

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DE SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Análise Não Linear da Interação Feixe-Plasma na Presença
de Colisões Binárias**

Sabrina Tigik Ferrão

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre, 14 de setembro de 2015

Agradecimentos

Sou grata ao Prof. Luiz Fernando Ziebell pela excelente orientação. Sua grande dedicação em ensinar, sua disponibilidade para solucionar dúvidas e sua imensa paciência foram decisivos para a execução deste trabalho. Também sou grata aos colegas de Grupo pela agradável convivência e pela constante troca de conhecimento.

Agradeço aos amigos da “CG”. À Amanda, à Lais e à Nicole pelas diversas e divertidas conversas sobre “a vida o universo e tudo mais”. Ao Demétrius e ao Vinícius pelas discussões sem sentido mais engraçadas e irritantes que já tive.

Reservo um agradecimento especial à minha família, que tanto me apoiou. Ao meu marido pelo companheirismo e incentivo. Ao meu filho por nortear a minha vida e enchê-la de emoções. À minha mãe pelo amor e pela dedicação à minha educação. Amo vocês.

“The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds the most discoveries, is not ‘Eureka!’ (I found it!) but ‘That’s funny’...”

(Isaac Asimov)

Resumo

A situação em que ocorre a interação entre um feixe de elétrons rápidos e um plasma é considerada um modelo fundamental para o estudo de instabilidades cinéticas em plasmas. A dinâmica não linear desta interação vem sendo amplamente estudada, com a intenção de entender melhor os processos por trás da geração de turbulência de Langmuir, observada durante os chamados *type II radio bursts* e *type III radio bursts*. Nesses estudos, é comum que seja suposto um feixe de elétrons de baixa densidade, o que leva a um longo intervalo de evolução temporal, muito maior do que o período das ondas que estão sendo consideradas. Para longos períodos de evolução temporal, uma investigação a respeito da atuação dos efeitos colisionais se faz necessária. No presente trabalho, incluímos os efeitos das colisões binárias ao conjunto completo de processos não lineares da instabilidade *bump-on-tail*, na presença de oscilações eletrostáticas, e obtemos a evolução temporal bidimensional desse sistema. Para isso começamos com uma revisão teórica que inclui teoria cinética de plasmas, teoria de turbulência fraca e um estudo sobre colisões em plasmas. A seguir, adaptamos o operador colisional de Fokker-Planck, na aproximação de Landau, de maneira que pudéssemos agrupá-lo à equação cinética bidimensional para a evolução das partículas. Feito isso, passamos essas equações para a forma de diferenças finitas e as integramos em conjunto com o restante das equações da teoria de turbulência fraca. Uma comparação dos resultados obtidos com a evolução do mesmo sistema na ausência de colisões, nos indica que os primeiros sinais da atuação colisional na função de distribuição, embora muito sutis, surgem logo no início da evolução temporal. No entanto, a evolução das ondas só será afetada pelas colisões bem mais tarde, quando, aparentemente, os processos colisionais passam a dominar a dinâmica do sistema, superando os processos coletivos não lineares. Essa predominância da atuação colisional é percebida como uma lenta, mas progressiva simetrização das distribuições no espaço de velocidades e no espaço de vetor de onda. Os resultados estão de acordo com o esperado e as perspectivas futuras são promissoras.

Abstract

The situation in which occurs the interaction between a beam of fast electrons and a plasma is considered a fundamental model for the study of kinetic instabilities in plasmas. The nonlinear dynamics of this interaction has been extensively studied with the intention to better understand the processes behind the Langmuir turbulence generation, observed during the so-called type II and type III radio bursts. In these studies, it is usual to assume a low density electron beam, which leads to a long time development interval; much longer than the period of the considered waves. For long periods of time evolution, an investigation concerning the action of collisional effects is needed. In this study, we include the effects of binary collisions to the complete set of non-linear processes of the bump-on-tail instability in the presence of electrostatic oscillations, and obtain the solution for the time evolution of the system in two dimensions. For that, we start with a literature review which includes kinetic theory of plasmas, weak turbulence theory and a study of collisions in plasmas. Then we adapt the Fokker-Planck collisional operator, in Landau approach, so we could group it to the two-dimensional kinetic equation for the evolution of the particles. Then, we write these equations in the form of finite difference equations, and integrate them together with the rest of the weak turbulence equations. A comparison of the results obtained with the evolution of the same system in the absence of collisions, indicates that the first signs of collisional activity in the distribution function, although very subtle, appear at the beginning of time evolution. However, the evolution of the waves will only be affected by collisions much later, when the collisional processes apparently dominate the dynamics of the system, overcoming the nonlinear collective processes. This predominance of collisional acting is perceived as a slow but progressive symmetrization of the distributions in the velocity space and the wave vector space. The results are consistent with expectations, and future perspectives are promising.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Teoria cinética de plasmas | 4 |
| 2.1 | Equações da teoria cinética de plasmas | 5 |
| 2.2 | Abordagem linear do sistema Vlasov-Maxwell aplicada às ondas de Langmuir | 7 |
| 2.2.1 | Processo de linearização | 8 |
| 2.2.2 | Solução da equação de Vlasov | 10 |
| 2.2.3 | Solução assintótica e o método de Landau | 12 |
| 2.2.4 | Relação de dispersão para ondas de Langmuir | 14 |
| 2.2.5 | Amortecimento de Landau | 18 |
| 3 | Teoria de turbulência fraca | 20 |
| 3.1 | Formalismo quasilinear | 21 |
| 3.1.1 | Sistema Vlasov-Maxwell no formalismo quasilinear | 21 |
| 3.1.2 | Difusão quasilinear | 23 |
| 3.1.3 | Densidade espectral | 27 |
| 3.2 | Formalismo não linear da teoria de turbulência fraca | 29 |
| 3.2.1 | Equações cinéticas generalizadas | 30 |
| 3.2.2 | Equação cinética das ondas para os modos lineares | 34 |
| 3.2.3 | Equações cinéticas específicas para ondas de Langmuir e para ondas íon-acústicas | 36 |
| 3.3 | Adição dos efeitos das flutuações espontâneas nas equações da teoria de turbulência fraca | 42 |
| 3.4 | Equações completas da teoria de turbulência fraca | 43 |
| 4 | Colisões em plasmas | 46 |
| 4.1 | Breve resumo do formalismo de Klimontovich | 47 |
| 4.1.1 | Equações microscópicas para um plasma totalmente ionizado | 47 |
| 4.1.2 | Média das equações microscópicas | 49 |
| 4.1.3 | Equações hierárquicas de Klimontovich | 51 |
| 4.1.4 | Aproximações de segundo momento e de polarização | 54 |
| 4.2 | Equações cinéticas colisionais | 56 |
| 4.2.1 | Densidades espectrais | 56 |
| 4.2.2 | Equação cinética de Balescu-Lenard | 61 |
| 4.2.3 | Propriedades gerais do operador colisional de Balescu-Lenard | 63 |
| 4.2.4 | Aproximação de acoplamento fraco: equação cinética colisional de Landau | 65 |
| 4.3 | Operador colisional de Fokker-Planck aplicado à interação feixe-plasma | 68 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.1 | Operador de Fokker-Plank para um plasma Maxwelliano com a incidência de um feixe de elétrons de baixa densidade | 70 |
| 5 | Interação feixe-plasma não linear na presença de colisões binárias | 72 |
| 5.1 | Operador colisional de Fokker-Planck aplicado à interação feixe-plasma | 73 |
| 5.1.1 | Forma bidimensional do operador colisional | 73 |
| 5.1.2 | Normalização das velocidades e do tempo | 74 |
| 5.2 | Equações adimensionais da teoria de turbulência fraca aplicadas à interação feixe-plasma | 77 |
| 5.2.1 | Equação cinética para as partículas em duas dimensões | 79 |
| 5.3 | Coefficientes de fricção e de difusão generalizados | 79 |
| 5.4 | Condições Iniciais | 81 |
| 6 | Análise Numérica e Resultados | 82 |
| 6.1 | Análise Numérica | 82 |
| 6.2 | Evolução do sistema e resultados | 83 |
| 6.2.1 | Evolução temporal da função de distribuição | 83 |
| 6.2.2 | Evolução temporal da amplitude espectral | 84 |
| 6.2.3 | Considerações gerais sobre a evolução temporal do sistema sob o efeito das colisões | 85 |
| 7 | Considerações finais | 91 |
| A | Cálculo do potencial efetivo para uma distribuição Maxwelliana | 93 |
| B | Cálculo detalhado da projeção bidimensional do operador colisional | 95 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Contorno de integração no plano complexo. | 13 |
| 2.2 | Limite assintótico do contorno de Landau. Em (a) $\text{Im}\{\omega/k\} > 0$ indica a presença de instabilidade e em (b) $\text{Im}\{\omega/k\} < 0$ indica a presença de amortecimento. Figura adaptada de [4]. | 15 |
| 6.1 | Função de distribuição dos elétrons normalizada de v_{\parallel} e v_{\perp} , em escala logaritmica. (a) $\tau = 500$, sem colisões; (b) $\tau = 500$, com colisões; (c) $\tau = 1000$, sem colisões; (d) $\tau = 1000$, com colisões; (e) $\tau = 2000$, sem colisões; (f) $\tau = 2000$, com colisões; (g) $\tau = 5000$, sem colisões; (h) $\tau = 5000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$ | 87 |
| 6.2 | Função de distribuição dos elétrons normalizada em função de v_{\parallel} e v_{\perp} , em escala logaritmica. (a) $\tau = 10000$, sem colisões; (b) $\tau = 10000$, com colisões; (c) $\tau = 15000$, sem colisões; (d) $\tau = 15000$, com colisões; (e) $\tau = 20000$, sem colisões; (f) $\tau = 20000$, com colisões; (g) $\tau = 30000$, sem colisões; (h) $\tau = 30000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$ | 88 |
| 6.3 | Intensidade normalizada para ondas L como função de q_{\parallel} e q_{\perp} , em escala logaritmica. (a) $\tau = 500$, sem colisões; (b) $\tau = 500$, com colisões; (c) $\tau = 1000$, sem colisões; (d) $\tau = 1000$, com colisões; (e) $\tau = 2000$, sem colisões; (f) $\tau = 2000$, com colisões; (g) $\tau = 5000$, sem colisões; (h) $\tau = 5000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$ | 89 |
| 6.4 | Intensidade normalizada para ondas L como função de q_{\parallel} e q_{\perp} , em escala logaritmica. (a) $\tau = 10000$, sem colisões; (b) $\tau = 10000$, com colisões; (c) $\tau = 15000$, sem colisões; (d) $\tau = 15000$, com colisões; (e) $\tau = 20000$, sem colisões; (f) $\tau = 20000$, com colisões; (g) $\tau = 30000$, sem colisões; (h) $\tau = 30000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$ | 90 |

Capítulo 1

Introdução

Não nos damos conta, mas plasmas fazem parte de nossa vida. Começando pela esfera de plasma que nos aquece e que é um dos fatores determinantes para o desenvolvimento da vida como conhecemos, o Sol. Só compreender melhor a intrincada dinâmica solar, entender como as emissões solares afetam o ambiente espacial em torno da Terra e tentar determinar o real impacto dessas emissões sobre o clima terrestre seria o suficiente para justificar a pesquisa em física de plasmas. No entanto, a física de plasmas nos oferece muito mais. No ambiente interplanetário e no espaço interestelar, praticamente toda a matéria está no estado de plasma. Do vento solar às anãs brancas, ou às magnetosferas de pulsares, ou em ambientes mais exóticos como os discos de acreção em torno de buracos negros, entender os processos que ocorrem nas diversas configurações possíveis dos plasmas espaciais é um bom começo para compreender o universo que nos cerca - pelo menos os 4,6% formados por matéria bariônica e que conseguimos medir diretamente¹. Aqui na Terra, plasmas fazem parte do nosso dia a dia, direta e indiretamente. O exemplo mais comum da presença direta do plasma em nosso cotidiano são as lâmpadas fluorescentes e os painéis de neon. Mas é de forma indireta que a física de plasmas revolucionou as nossas vidas, através das técnicas de processamento de materiais com o uso de plasmas. Desenvolvida com base em um modelo teórico elaborado pelo físico-químico norte-americano Irving Langmuir, na primeira metade do século XX, esta técnica permitiu o processamento em larga escala de semicondutores para a fabricação de microchips, reduzindo o tamanho e o custo de fabricação dos circuitos integrados, contribuindo para a escalada tecnológica dos últimos 30 anos [1, 2].

Um plasma pode ser distinguido de um gás neutro pela presença de partículas carregadas. No entanto, para caracterizar um plasma, a quantidade de partículas carregadas deve ser suficientemente grande para que as forças de natureza elétrica e magnética entre as partículas predominem sobre as interações colisionais envolvendo partículas neutras, que governam a dinâmica em gases não ionizados. Além disso, a quantidade de íons e de elétrons em um elemento de volume do sistema deve ser aproximadamente a mesma, de maneira que se estabeleça a quaseneutralidade. Nesse caso, uma carga resultante em um elemento de volume pode ser considerada uma pequena flutuação. Além disso, qualquer excesso de cargas de um determinado sinal em um elemento de volume tende a ficar eletricamente “blindado” com relação a cargas mais distantes, uma vez que atrai para seu entorno cargas de sinal oposto e repele cargas de mesmo sinal. O raio do volume que delimita o alcance efetivo das interações entre as cargas é

¹NASA Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). Disponível em <http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html>. Acesso em 03 de agosto de 2015.

chamado de “comprimento de Debye” e o volume com esse raio é denominado “esfera de Debye”. Evidentemente, esse alcance é um conceito estatístico, baseado em valores médios. Todo esse raciocínio nos leva a concluir que em um plasma neutro predominam os campos flutuantes. Pode parecer pouco, mas são essas flutuações que são responsáveis pelas complexas interações eletromagnéticas que ocorrem em um plasma, também chamadas de “comportamento coletivo” [3, 4]. O comportamento coletivo é resultado da movimentação das cargas pelo plasma, na tentativa de compensar as flutuações e reestabelecer a neutralidade. Essa movimentação coletiva é caracterizada por uma grande diversidade de modos oscilatórios relacionados à movimentação iônica e eletrônica. Desses modos, podemos destacar um cuja frequência natural de oscilação é aquela conhecida como “frequência de plasma eletrônica”, ou apenas “frequência de plasma”, que está associada ao deslocamento dos elétrons em torno dos íons que, muito mais massivos, não conseguem acompanhar o movimento. Este é um modo oscilatório de alta frequência e seu período de oscilação determina uma escala de tempo importante que pode ser comparada ao tempo de relaxação de mecanismos dissipativos, como colisões, que tem a tendência de suprimir os efeitos coletivos [5].

Os plasmas podem exibir comportamentos bastante complexos, dependendo de serem ou não magnetizados, de terem ou não populações de partículas fora do equilíbrio termodinâmico, de serem ou não homogêneos, e de muitos outros fatores. Entre os fenômenos que podem ocorrer em plasmas, interessa-nos particularmente a chamada instabilidade *bump-on-tail*, que ocorre quando um feixe tênue de elétrons energéticos incide em um plasma com função de distribuição de fundo monotonicamente decrescente, uma Maxwelliana, por exemplo. A incidência do feixe, na região de altas velocidades, cria um segundo pico que, embora seja muito menor do que o pico da distribuição de fundo, tem altura suficiente para que se forme uma região com derivada positiva na função de distribuição de velocidades total. Essa configuração possibilita a ocorrência de instabilidades cinéticas quando partículas do feixe entram em ressonância com as oscilações presentes no plasma, cedendo energia para as ondas, que crescem em amplitude, culminando na conhecida turbulência de Langmuir. Este modelo de interação feixe plasma, descrito acima, pode ser empregado, em uma primeira aproximação, para descrever alguns dados observacionais que indicam a ocorrência de turbulência de Langmuir durante emissões solares, mais especificamente, os *solar flares*² do tipo III. Nessas emissões, a turbulência de Langmuir, gerada quando elétrons rápidos escapam de regiões ativas da cromosfera em direção à coroa solar e o espaço interplanetário, é parcialmente convertida em radiação com frequência igual à frequência de plasma local e seus harmônicos. Essa conversão é não linear e envolve os processos de espalhamento e de decaimento de ondas.

A proposta deste trabalho é incluir efeitos de colisões binárias ao conjunto completo de efeitos não lineares da instabilidade *bump-on-tail* e obter a evolução temporal deste sistema, integrando numericamente as equações da teoria de turbulência fraca aplicadas à interação feixe-plasma, em duas dimensões. Com esses resultados, pretendemos determinar como as colisões afetam a dinâmica das partículas e o desenvolvimento das ondas. Resultados anteriores para o mesmo sistema, mas sem a presença de colisões, obtidos por Ziebell et al. [6, 7, 8, 9], mostram que a evolução do sistema inicia com uma grande influência dos efeitos quasilineares, que saturam rapidamente com a formação de um *plateau* na região entre a distribuição de fundo e o feixe, com a consequente interrupção do crescimento das ondas. Em seguida começam a se tornar mais efetivos os efeitos não lineares que formam no espectro das ondas de Langmuir um pico contrapropagante, com relação ao pico criado por efeitos quasilineares, e formam também um anel conectando os dois picos. No espaço de velocidades, ocorre um alargamento da função

²Pode ser traduzido como “fulgurações”, porém o termo em inglês é mais comumente empregado na literatura.

de distribuição e o aquecimento dos elétrons na região de velocidade oposta à direção do feixe. A perspectiva é que as colisões, em algum momento, passem a dominar a dinâmica do sistema, alterando a forma da função de distribuição e o espectro das ondas.

Começamos este estudo, no [Capítulo 2](#), com uma revisão teórica da teoria cinética de plasmas, onde mostramos como solucionar o sistema Vlasov-Maxwell na aproximação linear, para um plasma com função de distribuição Maxwelliana, obtendo a relação de dispersão para ondas de Langmuir. Em seguida, é feita uma breve discussão sobre o processo físico que surge da interpretação da solução obtida, o amortecimento de Landau.

No [Capítulo 3](#), aprofundamos nossa discussão com a inclusão de efeitos não lineares supondo que, agora, as flutuações, em vez de serem amortecidas, crescem em amplitude, dando início a instabilidades. Para lidarmos com essa situação empregamos o complexo formalismo da teoria de turbulência fraca. Seguindo uma ordem de complexidade, dentro da teoria de turbulência fraca, começamos pelo formalismo quasilinear, obtendo o coeficiente de difusão quasilinear e a expressão para o crescimento das ondas. Em seguida, passamos ao formalismo não linear, obtendo as equações cinéticas para as partículas e para as ondas. Escrevemos as equações cinéticas específicas para as ondas de Langmuir e íon-acústicas e discutimos os processos de interação onda-partícula quasilinear (emissão) e não linear (espalhamento) e o processo de interação onda-onda (decaimento de três ondas). Por fim, apontamos a necessidade da inclusão do termo de emissão espontânea e resumimos os procedimentos que levam à inclusão dos termos de emissão espontânea nas equações que envolvem interação onda-partícula, apresentamos as equações dos efeitos espontâneos e, finalmente, chegamos ao sistema completo de equações da teoria de turbulência fraca.

O [Capítulo 4](#), aborda as colisões em plasmas. Iniciamos essa discussão com um breve resumo do formalismo de Klimontovich, dando ênfase às aproximações que envolvem os termos de correlações entre as partículas. Discutimos algumas diferentes formas de aproximação e seguimos com a aproximação de polarização. Em seguida, são desenvolvidas as densidades espectrais e definidos os limites de validade da formulação, para então chegarmos à equação cinética colisional de Balescu-Lenard. A seguir, aplicamos a aproximação de acoplamento fraco e chegamos à equação cinética colisional de Landau, e fazemos uma discussão sobre as frequências de colisões. A seção final deste capítulo é dedicada a adaptar a equação de Landau recém obtida, ao trabalho que será desenvolvido.

No [Capítulo 5](#) apresentamos a parte do trabalho que representa a aplicação do formalismo à descrição da evolução da instabilidade feixe-plasma, em duas dimensões. Inicialmente, discutimos alguns aspectos pertinentes ao modelo. Em seguida, passamos à projeção bidimensional do operador colisional para, então, colocá-lo em forma adimensional, mais conveniente para aplicação numérica. A seguir, apresentamos as equações da teoria de turbulência fraca já projetadas em duas dimensões e na forma adimensional. Por fim, discutimos como o operador colisional é agrupado à equação cinética das partículas e definimos as condições iniciais que serão usadas na integração. Os métodos usados na análise numérica e os resultados obtidos são relatados no [Capítulo 6](#). Uma discussão sobre esses resultados e as perspectivas futuras encontra-se no [Capítulo 7](#).

Capítulo 2

Teoria cinética de plasmas

Para descrever a evolução de um sistema físico precisamos determinar a posição e o momentum de cada um dos elementos que fazem parte das interações deste sistema. Quando o objeto de pesquisa tem poucos elementos, podemos obter uma descrição dessa evolução somando as contribuições individuais de cada elemento. Entretanto, essa abordagem torna-se impraticável, tanto do ponto de vista analítico, quanto do ponto de vista computacional quando aplicada a sistemas de muitos corpos, como um plasma.

Plasmas são gases ionizados em que, geralmente, a quantidade total de partículas carregadas negativamente é igual à quantidade total de partículas carregadas positivamente, podendo conter também partículas neutras [10]. Sistemas constituídos apenas de partículas com um tipo de carga, ou que tenham um excesso significativo de um tipo de carga em relação ao outro, são também considerados plasmas, sendo conhecidos como plasmas não-neutros [11]. Vamos considerar apenas o caso em que o plasma encontra-se totalmente ionizado. Dessa forma, o sistema que vamos investigar é composto por uma imensa quantidade de partículas em que metade tem carga elétrica positiva e a outra metade tem carga elétrica negativa, todas em movimento dentro de um determinado volume.

A interação entre partículas carregadas é extremamente complexa, uma vez que cada uma delas, mesmo em repouso, é fonte de campos que lhe permitem interagir à distância com todas as demais cargas do sistema, simultaneamente. Essas interações provocam o deslocamento ou alteração do movimento dessas cargas e, com isso, a geração ou modificação de campos magnéticos, que também atuam sobre outras partículas, e assim sucessivamente. O resultado é o que chamamos de “comportamento coletivo, autoconsistente, com interações de médio alcance”. O ponto aqui é que mesmo na ausência de campos externos, a dinâmica de um plasma pode ser bem complicada. Além disso, dependendo do tempo característico do fenômeno que estamos querendo descrever, é necessário que levemos em conta também os efeitos de colisões entre as partículas.

O formalismo de Klimontovich, que descreve a evolução deste sistema em nível macroscópico, envolve uma extensa cadeia de equações composta pelas médias das equações microscópicas para as partículas e para os campos que compõem um plasma. As médias das funções microscópicas dos diferentes tipos de partículas presentes no plasma são chamadas “momentos”, com a média da função de uma única espécie de partícula sendo o primeiro momento, a média do produto entre funções de dois tipos de partículas sendo o segundo momento, e assim por diante. Esses momentos envolvem termos de correlações entre diferentes tipos de

partículas e crescem em tamanho e complexidade conforme sejam considerados momentos de ordem mais alta. Ocorre que a equação de movimento para a média de um tipo de partícula, o primeiro momento, tem um termo que inclui o segundo momento e, se quisermos escrever uma equação de movimento para o segundo momento, ela envolverá o terceiro momento, sendo da mesma forma para momentos maiores. Conseqüentemente, nessa descrição macroscópica, a complexidade do sistema envolvendo um grande número de partículas continua presente, na seqüência de equações que envolvem os diversos momentos e correlações entre partículas. No entanto, sob determinadas condições, podemos aproximar esses momentos e essas correlações, cortando a cadeia de equações hierárquicas em uma determinada ordem, resultando um sistema de equações autoconsistente que descreve as interações que ocorrem em um plasma. Entraremos em mais detalhes sobre o formalismo de Klimontovich no [Capítulo 4](#), onde daremos ênfase às aproximações que envolvem as correlações entre as partículas, para que possamos incluir os efeitos colisionais, o que é o principal objetivo deste trabalho.

Na primeira seção do presente capítulo, para que possamos dar uma ideia geral da teoria que está sendo empregada, iremos partir direto das equações macroscópicas, começando pela equação de Boltzmann e descartando em seguida o termo colisional. Isso corresponde à primeira aproximação das equações hierárquicas de Klimontovich, resultando na equação de Vlasov¹. Em seguida completaremos o nosso sistema de equações com as equações de Maxwell. Com o sistema autoconsistente completo, vamos efetuar a primeira possibilidade de aproximação, a aproximação linear. Discutiremos os métodos de solução desse sistema de equações para, em seguida, obtermos a relação de dispersão das ondas de Langmuir, considerando uma função de distribuição de fundo Maxwelliana. Por fim, interpretaremos esses resultados, falaremos um pouco sobre o amortecimento de Landau e a possibilidade da existência de instabilidades.

2.1 Equações da teoria cinética de plasmas

Em [10] somos apresentados a uma formulação microscópica que combina os métodos da mecânica clássica para a descrição da variação da posição e do momentum das partículas, com as equações de Maxwell para a descrição dos campos microscópicos gerados pela movimentação das partículas. Dessa forma, o estado de um plasma ficaria definido se conseguíssemos determinar as coordenadas e os momenta de todas as partículas, bem como os valores dos campos elétrico e magnético em cada ponto, em um determinado instante do tempo. Com isso, teoricamente, conseguiríamos montar um sistema de equações que descreveria a evolução temporal do sistema, bastando para isso que determinássemos as condições iniciais de posição e de momentum para as partículas e as condições iniciais para os campos. Contudo, como mencionado anteriormente, essa abordagem é impraticável, devido a imensa quantidade de partículas que compõem um plasma. Entretanto, essa formulação pode ser aproximada, permitindo que obtenhamos uma descrição macroscópica das propriedades do plasma. Existe uma hierarquia de aproximações que leva às três principais teorias da física de plasmas: cinética, multi-fluido e magnetohidrodinâmica

¹Essa aproximação pode ser vista na [Subseção 4.1.2](#). Cabe ressaltar que a escolha por não abordar o formalismo de Klimontovich completo neste capítulo sobre teoria cinética, foi feita com a intenção de simplificar a apresentação da base teórica, que é extensa. Se tivéssemos feito essa abordagem aqui, as colisões, tópico principal deste trabalho, ficariam agrupadas à teoria de Vlasov o que deixaria o capítulo longo e não daria a ênfase necessária ao desenvolvimento do termo colisional. Dividir o formalismo de Klimontovich e abordá-lo um pouco em cada capítulo também não seria uma opção, ele perderia coesão e ficaria confuso. Então, decidimos por discutí-lo em um capítulo específico sobre colisões, focando na série de aproximações que levam ao termo colisional que usaremos neste trabalho.

(MHD). Essas teorias são aplicáveis em diferentes contextos, dentro da gama de fenômenos e de condições que podem ocorrer em um plasma. Como o assunto deste trabalho envolve a evolução de processos físicos que dependem de detalhes da distribuição de velocidades das partículas, precisamos aplicar a mais fundamental das três formulações, a teoria cinética. A teoria cinética de plasmas consiste na aplicação dos métodos e conceitos da mecânica estatística, em conjunto com as equações de Maxwell, para obter uma descrição macroscópica formal da evolução de um plasma. Este será nosso ponto de partida.

Seja $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ uma função estatística que expressa a densidade de partículas do tipo α no espaço de fases ou, simplesmente, uma função de distribuição. O produto da função de distribuição pelo elemento de volume no espaço de fases hexa-dimensional, $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v$, representa a probabilidade de encontrar uma partícula do tipo α em um elemento de volume d^3r em torno de \mathbf{r} e em um elemento de volume d^3v em torno de \mathbf{v} , no instante t .

