

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

MATRIZ NÃO-MODAL EM INTEGRAÇÃO E  
INICIALIZAÇÃO NUM MODELO BAROTRÓPICO E  
UM ESTUDO NUMÉRICO DA DISPERSÃO VERTICAL  
TURBULENTA

por

Haroldo Fraga de Campos Velho

Tese para obtenção do título de  
Doutor em Engenharia

PROMEC/UFRGS  
Porto Alegre  
Outubro de 1992

MATRIZ NÃO-MODAL EM INTEGRAÇÃO E  
INICIALIZAÇÃO NUM MODELO BAROTRÓPICO E  
UM ESTUDO NUMÉRICO DA DISPERSÃO VERTICAL  
TURBULENTA

por

Haroldo Fraga de Campos Velho  
Engenheiro Químico

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Aprovada por:

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen (orientador)

Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Prof. Dr. Osvaldo Luiz Leal de Moraes

Prof. Dr. Pedro Leite da Silva Dias

Prof. Dr. Sérgio Müller  
Coordenador do Promec

Porto Alegre, 15 de outubro de 1992

A minha esposa Nádia de Campos Velho  
pelo constante incentivo, amor e compreensão.

A minha Família, pelo respeito e confiança,  
à condução ao bom caminho.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Julio Cesar Ruiz Claeysen pela orientação segura e sua permanente disposição, realmente notável diante de suas incontáveis atividades.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e em particular, ao Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC), instituição ao qual estou profissionalmente vinculado, que permitiu, e incentivou, o término de minha formação científica. Principalmente a chefia imediata, nas pessoas do Dr. Leon Roque Sinay, do Dr. Luiz Alberto Vieira Dias e do Dr. Paulo Renato Moraes.

Agradeço também o apoio dos demais colegas do LAC, em especial ao Dr. Tatuó Nakanishe, pela ajuda.

Ao pesquisador Marco Antônio Maringolo Leme (CPTEC/INPE) pelas úteis discussões e esclarecimentos de várias questões da ciência meteorológica.

Aos colegas e professores do PROMEC pelo espírito de amizade e colaboração. Em especial a Elaine, Liliane e Volnei, colegas do curso de doutorado que durante vários dias me cederam seu preciosíssimo tempo no computador.

Por último, aos meus familiares e amigos, principalmente ao prof. Marco Tulio Vilhena.

## RESUMO

A técnica da matriz não-modal é útil num contexto em que não se tem acesso aos modos normais de um sistema, caso freqüente em muitos modelos meteorológicos de área limitada. O método é investigado no contexto de um modelo unidimensional, tanto para integração temporal, como para filtrar componentes de altas freqüências dos dados iniciais do modelo (procedimento conhecido como inicialização).

Determinam-se os campos de velocidade com o uso da inversa generalizada de Moore-Penrose, como solução de uma equação de Poisson associada a cada componente da velocidade horizontal.

Mostra-se também um estudo da dispersão vertical de contaminantes em camadas estáveis, cujo coeficiente de difusão turbulenta é obtido da teoria de similaridade local, num esquema de fechamento de primeira ordem.

# INTEGRATION AND INITIALIZATION BY NON-MODAL MATRIX IN A BAROTROPIC MODEL AND A NUMERICAL STUDY OF THE TURBULENT VERTICAL DISPERSION

## ABSTRACT

The non-modal matrix technique is valuable if it does not have knowledge of the normal modes of the system. It is very usual in many limited area meteorological models. The method is investigated in the one-dimensional model context, for temporal integration, and for filtering high frequencies in the initial data of the model (this procedure is known as initialization).

The velocity fields are obtained by using the Moore-Penrose generalized inverse. This inverse is a solution of the Poisson equations associated to each horizontal velocity component.

It is also shown a study of the vertical dispersion of contaminants in stable layers, whose turbulent coefficient is taken from the local similarity theory (first close order).

## SUMÁRIO

	Pag.
LISTA DE FIGURAS . . . . .	v
LISTA DE TABELAS . . . . .	vi
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	vii
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
CAPÍTULO 2 PRELIMINARES MATEMÁTICOS . . . . .	5
2.1 Matrizes Circulantes . . . . .	5
2.1.1 Matrizes Bloco Circulantes . . . . .	7
2.1.2 Matrizes Bloco Circulantes com Blocos Circulantes . . . . .	8
2.2 A Matriz Não-Modal . . . . .	9
2.3 Inversas Generalizadas e Sistemas Singulares . . . . .	11
2.3.1 Inversas Generalizadas . . . . .	11
2.3.2 Sistemas Singulares de Equações Diferenciais . . . . .	12
CAPÍTULO 3 EQUAÇÕES PARA ATMOSFERA SECA . . . . .	15
3.1 Equações de Água-rasa para o Plano- $\beta$ . . . . .	20
3.2 Equações de Reynolds . . . . .	23
3.2.1 O Conceito de Camada Limite . . . . .	26
CAPÍTULO 4 INICIALIZAÇÃO EM METEOROLOGIA . . . . .	27
4.1 Inicialização Estática . . . . .	28
4.2 Inicialização Dinâmica . . . . .	29
4.3 O Método Variacional . . . . .	30
4.4 Inicialização por Modos Normais . . . . .	31
4.5 Inicialização por Modos Normais Implícita . . . . .	35
4.6 Filtros Digitais . . . . .	37
CAPÍTULO 5 DIFUSIVIDADE TURBULENTA NA CAMADA ESTÁVEL . . . . .	40
5.1 Teoria da Similaridade . . . . .	40
5.1.1 A Teoria da Similaridade na Camada Estável . . . . .	41
5.2 Difusividade Turbulenta da Teoria Estatística . . . . .	42
5.3 Difusão Vertical . . . . .	46
CAPÍTULO 6 O MODELO METEOROLÓGICO DYNAMO . . . . .	48

6.1	Equações do Modelo . . . . .	48
6.1.1	Adimensionalização das Equações . . . . .	50
6.1.2	Considerações Energéticas . . . . .	52
6.2	Discretização Espacial . . . . .	53
CAPÍTULO 7 INTEGRAÇÃO E INICIALIZAÇÃO . . . . .		57
7.1	Domínio da Freqüência: Método de Lynch . . . . .	57
7.2	Domínio do Tempo: Método da Matriz Não-Modal . . . . .	60
7.2.1	Formulação Prognóstica . . . . .	60
7.2.2	Formulação Primitiva . . . . .	61
CAPÍTULO 8 RESULTADOS NUMÉRICOS E CONCLUSÕES . . . . .		62
8.1	Resultados Numéricos . . . . .	62
8.1.1	Difusão Vertical Turbulenta . . . . .	62
8.1.2	Integração com Matriz Não-Modal e Inversa M-P . . . . .	68
8.1.3	Inicialização Via Matriz Não-Modal . . . . .	76
8.2	Conclusões . . . . .	81
APÊNDICE A Reconstrução dos Campos de Vento . . . . .		84
APÊNDICE B O Método da Parcela . . . . .		85
APÊNDICE C A Inversa de Moore-Penrose em Problemas Bidi- dimensionais . . . . .		86
APÊNDICE D Solução Analítica para a Matriz Não-Modal . . . . .		87
D.1	Solução pelo Problema de Valor Inicial Associado . . . . .	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .		89

## LISTA DE FIGURAS

		Pag.
3.1	Um sistema cartesiano girando com a Terra. . . . .	17
3.2	Ilustração do deslocamento de um ponto $\vec{r}(t)$ para a posição $\vec{r}(t + \Delta t)$ . . . . .	18
3.3	Camada rasa, onde é mostrada a fronteira livre. . . . .	21
4.1	Representação de um processo de inicialização ideal. . . . .	27
5.1	Densidade espectral e correlogramas hipotéticos ilustrando as diferenças entre dados lagrangeanos (L) e eulerianos (E). . . . .	45
7.1	O contorno $\Gamma$ e sua aproximação poligonal. Aqui $\nu_G$ e $\nu_R$ representam a frequência mínima da onda de gravidade e a frequência máxima da onda de Rossby adimensionalizadas. . . . .	58
8.1	Perfil vertical de concentração para diferentes tempos. . . . .	64
8.2	Evolução temporal da concentração para fonte de área a 12.5 m do solo. . . . .	65
8.3	Evolução temporal da concentração para fonte de área a 300 m do solo. . . . .	66
8.4	Concentração próxima ao solo para diferentes alturas da fonte de área . . . . .	67
8.5	Perfil de $K_{zz}$ para os experimentos de Cabauw e Minnesota. . . . .	68
8.6	Inversa M-P: Valores finais para o vento meridional. . . . .	70
8.7	Inversa M-P: Energia cinética-rotacional para o ponto central. . . . .	71
8.8	Representação tridimensional para o geopotencial integrado via matriz não-modal. . . . .	72
8.9	Diagrama de Hovmoeller para o geopotencial. . . . .	73
8.10	Valores dos campos meteorológicos para $N_t = 1000$ . . . . .	74
8.11	Energia potencial disponível para um ponto central. . . . .	74
8.12	Energia cinética divergente para um ponto central. . . . .	75
8.13	Energia cinética rotacional para um ponto central. . . . .	75
8.14	Evolução de um ponto central para o vento zonal. . . . .	77
8.15	Evolução de um ponto central para o geopotencial. . . . .	77
8.16	Evolução da taxa de variação da energia total do sistema DYNAMO no ponto $x = N_x/2$ . . . . .	78
8.17	Energia cinética divergente para um ponto central. . . . .	78
8.18	Representação tridimensional da diferença entre geopotencial inicializado e não inicializado. . . . .	79
8.19	Diagrama de Hovmoeller para a diferença entre geopotencial inicializado e não inicializado. . . . .	80

## LISTA DE TABELAS

	Pag.	
3.1	Análise de escala das componentes horizontais da equação do movimento. . . . .	22
3.2	Análise de escala da componente vertical da equação do movimento. . . . .	22
8.1	Valores máximos de diferenças relativas para os valores finais dos campos. . . . .	70
8.2	Comparação entre o método de Lynch e quadratura gaussiana para o cálculo de $\beta_{k,j}(t)$ . . . . .	82

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Raio médio da Terra (m)
$A^+$	Inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz $A$
$A^D$	Inversa generalizada de Drazin da matriz $A$
$\vec{v}$	Vetor velocidade do vento (m/s)
$c_p$	Calor específico a pressão constante ( $\text{J Kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ )
$c_v$	Calor específico a volume constante ( $\text{J Kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ )
$D(t)$	Matriz não-modal
$f$	Parâmetro de Coriolis ( $\text{s}^{-1}$ )
$F^*, F$	Matrizes de Fourier
$K_{zz}$	Coefficiente de dispersão vertical turbulenta ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ )
$L$	Comprimento de Monin-Obukhov (m)
$p$	Pressão (Pa)
$p_\gamma(z)$	Polinômio de ordem $n$ representante de uma matriz circulante
$P_\Gamma(z)$	Polinômio de ordem $n$ representante de uma matriz bloco circulante com blocos de ordem $m$
$R$	Constante dos gases ideais ( $\text{J Kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ )
$R_o$	Número de Rossby
$R_F$	Recíproco do número de Froude
$R_\beta$	Parâmetro que estima a importância do efeito- $\beta$
$t$	Tempo (s)
$t_s$	Escala integral Lagrangeana (s)
$T$	Temperatura ( $^\circ\text{K}$ )
$u_*$	Velocidade de fricção (m/s)
$u$	Velocidade horizontal do vento na direção $x$ (m/s)
$v$	Velocidade horizontal do vento na direção $y$ (m/s)
$\vec{v}$	Vetor velocidade do vento (m/s)
$\mathbf{X}$	Vetor de estado para as variáveis primitivas ( $\mathbf{X} = \mathbf{X}[v, u, \Phi]$ )
$\mathbf{Z}$	Vetor de estado para as variáveis prognósticas ( $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}[\zeta, \delta, \Phi]$ )
$\beta$	Termo de primeira ordem para aproximação de $f(y)$ ( $\text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )
$\delta$	Divergência ( $\text{s}^{-1}$ )
$\zeta$	Vorticidade ( $\text{s}^{-1}$ )
$\Phi$	Geopotencial ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ )
$\rho$	Massa específica ( $\text{Kg m}^{-3}$ )
$\vec{\Omega}$	Velocidade de rotação da Terra (rad/s)
$\pi_n$	Matriz circulante fundamental
$\mathbb{P}_{mn}$	Matriz bloco-circulante fundamental
$\kappa$	Constante de Von Kármán ( $\simeq 0,4$ )
$\theta_*$	Escala de Temperatura ( $^\circ\text{K}$ )
$\Lambda$	Comprimento de Monin-Obukhov local (m)

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Entende-se a atmosfera como a massa gasosa que envolve nosso planeta e os conceitos básicos para o estudo da atmosfera partem de fundamentos físicos que tem sido estabelecidos. Os três campos da física que mais são aplicados à atmosfera são a *termodinâmica*, a *radiação* e a *dinâmica dos fluidos*.

A termodinâmica é o estudo dos estados de equilíbrio de um sistema sujeito a processos energéticos (ou transformações) especificados. Enquanto que a radiação é o estudo da emissão de energia pela matéria na forma de ondas eletromagnéticas, da propagação no espaço e da absorção desta energia pela matéria.

A dinâmica dos fluidos preocupa-se com o movimento de líquidos e/ou gases sob a ação de forças. Os conceitos da dinâmica, para o sistema atmosférico, são compostos dos três postulados e da lei da gravitação universal newtonianos. Além disso, tem-se a lei da conservação da massa e o conceito do equilíbrio entre forças. Este princípio tem larga aplicação, devido a tendência de que os sistemas sujeitos a um conjunto de forças desloquem-se para um estado de equilíbrio entre essas forças.

O objetivo último da meteorologia teórica é descrever a resposta da atmosfera diante de forçantes térmicas: aquecimento (solar) e resfriamento radiativo, e mudanças da fase da água, provocando expansão e contração das massas de ar, correntes convectivas; envolvendo conversões da energia de uma forma para outra.

O conjunto de equações resultante da matematização destes conceitos físicos, que, a priori, nos permitiriam prever o estado futuro da atmosfera (deslocada de seu equilíbrio pelas forças que agem no sistema), compõem-se de sete equações interconectadas: a equação vetorial da taxa de quantidade de movimento; a primeira lei da termodinâmica (a equação da energia); uma equação de evolução para a umidade; a lei dos gases (relacionando as variáveis termodinâmicas) e a equação da conservação da massa (continuidade).

As equações da atmosfera impõem ainda um desafio para uma solução completa. É portanto essencial estabelecer hipóteses que permitam algumas simplificações nestas equações.

O primeiro passo é uma simplificação geométrica. Assume-se o planeta Terra como sendo um corpo perfeitamente esférico. A Terra em rotação é usada como referência, uma vez que a teoria newtoniana exige um sistema inercial. O sistema de coordenadas usado é sempre vinculado ao problema em estudo, visto que até hoje não foi possível localizar o sistema inercial (se existir).

Como as equações se aplicam a todas as escalas de movimento, os meteorologistas dividem a dinâmica atmosférica em dois grandes grupos. Aqueles interessados nas características de fluxo de grande escala e aqueles envolvidos em fenômenos de pequena e média escalas (turbulência atmosférica). A hipótese aqui é que o efeito das várias escalas de um e de outro grupo possam ser ignoradas. Desta maneira, problemas de grande escala poderiam, em certos casos, serem tratados desconsiderando-se a turbulência.

As demais aproximações estão baseadas nas observações atmosféricas. Estas simplificações implicam na eliminação de variáveis (equações). Entre as diversas versões simplificadas do sistema de equações, as mais conhecidas são:

- (a) *A Aproximação Hidrostática*: Considera-se a aceleração vertical, as componentes verticais da força de Coriolis e as componentes verticais das forças viscosas desprezíveis quando comparadas a força gravitacional; proporcionando uma relação entre pressão e massa específica ( $\partial p / \partial z = -g\rho$ ).
- (b) *A Aproximação Isoentrópica*: Se a atmosfera não fosse aquecida e se ela não produz calor, nem perdesse energia irreversivelmente sob forma de dissipação viscosa ou outros meios, a taxa de entropia específica manter-se-ia constante. Esta é exatamente a hipótese isentrópica, a qual fornece uma relação entre temperatura e pressão:

$$\frac{c_p}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{p} \frac{dp}{dt} = 0$$

- (c) *A Aproximação Geostrófica*: Na escala sinótica é frequentemente observado um equilíbrio entre o gradiente horizontal de pressão  $[(1/\rho)\vec{\nabla}_H p]$  e a componente horizontal da força de Coriolis  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_H$ . Isto implica que a componente horizontal da velocidade está (aproximadamente) balanceada como o campo de massa, constituindo-se numa relação diagnóstica do estado atmosférico.

Estas relações servem muitas vezes como base para elaborar modelos numéricos usados para prever estados futuros da atmosfera. Este processo computacional denomina-se *Previsão Numérica do Tempo* (NWP).

A aproximação geostrófica indica que os fluxos de baixa frequência tem maior relevância dos que contém frequências mais altas. Para assegurar que os dados iniciais estejam livres de ondas espúrias os campos iniciais são submetidos ao processo de inicialização. O método mais usado é conhecido como inicialização por modos normais não-lineares. Existem dificuldades associadas a este método no domínio dos modelos de área limitada. Estas dificuldades tem motivado a investigação de técnicas alternativas, ou seja, métodos que não requeiram o conhecimento explícito dos modos normais do modelo [35, 55].

A proposta aqui apresentada é baseada numa teoria desenvolvida por Claeyssen [14]. Esta teoria trata de uma nova forma de obter a matriz de transição de estados. Esta matriz será denominada *Matriz Não-Modal*, que poderia ser utilizada como um filtro para garantir a evolução do fluxo atmosférico sem o ruído das altas frequências.

Como teste para a nova técnica, será usado o modelo descrito por Lynch [32]. Este modelo parte de condições iniciais geostroficamente balanceadas. A matriz não-modal será usada também na integração temporal deste modelo.

Devido a aproximação hidrostática e/ou condições de contorno, diversos tipos de discretização podem produzir equações singulares, ou seja, os coeficientes matriciais não são inversíveis. Para integração estacionária ou reconstrução de campos, a inversa de Moore-Penrose poderia ser apropriado para a integração; uma vez que ela representa uma solução de mínimos quadrados para um sistema singular estacionário.

Usamos a decomposição em valores singulares [24], para determinar esta inversa generalizada e recuperar os campos de vento a partir da vorticidade e da divergência.

Outro tema que desperta muito interesse é a dispersão de contaminantes na atmosfera. Contudo, a modelagem completa da camada limite planarária (Planetary Boundary Layer - PBL) é extremamente difícil. Pois além da turbulência estar permanentemente presente, a PBL passa por diversos processos físicos extremamente diferenciados; caracterizados por três condições limites:

- 1) *camada convectiva*: ocorrendo na presença do aquecimento solar, havendo então um fluxo de calor no sentido superfície-atmosfera;
- 2) *camada neutra*: caso em que a turbulência mecânica é o mecanismo dominante;
- 3) *camada estável*: no período noturno há uma inversão do fluxo de calor do que o ocorrido no caso convectivo, isto é, a corrente térmica passa a ser no sentido atmosfera-superfície.

Para equacionar dos fluxos turbulentos, produzidos pela combinação não linear das variáveis do escoamento, pode-se relacioná-los aos gradientes das quantidade médias por meio de difusividades, determinadas pelo escoamento, e não pela natureza do fluido.

Experimentos [12, 43] tem demonstrado a existência de uma estrutura de similaridade local para a camada estável (Stable Boundary Layer - SBL). Este caráter local da turbulência sugere a possibilidade da formulação de uma teoria que descreve a SBL noturna. Moraes [41] e Degrazia & Moraes [20] desenvolveram um modelo para o cálculo da difusividade turbulenta pelo emprego da teoria de similaridade local e da teoria estatística.

Para melhor apresentar as questões acima mencionadas, o presente trabalho é estruturado em oito capítulos. Os três capítulos subsequentes a este tratam de definir conceitos básicos e as teorias matemáticas usados na integração e inicialização. Assim, o capítulo 2 descreve de maneira breve a teoria de matrizes circulantes, inversas generalizadas e a matriz não-modal, onde é demonstrada a propriedade de inversa de Drazin para matrizes bloco circulante. O capítulo 3 trata das equações gerais para a atmosfera e a aproximação de água rasa. E o capítulo 4 mostra os principais métodos de inicialização, tradicionais e modernos.

A difusão vertical turbulenta é investigada através de um modelo unidimensional, comentado no capítulo 5. Tal modelo é semelhante ao descrito por Niuewstadt [44], onde o coeficiente de dispersão é aquele deduzido por Degrazia e Moraes [20]. O modelo de dispersão é integrado no tempo através de uma aproximação bastante conhecida da matriz não-modal: o esquema de Crank-Nicolson.

As equações para o modelo DYNAMO estão no capítulo 6, onde a discretização espacial por diferenças finitas conduz a dois tipos de equações matriciais: a formulação prognóstica e a primitiva. A formulação prognóstica é usada para testar o método da matriz não-modal e a decomposição em valores singulares usada na reconstrução dos campos de vento (atualizados em cada passo de tempo).

Resultados e comentários finais estão contidos no capítulo 8.

## CAPÍTULO 2

### PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos teóricos deste trabalho: uma descrição sintética da teoria de matrizes circulantes, uma outra expressão para a matriz de transição de estados e soluções para sistemas matriciais singulares (estáticos e dinâmicos).

#### 2.1 Matrizes Circulantes

As matrizes circulantes permitem uma teoria simples e elegante utilizada em muitos campos de interesse. O que vai se descrever aqui segue de perto o trabalho clássico de P. Davis [18]. Uma matriz circulante  $C$  de ordem  $N$ , ou simplesmente circulante de ordem  $N$ , é uma matriz da forma

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ c_N & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, uma matriz  $C$  é circulante se,  $C$  comuta com a matriz  $\pi_N$  (uma matriz de mesma ordem)

$$\pi_N C = C \pi_N \tag{2.1}$$

$$\pi_N \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em vista das propriedades da matriz  $\pi_N$ , as circulantes permitem um outro tipo de representação, dada por

$$C = p_\gamma(\pi_N) = \sum_{k=0}^{N-1} c_{k+1} \cdot \pi_N^k$$

aqui  $\pi_N^0 = I_N$ ,  $\gamma$  representa a seqüência  $(c_1, c_2, \dots, c_N)$  e o polinômio  $p_\gamma(x)$  é chamado representante da circulante.

Define-se a *matriz de Vandermonde* como

$$V_N[x_1, x_2, \dots, x_N] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix}$$

e a matriz  $\pi_N$  pode ser diagonalizada por [18]

$$\pi_N = F^* \Omega F \quad (2.2)$$

onde  $\Omega$  é matriz diagonal,  $F^*$  e  $F$  são as matrizes de Fourier, isto é

$$\begin{aligned} F^* &= N^{-1/2} \cdot V_N [1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}]; \\ F &= N^{-1/2} \cdot V_N [1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots, \bar{\omega}^{N-1}]; \\ \Omega &= \text{diag} [1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}]; \quad \omega = e^{2\pi i/N}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

e a sobre barra denota o complexo conjugado e  $i$  é a unidade imaginária, ou seja,  $i = \sqrt{-1}$ .

Então, se  $C$  é circulante tem-se a decomposição fundamental

$$C = F^* \Lambda F$$

onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal; expressada por

$$\Lambda = \text{diag} [p_\gamma(1), p_\gamma(\omega), \dots, p_\gamma(\omega^{N-1})]. \quad (2.4)$$

Para estender estes resultados às matrizes bloco circulante, utiliza-se a descrição de Claeysen [13]. Porém, o fator bloco será tomado como a matriz identidade das submatrizes, esta restrição estará plenamente justificada ao examinarmos o modelo meteorológico DYNAMO.

### 2.1.1 Matrizes Bloco Circulantes

Dadas as matrizes quadradas  $A_1, A_2, \dots, A_M$ , cada uma de ordem  $N$ , uma matriz bloco circulante do tipo  $(M, N)$  é uma matriz  $MN \times MN$  definida por

$$\mathbf{A} = \text{bcirc}(A_1, A_2, \dots, A_M) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_M \\ A_M & A_1 & \dots & A_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_2 & A_3 & \dots & A_1 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, se  $N$  é igual a um, a matriz  $\mathbf{A}$  reduz-se ao caso escalar. É importante ressaltar que uma bloco circulante não é necessariamente uma circulante.

As propriedades (2.1) e (2.2) são generalizadas [13,18] por

$$\mathbf{A} \cdot \mathfrak{F}_{MN} = \mathfrak{F}_{MN} \cdot \mathbf{A} \quad (2.5)$$

$$\mathfrak{F}_{MN} = \mathbf{F}_{MN}^* \cdot \mathbf{\Omega}_{MN} \cdot \mathbf{F}_{MN} \quad (2.6)$$

onde as matrizes bloco acima são

$$\mathfrak{F}_{MN} = \pi_M \otimes I_N \quad (\text{produto de Kronecker});$$

$$\mathbf{F}_{MN}^* = M^{-1/2} \cdot \mathbf{V}_N[I_N, \omega I_N, \omega^2 I_N, \dots, \omega^{M-1} I_N];$$

$$\mathbf{F}_{MN} = M^{-1/2} \cdot \mathbf{V}_N[I_N, \bar{\omega} I_N, \bar{\omega}^2 I_N, \dots, \bar{\omega}^{M-1} I_N];$$

$$\mathbf{F}_{MN}^* \cdot \mathbf{F}_{MN} = \mathbf{I}_{MN};$$

$$\mathbf{\Omega}_{MN} = \text{diag}[I_N, \omega I_N, \omega^2 I_N, \dots, \omega^{M-1} I_N];$$

as matrizes  $\mathbf{I}_{MN}$  e  $I_N$  são as matrizes identidade bloco, de ordem  $MN$  e a identidade de ordem  $N$ . O número  $\omega$  é a  $m$ -ésima raiz da unidade:  $\omega = e^{2\pi i/M}$ .

Neste contexto, o produto de uma matriz quadrada por uma matriz bloco, é para ser compreendido como a matriz bloco obtida multiplicando-se a matriz quadrada por todos os elementos (submatrizes) da matriz bloco dada. A notação adotada é útil no sentido de preservar a representação com o caso escalar.

Portanto, as matrizes bloco circulantes preservam a representação polinomial, dada na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{bcirc}(A_1, A_2, \dots, A_M) = P_\Gamma(\mathbb{1}_{MN}) = \sum_{k=0}^{N-1} A_{k+1} \cdot \mathbb{1}_{MN}^k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_{MN}^k \cdot A_{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_M^k \otimes A_{k+1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

As equações (2.6) e (2.7) permitem a diagonalização por blocos de bloco circulantes, isto é

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \cdot P_\Gamma(\Omega_{MN}) \cdot \mathbf{F} \quad (2.8)$$

onde  $\Gamma$  é a sequência  $(A_1, A_2, \dots, A_M)$  e o polinômio  $P_\Gamma(x)$  é o representante da bloco circulante.

### 2.1.2 Matrizes Bloco Circulantes com Blocos Circulantes

Definimos uma matriz  $\mathbf{A}$  como uma *bloco circulante com blocos circulantes* do tipo  $(M, N)$  [13, 18] por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_M \\ A_M & A_1 & \dots & A_{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_2 & A_3 & \dots & A_1 \end{bmatrix};$$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_N & A_1 & \dots & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{bmatrix} = F_N^* \Lambda_k F_N;$$

onde  $\Lambda_k$  é matriz diagonal dada por (2.4).

