição do ângulo dos polos.

O segundo controlador, K_{D2} , diminuiu ainda mais os ganhos, assim como o sobrepasso e a variável de controle. Como o sobrepasso foi um pouco maior que 2%, esse também foi o controlador mais lento entre todos os projetados, já que o critério definido para o tempo de acomodação considera uma faixa de 2% para mais ou para menos em relação ao valor final da saída. Apesar disso, esse controlador foi de certa forma o mais bem-sucedido do projeto, já que respeitou todas as especificações temporais e de projeto.

A última consideração a ser feita em relação à variação da matriz D é que valores superiores a 10^{-4} não surtiram efeito algum sobre o resultado. Isso ocorreu porque os polos do sistema acima do orifício estão no limite mínimo estabelecido, dado por $\alpha = 0,006 \text{ s}^{-1}$. Assim, o critério de custo-garantido foi uma excelente forma de restringir a variável de controle sem dificultar o posicionamento dos polos, problema encontrado quando isso foi feito através da diminuição do raio do disco.

6 Conclusões e trabalhos futuros

Em relação ao modelo escolhido, a principal vantagem verificada foi sua simplicidade. Para um estudo inicial de uma metodologia diferente, como é o caso desse trabalho, isso se demonstrou importante para concentrar os esforços no método de controle, em vez de particularidades do sistema. Isso ocorre porque é mais fácil de relacionar os critérios do projeto com os ganhos obtidos e com os polos do sistema em malha fechada, e esses por sua vez com os resultados das simulações. Ainda assim, a planta apresentou aspectos únicos que precisaram ser respeitados, tal como o que ocorreu no bloqueio do termo integral do controlador, nos casos em que a condição inicial do segundo tanque cria a necessidade de enchê-lo até atingir também o nível do orifício.

Quando se considera o objetivo clássico de obter um controlador capaz de satisfazer os requisitos definidos, pode-se dizer que esse trabalho foi bem-sucedido. O último controlador encontrado, que incluiu o critério de custo garantido, foi capaz de obedecer às restrições de tempo de acomodação, sobrepasso e máxima variável de controle. Além disso, verificou-se a validade de utilizar o critério de D-estabilidade para definir o posicionamento dos polos do sistema em malha fechada, e, assim, o seu comportamento. O critério de custo garantido é um ótimo complemento para o projeto, pois permite obter controladores que reduzem a variável de controle sem restringir de forma excessiva a região permitida para os polos, o que ocorre se essa redução for tentada apenas através do raio do disco.

Outro ponto positivo encontrado foi a confiabilidade do método no que se refere à factibilidade do problema. Quando não há uma combinação das variáveis de busca capaz de satisfazer às restrições impostas quanto ao posicionamento dos polos, o programa retorna uma mensagem de erro, avisando que o problema é infactível. É importante notar que, dependendo do caso, o programa pode realizar mais um passo na direção ótima calculada e retornar valores de ganhos mesmo assim. Cabe ao usuário verificar se o programa acusou a impossibilidade de resolver o problema e se os polos foram de fato alocados na região definida. Caso contrário, deve-se projetar novamente essa região, usando critérios menos rígidos.

Contudo, o objetivo de obter uma metodologia capaz de solucionar esse problema de uma vez só não foi completamente atingido. Primeiramente, a não ser que o sistema seja perfeitamente de primeira ou segunda ordem, pode ser difícil relacionar de forma precisa o posicionamento dos polos com as características da resposta no tempo. Isso pode criar a necessidade de redefinir os critérios através de diversas tentativas. Outro ponto importante é que, apesar das vantagens do critério de custo garantido, pode ser difícil relacionar quantitativamente as matrizes de entrada com a variável de controle máxima, o que gera a necessidade de fazer algumas tentativas variando os parâmetros de entrada até atingir o resultado desejado. Outra possibilidade é usar termos muito altos nas matrizes para forçar o posicionamento com parte real de menor módulo o possível, mas são necessários mais testes para verificar se isso não causaria outros problemas.