A dinâmica desse sistema é descrita pela equação de Boltzmann

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (2.1)$$

Na equação acima, \mathbf{F} é a força atuante no sistema, $\nabla_{\mathbf{r}}$ e $\nabla_{\mathbf{v}}$ são operadores vetoriais diferenciais parciais com relação a \mathbf{r} e a \mathbf{v} , respectivamente. O lado direito da equação representa os efeitos de colisões entre as partículas que compõem o sistema. Por hora, vamos considerar efeitos que ocorrem em intervalos de tempo muito menores do que o tempo de relaxação colisional. Com isso podemos desprezar os efeitos de correlações entre as partículas e desenvolver somente o lado esquerdo da equação (2.1), deixando o desenvolvimento das colisões para um capítulo específico, onde sua inclusão será justificada.

Em um plasma, a força atuante do lado esquerdo da equação da equação de Boltzmann é a força de Lorentz, mais uma força externa, que normalmente também é de natureza eletromagnética²

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] + \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (2.2)$$

Contudo, estamos interessados no caso em que $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, ou seja, não vamos levar em conta a atuação de campos externos, mas somente os campos gerados internamente pela movimentação das partículas carregadas do plasma.

Substituindo (2.2), já supondo $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, em (2.1) e, por simplicidade de notação, omitindo as dependências em \mathbf{r} , \mathbf{v} e t , obtemos a chamada “equação de Vlasov”:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0. \quad (2.3)$$

Os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} que aparecem em (2.3), tem sua atuação no sistema descrita pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

²Utilizaremos nesse trabalho o sistema cgs de unidades, comumente usado na literatura sobre física de plasmas.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

onde ρ é a densidade carga do plasma e \mathbf{J} é a densidade da corrente que circula no plasma. Suas expressões, em uma abordagem estatística, dependem da função de distribuição do plasma, e tem a seguinte forma,

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.9)$$

Nessas equações a soma em α leva em conta as diferentes espécies de partículas carregadas que constituem o plasma, com $\alpha = i$, para íons e $\alpha = e$, para elétrons.

As expressões descritas acima, da forma como foram apresentadas, isto é, sem que levemos em conta os efeitos colisionais, formam um conjunto completo e auto-consistente de equações que descrevem as interações eletromagnéticas que ocorrem entre as partículas carregadas que compõem um plasma. Quando os efeitos das colisões passam a ter importância, ocorrem mudanças abruptas nas coordenadas de espaço e de velocidade das partículas. Nesse caso, as trajetórias das partículas não serão mais contínuas e o sistema deixa de ser auto-consistente. Devido à grande importância que o caso envolvendo colisões tem para este trabalho, iremos discutí-lo em um capítulo específico. Nas seções que seguem vamos apresentar algumas propriedades e métodos envolvendo o sistema Vlasov-Maxwell.

2.2 Abordagem linear do sistema Vlasov-Maxwell aplicada às ondas de Langmuir

Para que possamos desenvolver uma lógica didática, de maneira que seja possível embasar o nosso trabalho e situá-lo dentro da teoria cinética, é imprescindível que comecemos pela mais fundamental das aproximações, a aproximação linear do sistema de equações obtido na seção anterior. Contudo, não entraremos em muitos detalhes, pois além de não ser o objetivo principal deste trabalho, o que está sendo apresentado aqui pode ser visto com muito mais detalhes em muitos livros texto, como nas referências [4, 5, 12, 14].

O sistema Vlasov-Maxwell pode ser aplicado ao estudo de fenômenos ondulatórios em plasmas. Dentre os diversos tipos de oscilações que podem ocorrer em um plasma, focaremos nosso estudo nas ondas de Langmuir, que são ondas eletrostáticas de alta frequência. O nosso objetivo é obter a relação de dispersão para essas ondas, com o uso da teoria linear.

A faixa de frequência das ondas de Langmuir está acima da frequência associada à movimentação eletrônica em torno dos íons que, por serem bem mais massivos, movimentam-se lentamente, em comparação com os elétrons. Disso podemos concluir que essa frequência é tão alta que podemos tratar os íons como um fundo estático neutralizador. Portanto, a função de distribuição total, que é composta pela soma das distribuições dos íons, f_i , e dos elétrons, f_e , irá variar somente em termos da distribuição eletrônica. Podemos então suprimir f_i do nosso desenvolvimento e trabalhar somente com f_e , que será denotada por f , por simplicidade de notação. Além disso, estamos interessados em oscilações de alta frequência que satisfazem

$$\omega\tau \gg 1, \quad (2.10)$$

onde ω é a frequência angular das ondas e τ o tempo médio entre as colisões binárias que ocorrem entre as partículas. Com isso, podemos justificar a ausência do termo de colisões que aparece na equação (2.1) e que não está sendo levado em consideração nesta formulação.

2.2.1 Processo de linearização

Para simplificar o procedimento, vamos supor um plasma não magnetizado, no qual atuam somente oscilações eletrostáticas. Vamos também supor que essas oscilações sejam de alta frequência, dessa forma podemos desprezar a movimentação iônica e tratar os íons apenas como um fundo estático neutralizador. Isso se deve ao fato de a massa dos íons ser muito maior do que a massa dos elétrons e , com toda essa inércia relativa, eles não conseguem acompanhar a movimentação eletrônica. Sendo assim, podemos descartar o somatório em α , e substituí-lo por $-e$, que designa a carga dos elétrons. E como temos apenas a presença de ondas eletrostáticas, temos que $\mathbf{B} = 0$. Nessas condições, a força atuante na equação de Vlasov tem a seguinte forma:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Sabemos que no caso puramente eletrostático, o campo elétrico está diretamente relacionado à variação espacial do potencial elétrico, com seu vetor direcionado na direção oposta à direção de crescimento do potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11), colocamos a força eletrostática em termos do gradiente do potencial elétrico

$$\mathbf{F} = e\nabla\Phi, \quad (2.13)$$

onde os sinais negativos anulam-se e obtemos a força a ser inserida na equação de Vlasov. Com isso, ficamos com a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{e}{m_e} \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (2.14)$$

Agora vamos considerar que nosso plasma possui uma função de distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, composta por um termo de ordem zero que representa uma função de distribuição homogênea de equilíbrio estacionário, $f_0(\mathbf{v})$, e uma função de distribuição de primeira ordem referente a uma perturbação de pequena amplitude, $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, da seguinte forma:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.15)$$

O mesmo pode ser suposto para o campo elétrico, porém, neste caso, vamos considerar que o campo elétrico de equilíbrio, \mathbf{E}_0 , é nulo, de modo que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, que vamos denotar sem o subíndice 1, por simplicidade.

Como estamos expressando a equação de Vlasov em termos do potencial elétrico, podemos obtê-lo através da equação de Poisson, para que possamos resolver a equação de Vlasov. Para isso, aplicamos mais uma vez o operador vetorial ∇ em (2.12):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi. \quad (2.16)$$

Das equações de Maxwell temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.17)$$

que, junto com (2.16), nos leva à equação de Poisson para o potencial elétrico

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho, \quad (2.18)$$

onde $\Phi = \Phi_1$.

A densidade de carga que aparece no lado direito da equação (2.18) é a seguinte³:

$$\begin{aligned} \rho &= en_0 - e \int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \\ &= en_0 - e \int_v [f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] d^3v \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde o primeiro termo representa a densidade de carga associada aos íons. O valor de equilíbrio da densidade de elétrons é dado por

$$n_0 = \int_v f_0(\mathbf{v}) d^3v. \quad (2.20)$$

Vemos, pelas equações (2.19) e (2.20), que os termos referentes à densidade de equilíbrio n_0 se anulam. O que resta é uma densidade de carga associada à perturbação, dependendo exclusivamente da função de distribuição perturbada:

$$\rho_1 = -e \int_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.21)$$

Com isso, obtemos uma expressão para a equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi e \int_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.22)$$

Para que fique mais claro o processo de linearização da equação de Vlasov, vamos explicitar os termos em f_0 e em f_1 ,

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}(f_0 + f_1) + \frac{e}{m_e} \nabla_{\mathbf{r}}\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_0 + f_1) = 0, \quad (2.23)$$

onde, por simplicidade, as dependências de f_0 e de f_1 foram suprimidas.

Na expressão acima, a função de distribuição de equilíbrio, f_0 , é constante no tempo, então o termo que leva sua derivada temporal é nulo. Assim também é com a sua derivada espacial, dada por $\nabla_{\mathbf{r}}f_0$, visto que f_0 é homogênea. No termo que leva o gradiente da f no espaço de velocidades, precisamos levar em consideração a condição de baixa amplitude da perturbação, pois temos o gradiente do potencial, que depende somente de f_1 e a derivada do termo de perturbação no espaço de velocidades. O produto entre essas duas funções de f_1 , derivadas, leva a um termo de segunda ordem muito pequeno que, devido à baixa amplitude da perturbação, pode ser desprezado. Sob estas condições, obtemos uma equação aproximada para a perturbação da função de distribuição, a qual pode ser chamada de equação de Vlasov linearizada:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}f_1 + \frac{e}{m_e} \nabla_{\mathbf{r}}\Phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}}f_0 = 0. \quad (2.24)$$

³Neste trabalho, todas as integrais sem limites de integração explícitos serão tomadas como de $-\infty$ a $+\infty$

2.2.2 Solução da equação de Vlasov

Queremos obter uma solução para o sistema formado pelas equações (2.22) e (2.24). Para tal, convém expressá-las em termos das variáveis do espaço recíproco ω e \mathbf{k} . Começamos aplicando a transformada de Fourier no potencial e na função perturbada, colocando ambas as quantidades em função do vetor de onda \mathbf{k} , como pode ser visto logo abaixo

$$\Phi_{\mathbf{k}} \equiv \Phi(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \quad (2.25)$$

$$f_{\mathbf{k}} \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \quad (2.26)$$

A seguir, em um procedimento parecido, envolvendo a transformada de Laplace, passamos a dependência temporal de $\Phi_{\mathbf{k}}$ e de $f_{\mathbf{k}}$ para uma dependência na variável do domínio recíproco de tempo, o domínio de frequência que, por enquanto, chamaremos de “ p ”. Para aplicar a transformada de Laplace, multiplicamos as respectivas funções por e^{-pt} e as integramos no tempo, de zero a infinito. É importante impormos a condição de que a parte real de p seja grande o suficiente para garantir a convergência das integrais e, conseqüentemente, garantir a existência da função transformada. Então, prosseguindo com as transformadas, temos:

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) = \int_0^{\infty} dt \Phi_{\mathbf{k}}(t) e^{-pt}, \quad (2.27)$$

$$\hat{f}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{f}_{\mathbf{k}}(p) = \int_0^{\infty} dt f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{-pt}, \quad (2.28)$$

onde o símbolo “ $\hat{}$ ” denota a transformada de Laplace e sua respectiva dependência em p .

Ao aplicarmos o método das transformadas de Fourier e de Laplace, tiramos vantagem das propriedades das derivadas dessas transformadas, o que nos permite substituir as equações diferenciais, que contém as derivadas, por equações algébricas. Contudo, uma vez que $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ forem obtidas, precisamos efetuar a transformada inversa. De maneira que, substituindo as funções transformadas nas equações (2.22) e (2.24), ficamos com

$$k^2 \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi e \int d^3v \hat{f}_{\mathbf{k}}, \quad (2.29)$$

$$[p + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})] \hat{f}_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0) + \frac{e}{m_e} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0) \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}, \quad (2.30)$$

onde o termo $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0)$ é a condição de contorno.

Isolando $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ em (2.30) e substituindo em (2.29), obtemos

$$k^2 \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi e \int d^3v \left[\frac{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} + \frac{e}{m_e} \frac{i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \right]. \quad (2.31)$$

Como $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ não depende de \mathbf{v} , podemos colocá-lo para fora da integral

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ip} \right] = \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \frac{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (2.32)$$

e isolando $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ do lado esquerdo, obtemos uma expressão para o potencial transformado, que não depende de $\hat{f}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \frac{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \times \left[1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right]^{-1}. \quad (2.33)$$

O denominador da expressão acima é conhecido como “função dielétrica” e é expresso como $D(\mathbf{k}, ip)$:

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (2.34)$$

Com a intenção de simplificar a expressão acima, vamos escrever a velocidade em termos de sua componente paralela a \mathbf{k} , que vamos denotar por u , da seguinte forma:

$$u = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} f_0(u) &= \int d^2v_{\perp} f_0(\mathbf{v}), \\ \hat{f}_{\mathbf{k}}(u) &= \int d^2v_{\perp} \hat{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Colocando $D(\mathbf{k}, ip)$ em termos de u , obtemos a função dielétrica para ondas eletrostáticas de frequência $\omega = ip$

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int du \frac{\partial_u f_0(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} \quad ; \text{Re}\{p\} \geq p_0, \quad (2.37)$$

que, junto com

$$\hat{f}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{p + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \left[f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0) + \frac{e}{m_e} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0) \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \right] \quad (2.38)$$

e

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{-i}{D(\mathbf{k}, ip)} \frac{4\pi e}{|\mathbf{k}^3|} \int du \frac{f_{\mathbf{k}}(u, t=0)}{u - ip/|\mathbf{k}|}, \quad (2.39)$$

forma o sistema de equações que precisamos solucionar⁴.

Conhecendo $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$, precisamos aplicar a transformada de Laplace inversa para obter $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t)$ e $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$. As respectivas transformadas inversas são dadas por

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} dp \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{pt}, \quad (2.40)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} dp \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} e^{pt}, \quad (2.41)$$

⁴ Notas de aula do professor Luiz Fernando Ziebell no Instituto de Física da UFRGS, sob o título de *FIP20810, Tópicos em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, divulgadas aproximadamente em outubro de 2014. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf>. Acesso em março de 2015.

onde p_0 é uma constante positiva que garante a convergência da integral, com $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ dadas pelas equações (2.38) e (2.39), respectivamente.

A integração das transformadas é feita ao longo de uma linha, paralela ao eixo imaginário, que deve estar localizada em $\text{Re}\{p\} \geq p_0$, com p_0 suficientemente grande para que as integrais que definem as transformações de Laplace convirjam. Portanto, todas as singularidades de $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ e de $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ devem estar à esquerda do contorno de integração. Para obter a solução completa do sistema, ou seja, as funções $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ e $\Phi(\mathbf{r}, t)$, para $t > 0$, devemos aplicar a transformada de Fourier inversa à $f_k(\mathbf{v}, t)$ e $\Phi_k(t)$. Mas, para aplicarmos o teorema dos resíduos, $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ tem de satisfazer duas condições: *a*) ser analítica, exceto por um número de polos isolados; *b*) ter uma continuação analítica da metade à direita do plano complexo p , até a metade esquerda do mesmo plano. Contudo, as integrais envolvidas na transformada inversa de $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ não possuem solução analítica, exceto em alguns poucos casos particulares [13]. As soluções para esse tipo de problema são obtidas levando em conta o comportamento de $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$, para t grande (mas ainda pequeno, comparado com o tempo de relaxação colisional τ) é determinado pela natureza de seus polos e são esses pontos de singularidade que definem os modos normais de oscilação que ocorrem no plasma. Isso quer dizer que qualquer efeito que não seja relacionado às singularidades, é transiente e que, para tempos grandes, somente os modos normais de oscilação permanecem. Uma explicação detalhada a esse respeito, pode ser consultada em [12]. Essas soluções assintóticas podem ser encontradas empregando um método desenvolvido pelo físico russo Lev Landau e é isso que será feito na próxima subseção.

2.2.3 Solução assintótica e o método de Landau

Para que obtenhamos a solução do nosso sistema de equações, precisamos resolver a equação (2.39), onde temos que lidar com integrais que possuem polos no denominador. Já discutimos na subseção anterior as dificuldades que um tratamento analítico dessas integrais nos impõem e, com isso, decidimos aplicar o método de Landau, que leva em conta o comportamento assintótico do sistema, para solucioná-las.

O método de Landau consiste em deslocar o caminho de integração de maneira que o que antes estava definido para $\text{Re}\{p\} \geq p_0$ fique, após o deslocamento, também definido para $\text{Re}\{p\} < 0$. Esse novo contorno deve ser deformado de maneira que ele não passe pelos polos de $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$. O mesmo vale para a integral que aparece em $D(\mathbf{k}, ip)$, pois se os valores de p mudam com o deslocamento da integral no numerador de $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$, eles devem ser deslocados também na integral presente no seu denominador. Uma representação gráfica desse contorno pode ser vista na Figura 2.1. Essa técnica foi desenvolvida por Landau em 1946, que inovou ao abordar a solução do sistema Vlasov-Maxwell como um problema de valor inicial, tendo obtido resultados interessantes que discutiremos mais adiante.

Prosseguindo, vemos que a equação (2.39) tem a seguinte forma

$$h(p) = \int du \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|}, \quad \text{Re}\{p\} > 0, \quad (2.42)$$

onde $f(u)$ deve ser analítica em $|u| < \infty$, exceto por um número isolado de polos. O caminho de integração contorna o ponto $u = ip/|\mathbf{k}|$ por baixo, de maneira que ele não passe sobre o ponto de singularidade, nem esteja acima dele. Como podemos ter polos acima, ou abaixo do eixo $\text{Re}\{u\}$, precisamos separar nossa integral em duas partes, para que nosso contorno esteja sempre

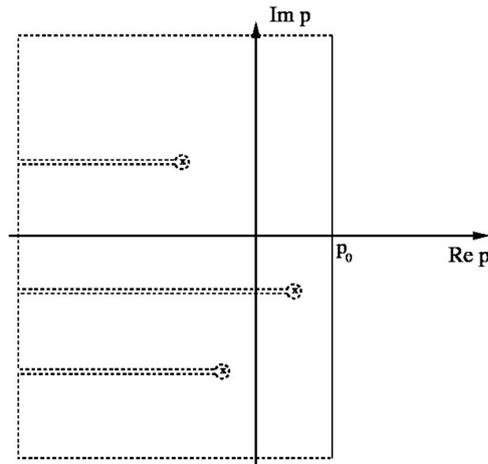


Figura 2.1: Contorno de integração no plano complexo.

abaixo dos pontos de singularidade:

$$h(p) = \begin{cases} \int du \frac{f(u)}{u-ip/|\mathbf{k}|}, & \text{se } \text{Re}\{p\} > 0; \\ \int du \frac{f(u)}{u-ip/|\mathbf{k}|} + 2i\pi f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right), & \text{se } \text{Re}\{p\} \leq 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

onde o termo $2i\pi f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right)$ é o chamado “prolongamento analítico”.

Aplicando o método em $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$, temos as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \frac{1}{2i\pi} \int_{p_0-i\infty}^{-\alpha-i\infty} dp \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} \\ & + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} dp \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\alpha+i\infty}^{p_0+i\infty} dp \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde R_j , representa os resíduos no polo do integrando - obtido tomando o limite $R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$ -, sendo p_j as singularidades. Analisando as integrais da equação acima, vemos que o segundo e o quarto termo tem uma contribuição muito pequena quando $p \rightarrow \infty$. O terceiro termo cai exponencialmente com o tempo quando $t \rightarrow \infty$. Lembrando que o tempo, embora seja considerado infinito neste processo, ainda é muito pequeno quando comparado ao tempo de relaxação colisional. Com isso, ficamos apenas com [12]

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{j=1} R_j e^{p_j t}, \quad (2.45)$$

ou seja, $\Phi_{\mathbf{k}}$ não depende das condições iniciais. Então, não temos mais as dificuldades associadas à integração no plano complexo, tendo em vista que a solução obtida depende apenas de resíduos nos pontos do plano complexo determinados por $D(\mathbf{k}, ip) = 0$. Isso significa que podemos determinar os pontos de singularidade resolvendo a seguinte relação³:

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int_L du \frac{\partial_u f_0}{u - ip/|\mathbf{k}|} = 0, \quad (2.46)$$

³ Notas de aula do professor Luiz Fernando Ziebell no Instituto de Física da UFRGS, sob o título de *FIP20810, Tópicos em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, divulgadas aproximadamente em outubro de 2014. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf>. Acesso em março de 2015.

onde o índice “ L ” da integral indica que a integração está sendo feita com o uso do contorno de Landau.

A localização da parte real dos polos, com relação ao eixo imaginário de p_j , nos indica o tipo de processo que está ocorrendo no plasma. Quando os polos localizam-se à esquerda do eixo, temos que $\text{Re}\{p_j\} < 0$, nesse caso, ocorre um amortecimento das oscilações presentes no plasma; e quando os polos localizam-se à direita do eixo, temos $\text{Re}\{p_j\} > 0$, indicando a ocorrência de instabilidade, com amplificação das oscilações. A parte imaginária de p_j representa os modos de oscilação presentes no plasma, onde cada termo da soma em j corresponde a um modo específico de oscilação amortecida ou amplificada.

Definindo a variável $\omega \equiv ip$, podemos colocar as equações (2.45) e (2.46) em uma forma mais familiar. É importante salientar que, ao definir ω como sendo o imaginário de uma variável complexa, invertemos as relações entre as partes real e imaginária, com a descrição das propriedades do plasma, com a parte real de ω representando as oscilações e a parte imaginária correspondendo ao amortecimento ou amplificação dessas oscilações. Nesse ponto também é interessante definir a normalização da nossa função de distribuição de equilíbrio, que é dada por:

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 F_0(\mathbf{v}), \quad \int d^3v F_0(\mathbf{v}) = 1. \quad (2.47)$$

Reescrevendo (2.45) com o uso da nova variável, temos:

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{j=1} R_j e^{-i\omega_j t}, \quad (2.48)$$

onde $\omega_j = \omega_r + i\omega_i$.

Em (2.46), além da introdução da variável ω , que é satisfeita por ω_j , a normalização da função de distribuição introduziu a densidade de equilíbrio dos elétrons, dada por n_0 , e com isso podemos identificar o quadrado da frequência de plasma para elétrons ω_{pe}^2 ,

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}, \quad (2.49)$$

obtendo a forma mais conhecida da chamada “equação de dispersão”:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_L du \frac{\partial_u F_0}{u - \omega/|\mathbf{k}|} = 0, \quad (2.50)$$

onde o contorno L , em torno dos modos normais de oscilação, pode ser visto na [Figura 2.2](#).

Normalmente, ocorre que $\text{Re}\{\omega(\mathbf{k})\} \gg \text{Im}\{\omega(\mathbf{k})\}$, nesse caso, as oscilações perduram por um longo tempo depois de ocorrida a perturbação inicial. Esses modos oscilatórios, de frequência bem definida, são conhecidos como os modos normais de oscilação do plasma e satisfazem a equação (2.50).

2.2.4 Relação de dispersão para ondas de Langmuir

Vamos agora fazer o uso da equação (2.50) para obter a relação de dispersão para ondas eletrostáticas de alta frequência em um plasma em equilíbrio termodinâmico. Como já discutido

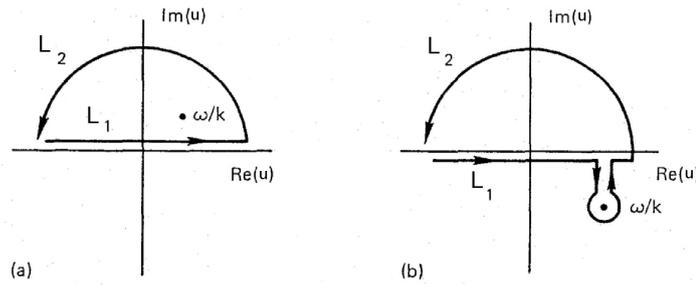


Figura 2.2: Limite assintótico do contorno de Landau. Em (a) $\text{Im}\{\omega/k\} > 0$ indica a presença de instabilidade e em (b) $\text{Im}\{\omega/k\} < 0$ indica a presença de amortecimento. Figura adaptada de [4].

no início dessa seção, vamos supor os íons como um fundo estático. Para os elétrons, vamos supor uma função de distribuição de velocidades de equilíbrio Maxwelliana:

$$F_0(u) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_e u^2}{2T_e}}, \quad (2.51)$$

onde T_e é a temperatura dos elétrons e u é a velocidade paralela à direção de propagação das ondas. Derivando (2.51) com relação a u ,

$$\frac{\partial F_0}{\partial u} = -\frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{m_e}{2T_e} \right)^{3/2} u e^{-\frac{m_e u^2}{2T_e}}, \quad (2.52)$$

e substituindo em (2.50), temos

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{m_e}{2T_e} \right)^{3/2} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_L du \frac{u e^{-\frac{m_e u^2}{2T_e}}}{u - \omega/|\mathbf{k}|} = 0. \quad (2.53)$$

Contudo, a equação acima não pode ser resolvida pelo teorema dos resíduos, pois quando o contorno de integração é fechado, no infinito, a integral diverge. No entanto, dentro de certos limites, algumas aproximações podem ser feitas.

Vamos começar simplificando a equação (2.53), escrevendo a velocidade térmica como $u_{te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ e fazendo uma mudança de variáveis, com $z = \omega/k u_{te}$ e $y = u/u_{te}$, com $dy = du/u_{te}$. Então, após algumas manipulações, ficamos com³

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{u_{te}^2 k^2} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_L dy \frac{e^{-y^2}}{y - z} \right]. \quad (2.54)$$

O último termo que aparece entre colchetes em (2.54) é chamada de “função de dispersão de plasma” ou “função de Fried-Conte”:

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L dy \frac{e^{-y^2}}{y - z}, \quad (2.55)$$

³ Notas de aula do professor Luiz Fernando Ziebell no Instituto de Física da UFRGS, sob o título de *FIP20810, Tópicos em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, divulgadas aproximadamente em outubro de 2014. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf>. Acesso em março de 2015.

onde L é o contorno de Landau e deve passar ao longo do eixo real de y , contornando por baixo o polo em $y = z$. Essa função teve suas propriedades tabuladas por Fried & Conte em [15]. Com isso, nossa relação de dispersão fica da seguinte forma

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{u_{te}^2 k^2} [1 + z Z(z)]. \quad (2.56)$$

Normalmente, (2.54) precisa ser resolvida numericamente. Entretanto, tomando certos limites, podemos empregar algumas propriedades da função $Z(z)$ e obter resultados analíticos, sendo esse o caso das ondas de Langmuir.

Para ondas de alta frequência, com $v_\phi \gg u_{te}$, onde $v_\phi = \omega/k$ é a velocidade de fase das ondas do plasma, podemos supor que $|z| \gg 1$. E, decompondo a variável complexa z em parte real e imaginária, $z = x + iy$, sendo $|\text{Im}\{z\}| \ll 1$, a função $Z(z)$ pode ser escrita analiticamente com o uso da relação de Plemelj [14]:

$$Z(z) = i\sqrt{\pi} e^{-z^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - z}, \quad (2.57)$$

onde \mathcal{P} é o valor principal da integral. Para calcular a integral, usamos a condição de grande argumento, $|z| \gg 1$, e expandimos o termo $1/(y - z)$ como uma série em potências inversas de z :

$$\frac{1}{y - z} = \frac{-1}{z(1 - y/z)} = -\frac{1}{z} \left[1 + \left(\frac{y}{z}\right) + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \dots \right]. \quad (2.58)$$

Substituindo esta série na integral em (2.57) e efetuando a integração, obtemos

$$Z(z) = i\sqrt{\pi} e^{-z^2} - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right). \quad (2.59)$$

Truncando a série acima no terceiro termo, ficamos com a seguinte expressão para $D(\mathbf{k}, \omega)$:

$$D(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 + 2z^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[i\sqrt{\pi} z e^{-z^2} - \frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} \right] = 0, \quad (2.60)$$

onde usamos $z = \omega/k u_{te}$.