Matrizes deste tipo podem ser fatoradas na forma de blocos

$$\mathbf{A} = \mathcal{F}^* \Lambda_A \mathcal{F}; \quad (2.9)$$

onde  $\mathcal{F}^*$ ,  $\mathcal{F}$  são extensões para blocos das matrizes de Fourier escalares (2.3) e  $\Lambda_A$  é uma matriz diagonal por blocos. Com o uso do produto tensorial de Kronecker, pode-se escrever

$$\mathcal{F}^* = (F_M \otimes F_N)^* \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = F_M \otimes F_N \quad (2.10)$$

$$\Lambda_A = \sum_{k=0}^{M-1} \Omega_M^k \otimes \Lambda_{k+1}$$

## 2.2 A Matriz Não-Modal

Neste capítulo apresentamos a expressão para a matriz de transição de estados conforme apresentado por Clayessen [13]. No sistema abaixo a matriz  $A$  é de ordem  $N$ ,  $X(t)$  e  $f(t)$  são vetores  $N \times 1$

$$\frac{dX(t)}{dt} = A X(t) + f(t); \quad X(0) = X_0 \quad (2.11)$$

O caso homogêneo ocorre quando  $f(t) = 0$ , conhecido como resposta livre ou resposta impulsiva. A solução formal para sistemas do tipo acima com coeficientes matriciais  $A$  constantes, ditos sistemas independentes do tempo, é dada pelas equações [49]

$$X(t) = D(t) X_0 + \int_0^t D(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

onde  $A^0 = I_N$  e  $D(t)$  é a matriz de transição de estados, assim o estudo do sistema (2.11) se reduz àquele da matriz  $D(t)$ .

Diferentemente das séries numéricas, as séries matriciais sempre podem ser reduzidas a uma soma finita. Pode-se ter então uma outra forma para a matriz  $D(t)$ , a fórmula a ser apresentada será chamada de *Matriz Não-Modal*.

Pelas propriedades da matriz de transição de estados [49],  $D(t)$  é solução da seguinte equação diferencial matricial [14, 23]

$$\frac{dD(t)}{dt} = AD(t); \quad D(0) = I_N.$$

Usando a transformada de Laplace na equação acima, obtém-se

$$D(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) = \text{Adj}[\Delta(\lambda)] \delta^{-1}(\lambda)$$

onde

$$\Delta(\lambda) \equiv (\lambda I_N - A); \quad \delta(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) = \sum_{k=0}^N b_k \lambda^{N-k}, \quad b_0 = 1$$

os  $b_k$ 's são os coeficientes do polinômio característico. Como os pólos da função  $D(\lambda)$  são justamente as raízes de  $\delta(\lambda)$ , e elas existem num número finito, a transformada inversa de Laplace degenera numa integral de contorno finita, deste modo

$$D(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} D(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

aqui  $\Gamma$  é um círculo contendo os autovalores da matriz  $A$ . Escrevendo a matriz adjunta na forma [14, 23]

$$\text{Adj}[\Delta(\lambda)] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{j-1} b_k \lambda^{j-k-1} A^{N-j}$$

então, a matriz não-modal pode ser escrita como

$$D(t) = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=0}^{j-1} b_k d^{(j-k-1)}(t) \right] A^{N-j} \quad (2.12)$$

onde  $d^{(k)}(t)$  denota a  $k$ -ésima derivada da função

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\delta(\lambda)} d\lambda$$

## 2.3 Inversas Generalizadas e Sistemas Singulares

### 2.3.1 Inversas Generalizadas

#### Inversa de Moore-Penrose

Dada uma matriz  $A_{m \times n}$ . Então uma matriz  $X_{n \times m}$  que satisfaz alguma ou todas das seguintes propriedades (condições de Penrose) é chamada uma inversa generalizada

$$\begin{array}{ll} (1) \quad A X A = A; & (2) \quad X A X = X; \\ (3) \quad (A X)^* = A X; & (4) \quad (X A)^* = X A. \end{array}$$

Aqui o (\*) representa a transposta conjugada. Uma matriz satisfazendo todas as propriedades acima é chamada *inversa de Moore-Penrose* (ou inversa M-P) da matriz  $A$ . Campbell e Meyer [6] mostram que toda matriz tem uma inversa M-P única, que será denotada por  $A^+$ . Diz-se também que uma matriz  $G_{n \times m}$  é uma inversa- $(i, j, k)$  de  $A$ , se  $G$  satisfaz a  $i$ -ésima,  $j$ -ésima, e  $k$ -ésima condições de Penrose.

Em algoritmos computacionais a definição acima é pouco prática. Há várias maneiras de calcular a inversa M-P. Aqui será usado uma decomposição matricial que é de grande utilidade na manipulação de matrizes retangulares (ou quadradas). Esta é a *decomposição em valores singulares* (SVD) de uma matriz escalar:

Seja  $A_{m \times n}$  uma matriz com elementos complexos e de posto  $r$ . Então existem matrizes unitárias  $U, V$  de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente, tal que

$$A = U D V^* \quad e \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $D$  é  $m \times n$  e  $D_1 = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_r]$  é uma matriz diagonal não singular de ordem  $r$ .

Para uma dada matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ ,  $A^* A$  é uma matriz hermitiana positiva definida, cujo o posto  $r = r(A^* A) = r(A) = r(A^*)$ . Entretanto,  $r$  é o número de auto-valores positivos de  $A^* A$ . Estes auto-valores  $d_1^2, d_2^2, \dots, d_r^2$  são os *valores singulares* de  $A$  [24]. Algoritmos numéricos para o cálculo a SVD tem sido apresentados por Golub [24].

Usando a decomposição SVD, pode ser determinada uma fórmula conveniente para  $A^+$ , isto é,  $A = U^* D V^*$ , onde  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias, então

$$A^+ = V D^+ U \quad \text{e} \quad D^+ = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para a equação matricial  $Ax = b$ , a solução:  $x = A^+ b$  é compreendida como a solução de mínimos quadrados para o sistema [24].

Se  $A$  é a circulante  $A = F^* \Lambda F$ , então sua inversa M-P é a circulante

$$A = F^* \Lambda^+ F; \quad (2.15)$$

onde  $\Lambda^+$  é dada por

$$\Lambda^+ = \text{diag}[\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_N^+]; \quad (2.16)$$

$$\lambda_k^+ = \begin{cases} 1/\lambda_k & \text{se } \lambda_k \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda_k = 0 \end{cases}. \quad (2.17)$$

A prova é muito simples, visto que as quatro condições de Penrose são imediatamente verificáveis para  $A^+$ .

### 2.3.2 Sistemas Singulares de Equações Diferenciais

Considere-se o seguinte sistema de equações diferenciais

$$A \frac{dX}{dt} + BX = f(t) \quad (2.18)$$

onde  $A$  é singular,  $B$  podendo ser singular ou não, a equação acima é chamada de um sistema singular.

Diz-se que um sistema é tratável se, e somente se, existe um escalar complexo  $\lambda$  tal que  $(\lambda A + B)^{-1}$  existe [6, 7]. Antes de descrever a solução para este tipo de sistema é necessário apresentar algumas definições sobre o índice de uma matriz e um tipo generalizado de inversa.

**Índice de uma Matriz:** O menor inteiro não negativo  $\nu$  tal que  $\text{posto}(A^\nu) = \text{posto}(A^{\nu+1})$  é chamado o índice da matriz quadrada  $A$  e é denotado por  $\text{Ind}(A)$ .

**Inversa de Drazin:** (Definição Algébrica) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $N$  com  $\nu = \text{Ind}(A)$  and  $A^D$  uma matriz de ordem  $N$  tal que

$$\begin{aligned} A^D A A^D &= A^D \\ A A^D &= A^D A \\ A^{\nu+1} A^D &= A^\nu \end{aligned} \tag{2.19}$$

então  $A^D$  é chamada a *inversa de Drazin* de  $A$ .

Obviamente, se  $A$  é uma matriz não singular, a inversa de Drazin é igual a inversa ordinária e  $\text{Ind}(A) = 0$ .

Outra propriedade importante é que se  $AA^+ = A^+A$ , então  $A^D = A^+$ . As matrizes que comutam com sua inversa M-P são chamadas matrizes EP.

Utilizando estes conceitos pode-se obter uma solução única para o sistema (2.18) [6-8, 3], dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= \widehat{D}(t) \widehat{A} \widehat{A}^D X_0 + \int_0^t \widehat{D}(t-\tau) \widehat{A}^D \widehat{f}(\tau) d\tau \\ &\quad + (I - \widehat{A} \widehat{A}^D) \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k [\widehat{A} \widehat{B}^D]^k \widehat{B}^D \widehat{f}^{(k)}(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde

$$\widehat{A} = (\lambda A + B)^{-1} A; \quad \widehat{B} = (\lambda A + B)^{-1} B; \quad \widehat{f} = (\lambda A + B)^{-1} f;$$

e, neste caso a matriz não modal é da forma

$$\widehat{D}(t) = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=0}^{j-1} b_k d^{(j-k-1)}(t) \right] (-\widehat{A}^D \widehat{B})^{N-j}$$

A função  $d(t)$  que figura na expressão de  $\widehat{D}(t)$  é dada na seção 2.2. Os  $b_k$ 's são os coeficientes do polinômio característico da matriz  $(-\widehat{A}^D \widehat{B})$ , isto é,  $\delta(\lambda) = \det(\lambda I + \widehat{A}^D \widehat{B}) = \sum_{k=0}^N b_k \lambda^{N-k}$  (com  $b_0 = 1$ ) e  $\nu$  denota o índice da matriz  $A$ .

Para o caso de matrizes bloco circulantes a inversa de Drazin é dada pelo teorema abaixo

**Teorema:** Se  $A$  é uma matriz bloco circulante do tipo  $(M, N)$ , então

$$A^D = [F^* \cdot \Lambda \cdot F]^D = F^* \cdot \Lambda^D \cdot F = F^* \text{diag}[\Lambda_1^D, \Lambda_2^D, \dots, \Lambda_M^D] F$$

**Demonstração:** A primeira igualdade é imediata, pois decorre da propriedade (2.7), logo basta verificar a segunda igualdade para demonstrar o teorema. Lembrando que a inversa de Drazin do produto<sup>1</sup> tem a forma [6, 7]

$$(A \cdot B)^D = A[(BA)^2]^D B$$

se as matrizes  $A$  e  $B$  não comutarem<sup>2</sup>.

Se na expressão acima toma-se  $A = \mathbf{F}^* \Lambda$  e  $B = \mathbf{F}$ , então

$$[\mathbf{F}^* \cdot \Lambda \cdot \mathbf{F}]^D = \mathbf{F}^* \cdot \Lambda (\Lambda^2)^D \cdot \mathbf{F}$$

De outra forma, se  $A = \mathbf{F}^*$  e  $B = \Lambda \mathbf{F}$ , tem-se

$$[\mathbf{F}^* \cdot \Lambda \cdot \mathbf{F}]^D = \mathbf{F}^* \cdot (\Lambda^2)^D \Lambda \cdot \mathbf{F}$$

decorrendo a igualdade  $\Lambda (\Lambda^2)^D = (\Lambda^2)^D \Lambda$ ; como  $[\Lambda, \Lambda] = 0$ , então,  $(\Lambda^2)^D = \Lambda^D \Lambda^D$ , e da primeira e segunda propriedade da definição de inversa de Drazin, tem-se

$$\Lambda^D \Lambda^D \Lambda = \Lambda^D \Lambda \Lambda^D = \Lambda^D$$

com o que torna o teorema válido •

---

<sup>1</sup>Define-se:  $[A, B] \equiv A \cdot B - B \cdot A$

<sup>2</sup>se:  $[A, B] = 0 \Rightarrow (A \cdot B)^D = B^D \cdot A^D$

## CAPÍTULO 3

### EQUAÇÕES PARA ATMOSFERA SECA

Pela segunda lei da dinâmica de Newton, a força resultante sobre uma partícula  $n$  é igual a taxa de variação da quantidade de movimento

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v}_n)}{dt};$$

se a massa for uma quantidade constante, a expressão acima é substituída por uma relação entre forças específicas

$$\frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{\vec{F}_R}{m} = \sum_i \vec{f}_i$$

Se o fluido (atmosfera) for aproximado como sendo constituído de um conjunto infinito de partículas que preenche todo um volume dado (o *contínuo*), o conceito de massa será substituído pelo de massa específica (massa por unidade de volume) e o operador  $d/dt$  sobre um campo vetorial  $\vec{A}$  representará a derivada substantiva (ou material)

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A}$$

onde  $\partial/\partial t$  é a aceleração local e  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  é a aceleração convectiva.

Para determinar a equação do movimento, é necessário identificar as forças que atuam sobre o fluido, que neste caso são

- força gravitacional

$$\vec{f}_g = \frac{GM}{r^3} \vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi$$

onde  $\Phi = GM(1/a - 1/r)$  é o potencial newtoniano, representando a energia potencial de uma partícula em virtude de sua posição no campo gravitacional;  $G$  é a constante universal da gravitação;  $M$  é a massa da Terra;  $r = a + z$ , sendo  $a$  o raio médio da Terra e  $z$  a altitude acima do nível médio do mar;

- gradiente de pressão:  $\vec{f}_p = (-1/\rho) \vec{\nabla}p$ ;

- força viscosa:  $\vec{f}_v = \nu \nabla^2 \vec{v}$ , onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática [52].

Assim a equação do movimento de um fluido é expressa por

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi + \vec{f}_v. \quad (3.1)$$

A equação acima não pode ser usada de uma maneira isolada, pois, assim que uma parcela (de ar) se desloca de uma região de pressão mais alta (H) para uma mais baixa (L), a nova massa acrescentada provoca um aumento na pressão da região de baixa. Com a finalidade de descrever a evolução da pressão recorre-se ao auxílio da primeira lei da termodinâmica:  $u = q + w + s$ , sendo  $u$  a energia interna específica,  $w$  é o trabalho específico,  $q$  é a energia sob a forma de calor - se  $q = 0$  o processo se diz adiabático - e  $s$  é a energia dissipada, gerada pelo atrito viscoso. Desprezando a energia de dissipação, a lei de conservação de energia, em termos das variáveis termodinâmicas, é dada por

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} = q. \quad (3.2)$$

Se a atmosfera é assumida como um gás ideal, no sentido termodinâmico, a pressão, temperatura e massa específica estão relacionadas pela lei dos gases ideais:  $p = \rho RT$ , onde  $R$  é a constante dos gases (ar seco). Para os gases ideais tem-se a relação  $c_p = R + c_v$ , onde  $c_p$  e  $c_v$  são os calores específicos do ar a pressão e volume constantes, respectivamente.

Usando a lei dos gases ideais a equação de conservação de energia (3.2) pode ser escrita numa forma mais conveniente

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = q. \quad (3.3)$$

Os processos físicos que contribuem para o aquecimento (resfriamento) do sistema atmosférico são: a radiação, a condução molecular/turbulenta e a liberação do calor latente. Nota-se ainda que se o processo for adiabático, a equação acima se traduz na aproximação isentrópica.

A equação de conservação da massa fornece uma relação prognóstica para a massa específica

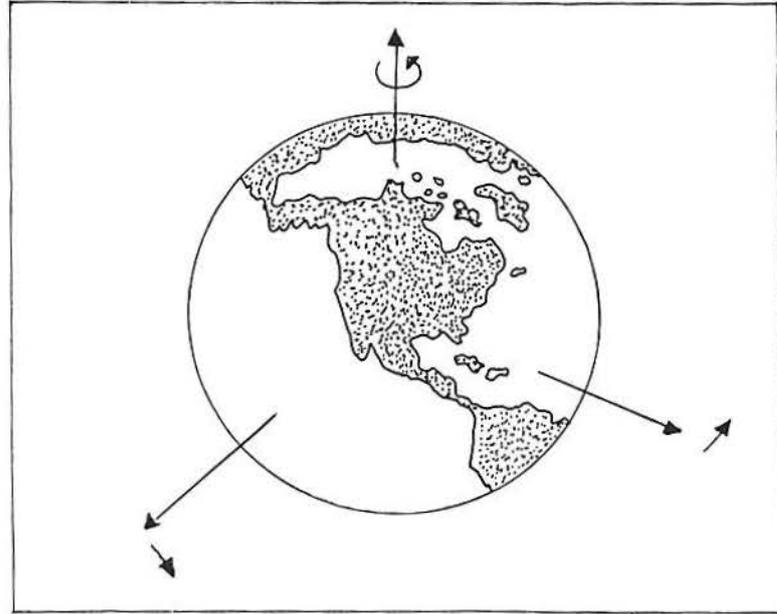


Fig. 3.1 - Um sistema cartesiano girando com a Terra.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.4)$$

A equação do movimento (3.1) referem-se a um sistema inercial. Um sistema de coordenadas que seja solidário a rotação da Terra (não inercial) faz surgir, para um observador que participa do movimento de rotação, outros termos nesta equação vetorial.

Considerando dois sistemas cartesianos ortogonais, sendo um fixo  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  - inercial - tal que sua origem coincida com o centro do planeta, e outro com a mesma origem, mas gire solidariamente com a Terra:  $(x, y, z)$ .

A partir do sistema inercial (ou absoluto), a velocidade  $\vec{v}_a$  do ar é a soma da velocidade não inercial  $\vec{v}$ , relativa a Terra, e da velocidade  $\vec{v}_r$ , devida a rotação do planeta. Deste modo

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_r.$$

Para uma quantidade escalar  $\alpha$ , sua derivada material no sistema absoluto é idêntica a derivada material no sistema móvel:  $(d\alpha/dt)_a = d\alpha/dt$ . Desta maneira, a derivada substantiva de um campo vetorial  $\vec{A}$  é

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\vec{A}_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\vec{A}_z}{dt} \vec{k}.$$

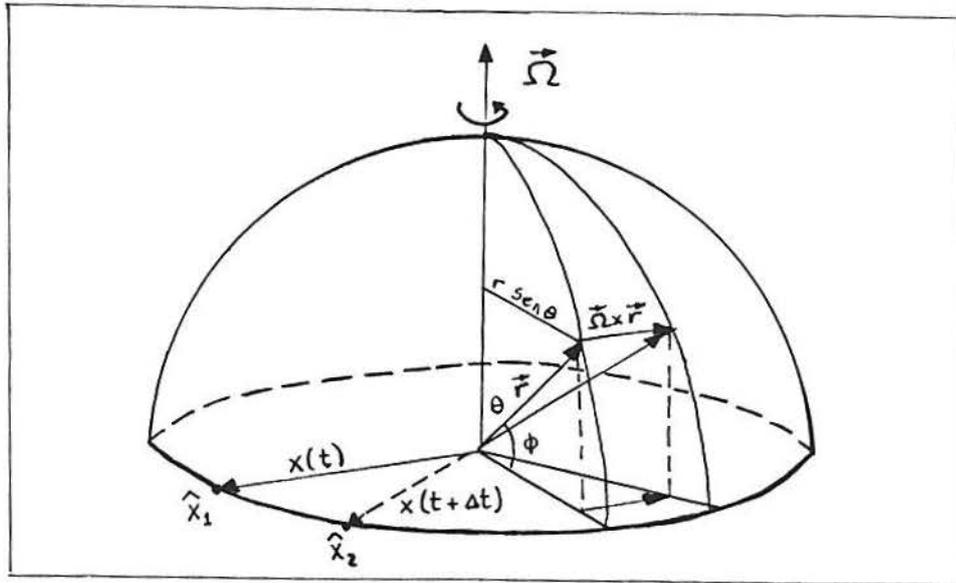


Fig. 3.2 - Ilustração do deslocamento de um ponto  $\vec{r}(t)$  para a posição  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .

Da figura (3.2) nota-se que o ponto  $\vec{r}(t)$  desloca-se sobre a semi-esfera com a velocidade linear  $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ . Assim, o vetor  $\vec{r}$  percorre  $2\pi r \sin \theta$  no tempo  $2\pi/|\vec{\Omega}|$ ; onde  $r = |\vec{r}|$ . Deste modo, para uma velocidade de rotação  $\vec{\Omega}$  constante, o módulo da velocidade linear da partícula é  $|\vec{\Omega}| |\vec{r}| \sin \theta$ , que é o módulo do vetor  $\vec{\Omega} \times \vec{r}(t)$ . Desta forma, se estabelece a seguinte relação entre as derivadas substantivas de um campo vetorial

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_a = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}.$$

Então, o vetor velocidade e aceleração são dados por

$$\vec{v}_a = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_a = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_a = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right]_a = \left( \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times \right) (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

A equação do movimento atmosférico para um sistema não inercial, com velocidade de rotação  $\vec{\Omega}$  constante, é dada por

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\Phi - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{f}_v. \quad (3.5)$$

Os novos termos agregados a equação do movimento são ditas *forças aparentes*, percebidas pelo observador não inercial. O termo  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$  é conhecido como força de Coriolis e  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  é a força centrífuga. A força centrífuga, em geral, não aparece explicitamente na equação, pois a quantidade  $\vec{g}_e = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ , chamada gravidade efetiva (o que realmente observamos através do fio de prumo), substitui os termos da força gravitacional e centrífuga.

Antes de terminar a seção é pertinente observar de que é possível desenvolver uma mecânica em que as chamadas *forças aparentes* tornem-se forças reais. Tal mecânica foi recentemente proposta pelo professor André K. T. Assis [1], preservando a equivalência entre cinemática e dinâmica. A mecânica de Assis foi o primeiro modelo na física a demonstrar a relação linear existente entre massa inercial e massa gravitacional, observada experimentalmente por Newton e postulada na relatividade, onde tal conceito é denominado *princípio da equivalência* [31]. Além disso, desaparece o conceito de referencial inercial.

A interação gravitacional entre partículas materiais nesta mecânica é fornecida pela relação

$$\vec{F}_{ji} = k \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left[ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left( r_{ij} \ddot{r}_{ij} - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

onde as grandezas envolvidas são entidades relacionais, ou seja,

$$\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j; \quad r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|;$$

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{dr_{ij}}{dt}; \quad \ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d^2r_{ij}}{dt^2};$$

$\hat{r}_{ij}$  é o versor de  $\vec{r}_{ij}$ ,  $c$  é a velocidade da luz,  $\xi = 6$ . O valor de  $\xi$  reflete o ajuste do modelo ao problema da precessão do periélio das órbitas planetárias [1]. Assis propõem para gravitação  $k = -H_g m_i m_j$ , onde  $H_g$  é assumido constante.

A lei de força (3.6) com  $k = H_e q_i q_j$  e  $\xi = 1$  é a lei de Weber na teoria eletromagnética [40], utilizada para satisfazer o terceiro postulado da sua mecânica:

*A soma de todas as forças sobre qualquer corpo material é nula.*

Partindo da lei de força (3.6) pode ser mostrado [1] que, num universo isotrópico, homogêneo e sem rotação

$$\sum_{j=2}^N \vec{F}_{j1} - \Upsilon m_1 a_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=2}^N \frac{\vec{F}_{j1}}{\Upsilon} = m_1 a_1 \quad (3.7)$$

retratando a atração gravitacional entre um ponto material  $m_1$ , animado de uma aceleração  $a_1$ , e o universo isotrópico, onde  $\Upsilon$  é dado por

$$\Upsilon \equiv \frac{4\pi}{3} H_g \frac{\xi}{c^2} \int_0^R \rho(r) r dr = \frac{H_g \xi M}{2 c^2 R}$$

sendo  $M$ ,  $R$  a massa e o raio do universo observável, respectivamente. Note-se que, pela homogeneidade,  $\rho(r) = \rho_0$ .

A expressão (3.7) representa a equação do movimento, onde o primeiro termo reflete a interação do ponto material com forças locais e o segundo termo, as interações com os corpos distribuídos isotropicamente a seu redor (o restante do universo). Esta foi uma idéia bastante engenhosa empregada por Assis e mostra, claramente, que a força inercial é devida a interação de um corpo com todo o universo e, para um universo de partícula única, inexistente inércia: o *Princípio de Mach*.

### 3.1 Equações de Água-rasa para o Plano- $\beta$

O modelo de água-rasa parte da hipótese de que a densidade do fluido é considerada constante, utilizado primariamente em dinâmica do oceano [48], onde a água do mar é praticamente incompressível, o que geralmente não ocorre no meio atmosférico. Entretanto, tal modelagem tem se demonstrado útil na simulação dos fluxos da atmosfera, principalmente para os deslocamentos oscilatórios.

Lançando mão da hipótese da *atmosfera homogênea*, no qual  $\rho(z)$  é constante, a diferença é eliminada. E neste modelo a atmosfera se estenderia até uma altura  $h_s = p_0/g\rho$  ( $\simeq 8 \text{ Km}$ ), onde  $p_0$  é a pressão da superfície; e a fronteira superior (superfície livre) estaria bem definida:  $p_h = 0$ .

Para determinar as equações para o plano- $\beta$ , será realizada uma análise de escala para a eq. (3.5) desprezando-se as forças viscosas. Sendo o raio médio da Terra denotado por  $a$ , a eq. (3.5) pode ser expressa em termos de componentes<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Ver seção 2.3 de [29]

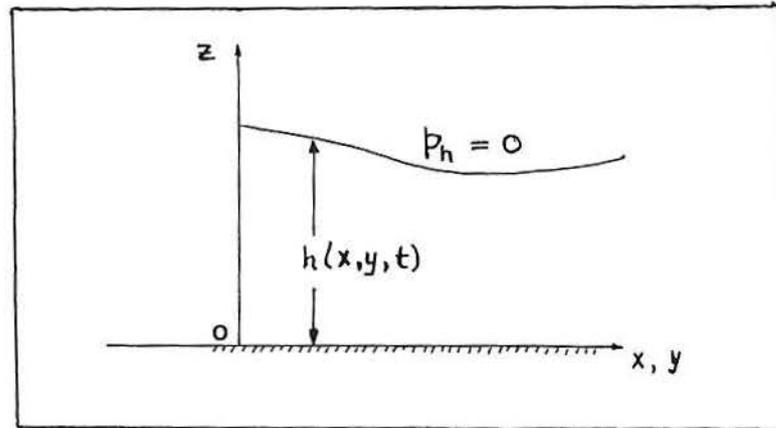


Fig. 3.3 - Camada rasa, onde é mostrada a fronteira livre.

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi;$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi;$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi.$$

Definindo as seguintes escalas características para fenômenos sinóticos (em médias latitudes:  $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0 = 2\Omega \cos \varphi_0 \simeq 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ):

$U \sim 10 \text{ m/s}$	escala horizontal de velocidade
$W \sim 10^{-2} \text{ m/s}$	escala vertical de velocidade
$L \sim 10^6 \text{ m}$	escala longitudinal (direções $x$ e $y$ )
$D \sim 10^4 \text{ m}$	escala de profundidade
$\Delta P/\rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	escala horizontal de flutuação da pressão
$L/U \sim 10^5 \text{ s}$	escala de tempo

Para uma dada latitude  $\varphi_0$ , o parâmetro de Coriolis  $f = 2\Omega \sin \varphi$  pode ser aproximado pelo teorema de Taylor

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + \frac{\partial f(\varphi_0)}{\partial \varphi} (\varphi - \varphi_0) + O(\Delta \varphi^2)$$

tomando  $y \simeq a(\varphi - \varphi_0)$ , então:  $\partial y/\partial \varphi = a$ . Pela regra da cadeia, determina-se

$$\frac{\partial f(\varphi_0)}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 2\Omega \cos \varphi_0;$$

desta forma  $f \simeq f_0 + \beta y$ , onde  $\beta = (2\Omega \cos\varphi_0)/a$ .

Tabela 3.1 - Análise de escala das componentes horizontais da equação do movimento.