Um aspecto importante a ser destacado em projetos numéricos de controladores, tal como nesse trabalho, é que os algoritmos se propõem a satisfazer as restrições impostas: dentro dos limites estabelecidos pelo projetista, os resultados podem ser difíceis de prever, e não há nenhuma obrigatoriedade que um projeto que permite a obtenção de

uma solução melhor vá de fato obtê-la. Assim, por exemplo, a imposição de um limite menor em módulo para a parte real dos polos pode resultar numa sucessão de operações do algoritmo que resulte em uma resposta mais rápida para o sistema, mesmo que ela devesse teoricamente ser mais lenta. Isso não é o normalmente esperado, mas do ponto de vista do programa, só há soluções válidas e inválidas, não havendo uma qualificação de respostas melhores ou piores.

Tais fatos mostram a importância de se ter um bom conhecimento de todos os aspectos envolvidos no projeto, o que tornou a metodologia proposta nesse trabalho mais complexa do que o planejado. O conhecimento da planta é importante para definir os critérios da resposta e as limitações do atuador e do sistema. Saber a teoria de controle é obrigatório para definir as variáveis usadas nos critérios de desempenho e a topologia do controlador. Conhecer o algoritmo usado pode ser, no mínimo, útil para entender como e por que estão sendo obtidos os resultados dados pelo programa. Por último, saber analisar a resposta é fundamental para redefinir os requisitos e obter um comportamento mais próximo ao desejado, ou mesmo para redefinir o projeto em uma etapa anterior, caso seja verificada a impossibilidade de atingir as especificações.

Para trabalhos futuros, seria interessante utilizar essa metodologia em plantas mais complexas. A definição de topologias de maior ordem para o controlador poderia ser necessária, o que causaria um aumento considerável na ordem do modelo. Então, seria interessante verificar como os algoritmos se comportam quando há muito mais restrições impostas, com o cuidado de não fornecer problemas impossíveis de serem resolvidos.

Além disso, seria importante verificar a ordem do número de operações realizadas. Um modelo mais complexo causa um aumento ainda maior no número de restrições, o que por sua vez faz crescer muito mais a quantidade de cálculos a ser realizada. Em casos extremos, isso poderia invalidar o método para problemas excessivamente complexos. Assim, poderia ser necessária uma reavaliação do algoritmo proposto, além de uma escolha muito cuidadosa do solver utilizado.

Outra ideia interessante seria estudar a norma H_∞ , usada para os casos em que se interessa na minimização de determinados sinais. Em especial, ela pode ser utilizada para reduzir o efeito de perturbações, que é um dos problemas usuais de controle. Na planta estudada nesse trabalho, seriam impostas perturbações nas vazões, por exemplo. Poderia ser estudada também a possibilidade de usar essa norma para reduzir a influência das não idealidades da planta sobre a saída. Tornando-se o comportamento do sistema mais próximo ao linear, suas características também seriam mais parecidas àquelas do sistema linear usado para o projeto.

Por último, outra proposta seria aplicar outras metodologias de controle robusto e comparar seu desempenho e dificuldade de projeto com a proposta no presente trabalho. Se for de interesse utilizar um modelo linear, poderia ser feita uma modelagem e o controle considerando-se um sistema linear com parâmetros variantes no tempo. Caso deseje-se utilizar uma aproximação não-linear, uma possibilidade seria estudar o controle de linearização por realimentação robusta. Esses métodos utilizam os mesmos princípios citados nesse trabalho para garantir mais confiabilidade no controlador, evitando comportamentos indesejados e possivelmente catastróficos.

7 Referências

APKARIAN, P.; CHILALI, M.; GAHINET, P. *Robust Pole Placement in LMI Regions*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, n. 12, 1999.

BOYD, S; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

CHILALI, M.; GAHINET, P. *H^∞ design with pole placement constraints: an LMI approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, n. 3, 1996.

COUTINHO, D.; PEREIRA, L.F.A; *Petroleum Process Control: Practical Aspects of Modelling, Identification and Control*, cap. 6. Trabalho ainda não publicado.

DULLERUD, G.E.; PAGANINI, F. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Springer, 2010.

EL AROUDI, A.; GARCES, P.; LEYVA, R.; OLALLA, C.; QUEINNEC, I. *LMI robust control design for boost PWM converters*. IET Power Electronics, vol. 3, n. 1, 2010.