Com essa aproximação, podemos separar a relação de dispersão em parte real, D_r , e imaginária, D_i , e considerando o caso em que $|\omega_i| \ll |\omega_r|$, podemos expandí-la em torno de ω_r :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &\approx D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} \\ &= D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left[i \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} - \frac{D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_r}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Para $|\omega_i| \ll |\omega_r|$, a parte real da relação de dispersão pode ser obtida com a seguinte aproximação:

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) \approx 0, \quad (2.62)$$

que, conseqüentemente, nos permite escrever uma expressão para a parte imaginária

$$\omega_i = -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\left. \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_r}}. \quad (2.63)$$

A parte real para a relação de dispersão para ondas eletrostáticas de alta frequência, com o uso de (2.62) e lembrando que $z = \omega/k u_{te}$, é dada por

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 3 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k^2 u_{te}^2}{\omega^2} = 0. \quad (2.64)$$

Que após algumas manipulações algébricas, resulta em

$$\omega = \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 12k^2 u_{te}^2 / \omega_{pe}^2} \right]. \quad (2.65)$$

E usando o fato de que estamos considerando oscilações nas quais $k^2 u_{te}^2 / \omega_{pe} \ll 1$, podemos aproximar a expressão acima como

$$\omega^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \left(1 + 6 \frac{k^2 u_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \right) \right]. \quad (2.66)$$

A raiz com sinal negativo será imaginária e estamos querendo obter ω_r , então iremos descartá-la. A raiz com sinal positivo é real e resulta em

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 u_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \right). \quad (2.67)$$

Essa raiz é consistente, uma vez que ω_r é próxima de ω_{pe} , que é um resultado bem conhecido da teoria de fluidos para plasmas. Então a condição usada para obtê-la, $k^2 u_{te}^2 / \omega_{pe} \ll 1$, está de acordo com a nossa aproximação inicial $\omega/k \gg u_{te}$. Portanto, a parte real da relação de dispersão para ondas de Langmuir fica

$$\omega_r \approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 u_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \right). \quad (2.68)$$

Para a parte imaginária, usaremos (2.63), então vamos começar identificando $D_i(\mathbf{k}, \omega_r)$

$$D_i(\mathbf{k}, \omega_r) = 2iz^3 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sqrt{\pi} e^{-z^2}, \quad (2.69)$$

e a derivada $\partial_\omega D_r(\mathbf{k}, \omega_r)$

$$\begin{aligned} \frac{D_r(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 3 \frac{\omega_{pe}^2 k^2 u_{te}^2}{\omega^4} \right] \\ &= 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^3} + 12 \frac{\omega_{pe}^2 k^2 u_{te}^2}{\omega^5} \approx 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^3}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Das expressões acima, obtemos a frequência imaginária:

$$\omega_i = - \left[\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 u_{te}} e^{-\left(\frac{\omega^2}{2k^2 u_{te}}\right)} \right]_{\omega_r}. \quad (2.71)$$

Fazendo $\omega = \omega_r$, podemos usar a aproximação $\omega_r \approx \omega_{pe}$. Porém essa aproximação é válida somente para a frequência fora do argumento da exponencial, visto que a função exponencial é sensível a pequenas diferenças em seu argumento. Então, ficamos com

$$\omega_i \approx - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^4}{k^3 u_{te}} \exp \left[- \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 u_{te}} \left(1 + 3 \frac{k^2 u_{te}}{\omega_{pe}^2} \right) \right]. \quad (2.72)$$

Sendo

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (2.73)$$

onde a parte real determina a frequência e a parte imaginária representa os efeitos das perturbações sobre a função de distribuição. Neste caso, como ω_i é negativo, temos um amortecimento³.

É bom lembrar que (2.68) e (2.72), são válidas para a região do espectro das oscilações de Langmuir cujo comprimento de onda é consideravelmente maior do que o comprimento de Debye, isto é, $k\lambda_D \ll 1$, com $\lambda_D = u_{te}/\omega_{pe}$ [12]; o que equivale à nossa aproximação inicial, na qual supomos velocidade de fase muito maior do que a velocidade térmica do elétrons, $v_\phi \gg u_{te}$.

2.2.5 Amortecimento de Landau

O método descrito na subseção anterior foi apresentado em 1946 por Landau, como uma forma de tratar corretamente as integrais com polos, que aparecem ao tentarmos solucionar a equação de Vlasov. Desse tratamento surgiram essas frequências imaginárias que, inicialmente, pareciam apenas um resultado abstrato de uma integração no plano complexo. Segue que, ao interpretarem esses resultados, o processo físico que resultava dessa interpretação era ainda mais estranho: um amortecimento das oscilações que parecia ocorrer sem dissipação colisional. Esse fenômeno ficou conhecido como “amortecimento de Landau”, ou, em inglês, “*Landau damping*”.

As ondas presentes em um plasma com função de distribuição Maxwelliana, na presença de uma pequena perturbação, são amortecidas. Porém, esse processo não envolve interações partícula-partícula, como colisões, que dissipam energia. O que ocorre é um processo que envolve a interação entre essas ondas e as partículas do plasma. De acordo com a descrição teórica, esse processo ocorre via ressonância entre os elétrons que se movimentam com velocidade próxima à velocidade de fase das ondas e é proporcional à declividade da função de distribuição de equilíbrio - que deve ser negativa para que ocorra amortecimento. Embora, inicialmente, o amortecimento de Landau tenha sido considerado apenas um resultado teórico, sem conexão com o que acontece em plasmas reais, ele foi detectado experimentalmente, pela primeira vez, em um plasma de laboratório por Malmberg and Wharton, no ano de 1966. Desde então diversos experimentos em laboratórios e observações em plasmas espaciais também detectaram tais efeitos [14]. Hoje em dia é um fenômeno bem conhecido, inclusive com aplicações em outras áreas, como no tratamento cinético da formação de galáxias [4].

Em plasmas que possuem uma função de distribuição de velocidades na qual a amplitude decresce com o aumento do módulo da velocidade, como nas distribuições Maxwellianas, existem mais partículas com velocidade menor que a velocidade de fase, do que partículas com velocidade maior. Logo, existem mais partículas que podem ser aceleradas pela onda, do que partículas que possam ser freadas por ela, conseqüentemente haverá mais partículas ganhando energia das ondas, do que partículas cedendo energia para elas, levando a um amortecimento das oscilações. Esse amortecimento não envolve a dissipação da energia das ondas, mas sim a transferência dessa energia para as partículas via ressonância. Entretanto, se adicionarmos um feixe de elétrons a um plasma Maxwelliano, e se esse feixe for intenso o suficiente para que surja um segundo pico na região de velocidades que corresponde à velocidade do feixe, mesmo que esse pico seja muito menor do que a função de distribuição de equilíbrio, haverá

³ Notas de aula do professor Luiz Fernando Ziebell no Instituto de Física da UFRGS, sob o título de *FIP20810, Tópicos em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, divulgadas aproximadamente em outubro de 2014. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf>. Acesso em março de 2015.

uma região de derivada positiva, entre o feixe e o corpo da função de distribuição. Nesse caso, a presença da declividade positiva poderá dar origem a instabilidades. Então, podemos dizer que ocorre um efeito oposto ao amortecimento de Landau, ou seja, uma amplificação das oscilações nessa região, com as partículas do feixe cedendo energia para as ondas, também por ressonância. Nesse último caso, devido ao crescimento da amplitude das oscilações, elas tendem a afetar a forma da f_0 que, por sua vez, irá alterar o crescimento das oscilações. Portanto, se quisermos acompanhar a evolução desse processo ao longo do tempo, precisamos ir além da aproximação linear e incluir efeitos não lineares à teoria.

Cabe lembrar, por fim, que além dos fenômenos descritos nesse capítulo, onde, por estar mais de acordo com o trabalho principal a ser apresentado, consideramos apenas a dinâmica dos elétrons, mantendo os íons estáticos, a aproximação linear também é perfeitamente aplicável à dinâmica iônica. Basta que adotemos os limites e aproximações adequados à faixa de frequência da movimentação dos íons. O desenvolvimento da aproximação linear nesses limites pode ser visto em [12], onde o mesmo procedimento feito aqui é aplicado a um plasma Maxwelliano, para oscilações íon-acústicas.

Capítulo 3

Teoria de turbulência fraca

No capítulo anterior, supusemos que nossa função de distribuição era composta por uma função de equilíbrio, não oscilante, mais uma pequena perturbação. Então, ao aplicarmos a teoria linear, assumíamos que a amplitude dessas oscilações perturbativas era tão pequena que podíamos descartar os termos não lineares que apareciam na equação de Vlasov devido à presença dessas perturbações. Ao fazer isso, acabamos por desconectar completamente a função não oscilante da perturbação oscilante. Entretanto, a parte perturbativa da função de distribuição, de fato, afeta a função de equilíbrio, e esses efeitos, que normalmente são pequenos, tendem a aumentar conforme a amplitude das perturbações cresce [16].

Esses processos, conhecidos como “processos coletivos”, tem grande importância na dinâmica de um plasma e são, particularmente, associados a uma enorme variedade de instabilidades. Eles tem início quando uma pequena perturbação desloca um certo grupo de partículas carregadas, essa movimentação irá gerar campos eletromagnéticos que atuarão em outras partículas. Como discutido no capítulo anterior. O ponto aqui é que o aparecimento de uma instabilidade é acompanhado de um aumento na intensidade do campo elétrico, que pode atingir grandes valores. Consequentemente, mesmo que campos externos não estejam atuando sobre o plasma, campos relativamente fortes podem ocorrer espontaneamente devido ao crescimento das instabilidades. É importante mencionar que a presença de vários tipos de instabilidades é um dos principais atributos característicos de um plasma como estado da matéria [17].

Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância. Isso significa que ondas com diferentes vetores de onda e frequências não mais irão evoluir independentemente umas das outras, violando o princípio da superposição. Levando em conta que este princípio serve de base para as simplificações adotadas na teoria linear, permitindo que essas perturbações arbitrárias possam ser expressas como uma superposição dos modos normais de oscilação do plasma (justamente por evoluírem independentemente uns dos outros) [18], podemos perceber que a aproximação linear já não será suficiente para a descrição desses processos. Sendo assim, para descrevê-los, é necessário que adotemos uma abordagem não linear.

Os inúmeros efeitos não lineares que podem acontecer em um plasma, podem ser classificados de diversas formas. Porém, a mais básica de todas é quanto à intensidade desses efeitos. Em plasmas fracamente não lineares, a amplitude das ondas é pequena o suficiente para que a propagação das ondas seja tratada de acordo com a teoria linear, com a parte não linear sendo

responsável pelas fracas interações que ocorrem entre os modos de oscilação. Para o caso de não linearidades intensas, a aproximação linear deve ser abandonada completamente e os efeitos lineares devem ser incluídos nas equações diretamente. Neste trabalho abordaremos somente o primeiro caso, que é convencionalmente chamado de “teoria de turbulência fraca”.

A teoria de turbulência fraca pode ser discutida em termos de três interações básicas: a interação onda-partícula quasilinear, a interação onda-onda e a interação onda-partícula não linear [18]. Nas próximas seções, a formulação de cada uma dessas interações será elaborada e discutida dentro do contexto do trabalho principal a ser apresentado.

3.1 Formalismo quasilinear

Seguindo uma ordem de complexidade, vamos começar pelo mais simples dos processos não lineares abordados pela teoria de turbulência fraca, a teoria quasilinear. Nesta aproximação supomos que a amplitude das oscilações é tão pequena que podemos descartar as interações onda-onda, isto é, podemos ignorar a violação do princípio da superposição e dar um tratamento linear à propagação das ondas [18]. Sendo que o efeito das oscilações sobre a função de distribuição de equilíbrio é dado por efeitos não lineares.

O objetivo dessa seção é abordar essas características com mais detalhes, dando enfoque ao desenvolvimento matemático da teoria e ao significado físico dos resultados obtidos. A formulação apresentada é fortemente baseada em [16]. Alguns detalhes ou pontos discutidos foram baseados também em [14], [17], [18], [19], [20] e [21].

3.1.1 Sistema Vlasov-Maxwell no formalismo quasilinear

Vamos novamente supor um plasma homogêneo, não magnetizado e, inicialmente, em equilíbrio. Na ausência de colisões, a equação de movimento continua sendo a equação de Vlasov. Então, para partículas do tipo α , e considerando apenas oscilações eletrostáticas temos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \quad (3.1)$$

onde o campo elétrico \mathbf{E} é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.2)$$

Agora supomos que a função de distribuição f_α e o campo elétrico \mathbf{E} , que aparecem nas equações acima, são compostos pela soma entre uma parte de equilíbrio e uma perturbação infinitesimal, como segue

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1. \quad (3.4)$$

Até aqui a formulação da teoria quasilinear é idêntica à formulação feita para a teoria linear. Contudo, ambas diferem quanto a uma hipótese básica: a variação temporal de $f_{\alpha 0}$. Na teoria linear, a função de distribuição de equilíbrio era independente do tempo, enquanto no

formalismo quasilinear $f_{\alpha 0}$ varia temporalmente. No entanto, a condição de validade deste formalismo exige que essa variação seja muito lenta, quando comparada à variação temporal das perturbações. A evolução temporal das quantidades de ordem zero é introduzida à formulação ao tomarmos as médias espaciais de f_{α} e de \mathbf{E} .

Prosseguindo, a média da função de distribuição de velocidades é expressa da seguinte forma:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) \rangle + \langle f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (3.5)$$

onde

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 r. \quad (3.6)$$

As flutuações relacionadas a $f_{\alpha 1}$ são aleatórias, portanto a média é nula e, conseqüentemente, a média da função de distribuição será a própria função de equilíbrio:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t). \quad (3.7)$$

Para o campo elétrico, vamos supor que o campo de equilíbrio seja nulo: $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$. Com isso ficamos com

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1. \quad (3.8)$$

Como as flutuações do campo também são aleatórias, o mesmo argumento usado para a função de distribuição se aplica a este caso. Portanto, de acordo com (3.8), temos que a média do campo elétrico é nula

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Podemos olhar para a questão do campo médio de uma outra forma. A média do campo em termos do negativo do gradiente do potencial é dada por

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{V} \int \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d^3 r. \quad (3.10)$$

Se considerarmos uma integração sobre todo espaço, e levando em conta que o potencial tende a zero no limite em que $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, vemos que $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. O mesmo resultado seria também obtido no caso de uma região finita com condições de contorno iguais nos limites diametralmente opostos. A equação de Vlasov em termos das médias tem a seguinte forma

$$\frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (3.11)$$

Na forma como está escrita, a equação acima não nos fornece muita informação. Todavia, podemos escrevê-la em termos da função de distribuição total, já levando em conta o resultado obtido em (3.7). Com isso obtemos uma forma muito mais elucidativa para a média da equação de Vlasov,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left\langle \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0. \quad (3.12)$$

Vemos que no segundo termo da expressão acima temos a derivada espacial de $f_{\alpha 0}$, porém, como nossa função de distribuição de equilíbrio é homogênea, este termo é nulo. Assim como o terceiro termo, que também é nulo, visto que $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Então, ao eliminarmos os

termos nulos de (3.12) e isolarmos $\partial f_{\alpha 0}/\partial t$, obtemos uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.13)$$

Podemos ver em (3.13), que a variação temporal da função de distribuição de equilíbrio depende da média do produto das flutuações do campo elétrico, com as flutuações da função de distribuição no espaço de velocidades - o que a define como uma variação de segunda ordem.

Substituindo a variação temporal da função de distribuição de equilíbrio em seu respectivo termo na equação (3.1), obtemos

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \underbrace{\left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right]}_{\text{termos não lineares}} = 0. \quad (3.14)$$

Esse é um ponto importante para a discussão de alguns aspectos da teoria quasilinear, pois é onde descartamos os termos não lineares, assinalados na equação acima como “termos não lineares”. Se não fizéssemos isso, ficaríamos com um sistema de equações aberto e, conseqüentemente, sempre precisaríamos adicionar termos de ordem $n + 1$, para obter equações que descrevem a evolução temporal do sistema que envolvem flutuações de ordem n . Lembrando que esses termos só podem ser descartados porque estamos supondo flutuações infinitesimais, logo o produto entre elas será ainda menor. Com isso obtemos uma expressão para a equação de Vlasov que é formalmente a mesma obtida na aproximação linear:

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \approx 0. \quad (3.15)$$

Entretanto, neste caso, a função de distribuição de equilíbrio varia no tempo de acordo com a equação (3.13), que envolve termos de segunda ordem. Do ponto de vista da teoria quasilinear isso faz todo sentido, uma vez que a validade dessa aproximação é diretamente ligada ao fato de que a variação temporal de $f_{\alpha 0}$ seja lenta - muito mais lenta do que a variação temporal das flutuações. Por isso que mesmo que esses termos não contribuam na equação de Vlasov, por serem pequenos, eles podem ser empregados para obter a evolução temporal da função de distribuição de equilíbrio.

Portanto, a equação (3.15), junto com as equações (3.13) e (3.2), forma o sistema de equações acopladas da teoria quasilinear, para oscilações eletrostáticas em um plasma homogêneo e não magnetizado.

3.1.2 Difusão quasilinear

No presente trabalho, do ponto de vista da teoria quasilinear, estamos preocupados somente em obter resultados de instabilidades geradas por efeitos não lineares. Portanto, iremos abordar apenas o caso em que existe uma região em que $\partial f_0/\partial \mathbf{v} > 0$, isto é, uma região que favorece o crescimento das instabilidades, como discutido no final do capítulo dois. Também vamos restringir nossa abordagem às oscilações de alta frequência, associadas à movimentação dos elétrons. Sendo assim, podemos considerar os íons como um meio estático neutralizador, o que nos permite abandonar o somatório e o índice α . Novamente, essa restrição está sendo imposta

com a intenção de aproximarmos a formulação da teoria, com sua aplicação no assunto principal do presente trabalho. O formalismo estendido para o caso de um plasma com multicomponentes pode ser visto em [19].

Prosseguindo, vamos supor dependência harmônica para as flutuações da função de distribuição e do campo elétrico:

$$\begin{aligned} f_1 &= \hat{f}_{1\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde as variáveis com “^” denotam as respectivas transformadas de f_1 e de \mathbf{E} .

Usando a dependência harmônica podemos escrever (3.15) em termos das variáveis do espaço de Fourier:

$$-i(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \hat{f}_{1\mathbf{k}} - \frac{e}{m_e} \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.17)$$

E, isolando $\hat{f}_{1\mathbf{k}}$, ficamos com uma expressão para a evolução das flutuações da função de distribuição

$$\hat{f}_{1\mathbf{k}} = \frac{e}{m_e} \frac{\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)}. \quad (3.18)$$

Como estamos considerando apenas oscilações eletrostáticas, é conveniente escrevermos $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ em termos do potencial elétrico

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}, \quad (3.19)$$

onde $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$. Substituindo em (3.18), obtemos:

$$\hat{f}_{1\mathbf{k}} = -\frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}. \quad (3.20)$$

A equação acima deve ser substituída na equação de Poisson (2.22), resultando em

$$k^2 \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} d^3v. \quad (3.21)$$

O desenvolvimento da expressão acima, para a obtenção da equação de dispersão, é idêntico ao demonstrado no capítulo anterior, na aproximação linear, logo, omitiremos esses passos e iremos direto ao resultado:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d^3v = 1. \quad (3.22)$$

Podemos ver que a equação (3.22) é a mesma equação de dispersão obtida na teoria linear. No entanto, aqui, na teoria quasilinear, a função de distribuição de equilíbrio, f_0 , representa a média espacial da função de distribuição de velocidades e varia lentamente com o tempo. Cabe lembrar que o uso dessa equação de dispersão só se justifica quando as condições $|\omega_i| \ll \omega_r$ e $|\omega_i| \ll kv_{te}$ são satisfeitas. Nesse caso, substituímos a função de distribuição inicial pela evolução temporal da f_0 , chamada de “distribuição de fundo”, que é dada por

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.23)$$

Para obter a evolução temporal de f_0 no espaço de Fourier, vamos substituir $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $f_1(\mathbf{v}, t)$, em (3.23), pelas suas respectivas transformadas, como segue:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left\langle \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i[\mathbf{k}-\omega(\mathbf{k})t]} \cdot \int \frac{d^3 k'}{8\pi^3} \frac{\partial \hat{f}_{1\mathbf{k}'}(\mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} e^{i[\mathbf{k}'-\omega(\mathbf{k}')t]} \right\rangle. \quad (3.24)$$

Colocando (3.24) em termos do potencial $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ e já efetuando a média, temos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_V \left[\int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \int \frac{d^3 k'}{8\pi^3} (-i\mathbf{k}) \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t]} \hat{f}_{1\mathbf{k}'} e^{i[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k}')t]} \right] d^3 r, \quad (3.25)$$

onde, levando em conta que somente $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ tem dependência em \mathbf{v} , podemos colocar para fora da integral a derivada com relação à velocidade. Se invertermos a ordem de integração, (3.25) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \int d^3 k' (-i(-\mathbf{k})) \left[\frac{1}{8\pi^3} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3 r \right] \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{f}_{1\mathbf{k}'} e^{-i[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}')t]}, \quad (3.26)$$

em que o termo isolado entre colchetes, no lim $V \rightarrow \infty$, é a definição da delta de Dirac:

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3 r = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (3.27)$$

Aplicando a definição acima em (3.26), obtemos a seguinte expressão para a distribuição de fundo:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \mathbf{k} \hat{\Phi}_{-\mathbf{k}} \hat{f}_{1\mathbf{k}} e^{-i[\omega(-\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k})t]}. \quad (3.28)$$

Coeficiente de difusão quase-linear

Com a equação para a evolução temporal da função de distribuição de equilíbrio conhecida, precisamos de uma expressão que descreva como essa variação irá atuar no espaço de velocidades. Para isso é necessário expressar a equação (3.28) em termos de f_0 . Então, vamos começar verificando algumas propriedades de simetria das variáveis $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ e $\omega(\mathbf{k})$ no espaço de Fourier.

Tendo em mente que o potencial elétrico $\Phi(\mathbf{r}, t)$ deve ser real em toda parte, temos a seguinte relação de simetria:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^*(\mathbf{r}, t), \quad (3.29)$$

onde o termo com $*$ denota o complexo conjugado de $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Podemos usar essa propriedade para analisar a simetria do potencial, reescrevendo (3.29) em termos de sua transformada de Fourier [14],

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega(\mathbf{k},t)t} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t}. \quad (3.30)$$

Invertendo o sinal da variável de integração k e dos limites de integração do lado direito de (3.30), percebemos que o resultado dessa integral permanece inalterado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t} = \int_{\infty}^{-\infty} d^3(-k) \hat{\Phi}_{-\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(-\mathbf{k},t)t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \hat{\Phi}_{-\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(-\mathbf{k},t)t}. \quad (3.31)$$

Comparando a relação acima com o lado esquerdo de (3.30), verificamos que também há simetria do potencial eletrostático no espaço de Fourier:

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{\Phi}_{-\mathbf{k}}^*(t). \quad (3.32)$$

E, por ser complexa, a propriedade de simetria da relação de dispersão é a seguinte:

$$\omega(\mathbf{k}, t) = -\omega^*(-\mathbf{k}, t), \quad (3.33)$$

o que pode ser constatado em (3.31).

Usando (3.33), podemos reescrever o argumento da exponencial que aparece em (3.28) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega(-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) &= \omega_r(-\mathbf{k}) + i\omega_i(-\mathbf{k}) + \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k}) \\ \omega(-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) &= 2i\omega_i(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando as propriedades de simetria recém obtidas à (3.28), já substituindo o argumento da exponencial obtido em (3.34), temos

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = i \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3k}{8\pi^3} \mathbf{k} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{f}_{1\mathbf{k}} e^{2\omega_i(\mathbf{k})t}. \quad (3.35)$$

Mas,

$$\hat{f}_{1\mathbf{k}} = -\frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}, \quad (3.36)$$

então, substituindo em (3.35), obtemos

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3k}{8\pi^3} \frac{\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^2}{i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (3.37)$$

lembrando que

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^2 = \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^* e^{2\omega_i(\mathbf{k})t}. \quad (3.38)$$

A equação (3.37) expressa o chamado “coeficiente de difusão quasilinear” e relaciona a evolução temporal de f_0 com uma deformação do espaço de velocidades. Essa deformação parte da região onde existem partículas em ressonância com as ondas de Langmuir e vai se espalhando, como uma difusão de velocidades, deformando a função de distribuição.

Expressando o coeficiente de difusão em termos do campo elétrico, com o uso da relação

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^*}{k^2}, \quad (3.39)$$

e, escrevendo o produto escalar do numerador na forma de somatório, obtemos uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida como “equação de difusão quasilinear”:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \right], \quad (3.40)$$

onde D_{ij} expressa o coeficiente de difusão quasilinear, cuja forma mais conhecida é a seguinte

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m_e^2} \frac{1}{V} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \frac{\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^*}{ik^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} k_i k_j. \quad (3.41)$$

Aqui cabe uma explicação a respeito do nome dado ao coeficiente D_{ij} . Embora a equação (3.41) relacione a lenta evolução temporal da função de distribuição com a média quadrática das oscilações rápidas do campo elétrico e , com isso, pareça uma equação não linear, a evolução temporal da amplitude dessas oscilações é dada por efeitos lineares. Por isso chamamos D_{ij} de coeficiente de difusão quasilinear. Vamos obter a evolução dessas oscilações na próxima subseção.

3.1.3 Densidade espectral

Anteriormente obtivemos o coeficiente de difusão quasilinear, que relaciona as ondas geradas por efeitos não lineares à dispersão das mudanças na forma da função de distribuição. Contudo, ainda não sabemos como a amplitude dessas instabilidades evolui temporalmente e como se relacionam com a distribuição de fundo. E é isso que investigaremos a seguir. Vamos começar tomando a média do quadrado do campo elétrico, dividida por 8π

$$\frac{\langle \hat{E}_k^2 \rangle}{8\pi} = \frac{1}{V} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \int d^3k' \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}'}^* \left[\int \frac{d^3r}{8\pi^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (3.42)$$

onde, assinalada entre colchetes, temos a definição da delta de Dirac. Aplicando as propriedades da delta, ficamos com

$$\frac{\langle E_k^2 \rangle}{8\pi} = \frac{1}{V} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^* = \int d^3k \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.43)$$

A quantidade definida na expressão acima é chamada de “densidade espectral de energia elétrica”. Ela tem seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) \equiv \frac{1}{8\pi V} \frac{|\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t)|^2}{8\pi^3}, \quad (3.44)$$

e representa a intensidade espectral das flutuações que ocorrem no plasma, sendo que essas flutuações devem satisfazer a relação de dispersão.