Equação do Mov.	A	B	C	D	E	F
componente-x	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin\varphi$	$+2\Omega w \cos\varphi$	$\frac{uw}{a}$	$\frac{uv \tan\varphi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$
componente-y	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin\varphi$		$\frac{vw}{a}$	$\frac{u^2 \tan\varphi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$
escalas	$U^2/L$	$f_0 U$	$f_0 W$	$UW/a$	$U^2/a$	$\Delta P/\rho L$
magnitude (m/s <sup>2</sup> )	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$

Tabela 3.2 - Análise de escala da componente vertical da equação do movimento.

componente-z	$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega u \cos\varphi$	$-\frac{u^2+v^2}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$
escalas	$UW/L$	$f_0 U$	$U^2/a$	$P_s/\rho D$	$g$
magnitude (m/s <sup>2</sup> )	$10^{-7}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10$	$10$

Da análise de escala na vertical, verificou-se o equilíbrio hidrostático ( $dp = -\rho g dz$ ), cuja forma integrada conduz a

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, t) - g\rho \int_0^z dz = g\rho [h(x, y, t) - z]$$

desta forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial h}{\partial x} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial h}{\partial y} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

A equação da continuidade para fluido incompressível é  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , que integrada na vertical (com  $w(0) = 0$ ) resulta

$$w_h = - \int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Por outro lado, visto que  $h(x, y, t)$  é uma superfície material

$$w_h = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y};$$

desta forma obtém-se a equação de evolução para a altura geopotencial (continuidade)

$$\frac{dh}{dt} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Assumindo como válida a aproximação hidrostática, tomando as equações do movimento horizontal como dadas pela análise de escala acima e multiplicando-se a equação da altura geopotencial pela aceleração da gravidade, obtém-se

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

que é conhecida como a aproximação de água rasa, com  $f = f_0 + \beta y$ , para o plano- $\beta$ .

### 3.2 Equações de Reynolds

Conforme anteriormente mencionado, o estudo da ciência meteorológica tem se dividido entre fenômenos de escala sinótica e os de média e pequena escalas, os últimos por conta principalmente da turbulência na atmosfera.

A turbulência de modo geral, e a atmosférica em particular, pode ser caracterizada por sete aspectos mais importantes [52]:

- 1) Fluxos turbulentos são altamente irregulares e caóticos (aleatórios).
- 2) Fluxos turbulentos possuem alta capacidade de difusão: devido ao movimento aleatório das parcelas do fluido (os vórtices turbulentos), intensa mistura é verificada. Embora este mecanismo seja análogo ao mecanismo da difusão molecular, a difusão turbulenta tem muito mais intensidade.
- 3) A turbulência sempre ocorre para valores altos do número de Reynolds:  $R_e = U L/\nu$ , onde  $U$  e  $L$  são escalas de velocidade e espacial,  $\nu$  é a viscosidade cinemática. Reynolds observou que a transição de um fluxo laminar para um turbulento, no interior de tubos, se dá a partir de um valor crítico:  $R_{e_{cr}} \sim 10^3$ .
- 4) Fluxos turbulentos são rotacionais, com alto índice de vorticidade ( $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ ) e intensa flutuação de  $\vec{\omega}$ .
- 5) Fluxos turbulentos são sempre dissipativos: a energia cinética do movimento turbulento transforma-se em energia interna, devido a dissipação molecular (viscosidade).
- 6) Os fluxos turbulentos são contínuos, no sentido de que as escalas dos menores vórtices turbulentos são muito maiores do que qualquer escala molecular.
- 7) A turbulência é uma característica do escoamento e não do fluido.

Devido ao caráter aleatório (estocástico) da turbulência, para seu estudo matemático usam-se métodos estatísticos de descrição. Desta forma, algum tipo de características médias (estatísticas) são necessárias, estimadas a partir de dados empíricos.

Dada uma função aleatória  $f(t)$ , sua média estatística para um dado intervalo  $\Delta t$  apresenta as seguintes propriedades [52]:

$$\begin{aligned}
 i) \quad \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g}; & ii) \quad \bar{a} &= a; \text{ se } a \text{ é constante;} \\
 iii) \quad \overline{a f} &= a \bar{f}; & iv) \quad \overline{\partial f / \partial s} &= \partial \bar{f} / \partial s; \\
 v) \quad \overline{\bar{f} g} &= \bar{f} \bar{g}.
 \end{aligned}$$

Reynolds sugeriu a hipótese de que o escoamento turbulento pode ser reconhecido como uma superposição de um fluxo médio (semelhante ao laminar) e uma flutuação, ou seja,  $f = \bar{f} + f'$ , de modo que  $\overline{f'} = 0$ .

A equação (3.5) expressa em notação indicial torna-se

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2 \epsilon_{ikj} \Omega_k v_j + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{3i}$$

onde  $\sigma_{ij}$  é uma componente do tensor tensão (de segunda ordem), cuja divergência expressa a força viscosa.

Faço uso da hipótese de Reynolds mencionada acima, tem-se

$$p = \bar{p} + p'; \quad v_i = \bar{v}_i + v'_i; \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}$$

e assumindo que  $\rho = \bar{\rho}$ , a substituição das expressões acima na equação indicial do movimento, torna-se, após se tomar a média,

$$\rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - 2 \epsilon_{ikj} \Omega_k \bar{v}_j + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho v'_i v'_j} \right) + \rho g \delta_{3i}. \quad (3.9)$$

que é conhecida como a *equação de Reynolds* e o termo  $-\overline{\rho v'_i v'_j}$  é chamado *tensor de Reynolds*.

Para uma substância escalar quimicamente inerte  $\alpha(\vec{r}, t)$ , satisfazendo a seguinte equação de difusão

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial (v_j \alpha)}{\partial x_j} = K_m \sum_j \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j^2}$$

onde  $K_m$  é o coeficiente de difusão molecular. Tomando  $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$  e  $v_i = \bar{v}_i + v'_i$  e substituindo na expressão anterior, resulta

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{\alpha})}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_m \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x_j} - \overline{v'_j \alpha'} \right). \quad (3.10)$$

Fisicamente, o número de Reynolds pode ser interpretado como a razão entre as forças inerciais e forças viscosas:  $Re = U^2 L^{-1} / \nu U L^{-2} = U L / \nu$ . Assim, se  $Re \rightarrow \infty$  significa que as forças inerciais predominam sobre as forças viscosas. Contudo, as forças inerciais são representadas pelos termos não lineares da equação do movimento, o que torna a turbulência um fenômeno essencialmente não linear.

Altos valores de Reynolds são quase sempre encontrados na atmosfera [45]. Desta maneira, de acordo com o exposto no parágrafo anterior:  $|\bar{\sigma}| \ll |\overline{\rho v'_i v'_j}|$ ; isto é, no regime turbulento podemos desconsiderar a contribuição da viscosidade (e difusividade) molecular.

As equações (3.9) acrescentam novas variáveis às equações do movimento: as tensões de Reynolds. Na tentativa de uma solução usam-se *métodos de fechamento*. Uma técnica para o fechamento das equações consiste em relacionar os fluxos turbulentos aos gradientes das quantidades médias - a teoria K - através de coeficientes de difusão que são propriedades do fluxo e não do fluido.

### 3.2.1 O Conceito de Camada Limite

O movimento de um fluido coincide, em muitos casos, com a teoria dos fluidos perfeitos e a influência da viscosidade está confinada a uma delgada camada a partir de uma parede sólida. Se não existe tal fronteira sólida, não haveria diferença apreciável entre os campos de um fluido real e a teoria de um fluido perfeito [52]. A existência de um contorno sólido faz o fluido aderir à parede, e as forças viscosas retardam o movimento do fluido numa fina camada próxima a parede, até o valor correspondente ao fluxo de fluido ideal. Este corpo de idéias foi elaborado pelo físico alemão L. Prandtl; e a camada sob consideração é denominada *camada limite*.

Em poucas palavras, a teoria da camada limite prediz que o movimento de um fluido pode ser compreendido como a superposição de um fluxo como previsto pela teoria dos fluidos ideais, e um fluxo sob a influência da viscosidade, numa camada próxima a uma fronteira rígida.

O estudo da atmosfera se distingue pela necessidade de se considerar os processos térmicos, indicados por um parâmetro chamado *número de Richardson*:

$$R_i = \left( \frac{g}{\theta_0} \right) \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^{-2}$$

onde  $\theta = T (p_{00}/p)^{R/c_p}$  é a temperatura potencial e  $U$  é a velocidade média do vento.

A camada limite planetária é então a região em que o fluxo de grande escala da atmosfera livre ajusta-se as condições de contorno impostas pela superfície da Terra. O fluxo resultante do forte cisalhamento e os efeitos térmicos do aquecimento (resfriamento) superficial criam fontes de energia para os movimentos turbulentos, que são típicos das camadas limites.

## CAPÍTULO 4

### INICIALIZAÇÃO EM METEOROLOGIA

Em geral, na NWP somente os fluxos de baixa frequência tem pouco significado, embora também existam soluções de ondas de alta frequência (ondas de gravidade inerciais). As observações mostram que existe um balanço entre o vento e o campo de pressão, assegurando que as ondas de alta frequência tem amplitudes muito menores do que os fluxos rotacionais. Para garantir que os campos iniciais refletem este balanço atmosférico e a previsão contenha somente pequenas amplitudes para as ondas de gravidade inerciais, usamos o processo chamado inicialização.

Esquemáticamente, um processo ideal de inicialização, supondo que os dados atmosféricos correspondam a ondas do tipo

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$$

com as frequências ordenadas:  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_r < \dots$ , corresponde ao diagrama abaixo.

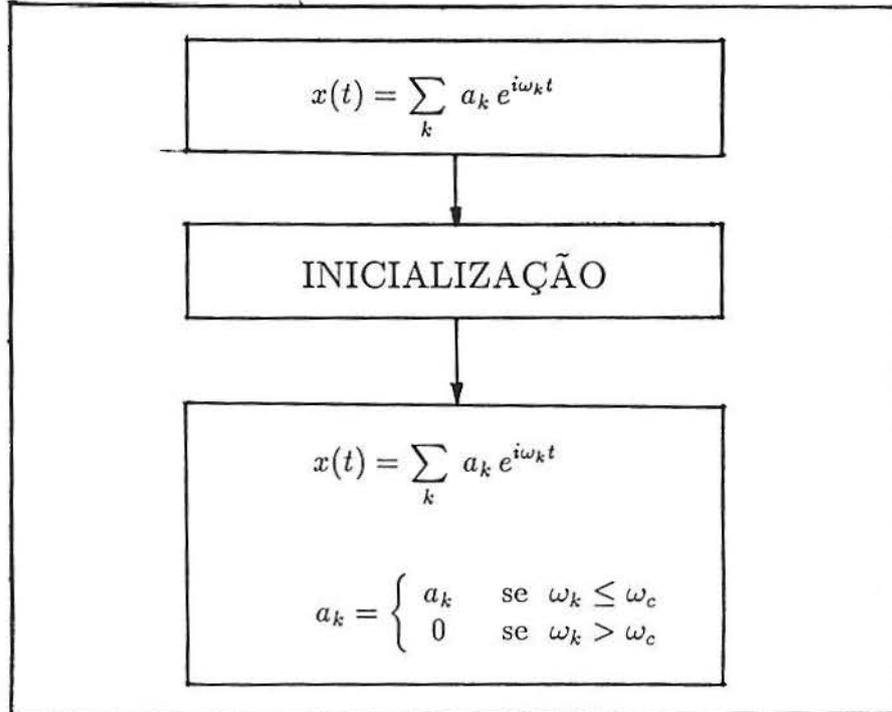


Fig. 4.1 - Representação de um processo de inicialização ideal.

No início da NWP as equações atmosféricas foram modificadas para filtrarem as componentes de alta frequência, as equações da *teoria quase-geostrófica*, que possuem pequena divergência ( $D = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ). Todavia estas "equações filtradas", embora livre dos ruídos, envolvem aproximações que nem sempre se justificam, as quais poderiam induzir erros na previsão. Particularmente na zona equatorial, cujo fluxo apresenta divergência relativamente elevada - em comparação com as latitudes mais altas - acarretando na necessidade de se incluir outras soluções além das previstas pelas equações filtradas, pelo menos para os níveis mais baixos.

Historicamente, os métodos que mais tem se destacado para controlar os movimentos de alta frequência, na prática dos modelos de previsão, podem ser listados como:

- Inicialização Estática;
- Inicialização Dinâmica;
- O Método Variacional;
- Inicialização por Modos Normais:
  - Linear,
  - Não-Linear;
- Técnicas Não-modais:
  - Método da Transformada de Laplace,
  - Modos Normais Não-Lineares Implícito;
- Filtros Digitais.

Abaixo descreve-se sucintamente cada técnica, exceto o método da transformada de Laplace, analisado no capítulo 7.

## 4.1 Inicialização Estática

O termo inicialização estática refere-se a qualquer procedimento de ajuste dos dados iniciais afim de que estes obedeçam alguma(s) restrição(ões), na intenção de eliminar o ruído das ondas de alta frequência.

A prática padrão é analisar o campo geopotencial  $\Phi$  e, desta forma, associar o seu gradiente ao campo de velocidade do vento; através da relação geostrófica  $\vec{v} = f^{-1} \vec{k} \times \vec{\nabla} \Phi$ , ou das relações de balanço linear e não-linear [26] dadas respectivamente por

$$f \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \psi = \nabla^2 \Phi;$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} \psi) + 2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = \nabla^2 \Phi;$$

onde a componente rotacional do vento  $\vec{v}_\psi = \vec{k} \times \vec{\nabla} \psi$  pode ser calculada da função corrente  $\psi$ , obtida de uma das relações anteriores.

Há duas dificuldades básicas com este método. A primeira é que a equação de balanço pode tornar-se hiperbólica, principalmente onde a vorticidade absoluta tende a valores negativos. Para garantir a elipticidade, os campos deverão ser alterados. A segunda limitação parte do fato de que a ausência da componente divergente do vento garante a presença dos modos de gravidade [26].

Deste modo, a inicialização estática é insatisfatória, porque despreza muitas informações observacionais úteis, os campos devem ser modificados artificialmente e a persistência do ruído é ainda um problema.

## 4.2 Inicialização Dinâmica

A idéia do método parte do fato de que os modelos meteorológicos possuem um mecanismo inerente de ajustamento geostrófico<sup>1</sup>. Desta maneira usar-se-ia o próprio modelo em ciclos *forward-backward* para ajustar os dados. Tais ciclos podem ser da forma

$$u_{n+1}^* = u_n + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_n ;$$

$$u_n^{**} = u_{n+1}^* - \Delta t \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_{n+1} ;$$

$$\bar{u}_n = 3u_n - 2u_n^{**} .$$

As principais restrições ao método são: os modos meteorológicos são amortecidos junto com o ruído; é computacionalmente caro; processos irreversíveis não podem ser incluídos devido as integrações backward.

---

<sup>1</sup>ver [26] seção 2.8

### 4.3 O Método Variacional

O objetivo aqui é tornar mínimas as diferenças entre os valores tomados da análise objetiva e os dados ajustados, cuja minimização está sujeita a restrições dinâmicas como, por exemplo, a aproximação geostrófica. Como os valores observados  $\vec{u}^0$  e  $\Phi^0$  não satisfazem tais restrições e definindo

$$\vec{u} \equiv \vec{u}^0 + \vec{u}'; \quad \Phi \equiv \Phi^0 + \Phi';$$

da relação geostrófica obtém-se:  $\vec{u}' = f^{-1} \vec{k} \times \vec{\nabla}(\Phi^0 + \Phi') - \vec{u}^0$ .

Minimizar as diferenças  $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{u}^0$  e  $\Phi' = \Phi - \Phi^0$ , no sentido de mínimos quadrados é equivalente a minimizar o funcional

$$I = \int_{\Omega} (\alpha_u^2 |\vec{u}'|^2 + \alpha_{\phi}^2 \Phi'^2) d\Omega;$$

ou, na linguagem do cálculo de variações :  $\delta I = 0$ . Os pesos  $\alpha_u^2$  e  $\alpha_{\phi}^2$  são fatores associados a cada variável que tornam o ajuste possível.

Obviamente  $I = I(\Phi')$ , então seguindo-se as regras do cálculo variacional [26], a seguinte equação diferencial segue

$$\nabla^2 \Phi' - q_{\phi}^2 \Phi' = f \zeta^0 - \nabla^2 \Phi^0;$$

ou, equivalentemente

$$\nabla^2 \Phi - q_{\phi}^2 \Phi = f \zeta^0 - q_{\phi}^2 \Phi^0; \tag{4.1}$$

onde  $q_{\phi} \equiv f \alpha_{\phi} / \alpha_u$  e a vorticidade observada  $\zeta^0$  é dada por

$$\zeta^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y}.$$

Devido ao fato de que a atmosfera em latitudes médias, como regra, está em permanente balanço quase-geostrófico e quase-estático, revelando a existência de um mecanismo físico de adaptação, é possível definir um *geopotencial de ajuste*  $\Phi^*$  [45, 26], que faz com que as equações de água-rasa (3.8) admitam um invariante estacionário ( $s$ ) acoplado a campos transientes, na forma

$$\nabla^2 \Phi_s - (f^2/\Phi^*) \Phi_s = f\zeta^0 - (f^2/\Phi^*) \Phi^0. \quad (4.2)$$

As equações (4.1) e (4.2) coincidem se  $q_\phi = f/\sqrt{\Phi^*}$ , ou ainda,  $\alpha_\phi/\alpha_u = (\Phi^*)^{-1/2}$ , resultando que o ajustamento geostrófico e a inicialização coincidirão.

A solução analítica obtida serve somente para ilustrar o método. Vários tipos de restrições podem ser usadas, tais como: a equação de balanço não-linear, a equação do vento térmico, o balanço hidrostático e outras. Todavia o tratamento simultâneo do ajuste da análise objetiva aos diagnósticos dinâmicos podem tornar os procedimentos variacionais extremamente complexos.

#### 4.4 Inicialização por Modos Normais

Recentemente métodos baseados nos modos normais do modelo de previsão tem sido propostos. A primeira tentativa foi separar os modos lentos (rotacionais ou de Rossby) dos modos rápidos (divergentes ou de gravidade) e anular os últimos. Esta idéia teve somente um sucesso parcial, pois os modos de alta freqüência eram rapidamente re-exitados pelos termos não lineares das equações. Uma versão mais sofisticada deste método é tornar nula a taxa inicial de variação dos modos rápidos, *a inicialização de modos normais não-lineares* (NMI).

Para apresentar o método seguir-se-á a descrição dada por Daley [19].

Admitindo que as variáveis de um modelo  $u, v, \Phi$  possam ser separadas em componentes verticais e horizontais, na forma

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(\lambda, \varphi, t) \\ \hat{v}(\lambda, \varphi, t) \\ \hat{\Phi}(\lambda, \varphi, t) \end{bmatrix} Z(z) = \vec{U}(\lambda, \varphi, t) Z(z)$$

e substituindo numa forma linearizada, obtém-se três equações horizontais, pela técnica de separação de variáveis

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - 2\Omega \hat{v} \sin\varphi + \frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \lambda} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + 2\Omega \hat{u} \sin\varphi + \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \varphi} = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{g\tilde{H}}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{v} \cos \varphi) \right] = 0; \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{H}$  é chamado de altura equivalente e  $(g\tilde{H})^{-1}$  é a constante de separação.

Assumindo que as componentes horizontais tenham um comportamento oscilatório no espaço e frequência ( $\sigma$ ) complexa no tempo

$$\vec{U}(\lambda, \varphi, t) = \begin{bmatrix} \hat{u}^m \\ i \hat{v}^m \\ 2\Omega \hat{\Phi}^m \end{bmatrix} e^{im\lambda - 2\Omega i\sigma t},$$

onde  $m$  é o número de onda zonal,  $\sigma$  é uma frequência adimensional e  $i = \sqrt{-1}$ , que conduz ao seguinte problema de autovalor

$$\sigma \hat{u}^m = -\hat{v}^m \sin \varphi + \frac{m \hat{\Phi}^m}{a \cos \varphi};$$

$$\sigma \hat{v}^m = -\hat{u}^m \sin \varphi - \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}^m}{\partial \varphi};$$

$$\sigma \hat{\Phi}^m = \frac{g\tilde{H}}{4\Omega^2 a \cos \varphi} \left[ m \hat{u}^m + \frac{\partial (\hat{v}^m \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right].$$

Para  $L$  níveis ter-se-á  $L$  alturas equivalentes  $\tilde{H}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ . Para cada nível, o sistema acima é transformado num conjunto de equações algébricas, por discretização, para cada número de onda zonal. Tais soluções correspondem à expansão em harmônicos esféricos ou funções de Hough [26, 60], como é conhecida a estrutura horizontal.

Desta maneira para cada nível existirão  $3MN$  funções de estrutura horizontal

$$\hat{u}_n^k(\lambda, \varphi); \quad \hat{v}_n^k(\lambda, \varphi); \quad \hat{\Phi}_n^k(\lambda, \varphi); \quad 1 \leq n \leq MN;$$

onde  $n$  indica o número do modo horizontal. Cada modo está associado a uma autofreqüência  $\sigma_n^k$ , o que permite classificá-los em duas classes. A primeira consiste de modos de baixa freqüência (modos de Rossby) e a segunda são os de alta freqüência (ondas de gravidade).

Uma das propriedades dos modos normais é que  $\hat{u}_n^k, \hat{\Phi}_n^k$  são simétricos em relação ao equador, enquanto que  $\hat{v}_n^k$  é anti-simétrico. Outra é que os modos  $\hat{\Pi}_n^k(\lambda, \varphi, z) = \vec{U}_n^k Z_k(z)$  formam soluções ortogonais, normalizados pela condição

$$\langle \hat{\Pi}_l^k \cdot \hat{\Pi}_n^j \rangle = \int_{\square} \hat{\Pi}_l^k \cdot \hat{\Pi}_n^j d\square = \delta_k^j \delta_n^l$$

onde  $\delta_j^k$  é o delta de Kronecker. A equação acima deriva do fato das funções verticais e horizontais serem, individualmente, ortogonais, ou seja

$$\int_z Z_k(z) Z_j(z) dz = \delta_k^j$$

$$\int_{\lambda} \int_{\varphi} \left[ \frac{g \tilde{H}_k}{4\Omega^2} (\hat{u}_n^k \hat{u}_l^k + \hat{v}_n^k \hat{v}_l^k) + \hat{\Phi}_n^k \hat{\Phi}_l^k \right] \cos\varphi d\varphi d\lambda = \delta_n^l$$

Então, um vetor arbitrário  $\vec{X} = \vec{X}(\lambda, \varphi, z, t)$  pode ser expandido na forma

$$\vec{X} = \sum_n \sum_k x_n^k \hat{\Pi}_n^k(\lambda, \varphi, z, t) = \sum_n \sum_k x_n^k \vec{U}_n^k Z_k(z)$$

$$x_n^k = \langle \hat{\Pi}_n^k \cdot \vec{X} \rangle \iff E \vec{X}$$

onde  $x_n^k$  é chamado o coeficiente da expansão em modos normais e  $E$  é a matriz de transformação do espaço físico para o espaço de modos normais.

Para um modelo completo (incluindo termos não lineares) da forma (4.3)-(4.5), tem-se, para cada nível  $k$ :

$$\frac{d\vec{U}^k}{dt} = i A \vec{U}^k + \epsilon N(\vec{U}^k)$$

onde a matriz  $A$  representa o operador (discretizado) linear do modelo, que admite a fatorização:  $A = E^{-1} \Lambda E$ , sendo  $E$  a matriz cujas colunas estão os autovetores  $\vec{\gamma}_n$  associados aos autovalores  $\sigma_n$  da matriz  $A$ , que correspondem aos modos e as

freqüências do sistema linear, isto é,  $\epsilon = 0$ . Se a matriz for simétrica  $E^{-1} = E^T$ , as colunas de  $E$  (autovetores) são ortogonais e as freqüências  $\sigma_n$  são todas reais.

Realizando a troca de variáveis  $\vec{X} \equiv E \vec{U}$ , obtém-se o desacoplamento

$$\frac{d\vec{X}^k}{dt} = i\Lambda \vec{X}^k + \vec{R}^k$$

ou em componentes

$$\frac{dx_n^k}{dt} = i\sigma_n x_n^k + r_n^k \quad (4.6)$$

onde  $\vec{R}^k$  ou  $r_n^k$  é a projeção do termo não linear  $N(\vec{U})$  no espaço dos modos normais. Podemos decompor  $\Lambda$  em suas contribuições de baixa freqüência (subespaço de Rossby) e de alta freqüência (subespaço de gravidade)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \Lambda_Y & 0 \\ 0 & \Lambda_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_Y(Y, Z) \\ R_Z(Y, Z) \end{bmatrix}.$$

Se tomarmos  $r_n$  como constante em (4.6), a solução será

$$x_n = \left[ x_n(0) - i \frac{r_n}{\sigma_n} \right] e^{i\sigma_n t} + i \frac{r_n}{\sigma_n}$$

ao fixar-se:  $x_n(0) = i r_n / \sigma_n$ , para cada um dos modos rápidos ( $Z$ ), o termo oscilatório anula-se. Todavia o balanço  $x_n(0) = i r_n / \sigma_n$  é não linear ( $r_n = r_n(x_n)$ ): a relação deve ser resolvida iterativamente.

Portanto, na inicialização por modos normais *lineares* fixa-se os modos rápidos como sendo nulos:  $X_0 = [Y_0 \ 0]$ . E a inicialização por modos normais *não linear* é o processo iterativo:

$$Z^{\mu+1}(0) = i \Lambda_Z^{-1} R_Z[Y_0, Z^\mu(0)].$$

Este tornou-se o esquema de maior sucesso em NWP e foi desenvolvido por Machanhauer [39] e Baer & Tribbia [2]. É óbvio que para aplicar a NMI devemos

conhecer os modos normais lineares do modelo. Para modelos globais e hemisféricos a solução é conhecida. A situação para o domínio de área limitada é completamente diferente, pois não existe um método prático geral para definir os modos normais. Apesar disto, há algum progresso na adaptação do NMI à modelagem de área limitada [4].

As principais dificuldades para calcular os modos normais no contexto de área limitada são:

- (a) a não separabilidade nas variáveis horizontais devido a forma do domínio e/ou se o parâmetro de Coriolis é função de ambas variáveis horizontais;
- (b) as condições de contorno podem variar no tempo.

Estas dificuldades tem motivado a investigação de técnicas alternativas, ou seja, métodos que não requeiram o conhecimento explícito dos modos normais do modelo, as quais ver-se-á a seguir.

#### 4.5 Inicialização por Modos Normais Implícita

Esta técnica foi desenvolvido por C. Temperton [55] e testada para um modelo hemisférico discretizado na forma de elementos finitos. Para descrever o método usa-se a mesma representação da seção anterior. O sistema analisado então é

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = i A \vec{U} + \epsilon N(\vec{U})$$

onde, novamente,  $A = E^{-1} \Lambda E$ . Assim se  $\vec{X} = E U = [Y Z]^T$ , sendo  $Y$  os modos lentos e  $Z$  os modos rápidos, tem-se

$$U = \begin{bmatrix} U_R \\ U_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_Y^{-1} Y \\ E_Z^{-1} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_Y^{-1} E_Y Y \\ E_Z^{-1} E_Z Z \end{bmatrix}$$

ou ainda,  $U_R = E_Y^{-1} E_Y \vec{U}$  e  $U_G = E_Z^{-1} E_Z \vec{U}$ .

Defindo a tendência

$$\delta_t \vec{X} = \frac{\vec{X}(\Delta t) - \vec{X}(0)}{\Delta t} = i \Lambda \vec{X} + R \implies R = (\delta_t \vec{X}) - i \Lambda \vec{X}.$$

a equação para inicialização por modos normais  $Z_0^{\mu+1} = i \Lambda_Z R_Z$ , pode ser reescrita como

$$Z_0^{\mu+1} - Z_0^\mu \equiv \Delta Z = i \Lambda_Z^{-1} (\delta_t Z)$$

ou, em termos das variáveis do sistema físico

$$A \Delta \vec{U} = i E^{-1} \Lambda E E_Z^{-1} \Lambda_Z^{-1} E_Z (\delta_t \vec{U}) = i E_Z^{-1} E_Z \delta_t \vec{U}. \quad (4.7)$$

que é a equação básica para o esquema de Temperton.