JOELIANTO, E.; SUTARTO, H.Y.; WICAKSONO, A. *Compensation of delay time uncertainties on industrial control ethernet networks using LMI based robust H^∞ PID controller*. 5th IFIP International Conference on Wireless and Optical Communications Networks, 2008.

LIAO, F.; WANG, J.L.; YANG, G.H. *Reliable robust flight tracking control: an LMI approach*. IEEE Transactions on Control System Technology, vol.10, n. 1, 2002.

LÖFBERG, J. *YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Disponível em: <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n=Main.Download>.

MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.

RAY, L.R.; STENGEL, R.F. *A Monte Carlo Approach to the Analysis of Control System Robustness*. Pergamon Press Ltd., 1992.

STURM, J. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*. Optimization Methods and Software, vol. 11, p. 625–653, 1999. Disponível em: <http://sedumi.ie.lehigh.edu/downloads>.

WEINMANN, Alexander. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer, 1991.

Apêndice

Apêndice 1 – Programa de cálculo dos ganhos em MATLAB

```

clear all
clc
close all
warning('off','YALMIP:strict')
% Parâmetros do sistema
A1 = 583; % Área do tanque 1, em cm²
A2 = 384.25; % Área do tanque 2, em cm²
% Matrizes para o sistema abaixo do orifício
Ainf = [0 1;0 -1.0076/A1];
Binf = [0;-1/A1];
% Matrizes para o sistema acima do orifício
Asup = [0 1;0 -1.4485/(A1+A2)];
Bsup = [0;-1/(A1+A2)];
% Parâmetros do critério de D-Estabilidade
alpha = 0.006; % Semi-plano que define o módulo mínimo para a parte real
dos polos
phi = 45.0; % Ângulo do setor cônico que define o ângulo máximo dos polos
r = 0.02; % Raio do disco que limita o posicionamento dos polos
c = 0.0; % Centro do disco
% Matrizes L e M do semi-plano
L1 = 2*alpha;
M1 = 1;
% Matrizes L e M do setor cônico
L2 = [0 0;0 0];
M2 = [sind(phi) cosd(phi);-cosd(phi) sind(phi)];
% Matrizes L e M do disco
L3 = [-r c;c -r];
M3 = [0 1;0 0];
% Matrizes do critério de custo garantido
C = [0 0];
D = [0];
% Inicialização das variáveis de decisão simbólicas (sdpvar)
Q = sdpvar(2,2);
W = sdpvar(1,2);
lambda = sdpvar(1,1);
% Matrizes Constantes
P0 = eye(2);
I2 = eye(2);
% LMIs dos critérios utilizados
F = [Q > 0];
F = F + [kron(L1,Q)+kron(M1,(Ainf*Q+Binf*W)) + kron(M1',(Ainf*Q+Binf*W)')
< 0];
F = F + [kron(L1,Q)+kron(M1,(Asup*Q+Bsup*W)) + kron(M1',(Asup*Q+Bsup*W)')
< 0];
F = F + [kron(L2,Q)+kron(M2,(Ainf*Q+Binf*W)) + kron(M2',(Ainf*Q+Binf*W)')
< 0];
F = F + [kron(L2,Q)+kron(M2,(Asup*Q+Bsup*W)) + kron(M2',(Asup*Q+Bsup*W)')
< 0];
F = F + [kron(L3,Q)+kron(M3,(Ainf*Q+Binf*W)) + kron(M3',(Ainf*Q+Binf*W)')
< 0];
F = F + [kron(L3,Q)+kron(M3,(Asup*Q+Bsup*W)) + kron(M3',(Asup*Q+Bsup*W)')
< 0];
F = F + [[P0 I2;I2 Q] > 0];
F = F + [[Q*Ainf'+Ainf*Q+W'*Binf'+Binf*W Q*C'+W'*D'; C*Q+D*W -lambda] <
0];
F = F + [[P0 I2;I2 Q] > 0];
F = F + [[Q*Asup'+Asup*Q+W'*Bsup'+Bsup*W Q*C'+W'*D'; C*Q+D*W -lambda] <
0];
% Utilização do solver para resolver as LMIs
options = sdpsettings('solver','sedumi');