A variação temporal da densidade espectral $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ ocorre conforme as ondas do plasma vão sendo amplificadas (ou absorvidas). Essas ondas oscilam com a parte real da frequência determinada pela relação de dispersão e , e como estamos considerando que $\omega_i \ll \omega_r$, sua amplitude é lentamente variável, visto que essa variação depende da parte imaginária da frequência [21, 22]. Portanto, as amplitudes dessas ondas são proporcionais a $e^{\omega_i t}$, de modo que podemos escrever a dependência temporal da amplitude do espectro como

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{8\pi V} \frac{|\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi^3} e^{2\omega_i(\mathbf{k})t} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{2\omega_i(\mathbf{k})t}, \quad (3.45)$$

ou então, na forma de equação diferencial:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.46)$$

Substituindo (3.44) em (3.41), obtemos uma expressão que correlaciona o crescimento das ondas no plasma, com os efeitos de difusão da função de distribuição de velocidades, em termos da densidade espectral

$$D_{ij} = -\frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{i 8\pi \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{k^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} k_i k_j. \quad (3.47)$$

No entanto, a equação (3.47), com uma quantidade complexa, ω , no denominador, não se mostra muito promissora. Contudo, podemos colocá-la em uma forma mais conveniente se a multiplicarmos no denominador e no numerador pelo complexo conjugado de $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega$, da seguinte forma

$$D_{ij} = -8\pi \frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r + i\omega_i) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{k^2[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2]} k_i k_j. \quad (3.48)$$

E, usando as simetrias de $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ e de $\omega(\mathbf{k})$, podemos ver que a parte imaginária dessa expressão é nula. Ficamos então com

$$D_{ij} = 8\pi \frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{\omega_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{k^2[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2]} k_i k_j. \quad (3.49)$$

No limite de validade da teoria quasilinear, no qual supomos que a amplitude dos campos perturbativos varia lentamente, podemos aplicar o seguinte limite matemático

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0} \frac{\omega_i}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2} = \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \quad (3.50)$$

No contexto da teoria quasilinear, a delta, resultante do processo de limite descrito acima, é associada com a condição de ressonância $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, em que \mathbf{v} é a velocidade da partícula que interage com ondas de vetor de onda \mathbf{k} . Quando essa condição de ressonância é satisfeita, a partícula mantém uma fase constante com relação à onda, sendo efetivamente acelerada pelo campo elétrico, essencialmente constante, que a onda exerce sobre ela [18].

Substituindo (3.50) em (3.49), ficamos com a seguinte expressão para o coeficiente de difusão quasilinear

$$D_{ij} = 8\pi \frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{k_i k_j}{k^2} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \quad (3.51)$$

A equação (3.51), junto com as equações (3.40) e (3.46), respectivamente reproduzidas logo abaixo,

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \right], \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.53)$$

formam o conjunto completo e auto-consistente de equações da teoria quasilinear, para um plasma não magnetizado, no qual atuam apenas ondas eletrostáticas de alta frequência. A parte imaginária das ondas, ω_i , a variável responsável pela evolução do espectro, varia linearmente e é obtida através da solução da relação de dispersão, que depende da distribuição de fundo. Enquanto esta última varia sob ação de interações não lineares entre os modos normais de oscilação.

Analisando o sistema de equações acima com um pouco mais de atenção, percebemos que a difusão no espaço de velocidades, da forma como é descrita pela equação (3.40), leva a uma redução na declividade da derivada $\partial f_0/\partial v$, isto é, ocorre um achatamento da função de distribuição naquela região. Se a função de distribuição for, por exemplo, uma Maxwelliana, em que $\partial f_0/\partial v < 0$ sempre, essa redução irá diminuir a influência das oscilações sobre as partículas, levando a uma redução na absorção [17].

No entanto, estamos mais interessados no caso em que $\partial f_0/\partial v > 0$, o que pode ocorrer quando há a incidência de um feixe de elétrons na cauda de um plasma Maxwelliano, desde que o feixe tenha intensidade o suficiente para que um segundo pico apareça na função de distribuição. Nesse caso temos $\omega_i > 0$, o que propicia a ocorrência de instabilidades para uma determinada faixa de frequências. A transferência da energia das partículas do feixe para as ondas do plasma ocorre via ressonância e é responsável pelo aparecimento dessas instabilidades, que resultarão no crescimento da amplitude das oscilações. Esse crescimento causará uma difusão no espaço de velocidades, resultando, novamente, na diminuição na declividade de $\partial f_0/\partial v$. Como consequência, o crescimento da amplitude do espectro vai ficando mais lento, e a forma da distribuição de fundo vai estabilizando, até a ocorrência da formação de um plateau na região entre o corpo principal da função de distribuição e o feixe, onde antes havia a região de derivada positiva. Nesse ponto, o sistema atinge um estado estacionário, onde não há mais crescimento das ondas, nem difusão no espaço de velocidades. Esse tipo de instabilidade é conhecido como “instabilidade *bump-in-tail*” e será discutida detalhadamente mais adiante, no tópico principal deste trabalho.

3.2 Formalismo não linear da teoria de turbulência fraca

Nesta seção daremos continuidade à descrição dos processos que fazem parte da teoria de turbulência fraca, abordando não linearidades de ordem mais alta do que as que foram discutidas na seção anterior, com a teoria quasilinear. É importante ressaltar que, embora este formalismo trate de interações que envolvem instabilidades mais intensas, ainda estamos no limite da teoria de turbulência fraca discutido no início do capítulo. Para quantificar esse limite, vamos considerar um plasma turbulento na aproximação eletrostática, descrito pelo sistema Vlasov-Poisson, junto com suas devidas médias estatísticas. Nesse caso, duas densidades de energia caracterizam o problema: a energia cinética média das partículas, por unidade de volume $\mathcal{E}_{kin} = \bar{n}m \langle v^2 \rangle / 2$; e a densidade de energia \mathcal{E}_f , associada com as flutuações do campo elétrico perturbativo. Sendo assim, por “teoria de turbulência fraca”, nos referimos a situações em que

$$\mathcal{E}_f \ll \mathcal{E}_{kin}, \quad (3.54)$$

isto é, a densidade de energia associada às flutuações é pequena quando comparada com a densidade de energia cinética média das partículas. A essa condição, está relacionada a suposição de que o crescimento das ondas é lento [19].

A teoria de turbulência fraca começou a ser desenvolvida no final da década de 1950, sendo continuamente aprimorada até meados da década de 1970, em grande parte por cientistas da antiga União Soviética. Nomes como N. V. Tsytovich [17, 20, 21], A. I. Akhiezer [12, 16], R. Z. Sagdeev e A. A. Galeev [18], entre outros, compõem, até hoje, as principais referências de base para os trabalhos desenvolvidos na área. Outra referência importante, é o clássico tratado do cientista norte-americano R. C. Davidson, [19]. As abordagens adotadas pelos autores

russos, citados acima, são bem similares. Eles empregam um método com soluções perturbativas da equação de Vlasov não linear, de primeiros princípios. No entanto, a principal ênfase é dada à equação cinética não linear das ondas, que descreve diversas interações não lineares, onda-partícula e onda-onda, entre os auto-modos lineares de oscilação. Como consequência, as interações não lineares entre as partículas ficam de fora da teoria. Em seu lugar é usada apenas uma equação de difusão quasilinear para as partículas [23].

Neste trabalho, abordaremos a teoria de turbulência fraca tomando como base o trabalho desenvolvido por Peter Yoon em [23], onde o autor generaliza a teoria de turbulência fraca, incluindo efeitos não lineares tanto nas equações para as ondas, quanto na equação para as partículas. Desse modo ele consegue descrever teoricamente alguns resultados observacionais e de simulações de “*particle-in-cell*”, nos quais eram obtidos os, até então, teoricamente inexplicáveis harmônicos $2\omega_{pe}$ para ondas eletrostáticas. Mais tarde, em [24], o autor estendeu esse formalismo para o caso eletromagnético. No entanto, como mencionado anteriormente, iremos restringir nossa discussão apenas às oscilações eletrostáticas. Também não entraremos em detalhes a respeito da derivação dessas equações, pois além de extensa, sua complexidade está fora do escopo deste trabalho; e, uma vez que nossa intenção aqui não é abordar a ocorrência e nem a descrição desses harmônicos, iremos trabalhar apenas com os já conhecidos modos lineares para a evolução dos processos não lineares.

3.2.1 Equações cinéticas generalizadas

Seguindo o mesmo procedimento adotado nas demonstrações anteriores, vamos considerar um plasma homogêneo, livre da atuação de campos externos e na ausência de colisões. Nessas condições, a equação de movimento continua sendo a equação de Vlasov eletrostática,

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3.55)$$

e o campo elétrico auto-consistente, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, continua sendo dado pela seguinte equação de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \hat{n} \sum_a e_a \int d^3v f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (3.56)$$

Nas equações acima, f_a é a função de distribuição da partícula “ a ” - onde a representa tanto elétrons “ e ”, quanto íons “ i ” - e, levando em conta a condição de neutralidade de carga, temos $\hat{n} = \hat{n}_e = \hat{n}_i$, que é a densidade do plasma. Vemos que houve uma certa mudança na notação, com relação aos capítulos anteriores. Isso se deve ao fato de estarmos seguindo a notação usada em [23], que serve como referência para essa discussão. Mais algumas mudanças irão aparecer ao longo desta seção sem que, no entanto, possam interferir no bom entendimento do que está sendo apresentado.

Seguindo o mesmo procedimento feito na aproximação quasilinear, escrevemos a função de distribuição e o campo elétrico como uma soma da média espacial dessas quantidades, com suas respectivas flutuações (quantidades precedidas por δ):

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= F_a(\mathbf{v}, t) + \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde, F_a , na notação que estamos usando, representa a média da função de distribuição de equilíbrio - que chamávamos de f_{a0} - e, como concluído anteriormente, a média da função de

distribuição de equilíbrio é independente de \mathbf{r} e a média do campo elétrico é nula, resultando nas expressões acima. Substituindo na equação de Vlasov, temos:

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} - \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f_a + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.58)$$

Tomando a média da equação acima, obtemos a mesma equação cinética para a evolução temporal da função de distribuição de equilíbrio, ou como a chamaremos a partir de agora, “equação cinética formal para as partículas”:

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = - \frac{e_a}{m_a} \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.59)$$

Subtraindo (3.59) de (3.58), obtemos uma equação para as flutuações:

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f_a + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{e_a}{m_a} \left[\delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0. \quad (3.60)$$

Se compararmos a equação acima com a equação (3.14), vemos que ambas são exatamente a mesma equação, porém, com notações diferentes. E é nesse ponto que ocorre a distinção entre o formalismo não linear e a aproximação quasilinear. Na teoria quasilinear descartávamos os termos proporcionais a $\delta \mathbf{E} \delta f_a$ e agora, com a intenção de incluir efeitos não lineares de ordem mais alta, iremos manter estes termos.

Como feito na seção anterior, o procedimento consiste em decompor as flutuações em termos de suas transformadas de Fourier-Laplace, com respeito à escala de tempo rápida das flutuações¹:

$$\begin{aligned} \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \int d^3 k \int_L d\omega \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 r \int_0^\infty dt \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 k \int_L d\omega \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}(t) &= \frac{1}{2\pi^4} \int d^3 r \int_0^\infty dt \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde a integração se dá ao longo do caminho L , com um prolongamento de $\omega = -\infty + i\sigma$ até $\omega = \infty + i\sigma$, em que $\sigma > 0$ e $\sigma \rightarrow 0$. Lembrando que estamos supondo lenta dependência temporal das amplitudes espectrais $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t)$ e $\delta \mathbf{E}(t)_{\mathbf{k}, \omega}$. Sendo assim, essas quantidades são calculadas como se elas fossem temporalmente independentes na escala rápida de tempo. Essa é a chamada “aproximação de dois tempos”.

A novidade nesse formalismo é a transformada de Fourier-Laplace dos termos não lineares, onde temos a transformada de um produto de funções. Nesse caso, a transformada de Fourier-Laplace é representada pela convolução dessas funções:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 r \int dt \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} &= \int d^3 k' \int d\omega' \delta f_{\mathbf{k}', \omega'}^a \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \\ &= \int d^3 k' \int d\omega' \delta f_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}^a \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

¹ Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 7. Formal Vlasov Weak Turbulence Theory, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3GcS>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

Aplicando essas transformações ao sistema Vlasov-Maxwell, obtemos um conjunto de equações hierárquicas, composto pela equação cinética formal para as partículas da espécie a [23],

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k \int d\omega \int d^3 k' \int d\omega' \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega+\omega')t}, \quad (3.63)$$

pela equação para a evolução da função de distribuição perturbativa das partículas, também da espécie a ,

$$\begin{aligned} \left(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a &= -i \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} - i \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k' \int d\omega' \\ &\times \left[\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a - \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a \rangle \right]; \end{aligned} \quad (3.64)$$

e pela equação de Poisson para as flutuações do campo elétrico,

$$\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = -4\pi \hat{n} i \sum_a e_a \int d^3 v \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a. \quad (3.65)$$

Os *brackets* presentes nas duas primeiras equações deste conjunto, denotam as médias de ensemble sobre as fases das perturbações. Como já discutido na teoria quasilinear, no ponto em que descartamos os termos de segunda ordem, a presença desses termos não lineares torna o sistema de equações acima aberto, visto que, para que obtenhamos a solução para $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a$, é necessário que conheçamos a expressão para a correlação entre duas partículas, $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \delta f_{\mathbf{k}', \omega'}^a \rangle$, que depende das correlações de terceira ordem, $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \delta f_{\mathbf{k}', \omega'}^a \delta f_{\mathbf{k}'', \omega''}^a \rangle$, e assim por diante.

Vemos que a derivada temporal de lenta escala de tempo, $i(\partial/\partial t)$, foi mantida no lado esquerdo da equação (3.64). Para lidarmos com essa situação, vamos adotar o método descrito por Peter Yoon em [23], no qual ele emprega a aproximação de dois tempos, propondo que o fator $i(\partial/\partial t)$ seja “absorvido” em uma “nova” definição para a frequência angular, $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$. Dessa forma, de acordo com o autor, a equação para a função de distribuição perturbativa, $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a$, pode ser resolvida iterativamente até terceira ordem para a intensidade do campo elétrico $\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$. Uma vez obtida a solução iterativa desejada, ela é inserida na equação de Poisson perturbada e, por fim, são tomadas as médias de ensemble apropriadas, supondo que existam fases aleatórias associadas com as flutuações. Como resultado desse procedimento, obtemos a equação não linear para o balanço espectral, que forma a base da teoria de turbulência fraca. E é nesse estágio, de acordo com a aproximação de dois tempos, que $i(\partial/\partial t)$ é reintroduzido. O resultado obtido é o seguinte [23]:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{i}{2} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial t} + 2 \int d^3 k' \int d\omega' \left\{ \left[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right]^2 \right. \\ &\times \left(\frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \\ &\times \left. \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \right\} - 2 \int d^3 k' \int d\omega' \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde o termo

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \chi(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.67)$$

é a função resposta dielétrica linear, e os termos

$$\chi(\mathbf{k}, \omega) = \sum_a \chi_a(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.68)$$

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) = \sum_a \chi_a^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) \quad (3.69)$$

e

$$\bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3) = \sum_a \bar{\chi}_a^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3) \quad (3.70)$$

são, respectivamente, as susceptibilidades dielétricas linear, não linear de segunda ordem e não linear parcial de terceira ordem. As expressões para as susceptibilidades, para partículas da espécie a são as seguintes¹:

$$\chi_a(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi e_a \hat{n}_a}{k^2} \int d^3v \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} F_a, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \chi_a^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) &= -\frac{1}{2} \frac{4\pi i e_a \hat{n}_a}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \\ &\times \int d^3v \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2} \left[\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2}) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1, \omega_1}) \right] F_a, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_a^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3) &= -\frac{1}{2} \frac{4\pi i e_a \hat{n}_a}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \\ &\times \int d^3v (\mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3} \cdot \left[\mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_3, \omega_3}) + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2}) \right] F_a, \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}$ é um operador diferencial e tem a seguinte forma:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} \equiv -\frac{e_a}{m_a} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.74)$$

A equação (3.66) é um resultado formal bem conhecido na teoria de turbulência fraca. Naturalmente, o próximo passo seria aplicar o procedimento padrão da teoria cinética, supondo que $|\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)| \ll |\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)|$. Com isso, poderíamos obter a relação de dispersão das ondas através da parte real de (3.66), enquanto sua parte imaginária determinaria a rapidez com que as ondas evoluem no tempo, ou seja, a equação cinética das ondas. Contudo, se as funções resposta não lineares não forem analisadas em detalhes, este método falha e a equação não linear para o balanço espectral, (3.66), continuará sendo um resultado puramente formal, sem aplicações práticas [23]. Mais adiante voltaremos a falar sobre isso.

Prosseguindo com as equações cinéticas generalizadas da teoria de turbulência fraca, vamos à equação cinética generalizada para as partículas. Para obtê-la, primeiro, partindo da solução iterativa para $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a$, derivamos a quantidade $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \delta E_{\mathbf{k}', \omega'} \rangle$, que aparece em (3.64). Com isso, chegamos à forma generalizada para a equação cinética formal para as partículas do

¹ Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 7. Formal Vlasov Weak Turbulence Theory, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3GcS>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

tipo a [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial t} = & -\frac{ie_a}{m_a} \int d^3k \int d\omega \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}}{k^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega} \right. \\ & + i \int d^3k' \int d\omega' \frac{M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega')}{kk' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega} \cdot [\mathbf{k}'(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}',\omega'})] \\ & \left. - \int d^3k' \int d\omega' \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}}{k^2 k'^2} (\mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{g}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} \cdot [\mathbf{k}'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{-\mathbf{k}',-\omega'})] \right\} F_a, \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde

$$\begin{aligned} M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega') = & \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \left(\frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \\ & - \frac{\chi^{(2)*}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

A equação (3.75) é dita generalizada porque, nela, vários termos não lineares de acoplamento entre as ondas são incorporados com mesmo grau de expansão da perturbação, como na equação cinética das ondas. Normalmente, para a equação cinética das partículas, esses termos são descartados e costuma-se trabalhar apenas com o primeiro termo do lado direito de (3.75), que é o termo de difusão quasilinear [23]. Até um certo ponto essa abordagem é satisfatória e tem sido de grande utilidade em estudos mais recentes envolvendo a interação feixe-plasma, como nas referências [7, 8]. É essa aproximação que usaremos neste trabalho. Então, pegando somente o primeiro termo de (3.75) e substituindo $\mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega}$ pela sua definição em (3.74), obtemos nossa equação cinética para as partículas do tipo a^2 :

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = \frac{ie_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3k \int d\omega \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} \frac{\partial F_a}{\partial v_j}. \quad (3.77)$$

3.2.2 Equação cinética das ondas para os modos lineares

Como discutido no início do capítulo, na abordagem mais comum da teoria de turbulência fraca, costuma-se supor que os efeitos do crescimento das oscilações são tão pequenos que essas ondas podem ficar de fora da relação de dispersão. Consequentemente, os modos normais de oscilação são completamente determinados apenas pela resposta linear do plasma, enquanto as interações entre as ondas e as partículas são, em geral, determinadas pelas equações cinéticas não-lineares das ondas e das partículas. Com isso, temos uma teoria que descreve interações não lineares entre os modos lineares de oscilação.

A relação de dispersão geral não linear pode ser determinada pela parte real da equação (3.66), na qual estão presentes os diversos termos de acoplamento entre os modos de oscilação

²Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 9. Equations of Electrostatic Weak Turbulence Theory for Unmagnetized Plasmas, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3FRi>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

que atuam no plasma. Todavia, no presente trabalho, estamos interessados somente nos modos normais de oscilação que satisfazem a relação de dispersão linear,

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (3.78)$$

que vem a ser a parte real do primeiro termo à direita da equação (3.66). Prosseguindo, a solução da equação acima determina a relação de dispersão das ondas,

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}, \omega}^{\alpha}, \quad (3.79)$$

onde α considera a possibilidade de que possa existir mais do que um modo normal de oscilação no plasma. De fato, em um plasma não magnetizado existem dois modos normais eletrostáticos de oscilação: as ondas de Langmuir (oscilações de alta frequência), que vamos designar com o índice $\alpha = L$, e as ondas íon-acústicas (de frequência mais baixa), que vamos designar com o índice $\alpha = S$.

Uma vez que a relação de dispersão tenha sido determinada por (3.79), podemos escrever a densidade de energia espectral das ondas, como segue [23]:

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} \left[I_{\mathbf{k}}^{+\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + I_{\mathbf{k}}^{-\alpha} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right]. \quad (3.80)$$

Na equação acima, os sinais \pm estão associados com a frequência angular, representando a direção de propagação das ondas. Na teoria não-linear essa é uma consideração importante, visto que ondas que propagam em direções opostas, ou paralelas, satisfazem diferentes condições de ressonância.

A equação cinética para os modos lineares de oscilação, obtida após uma série de manipulações algébricas e considerações a respeito de seu limite de validade, tem a seguinte forma [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & - \frac{2\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d^3k' A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} \\ & + 4\pi \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{\sigma''=\pm 1} \int d^3k' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \\ & \times \left(\frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}), \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde o coeficiente $A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, é dado por

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = & \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \text{Im} \left(2 \left[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right]^2 \right. \\ & \left. \times \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right), \end{aligned} \quad (3.82)$$

sendo \mathcal{P} o valor principal da integral na qual o coeficiente foi introduzido. Em ambas as expressões, foi empregada a seguinte simplificação de notação [23]:

$$\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = \frac{\partial \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}. \quad (3.83)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.81) representa os processos de emissão induzida (interação onda-partícula linear), o segundo descreve os processos de espalhamento não linear (interação onda-partícula não linear) e o terceiro termo descreve os processos de decaimento. Este último é um processo de decaimento de ondas que envolve interações ressonantes entre três ondas, o que pode ser inferido pela presença da função delta, $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma)$, neste termo. Vemos pelos argumentos da delta que esse processo envolve somente ondas com diferentes vetores de onda, e vemos também que a condição da delta não pode ser satisfeita se as três ondas forem do mesmo tipo. Por exemplo, consideremos o caso de ondas de Langmuir. As ondas de Langmuir tem frequências com valor próximo a ω_{pe} , de modo que a soma de frequências de duas ondas, que resulta maior do que $2\omega_{pe}$, não pode ser igual a uma frequência de uma outra onda de Langmuir. Os outros processos, de emissão e de espalhamento induzidos também envolvem ressonâncias, contudo, essas condições de ressonância ficarão evidentes somente quando as funções resposta não lineares forem trabalhadas matematicamente [23].

3.2.3 Equações cinéticas específicas para ondas de Langmuir e para ondas íon-acústicas

No intuito de escrever as equações cinéticas específicas para as ondas de Langmuir ($\alpha = L$) e íon-acústicas ($\alpha = S$), precisamos das formas específicas para a função dielétrica linear.

Para as ondas de Langmuir podemos aproximar a susceptibilidade de acordo com as desigualdades $|\omega_{\mathbf{k}}^L|/kv_{the} \gg 1$ e $|\omega_{\mathbf{k}}^L|/kv_{thi} \gg 1$, onde foi definido $a = e$ para elétrons, e $a = i$ para íons, sendo, $v_{tha}^2 = 2T_a/m_a = 2 \int d^3v v^2 F_a$, o quadrado da velocidade térmica e T_a a temperatura cinética das partículas do tipo a . Aplicando estas condições, ficamos com a seguinte aproximação, válida tanto para elétrons, quanto para íons [23]:

$$\chi_a(\mathbf{k}, \omega) \approx -\frac{\omega_{pa}^2}{\omega} \left(1 + 3 \frac{k^2 T_a}{\omega^2 m_a} \right) - i\pi \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int d^3v \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.84)$$

Da expressão acima, obtemos a relação de dispersão para ondas de Langmuir,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \quad (3.85)$$

que satisfaz a já conhecida condição de simetria, $\omega_{-\mathbf{k}}^L = -\omega_{\mathbf{k}}^L$ e onde $\lambda_{De}^2 = T_e/4\pi\hat{n}e^2$ é o quadrado do comprimento de Debye, sendo T_e a temperatura dos elétrons.

Agora, considerando os limites de validade para as ondas íon-acústicas, temos, para a razão entre a velocidade de fase das ondas íon-acústicas e a velocidade térmica dos elétrons, a desigualdade $|\omega_{\mathbf{k}}^S|/kv_{the} \ll 1$. Para a velocidade térmica dos íons, o limite de validade é dado por $|\omega_{\mathbf{k}}^S|/kv_{thi} \geq 1$. Dessa última desigualdade, vemos que a aproximação feita em (3.84) é válida para os íons. Porém, de acordo com a primeira desigualdade que temos logo acima, ela não é válida para os elétrons. Neste caso, precisamos usar a seguinte expansão para a susceptibilidade [23]:

$$\chi_e(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{the}^2} - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.86)$$

Com isso, chegamos à relação de dispersão para as ondas íon-acústicas,

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = kc_S \left(\frac{1 + 3T_i/T_e}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right)^{1/2}, \quad (3.87)$$

onde temos a seguinte relação de simetria $\omega_{-\mathbf{k}}^S = -\omega_{\mathbf{k}}^S$, e $c_S^2 = T_e/m_i$ é o quadrado da velocidade íon-acústica. Cabe ressaltar que as ondas íon-acústicas só podem existir nos casos em que a temperatura dos elétrons é muito maior do que a temperatura iônica.

Com a intenção de facilitar a compreensão, vamos escrever separadamente cada termo da equação (3.81), levando em conta o tipo de interação envolvida. Também, por simplicidade de notação, vamos definir a seguinte quantidade²

$$\mu_{\mathbf{k}} = k^3 \lambda_{De}^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + 3 \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2}. \quad (3.88)$$

Interação onda-partícula linear: processo de emissão induzida

O primeiro termo da equação cinética linear das ondas, (3.81), leva em conta as mudanças nas intensidades das ondas L e S , devido à influência do crescimento - ou amortecimento - quasilinear, o que chamamos de “emissão induzida”.

Aplicando as aproximações (3.84) e (3.86), obtemos, para ondas de Langmuir e para as ondas íon-acústicas, respectivamente [23]:

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{em.ind.}} = \pi (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v I_{\mathbf{k}}^L \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.89)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{em.ind.}} = \pi \mu_{\mathbf{k}} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v I_{\mathbf{k}}^S \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^3. \quad (3.90)$$

Vemos claramente nas equações acima, pelas condições de ressonância $\omega_{\mathbf{k}}^\alpha \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, que este é um processo de interação onda-partícula, uma vez que \mathbf{v} é o vetor velocidade da partícula e \mathbf{k} o vetor de onda do modo de oscilação α . Portanto, o que temos nestas equações nada mais é do que uma versão mais genérica das equações da teoria quasilinear, descrita na seção anterior, que vem a ser a interação onda-partícula linear.

Interação onda-onda não linear: processos de decaimento induzido e espontâneo

O terceiro termo de (3.81), leva em conta a interação ressonante entre três ondas. Como mencionado anteriormente, as condições de ressonância presentes neste termo, $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma)$, não podem ser satisfeitas se todas as ondas forem do mesmo tipo. A única combinação, entre os modos lineares de oscilação, com frequência e com número de onda capazes de satisfazer as condições de conservação de energia e de momentum exigidas pela delta, são duas ondas de Langmuir e uma onda íon-acústica.

² Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 9. Equations of Electrostatic Weak Turbulence Theory for Unmagnetized Plasmas, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3FRi>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

³ A forma como esta equação está sendo apresentada aqui não é a mesma que aparece em nossa principal referência para esta seção, [23]. No trabalho citado, essa mesma expressão não inclui o termo de elétrons. Contudo, o autor não justifica tal aproximação, o que nos faz considerar a possibilidade de que essa ausência seja apenas um erro de digitação, principalmente pelo fato de que tal termo está presente em todos os seus trabalhos subsequentes que são baseados neste artigo, e em trabalhos de outros autores que o usam como referência.

Desenvolvendo a expressão da susceptibilidade dielétrica de segunda ordem para íons e para elétrons, conclui-se que o coeficiente de decaimento é dominado somente pela resposta da distribuição eletrônica, tanto para as ondas L , quanto para as ondas S . Portanto, a dinâmica iônica pode ser desprezada [23]. Dessa forma, ficamos com as seguintes expressões para o quadrado do módulo das susceptibilidades de segunda ordem para as ondas de Langmuir e para as ondas íon-acústicas, respectivamente

$$|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \quad (3.91)$$

$$|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \quad (3.92)$$

As equações para a variação na densidade de energia das ondas, devido ao decaimento de três ondas são as seguintes²:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{decay}} &= 2 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \int d^3 k' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^S) \\ &\quad \times (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' S} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma'' \mu_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}), \\ \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{decay}} &= \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L \int d^3 k' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L) \\ &\quad \times (\sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}), \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L = |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \pi \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \quad (3.94)$$

e

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S = |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \pi \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \quad (3.95)$$

Estas equações descrevem o processo de decaimento de uma onda de Langmuir em outra onda de Langmuir, mais uma onda íon-acústica. O primeiro termo entre parênteses nas equações em (3.93), descreve o processo de decaimento espontâneo, enquanto o segundo e o terceiro representam o processo de decaimento induzido.