Se vetor de estado é formado pelas variáveis prognósticas  $\vec{U} = [\zeta \ D \ \Phi]^T$ , onde  $\zeta$  é a vorticidade,  $D$  é a divergência e  $\Phi$  é o geopotencial, Temperton descreve duas propriedades para os modos:

- 1) para os modos lentos  $U_R = [\zeta_R \ D_R \ \Phi_R]^T$ :  $\nabla^2 \Phi_R = f \zeta_R$  e  $D_R = 0$ ;
- 2) como a vorticidade potencial ( $Z = \zeta - f\Phi$ ) é nula, para os modos rápidos obtém-se:  $\zeta = f\Phi$ .

Se um modelo atmosférico for descrito por

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \zeta \\ D \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & -\nabla^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ D \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_\zeta \\ N_D \\ N_\Phi \end{bmatrix}$$

que, de acordo com (4.7), cada iteração de modos normais implícito é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & \nabla^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \zeta \\ \Delta D \\ \Delta \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta_t \zeta) \\ (\delta_t D) \\ (\delta_t \Phi) \end{bmatrix}_G \quad (4.8)$$

onde  $\Delta \zeta$ ,  $\Delta D$ ,  $\Delta \Phi$  são as mudanças requeridas para as variáveis do modelo,  $\delta_t \zeta$ ,  $\delta_t D$ ,  $\delta_t \Phi$  são as tendências obtidas após integrar o modelo num único passo de tempo.

Como os modos de Rossby estão balanceados -  $(\delta_t D)_R = 0$  - tem-se que  $(\delta_t D)_0 = (\delta_t D)_G$ . A segunda equação de (4.8) e a propriedade 2, permitem escrever

$$(\nabla^2 - f^2) \Delta\Phi = (\delta_t D)_0 \quad (4.9)$$

A única variável que permanece indeterminada é  $\Delta D$ . Mas, pela terceira equação do sistema:  $\Delta D = (\delta_t \Phi)_G$ .

Para determinar  $(\delta_t \Phi)_G$ , pode-se usar a propriedade 2:  $f(\delta_t \Phi)_G = (\delta_t \zeta)_G$ . Entretanto, pela propriedade 1,  $f(\delta_t \zeta)_R = \nabla^2(\delta_t \Phi)_R$  e, como as tendências gerais são as somas de suas componentes, escreve-se

$$f(\delta_t \zeta)_G = f(\delta_t \zeta)_0 - f(\delta_t \zeta)_R = f(\delta_t \zeta)_0 - \nabla^2(\delta_t \Phi)_0 + \nabla^2(\delta_t \Phi)_G$$

ou ainda,

$$(\nabla^2 - f^2) (\delta_t \Phi)_G = \nabla^2(\delta_t \Phi)_0 - f(\delta_t \zeta)_0. \quad (4.10)$$

Na forma algorítmica o método dos modos normais implícito é esquematizado como:

- 1) Obter os valores de tendência (um único passo de integração);
- 2) Resolver (4.9) para  $\Delta\Phi$ ;
- 3) Resolver (4.10) para  $(\delta_t \Phi)_G$ ;
- 4) Obter  $\Delta\zeta = f(\Delta\Phi)$ ;
- 5) Obter  $\Delta D = (\delta_t \Phi)_G$ ;
- 6) Atualizar as variáveis do sistema.

## 4.6 Filtros Digitais

A idéia de filtros digitais como um modo alternativo para a inicialização, foi proposta recentemente [38, 42]. Nesta descrição breve, seguir-se-á a exposição desenvolvida por P. Lynch [38].

O processo de inicialização tem por objetivo eliminar o ruído provocado pelas altas frequências. O filtro será então denominado de *passa-baixa*, no jargão da literatura de filtros digitais [27]. No caso de um filtro passa-baixa ideal, tem-se

$$f^*(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

onde  $h(t)$  é o filtro,  $f(t)$  é a "função de entrada" e  $f^*(t)$  os dados filtrados.

No espaço de frequências, o análogo a convolução acima é

$$F^*(\omega) = \mathcal{F}\{(h * f)(t)\} = \mathcal{F}(h) \mathcal{F}(f) = H(\omega) F(\omega)$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq |\omega_c| \\ 0, & |\omega| > |\omega_c| \end{cases} \quad (4.11)$$

onde a transformada de Fourier da função de entrada e do filtro é expressa por  $F(\omega)$  e  $H(\omega)$ , respectivamente. A transformada inversa da eq. (4.11), fornece a expressão do filtro no domínio do tempo, isto é

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t}$$

Se, ao invés da função no tempo contínuo, tem-se uma seqüência discreta de pontos, a convolução é reescrita como

$$f_n^* = \sum_{k=-N}^N h_k f_{n-k}$$

onde  $f_n = f(n\Delta t)$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ; e  $h_n = \text{sen}(n\theta_c)/(n\pi)$ , onde  $\theta_c = \omega_c \Delta t$  é a frequência digital.

Como é bem conhecido, a série truncada de Fourier origina o fenômeno de Gibbs. As oscilações de Gibbs podem ser grandemente reduzidas por meio de uma função *janela*. Desta forma, a resposta de um filtro pode ser melhorada se ele for multiplicado, por exemplo, pela janela de Lanczos [27]

$$g_n = \frac{\text{sen}[n\pi/(N+1)]}{n\pi/(N+1)}$$

A frequência de Nyquist  $\omega_N = \pi/\Delta t$ , corresponde a frequência máxima que uma componente  $f_n$  pode representar no menor período  $\tau_N = 2\Delta t$ . Este resultado pode ser usado para determinar a frequência de corte ( $\omega_c$ ) da seguinte maneira: toma-se um tempo  $t_s = N_t \Delta t$ , o tempo total de integração do modelo para a inicialização, e arbitra-se  $\omega_s = 2\pi/t_s$ , ou  $\theta_c = \pi/N_t$ .

O processo de inicialização é realizado com integrações forward e backward sobre o semiperíodo  $t_s/2$ , e após somam-se ambos valores filtrados:

$$f_F^*(0) = \frac{1}{2}h_0f_0 + \sum_{n=1}^{N_t} h_{-n} f_n$$

$$f_B^*(0) = \frac{1}{2}h_0f_0 + \sum_{n=-1}^{-N_t} h_{-n} f_n \quad (4.12)$$

$$f^*(0) = f_F^*(0) + f_B^*(0)$$

A técnica foi testada para o modelo HIRLAM [38], com  $t_s = 6$  horas,  $\Delta t = 360$  s e, portanto,  $\omega_c = \pi/30$  ( $N_t = 30$ ). Os campos de temperatura, umidade, pressão de superfície e vento foram filtrados após análise objetiva, com resultados verdadeiramente animadores. O filtro usado no processo foi

$$h_n = \left[ \frac{\text{sen}[n \pi / (N_t + 1)]}{n \pi / (N_t + 1)} \right] \left( \frac{\text{sen}(n \omega_c)}{n \pi} \right).$$

É claro que, para o método ser fisicamente consistente, processos irreversíveis não podem ser considerados.

## CAPÍTULO 5

### DIFUSIVIDADE TURBULENTA NA CAMADA ESTÁVEL

Conforme observado na seção 3.2, as equações para o regime turbulento exigem expressões que relacionem as variáveis médias com os fluxos turbulentos - o problema de fechamento das equações.

Num esquema de fechamento de primeira ordem, relaciona-se gradientes de quantidades médias aos fluxos de Reynolds por meio de coeficientes de difusão. Tendo em vista que a turbulência é característica do escoamento, as difusividades, diferentemente do caso laminar, poderão variar tanto no tempo como no espaço.

A difusividade vertical em camada estável segue a modelagem empregada por Degrazia e Moraes [20], considerando-se gradientes horizontais como sendo não relevantes.

#### 5.1 Teoria da Similaridade

A teoria de similaridade de Monin-Obukhov é hoje uma das teorias clássicas para se descrever a turbulência, pois teve grande sucesso em descrever a camada superficial da PBL. A camada superficial ocupa cerca de 10% da altura total da camada limite, a partir da superfície.

A hipótese na teoria de Monin-Obukhov é que as quantidades relevantes para a descrição da estrutura da camada dependam de poucos parâmetros físicos dimensionais. Como consequência, a velocidade de fricção ou dinâmica ( $u_* = \sqrt{\tau_s/\rho}$  -  $\tau_s$  é a tensão na superfície), o fluxo de calor ( $q_* = \overline{w'\theta'}|_{z=0}$ ) e o parâmetro de convecção ( $\beta_c = g/\bar{T} \simeq g/\bar{\theta}$ ), poderiam formar escalas de velocidade, comprimento e temperatura, como segue

$$u_*; \quad L = -\frac{u_*^3}{\kappa\beta_c q_*}; \quad \theta_* = -\frac{q_*}{\kappa u_*} \quad (5.1)$$

onde  $\kappa \simeq 0.4$  é a constante de Von Kármán. Como  $u_* > 0$ , o sinal de  $q_*$  determina os sinais de  $L$  e  $\theta_*$ . Analogamente ao método da parcela<sup>1</sup>, pode-se definir, através das escalas, o tipo de estratificação:

---

<sup>1</sup>Ver anexo B.

instável	$q_* > 0, L < 0, \theta_* < 0;$
estável	$q_* < 0, L > 0, \theta_* > 0;$
neutra	$q_* \rightarrow 0,  L  \rightarrow \infty,  \theta_*  \rightarrow 0.$

A parte fundamental da hipótese de Monin-Obukhov é a auto-similaridade dos perfis verticais de  $\bar{u}$  e  $\bar{\theta}$ :

$$\frac{d(\bar{u}/u_*)}{d(z/L)} = h\left(\frac{z}{L}\right), \quad \frac{d(\bar{\theta}/\theta_*)}{d(z/L)} = h_\theta\left(\frac{z}{L}\right);$$

que pode ser reescrita numa forma mais conveniente

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = \xi\left(\frac{z}{L}\right), \quad \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \xi_\theta\left(\frac{z}{L}\right); \quad (5.2)$$

onde  $\xi$  e  $\xi_\theta$  são funções universais da variável adimensional  $z/L$  determinadas por experimentos.

A fórmula fundamental da teoria semiempírica

$$-\overline{u'w'} = \frac{\tau}{\rho} = u_*^2 = K \frac{d\bar{u}}{dz}$$

pode ser combinada com (5.2) para se obter as difusividades

$$K = \frac{\kappa u_* z}{\xi(z/L)}, \quad K_\theta = \frac{\kappa u_* z}{\xi_\theta(z/L)}. \quad (5.3)$$

### 5.1.1 A Teoria da Similaridade na Camada Estável

Embora nas duas últimas décadas a compreensão da camada convectiva (instável) tem sido bem estabelecida, a camada limite estável (Stable Boundary Layer - SBL) é bem menos conhecida, pois outros fenômenos interferem no processo, como ondas de gravidade.

Entretanto, a modelagem da SBL noturna tem sofrido um grande avanço com as informações extraídas de alguns experimentos [12, 43, 50], revelando uma similaridade local dos fluxos turbulentos.

A teoria de similaridade é adaptada ao caso da SBL [20], onde a parametrização dependerá de outras quantidades no lugar das grandezas superficiais  $u_*$  e  $\theta_*$ . Assume-se que as escalas apropriadas dependem dos valores locais da tensão  $\tau(z)$ , do fluxo de calor  $\overline{w'\theta'}(z)$  e do comprimento de Monin-Obukhov local<sup>2</sup>  $\Lambda$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = (1 - z/h)^{\alpha_1} \quad (5.4)$$

$$\frac{\overline{w'\theta'}}{(\overline{w'\theta'})_0} = (1 - z/h)^{\alpha_2} \quad (5.5)$$

$$\frac{\Lambda}{L} = (1 - z/h)^{(3\alpha_1/2 - \alpha_2)} \quad (5.6)$$

onde  $\tau_0 = u_*^2 = -\overline{u'w'}$  é a tensão superficial,  $h$  é a altura da camada limite turbulenta estável,  $z$  é a altura acima do solo,  $L$  é o comprimento de Monin-Obukhov e  $\alpha_1, \alpha_2$  são constantes a serem determinadas por experimentos. Esta hipótese é aplicável em regimes estáveis sobre terreno homogêneo, onde a turbulência é contínua e não dominada por ondas de gravidade.

## 5.2 Difusividade Turbulenta da Teoria Estatística

O ponto de partida da análise de propriedades variando contínua e aleatoriamente é essencialmente estatístico. Para tornar claro o tipo de métodos utilizados e estabelecer uma notação adequada, vão ser definidas alguns conceitos e apresentadas algumas propriedades de funções estocásticas.

A média e a função de auto-correlação de uma função aleatória num intervalo de tempo  $\Delta t$  são definidas como

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t) dt; \quad R(\tau) \equiv \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{u^2(t)}$$

e escalas integrais de espaço e tempo como

---

<sup>2</sup>  $\Lambda \equiv -\frac{\tau^{3/2}}{\kappa(g/T)\overline{w'\theta'}}$

$$l_s \equiv \int_0^{\infty} R(x) dx; \quad t_s \equiv \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

Alguns autores [45] também denominam a função  $B(\tau) = \overline{u^2} R(\tau)$ , como função de correlação. Se  $R(\tau)$  depender somente de  $\tau$ , mas não de  $t$ , a função  $u(t)$  é dita estacionária e, claramente,  $B(\tau) = B(-\tau)$ ,  $B(0) = \sigma^2 = \text{constante}$ .

Sob muitos pontos de vista, principalmente o experimental, é mais confortável estudar estas características com o auxílio da transformada de Fourier - o espectro destas grandezas. Assim, o espectro da função de correlação para uma função estacionária é

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Com a transformação inversa recuperamos a função

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} E(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

$$B(0) = \sigma^2 = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega.$$

A teoria estatística de Taylor estabelece que se  $z$  é o desvio de uma partícula típica, devido a velocidade turbulenta  $w'$ , após um tempo  $t$ , e  $\overline{z^2}$  é a média do quadrado de um número grande de valores de  $z$ , então, o coeficiente de correlação lagrangeana da componente  $w$  na direção  $z$  é da forma

$$R_w^L(\tau) = \frac{\overline{w'(t) w'(t + \tau)}}{\overline{w'^2}}; \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

A integração de  $\tau = -t$  a  $\tau = 0$  e o fato de que  $R_x(\tau)$  é uma função estacionária, resulta

$$\overline{w'^2} \int_0^t R_w^L(\tau) d\tau = \overline{w'(t) z(t)} = \frac{1}{2} \overline{\frac{dz^2}{dt}}.$$

Conseqüentemente, outra integração produz

$$\overline{z^2}(T) = 2\overline{w'^2} \int_0^T \int_0^t R_w^L(\tau) d\tau dt. \quad (5.7)$$

Da expressão acima é possível imediatamente realizar uma análise para dois casos limites. Se  $\tau \rightarrow 0$  tem-se que  $R_w \rightarrow 1$  logo, para  $T$  pequeno

$$\overline{z^2} = \overline{w'^2} T^2. \quad (5.8)$$

Para tempos muito longos,  $t \rightarrow \infty$ ,  $R_w \rightarrow 0$ , deste modo  $\int_0^t R_w(\tau) d\tau = t_s$ , a escala integral lagrangeana. Neste limite, obtém-se

$$\overline{z^2} = 2\overline{w'^2} t_s T. \quad (5.9)$$

A interpretação física associada a estes casos limites é que inicialmente todas as partículas deslocam-se em linhas retas - o caso da equação (5.8). Para grandes espaços de tempos, as partículas "esqueceram" suas velocidades iniciais e a equação (5.9) é então válida.

Realizando a integração por partes na equação de difusão de Taylor (5.7), conduz a forma

$$\overline{z^2} = 2\overline{w'^2} \int_0^T (\tau - t) R_w^L(t) dt;$$

cuja transformada de Fourier [47] é dada por

$$\sigma_z^2 = \sigma_w^2 \tau^2 \int_0^\infty S_w^L(n) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi\tau)}{n\pi\tau} \right]^2 dn; \quad (5.10)$$

onde  $S_w^L$  é a densidade espectral da componente da velocidade lagrangeana. A quantidade  $[\text{sen}(n\pi\tau)/(n\pi\tau)]^2$  age como um filtro de passa-baixa [27].

A expressão (5.10) pode ser interpretada da seguinte maneira: inicialmente, flutuações de todas as escalas contribuem para  $\overline{z^2}$ , quando o tempo de difusão aumenta, as altas freqüências vão progressivamente perdendo a capacidade de influenciar a dispersão, isto é, as baixas freqüências dominam o processo.

Os dados experimentais mostram que a correlação lagrangeana tende mais lentamente para zero do que a euleriana.

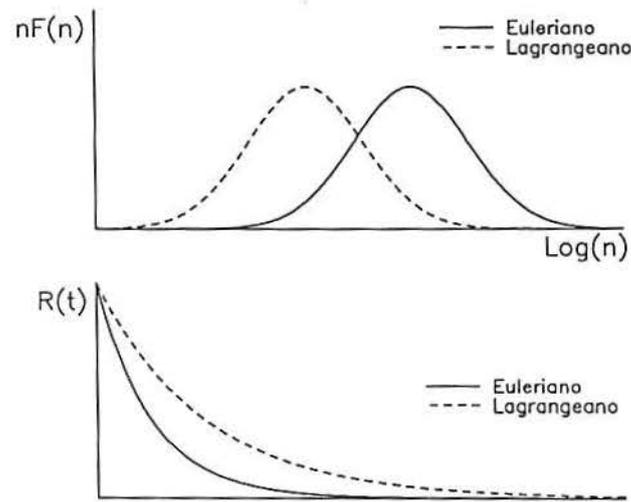


Fig. 5.1 - Densidade espectral e correlogramas hipotéticos ilustrando as diferenças entre dados lagrangeanos (L) e eulerianos (E).

Adotando a hipótese simples de que  $R_L(\tau) = R_E(t)$ , quando  $\tau = \beta t$  [47], a equação (5.10) pode ser reescrita como

$$\sigma_z^2 = \sigma_w^2 t^2 \int_0^\infty S_w^E(n) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi t/\beta_w)}{n\pi t/\beta_w} \right]^2 dn; \quad (5.11)$$

o termo  $\beta_w$  representando a razão entre as escalas temporais lagrangeanas e eulerianas [47] e tem a seguinte expressão:  $\beta_w = (\sqrt{\pi}/4)(U/\sigma_w)$ , onde  $U$  é a velocidade média do vento.

O coeficiente de difusão para o caso de turbulência homogênea [46] é expresso por

$$K_{zz} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_z^2}{dt}.$$

Substituindo (5.11) na equação acima a difusividade torna-se

$$K_{zz} = \frac{\sigma_w^2 \beta_w}{2\pi} \int_0^\infty \frac{S_w(n) \text{sen}(2\pi n t/\beta_w)}{n} dn. \quad (5.12)$$

O comportamento assintótico para um longo tempo de difusão, onde  $n \sim t^{-1}$ , é então

$$K_{zz} = \frac{1}{4}[\sigma_w^2 \beta_w S_w(0)]. \quad (5.13)$$

com o espectro da velocidade vertical [20] dado por

$$\frac{n S_w(n)}{U_*^2} = 0.6 (c_\epsilon)^{2/3} \left(\frac{f}{q}\right) \left[ (f_m)_{n,w}^{5/3} + 1.5 \left(\frac{f}{q}\right)^{5/3} \right]^{-1}$$

onde  $f = nz/U$ , a frequência reduzida,  $n$  a frequência cíclica (em Hz),  $U$  a velocidade média do vento na direção  $x$ ,  $(f_m)_{n,w}$  é a frequência do pico espectral na estratificação neutra,  $q = \Phi_\epsilon/c_\epsilon = (1 + 3.7 z/\Lambda)$ , sendo  $\Phi_\epsilon$  uma função de dissipação adimensional.

De acordo com Sorbjan [51]:  $c_\epsilon = 1.25$  e  $(f_m)_{n,w} = 0.33$ .

### 5.3 Difusão Vertical

A equação de difusão de contaminantes passivos é descrita pela conservação da massa em (3.10). Um caso especial ocorre na dispersão de fonte de área instantânea, isto é, a dispersão vertical de uma distribuição de concentração média de área, simplificando a equação de difusão para o seguinte sistema

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right), \quad 0 < z < h; \quad (5.14)$$

$$\bar{c}(z, t) = Q \delta(z - h_F), \quad \text{em } t = 0; \quad (5.15)$$

$$K_{zz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0, \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h. \quad (5.16)$$

A expressão do coeficiente de difusão é obtido da forma assintótica (5.13) e das hipóteses de similaridade local (5.4)–(5.6), permitindo obter [20]

$$K_{zz} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{z(1 - z/h)^{\alpha_1/2} u_*}{1 + 3.7(z/\Lambda)}. \quad (5.17)$$

No sistema (5.14)–(5.16)  $\bar{c}$  representa a concentração média de poluentes,  $Q$  a intensidade da fonte de área de altura  $h_F$ ,  $\delta(z)$  é a função delta de Dirac e  $h$  é a altura da SBL.

A equação (5.14) é discretizada usando diferenças finitas, onde a malha é refinada perto da fonte ( $z = h_F$ ). A função de Dirac pode ser aproximada pelas equações

$$\bar{c}(z, 0) = \begin{cases} (Q/\Delta z^2)(z - h_F) + Q/\Delta z & z \in [h_F - \Delta z, h_F] \\ -(Q/\Delta z^2)(z - h_F) + Q/\Delta z, & z \in (h_F, h_F + \Delta z] \\ 0 & z \notin [h_F - \Delta z, h_F + \Delta z] \end{cases} .$$

A integração temporal é realizada utilizando-se o método de Crank-Nicolson. Este método, entretanto, não é  $L_0$ -estável [53], podendo ocasionar oscilações indesejáveis, principalmente se  $\Delta z$  torna-se muito pequeno, pois o maior autovalor ( $\lambda_{N_z}$ ) da matriz de amplificação  $(\mathbf{I} - 1/2 \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} + 1/2 \Delta t \mathbf{A})$ , onde  $\mathbf{A}$  é a matriz gerada pela discretização do operador  $d/dz^2$  e incorpora as condições de contorno (5.16), aproxima-se de -1 quando  $\Delta z \rightarrow 0$ . Para evitar tais oscilações deve-se fazer uma restrição ao passo de tempo:  $\Delta t < \Delta z h/\pi$ .

Outra maneira de contornar o problema das oscilações é simular a condição (5.16) por uma distribuição normal

$$\bar{c}(z, 0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(z-h_F)^2/2\sigma^2},$$

os resultados com a aproximação acima tem sido razoáveis com  $\sigma \geq 3$ .

## CAPÍTULO 6

### O MODELO METEOROLÓGICO DYNAMO

O modelo que vai ser descrito abaixo foi concebido por P. Lynch [32], para simular movimentos atmosféricos em grande escala (a escala sinótica). Apesar de sua grande simplicidade o código DYNAMO é capaz de reproduzir importantes fenômenos da dinâmica atmosférica, embora tenha sido imaginado para testar esquemas de inicialização.

As hipóteses do modelo são:

- aproximação de água-rasa (shallow-water equations): considera-se a atmosfera como um fluido incompressível e em equilíbrio hidrostático com a vertical, com o campo de velocidades independente da componente  $z$ ;
- admite-se atmosfera seca e isentrópica;
- fronteira livre para a altura geopotencial (contorno superior);
- a superfície (fronteira no nível  $z = 0$ ) é considerada plana;
- Assume-se condições de contorno periódicas para todas as variáveis dependentes perturbadas.

#### 6.1 Equações do Modelo

Partindo das equações de água-rasa numa camada delgada de fluido homogêneo e incompressível acima de um superfície plana sob a ação da gravidade, num sistema de referência não inercial,

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \Phi(u_x + v_y) = 0 \quad (6.3)$$

onde  $d/dt$  é a derivada substantiva;  $x, y$  são as coordenadas no sentido oeste e norte;  $t$  é o tempo;  $\Phi = gh$  o geopotencial, sendo  $h$  a altura do fluido acima da superfície plana;  $u, v$  são as velocidades zonal e meridional. Considera-se o parâmetro de Coriolis na forma  $f = f_0 + \beta y$ , com  $f_0, \beta$  constantes. Por último, os subscritos significam derivação parcial.

Assumindo que o vento principal (zonal) é constante e está geostroficamente balanceado com o geopotencial ( $f\bar{u} = -\partial\bar{\Phi}/\partial y$ ) e os desvios (perturbações) são variáveis unidimensionais

$$u = \bar{u} + u'(x, t); \quad v = v'(x, t); \quad \Phi = \bar{\Phi}(y) + \Phi'(x, t).$$

Elimina-se a dependência em  $y$  subtraindo-se a relação geostrófica da eq. (6.2), obtendo-se a equação (6.2'). As equações da vorticidade ( $\zeta = v_x$ ) e da divergência ( $\delta = u_x$ ) são obtidas das combinações  $[(6.2')_x - (6.1)_y]$  e  $[(6.1)_x + (6.2')_y]$ , respectivamente. Ou seja,

$$\zeta_t + (u\zeta)_x + \delta f + \beta v = 0 \quad (6.4)$$

$$\delta_t + (u\delta)_x - \zeta f + \beta u' + \Phi_{xx} = 0 \quad (6.5)$$

$$\Phi_t + (u\Phi)_x - f\bar{u}v + \bar{\Phi} \delta = 0 \quad (6.6)$$

a equação (6.6) é obtida incorporando-se o balanço geostrófico à equação da continuidade (6.3).

O sistema (6.4)—(6.6) forma o conjunto de equações básicas do modelo, onde as variáveis prognósticas ( $\zeta$ ,  $\delta$ ,  $\Phi$ ) dependem somente de  $x$  e  $t$  (independentes). A dependência em  $y$  ocorre somente no parâmetro  $f$  e no geopotencial médio  $\bar{\Phi}$ ; porém, argumentos [26] de escala podem ser usados para mostrar que a dependência é tão pequena que  $f$  e  $\bar{\Phi}$  podem ser tomados como constantes, onde eles não aparecem diferenciados.

O teorema de Helmholtz permite a partição do campo de vento horizontal  $\vec{v}_H = u\vec{i} + v\vec{j}$  em componentes não divergentes e irrotacionais [29 ,61]

$$\vec{v}_H = \vec{v}_\chi + \vec{v}_\psi = \vec{k} \times \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\chi;$$

onde  $\psi$  é a função corrente e  $\chi$  o potencial de velocidade. Desta maneira tem-se

$$\nabla^2\psi = \zeta \quad \nabla^2\chi = \delta. \quad (6.7)$$

Desta forma as componentes horizontais do vento são recuperadas de

$$v = \vec{\nabla}\psi \quad u = \vec{\nabla}\chi.$$

Então, para o presente modelo deve-se resolver, em cada passo de integração, duas equações de Poisson.

### 6.1.1 Adimensionalização das Equações

A conveniência de tornar as equações adimensionais, é tornar clara a importância relativa de vários termos do sistema, definindo-se escalas características para cada variável. A variável espacial é adimensionalizada por  $L$  (comprimento do canal), as velocidades por uma velocidade característica  $V$ , o tempo por  $f^{-1}$  e o geopotencial por  $fLV$ .

O uso de uma adimensionalização deste tipo nas equações do modelo, faz sobressair alguns grupos adimensionais. Definindo

$$R_0 \equiv \frac{V}{fL}; \quad R_\beta \equiv \frac{\beta L}{f}; \quad R_F \equiv \frac{\bar{\Phi}}{(fL)^2} = \left(\frac{L_R}{L}\right)^2$$

onde  $R_0$  é o número de Rossby;  $R_\beta$  é uma medida do efeito  $\beta$ ; e  $R_F$  é o recíproco do número de Froude, relacionando a escala de comprimento do movimento com o raio de deformação de Rossby,  $L_R = \sqrt{\bar{\Phi}/f}$ .