```

```

solvesdp(F,lambda,options);
% Conversão das variáveis de decisão de sdpvar para double
Wdouble = double(W);
Qdouble = double(Q);
% Obtenção dos ganhos do controlador PI
K = Wdouble*inv(Qdouble);
K1 = K(1)
K2 = K(2)

```

Observação: para executar o programa, é necessário antes incluir os caminhos das pastas do YALMIP e do solver SeDuMi. Isso pode ser feito, por exemplo, através dos comandos:

```

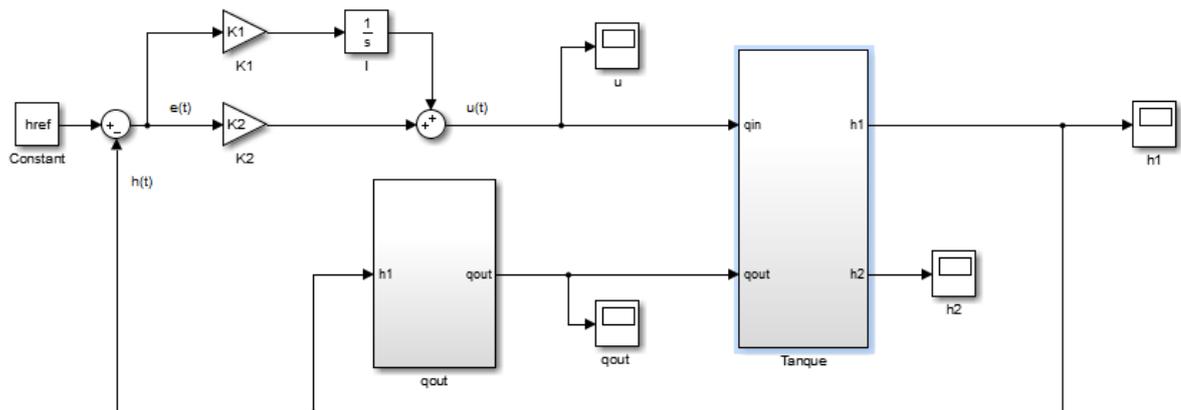
addpath(genpath('Caminho\sedumi-master'))
addpath(genpath('Caminho\yalmip'))

```

onde “Caminho” representa a pasta do computador na qual os programas foram colocados.

Apêndice 2 – Representação do modelo do tanque em Simulink

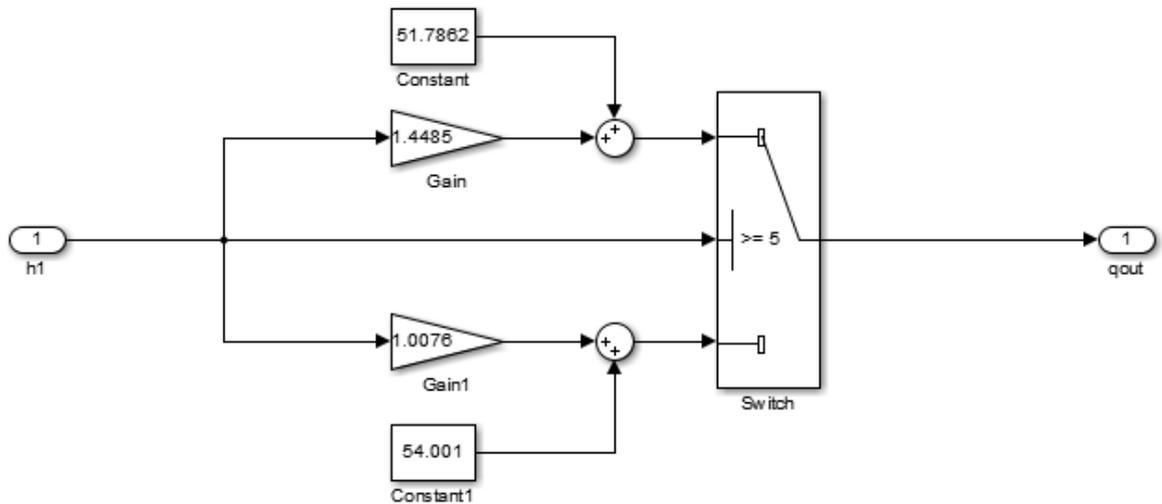
O modelo foi implementado de forma a seguir as equações e o comportamento discutido no Capítulo 2.4. A vista geral do modelo pode ser vista na figura a seguir:



a) Representação geral do tanque

A entrada do sistema é a referência de altura. À direita desse, estão o somador para gerar o sinal de erro e , após, os ganhos do controlador. Esses definem a variável de controle, que é a vazão de entrada do tanque. A vazão de saída depende da altura do primeiro tanque. As alturas das colunas de líquido são as saídas do sistema do tanque.