A relação de conservação para a densidade de número de plasmons (ondas que se propagam no plasma), para este acoplamento de três ondas é dada por [23]

$$\sum_{\sigma = \pm 1} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\text{decay}} \int d^3 k \left(\frac{I_{\mathbf{k}}^L}{\omega_{\mathbf{k}}^L} + \frac{2I_{\mathbf{k}}^S}{\mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L} \right) = 0. \quad (3.96)$$

O processo de decaimento de três ondas envolve troca de energia e de momentum entre as ondas L e S , logo a quantidade conservada é o número total de ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas combinadas. É interessante lembrar que, devido às limitações impostas pelas

²Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 9. Equations of Electrostatic Weak Turbulence Theory for Unmagnetized Plasmas, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3FRi>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

condições de ressonância de três ondas, que envolvem duas ondas de Langmuir e uma onda íon-acústica, para um determinado valor de vetor de onda \mathbf{k} , a quantidade total da densidade de número de plasmons conservados é igual ao total da densidade de número das ondas de Langmuir, mais duas vezes o total da densidade de número das ondas íon-acústicas, como pode ser visto em (3.96).

Interação onda-partícula não linear: processo de espalhamento induzido

Por fim, vamos considerar o segundo termo da equação (3.81), que envolve interação onda-partícula não linear, resultando no processo de espalhamento induzido. Essa interação é governada pelo coeficiente de espalhamento $A_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, dado pela equação (3.82). As equações para o processo de espalhamento induzido para as ondas de Langmuir e para as ondas íon-acústicas são, respectivamente, dadas por²

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{esp.ind.}} = - \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\sigma' \pm 1} \left[A_{L,L}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} + A_{L,S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S} \right] I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}, \quad (3.97)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{esp.ind.}} = - \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\sigma' \pm 1} \left[A_{S,L}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} + A_{S,S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S} \right] I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}, \quad (3.98)$$

onde podemos ver que simplesmente reescrevemos o segundo termo da equação cinética linear das ondas, separando o coeficiente de espalhamento de maneira a considerar as possíveis interações de espalhamento entre os modos de oscilação L e S . A seguir, iremos considerar cada uma dessas interações separadamente.

Vamos começar pelo espalhamento não linear causado por uma onda de Langmuir sobre outra onda de Langmuir, representado em (3.97) pelo coeficiente $A_{L,L}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Essa interação é importante quando $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L|$ se mantém pequeno, o que equivale a $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \sim |(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}|$. Aqui, cabe ressaltar que $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \neq |\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S|$, uma vez que o processo de espalhamento não linear não envolve as mesmas condições de ressonância do processo de decaimento de três ondas.

Prosseguindo, para este processo, temos as seguintes situações de interesse, para os elétrons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{the}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{the} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{the}, \quad (3.99)$$

e para os íons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{thi}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{thi} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{thi}. \quad (3.100)$$

Sabemos que nos casos em que há a presença de elétrons energéticos no plasma, a ressonância onda-partícula, $\omega_{\mathbf{k}}^L \sim \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, pode ter um papel relevante para a taxa de crescimento quasilinear das ondas de Langmuir. Portanto, o processo de espalhamento não linear só começa a ter importância após a ocorrência da saturação do crescimento quasilinear - já discutimos esse processo de saturação no final da seção anterior, quando abordamos brevemente a interação feixe-plasma no contexto da teoria quasilinear. Com isso, e considerando as desigualdades acima,

²Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 9. Equations of Electrostatic Weak Turbulence Theory for Unmagnetized Plasmas, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r3FRi>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

podemos fazer algumas aproximações. Então, sob a perspectiva da susceptibilidade dielétrica de terceira ordem, os denominadores de ressonância onda-partícula podem ser aproximados como [23]

$$\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{n})} \approx \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^L} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{(\omega_{\mathbf{k}}^L)^2} + \dots, \quad (3.101)$$

$$\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}'}^L - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{n})} \approx \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}'}^L} + \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}}{(\omega_{\mathbf{k}'}^L)^2} + \dots. \quad (3.102)$$

A interação onda-partícula quasilinear entre elétrons e ondas L ocorre quando $\omega_{\mathbf{k}}^L = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, logo, a velocidade ressonante é $v_{res} \sim \pm \omega_{pe}/k$, com número de onda equivalente $k_{res} = \pm \omega_{pe}/v$. No entanto, a interação onda-partícula não linear, envolvendo duas ondas de Langmuir, segue a condição $\omega_{\mathbf{k}}^L \pm \omega_{\mathbf{k}'}^L = \pm(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$. Portanto, temos que a velocidade ressonante será $v_{res} \sim \pm(3\omega_{pe}/2)(k^2 - k'^2)\lambda_{De}/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$, que é muito menor do que a velocidade ressonante da interação quasilinear. Disso concluímos que a interação onda-partícula não linear é importante em intervalos de velocidade e de número de onda ressonantes que são inacessíveis do ponto de vista da interação quasilinear [23].

Então, após uma longa derivação, baseada na suposição de que a diferença entre as frequências $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L$ é muito pequena quando comparada a $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{the}$, obtemos a expressão para o coeficiente de espalhamento entre duas ondas de Langmuir [23]

$$A_{LL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \int d^3v (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) F_e - \frac{m_e}{m_i} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L F_i \right] \times \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \quad (3.103)$$

Pode-se mostrar que o coeficiente A_{LL} , acima, é muito mais afetado pela resposta iônica do que pela resposta relacionada aos elétrons [25, 26]. Contudo, por estar fora do escopo deste trabalho, não entraremos em detalhes sobre esse tema.

Vamos agora ao espalhamento induzido por ondas de Langmuir em ondas íon-acústicas, dado pelo coeficiente $A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Esse termo normalmente é ignorado na literatura, sem qualquer justificativa para tal. A atuação desse tipo de espalhamento é dada pelas seguintes desigualdades, para elétrons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{the}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^S \ll k'v_{the} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^S \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{the}, \quad (3.104)$$

e para íons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{thi}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^S > k'v_{thi} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^S \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{thi}. \quad (3.105)$$

A condição de ressonância associada à essa interação onda-partícula não linear é do tipo $\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} = 0$. Com isto, fica claro que a atuação deste termo sobre a distribuição dos elétrons é insignificante, visto que a frequência angular das ondas S está totalmente fora de escala com relação à frequência da movimentação eletrônica. Embora, em [23], o autor escreva a expressão para esse coeficiente, inclusive, inserindo-a na equação de espalhamento induzido das ondas L , não iremos escrevê-la aqui, pois não será utilizada no trabalho principal.

Prosseguindo com o coeficiente $A_{SL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, as desigualdades que definem este espalhamento são as seguintes, para os elétrons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^S \ll kv_{the}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{the} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{the}, \quad (3.106)$$

e para os íons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^S > kv_{th_i}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{th_i} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{th_i}. \quad (3.107)$$

Nesse caso, a condição de ressonância é dada por $\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$. Essa condição é exatamente a mesma envolvida na interação onda partícula quasilinear, envolvendo ondas íon-acústicas. Como na equação cinética da onda esse termo vai somado ao termo quasilinear, ele pode ser encarado como uma pequena correção, de ordem mais alta, à resposta linear da interação onda partícula. Então, por definição, este termo é muito pequeno e sua atuação pode ser desconsiderada. Este termo também não será apresentado aqui, porém, ao contrário do coeficiente $A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, que pode ser encontrado em [23], o coeficiente, $A_{SL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, não chegou a ser escrito pelo autor.

Por último, temos o coeficiente $A_{SS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, que governa a situação em que ondas íon-acústicas espalham ondas íon-acústicas. Para este caso temos as seguintes desigualdades, para elétrons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^S \ll kv_{th_e}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^S \ll k'v_{th_e} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^S \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{th_e}, \quad (3.108)$$

e para íons,

$$\omega_{\mathbf{k}}^S > kv_{th_i}, \quad \omega_{\mathbf{k}'}^S > k'v_{th_i} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^S > |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{th_i}. \quad (3.109)$$

Para esse processo temos a seguinte expressão para o coeficiente de espalhamento [23]

$$\begin{aligned} A_{SS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -\mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e m_i} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4 \lambda_{De}^4} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} \\ &\times \int d^3v (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \delta \left[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde

$$W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} = \sigma\sigma' \frac{k'}{k} + \left[\frac{k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma\sigma'kk'}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma\sigma'kk' + (\sigma k - \sigma'k')^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^2 / 2} \right]. \quad (3.111)$$

O espalhamento das ondas íon-acústicas causado por ondas íon-acústicas é um processo lento [27] e não será abordado neste trabalho. No entanto, como iremos considerar o efeito das colisões, que também atuam no sistema a longo prazo, pode ser que em futuros trabalhos esse tipo de espalhamento seja adicionado à evolução do sistema, visto que é possível que ambos atuem na mesma escala de tempo.

Com isso, as equações para o processo de espalhamento induzido, para as ondas de Langmuir, levando em conta somente o coeficiente de espalhamento $A_{LL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, ficam [23]

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{esp.ind.}} &= -\frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d^3k' \int d^3v \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) F_e - \frac{m_e}{m_i} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L F_i \right] \\ &\times \delta \left[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] I_{\mathbf{k}'}^L, \end{aligned} \quad (3.112)$$

e para as ondas íon-acústicas, em que usamos apenas o coeficiente $A_{SS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{esp.ind.}} &= \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e m_i} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d^3 k' \int d^3 v \mu_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4 \lambda_{De}^4} \\ &\times \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}}^S I_{\mathbf{k}'}^S, \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde $W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'}$ é dado pela equação (3.111).

3.3 Adição dos efeitos das flutuações espontâneas nas equações da teoria de turbulência fraca

As equações que apresentamos até este ponto não consideram os efeitos das flutuações térmicas de partícula única. Em plasmas não colisionais, essa abordagem é justificada alegando que o parâmetro de plasma, $g = 1/(\hat{n} \lambda_{De}^3)$, com $\lambda_{De} = [T_e/(4\pi \hat{n} e^2)]^{1/2}$, é muito pequeno e pode ser desprezado. Embora essa aproximação seja válida para uma grande variedade de plasmas encontrados na natureza e em plasmas de laboratório, existem casos em que os efeitos relacionados ao parâmetro de plasma não podem ser completamente descartados. Temos, por exemplo, os plasmas de laboratório, característicos de experimentos de interação feixe-plasma, cujas densidades típicas podem ser da ordem de $\hat{n} \approx 10^9/\text{cm}^3$ e a temperatura dos elétrons de poucos eV . Nesses casos, o parâmetro de plasma chega a ser da ordem de $g \approx 10^{-4} \sim 10^{-3}$. Outro caso seria o dos plasmas interplanetários, onde a densidade média é da ordem de $\hat{n} \approx 1/\text{cm}^3$, e a temperatura dos elétrons fica em torno de $T_e \approx 0.01 \text{ eV}$. Aqui, o parâmetro de plasma fica em torno de $g \approx 10^{-5} \sim 10^{-4}$. O que pode ser considerado pequeno, mas não completamente desprezível [28]. Como o principal objetivo deste trabalho é apresentar a inclusão do efeito das colisões nas equações da teoria de turbulência fraca e, como veremos mais adiante, o parâmetro de plasma é um parâmetro importante das equações do operador de colisões, é imprescindível que incluamos os efeitos de emissão espontânea, visto que ambos são diretamente proporcionais a g .

Para a inclusão desses efeitos, vamos usar como principal referência um artigo publicado por Peter Yoon, [28], em 2005. Nesse artigo o autor dá continuidade ao trabalho desenvolvido em [23] e discute o problema da inclusão das flutuações espontâneas a partir de primeiros princípios, com a intenção de que tal método incluía os modos lineares de oscilação e também os harmônicos das oscilações de Langmuir, que são modos não lineares das ondas L . As abordagens sobre efeitos espontâneos disponíveis na literatura deixavam de fora os modos não lineares. Mesmo que, neste trabalho, não estejamos preocupados com os modos não lineares de oscilação, a adoção dessa referência se justifica pela coerência da base teórica utilizada e pela notação empregada no desenvolvimento da teoria de turbulência fraca generalizada.

Vamos apresentar diretamente as equações para os processos que envolvem flutuações espontâneas, sem entrarmos em detalhes, uma vez que a derivação destes termos é longa e foge do escopo deste trabalho. Entretanto, cabe lembrar que o método utilizado pode ser diretamente consultado no artigo usado como referência [28]. As equações serão escritas na mesma forma que foram escritas as equações para os processos induzidos, na seção anterior.

Processo de emissão espontânea

Para os processos de emissão espontânea temos, respectivamente, para ondas L e S , as seguintes equações

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{emiss. espont}} &= \frac{\hat{n} e^2 \omega_{pe}}{k^2} \int d^3 v \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e, \\ \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{emiss. espont}} &= \frac{\mu_{\mathbf{k}}^2 \hat{n} e^2 \omega_{pe}}{k^2} \int d^3 v \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Processo de decaimento espontâneo

O processo de decaimento, como já discutido anteriormente, é um processo que envolve interações não lineares somente entre ondas, ou seja, não há efeito de ressonância entre ondas e partículas nesse processo. Levando em conta que os efeitos de flutuações espontâneas que estamos discutindo nessa seção são obtidos a partir de flutuações de partícula única, temos que, em processos que não envolvem interação onda-partícula, essas flutuações não estão presentes. Portanto, os efeitos de decaimento espontâneo estão relacionados somente com as interações onda-onda e estão presentes no primeiro termo entre parêntesis da equação (3.93).

Processo de espalhamento espontâneo

Para o processo de espalhamento espontâneo, vamos considerar apenas o termo de espalhamento entre ondas L . Contudo o termo genérico, para as possíveis combinações de ondas, pode ser encontrado no artigo de referência, [28]. Temos então

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{esp. espont}} &= -(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\hat{n} e^4}{T_e^2} \lambda_{De}^4 \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d^3 k' \int d^3 v \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} (\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}) \\ &\times \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] (F_e + F_i). \end{aligned} \quad (3.115)$$

As equações descritas acima, somadas às equações referentes aos seus respectivos processos induzidos, fazem parte da equação cinética da onda para os modos lineares.

3.4 Equações completas da teoria de turbulência fraca

Para finalizar, vamos escrever o conjunto completo e auto-consistente de equações da teoria de turbulência fraca, levando em conta todos os efeitos descritos ao longo deste capítulo.

Então, para as ondas L , considerando os efeitos quasilineares de emissão induzida e espontânea e não lineares de espalhamento e decaimento, induzido e espontâneo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} &= \mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3 v \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left(\hat{n} e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right) \\ &- \pi \sigma \mu_{\mathbf{k}}^L \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d^3 k' \frac{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}}^L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \Big) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
 & + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d^3 k' \int d^3 v \frac{\mu_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}'}^L (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 & \times \left[\frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi \frac{m_e}{m_i} \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}}^L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

E, para ondas S , considerando os mesmos efeitos (inclusive o de espalhamento, que aqui foi incluído por completicidade), temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \frac{1}{\mu_{\mathbf{k}}^S} = \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3 v \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[\hat{n} e^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 & \quad \left. + \pi (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right] \\
 & - \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d^3 k' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}}^S} \right. \\
 & + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}}^S} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \Big) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 & + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d^3 k' \int d^3 v \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4 \lambda_{De}^4} \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 & \times \left[\frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 & \quad \left. + \pi \frac{m_e}{m_i} \left(W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sigma \sigma' \frac{k'}{k} \right) \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S \mu_{\mathbf{k}}^S} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

onde, após manipulações algébricas, o fator $W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ fica da seguinte forma

$$W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right)^2 \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^4 \lambda_{De}^4 |\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S)|^2}, \tag{3.118}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\parallel}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S) & = 1 + \frac{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k')}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (k - \sigma \sigma' k')^2 \lambda_{De}^2} \\
 & + i \left(\frac{\pi m_e}{2 m_i} \right)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{m_e \xi}{m_i 2}\right) + \left(\frac{m_i T_e^3}{m_e T_i^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{T_e \xi}{T_i 2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

com

$$\xi = \frac{(\sigma k - \sigma' k')^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \tag{3.120}$$

A equação para as partículas é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} & = \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d^3 k \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\
 & \times \left(\frac{m_a}{4\pi^2} \frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{k} F_a(\mathbf{v}) + \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Para escrever as equações acima foram usadas as seguintes definições

$$\frac{1}{\epsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L)} = \frac{\sigma\mu_{\mathbf{k}}^L\omega_{\mathbf{k}}^L}{2}, \quad \frac{1}{\epsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^S)} = \frac{\sigma\mu_{\mathbf{k}}^S\omega_{\mathbf{k}}^L}{2},$$

$$\mu_{\mathbf{k}}^L = 1, \quad \mu_{\mathbf{k}}^S = |k|^3\lambda_{De}^3\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{3T_i}{T_e}\right)^{1/2},$$

onde $\mu_{\mathbf{k}}^L$ foi definido com a intenção de dar um aspecto de simetria entre as equações para as ondas L e as equações para as ondas S .

Capítulo 4

Colisões em plasmas

No capítulo sobre teoria cinética, quando apresentamos a equação de Boltzmann (2.1), descartamos o termo à direita da igualdade, responsável pela descrição dos efeitos colisionais. Naquele momento, argumentamos que estávamos interessados em descrever processos que ocorriam em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de relaxação colisional. Ou seja, no ponto em que todo o desenvolvimento desses processos já tivesse ocorrido e saturado, o efeito das colisões, na evolução do sistema, ainda não seria significativo.

Sob essa hipótese, seguimos, inicialmente, com a teoria linear, na qual conseguimos descrever somente os efeitos instantâneos que surgem quando uma pequena perturbação atua no sistema, ou seja, a função de distribuição não evoluía no tempo. Em seguida, prosseguimos com a teoria quasilinear, com a qual obtivemos a evolução temporal da função de distribuição e do espectro das ondas. Naquela ocasião, ao escrevermos as equações da teoria quasilinear, argumentamos que a evolução temporal da função de distribuição era muito lenta quando comparada com os períodos das ondas do plasma. No entanto, quando as colisões entram em cena, esse processo pode ser considerado rápido em comparação com o tempo de relaxação colisional. Por fim, abordamos os efeitos não lineares que ocorrem quando essas flutuações (as mesmas da teoria linear e da teoria quasilinear) atuam sobre o plasma. Esses processos, por serem de ordem mais alta, são menos intensos do que os efeitos quasilineares, logo, tem uma atuação mais lenta e seus efeitos perduram por mais tempo¹. Nos dois primeiros casos, nas teorias linear e quasilinear, podemos considerar que a hipótese adotada é, de certa forma, bem precisa, pois a primeira não evolui e a segunda satura rapidamente. Para o terceiro caso, os processos não lineares, essa premissa também é válida, mas só até certo ponto, uma vez que seus efeitos só surgem após o crescimento das ondas por efeitos quasilineares e, a partir daí, continuam atuando a longo prazo, sem saturação. Sendo assim, se quisermos avaliar de maneira mais cuidadosa a evolução dos processos não lineares a tempos longos, é interessante que incluamos o efeito das colisões nesse estudo.

Para discutirmos a influência dos efeitos colisionais sobre a evolução temporal da função de distribuição do plasma, vamos expor, resumidamente, o formalismo de Klimontovich, focando no termo de correlações de segunda ordem, necessário para que expressemos a integral colisional. Em seguida, discutiremos rapidamente diferentes formas de operadores colisionais que surgem desse formalismo, suas aplicações e seus limites de validade. Por fim, faremos uma discussão

¹Uma abordagem detalhada desses efeitos não lineares, aplicados à interação feixe-plasma, em duas dimensões, pode ser encontrada em [7].

mais detalhada sobre o operador que será utilizado em nosso estudo, o operador colisional de Fokker-Plank.

4.1 Breve resumo do formalismo de Klimontovich

Nosso objetivo nesta seção não é fazer um estudo detalhado do formalismo de Klimontovich, visto que esse tópico é amplamente abordado na literatura e pode ser estudado diretamente nos livros do próprio Klimontovich, [10, 29], que são excelentes referências no que se refere à teoria estatística aplicada a plasmas e servirão de base para este resumo. O nosso interesse aqui é dar uma idéia clara de onde surge uma expressão matemática para o termo à direita da igualdade em (2.1) que, até então, conhecemos apenas como $(\partial f_a / \partial t)_{coll}$.

4.1.1 Equações microscópicas para um plasma totalmente ionizado

O estado microscópico de um plasma, em um certo instante no tempo, ao contrário do que ocorre com um gás composto por partículas neutras, não é totalmente definido quando conhecemos as $6N$ coordenadas de espaço e de velocidade de todas as suas partículas. Isso porque a presença de partículas dotadas de carga elétrica em um plasma faz com que tenhamos que definir, também, os valores das amplitudes microscópicas dos campos elétrico e magnético em cada ponto no espaço, o que acrescenta um grau de dificuldade extra na descrição da dinâmica do sistema [10]. Vamos denotar e_a e m_a como a carga e a massa de uma partícula do tipo a , respectivamente. Em um plasma totalmente ionizado o subíndice a assume dois valores: $a = e, i$, onde $e_e \equiv -e$ e $e_i = Ze$. Sendo N_a o número total de partículas da espécie a , podemos escrever a condição de neutralidade de um plasma como

$$\sum_a e_a N_a = 0. \quad (4.1)$$

A densidade de fase das partículas do tipo a , no espaço de fases hexadimensional, $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, é definida como

$$N_a(x, t) = N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_a} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ia}(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ia}(t)], \quad (4.2)$$

ou, de uma forma mais concisa,

$$N_a(x, t) = \sum_{i=1}^{N_a} \delta[x - x_{ia}(t)]. \quad (4.3)$$

Das definições acima temos que $N_a(x, t)dx$ é igual ao número total de partículas da espécie a , cujas coordenadas de espaço e de velocidade x , em um certo instante de tempo t , localizam-se no interior do elemento de volume infinitesimal dx .

A dinâmica da densidade de fase $N_a(x, t)$ evolui de acordo com a seguinte equação

$$\frac{\partial N_a(x, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_a(x, t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t)}{m_a} \cdot \frac{\partial N_a(x, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4.4)$$

O sobrescrito M na equação acima, sinaliza que a força em questão, que é de natureza eletromagnética, depende dos campos elétrico e magnético microscópicos. Sendo assim, ela é composta pela força de Lorentz, em termos dos campos elétrico e magnético microscópicos, mais uma força externa que, normalmente, também é de natureza eletromagnética:

$$\mathbf{F}_a^M = \mathbf{F}_{a0} + e_a \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M(\mathbf{r}, t)]. \quad (4.5)$$

Vamos supor que nosso plasma não sofre a influência de campos externos e, portanto, $\mathbf{F}_{a0} = 0$. Substituindo na equação de movimento para a densidade de fase, obtemos a equação de “Klimontovich-Dupree”:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \left[\mathbf{E}^M + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}^M \right) \right] \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.6)$$

onde, por simplicidade de notação, suprimimos a dependência em (\mathbf{r}, t) dos campos \mathbf{E}^M e \mathbf{B}^M , assim como a dependência em (x, t) da densidade de fase.

As densidades microscópicas de carga e de corrente, q^M e j^M , respectivamente, são expressas em termos da densidade de fase:

$$\begin{aligned} q^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \int d^3v N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ j^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \int d^3v \mathbf{v} N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Os campos elétrico e magnético microscópicos são dadas pelas equações de Maxwell, também expressas em termos da densidade de fase:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^M &= 4\pi \sum_a e_a \int d^3v N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^M &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}^M &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}^M &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int d^3v \mathbf{v} N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

As equações (4.6) e (4.8) formam um conjunto fechado de equações para as funções microscópicas $N_a(x, t)$, $\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}^M(\mathbf{r}, t)$. No entanto, estamos interessados no caso em que atuam apenas ondas eletrostáticas sobre o plasma. Dessa forma, $\nabla \times \mathbf{E}^M = 0$ e $\nabla \times \mathbf{B}^M = 0$, de maneira que ficamos com um sistema de equações mais simples:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}^M \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_a e_a \int d^3v N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (4.10)$$

Com isso, podemos escrever o campo elétrico como o negativo do gradiente do potencial eletrostático microscópico

$$\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi^M(\mathbf{r}, t). \quad (4.11)$$

Embora este sistema de equações seja muito parecido com o sistema apresentado na seção 2.1, ele não é o mesmo, visto que a formulação que temos aqui é exata, do ponto de vista clássico, enquanto a formulação anterior já contava com uma abordagem estatística.

4.1.2 Média das equações microscópicas

O sistema de equações classicamente exatas que obtivemos na subseção anterior não é nada prático, pois ele leva em conta a evolução de cada partícula individualmente, e plasmas, por via de regra, são sistemas compostos por um número muito grande de partículas. Calcular a evolução deste sistema, com essas equações é uma tarefa impraticável. Esse foi o nosso argumento para que, no [Capítulo 2](#), fôssemos direto para as equações estatísticas. Nesta subseção, nosso objetivo é obter essa formulação estatística, mas dando ênfase ao desenvolvimento da integral colisional.

Vamos começar tomando a média da equação (4.9)

$$\frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (4.12)$$

Usando as definições [10], da função de distribuição f_a e do campo médio \mathbf{E} , temos as seguintes médias

$$\begin{aligned} \langle N_a(x, t) \rangle &= n_a f_a(x, t) \\ \langle \mathbf{E}^M \rangle &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

e a identidade

$$\left\langle \mathbf{E}^M N_a(x, t) \right\rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) n_a f_a(x, t) + \left\langle \delta \mathbf{E}^M \delta N_a \right\rangle_{\mathbf{r}, x, t}, \quad (4.14)$$

onde $n_a = N_a/V$ é a concentração média das partículas da espécie a e os termos com δ representam as flutuações infinitesimais, das funções microscópicas, em torno da média.

Com isso, podemos reescrever nosso sistema de equações da seguinte forma [10, 29]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} &= - \frac{e_a}{n_a m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \right\rangle_{\mathbf{r}, x, t} \equiv C_a(x, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_a e_a n_a \int d^3v f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde o termo $C_a(x, t)$ à direita da igualdade, na primeira equação, é chamado de “integral colisional”. Essas equações não formam um conjunto fechado, uma vez que a integral colisional tem dependência com o segundo momento $\left\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \right\rangle_{\mathbf{r}, x, t}$. Cabe ressaltar que se fizermos $C_a(x, t) = 0$, obtemos a forma eletrostática da equação (2.3), que é a aproximação de primeiro momento, ou seja, voltamos à teoria de Vlasov, na qual todas as correlações são ignoradas.

Expressando a flutuação do campo elétrico em termos do potencial eletrostático, podemos escrever o segundo momento em termos de $\left\langle \delta N_a \delta N_b \right\rangle_{x, x', t}$, como segue

$$\left\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \right\rangle_{\mathbf{r}, x, t} = - \sum_b e_b \int dx' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\langle \delta N_a \delta N_b \right\rangle_{x, x', t}. \quad (4.16)$$

Dessa forma, ficamos com a seguinte expressão para o termo de colisões

$$C_a(x, t) = \frac{1}{n_a m_a} \sum_b \int d^3r' d^3v' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \right\rangle. \quad (4.17)$$

Fica claro, pela equação acima, que precisamos obter uma expressão para a evolução do segundo momento central, se quisermos escrever uma equação cinética para as colisões.