Deste modo as equações (6.4)—(6.6) podem ser reescritas na forma adimensional

$$\zeta_t + R_0 (u\zeta)_x + \delta + R_\beta v' = 0 \quad (6.8)$$

$$\delta_t + R_0 (u\delta)_x - \zeta + R_\beta u' + \Phi_{xx} = 0 \quad (6.9)$$

$$\Phi_t + R_0 (u\Phi)_x - R_0 u_0 v' + R_F \delta = 0. \quad (6.10)$$

Para maior clareza preservou-se a notação adotada; salientando somente que  $u_0$  é o vento zonal médio ( $\bar{u}$ ) adimensionalizado.

O sistema (6.8)—(6.10) pode ser escrito numa forma matricial prognóstica

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + A Z + B X = -R_0 N_Z(Z, X) \quad (6.11)$$

onde os vetores de estado são

$$Z = [\zeta \ \delta \ \Phi]^T; \quad X = [v \ u \ \Phi]^T$$

os coeficientes matriciais e o termo não linear são dados abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & R_F & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} R_\beta & 0 & 0 \\ 0 & R_\beta & 0 \\ -R_0 u_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_Z(Z, X) = [N_Z^\zeta \ N_Z^\delta \ N_Z^\Phi]^T = \frac{\partial(X_2 Z)}{\partial x}$$

A relação entre o vetor das variáveis prognósticas ( $Z$ ) e o vetor das variáveis primitivas ( $X$ ) é dada por

$$Z = M X \quad (6.12)$$

no qual  $M$  é um operador diferencial linear de primeira ordem:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a equação (6.12) na equação (6.11), obtém-se a formulação primitiva

$$M \frac{\partial X}{\partial t} + (AM + B)X = -R_0 N(X); \quad (6.13)$$

e o termo não linear associado é

$$N(X) = \frac{\partial(X_2 M X)}{\partial x}.$$

Doravante denotar-se-á a matriz  $(AM + B)$  pela matriz  $H$ .

### 6.1.2 Considerações Energéticas

Uma maneira de acompanhar a evolução do estado atmosférico é observar as conversões de energia de uma forma para outra. A seguir é apresentado a expressão da energia potencial e da energia cinética.

Considerando a energia de uma coluna de fluido de seção transversal unitária, a energia potencial na coluna é

$$\int_0^h \rho g z \, dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 = \frac{1}{2g} \rho \Phi^2$$

onde  $h(x, t)$  é a profundidade total do fluido. Quando a superfície do fluido é perfeitamente plana,  $h(x, t) \equiv \bar{h}$ , constante, o sistema está num estado de mínima energia potencial. Usando esta profundidade ( $\bar{h}$ ) como um valor de referência, define-se a *energia potencial disponível* (available potential energy - APE) como

$$\int_{\bar{h}}^h \rho g (z - \bar{h}) \, dz \equiv \frac{1}{2} \rho g (h - \bar{h})^2 = \frac{1}{2g} \rho \Phi'^2 \quad (6.14)$$

que nos fornece uma medida da energia potencial da coluna que está disponível para a conversão em energia cinética.

A energia cinética na coluna pode ser dividida entre as contribuições do fluxo médio (principal) e do fluxo vortical. A energia cinética vortical (eddy kinetic energy - EKE) é expressa por

$$\int_0^h \frac{1}{2} (u'^2 + v^2) \rho \, dz = \frac{1}{2} (u'^2 + v^2) \rho h = \frac{1}{2g} \rho (u'^2 + v^2) \Phi \quad (6.15)$$

observa-se que a EKE depende da profundidade  $h$ , enquanto que a APE depende somente do desvio da profundidade média.

As equações de energia do modelo são deduzidas da maneira clássica: a equação (6.1) é multiplicada por  $\rho \Phi u'$ , a equação (6.2) por  $\rho \Phi v$  e a equação (6.3) por  $\rho \Phi'$ ; elas então são somadas e integradas em relação a  $x$ . Assim chega-se a equação para o balanço de energia do movimento

$$\frac{d}{dt} \int \left[ \frac{1}{2} \rho (u'^2 + v^2) \Phi + \frac{1}{2} \rho \Phi'^2 \right] dx = - \int \rho v \left[ \frac{1}{2} (u'^2 + v^2) + \Phi' \right] \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} dx$$

o lado esquerdo é a taxa de EKE mais a APE, o lado direito representa a conversão da energia do fluxo principal em energia cinética; claramente, se o fluxo atmosférico parte do repouso ( $\bar{u} = \bar{\Phi}_y = 0$ ) a energia total permanece constante.

Neste modelo simples (unidimensional) a energia cinética pode ser separada em suas contribuições devido aos movimentos rotacionais e divergentes; como segue

$$K = K_\psi + K_\chi; \quad K_\psi = \frac{1}{2}\rho(\vec{\nabla}\psi)^2 = \frac{1}{2}\rho v^2\Phi; \quad K_\chi = \frac{1}{2}\rho(\vec{\nabla}\chi)^2\Phi = \frac{1}{2}\rho u'^2\Phi.$$

Estas quantidades são importantes para avaliar o desempenho do modelo, uma vez que o balanço aproximadamente geostrófico impõem campos de velocidade fracamente divergentes ( $\delta \ll \zeta$ ).

## 6.2 Discretização Espacial

Para integrar o sistema (6.11) ou (6.13) usou-se uma aproximação por diferenças finitas, transformando a equação num sistema de equações diferenciais ordinárias.

Como as velocidades ( $v, u$ ) e as variáveis prognósticas ( $\zeta, \delta$ ) estão relacionadas por um operador diferencial de primeira ordem, é adotada uma grade alternada [10]. As velocidades são especificadas para "semi-pontos" e as variáveis prognósticas e o geopotencial para "pontos inteiros".

Os operadores de discretização são dados por

$$(q_m)_x = \frac{1}{\Delta x}(q_{m+1/2} - q_{m-1/2})$$

$$(\bar{q}_m) = \frac{1}{2}(q_{m+1/2} + q_{m-1/2})$$

$$(\bar{q}_m)_x = \frac{1}{\Delta x}(q_{m+1} - q_{m-1})$$

$$(q_m)_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2}(q_{m+1} - 2q_m + q_{m-1})$$

$$(uq)_x|_m = \frac{1}{2\Delta x}[u_{m+1/2}(q_{m+1} - q_m) - u_{m-1/2}(q_m - q_{m-1})]$$

Usando estes operadores na formulação prognóstica e primitiva e assumindo condições de contorno periódicas para todas as variáveis dependentes perturbadas ( $Q(x + L) = Q(x)$ ), obtém-se

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{Z} = -[1/2 \mathbf{B}\mathbf{X} + R_0 N_Z(\mathbf{Z}, \mathbf{X})] = -R_0 N_B(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) \quad (6.16)$$

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + (\mathbf{A}\mathbf{M} + 1/2 \mathbf{B}) \mathbf{X} = -R_0 N(\mathbf{X}) \quad (6.17)$$

onde os vetores de estado e os termos não lineares tornam-se

$$\mathbf{Z} = [\zeta_1 \ \delta_1 \ \Phi_1 \ \dots \ \zeta_{N_x} \ \delta_{N_x} \ \Phi_{N_x}]^T$$

$$\mathbf{X} = [v_{-1/2} \ u_{-1/2} \ \Phi_1 \ \dots \ v_{N_x-1/2} \ u_{N_x-1/2} \ \Phi_{N_x}]^T$$

$$N_Z(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = -\frac{1}{2\Delta x} \mathbf{C} D(\mathbf{X}) \mathbf{R} \mathbf{Z}$$

$$N(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2\Delta x} \mathbf{C} D(\mathbf{X}) \mathbf{R} \mathbf{M} \mathbf{X}$$

e os coeficientes matriciais de (6.16) e (6.17) são dados na forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} E & F & & F \\ F & E & F & \\ & F & E & F \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & F & E & F \\ F & & & F & E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} G & G & & \\ & G & G & \\ & & G & G \\ & & \vdots & \vdots \\ G & & & G & G \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & & & \\ & M_1 & M_2 & & \\ & & M_1 & M_2 & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & M_1 & M_2 \\ M_2 & & & & M_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -I & I & & & \\ & -I & I & & \\ & & -I & I & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & -I & I \\ I & & & & -I \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} I & & & I \\ I & I & & \\ & I & I & \\ & \vdots & \vdots & \\ & & I & I \\ & & & I & I \end{bmatrix}; \quad D(\mathbf{X}) = \text{diag} [u_{-1/2} I, u_{1/2} I, \dots, u_{N_x-1/2} I]$$

Os elementos (submatrizes) das matrizes acima são expressos por

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{\Delta x^2} \\ 0 & R_F & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} R_\beta & 0 & 0 \\ 0 & R_\beta & 0 \\ -R_0 u_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

claramente, todas as matrizes bloco acima são bloco circulantes do tipo  $(N_x, 3)$ , o que permite a aplicação dos métodos apresentados na seção 2.1.

Para recuperar os campos de vento devemos primeiro resolver duas equações do tipo (6.7). Apresenta-se aqui somente a solução para a função corrente, visto que o caso do potencial de velocidade é análogo. Para o modelo DYNAMO a equação de Poisson discretizada é como segue

$$A_\Delta \Psi = \Xi; \tag{6.18}$$

onde  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_x}]^T$ ,  $\Xi = \Delta x^2 [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N_x}]^T$  e a matriz  $A_\Delta$  é dada por

$$A_\Delta = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como o problema para o potencial de velocidade é similar, a matriz do sistema é a mesma como dada em (6.18). Observa-se que no sistema (6.18) a matriz  $A_\Delta$  é uma circulante singular.

Uma solução para a equação (6.18) pode ser tentada com o uso da decomposição de valores singular como dada em (2.15). Então a solução torna-se

$$\Psi^+ = A_\Delta^+ \Xi \quad \text{e} \quad A_\Delta^+ = F^* \Lambda_A^+ F. \quad (6.19)$$

onde a matriz diagonal  $\Lambda_A$  é dada por

$$\Lambda_A = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_x}]; \quad \lambda_k = 2 \left[ \cos \left( \frac{2\pi(k-1)}{N_x} \right) - 1 \right].$$

No apêndice A é mostrado um outro método de solução para o problema da equação de Poisson acima.

## CAPÍTULO 7

### INTEGRAÇÃO E INICIALIZAÇÃO

#### 7.1 Domínio da Freqüência: Método de Lynch

Aplicando a transformada de Laplace na formulação primitiva discretizada, obtém-se

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s) [\mathbf{M} \mathbf{X}(0) + \varepsilon N(\mathbf{X})] \quad (7.1)$$

e a forma complexa para inversão é usada para recuperar o vetor de estados no domínio do tempo,

$$\mathbf{X}_{n+1}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}^{-1}(s) [\mathbf{Z}_n^* + \varepsilon N(\mathbf{X}_n^*) s^{-1}] e^{s\Delta t} ds; \quad (7.2)$$

onde  $\mathbf{H}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{M} + 1/2 \mathbf{B}$ , é a matriz de transferência e o subíndice  $n$  denota o tempo discretizado, isto é:  $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(n \Delta t)$ .

A equação acima pode ser utilizada num processo de inicialização, sumarizado como segue

$$\mathbf{X}_{k+1}^*(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}^{-1}(s) [\mathbf{Z}_k^*(0) + \varepsilon N[\mathbf{X}_k^*(0)] s^{-1}] ds \quad (7.3)$$

aqui  $\varepsilon$  é um parâmetro pequeno (Rossby), e o primeiro aproximante é tomado com  $\varepsilon = 0$ . O contorno  $\Gamma$  é um círculo de raio  $\gamma$ , e considera-se os termos não lineares variando lentamente no tempo; esta hipótese serve para justificar a aproximação feita em (7.2) da transformada de Laplace da não-linearidade.

A integral em (7.3) pode ser calculada a partir de uma regra de quadratura em que o círculo é aproximado por um polígono regular inscrito, de lados  $\Delta\lambda_k$  (figura 7.1), ou seja

$$\oint_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda \simeq \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{N_{\lambda}} F(\lambda_k) \Delta\lambda_k \quad (7.4)$$

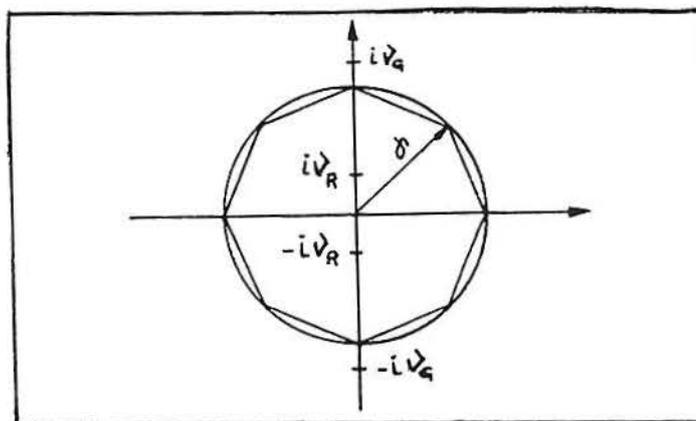


Fig. 7.1 - O contorno  $\Gamma$  e sua aproximação poligonal. Aqui  $\nu_G$  e  $\nu_R$  representam a frequência mínima da onda de gravidade e a frequência máxima da onda de Rossby adimensionalizadas.

onde os pontos  $\lambda_k$  são pontos centrais do lado do polígono; e  $\sigma = \tan(\pi/N_\lambda)/(\pi/N_\lambda)$ , é um fator de correção de polígono discutido em [35]. Lynch informa que obteve bons resultados com  $N_\lambda = 8$  no somatório acima.

O raio  $\gamma$ , usado para definir o contorno em (7.4) pode assumir qualquer valor no intervalo  $[0.203, 2.224]$ ; que refletem a frequência máxima da onda de Rossby e a frequência mínima das ondas de gravidade [34]. Lynch tem usado  $\gamma = 1$  em suas simulações [33–36].

A integral em (7.2) pode ser considerada como uma transformada inversa de Laplace modificada [34–37, 57], agindo como um filtro (low-pass), eliminando as componentes de alta frequência nos dados iniciais.

Se a equação matricial do modelo meteorológico discretizado espacialmente fosse dada em termos de equações de diferenças, ao invés de tempo contínuo, o método da transformada  $Z$  poderia ser utilizado como mostrado em [37].

A principal dificuldade da técnica reside no cálculo das  $N_\lambda$  inversas  $\mathbf{H}_\lambda(s)$ . O uso da teoria de matrizes circulantes permitiria uma diagonalização por blocos do sistema (6.17), reduzindo o esforço computacional e o custo de armazenagem requerida [15]. Procedendo a diagonalização, onde assumimos, por simplicidade,  $u_0 = 0$ , obtém-se

$$\mathbf{H}(s) = L_1 \mathbf{I}_{N_x} + L_2 \mathbf{J} + L_3 \mathbf{J}^{N_x-1} = \mathbf{F}^* \mathbf{H}_\Omega \mathbf{F} \quad (7.5)$$

onde  $\mathbf{H}_\Omega = L_1 \mathbf{I}_{N_x} + L_2 \Omega_{N_x} + L_3 (\Omega_{N_x})^{N_x-1} = \text{diag}[H_1, H_2, \dots, H_{N_x}]$ . As submatrizes  $L_1, L_2, L_3$  e  $H_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N_x$ ) são dadas por

$$L_1 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{s}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ \frac{1}{\Delta x} & \left(-\frac{s}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & -\frac{2}{\Delta x^2} \\ 0 & -\frac{R_F}{\Delta x} & s \end{bmatrix};$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{s}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & \frac{1}{\Delta x} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x} & \left(\frac{s}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & -\frac{R_F}{\Delta x} & 0 \end{bmatrix};$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k & 0 \\ -b_k & a_k & c_k \\ 0 & d_k & e_k \end{bmatrix};$$

onde os elementos de  $H_k$  são

$$a_k = \frac{s}{\Delta x}(\omega^{k-1} - 1) + \frac{1}{2}R_\beta(\omega^{k-1} + 1)$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta x}(\omega^{k-1} - 1)$$

$$c_k = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{N_x}\right) - 1 \right]$$

$$d_k = \frac{R_F}{\Delta x}(\omega^{k-1} - 1)$$

$$e_k = s.$$

A inversa da matriz diagonal  $\mathbf{H}_\Omega$  é dada finalmente por

$$\mathbf{H}_\Omega^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{H}_\Omega)} \text{adj}(\mathbf{H}_\Omega)$$

onde os elementos (submatrizes) da matriz  $\mathbf{H}_\Omega^{-1}$  são escritos como

$$H_k^{-1} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{bmatrix} (a_k e_k - c_k d_k) & -b_k e_k & b_k c_k \\ b_k e_k & a_k e_k & -a_k c_k \\ -b_k d_k & -a_k d_k & (a_k^2 + b_k^2) \end{bmatrix}$$

onde  $\det(H_k) = \Delta_k = (a_k^2 + b_k^2)e_k - a_k c_k d_k$ .

## 7.2 Domínio do Tempo: Método da Matriz Não-Modal

### 7.2.1 Formulação Prognóstica

A equação (2.11) é formalmente idêntica a equação (6.16). Portanto a solução para (6.16) é da forma

$$\mathbf{Z}(t) = D^+(t) \mathbf{Z}_0 + \varepsilon \int_0^t D^+(t - \tau) N_B[\mathbf{Z}(\tau), \mathbf{X}(\tau)] d\tau \quad (7.6)$$

$$D^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{3N_x} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} a_k \oint_{\Gamma} \frac{\lambda^{j-k-1} e^{\lambda t}}{\Theta(\lambda)} d\lambda \right] (-\mathbf{A})^{3N_x-j} \quad (7.7)$$

onde os  $a_k$ 's são os coeficientes de  $\Theta(\lambda)$ , o polinômio característico da matriz  $(-\mathbf{A})$ .

Para computação digital é mais adequado uma versão discretizada da equação (7.6). Assumindo que os termos  $N_B(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$  possam ser tomados constantes num intervalo pequeno  $[t, t + \Delta t]$ , é fácil mostrar que (7.6) assume a forma

$$\mathbf{Z}_{n+1} = D^+(\Delta t) \mathbf{Z}_n + \varepsilon \Psi(\Delta t) N_B(\mathbf{Z}_n, \mathbf{X}_n); \quad (7.8)$$

onde  $\Psi(t)$  é a integral da matriz de transição de estados, isto é,  $\Psi(t) = \int_0^t D^+(\lambda) d\lambda$ .

Deste ponto é possível derivar imediatamente um esquema de inicialização, a saber

- 1)  $\mathbf{Z}_{k+1}(\Delta t) = D^+(\Delta t) \mathbf{Z}_k^*(0) + \varepsilon \Psi(\Delta t) N_B[\mathbf{Z}_k^*(0), \mathbf{X}_k^*(0)]$
- 2)  $\mathbf{M} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{Z}_{k+1}$  (Equação de Poisson) (7.9)
- 3)  $\mathbf{Z}_{k+1}^*(0) = [D^+(\Delta t)]^{-1} [\mathbf{Z}_{k+1}(\Delta t) - \varepsilon \Psi(\Delta t) N_B(\mathbf{Z}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})]$

arbitrando-se  $\varepsilon = 0$  e  $\Delta t = 0$  quando  $k = 0$ .

Para o modelo DYNAMO é possível determinar uma solução semi-analítica para o sistema (6.16). Como a matriz  $\mathbf{A}$  é bloco circulante e, portanto, admite a diagonalização por blocos:  $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{F}$ , com  $\mathbf{\Lambda}_A = \text{diag}[\Lambda_1^A, \Lambda_2^A, \dots, \Lambda_{N_x}^A]$ , no qual

$$\Lambda_k^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_k \\ 0 & R_F & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_k = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \cos \left( \frac{2\pi(k-1)}{N_x} \right) - 1 \right].$$

Como o polinômio característico da matriz  $\mathbf{A}$  é o mesmo que o da matriz  $\Lambda_A$ , escreve-se

$$|\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}| = |\Lambda_A + \lambda \mathbf{I}| = \prod_{k=1}^{N_x} \Delta_k^A(\lambda)$$

onde  $\Delta_k^A(\lambda)$  é o polinômio característico associado as submatrizes  $\Lambda_k^A$ , explicitamente

$$\Delta_k(\lambda) = |\Lambda_k^A + \lambda I_3| = \lambda^3 - \mu_k^2 \lambda;$$

sendo  $\mu_k^2 = R_F \alpha_k - 1$ . Obviamente o conjunto de autovalores de  $\mathbf{A}$  é:

$$\eta_k = \{\lambda \in \mathcal{C} \mid \lambda^3 - \mu_k^2 \lambda = 0\} = \{0, \pm \mu_k\}; \quad k = 1, 2, \dots, N_x.$$

Em virtude da diagonalização de  $\mathbf{A}$ , é possível calcular a matriz não-modal de maneira exata<sup>1</sup>:  $D(t) = \mathbf{F}^* \text{diag}[D_1(t), D_2(t), \dots, D_{N_x}(t)] \mathbf{F}$ , no qual

$$\begin{aligned} D_k(t) &= \frac{1}{\mu_k^2} \begin{bmatrix} (\mu_k^2 + 1) & 0 & -\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 \\ R_F & 0 & -1 \end{bmatrix} + \cos(\theta_k t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha_k \\ 0 & \mu_k^2 & 0 \\ -R_F & 0 & (\mu_k^2 + 1) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\text{sen}(\theta_k t)}{\theta_k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_k \\ 0 & R_F & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde  $\theta_k = \mathcal{I}m\{\mu_k\}$  e  $t = \Delta t$  para a equação (7.8).

### 7.2.2 Formulação Primitiva

A fim de incluir os "termos  $\beta$ " numa aproximação linear do esquema de inicialização, podemos utilizar a eq. (2.17). Se a matriz  $\mathbf{M}$  em (2.17) for não singular basta pré-multiplicar este sistema pela matriz  $\mathbf{M}^{-1}$  e recairemos no caso descrito pela seção anterior. A situação é muito diferente no caso de  $\mathbf{M}$  não ter inversa, onde então o sistema é dito singular; neste caso poderiam ser utilizadas as técnicas descritas na seção 2.3.

---

<sup>1</sup>Ver apêndice D.

## CAPÍTULO 8

### RESULTADOS NUMÉRICOS E CONCLUSÕES

#### 8.1 Resultados Numéricos

##### 8.1.1 Difusão Vertical Turbulenta

Partindo-se do modelo numérico de difusão descrito na seção 5.3, estuda-se o processo de transporte turbulento ocorrendo em dois estágios da evolução temporal de uma camada limite estável noturna. Analisa-se aqui um caso de transporte turbulento para o início da noite e um caso de transporte turbulento para tempos mais avançados na noite. Para simular o primeiro caso escolhe-se na equação (5.17) os valores de  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = 3$ , extraídos de medidas em Minnesota, quando processos evolutivos não-estacionários estavam presentes. As medidas em Minnesota foram realizadas durante o período de transição de uma camada limite convectiva para uma estável. Para simular o segundo caso, escolheu-se na equação (5.17) os seguintes parâmetros:  $\alpha_1 = 3/2$  e  $\alpha_2 = 1$ , resultado de medidas realizadas em Cabauw, quando a SBL atingiu condições mais estacionárias. As medidas em Cabauw foram realizadas aproximadamente três horas após o pôr do sol, evitando-se assim o período de transição. Quando se fala de processo estacionário, é no sentido de que os fluxos turbulentos não dependam do tempo.

Na figura 8.1-M e na figura 8.1-C está representada a evolução temporal do perfil vertical de concentração para uma fonte de área localizada a 12.5 m do solo. As letras M e C designam respectivamente a camada limite estável de Minnesota e Cabauw.

Percebe-se da figura 8.1 que o contaminante vai ocupando a camada limite deslocando-se lentamente de baixo para cima. Tal resultado deve ser interpretado a luz do decréscimo gradual da turbulência para zero, próximo ao topo da camada. Observa-se também que a camada limite de Minnesota apresenta uma mistura vertical mais acentuada do que de Cabauw, levando dessa forma a uma distribuição vertical de concentração, para grandes tempos, mais homogênea. Esta diferença no processo de mistura entre estes dois estágios de desenvolvimento da camada limite torna-se ainda mais evidente na figura 8.2, que exhibe a evolução temporal da concentração em diferentes alturas.

A homogeneidade da concentração é obtida mais rapidamente para a camada limite de Minnesota.

A figura 8.3 expressa a evolução temporal do perfil vertical de concentração para uma fonte de área localizada a 300 m do solo. Observa-se na figura 8.3-C que o máximo da concentração, mesmo para grandes tempos, se mantém aproximadamente na altura da fonte, não havendo uma eficiente excursão de contaminantes no sentido das regiões inferiores da camada limite estável. Para o caso de Minnesota, representado na figura 8.3-M, o processo de difusão de contaminante no sentido do solo é lento, porém devido a maior magnitude dos coeficientes de difusão o perfil apresenta para grandes tempos uma forma homogênea.

Os contaminantes abandonados em regiões elevadas da SBL, onde o gradiente  $d\sigma_w^2/dz$  é muito pequeno, difundem-se muito lentamente sob a influência dos pequenos turbilhões. Estes produzem um campo turbulento quase homogêneo, de modo que as partículas de poluentes podem permanecer durante grandes tempos em alturas elevadas sem perceber o caráter mais difusivo e não homogêneo da turbulência presente em regiões mais baixas da SBL.

Na figura 8.4 a concentração próxima ao solo é mostrada como função do tempo para diferentes alturas de fonte de área. Observa-se que os contaminantes emitidos por fontes de áreas localizadas na metade inferior da camada limite difundem-se mais rapidamente no sentido do solo. Este efeito é devido a forma do perfil de  $K_{zz}$ , que apresenta valores elevados próximo ao solo em comparação com os valores de  $K_{zz}$  encontrados na parte superior da camada.

Para simular os casos descritos os seguintes parâmetros foram usados:

- $L = 116$  m – dado obtido a partir do experimento de Minnesota;
- $Q = 400$  g/m<sup>2</sup> – a intensidade da fonte de área;
- $h = 400$  m – a altura da SBL;
- $u_* = 0.31$  m/s – tensão superficial;
- parâmetros de discretização:
  - $\Delta t = 10$  seg: passo de tempo,
  - $N_z = h \Delta z = 50$ : número de pontos da grade não refinada.

Os coeficientes de dispersão estacionários determinados dos experimentos de Cabauw e Minnesota estão representados graficamente na figura 8.5.

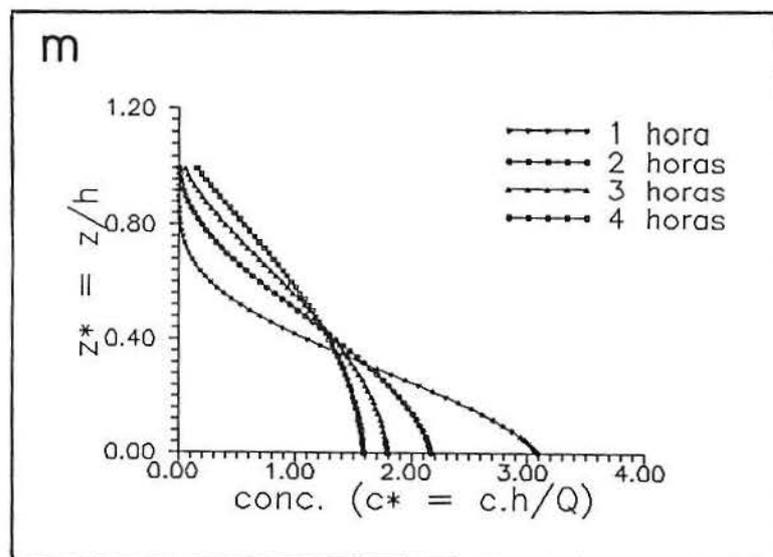
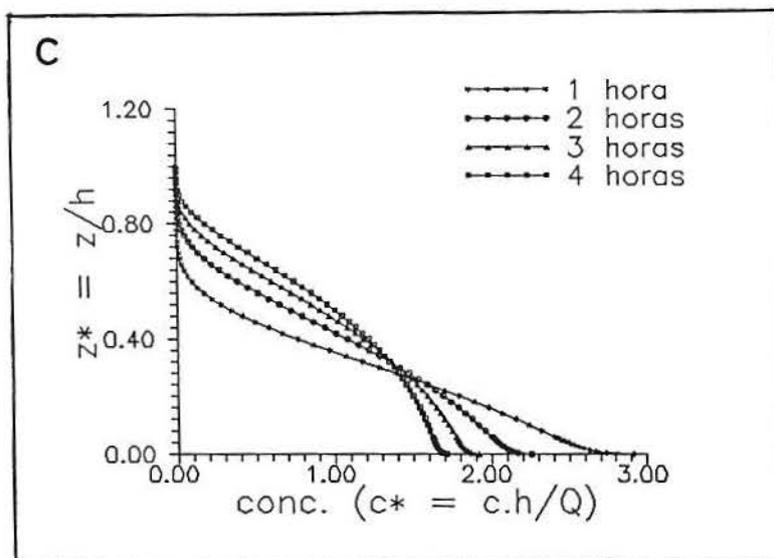


Fig. 8.1 - Perfil vertical de concentração para diferentes tempos.