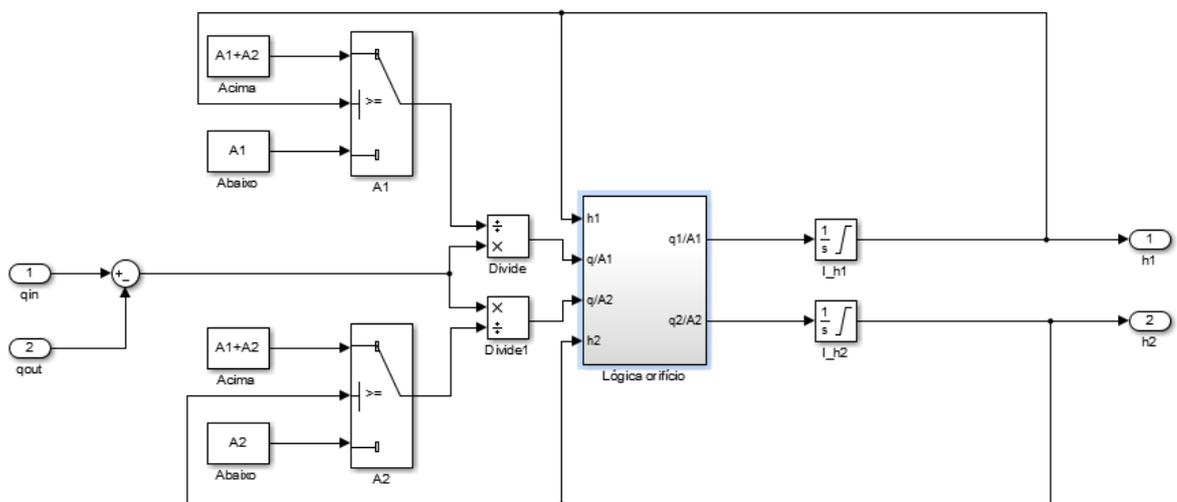
O subsistema responsável pela vazão de saída é o seguinte:



b) Subsistema da vazão de saída

É usado o bloco Switch (chave) para separar os casos acima e abaixo do orifício. Se a altura do primeiro tanque estiver abaixo do orifício, serão usados os ganhos da parte inferior. Caso contrário, serão usados os ganhos da parte superior.