Médias dos produtos entre as flutuações das densidades de fase, em termos das funções de distribuição reduzidas e em termos das correlações de muitos corpos:

Anteriormente, vimos que a média da densidade de fase para uma partícula é dada por

$$\langle N_a(x, t) \rangle = n_a f_a. \quad (4.18)$$

Analogamente, podemos conectar o valor médio dos produtos das densidades de fase N_a, N_b, N_c, \dots , em diferentes pontos do espaço de fase, com as funções de distribuição [10]. Para fazer isso, vamos começar considerando a soma dupla

$$\sum_{1 \ll i \ll N_a} \sum_{1 \ll j \ll N_b} \delta(x - x_{ai}) \delta(x' - x_{bj}), \quad (4.19)$$

dividindo-a em duas partes,

$$\sum_{1 \ll i \ll N_a} \sum_{1 \ll j \ll N_b} \delta(x - x_{ai}) \delta(x' - x_{bj}) + \delta_{ab} \sum_{1 \ll i \ll N_a} \delta(x - x_{ai}) \delta(x - x'). \quad (4.20)$$

Tomando os limites $N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$, a razão $N/V = n$, com n constante; e, considerando o caso em que as partículas do tipo a possam ser da mesma espécie que as partículas da espécie b , obtemos a seguinte expressão

$$\langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle = n_a n_b f_{ab}(x, x', t) + \delta_{ab} n_a \delta(x - x') f_a(x, t), \quad (4.21)$$

onde, comparando com N_a , desprezamos a unidade, e onde f_{ab} é a função de distribuição para duas partículas das espécies a e b . O termo com a delta serve para distinguir a posição das partículas no caso em que $a = b$, dessa forma duas partículas não podem ocupar o mesmo ponto no espaço de fase. Com a intenção de deixar mais clara a posição de cada partícula, fizemos uma pequena mudança na notação, substituindo o subíndice externo aos *brackets*, por parênteses ao lado de cada densidade de fase.

Prosseguindo, para o produto entre três densidades de fase, temos [10, 29]

$$\begin{aligned} \langle N_a(x, t) N_b(x', t) N_c(x'', t) \rangle &= n_a n_b n_c f_{abc}(x, x', x'', t) \\ &+ \delta_{ab} n_a n_c \delta(x - x') f_{ac}(x, x'', t) \\ &+ \delta_{ac} n_a n_b \delta(x - x'') f_{ab}(x, x', t) \\ &+ \delta_{bc} n_a n_c \delta(x' - x'') f_{ac}(x, x'', t) \\ &+ \delta_{ab} \delta_{bc} n_a \delta(x - x') \delta(x' - x'') f_a(x, x'', t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Vamos nos limitar a expressar somente até o terceiro momento, mas o mesmo procedimento poderia ser feito para o produto entre quatro, cinco densidades de fase, e assim por diante.

Podemos escrever as funções de distribuição para duas ou mais partículas em termos das suas respectivas funções de correlação. Novamente, vamos nos restringir às correlações entre duas partículas, $g_{ab}(x, x', t)$, e três partículas, $g_{abc}(x, x', x'', t)$ [10, 29]:

$$\begin{aligned} f_{ab}(x, x', t) &= f_a(x, t) f_b(x', t) + g_{ab}(x, x', t), \\ f_{abc}(x, x', x'', t) &= f_a(x, t) f_b(x', t) f_c(x'', t) \\ &+ f_a(x, t) g_{bc}(x', x'', t) \\ &+ f_b(x', t) g_{ac}(x, x'', t) \\ &+ f_c(x'', t) g_{ab}(x, x', t) \\ &+ g_{abc}(x, x', x'', t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

O desvio da média da função aleatória $N_a(x, t)$, é dado por [10, 29]

$$\delta N_a(x, t) = N_a(x, t) - \langle N_a(x, t) \rangle, \quad (4.24)$$

da qual obtemos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \langle \delta N_a(x, t) \rangle &= 0, \\ \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle &= \langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle - \langle N_a(x, t) \rangle \langle N_b(x', t) \rangle, \\ \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) N_c(x'', t) \rangle &= \langle N_a(x, t) N_b(x', t) N_c(x'', t) \rangle \\ &\quad - \langle N_a(x, t) \rangle \langle \delta N_b(x', t) \delta N_c(x'', t) \rangle \\ &\quad - \langle N_b(x', t) \rangle \langle \delta N_c(x'', t) \delta N_a(x, t) \rangle \\ &\quad - \langle N_c(x'', t) \rangle \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle \\ &\quad - \langle N_a(x, t) \rangle \langle N_b(x', t) \rangle \langle N_c(x'', t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Combinando as expressões acima, com a equação (4.21), mais a primeira equação em (4.23), conseguimos conectar a média do produto entre duas flutuações das densidades de fase, com a correlação de dois corpos g_{ab} . Dessa forma, obtemos uma expressão para o segundo momento central em termos da correlação de pares [10, 29]:

$$\langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle = n_a n_b g_{ab}(x, x', t) + \delta_{ab} \delta(x - x') n_a f_a. \quad (4.26)$$

E, para o terceiro momento, em termos das correlações de três corpos g_{abc} , temos [10, 29]

$$\begin{aligned} \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \delta N_c(x'', t) \rangle &= n_a n_b n_c g_{abc}(x, x', x'', t) \\ &\quad + \delta_{ab} \delta(x - x') n_b n_c g_{bc}(x', x'', t) \\ &\quad + \delta_{bc} \delta(x' - x'') n_a n_c g_{ac}(x, x'', t) \\ &\quad + \delta_{ac} \delta(x - x'') n_a n_b g_{ab}(x, x', t) \\ &\quad + \delta_{ab} \delta_{bc} \delta(x - x') \delta(x' - x'') n_c f_c(x'', t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.1.3 Equações hierárquicas de Klimontovich

Para atingirmos nosso objetivo, precisamos derivar uma equação para $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}$. Vamos começar examinando as funções $\delta N_a(x, t)$ e $\delta E(\mathbf{r}, t)$. Partindo de (4.9), usando a seguinte propriedade [10]

$$\mathbf{E}^M N_a = \mathbf{E} \langle N_a \rangle + \delta \mathbf{E} \langle N_a \rangle + \mathbf{E} \delta N_a + \delta \mathbf{E} \delta N_a, \quad (4.28)$$

e lembrando de (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (n_a f_a + \delta N_a) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_a f_a + \delta N_a) \\ &+ \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} n_a f_a + \delta \mathbf{E} n_a f_a + \mathbf{E} \delta N_a + \delta \mathbf{E} \delta N_a) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Agrupando os termos com flutuações e separando-os dos termos que levam apenas os valores médios, ficamos com

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \delta N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\delta \mathbf{E} n_a f_a + \mathbf{E} \delta N_a + \delta \mathbf{E} \delta N_a) \\ &= -n_a \underbrace{\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right)}_{= -\frac{e_a}{n_a m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por fim, usando (4.15) e (4.10), obtemos as equações para as flutuações aleatórias δN_a e $\delta \mathbf{E}$, respectivamente [10, 29],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_a n_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \\ = - \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\delta \mathbf{E} \delta N_a - \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t} \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int d^3 v \delta N_a \quad \text{e} \quad \nabla \times \delta \mathbf{E} = 0, \quad (4.32)$$

com $\delta \mathbf{E}$ e $\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t}$ podendo ser expressos, respectivamente, como

$$\delta E = - \sum_b e_b \int dx' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t), \quad (4.33)$$

e

$$\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t} = - \sum_b e_b \int dx' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}. \quad (4.34)$$

O mesmo procedimento deve ser feito para $\delta N_b(x', t)$. Em seguida, multiplicamos a equação para $\delta N_a(x, t)$, por $\delta N_b(x', t)$ e tomamos a média. Fazemos o mesmo para a equação para $\delta N_b(x', t)$, mas dessa vez multiplicando por $\delta N_a(x, t)$. Por fim, somamos os dois resultados. Dessa forma, obtemos uma equação para $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}$ [29]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} \\ + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} \\ + \frac{e_a n_a}{m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{\mathbf{r}, x, t} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b n_b}{m_b} \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \rangle_{x, \mathbf{r}', t} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}'} \\ = - \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \delta N_b \rangle_{\mathbf{r}, x, x', t} - \frac{e_b}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \cdot \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{x', \mathbf{r}, x', t}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Esta é a segunda equação da hierarquia de equações cinéticas, chamada “hierarquia BBGKY” (a sigla vem de “Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood e Yvon”), onde $\delta \mathbf{E}$ é dado por (4.32). Os segundo e terceiro momentos, podem ser escritos em termos das correlações de dois e de três corpos, (4.26) e (4.27), respectivamente, dessa forma obtemos uma cadeia de equações para f_a , em termos das funções de correlação g_{ab}, g_{abc}, \dots .

Vemos que o sistema de equações formado por (4.32) e por (4.35), não é um sistema fechado, uma vez que há a presença do terceiro momento no lado direito da equação (4.35) e, supondo que fôssemos escrever uma equação para o terceiro momento, esta envolveria o quarto momento e assim por diante, com expressões cada vez maiores e mais complexas. Se conseguíssemos escrever e resolver toda essa cadeia de equações acopladas, teríamos um conhecimento completo do sistema. Contudo, essa tarefa é tão complicada quanto resolver as equações microscópicas (4.6) e (4.8), o que, como já observado, é impraticável. Precisamos então, definir um critério para cortarmos esta cadeia de equações e obtermos um sistema fechado que considere apenas os primeiros momentos.

Parâmetro de plasma

Em gases neutros e rarefeitos, a esfera de interação molecular tem um raio da ordem do raio das moléculas, $r_0 \sim 10^{-8} - 10^{-7}$ cm, o que torna a interação entre três ou mais moléculas algo muito raro, visto que é bem improvável que, em um gás rarefeito, três moléculas se aproximem, ao mesmo tempo, a uma distância tão curta, da ordem de r_0 [10]. Com base nisso, é possível quebrar a cadeia de equações, equivalente para gases neutros, a partir dos termos de correlação de três corpos g_{abc} e obter um sistema fechado de equações para as funções f_a e g_{ab} .

Por outro lado, em plasmas, as interações entre as partículas carregadas são dominadas pela lei de Coulomb e, sendo assim, a intensidade da interação decai com r^{-1} , ou seja, muito mais lentamente do que em gases neutros. Nesse caso, uma partícula interage ao mesmo tempo com muitas outras partículas e o alcance das interações efetivas entre as partículas carregadas é dado pelo “comprimento de Debye”, definido como [29]

$$\lambda_D^2 = \frac{T}{4\pi \sum_a e_a^2 n_a}, \quad (4.36)$$

onde, como é costume na física de plasmas, suprimimos a constante de Boltzmann k_B que multiplica a temperatura T .

O comprimento de Debye define o raio da chamada “esfera de Debye”, que é a esfera que define o volume de interação de uma partícula com as partículas de seu entorno. Isso significa que, na maioria dos plasmas, a esfera de Debye contém um grande número de partículas, isto é, $n\lambda_D^3 \gg 1$. Como nossa intenção é encontrar um parâmetro que seja pequeno o bastante, de maneira que justifique um corte na cadeia de equações cinéticas, podemos definir um parâmetro que seja o inverso do número de partículas em uma esfera de Debye [29], da seguinte forma

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}. \quad (4.37)$$

Este é o chamado “parâmetro de plasma”.

Se a obtenção deste parâmetro tão importante soa um tanto quanto artificial, podemos analisar as definições das quantidades g e λ_D . Disso obtemos que

$$g \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{T}, \quad (4.38)$$

ou seja, o parâmetro de plasma é da mesma ordem da razão entre a energia média de interação entre duas partículas e a energia cinética de uma dessas partículas [12].

Vamos então assumir que o parâmetro de plasma é pequeno. Se $g \ll 1$, isto é, a energia de interação é muito menor do que a energia cinética, podemos assumir que a correlação entre as partículas seja fraca [12]. Sendo assim, podemos supor que

$$f_a \sim \mathcal{O}(1), \quad g_{ab} \sim \mathcal{O}(g), \quad g_{abc} \sim \mathcal{O}(g^2), \quad \dots \quad (4.39)$$

Essas hipóteses permitem que desprezemos termos de ordem g^n , com $n = 0, 1, 2, \dots$ denotando a ordem das correlações. Dessa forma, podemos cortar a hierarquia de equações. Embora essas hipóteses seja razoáveis e adequadas, não há uma prova definitiva que sirva para um caso geral².

² Notas de aula do professor Luiz Fernando Ziebell no Instituto de Física da UFRGS, sob o título de *FIP20810, Tópicos em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, divulgadas aproximadamente em outubro de 2014. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf>. Acesso em março de 2015.

4.1.4 Aproximações de segundo momento e de polarização

Aproximação de segundo momento

Partindo da equação (4.35) e ignorando os termos que envolvem os terceiros momentos, ou seja, fazendo o lado direito desta equação igual a zero, obtemos uma expressão para a aproximação de segundo momento

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} \\
 & + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} \\
 & + \frac{e_a n_a}{m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{\mathbf{r},x,t} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b n_b}{m_b} \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \rangle_{x,\mathbf{r}',t} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}'} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

No entanto, esta aproximação não é apropriada para a aplicação em plasmas, pois, ao descartarmos completamente os termos à direita da segunda equação hierárquica, zeramos todos os termos de correlações binárias presentes em (4.27) [29].

Ocorre que, as interações entre as partículas carregadas de um plasma, decrescem mais lentamente conforme elas afastam-se umas das outras, o que faz com que interajam simultaneamente com várias outras partículas; e são esses termos de correlações binárias, presentes na expressão para o terceiro momento, que dão conta das interações com mais de uma partícula [29]. Vamos então, adotar outra abordagem para a simplificação da equação (4.35).

Aproximação de polarização

Na aproximação de polarização, vamos manter as contribuições dos termos que envolvem f_a e g_{ab} , descartando somente as correlações ternárias na expressão para o terceiro momento central, que se encontram à direita da equação (4.35), sob a hipótese de que $g_{ab} \ll f_a f_b$, ou seja, nos processos de interação de pares, os efeitos das correlações são pequenos [29]. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right] \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} \\
 & + \frac{e_a n_a}{m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{\mathbf{r},x',t} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b n_b}{m_b} \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \rangle_{x,\mathbf{r}',t} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}'} \\
 & = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right] \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t}^0,
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t}^0 = \frac{N_a}{V} \delta_{ab} \left[\delta(x - x') f_a(x, t) - \frac{1}{V} f_a(x, t) f_b(x', t) \right]. \tag{4.42}$$

Nos limites $N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$, com $N/V = n$, a equação acima fica

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t}^0 = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \tag{4.43}$$

O sobrescrito '0' em (4.43) denota o fato de que este termo é independente do segundo momento e é completamente definido pela função de distribuição de partícula única f_a . Vamos chamá-lo de “termo de fonte” [29].

Usando (4.26) e (4.34), podemos escrever a aproximação de polarização em termos de $g_{ab}(x, x', t)$. Mas antes, para simplificarmos a nossa notação, vamos definir os seguintes operadores diferenciais:

$$\hat{L}_{ab} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \quad (4.44)$$

e

$$\hat{\theta}_{ab} = \frac{1}{m_a} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_b} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'}, \quad (4.45)$$

onde

$$\Phi_{ab} = \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.46)$$

é a energia potencial eletrostática.

Prosseguindo, a aproximação de polarização em termos das correlações de pares, com o uso dos operadores definidos acima, tem a seguinte forma [29]

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ab} g_{ab}(x, x', t) &= \hat{\theta}_{ab} f_a(x, t) f_b(x', t) \\ &+ \sum_c n_c \int dx'' \left[\hat{\theta}_{ac} g_{cb}(x'', x', t) f_a(x, t) + \hat{\theta}_{bc} g_{ac}(x, x'', t) f_b(x', t) \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Na expressão acima, o segundo termo à direita da igualdade, proporcional a n_c , leva em conta os efeitos da polarização do meio, tornando esta aproximação bem efetiva para a aplicação em plasmas.

A aproximação de polarização, apresentada nesta subseção, é o resultado de primeira ordem de uma expansão perturbativa feita em termos de potências do parâmetro de plasma g . Esta, foi introduzida por Bogolyubov com a intenção de levar em conta os efeitos coletivos que ocorrem em plasmas e, com isso, obter um sistema fechado de equações para a função de distribuição de partícula única $f_a(x, t)$, e para as correlações de duas partículas g_{ab} [29].

As equações hierárquicas para as flutuações de dois tempos são obtidas de forma semelhante à desenvolvida para as equações de um tempo e também podem ser aproximadas pelo método da aproximação de polarização. Sendo assim, iremos apenas apresentar as equações, sem maiores detalhes sobre a sua derivação.

Para as flutuações de uma partícula, temos

$$\hat{L}_a \delta N_a + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{v}} = \hat{L}_a \delta N_a^0, \quad (4.48)$$

onde,

$$\hat{L}_a = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4.49)$$

é o operador diferencial para partícula única. Nesta aproximação, as correlações das flutuações de fonte são definidas por

$$\hat{L}_a \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0 = 0, \quad (4.50)$$

com a seguinte condição inicial

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0 \Big|_{t'=t} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (4.51)$$

Multiplicando (4.48) por $\delta N_b(x', t')$ e tomando a média, obtemos a expressão para o segundo momento central de dois tempos

$$\hat{L}_a \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'} + \frac{e_a}{m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{\mathbf{r},t,x',t'} \cdot \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{v}} = \hat{L}_a \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0. \quad (4.52)$$

Com isso obtemos um conjunto autoconsistente de equações, para oscilações eletrostáticas em um plasma totalmente ionizado, composto pelas equações (4.15), (4.47) e (4.52), que devem ser resolvidas com a ajuda das equações (4.32) e (4.33). Esses resultados serão utilizados na derivação de uma expressão para a integral colisional.

4.2 Equações cinéticas colisionais

Como ponto de partida, para a escrever as equações cinéticas colisionais, vamos colocar a integral colisional, dada por

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{col} = - \frac{e_a}{m_a n_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \rangle_{x,\mathbf{r},t} \equiv C_a(x, t), \quad (4.53)$$

na sua representação espectral. Para isso, empregaremos o mesmo processo que foi utilizado na subseção 3.2.1, ver a equação (3.62). Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} C_a &= - \frac{e_a}{n_a m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k \int d\omega \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{-\mathbf{k}', -\omega', \mathbf{k}, \omega} \\ &= - \frac{e_a}{n_a m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k \int d\omega \frac{\mathbf{k}}{k} \langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde foi usada a seguinte propriedade de simetria

$$\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{-\mathbf{k}', -\omega', \mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (4.55)$$

Fazendo um paralelo com a subseção 3.2.1, vemos que o sistema composto pelas equações (3.63), (3.64) e (3.65) é muito semelhante ao sistema de equações que precisamos resolver. Naquela ocasião, seguimos por um caminho que desenvolvia os termos não lineares, levando às equações não lineares para a teoria de turbulência fraca. Agora, no entanto, nosso objetivo é outro; queremos obter as correlações diretas entre as partículas. Sendo assim, seguiremos a abordagem apresentada na seção anterior, que parte das equações para as densidades de fase microscópicas para cada componente do plasma e para os campos microscópicos. Com isso, simplificamos a nossa solução, pois em vez de resolvermos um complicado sistema de equações para a função de distribuição e para os campos, como foi feito em 3.2.1, temos de lidar com um conjunto de equações mais simples, para os momentos das densidades de fase e dos campos microscópicos. Este método, com um uso apropriado da aproximação de polarização, pode tornar nossa tarefa ainda mais simples.

4.2.1 Densidades espectrais

Precisamos escolher uma equação cinética para f_a , para isso, é necessário que expressemos a função espectral $\langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$ em termos da própria função de distribuição. A

aproximação de polarização permite que façamos isso de duas maneiras distintas. Na primeira opção, precisamos solucionar as equações para os segundos momentos centrais, $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t}$ e $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}$, o que pode ser bem complicado; na segunda abordagem, a solução pode ser obtida resolvendo o sistema de equações composto por (4.48), (4.50) e (4.51). Este último método é muito mais simples, pois, a primeira equação deste sistema, equivale a aproximarmos o lado direito de (4.31) usando [29]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta N_a^0 \approx -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\delta \mathbf{E} \delta N_a - \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r},x,t}). \quad (4.56)$$

Reescrevendo nosso sistema de equações, temos a seguinte equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) [\delta N_a - \delta N_a^0] = -\frac{e_a n_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4.57)$$

que deve ser solucionada com a ajuda de

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0 = 0, \quad (4.58)$$

usando a condição inicial

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0 \Big|_{t'=t} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (4.59)$$

E, para as flutuações do campo elétrico, temos

$$\nabla \times \delta \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int d^3v \delta N_a = 0. \quad (4.60)$$

Para que possamos definir a integral colisional, é suficiente que conheçamos as funções espectrais no domínio de frequência $\omega \gg \nu_a$ e no intervalo de vetores de onda $k \gg 1/l$, onde ν_a é a frequência de colisões das partículas do tipo a e l é o tamanho do sistema [29].

Parâmetros colisionais, limites de validade e hipóteses simplificadoras:

Antes de prosseguirmos com a derivação das equações cinéticas para as colisões, precisamos definir muito bem alguns aspectos relacionados aos processos colisionais em plasmas.

Vamos começar denotando o tempo de relaxação da função de distribuição f_a , como τ_a . O tempo de relaxação mínimo, isto é, o tempo necessário para que o equilíbrio local seja atingido, é dado por τ_{rel} . Outro parâmetro importante é o comprimento de relaxação mínimo l_{rel} , que se relaciona com o tempo de relaxação mínimo da seguinte forma, $l_{rel} = v_{th} \tau_{rel}$, onde v_{th} é a velocidade térmica. Podemos colocar τ_{rel} e l_{rel} em termos do parâmetro de plasma: $\tau_{rel} \sim 1/\omega_{pe} g$ e $l_{rel} \sim \lambda_{De}/g$, onde ω_{pe} é a frequência de plasma para elétrons e λ_{De} é o comprimento de Debye. Considerando um plasma rarefeito, em que $g \ll 1$, temos as seguintes relações:

$$l_{rel} \sim \frac{\lambda_{De}}{g} \gg \lambda_{De} \quad \text{e} \quad \tau_{rel} \sim \frac{1}{\omega_{pe} g} \gg \frac{1}{\omega_{pe}}. \quad (4.61)$$

Neste caso, podemos descartar os efeitos colisionais [29].

Os processos de relaxação são causados pela presença de flutuações, e sua contribuição, para a equação cinética da função de distribuição f_a , é dada pela equação (4.53). Conforme a integral colisional é expressa em termos das funções espectrais, é necessário que comparemos l_{rel} e τ_{rel} com as correlações de comprimento l_{cor} , e de tempo τ_{cor} .

Em um estado próximo ao equilíbrio, l_{cor} é definido pela distância em que o campo de uma partícula carregada é blindado, ou seja, o comprimento das correlações é o próprio comprimento de Debye. Isso significa que a principal contribuição vem dos vetores de onda em que $k > 1/\lambda_{De}$, isto é, $k_{min} \sim 1/\lambda_{De}$. Já tempo de correlação é diferente, para diferentes componentes de k : $\tau_{cor} \sim \tau_{cor}(k)$.

Para a derivação das equações cinéticas, é necessário que consideremos a hipótese de que as funções espectrais para $k < k_{min}$ tenham uma contribuição desprezível para a integral colisional. Isto porque o tempo de correlações $\tau_{cor}(k)$ normalmente diminui conforme k cresce, e isso permite que desprezemos os efeitos das correlações de longa duração. Portanto, só precisaremos considerar flutuações com tempos curtos de correlação [29], como segue

$$\tau_{cor}(k) \ll \tau_{cor}(k_{min}) = \tau_{cor,max}. \quad (4.62)$$

Em sistemas próximos ao equilíbrio,

$$\tau_{cor,max} \sim \frac{1}{k_{min}v_{th}} \sim \frac{\lambda_{De}}{v_{te}} \sim \frac{1}{\omega_{pe}}. \quad (4.63)$$

Combinando as equações acima com (4.61), concluímos que, para $g \ll 1$, essa hipótese corresponde a supormos que [29]

$$\tau_{cor,max} = \tau_{cor}(k_{min}) \ll \tau_{rel} \quad \text{e} \quad \frac{1}{k_{min}} \sim \lambda_{De} \ll l_{rel}. \quad (4.64)$$

Como consequência dessas desigualdades, podemos descartar as correlações iniciais durante a solução das equações para as correlações, ou das suas equações correspondentes para δN_a e $\delta \mathbf{E}$.

Então, de acordo com as suposições anteriores, vamos considerar, λ_{De} como um limite entre longo e curto alcance para as flutuações. Sendo o seu correspondente intervalo de tempo dado por

$$\tau_{\varphi} \sim \frac{\lambda_{De}}{v_{th}} \sim \frac{1}{\omega_{pe}}. \quad (4.65)$$

Isso significa que, ao resolvermos as equações para as funções espectrais, ou as equações para as flutuações δN_a e $\delta \mathbf{E}$, o atraso temporal e a variação espacial de f_a podem ser desprezados, quando comparados aos intervalos $\lambda_{De}/v_{th} \sim 1/\omega_{pe}$ e λ_{De} , respectivamente³ [29].

A definição desses limites entre flutuações de longo e de curto alcance, nos permite dar sentido às expressões campos “fortes”, “fracos”, “lentos”, de maneira que possamos conectar este significado com as soluções para δN_a e $\delta \mathbf{E}$. Sendo assim, um campo elétrico é considerado fraco quando

$$\frac{eE\lambda_{De}}{T} \ll 1. \quad (4.66)$$

³Ou seja, entende-se que a escala de variação temporal da f_a é bem maior do que o período das oscilações, e a escala de variação espacial da f_a é bem maior do que o alcance das correlações.

E um campo magnético é fraco se

$$\Omega_c = \frac{eB}{mc} \ll \frac{1}{\tau_\varphi} \sim \omega_{pe}, \quad (4.67)$$

onde Ω_c é a frequência de cíclotron dos elétrons e c é a velocidade da luz.