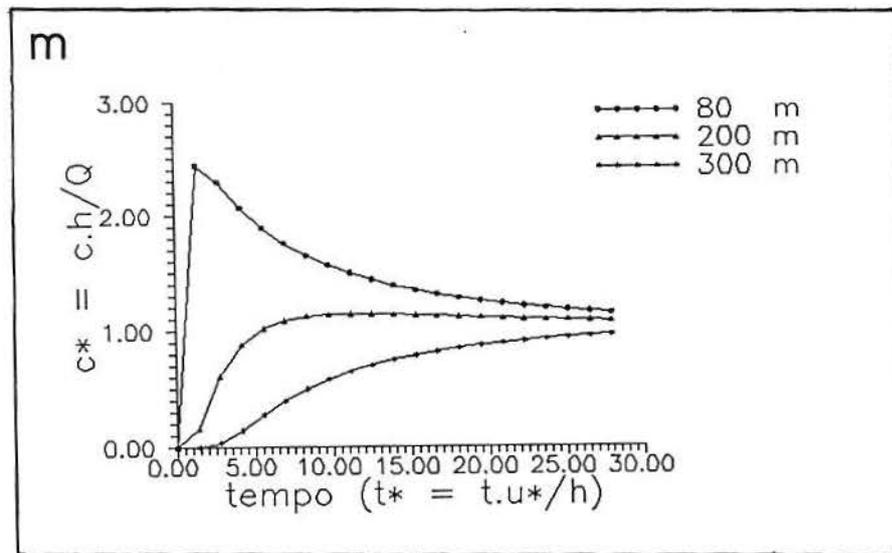
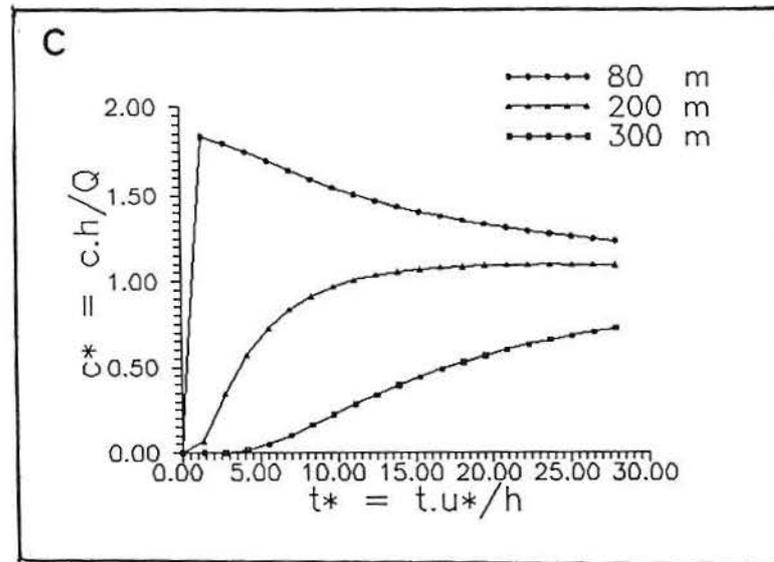


Fig. 8.2 - Evolução temporal da concentração para fonte de área a 12.5 m do solo.

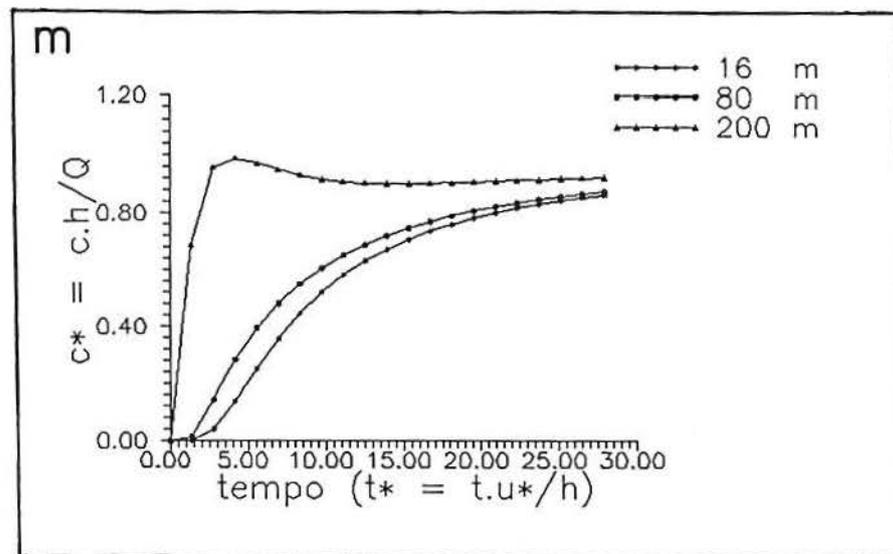
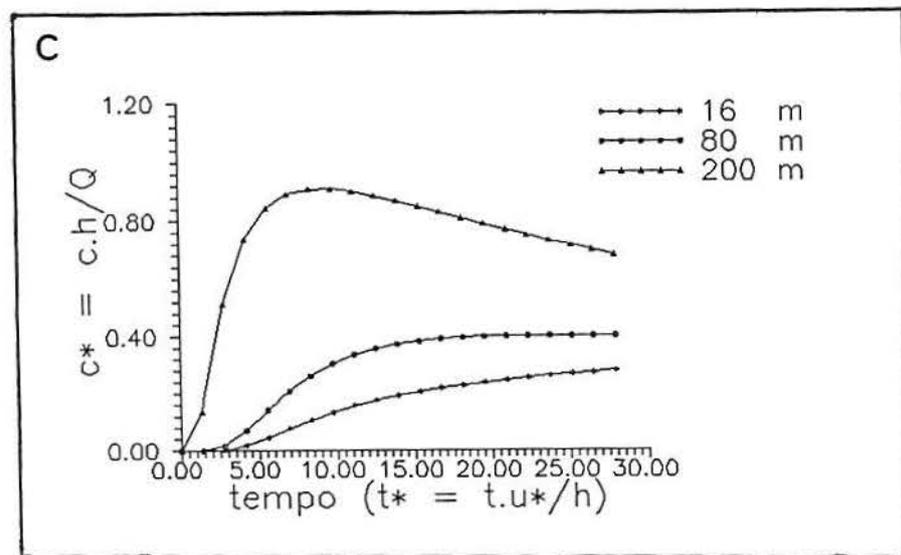


Fig. 8.3 - Evolução temporal da concentração para fonte de área a 300 m do solo.

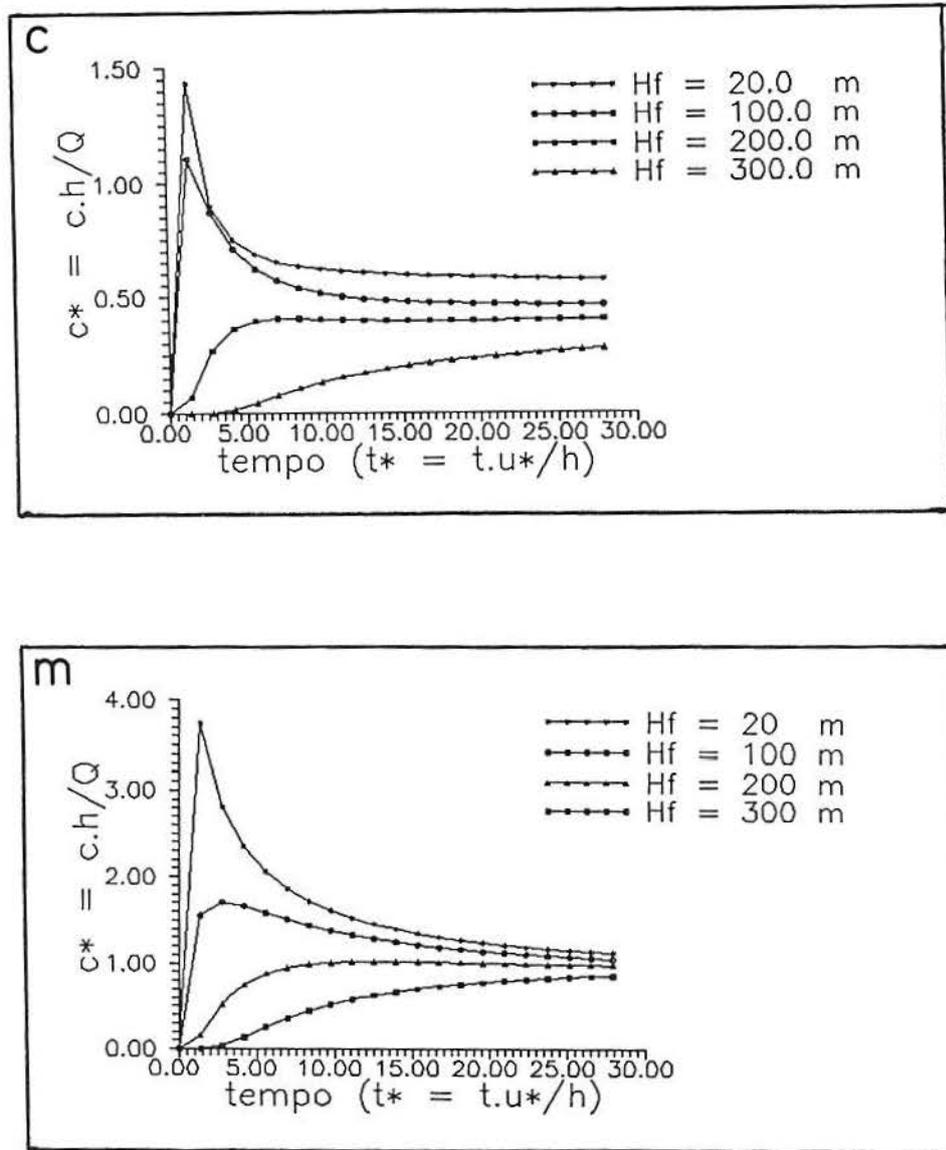


Fig. 8.4 - Concentração próxima ao solo para diferentes alturas da fonte de áera

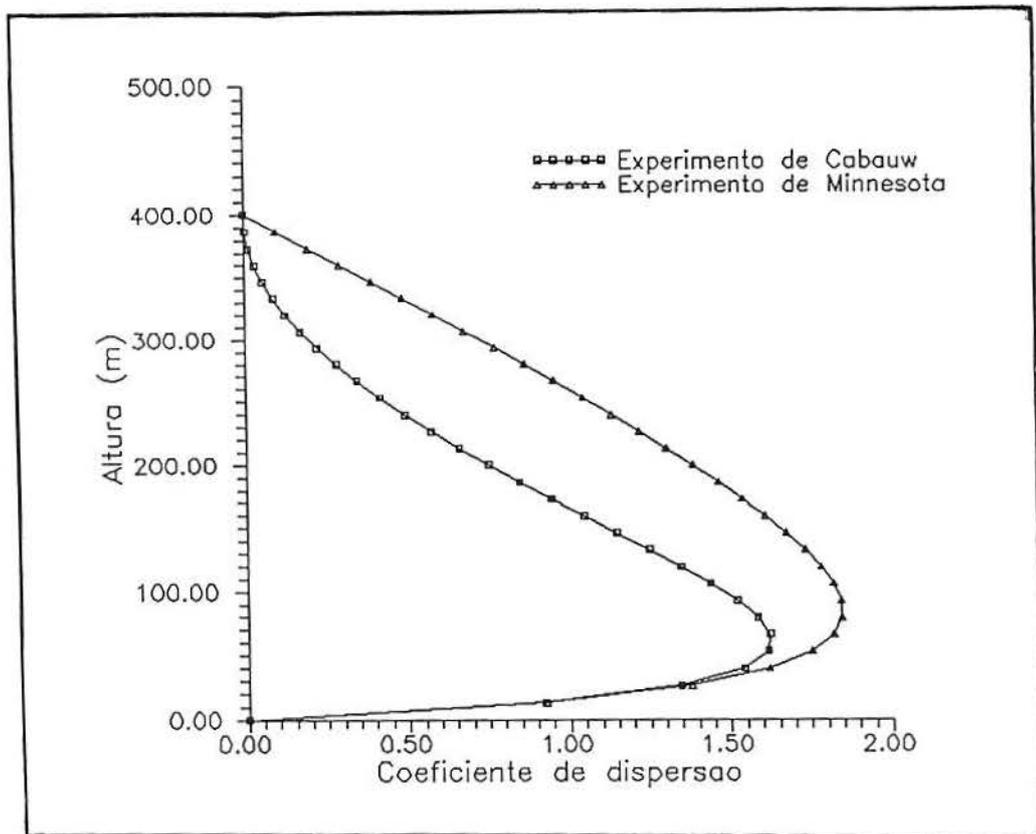


Fig. 8.5 - Perfil de  $K_{zz}$  para os experimentos de Cabauw e Minnesota.

### 8.1.2 Integração com Matriz Não-Modal e Inversa M-P

Para testar as soluções apresentadas pela matriz não-modal na forma (7.10) e pela inversa de Moore-Penrose (M-P) (6.19), as seguintes condições iniciais foram usadas

$$\Phi_j(0) = \phi_A \cos(2\pi j \Delta x / L)$$

$$v_{j-1/2}(0) = [\Phi_j(0) - \Phi_{j-1}(0)] / \Delta x$$

$$u_{j-1/2}(0) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N_x$$

onde  $\phi_A$  é a amplitude da onda. Estas condições simulam uma onda de Rossby.

O modelo DYNAMO foi processado com os seguinte grupo de números adimensionais

$$R_o = 0.10; \quad R_\beta = 10; \quad R_F = 0.16;$$

e os parâmetros de discretização:

$$L = 10000 \text{ Km}; \quad N_x \Delta x = L; \quad N_x = 2^5 = 32;$$

$$N_t = 1000; \quad \Delta t = 100 \text{ sec.}$$

O número dos pontos de grade  $N_x$  estão numa forma altamente fatorada ( $2^n$ ), que é a maneira mais eficiente de calcular a transformada discreta de Fourier [5, 56].

Para comparar a solução da inversa M-P e a solução apresentada por [28], define-se o “erro” quadrático

$$\varepsilon_\mu = (\mu^+ - \mu)^2;$$

onde  $\mu = v, u, \Phi, K_\Psi, K_\chi, V_a$ , e o sobrescrito (+) representa a solução dada por (6.19). Da figura (8.6) vê-se que a diferença entre ambas as soluções é muito pequena, ela é menor do que  $10^{-10}$ .

É possível apresentar uma relação de ordem para as diferenças quadráticas das variáveis dinâmicas do modelo:  $\varepsilon_v > \varepsilon_u > \varepsilon_\Phi$ . Para os erros quadráticos das quantidades de energia é possível também obter-se uma relação de ordem:  $\varepsilon_{K_\Psi} > \varepsilon_{K_\chi} > \varepsilon_{V_a}$ . As quantidades de energia dão uma boa indicação da estabilidade numérica de modelos computacionais. As diferenças quadráticas para a energia cinética-rotacional ( $K_\Psi$ ) é mostrada na figura (8.7). Na integração temporal usou-se uma técnica de Adams-Basforth de segunda ordem [32].

As diferenças são muito pequenas entre os campos computados pelo método descrito no apêndice A e pela decomposição em valores singulares (inversa M-P). Salienta-se ainda que o código trabalha com precisão simples.

O apêndice C apresenta o procedimento para o caso bi-dimensional, se a condição de periodicidade é assumida para ambas variáveis espaciais.

A integração via matriz não-modal (NM), dada pela equação (7.10), também não apresentou diferenças muito marcantes nos campos meteorológicos, quando comparados com uma integração tipo Adams-Basforth (AB). Isto pode ser notado observando-se diretamente a figura 8.10. Para uma referência mais precisa, a tabela 8.1 mostra o valor máximo da diferença relativa ( $\Delta\xi$ ) entre os valores finais dos campos ( $N_t = 1000$ ), onde

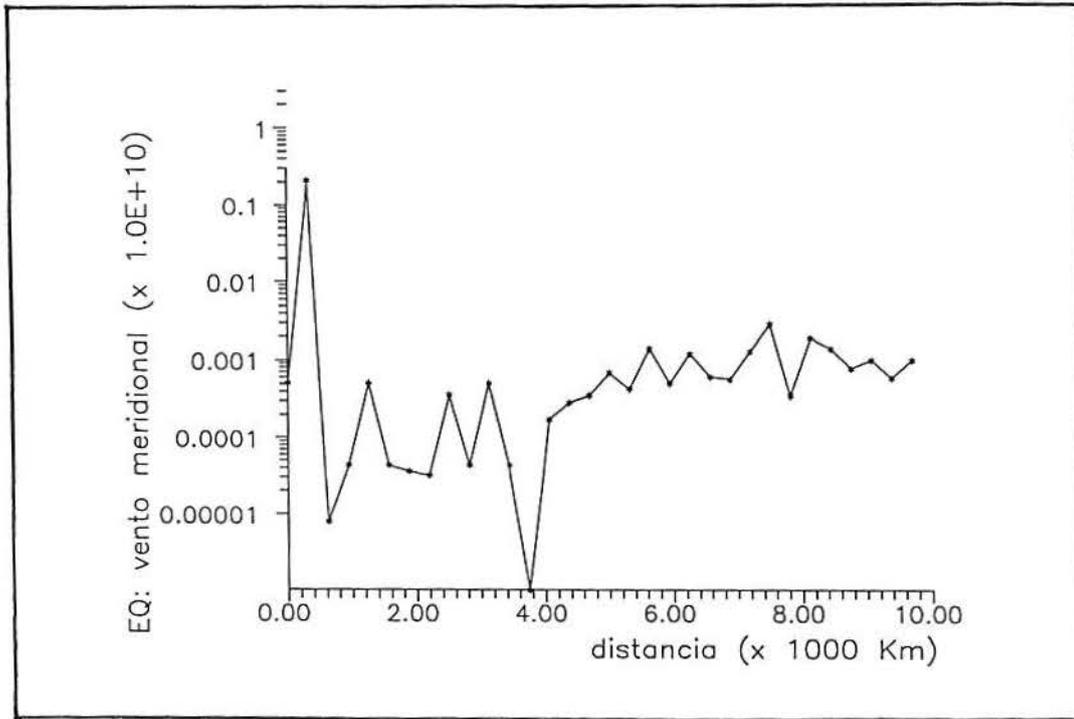


Fig. 8.6 - Inversa M-P: Valores finais para o vento meridional.

$$\Delta\xi = \left| \frac{\xi_{AB} - \xi_{NM}}{\xi_{AB}} \right|;$$

sendo  $\xi = u, v, \phi$ .

Tabela 8.1 - Valores máximos de diferenças relativas para os valores finais dos campos.

$\xi$	$\Delta\xi$	$x (\times 10^3 \text{ Km})$
$u$	$3.1170 \times 10^{-1}$	0.5
$v$	$2.4501 \times 10^{-2}$	7.0
$\phi$	$3.5874 \times 10^{-2}$	9.0

A figura 8.8 é uma representação tridimensional do geopotencial como função de  $(x, t)$  e a figura 8.9 é o diagrama de Hovmoeller do geopotencial.

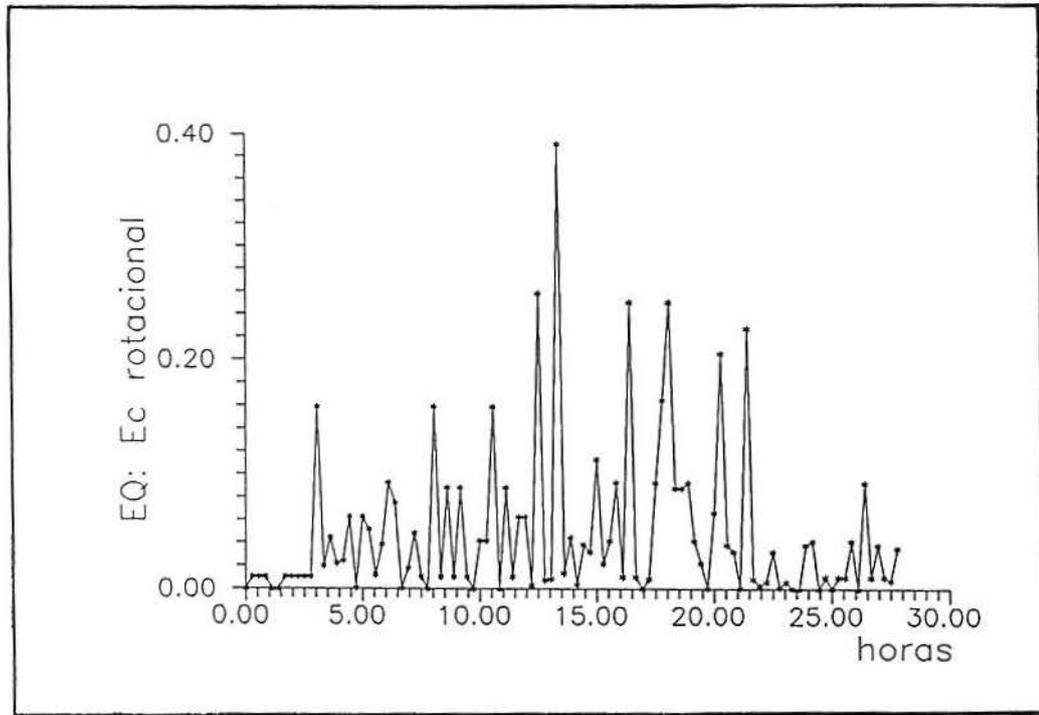


Fig. 8.7 - Inversa M-P: Energia cinética-rotacional para o ponto central.

As energias potencial disponível, cinética divergente e cinética rotacional estão representadas graficamente nas figuras 8.11, 8.12 e 8.13, respectivamente. Nota-se que ocorre um *descolamento* da solução obtida pela matriz não-modal e a integração por Adams-Basforth, principalmente para a energia potencial disponível e a energia cinética rotacional. Este efeito é devido, provavelmente, ao erro de arredondamento que se propaga na integração, podendo ser amplificado pela natureza não linear do sistema.

A contribuição dos termos não lineares e dos termos *beta* se dá sob o produto da integral da matriz de transição de estados. Para estabelecer um procedimento numérico para o cálculo desta integral (comparando com sua solução *exata*), foi usada uma regra trapezoidal simples

$$\Psi(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} D(\lambda) d\lambda \simeq [D(t) + I](\Delta t/2); \quad (8.1)$$

na qual nenhuma diferença significativa foi apontada.

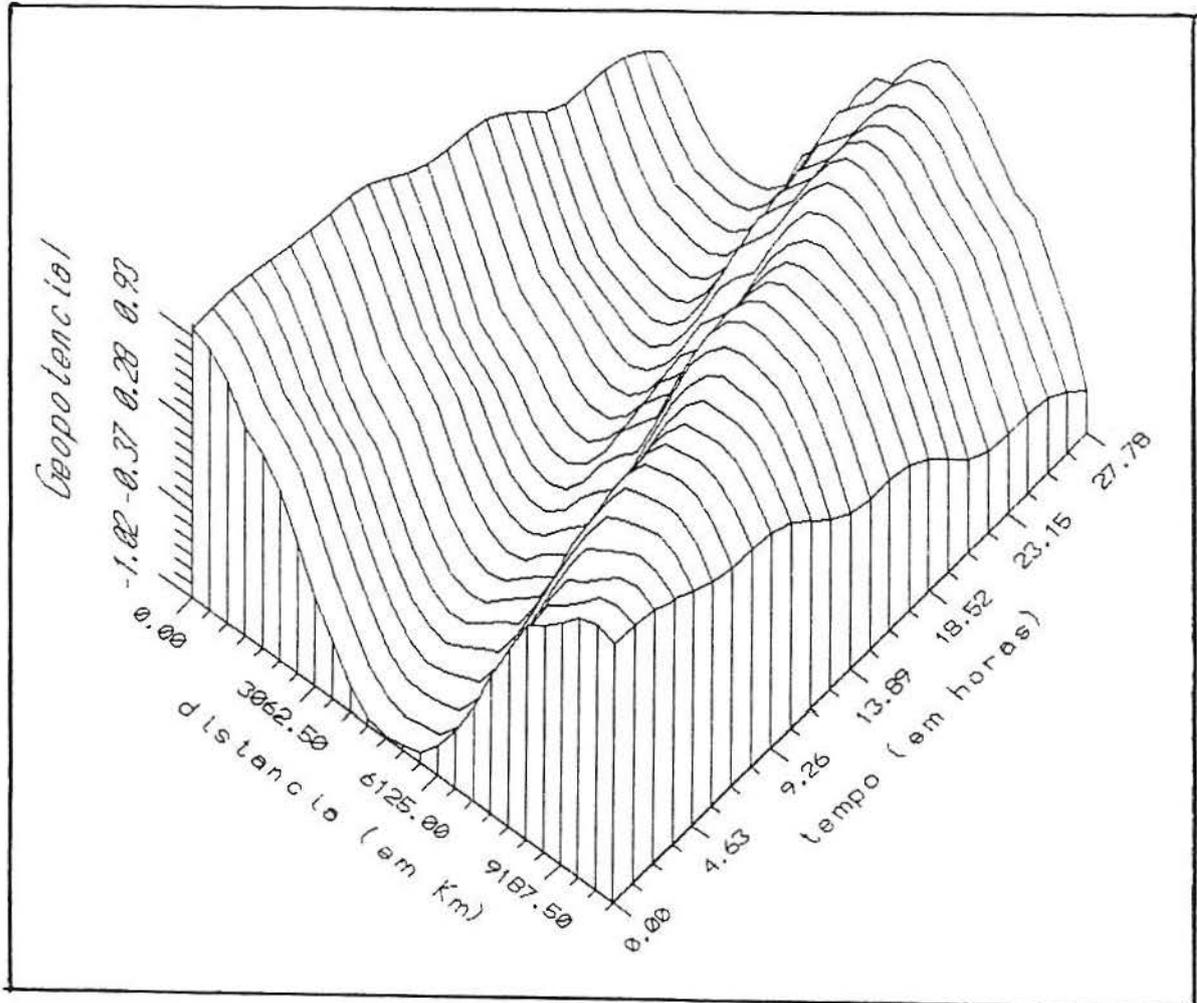


Fig. 8.8 - Representação tridimensional para o geopotencial integrado via matriz não-modal.