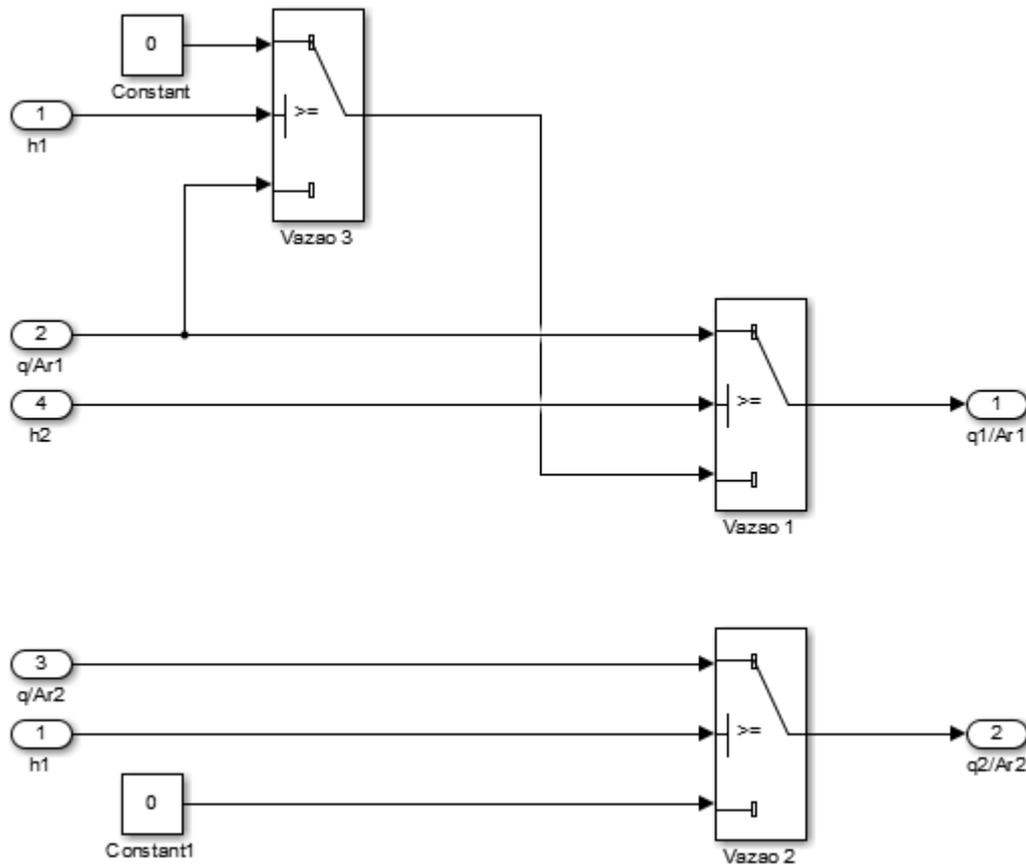
A seguir, é mostrado o subsistema do tanque:



c) Subsistema do tanque

Na metade superior, é definida a área resultante do primeiro tanque, A_{R1} , novamente através do uso do bloco Switch. Abaixo do orifício, ela é apenas A_1 . Acima, é $A_1 + A_2$, já que a altura dos tanques aumenta conjuntamente. Na metade inferior, é feito o mesmo para o segundo tanque, definindo-se A_{R2} . Essas áreas dividem a diferença da vazão de entrada e de saída, o que normalmente resultaria diretamente na variação de altura. No entanto, aqui ainda há um bloco que gerencia a lógica do orifício. As saídas desse bloco são as variações das alturas, que são então integradas para determinar $h_1(t)$ e $h_2(t)$.

O subsistema que imita o comportamento do sistema em relação ao orifício é o seguinte:



d) Subsistema da lógica do orifício

O primeiro bloco Switch divide os casos em que $h_1(t)$ está abaixo do orifício, caso em que é passado o resultado da operação $q_{in}-q_{out}/A_{R1}$, ou acima do orifício, caso em que é passado o valor 0. No segundo Switch, quando $h_2(t)$ está abaixo do orifício, é passado o valor do primeiro Switch para a variação de altura. Quando $h_2(t)$ está acima de h_0 , é também passado o valor $q_{in}-q_{out}/A_{R1}$. Com isso, são definidas duas situações:

- $h_1(t) \geq h_0$ e $h_2(t) < h_0$: vazão resultante nula (toda a vazão para o segundo tanque)
- Outros casos: vazão resultante igual a $q_{in}-q_{out}/A_{R1}$, sendo A_{R1} igual a A_1 ou A_1+A_2 , dependendo do caso.

Para o segundo tanque, a lógica é mais simples. Se $h_1(t)$ está abaixo do orifício, a vazão é nula. Acima dele, ela é igual a $q_{in}-q_{out}/A_{R2}$, sendo A_{R2} igual a A_2 ou A_1+A_2 , conforme o caso em questão.

Apêndice 3 – Produto de Kronecker

O produto de Kronecker, notado pelo símbolo \otimes , é uma operação entre duas matrizes que resulta em uma matriz em bloco. Seu resultado é composto pelas sucessivas concatenações das multiplicações da primeira matriz pelos termos da segunda, sendo que esses determinam o posicionamento dos blocos. Para duas matrizes de segunda ordem, por exemplo, tem-se:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Tal operação possui diversas propriedades interessantes, mas seu principal uso no contexto de controle robusto é seu uso na composição das LMIs no critério de D-estabilidade. Mais detalhes podem ser vistos em Weinmann, 1991.

O comando correspondente a essa operação, no MATLAB, é “kron”.