Um campo elétrico, atuando na integral colisional, é considerado lentamente variável quando sua frequência ω_0 satisfaz

$$\omega_0 \ll \frac{1}{\tau_\varphi} \sim \omega_{pe}. \quad (4.68)$$

Portanto, considerando as hipóteses de campo fraco e lentamente variável, descritas acima, podemos descartar \mathbf{E} , o único campo médio que ainda aparecia em nossas equações [29]. Dessa forma, ficamos com equações mais simples para o cálculo das funções espectrais:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a - \delta N_a^0] = -\frac{e_a n_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4.69)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,t,x',t'}^0 = 0. \quad (4.70)$$

Da equação (4.69) nós temos

$$\delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}) = \delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}) - \frac{ie_a n_a}{m_a k} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \delta E_{\mathbf{k},\omega}, \quad (4.71)$$

onde usamos

$$\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \delta E_{\mathbf{k},\omega} \hat{\mathbf{k}} = \delta E_{\mathbf{k},\omega} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (4.72)$$

Multiplicando (4.71) em ambos os lados por $\delta E_{-\mathbf{k},-\omega}$, tomando a média e usando (4.55), ficamos com

$$\langle \delta E_{\mathbf{k},\omega}^* \delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}) \rangle = \langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle - \frac{ie_a n_a}{m_a k} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}. \quad (4.73)$$

Para escrevermos uma expressão para $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}$, começamos substituindo (4.71) em (4.60), o que resulta em

$$ik \delta E_{\mathbf{k},\omega} = 4\pi \sum_a e_a \int d^3v \left(\delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}) - \frac{ie_a n_a}{m_a k} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \delta E_{\mathbf{k},\omega} \right). \quad (4.74)$$

A partir da equação acima, obtemos

$$\delta E_{\mathbf{k},\omega} = \frac{\delta E_{\mathbf{k},\omega}^0}{\epsilon(\mathbf{k},\omega)}, \quad (4.75)$$

onde $\delta E_{\mathbf{k},\omega}^0$ é dado por

$$\delta E_{\mathbf{k},\omega}^0 = -i \frac{4\pi}{k} \sum_a e_a \int d^3v \delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}), \quad (4.76)$$

e a constante dielétrica $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ é dada pela já conhecida expressão

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (4.77)$$

Sabemos que

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E_{\mathbf{k}, \omega}^* \delta E_{\mathbf{k}, \omega} \rangle. \quad (4.78)$$

Com base em (4.76) podemos escrever uma expressão para $\delta E_{\mathbf{k}, \omega}^*$,

$$\delta E_{\mathbf{k}, \omega}^* = i \frac{4\pi}{k\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \sum_b e_b \int d^3v' \delta N_{-\mathbf{k}, -\omega}^{b0}(\mathbf{v}') \quad (4.79)$$

que, junto com (4.74) e (4.76), nos fornece uma equação para (4.78) em termos de $\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$:

$$\begin{aligned} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{16\pi^2}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a \sum_b e_b \int d^3v' \int d^3v \langle \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{b0*}(\mathbf{v}') \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle \\ &= \frac{16\pi^2}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a \sum_b e_b \int d^3v' \int d^3v \langle \delta N_b^0(\mathbf{v}') \delta N_a^0(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por fim, precisamos de uma expressão para $\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$. Para isso, vamos trabalhar dentro dos limites $\lambda_{De}/v_{th} \sim 1/\omega_{pe}$ e λ_{De} , de forma que podemos tratar a função de distribuição f_a como independente de \mathbf{r} e de t . Portanto, temos

$$\begin{aligned} \langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d(t - t') \\ &\quad \times \langle \delta N_a^0(r, \mathbf{v}, t) \delta N_b^0(r', \mathbf{v}', t) \rangle e^{-i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} \\ &= \delta_{ab} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \frac{1}{(2\pi)^4} \int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d(t - t') \\ &\quad \times \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] f_a(\mathbf{v}) e^{-i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{ab} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_a f_a(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Substituindo (4.81) em (4.80) e integrando em \mathbf{v} , obtemos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_b e_b^2 n_b \int d^3v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}'). \quad (4.82)$$

Para o termo $\langle \delta E_{-\mathbf{k}, -\omega} \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle$, o procedimento é parecido. Usando (4.79), podemos escrevê-lo em termos de $\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$, como segue

$$\langle \delta E_{-\mathbf{k}, -\omega} \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle = i \frac{4\pi}{k\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \sum_b e_b \int d^3v' \langle \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0} \delta N_{-\mathbf{k}, -\omega}^{b0}(\mathbf{v}') \rangle. \quad (4.83)$$

Aplicando o resultado obtido em (4.81) e integrando em \mathbf{v}' , ficamos com

$$\langle \delta E_{-\mathbf{k}, -\omega} \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle = i \frac{e_a n_a \epsilon^*(\mathbf{k}, t)}{2\pi^2 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}). \quad (4.84)$$

Então, substituindo (4.82) e (4.84) em (4.73), obtemos uma representação da função espectral $\langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$, em termos das funções de distribuição f_a e f_b :

$$\begin{aligned} \langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= i \frac{e_a n_a \epsilon^*(\mathbf{k}, t)}{2\pi^2 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\ &- \frac{i e_a n_a \mathbf{k} \cdot \partial f_a(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{m_a k} \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_b e_b^2 n_b \int d^3 v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Para colocar a equação acima em uma forma mais conhecida, fazemos uso da seguinte propriedade da constante dielétrica

$$\text{Re } i\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega) = \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\pi}{k^2} \sum_b \omega_{pb}^2 \int d^3 v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (4.86)$$

Substituindo a expressão acima em (4.85) e rearranjando os termos, ficamos com [29]

$$\begin{aligned} \langle \delta E^* \delta N_a(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \sum_b \frac{e_a n_a \omega_{pb}^2}{2\pi k^3 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \int d^3 v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \\ &\times \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} f_a(\mathbf{v}) - \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} f_b(\mathbf{v}') \right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

4.2.2 Equação cinética de Balescu-Lenard

Com a função espectral em termos de f_a e de f_b devidamente escrita, podemos inserí-la em (4.54). A equação resultante é conhecida como “equação cinética de Balescu-Lenard” e tem a seguinte forma [29]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{col} &= \sum_b \frac{2e_a^2 e_b^2 n_b}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 k \int d^3 v' \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \\ &\cdot \left(\frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} f_b(\mathbf{v}') - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} f_a(\mathbf{v}) \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Nesta equação é implicitamente concluído que $\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$, o que equivale a supormos que a contribuição dos modos normais de oscilação é desprezível. Isso pode ser verdade quando o plasma está próximo do equilíbrio térmico, já que, nesta condição, não há energia livre no plasma, logo, os modos normais de oscilação não podem ser excitados. Consequentemente, grande parte das flutuações eletrostáticas ocorrem via emissões térmicas espontâneas, nas quais $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \neq 0^4$. E é neste ponto que entram os termos de flutuações espontâneas apresentados no capítulo anterior.

Equação cinética tipo Fokker-Planck

Nosso principal interesse neste trabalho é agrupar a integral colisional às equações da teoria de turbulência fraca de uma maneira que essas equações possam ser integradas numericamente

⁴ Notas de aula do professor Peter H. Yoon na School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea, sob o título de Lecture 5. Spontaneous Thermal Fluctuation and Collisional Kinetic Equations, divulgadas aproximadamente no segundo semestre de 2011. Disponível em: <<http://migre.me/r5fHV>>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

através de um código eficiente e enxuto. Como o processo colisional é um processo que envolve interações entre partículas, é natural que queiramos aproximar a forma da integral colisional à forma da equação para a evolução temporal das partículas (3.121), ou seja, a forma de um operador de difusão quasilinear no espaço de velocidades. Quando a equação de Balescu-Lenard é colocada nesse formato, a integral colisional passa a ser chamada “equação de Fokker-Planck” ou “operador colisional de Fokker-Planck”.

Considerando essa possibilidade, voltamos à equação (4.73), mas dessa vez, mantemos a expressão $\langle \delta E^2 \rangle$ no segundo termo do lado direito. No primeiro termo do lado direito da mesma equação, em vez de substituirmos o resultado da última igualdade em (4.86), escrevemos apenas a propriedade expressa pela primeira igualdade, como segue

$$\langle \delta E_{-\mathbf{k}, -\omega} \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle = \frac{e_a n_a \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, t)}{2\pi^2 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}). \quad (4.89)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{col} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k \int d\omega \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\times \left(\frac{m_a}{2\pi^3} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, t)}{|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} f_a(\mathbf{v}) - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\pi}{k^2} \sum_b \omega_{pb}^2 \int d^3 v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}, \\ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_b e_b^2 n_b \int d^3 v' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (4.91)$$

O aspecto mais interessante da forma de Fokker-Planck do operador colisional, é que podemos escrevê-lo em termos de coeficientes:

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{col} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[A_i f_a(\mathbf{v}, t) + D_{ij} \frac{\partial f_a(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} \right], \quad (4.92)$$

onde A_i é o chamado “coeficiente de fricção” e D_{ij} é conhecido como “coeficiente de difusão”. As expressões para esses coeficientes são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{e_a^2}{2\pi^2 m_a} \int d^3 k \int d\omega \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{k_i}{k^2} \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2}, \\ D_{ij} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d^3 k \int d\omega \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \frac{k_i k_j}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Mais adiante, quando formos agrupar a equação colisional com as equações da teoria de turbulência fraca, a vantagem dessa representação ficará bem clara.

A equação colisional (4.90), junto com o sistema de equações (4.15), forma um conjunto fechado de equações cinéticas para um plasma, na aproximação de polarização. As principais propriedades do operador de colisões e os efeitos de sua atuação sobre o plasma, serão abordados na próxima seção.

4.2.3 Propriedades gerais do operador colisional de Balescu-Lenard

Como ponto de partida, vamos mostrar que se a função de distribuição f_a for uma distribuição Maxwelliana, a integral colisional C_a se anula. Para demonstrarmos essa propriedade, vamos considerar a integral no espaço de velocidades, no lado direito de (4.88).

A distribuição Maxwelliana tem a seguinte forma

$$f_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_{th_a}^3} e^{-v^2/v_{th_a}^2}, \quad (4.94)$$

onde v_{th_a} é a velocidade térmica das partículas a , que é dada por

$$v_{th_a}^2 = \frac{2T_a}{m_a}. \quad (4.95)$$

Então, a derivada da distribuição Maxwelliana com relação à velocidade fica

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -2 \frac{m_a}{T_a} \mathbf{v} f_a(\mathbf{v}). \quad (4.96)$$

Substituindo o resultado acima na integral de velocidade do termo de colisões, obtemos

$$\begin{aligned} & \int d^3 v' \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}') \\ &= -m_b \int d^3 v' \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{T_b} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{T_a} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}') \\ &= 0, \quad \text{se } T_a = T_b. \end{aligned} \quad (4.97)$$

O resultado acima nos mostra que distribuições de equilíbrio térmico, como a Maxwelliana, satisfazem a solução estacionária da equação cinética. Disso, podemos inferir que o termo de colisões tende a levar a evolução de qualquer função de distribuição arbitrária em direção ao equilíbrio térmico [29].

Agora, vamos considerar a seguinte integral

$$J_a(\mathbf{r}, t) = \sum_a n_a m_a \int d^3 v C_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \Phi(\mathbf{v}), \quad (4.98)$$

onde $\Phi(\mathbf{v})$ é uma função arbitrária e

$$\begin{aligned} C_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \sum_b \frac{2e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 k \int d^3 v' \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \\ &\quad \times \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{k^4} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Podemos mostrar que $J(\mathbf{r}, t) = 0$, para os casos em que $\Phi(\mathbf{v}) = 1$, \mathbf{v} e $v^2/2$. Para isso vamos substituir (4.99) em (4.98) e reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} J_a(\mathbf{r}, t) &= - \sum_a \sum_b \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{m_a^2} \int d^3 k \int d^3 v \int d^3 v' \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Nos dois primeiros casos, para $\Phi(\mathbf{v}) = 0$ e para $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, não precisamos nem efetuar os cálculos, visto que é evidente que o lado direito da expressão acima será nulo para esses valores de $\Phi(\mathbf{v})$. No terceiro caso, $\Phi(\mathbf{v}) = v^2/2$, após efetuarmos as derivadas nos resta a seguinte expressão

$$J_a(\mathbf{r}, t) = - \sum_a \sum_b \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{m_a^2} \int d^3 k \int d^3 v \int d^3 v' (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{k^4 |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}'), \quad (4.101)$$

que também vai a zero quando aplicamos as propriedades da função $\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')$.

Por fim, vamos mostrar que, levando em conta as correlações que definem a integral colisional, a entropia total de um plasma sempre aumenta e tende a uma constante no limite de tempo assintótico. Sendo assim, temos que a entropia em um plasma é dada por

$$S(t) = - \sum_a n_a \int d^3 v f_a(\mathbf{v}, t) \ln f_a(\mathbf{v}, t). \quad (4.102)$$

Fazendo

$$\Phi(\mathbf{v}) = - \ln f_a(\mathbf{v}, t), \quad (4.103)$$

introduzimos o vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= - \frac{1}{m_a} \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_b} \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \\ &= \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f_a(\mathbf{v}) - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \ln f_b(\mathbf{v}') \\ &= \frac{1}{m_a} \left(\frac{1}{f_a(\mathbf{v})} \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{1}{f_b(\mathbf{v}')} \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Podemos usar a expressão acima para reescrever (4.98) em termos de $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$

$$\begin{aligned} J_a(\mathbf{r}, t) &= \sum_a \sum_b \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{m_a^2} \int d^3 k \int d^3 v \int d^3 v' \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{k^4 |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}') \\ &\quad \times \left(\frac{1}{f_a(\mathbf{v})} \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{1}{f_b(\mathbf{v}')} \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right) \cdot \mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{f_a(\mathbf{v})} \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_a}{m_b} \frac{1}{f_b(\mathbf{v}')} \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right) \\ &= \sum_a \sum_b \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{m_a^2} \int d^3 k \int d^3 v \int d^3 v' \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{k^4 |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})^2. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Como o integrando da equação acima é positivo, temos que $J_a \geq 0$, sempre. O resultado igual a zero corresponde à seguinte situação

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f_a(\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \ln f_b(\mathbf{v}') = \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \quad (4.106)$$

onde α é uma constante independente dos índices a e b . Se essa condição é satisfeita, tanto a função $J_a(\mathbf{r}, t)$ quanto a integral colisional $C_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ serão nulas. A função de distribuição que corresponde a solução de (4.106) é a distribuição Maxwelliana, dada pela equação (4.94). Disso podemos tirar duas conclusões a respeito da entropia: *a*) a entropia atinge seu máximo quando as

funções de distribuição atingem o equilíbrio, isto é, quando todos os componentes do plasma se tornam Maxwellianos, com a mesma temperatura T e velocidade \mathbf{v} ; e b) se o máximo de entropia ocorre no estado de equilíbrio e as colisões tendem a levar o plasma a este estado, que é o estado final do sistema, então podemos concluir que a entropia sempre aumenta com o tempo. Portanto,

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (4.107)$$

Se olharmos o integrando de (4.88) com mais atenção, iremos perceber que a integral em \mathbf{k} diverge logarithmicamente. Isso pode ser verificado se fizermos $k \rightarrow \infty$, o que corresponde a $k \gg 1/\lambda_{De}$, neste caso, temos que $\epsilon \rightarrow 1$ e a integral colisional irá se comportar como

$$\int d^3k \mathcal{O} \left(\frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k^2} \right) \sim \int d^3k \mathcal{O} \left(\frac{1}{k} \right), \quad (4.108)$$

o que leva a uma divergência logarithmica para altos valores de \mathbf{k} [29].

A causa dessa divergência vem do fato de que, para pequenas distâncias ($r \ll \lambda_{De}$), a aproximação de polarização se torna idêntica à aproximação de acoplamento fraco. Portanto, a integral colisional obtida aqui é válida somente quando

$$r \gg \frac{|e_a e_b|}{T}, \quad (4.109)$$

ou seja, para distâncias em que a energia potencial é muito menor do que a energia cinética. A relação equivalente no espaço de vetor de onda é dada por [29]

$$k \ll \frac{T}{|e_a e_b|}. \quad (4.110)$$

A partir disso, podemos definir um limite aproximado de integração sobre k e assim evitar essa divergência. Esse limite é fenomenológico e é baseado na distância mínima entre duas cargas, na qual a energia térmica típica é balanceada pela energia eletrostática de Coulomb, como segue

$$T \sim \frac{|e_a e_b|}{r_{min}}. \quad (4.111)$$

Então, uma vez que $k \sim 1/r$, podemos definir um valor de corte para k , ou seja, um número de onda máximo para a integração:

$$k < k_{max} \sim \frac{T}{|e_a e_b|}. \quad (4.112)$$

Cabe ressaltar que, como a divergência para grandes valores de k é logarithmica, o valor exato deste corte tem pouca influência no resultado, desde que os limites fenomenológicos estabelecidos sejam respeitados [29].

4.2.4 Aproximação de acoplamento fraco: equação cinética colisional de Landau

Analisando (4.88) com mais atenção, percebemos que a função de distribuição f_a está presente não só explicitamente, entre parênteses, na própria equação, mas também aparece de

maneira implícita, na expressão para a constante dielétrica (4.77), que define a polarização do meio. Isso torna a equação de Balescu-Lenard bem complicada, o que nos leva a buscar uma alternativa mais simples, mas que ainda retenha as características principais da equação de Balescu-Lenard.

Essa forma alternativa, mais simples, do operador colisional existe e foi desenvolvida por Landau. Podemos derivá-la a partir da equação de Balescu-Lenard, considerando o fato de que a polarização de um plasma, a uma determinada frequência $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, é definida pela constante dielétrica $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$. Logo, podemos dizer que a equação (4.88) leva em conta a polarização dinâmica do plasma. Então, para obter a forma de Landau, vamos substituir $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$, pela constante dielétrica de equilíbrio $\epsilon(\mathbf{k}, 0)$, obtida da equação (2.56) fazendo $\omega = 0$:

$$\epsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{2}{\lambda_{De}^2 k^2}. \quad (4.113)$$

Como a constante dielétrica aparece no denominador da integral colisional, a contribuição maior na integral em k vem da região onde $k > 1/\lambda_{De}$. Podemos então, definir os seguintes limites de integração para k :

$$\frac{1}{\lambda_{De}} < k < k_{max} \sim \frac{T}{|e_a e_b|}. \quad (4.114)$$

No intervalo de números de onda definido acima, a constante dielétrica pode ser substituída pela unidade, ou seja, $\epsilon = 1$. Disso, resulta a chamada integral colisional de Landau, que tem a seguinte forma [29]

$$C_a = \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 v' Q_{ij}^{(ab)} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_j} f_b - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v'_j} f_a \right), \quad (4.115)$$

com

$$Q_{ij}^{(ab)} = \frac{2e_a^2 e_b^2}{m_a^2} \int d^3 k \frac{k_i k_j}{k^4} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'), \quad (4.116)$$

onde a integração em k é feita dentro dos limites definidos em (4.114).

A integração em (4.116) pode ser calculada analiticamente. Sem entrarmos em maiores detalhes, obtemos

$$Q_{ij}^{(ab)} = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2}{m_a^2} \ln \left(\frac{\lambda_{De} T}{|e_a e_b|} \right) \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \left[|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 \delta_{ij} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j \right], \quad (4.117)$$

onde o fator $\ln \left(\frac{\lambda_{De} T}{|e_a e_b|} \right)$ é conhecido como “logaritmo de Coulomb” e é definido como [29]

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{\lambda_{De} T}{|e_a e_b|} \right). \quad (4.118)$$

Fisicamente, essa aproximação é razoável, uma vez que a blindagem de Debye neutraliza efetivamente qualquer carga que esteja a uma distância maior do que $r \sim \lambda_{De}$. O que significa que podemos descartar as interações entre cargas que estejam a uma distância relativa maior do que o comprimento de Debye. Nesse contexto, podemos dizer que as partículas carregadas já não são mais atraídas ou repelidas a longas distâncias, pois estão blindadas devido aos efeitos coletivos. Ou seja, essas cargas estão fracamente acopladas. E é nessa aproximação que nosso trabalho será baseado.

Frequência de colisões

Um parâmetro importante a ser considerado quando estamos tratando de efeitos colisionais, é a frequência de colisões. Em um plasma totalmente ionizado, temos três possíveis tipos de colisões: elétron-elétron (e-e), íon-íon (i-i) e elétron-íon (e-i). Sendo assim, precisamos estimar uma frequência colisional para cada um desses casos. Então, sendo $a = e, i$, temos que a integral colisional pode ser escrita como

$$C_e = C_{ee} + C_{ei}, \quad C_i = C_{ii} + C_{ie}, \quad (4.119)$$

onde C_{ee} e C_{ei} representam a contribuição das colisões e-e e e-i, para a forma completa da integral colisional eletrônica. Da mesma forma, C_{ii} e C_{ie} representam a contribuição das colisões i-i e i-e, para a forma completa da integral colisional iônica. Lembrando que a equação (4.115), define as quatro integrais colisionais acima.

Vamos começar estimando a frequência das colisões e-e, $\nu_{ee} \equiv 1/\tau_{ee}$. De (4.115) e de (4.116), para colisões e-e, temos

$$I_{ee} \sim \nu_{ee} f_e = \frac{1}{\tau_{ee}} f_e, \quad (4.120)$$

com

$$\nu_{ee} \sim \frac{e^4 n}{m_e^{1/2} T^{3/2}} \ln \Lambda. \quad (4.121)$$

Usando $\lambda_{De} = (T/8\pi e^2 n)^{1/2}$, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n/m_e)^{1/2}$ e $g = 1/(n\lambda_{De}^3)$, podemos escrever ν_{ee} da seguinte forma

$$\nu_{ee} \sim \omega_{pe} g, \quad l_{ee} \equiv \frac{v_t}{\nu_{ee}} \sim \frac{\lambda_{De}}{g}. \quad (4.122)$$

Para um plasma de baixa densidade temos que, $g \ll 1$, onde g é o parâmetro de plasma. Disso, podemos concluir que a frequência colisional ν_{ee} é muito menor do que a frequência de Langmuir ω_{pe} e que o livre caminho médio l_{ee} é muito maior do que o comprimento de Debye λ_{De} [29].

Para estimar a frequência de colisões i-i, ν_{ii} , vamos supor um plasma isotérmico, ou seja, $T_e \approx T_i$. Então, para íons com carga única,

$$\nu_{ii} \sim \frac{e^4 n}{m_i^{1/2} T^{3/2}} \ln \Lambda \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \nu_{ee} \ll \nu_{ee}. \quad (4.123)$$

Usando (4.122), obtemos

$$\nu_{ii} \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} g \omega_{pe} = g \omega_{pi}, \quad (4.124)$$

onde $\omega_{pi} = (4\pi e^2 n/m_i)^{1/2}$ é a frequência de Langmuir para íons.

Por fim temos a frequência de colisões e-i. Esta frequência está associada ao processo de equalização das temperaturas T_e e T_i . Temos então, para ν_{ei}^T , onde o superscrito "T" se refere à taxa de equalização da temperatura [29],

$$\nu_{ei}^T \sim \frac{m_e}{m_i} \nu_{ee} \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \nu_{ii}, \quad (4.125)$$

como $m_e \ll m_i$, temos

$$\nu_{ee} \gg \nu_{ii} \gg \nu_{ei}^T, \quad \tau_{ee} \ll \tau_{ii} \ll \tau_{ei}^T. \quad (4.126)$$

Portanto, concluímos que existem vários níveis de processos de relaxação em um plasma. Para um tempo da ordem de τ_{ee} , um equilíbrio local é estabelecido para elétrons. Em tempos de ordem $\tau_{ii} \gg \tau_{ee}$, o equilíbrio local para íons é atingido. Então, as distribuições Maxwellianas terão temperaturas diferentes, T_i e T_e . A equalização das temperaturas T_e e T_i é um processo muito mais lento, com uma escala de tempo em torno de $\tau_{ei}^T \gg \tau_{ee}, \tau_{ii}$ [29].

4.3 Operador colisional de Fokker-Planck aplicado à interação feixe-plasma

Com os resultados gerais obtidos nas seções anteriores, vamos agora aplicar a integral colisional de Landau, na forma de Fokker-Planck, ao problema da interação feixe-plasma. Para isso, vamos tomar como base a referência [30], adotando, inclusive, suas notações e convenções. Sendo assim, a partir deste ponto, passaremos a nos referir à integral colisional de Landau, também, como “operador colisional de Fokker-Planck”.

Os efeitos nas partículas da espécie a , devido a colisão com as partículas do tipo b , são descritos, na nova notação, por

$$\theta(f_a, f_b) = 2\pi e_a^2 e_b^2 \ln \Lambda \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \int d^3 v_b \overleftrightarrow{\omega} \cdot \left(\frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \right) f_a f_b, \quad (4.127)$$

onde $\ln \Lambda$ é o fator de corte de Coulomb. Na expressão acima, o tensor $\overleftrightarrow{\omega}$ correlaciona a interação entre as partículas de acordo com a velocidade relativa entre elas, ou seja, ele é equivalente a $Q_{ij}^{(ab)}$ integrado, porém, nesta representação, as constantes não o acompanham, como pode ser visto abaixo

$$\overleftrightarrow{\omega} = \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} \quad (4.128)$$

$$= \frac{1}{g^3} \left(g^2 \overleftrightarrow{I} - \mathbf{g}\mathbf{g} \right), \quad (4.129)$$

onde

$$g = |\mathbf{g}| = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| \quad (4.130)$$

é o módulo da velocidade relativa e \overleftrightarrow{I} é a matriz identidade.

Ao integrarmos por partes o segundo termo de (4.127), obtemos [30]

$$\theta(f_a, f_b) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 \ln(\Lambda)}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \int d^3 v_b \overleftrightarrow{\omega} f_b - \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \int d^3 v_b \overleftrightarrow{\omega} f_b \right], \quad (4.131)$$

onde foi usada a relação

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \overleftrightarrow{\omega} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \cdot \overleftrightarrow{\omega}, \quad (4.132)$$

para que pudéssemos passar a derivada com relação à velocidade para fora da integral em \mathbf{v}_b .

Usando a definição (4.128), podemos reescrever (4.131) como

$$\theta(f_a, f_b) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 \ln(\Lambda)}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \int d^3 v_a \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a} f_b \right. \\ \left. - \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \int d^3 v_b \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a} f_b \right]. \quad (4.133)$$

Na expressão acima, podemos isolar os termos dentro da integral e definir o chamado “potencial efetivo de colisões” [30]:

$$F(x_{ab}) = \frac{1}{n_{0b} v_{thb}} \int d^3 v_b f_b g_{ab}, \quad (4.134)$$

sendo n_{0b} a densidade e v_{thb} a velocidade térmica das partículas do tipo b .

Por fim, usamos (4.134) para reescrever (4.133), obtendo

$$\theta(f_a, f_b) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 n_{0b} \ln(\Lambda) v_{thb}}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 F(x_{ab})}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} - \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 F(x_{ab})}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} \right], \quad (4.135)$$

onde definimos a velocidade normalizada $x_{ab} \equiv v_a/v_{thb}$.

O próximo passo é efetuar as derivadas indicadas em (4.135). Para isso, precisamos levar em conta o fato de que F é função de x_{ab} e que $x_{ab} = v_a/v_{thb}$, portanto, precisamos aplicar a regra da cadeia para calcular essas derivadas, como segue

$$\theta(f_a, f_b) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 n_{0b} \ln(\Lambda) v_{thb}}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \left(\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} F'(x_{ab}) \right) \right. \\ \left. - \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \left(\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} F'(x_{ab}) \right) \right], \quad (4.136)$$

onde deve ser levado em consideração o fato de a derivada ser vetorial, portanto os produtos escalares em (4.136) devem ser respeitados e mantidos. Prosseguindo, obtemos uma expressão bem complicada, como pode ser visto logo abaixo

$$\theta(f_a, f_b) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 n_{0b} \ln(\Lambda) v_{thb}}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left(\frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} F'(x_{ab}) + \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} F''(x_{ab}) \right) \right. \\ \left. - \frac{m_a}{m_b} f_a \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a} F'(x_{ab}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} F''(x_{ab}) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} F''(x_{ab}) + \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} F'''(x_{ab}) \right]. \quad (4.137)$$

As derivadas em x_{ab} podem ser calculadas utilizando as definições abaixo, que podem ser consultadas com mais detalhes em [30],

$$\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_{ab}} = \frac{1}{v_{thb}} \frac{\mathbf{v}_a}{v_a}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{2}{v_{thb} v_a}, \quad (4.138)$$

$$\frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} = \frac{1}{v_{thb} v_a^3} (v_a^2 \overleftarrow{I} - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a} = -\frac{2}{v_{thb} v_a^3} \mathbf{v}_a \quad (4.139)$$

e

$$\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} = 0. \quad (4.140)$$

Substituindo os resultados acima em (4.137), obtemos

$$\begin{aligned} \theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_a}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} F'(x_{ab}) + \frac{\mathbf{v}_a \mathbf{v}_a}{v_a^3} x_{ab} F''(x_{ab}) \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\mathbf{v}_a}{v_a^3} \left(F'(x_{ab}) - x_{ab} F''(x_{ab}) - \frac{x_{ab}^2}{2} F'''(x_{ab}) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.141)$$

onde

$$\Gamma_{ab} = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 n_{0b} \ln \Lambda}{m_a^2}. \quad (4.142)$$

O operador de colisões (4.141) é, em geral, um operador diferencial parcial, tridimensional, de quarta ordem [30]. Ou seja, esta ainda é uma equação bem complicada, portanto, para prosseguirmos, precisamos definir algumas hipóteses simplificadoras.