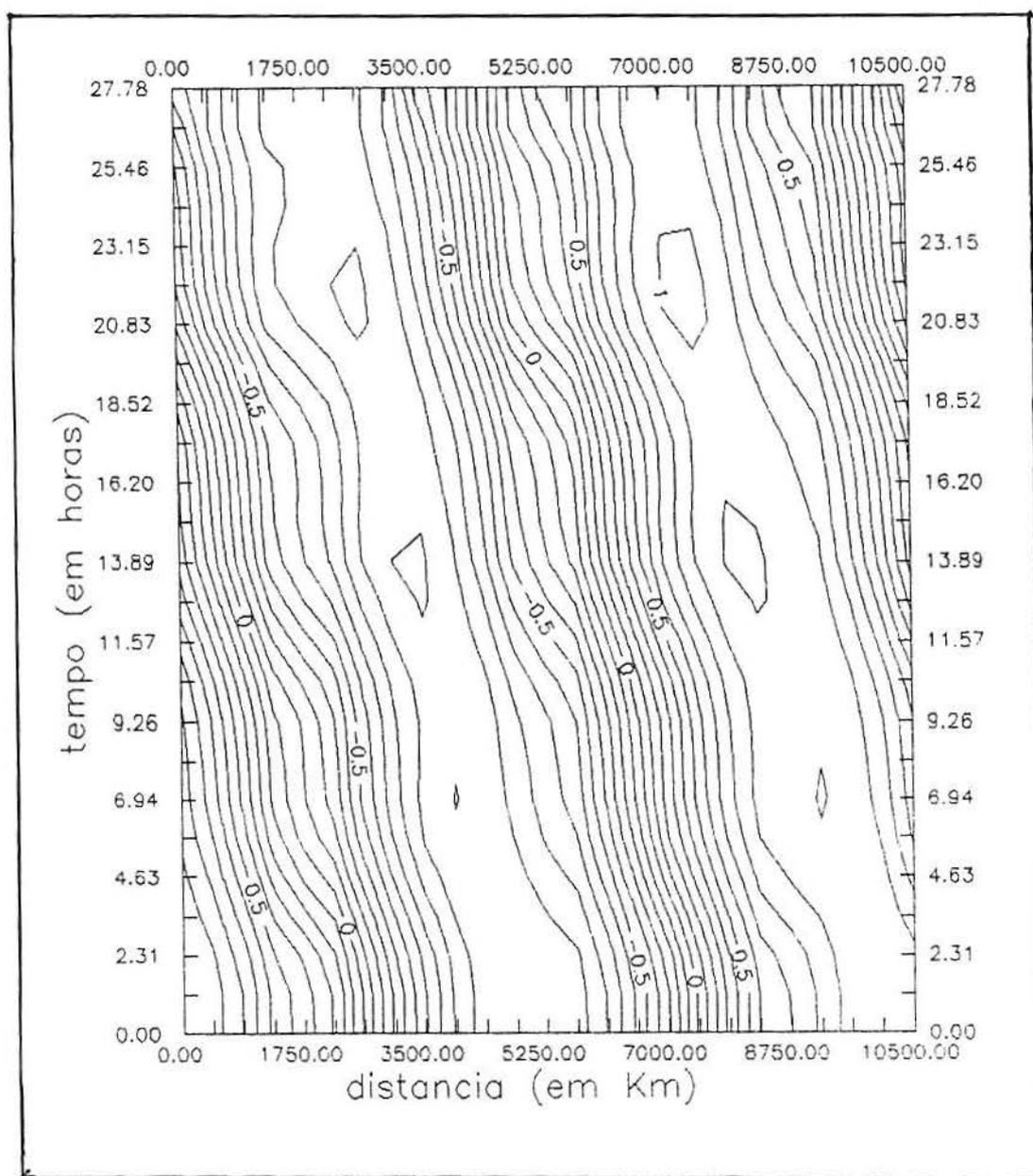


Fig. 8.9 - Diagrama de Hovmoeller para o geopotencial.

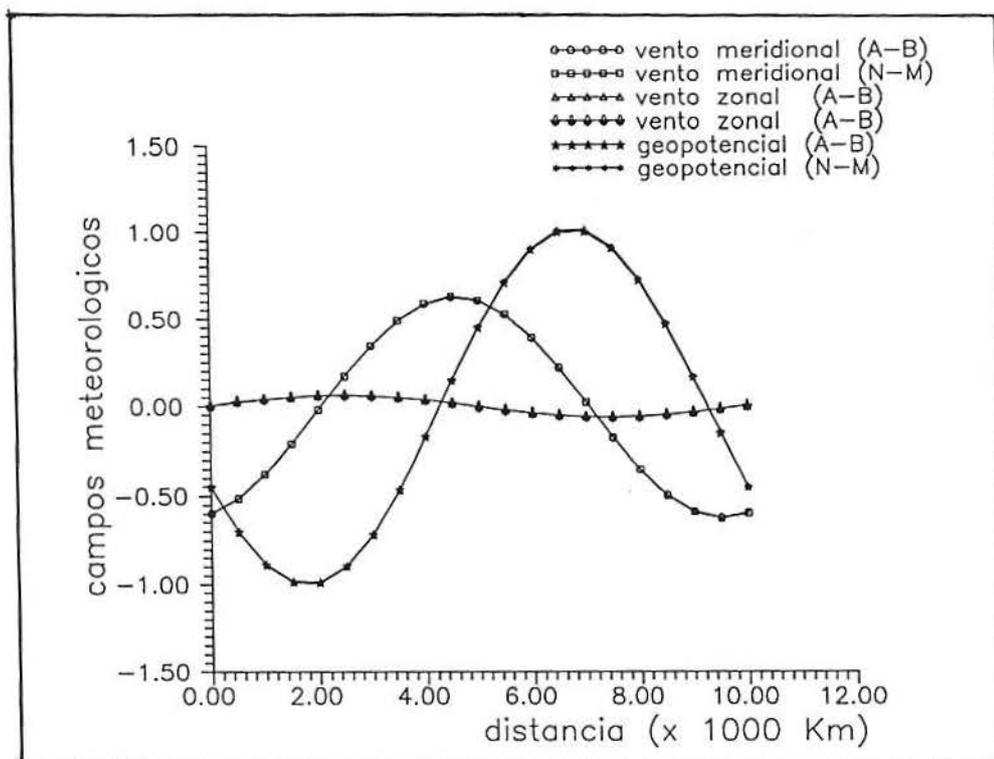


Fig. 8.10 - Valores dos campos meteorológicos para  $N_t = 1000$ .

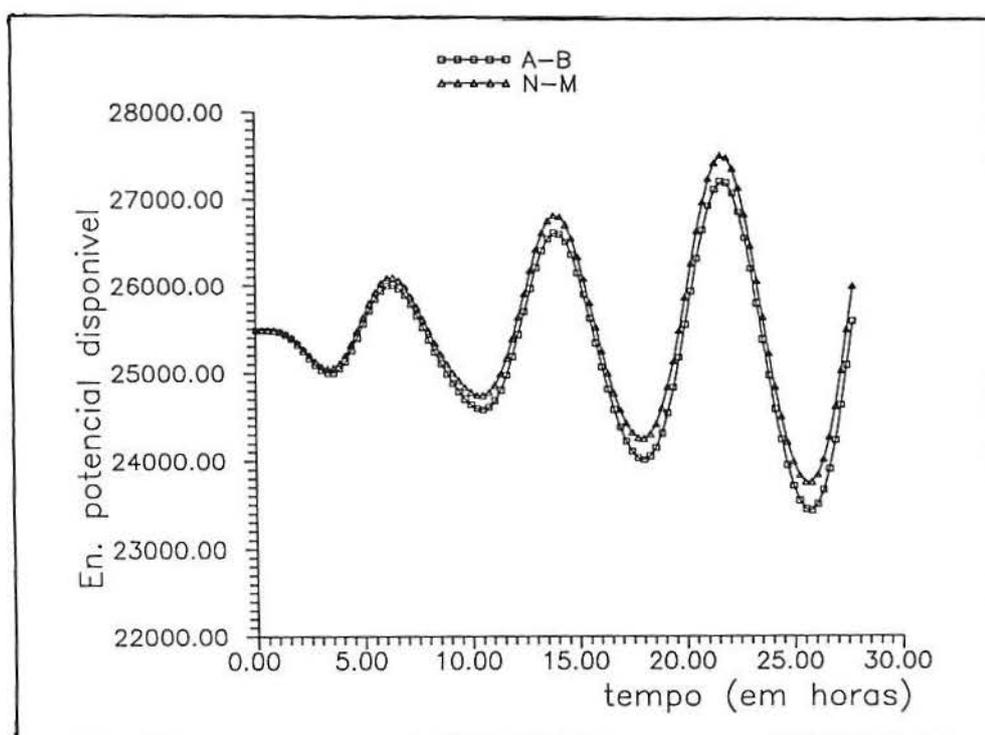


Fig. 8.11 - Energia potencial disponível para um ponto central.

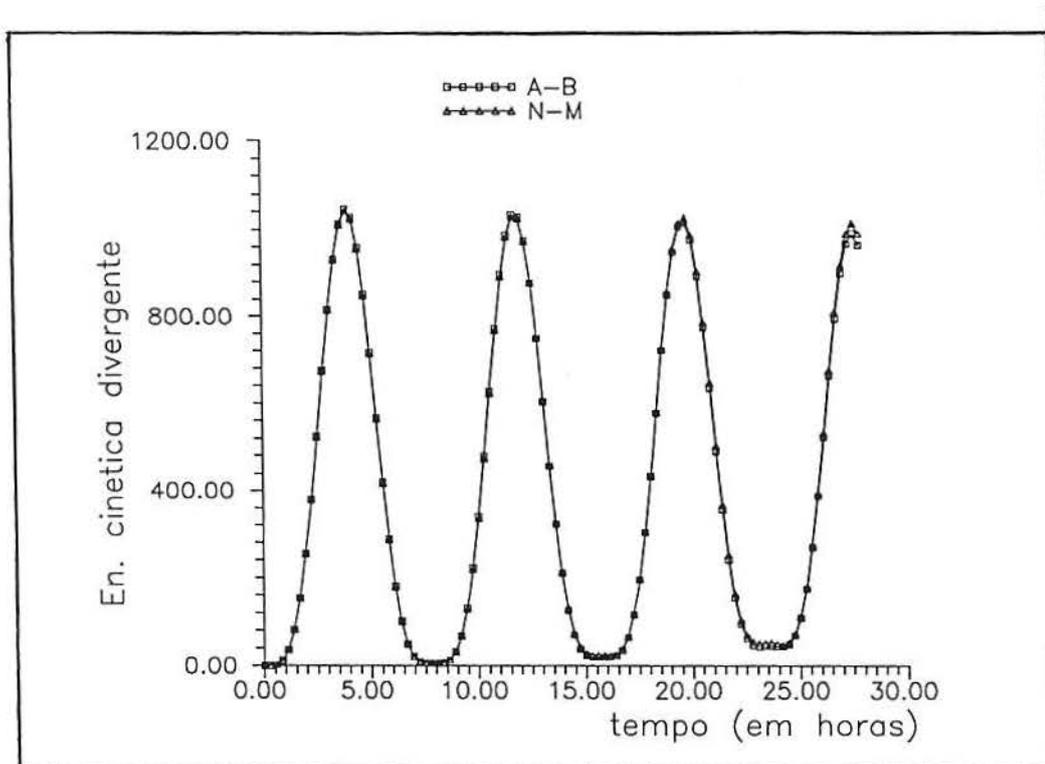


Fig. 8.12 - Energia cinética divergente para um ponto central.

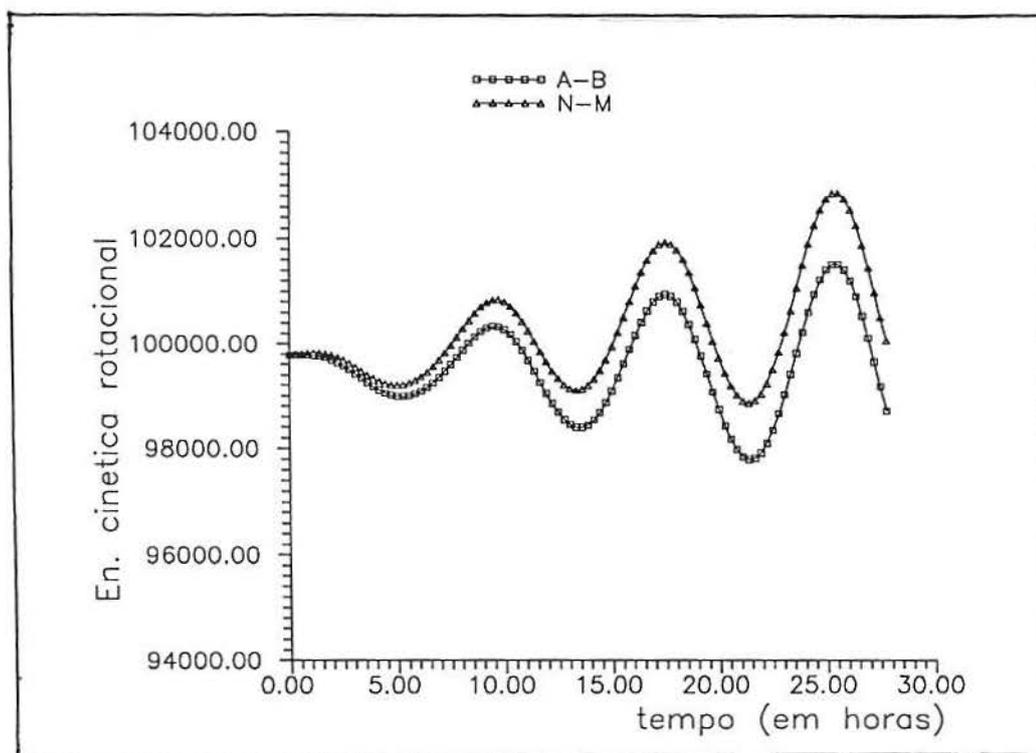


Fig. 8.13 - Energia cinética rotacional para um ponto central.

### 8.1.3 Inicialização Via Matriz Não-Modal

Para testar o algoritmo proposto na seção 7.2.1, serão utilizadas condições iniciais semelhantes as descritas na seção anterior:

$$\Phi_j(0) = \phi_A \sum_{k=1}^{10} \cos(2\pi k j \Delta x / L + \varphi_k)$$

$$v_{j-1/2}(0) = [\Phi_j(0) - \Phi_{j-1}(0)] / \Delta x$$

$$u_{j-1/2}(0) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N_x$$

onde  $\varphi_k$  é uma fase escolhida aleatoriamente. Aqui também adota-se  $u_0 = 0$ , indicando que a taxa de variação da energia total do sistema deverá ser nula, os demais parâmetros de discretização serão os mesmos já utilizados.

Para calcular o operador de inicialização (a matriz não-modal modificada) a integral em (7.7) é calculada pelo método de Lynch, equação (7.4), com  $\gamma = 1$ . A integral da matriz não-modal modificada é aproximada por

$$\Psi^+(\Delta t_i) \simeq [D^+(\Delta t_i) + D^+(0)] (\Delta t_i / 2);$$

da mesma forma como mostrado na seção anterior, onde  $\Delta t_i$  é um passo de tempo utilizado para a inicialização, não necessariamente igual ao passo de tempo da integração.

Para facilitar a visualização mostra-se a evolução de um ponto central ( $x = N_x/2$ ) para a componente zonal do vento horizontal e para o geopotencial (figuras 8.14 e 8.15). Claramente, ocorre uma redução significativa das oscilações de alta frequência.

Conforme alertado, a energia total do sistema deve ser conservada, pois o fluxo principal é nulo. A figura 8.16 expõe a evolução da taxa de energia total do sistema. Novamente, as oscilações foram reduzidas drasticamente, demonstrando que o método proposto é eficiente na eliminação do ruído provocado pelas ondas de gravidade.

Outra forma de visualizar as diferenças entre os campos inicializados e não inicializados é mostrada nas figuras 8.18 e 8.19. A figura 8.18 representa a diferença entre o geopotencial inicializado e não inicializado, as curvas de níveis destas diferenças são apresentadas na figura 8.19

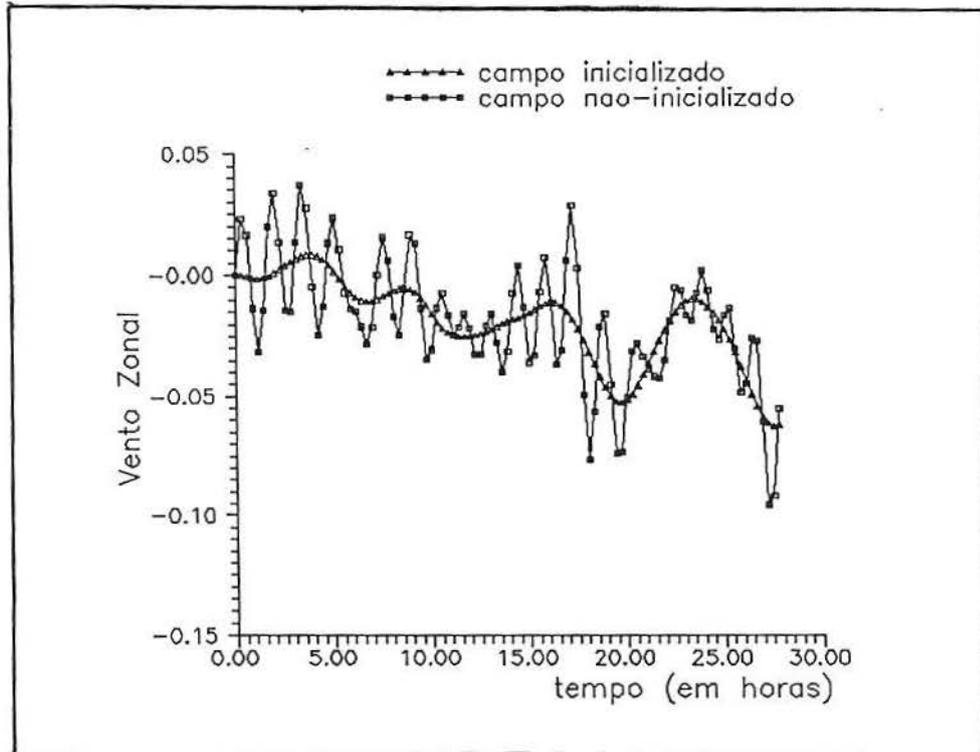


Fig. 8.14 - Evolução de um ponto central para o vento zonal.

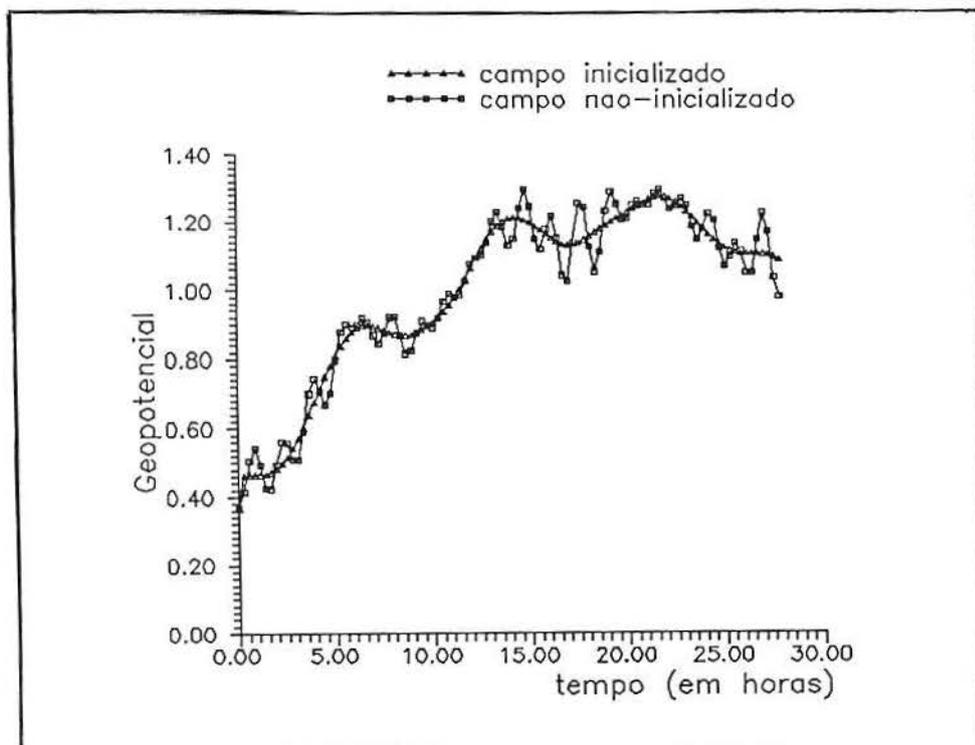


Fig. 8.15 - Evolução de um ponto central para o geopotencial.

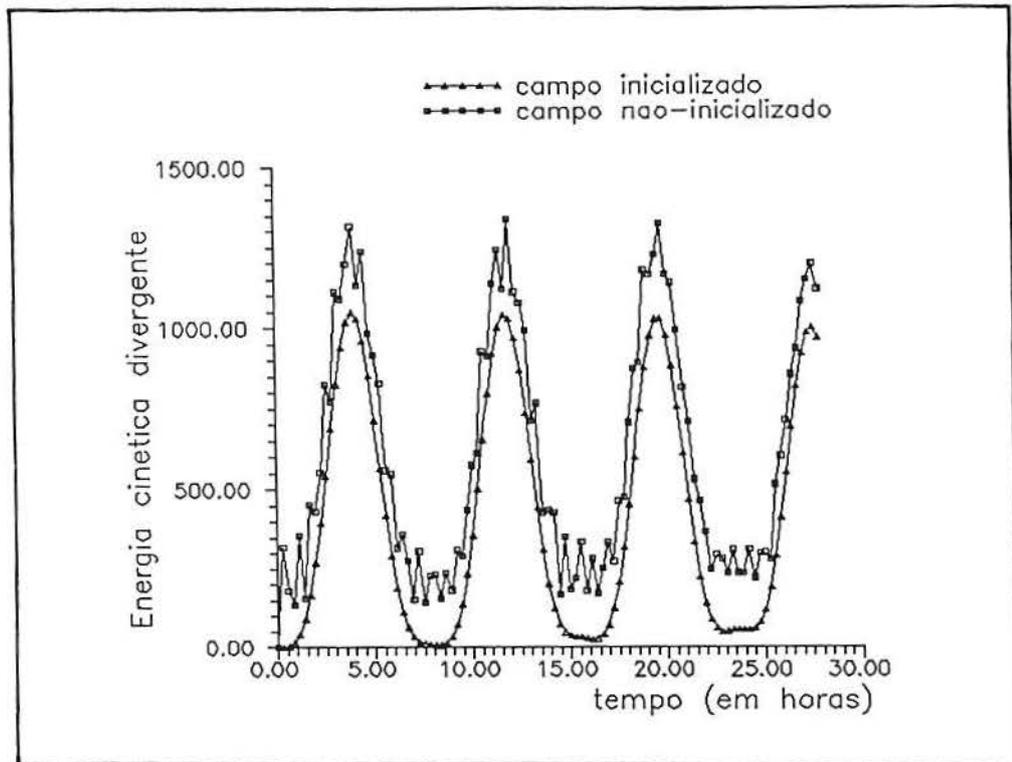


Fig. 8.16 - Evolução da taxa de variação da energia total do sistema DYNAMO no ponto  $x = N_x/2$ .

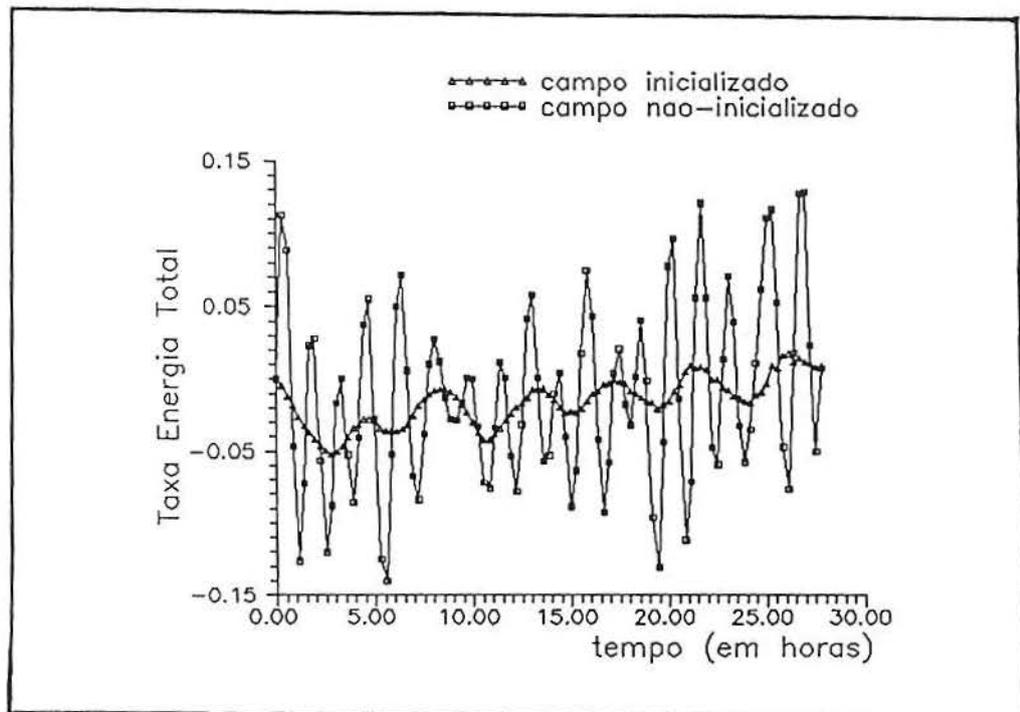


Fig. 8.17 - Energia cinética divergente para um ponto central.

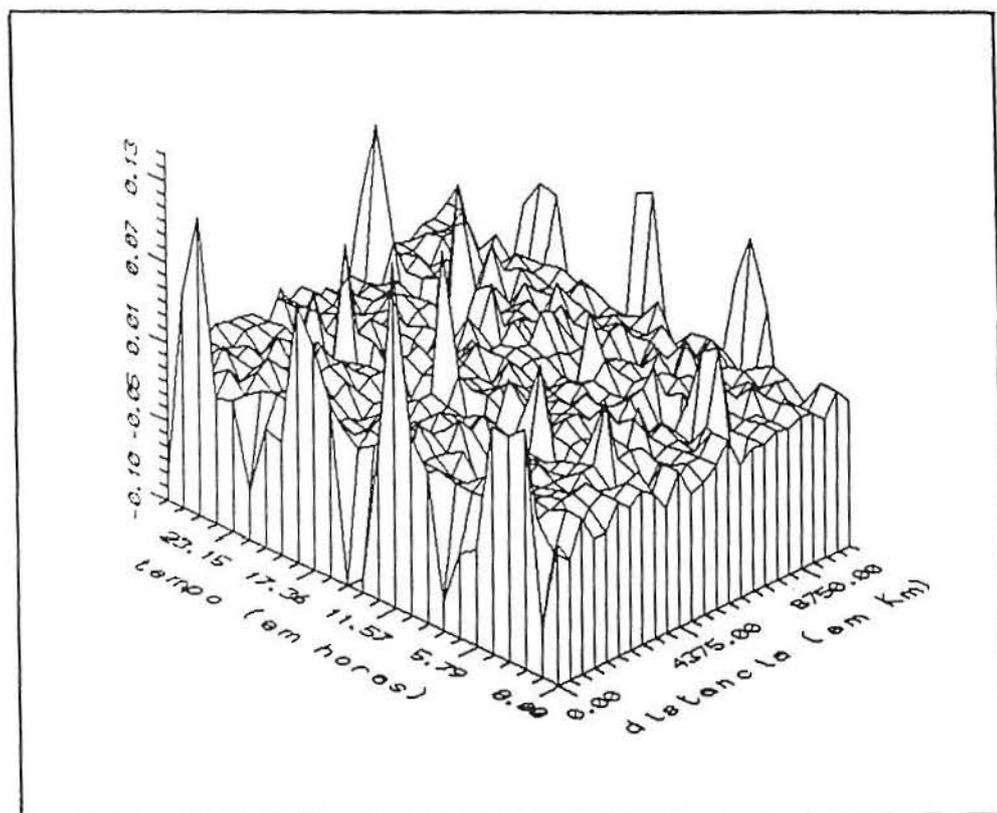


Fig. 8.18 - Representação tridimensional da diferença entre geopotencial inicializado e não inicializado.

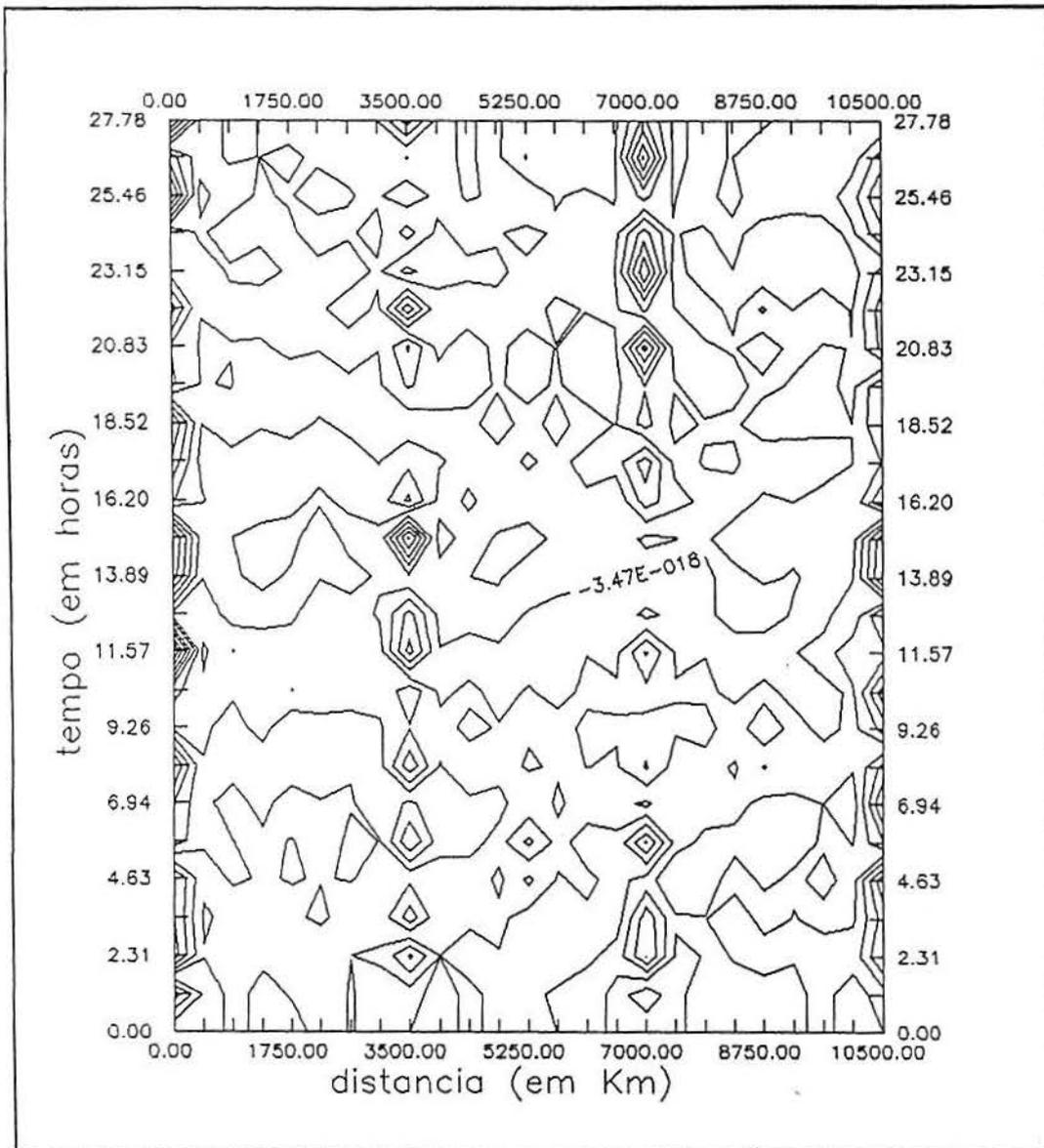


Fig. 8.19 - Diagrama de Hovmoeller para a diferença entre geopotencial inicializado e não inicializado.

Como mostrado na seção anterior, as condições iniciais impostas geravam fluxos divergentes pequenos, mas não nulos. Viu-se que a energia cinética associada aos movimentos divergentes eram da ordem de  $10^2$ , enquanto que os movimentos rotacionais comportavam energia da ordem de  $10^5$ . Isto indica que os modos de Rossby, associados a componente rotacional, é mais relevante, do ponto de vista da energética do modelo, do que os modos de gravidade. Tal diagnóstico é imposto pelo estado básico (geostrófico).

Na figura 8.17 é mostrada a evolução da energia cinética divergente, que está de acordo com o que foi obtido na figura 8.12.

## 8.2 Conclusões

Antes de abordar criticamente os temas aqui apresentados, será descrito, de forma esquemática, um sumário dos resultados obtidos:

### Resumo dos Resultados

- 1) O método da transformada de Laplace pode se tornar mais eficiente se as matrizes do sistema forem (bloco) circulante;
- 2) Inversa de Drazin para matrizes Bloco-Circulantes;
- 3) Dispersão Numérica em camada estável:
  - O modelo descreve um comportamento fisicamente esperado,
  - Camadas com processos mais estacionários apresentam dispersão mais lenta,
  - Assimetria de  $K_{zz}$  influência a dispersão;
- 4) Integração e Inicialização Não-Modal:
  - O método é uma alternativa para integração e a solução não-homogênea pode ser obtida por fórmulas simples de quadraturas,
  - Efetivo para eliminar altas frequências;
- 5) A decomposição SVD é uma solução para reconstrução dos campos de vento.

Para a difusão vertical turbulenta foram feitas simulações da dispersão de fontes de área em diversas alturas. As investigações centraram-se basicamente em dois períodos de desenvolvimento da SBL noturna. Num caso, o coeficiente de difusão selecionado foi representativo de uma SBL próxima ao período de transição, onde processos evolutivos não estacionários estavam ocorrendo (Minnesota). No outro caso a difusividade era característica de uma SBL mais estacionária (Cabauw).

Este modelo simples revela que o transporte em ambos os períodos de evolução da SBL é um processo lento, quando comparado às camadas limites convectivas. A pequena mistura vertical presente nas SBLs é o mecanismo responsável por esta situação.

Uma questão importante a ser estudada seria a tentativa de descrever o coeficiente de difusão como propriedade do estado de evolução da camada limite. Desta forma a difusão turbulenta seria descrita por formas assintóticas, independentes do tempo, mas características do estado da camada, se convectiva, estável ou em transição.

A assimetria do coeficiente de difusão influencia fortemente a dispersão de contaminantes. E a altura da fonte é extremamente importante na avaliação do impacto ambiental causados por poluentes numa SBL.

Para a matriz não-modal, entre as principais dificuldades encontradas destacam-se as exigências do conhecimento dos coeficientes do polinômio característico e, a mais grave, o cálculo das potências da matriz do sistema. Apesar de que a hipótese de periodicidade nas condições de contorno torne o problema muito mais simples, nem sempre pode-se valer desta condição.

A última exigência torna o método não competitivo, pelo menos para os computadores atuais. Todavia, deve-se estudar a importância de cada termo (potência) na expressão (2.12). É possível que somente poucos termos dominem esta soma, tornando a técnica operacionalmente aplicável.

Para a determinação dos coeficientes do polinômio característico, o método de Danilevsky [22, 30] tem se demonstrado o mais eficiente.

De qualquer forma, a solução via matriz não-modal pode permitir importantes informações para efeitos de análise, pois constitui-se numa solução em forma fechada. Além disso mostrou-se eficiente na redução do ruído provocado pelas altas frequências. Na verdade, a matriz não-modal representa de forma exata a transformada inversa de Laplace da matriz de transferência do sistema, mostrando a relação íntima entre o método da transformada de Laplace proposto por Lynch e a técnica aqui apresentada.

Tanto a matriz não-modal, como o método da transformada de Laplace, estão baseados na integração de uma integral de contorno no plano complexo. É, portanto, interessante pesquisar técnicas precisas para o cálculo destas integrais. Somente para exemplificar comparamos a solução exata (7.10) com o método da quadratura gaussiana [9, 59], com 18 pontos de quadratura, e o de Lynch, equação (7.4). A tabela 8.2 mostra somente os fatores relativos a primeira submatriz<sup>1</sup> de (7.10), onde

<sup>1</sup>Na tabela temos:  $\beta_{k,j}(t) = \sum_{l=0}^{j-1} a_l \oint_{\Gamma} \lambda^{j-l-1} e^{\lambda t} \Theta^{-1}(\lambda) d\lambda$ , e  $t = \Delta t$ .

Tabela 8.2 - Comparação entre o método de Lynch e quadratura gaussiana para o cálculo de  $\beta_{k,j}(t)$ .

$j$	Sol. Exata	Quad. Gauss.	Lynch ( $\gamma = 1$ )	Lynch ( $\gamma = 50$ )
1	$4.99996 \times 10^{-5}$	$5.00000 \times 10^{-5}$	$6.53270 \times 10^{-1}$	$1.27237 \times 10^{-5}$
2	$9.99983 \times 10^{-3}$	$1.00000 \times 10^{-2}$	$4.52172 \times 10^{-3}$	$5.13454 \times 10^{-3}$
3	1.00000	1.00005	1.00002	1.05406

se nota que a quadratura de Lynch é uma estimativa pouco precisa ( $\gamma = 50$ ).

Outro ponto a destacar refere-se ao fato de que, entre os métodos de inicialização propostos na literatura, os dois métodos apresentados por P. Lynch (transformada de Laplace e o de filtros digitais) e o método da matriz não-modal são os *únicos* que permitem ao analista selecionar quais as soluções que devam constar na resposta do seu sistema. Este aspecto adquire relevância nos sistemas equatoriais, onde a separação entre os modos de Rossby e os de gravidade não é tão forte.

A formulação prognóstica exige a solução de duas equações de Poisson para a atualização do vetor de estado das variáveis primitivas. Enquanto que na formulação primitiva não necessita-se disto, mas em contrapartida, outras dificuldades podem ser encontradas. Como o sistema DYNAMO é singular o cálculo da inversa de Drazin é exigido.

Para a integração estática, ou a reconstrução dos campos, a solução pela decomposição em valores singulares (usada sob a forma da inversa de Moore-Penrose, pois o sistema é singular) mostrou-se apropriada. Como a inversa de Moore-Penrose representa a solução no sentido dos mínimos quadrados, os resultados obtidos permitem afirmar que ela se constitui num potencial que também satisfaz a equação de Poisson discretizada. No caso de condições periódicas, esta solução é simples e eficiente e seu uso para dimensões mais altas é imediato.

## APÊNDICE A

### Reconstrução dos Campos de Vento

No capítulo 6 foi visto que, a cada passo, novos valores para as componentes horizontais devem ser obtidos da vorticidade  $\zeta$  e da divergência  $\delta$ . Portanto deve-se resolver duas equações da forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \bar{\rho}; \quad \psi(0) = \psi(L). \quad (\text{A.1})$$

A equação discreta associada a expressão acima pode ser escrita como

$$A_{\Delta} \Psi = \rho$$

onde  $\rho = \Delta x^2 \bar{\rho}$ . Tomando-se o potencial  $\phi = \psi + c$ , no qual  $c$  é uma constante, então  $\phi$  é também uma solução de (A.1). Fixando-se a constante  $c$  tal que  $\Psi_0 = \Psi_{N_x} = 0$ , o sistema discreto reduz-se a

$$\begin{array}{rcccccc} -2\Psi_1 & + & \Psi_2 & & & = & \rho_1 \\ \Psi_1 & - & 2\Psi_2 & + & \Psi_3 & & = & \rho_2 \\ & & \Psi_2 & - & 2\Psi_3 & + & \Psi_4 & = & \rho_3 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \Psi_{N_x-2} & - & 2\Psi_{N_x-1} & = & \rho_{N_x-1} \\ \Psi_1 & & & & & + & \Psi_{N_x-1} & = & \rho_{N_x} \end{array} \quad (\text{A.2})$$

Se a primeira equação do sistema (A.2) é multiplicada por um, a segunda por dois, etc..., e somando-se todas as equações restantes, tem-se

$$N_x \Psi_1 = \sum_{k=1}^{N_x} k \rho_k$$

e o valor de  $\Psi_1$  é obtido. Usando a primeira equação algébrica do sistema (A.2) encontra-se  $\Psi_2$  e a substituição progressiva nos fornece a solução integral. O erro de arredondamento pode ser conferido calculando  $\Psi_{N_x} = \rho_{N_x-1} + 2\Psi_{N_x-1} - \Psi_{N_x-2}$ , que deveria ser nulo [28].

## APÊNDICE B

### O Método da Parcela

Da integração da aproximação isentrópica tem-se

$$\theta = T \left( \frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p}$$

onde  $\theta$  é a temperatura potencial e  $p_s$  é a pressão na superfície. A substituição da aproximação hidrostática e da lei dos gases ideais, após tomar o logaritmo e diferenciar a expressão da temperatura potencial, obtém-se

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}.$$

No processo adiabático, a temperatura potencial permanece constante, portanto

$$\Gamma_d \equiv \frac{g}{c_p} = -\frac{\partial T}{\partial z}$$

onde  $\Gamma_d$  é o gradiente vertical de temperatura (lapse rate) para o ar seco.

Desta forma se o gradiente vertical de temperatura de uma parcela, num movimento ascendente, for menor do que o processo adiabático ( $\Gamma < \Gamma_d$ ), a parcela terá uma temperatura *menor* do que os níveis superiores; e a parcela será mais densa do que o ambiente, o que a forçará a voltar ao nível original.

Por outro lado se  $\Gamma$  da parcela for maior do que  $\Gamma_d$ , a parcela em ascensão terá uma temperatura sempre *maior* do que o ambiente, portanto menos densa, o que provoca um empuxo ascensional adicional.

O que foi descrito qualitativamente nos parágrafos anteriores, pode ser resumido num critério para o deslocamento de parcelas não saturadas:

$\Gamma_d > \Gamma$ : estável;

$\Gamma_d = \Gamma$ : neutral;

$\Gamma_d < \Gamma$ : instável.

## APÊNDICE C

### A Inversa de Moore-Penrose em Problemas Bidimensionais

O problema é resolver a seguinte equação diferencial parcial

$$\nabla^2 \psi = g(x, y) \quad (\text{C.1})$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano. Se o esquema de diferenças finitas de 5-pontos é aplicado à equação acima com condições periódicas em ambas as variáveis  $x$  and  $y$ , a discretização conduz ao seguinte sistema matricial [54]

$$\mathbf{A}_\Delta \Psi = h^2 G \quad (\text{C.2})$$

onde arbitra-se  $\Delta x = \Delta y = h$  e a matriz  $\mathbf{A}_\Delta$  é uma *bloco circulante com blocos circulantes* do tipo  $(m, n)$  [18, 13]:

$$\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} A & I_n & & I_n \\ I_n & A & I_n & \\ & I_n & A & I_n \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & I_n & A & I_n \\ I_n & & & I_n & A \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & 1 \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & A & 1 \\ 1 & & & 1 & -4 \end{bmatrix} = F_n^* \Lambda_n F_n \quad (\text{C.4})$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$  e  $\Lambda_n$  é uma matriz diagonal (2.4). Portanto, a matriz do sistema pode ser fatorizada na forma de blocos, como visto na seção 2.1.3, isto é

$$\mathbf{A}_\Delta = \mathcal{F}^* \Lambda_A \mathcal{F}. \quad (\text{C.5})$$

Destaca-se que a equação (C.2) é novamente um sistema singular. Então, aplicando a decomposição SVD, obtém-se a solução

$$\Psi^+ = h^2 (\mathcal{F}^* \Lambda_A^+ \mathcal{F}) G. \quad (\text{C.6})$$

## APÊNDICE D

### Solução Analítica para a Matriz Não-Modal

Na seção 7.2.1 a matriz não-modal foi fatorizada na forma

$$D(t) = \mathbf{F}^* \text{diag}[D_1(t), D_2(t), \dots, D_{N_x}(t)] \mathbf{F}$$

onde o  $k$ -ésimo elemento da matriz bloco diagonal acima é dado por

$$D_k(t) = \sum_{j=1}^3 \beta_{k,j}(t) (-\Lambda_k^A)^{3-j}$$

onde  $\beta_{k,j}(t)$  é a função

$$\beta_{k,j}(t) = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{b_l}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\lambda^{j-l-1} e^{\lambda t}}{\Delta_k(\lambda)} d\lambda$$

sendo  $\Delta_k(\lambda)$  o polinômio característico associado a matriz  $-\Lambda_k^A$ , e  $b_l$  os coeficientes deste polinômio (com  $b_0 = 1$ ).

#### D.1 Solução pelo Problema de Valor Inicial Associado

Na teoria da matriz não-modal tem-se mostrado que a determinação de  $\beta_{k,j}(t)$  é equivalente a encontrar uma solução  $d(t)$  que satisfaça [14, 23]

$$\sum_{l=0}^{n_B} b_l d^{(n_B-l)}(t) = 0$$

$$d^{(n_B-1)}(0) = 1, \quad \text{e} \quad d(0) = d'(0) = \dots = d^{(n_B-2)}(0) = 0$$

onde  $d^{(n)}(t)$  é a  $n$ -ésima derivada da função  $d(t)$ .

Para o caso examinado (modelo DYNAMO)  $n_B = 3$ , logo o problema de valor inicial associado é

$$d'''(t) - \mu_k^2 d'(t) = 0$$

$$d''(0) = 1 \quad \text{e} \quad d(0) = d'(0) = 0$$

com  $\mu_k^2 = R_F \alpha_k - 1$ . Esta é uma equação simples que tem como solução a função

$$d(t) = \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{e^{\mu_k t} + e^{-\mu_k t}}{2} - 1 \right).$$

Este resultado permite escrever

$$\beta_{k,1}(t) = d(t)$$

$$\beta_{k,2}(t) = d'(t)$$

$$\beta_{k,3}(t) = d''(t) - \mu_k^2 d(t)$$

com o que obtém-se a expressão (7.10) utilizada na seção 7.2.1.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ASSIS, A.K.T., 1991: *On Mach's Principle*, Found. Phys. Lett., **2**, 301–318.
- [2] BAER, F. and TRIBBIA, J. , 1977: *On Complete Filtering of a Gravity Modes through Non-linear Initialization*, Mon. Weather Rev., **105**, 1536–1539.
- [3] BRENNAN, K.E., CAMPBELL, S.L. and PETZOLD, L.R., 1989: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations, Elsevier Science Publishing Co.
- [4] BRIÈRE, S. , 1982: *Nonlinear Normal Mode Initialization of a Limited Area Model*, Mon. Weather Rev., **111**, 2285–2297.
- [5] BRIGHAM, E.O., 1974: The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall.
- [6] CAMPBELL, S. L. and MEYER, C. D. Jr. , 1979: Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman Publishing Co. Ltd.
- [7] CAMPBELL, S.L., 1980: Singular Systems of Differential Equations, Pitman Publishing Co. Ltd.
- [8] CAMPBELL, S.L., 1982: Singular Systems of Differential Equations II, Pitman Publishing Co. Ltd.
- [9] CAMPOS VELHO, H.F., 1988: Solução do Problema de Milne por Transformada de Laplace com Inversão Numérica, tese de mestrado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, BRASIL.
- [10] CAMPOS VELHO, H.F. and CLAEYSSSEN, J.C.R., 1991: *Initialization of a Barotropic Model Using Dynamical Matrix Solution Approach*, International Conference on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 91), Washington, DC, USA.
- [11] CAMPOS VELHO, H.F. and CLAEYSSSEN, J.C.R., 1992: *Singular Value Decomposition in the Integration of an Atmospheric Model*, XIII Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais para a Engenharia, Porto Alegre, RS, BRASIL.
- [12] CAUGHEY, S.J., WYNGAARD, J.C. and KAIMAIL, J.C., 1979: *Turbulence in the Evolving Stable Boundary-Layer*, J. Atmos. Sci., **36**, 1041–1052.
- [13] CLAEYSSSEN, J.C.R. and LEAL, L.A.S., 1988: *Diagonalization and Spectral Decomposition of Factor Block Circulant Matrices*, Linear Alg. and its Applic., **99**, 41–61.
- [14] CLAEYSSSEN, J.C.R., 1990: *On Predicting the Response of Non-conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solution Approach*, J. of Sound and Vibration, **140**, No. 1, 73–84.
- [15] CLAEYSSSEN, J.C.R. and CAMPOS VELHO, H.F., 1990: *Block Circulants in the Initialization of a Limited Area Barotropic Model*, VI Congresso Nacional de Meteorologia, Salvador, BRASIL.

- [16] CLAEYSSSEN, J.C.R. and CAMPOS VELHO, H.F., 1991: *Dynamical Solutions and Circulants in the Numerical Integration of a Limited Area Barotropic Model*, anais do XIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, pp. 138, Nova Friburgo, Rio de Janeiro, BRASIL.
- [17] CLAEYSSSEN, J.C.R. and CAMPOS VELHO, H.F., 1992: *Initialization and Integration of a Barotropic Model Using Unmodal Matrix Solution*, II Caribe Workshop of Fluid Mechanics.
- [18] DAVIS, P., 1979: Circulant Matrices, John Wiley & Sons.
- [19] DALEY, R., 1981: *The Normal Mode Approach to the Initialization Problem*, in DYNAMIC METEOROLOGY: Data Assimilation Methods (Applied Mathematical Science - 36), Springer Verlag.
- [20] DEGRAZIA, G.A. and MORAES, O.L.L., 1992: *A Model for Eddy Diffusivity in a Stable Boundary Layer*, Boundary Layer Meteorol., 58, 205-214.
- [21] DEGRAZIA, G.A., MORAES, O.L.L., CAMPOS VELHO, H.F. & CLAEYSSSEN, J.C.R.: *Difusividade numa Camada Limite Estável: Um Estudo Numérico da Dispersão Vertical Turbulenta* (a ser publicado).
- [22] DEMIDOVICH, B.P. and MARON, I.A., 1987: Computational Mathematics, Mir Publishers.
- [23] GALLICCHIO, E.D., 1987: Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior, tese de mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, RS, BRASIL.
- [24] GOLUB, G.H. and REINSCH, C., 1970: *Singular Value Decomposition and Least Squares*, Numer. Math., vol. 14, pp. 403-420.
- [25] GOLUB, G.H. and VAN LOAN, C.F., 1988: Matrix Computations, 2nd Edition, Johns Hopkins University Press.
- [26] HALTINER, G.J. and WILLIAMS, R.T., 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology, 2nd edition, John Wiley & Sons.
- [27] HAMMING, R.W., 1989: Digital Filters, Prentice-Hall.
- [28] HOCKNEY, R.W. and EASTWOOD, J.W., 1981: Computer Simulation Using Particles, McGraw-Hill.
- [29] HOLTON, J.R., 1979: An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press.
- [30] HOUSEHOLDER, A.S., 1964: The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Dover.
- [31] LONGAIR, M.S., 1991: Theoretical Concepts in Physics, Cambridge University Press.
- [32] LYNCH, P., 1984: *DYNAMO - A One Dimensional Primitive Equation Model*, Tech. Note No. 44, Irish Meteorological Service, Dublin.

- [33] LYNCH, P., 1984: *Initialization of a Barotropic Limited Area Model Using the Laplace Transform Technique*, Tech. Note No. 46, Irish Meteorological Service, Dublin.
- [34] LYNCH, P., 1985: *Initialization Using Laplace Transform*, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **111**, 243–258.
- [35] LYNCH, P., 1985: *Initialization of a Barotropic Limited Area Model Using the Laplace Transform Technique*, Mon. Weather Rev., **113**, 1338–1344.
- [36] LYNCH, P., 1986: *Numerical Forecasting Using Laplace Transforms: Theory and Application to Data Assimilation*, Tech. Note No. 48, Irish Meteorological Service, Dublin.
- [37] LYNCH, P., 1991: *Filtering Integration Scheme Based on the Laplace and Z Transforms*, Mon. Weather Rev., **119**, 653–666.
- [38] LYNCH, P. and HUANG, Xiang-Yu, 1991: *Initialization of the HIRLAM Model Using a Digital Filter*, Report DM-57, Department of Meteorology, Stockholm University.
- [39] MACHENHAUER, B., 1977: *On the Dynamics of Gravity Oscillations in a Shallow Water Model, with Applications to Normal Mode Initialization*, Beitr. Phys. Atmos., **50**, 253–271.
- [40] MAXWELL, J.C., 1954: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover.
- [41] MORAES, O.L.L., 1988: *The Velocity Spectra in the Stable Boundary Layer*, Boundary Layer Meteorol., **43**, 223–230.
- [42] NOWOSAD, A., CAMPOS VELHO, H.F., CLAEYSSSEN, J.C.R., 1991: *Frequency Filter with Discrete Fourier Transform for time Initialization of a Meteorological Model*, anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, pp. 139, Nova Friburgo, Rio de Janeiro, BRASIL.
- [43] NIEUWSTADT, F.T.M.; 1984a: *The Turbulent Structure of the Stable Nocturnal Boundary Layer*, J. Atmos. Sci., **41**, 2202–2216.
- [44] NIEUWSTADT, F.T.M.; 1984b: *Some Aspects of the Turbulent Stable Boundary Layer*, Boundary-Layer Meteorol., **30**, 31–55.
- [45] PANCHEV, S., 1985: *Dynamic Meteorology*, D. Reidel Publishing Company.
- [46] PANOFSKY, H.A. and DUTTON, J.A., 1984: *Atmospheric Turbulence*, John Wiley & Sons.
- [47] PASQUILL, F., 1974: *Atmospheric Diffusion*, 2nd edition, John Wiley & Sons.
- [48] PEDLOSKY, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd edition, Springer-Verlag.
- [49] PORTER, B. and CROSSLEY, R., 1972: *Modal Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis Ltd.
- [50] SORBJAN, Z., 1986: *On Similarity in the Atmospheric Boundary Layer*, Boundary-Layer Meteorol., **34**, 377–397.

- [51] SORBJAN, Z., 1986: *Local Similarity of Spectral and Cospectral Characteristics in the Stable-continuous Boundary Layer*, *Boundary-Layer Meteorol.*, **35**, 257–275.
- [52] SCHLICHTING, H., 1985: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill.
- [53] SMITH, G.D.; 1985: Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University Press.
- [54] STRANG, G., 1986: Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press.
- [55] TEMPERTON, C., 1985: *Implicit Normal Mode Initialization*, *Mon. Weather Rev.*, **116**, 1013–1031.
- [56] VAN LOAN, C.F.; 1992: Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform, SIAM Frontiers in Applied Mathematics.
- [57] VAN ISACKER, J. and STRUYLAERT, 1985: *Numerical Forecasting Using Laplace Transforms*, Publications Serie A, **115**, 32 pp. (disponível de Royal Belgian Meteorological Institute).
- [58] VAN ISACKER, J. and STRUYLAERT, 1986: *Laplace Transforms Applied to a Baroclinic Model*, Short- and Medium-Range Numerical Weather Prediction, Proc. of IUGG NWP Symposium, 247–253, Meteorological Society of Japan.
- [59] VILHENA, M.T., CAMPOS VELHO, H.F., CLAEYSSEN, J.C.R., 1987: *Solução do Problema de Milne com Inversão Numérica da Transformada de Laplace*, VIII Congresso Latino-americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, BRASIL.
- [60] WASHINGTON, W.M. and PARKINSON, C.L., 1986: An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling, University Science Books (Oxford University Press).
- [61] WESTRUPP, R., 1990: Simulação do Modelo Barotrópico Unidimensional de Água Rasa no Plano  $\beta$ , tese de mestrado, Instituto de Matemática/UFRGS, Porto Alegre, RS, BRASIL.