4.3.1 Operador de Fokker-Plank para um plasma Maxwelliano com a incidência de um feixe de elétrons de baixa densidade

Na interação feixe-plasma, a evolução mais significativa ocorre na cauda da função de distribuição, envolvendo uma população de partículas cuja densidade é muito menor do que a densidade da distribuição de fundo. Sendo assim, é coerente supor que os efeitos colisionais mais significativos se devam às colisões entre as partículas da cauda e as partículas da distribuição de fundo. Portanto, podemos desprezar as colisões entre partículas do feixe, visto que estamos supondo que o feixe incidente seja tênue.

Para uma distribuição de fundo Maxwelliana, podemos escrever a solução para o potencial efetivo $F(x_{ab})$ em termos da função erro e de sua derivada⁵ [30]:

$$F(x_{ab}) = \left(x_{ab} + \frac{1}{2x_{ab}} \right) \Phi(x_{ab}) + \frac{1}{2} \Phi'(x_{ab}), \quad (4.143)$$

onde $\Phi(x_{ab})$ é a função erro e é dada por

$$\Phi(x_{ab}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}, \quad (4.144)$$

cuja derivada, $\Phi'(x_{ab})$, tem a seguinte forma

$$\Phi'(x_{ab}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (4.145)$$

Definindo uma função auxiliar $\Psi(x)$ [31],

$$\Psi(x) \equiv \Phi(x) - x\Phi'(x), \quad (4.146)$$

⁵Uma versão mais detalhada desses cálculos pode ser vista no [Apêndice A](#)

para expressar as derivadas da função $F(x)$, obtemos

$$F'(x_{ab}) = \Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2}, \quad (4.147)$$

$$F''(x_{ab}) = \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^3}, \quad (4.148)$$

$$F'''(x_{ab}) = -3\frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^4} + 2\frac{\Phi'(x_{ab})}{x_{ab}}. \quad (4.149)$$

Substituindo as expressões acima em (4.141), ficamos com

$$\begin{aligned} \theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 v_a}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) + \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\mathbf{v}_a \mathbf{v}_a}{v_a^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right. \\ & \left. + 2\frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\mathbf{v}_a}{v_a^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} - \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} + \frac{3}{2} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} - x_{ab} \Phi'(x_{ab}) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.150)$$

e, percebendo que alguns termos se cancelam, obtemos a seguinte forma do operador colisional [30]

$$\begin{aligned} \theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\partial^2 v_a}{\partial \mathbf{v}_a \partial \mathbf{v}_a} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \frac{\mathbf{v}_a \mathbf{v}_a}{v_a^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} + 2\frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\mathbf{v}_a}{v_a^3} \Psi(x_{ab}) \right]. \end{aligned} \quad (4.151)$$

A equação (4.151) representa a forma geral do operador de colisões de Fokker-Planck para um plasma Maxwelliano, com a incidência de um feixe de baixa densidade também com distribuição Maxwelliana.

Capítulo 5

Interação feixe-plasma não linear na presença de colisões binárias

A situação em que ocorre a interação entre um feixe de elétrons rápidos e um plasma é considerada um modelo fundamental para o estudo de instabilidades cinéticas em plasmas. Os processos físicos relacionados à essa interação tem sido observados tanto em plasmas de laboratório [32, 33], quanto em plasmas espaciais, onde o modelo é largamente aplicado para o estudo da geração de turbulência de Langmuir observada durante as emissões de radiação solar do tipo II e III. O estudo da evolução não linear dessa turbulência vem sendo amplamente abordado por pesquisadores do Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, em conjunto com colaboradores externos [6, 7, 8, 9]. Neste trabalho daremos continuidade a esses estudos, incluindo efeitos colisionais às equações da teoria de turbulência fraca aplicadas à instabilidade “*bump-on-tail*”.

Um feixe de elétrons energéticos, ejetado durante uma emissão solar, deslocando-se através do plasma de fundo da coroa, é capaz de excitar uma série de processos não lineares, dentre eles, a turbulência de Langmuir [3]. As ondas geradas pela turbulência de Langmuir serão parcialmente convertidas em radiação, na mesma frequência que a frequência de plasma local, e que seus harmônicos. Essa conversão é não linear e envolve um sofisticado processo de espalhamento e de decaimento de ondas, características do bem conhecido mecanismo de emissões de ondas de rádio, observadas em erupções de emissão de rádio do tipo III (*type III radio bursts*). Para a descrição teórica dessas emissões, precisamos levar em conta mecanismos complicados e não locais, como o processo coletivo de geração de ondas de Langmuir e as colisões Coulombianas.

Os processos descritos acima vêm sendo estudados há bastante tempo. A ferramenta teórica essencial para a descrição desses fenômenos é a teoria de turbulência fraca eletromagnética, que é capaz de descrever o processo inteiro, desde a turbulência de Langmuir excitada pelo feixe, até geração de radiação. Embora esta teoria já exista há algumas décadas, a solução numérica completa dessas equações, aplicadas à interação feixe-plasma, foi obtida pela primeira vez há bem pouco tempo. Também foram feitas algumas simulações PIC (*particle-in-cell*) [34, 35, 36, 37, 38], com a intenção de caracterizar o comportamento não linear dos processos de emissão do plasma. Os resultados obtidos em ambos os métodos foram complementares. Contudo, as soluções publicadas até então, não levam em consideração a inclusão de efeitos colisionais. A intenção deste trabalho é preencher essa lacuna, apresentando os resultados numéricos obtidos pela integração das equações da teoria de turbulência fraca, aplicada à instabilidade *bump-on-tail*, em duas dimensões, adicionada de efeitos colisionais.

Neste trabalho, em uma primeira aproximação com relação ao que ainda pode ser feito, iremos considerar um plasma sem campos externos atuantes e apenas a propagação de ondas eletrostáticas. Para isso, vamos supor um plasma com função de distribuição inicial Maxwelliana, adicionada de uma Maxwelliana deslocada, representando o feixe de elétrons incidentes. Este feixe é tênue e seus elétrons são energéticos, o que significa que, embora o pico da distribuição de velocidades do feixe seja muito menor do que o pico da distribuição de fundo, sua velocidade média v_f localiza-se na cauda à direita da origem da função de distribuição. Essa configuração permite o surgimento de uma região com uma declividade positiva, causada pelo pico da distribuição do feixe, capaz de dar início à chamada instabilidade *bump-on-tail*.

Vamos começar a descrição do trabalho desenvolvido, pela adequação da equação de Fokker-Planck ao tipo de modelagem que estamos empregando (bidimensional) e ao sistema que queremos estudar, aplicando os fatores de normalização adequados. Em seguida, apresentaremos as equações que descrevem o sistema e o conjunto completo de equações da teoria de turbulência fraca, aplicadas à interação feixe-plasma em duas dimensões. Com todas as equações definidas, faremos uma breve explicação sobre o método utilizado para a integração dessas equações.

5.1 Operador colisional de Fokker-Planck aplicado à interação feixe-plasma

O operador de Fokker-Planck, na forma como ele aparece em (4.151), é um operador tridimensional, com uma representação vetorial totalmente genérica. Para que possamos aplicá-lo ao nosso problema, precisamos projetá-lo em duas dimensões, usando coordenadas cartesianas, e normalizá-lo usando os mesmos parâmetros aplicados às equações da teoria de turbulência fraca. Iniciaremos esses procedimentos com a projeção bidimensional. Na subseção seguinte, faremos uma breve discussão sobre os fatores de normalização, aplicando-os à equação colisional para, enfim, obtermos a forma final do operador de colisões que será usado na integração numérica.

5.1.1 Forma bidimensional do operador colisional

Queremos passar a equação (4.151) de sua forma vetorial para uma projeção bidimensional, nas coordenadas x e z , com simetria azimutal. Para isso, vamos definir o eixo z como paralelo à direção de propagação do feixe. Dessa forma, podemos definir o vetor velocidade como

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z, \quad (5.1)$$

onde $v_z \mathbf{e}_z$ é a velocidade paralela ao feixe e $v_x \mathbf{e}_x$ é a velocidade perpendicular ao feixe, e o módulo da velocidade é dado por $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$.

A derivada, neste conjunto de coordenadas tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z. \quad (5.2)$$

Para que possamos desenvolver as derivadas vetoriais de (4.151), precisamos das proprie-

dades (4.138), (4.139) e (4.140) em termos de $v_x \mathbf{e}_x$ e de $v_z \mathbf{e}_z$, como segue ¹:

$$\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{v_{tb}} \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} = \frac{1}{v_{tb}} \left[\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right], \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} = -\frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} = 0. \quad (5.7)$$

Aplicando as propriedades acima em (4.151) e efetuando os longos cálculos vetoriais e algébricos necessários, chegamos a seguinte expressão para o operador de colisões em duas dimensões:

$$\begin{aligned} \theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial v_x} \left\{ \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_x}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x^2} \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) - \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\} \\ & + \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial v_z} \left\{ \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_z}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z v_x}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_z^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x^2} \right) - \frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.1.2 Normalização das velocidades e do tempo

Na equação de Fokker-Planck, as partículas da espécie a representam as partículas que interagem com a função de distribuição de fundo. Como estamos supondo um feixe de elétrons incidindo em um plasma com função de distribuição de equilíbrio Maxwelliana, temos que $a = e$, isto é, as partículas do tipo a são elétrons. As cargas da espécie b representam os elétrons e os íons da distribuição de fundo, uma vez que descartamos as colisões entre os elétrons do feixe. Sendo assim, vamos normalizar as velocidades através da velocidade térmica das partículas do tipo a , os elétrons

$$v_{te} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}. \quad (5.9)$$

¹Nesta seção iremos direto ao ponto e apresentaremos somente as expressões finais de cada equação, no entanto, o procedimento completo da projeção bidimensional pode ser visto em detalhes no [Apêndice B](#).

Com isso, podemos escrever as velocidades

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{v_{ex}}{v_{te}}, & u_z &= \frac{v_{ez}}{v_{te}}, \\
 u^2 &= u_x^2 + u_z^2 = \frac{v_{ex}^2 + v_{ez}^2}{v_{te}^2} = \frac{v_e^2}{v_{te}^2}, \\
 x_{eb} &= \frac{v_e}{v_{tb}} = u \frac{v_{te}}{v_{tb}} \equiv u_{eb},
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

e as derivadas normalizadas

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial v_{ex}} &= \frac{1}{v_{tb}} \frac{\partial}{\partial u_x}, & \frac{\partial}{\partial v_{ez}} &= \frac{1}{v_{tb}} \frac{\partial}{\partial u_z}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial v_{ex}^2} &= \frac{1}{v_{tb}^2} \frac{\partial^2}{\partial u_x^2}, & \frac{\partial^2}{\partial v_{ez}^2} &= \frac{1}{v_{tb}^2} \frac{\partial^2}{\partial u_z^2}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial v_{ex} \partial v_{ez}} &= \frac{\partial^2}{\partial v_{ez} \partial v_{ex}} = \frac{1}{v_{tb}^2} \frac{\partial^2}{\partial u_x \partial u_z}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

A normalização do tempo deve ser feita de maneira que possamos expressar o operador colisional como uma soma entre as equações para as colisões elétron-elétron e elétron-íon, como pode ser visto abaixo

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right) = \sum_b \theta(f_e, f_b). \tag{5.12}$$

Para isso, vamos normalizar o tempo, que aparece na derivada à esquerda da igualdade, usando a frequência de plasma dos elétrons

$$\tau = t \omega_{pe}, \tag{5.13}$$

onde

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}. \tag{5.14}$$

Com isso, obtemos a forma adimensional do operador colisional de Fokker-Planck:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau} \right)_{\text{col.}} &= \sum_b \left\{ \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_b} f_e \frac{u_x}{u^3} \Psi(u_{eb}) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x^2}{u^3} \frac{\Psi(u_{eb})}{u_{eb}^2} \right) \right. \right. \\
 &+ \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \frac{\Psi(u_{eb})}{u_{eb}^2} \right) + \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z^2}{u^3} \left(\Phi(u_{eb}) - \frac{\Psi(u_{ej})}{2u_{eb}^2} \right) \\
 &\left. \left. - \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u_{eb}) - \frac{\Psi(u_{eb})}{2u_{eb}^2} \right) \right] \right. \\
 &+ \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_b} f_e \frac{u_z}{u^3} \Psi(u_{eb}) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z u_x}{u^3} \frac{\Psi(u_{eb})}{u_{eb}^2} \right) \right. \\
 &+ \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_z^2}{u^3} \frac{\Psi(u_{eb})}{u_{eb}^2} \right) + \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x^2}{u^3} \left(\Phi(u_{eb}) - \frac{\Psi(u_{eb})}{2u_{eb}^2} \right) \\
 &\left. \left. - \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u_{eb}) - \frac{\Psi(u_{eb})}{2u_{eb}^2} \right) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

onde u_{eb} é dado pela última relação em (5.10).

Podemos também escrever explicitamente a soma entre as colisões elétron-elétron e as colisões elétron-íon, como segue

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau}\right) = \theta(f_e, f_e) + \theta(f_e, f_i), \quad (5.16)$$

onde $\theta(f_e, f_e)$ e $\theta(f_e, f_i)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_e) = & \frac{\Gamma_{ee}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_e} f_e \frac{u_x}{u^3} \Psi(u) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x^2}{u^3} \frac{\Psi(u)}{u^2} \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \frac{\Psi(u)}{u^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z^2}{u^3} \left(\Phi(u) - \frac{\Psi(u)}{2u^2} \right) - \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u) - \frac{\Psi(u)}{2u^2} \right) \right] \\ & + \frac{\Gamma_{ee}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_e} f_e \frac{u_z}{u^3} \Psi(u) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z u_x}{u^3} \frac{\Psi(u)}{u^2} \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_z^2}{u^3} \frac{\Psi(u)}{u^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x^2}{u^3} \left(\Phi(u) - \frac{\Psi(u)}{2u^2} \right) - \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u) - \frac{\Psi(u)}{2u^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

e por

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_i) = & \frac{\Gamma_{ei}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_i} f_e \frac{u_x}{u^3} \Psi(u_{ei}) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x^2}{u^3} \frac{\Psi(u_{ei})}{u_{ei}^2} \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \frac{\Psi(u_{ei})}{u_{ei}^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z^2}{u^3} \left(\Phi(u_{ei}) - \frac{\Psi(u_{ei})}{2u_{ei}^2} \right) - \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u_{ei}) - \frac{\Psi(u_{ei})}{2u_{ei}^2} \right) \right] \\ & + \frac{\Gamma_{ei}}{\omega_{pe} v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(2 \frac{m_e}{m_i} f_e \frac{u_z}{u^3} \Psi(u_{ei}) \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_z u_x}{u^3} \frac{\Psi(u_{ei})}{u_{ei}^2} \right) + \left(\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_z^2}{u^3} \frac{\Psi(u_{ei})}{u_{ei}^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial f_e}{\partial u_z} \frac{u_x^2}{u^3} \left(\Phi(u_{ei}) - \frac{\Psi(u_{ei})}{2u_{ei}^2} \right) - \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \frac{u_x u_z}{u^3} \left(\Phi(u_{ei}) - \frac{\Psi(u_{ei})}{2u_{ei}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde, nesta última expressão, temos que $u_{ei} \equiv uv_{te}/v_{ti}$.

Sobre o coeficiente do termo colisional

Para finalizar essa seção, vamos nos deter no coeficiente

$$\frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_{te}^3},$$

que multiplica os termos da equação colisional, e escrevê-lo de uma forma mais adequada ao trabalho que iremos desenvolver. Para isso, vamos introduzir algumas expressões que serão úteis

- parâmetro de plasma

$$g = \frac{1}{2^{3/2} (4\pi)^2 n \lambda_{De}^3}; \quad (5.19)$$

- comprimento de Debye

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n e^2}}; \quad (5.20)$$

- relação entre o comprimento de Debye, a frequência de plasma e a velocidade térmica

$$v_{te}^2 = \frac{\lambda_{De}^2}{2\omega_{pe}}; \quad (5.21)$$

- e a expressão para Γ_{ee}

$$\Gamma_{ee} = \frac{2\pi e^4 n}{m_e^2} \ln \Lambda. \quad (5.22)$$

Podemos agora desenvolver os cálculos e chegar na expressão para Γ_{eb}/v_{the}^3 desejada

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{ee}}{v_{te}^3} &= \frac{2\pi e^4 n}{v_{te}^3 m_e^2} \ln \Lambda \\ &= 2\pi \frac{e}{4\pi} \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m_e}}}_{=\omega_{pe}} e \frac{n}{n} \frac{\sqrt{4\pi e^2 n}}{m_e^{3/2}} \left(\frac{m_e}{2T_e}\right)^{3/2} \ln \Lambda \\ &= \frac{2\pi}{(4\pi)^2} \frac{\omega_{pe}}{n} \frac{4\pi e^2 n \sqrt{4\pi e^2 n}}{(2T_e)^{3/2}} \ln \Lambda \\ &= \frac{2\pi \omega_{pe}}{2^{3/2} (4\pi)^2 n} \underbrace{\left(\frac{4\pi e^2 n}{T_e}\right)^{3/2}}_{=1/\lambda_{De}^3} \ln \Lambda \\ &= 2\pi \omega_{pe} \frac{1}{\underbrace{2^{3/2} (4\pi)^2 n \lambda_{De}}_{=g}} \ln \Lambda \\ &= 2\pi \omega_{pe} g \ln \Lambda. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para o caso de colisões com os íons temos:

$$\frac{\Gamma_{ei}}{v_{the}^3} = 2\pi Z^2 \omega_{pe} g \ln \Lambda, \quad (5.24)$$

onde Z é o número atômico que acompanha a carga iônica. Também convém lembrar que estamos considerando as densidades $n_i = n_e = n$.

5.2 Equações adimensionais da teoria de turbulência fraca aplicadas à interação feixe-plasma

No [Capítulo 3](#), apresentamos uma série de equações que descrevem a dinâmica não linear de um plasma, considerando a propagação de ondas eletrostáticas. Nesta seção, vamos escrever essas mesmas equações com o uso de variáveis adimensionais. Vamos começar introduzindo essas variáveis e seus devidos fatores de normalização

$$\begin{aligned} z &\equiv \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \tau \equiv \omega_{pe} t, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{\mathbf{k} v_{te}}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_{te}}, \\ \lambda_{De}^2 &= \frac{T_e}{4\pi \hat{n} e^2} = \frac{v_{te}^2}{2\omega_{pe}^2}, \quad g = \frac{1}{2^{3/2} (4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3}, \\ F_a(\mathbf{u}) &= v_{te}^3 f_a(\mathbf{u}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} = \frac{(2\pi)^2 g I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{m_e v_{te}^2 \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde, da esquerda para a direita e de cima para baixo, as variáveis normalizadas são: relação de dispersão, tempo, vetor de onda, velocidade, comprimento de Debye (ao quadrado), parâmetro de plasma, função de distribuição de velocidades e amplitude espectral. Lembrando que as equações originais, não normalizadas, podem ser consultadas no [Capítulo 3](#).

A equação para as ondas de Langmuir (L), em termos das variáveis adimensionais, é a seguinte

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \left\{ \mu_{\mathbf{q}}^L \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left(g F_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \right\}_{Lql} \\
 & + \left\{ 2\sigma \mu_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S) \right\}_{LdLS} \\
 & + \left\{ \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^L \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \right. \\
 & \left. \times \left[g \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) [F_e(\mathbf{u}) + F_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] \right\}_{LsLL}. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

A equação normalizada, para as ondas íon-acústicas (S), é parecida

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} = & \left\{ \mu_{\mathbf{q}}^S \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g [F_e(\mathbf{u}) + F_i(\mathbf{u})] \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right] \right\}_{Sql} \\
 & + \left\{ \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}}^S \mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L [\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')]^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L) \right\}_{SdLL} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Nas equações para as ondas, os termos entre chaves, com subscritos Lql e Sql representam os efeitos quasilineares de emissão espontânea e induzida, os termos com subscritos $LdLS$ e $SdLL$ assinalam os efeitos de decaimento espontâneo e induzido, para ondas L e ondas S , respectivamente; por fim, o termo com subscrito $LsLL$, representa os efeitos de espalhamento induzido e espontâneo para ondas L . Novamente, uma explicação detalhada sobre cada um desses termos pode ser encontrada no [Capítulo 3](#).

A equação cinética adimensional para as partículas, já adicionada do termo colisional, é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} = & \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\
 & \times \left(g \frac{m_a \sigma z_{\mathbf{q}}^L}{m_e q} F_a(\mathbf{v}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma \alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) + \sum_b \theta_{ab}(F_a, F_b). \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Por fim, temos as expressões para as relações de dispersão adimensionais

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{q}}^L &= \left(1 + \frac{3}{2}q^2\right)^{1/2}, \\ z_{\mathbf{q}}^S &= \frac{qA}{(1 + q^2/2)^{1/2}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(1 + 3\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.2.1 Equação cinética para as partículas em duas dimensões

As equações bidimensionais da teoria de turbulência fraca aplicadas neste trabalho são as mesmas que foram usadas para obter os resultados em [7]. Aqui, vamos explicitar somente a equação 2D para a evolução das partículas, visto que a ideia é dar enfoque na dinâmica colisional, que evolui de acordo com esta equação. As equações cinéticas bidimensionais para as ondas, são dadas pelas equações (5.26) e (5.27) com suas devidas projeções nos eixos x , z , u_x e u_z . Quanto à equação cinética para a evolução temporal do elétrons, em termos das coordenadas x e y e desprezando o efeito das ondas S , tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u_x} \left(A_x^e F_e + D_{xx}^e \frac{\partial F_e}{\partial u_x} + D_{xz}^e \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_z} \left(A_z^e F_e + D_{zx}^e \frac{\partial F_e}{\partial u_x} + D_{zz}^e \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right) + \sum_b \theta_{ab}(F_e, F_b), \end{aligned} \quad (5.30)$$

Os coeficientes de emissão espontânea A_i^e e de emissão induzida D_{ij}^e , fazendo uso de $\mu_{\mathbf{q}}^L = 1$, são dados por

$$\begin{aligned} A_i^e &= g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \\ D_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.3 Coeficientes de fricção e de difusão generalizados

Podemos combinar os termos colisionais com os coeficientes de emissão espontânea A_i^e e de emissão induzida D_{ij}^e e definir um termo de fricção e de difusão generalizados, da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_i &= A_i^e + \sum_b a_i^b, \\ D_{ij} &= D_{ij}^e + \sum_b b_{ij}^b. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para isso, precisamos escrever o operador colisional em termos dos coeficientes a_i^b e b_{ij}^b , o que pode ser feito partindo da equação (5.15) e separando os termos do operador de colisões de acordo com o grau da derivada e a variável envolvida na derivação.

Começando pelas derivadas primeiras, definimos os coeficientes a_x e a_z da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_x^b &= \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left(2 \frac{m_e}{m_b} \frac{u_x}{u^3} \Psi(u_{eb}) \right) \\ a_z^b &= \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left(2 \frac{m_e}{m_b} \frac{u_z}{u^3} \Psi(u_{eb}) \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Agora, para as derivadas segunda, temos os coeficientes b_{xx}^b , b_{xz}^b , b_{zx}^b e b_{zz}^b , como segue

$$\begin{aligned} b_{xx}^b &= \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left[\frac{u_x u_x}{u^5} \frac{v_b^2}{v_e^2} \Psi(u_{eb}) + \frac{u_z u_z}{u^5} \left(u^2 \Phi(u_{eb}) - \frac{v_b^2}{2v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right) \right] \\ b_{xz}^b &= - \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left[\frac{u_x u_z}{u^5} \left(u^2 \Phi(u_{eb}) - \frac{v_b^2}{2v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right) - \frac{u_x u_z}{u^5} \frac{v_b^2}{v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right] \\ b_{zx}^b &= - \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left[\frac{u_x u_x}{u^5} \left(u^2 \Phi(u_{eb}) - \frac{v_b^2}{2v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right) - \frac{u_z u_x}{u^5} \frac{v_b^2}{v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right] \\ b_{zz}^b &= \frac{\Gamma_{eb}}{\omega_{pe} v_e^3} \left[\frac{u_z u_z}{u^5} \frac{v_b^2}{v_e^2} \Psi(u_{eb}) + \frac{u_z u_x}{u^5} \left(u^2 \Phi(u_{eb}) - \frac{v_b^2}{2v_e^2} \Psi(u_{eb}) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Com isso, o operador de colisões pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_e}{\partial \tau} \right)_j &= \frac{\partial}{\partial u_x} (a_x^b F_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (a_z^b F_e) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left(b_{xx}^b \frac{\partial F_e}{\partial u_x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_x} \left(b_{xz}^b \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(b_{zx}^b \frac{\partial F_e}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(b_{zz}^b \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

Vemos que o operador colisional escrito desta maneira se torna totalmente compatível com a forma da equação cinética das partículas (5.30).

Por fim, agrupamos os coeficientes de primeira ordem a_x e a_z com os coeficientes de emissão espontânea A_i^e e somamos os coeficientes de segunda ordem b_{xx} , b_{xz} , b_{zx} e b_{zz} com os seus respectivos coeficientes de emissão induzida D_{ij}^e , formando os chamados “coeficientes de fricção e de difusão generalizados”. Dessa forma, chegamos a seguinte equação para a evolução temporal das partículas

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(A_x^e + \sum_b a_x^b \right) F_e \right] + \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(A_z^e + \sum_b a_z^b \right) F_e \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(D_{xx}^e + \sum_b b_{xx}^b \right) \frac{\partial F_e}{\partial u_x} \right] + \frac{\partial}{\partial u_x} \left[\left(D_{xz}^e + \sum_b b_{xz}^b \right) \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(D_{zx}^e + \sum_b b_{zx}^b \right) \frac{\partial F_e}{\partial u_x} \right] + \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\left(D_{zz}^e + \sum_b b_{zz}^b \right) \frac{\partial F_e}{\partial u_z} \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

lembrando que a soma em b representa o tipo de partícula que está colidindo com os elétrons do feixe e que $u_{eb} \equiv uv_{te}/v_{tb}$.

5.4 Condições Iniciais

A função de distribuição inicial para os elétrons, em duas dimensões, é a seguinte

$$F_e(\mathbf{v}, 0) = \frac{1 - n_f/n_0}{\pi v_{te}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{te}^e} - \frac{(v_{\parallel} - v_0)^2}{v_{te}^e}\right) + \frac{n_f/n_0}{\pi v_{tf}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{tf}^e} - \frac{(v_{\parallel} - v_f)^2}{v_{tf}^e}\right), \quad (5.37)$$

onde $v_{te}^2 = 2T_e/m_e$ é a velocidade térmica dos elétrons e $v_{tf}^2 = 2T_f/m_e$ é a velocidade térmica do feixe. As quantidades v_0 e v_f são as velocidades de deriva das distribuições de fundo e do feixe, respectivamente. A velocidade de deriva v_0 serve para garantir que a velocidade de deriva total da função de distribuição de fundo seja nula, isto é, $v_0 = -(v_f n_f)/(n_0 - n_f)$. Para os íons, a função de distribuição é dada por

$$F_i(\mathbf{v}) = \frac{m_i}{2\pi T_i} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right), \quad (5.38)$$

onde T_i e m_i são, respectivamente, a temperatura dos íons e a massa dos prótons. No atual estudo, iremos supor que a função de distribuição iônica permanece constante ao longo da evolução temporal do sistema.

As intensidades das ondas L e S são inicializadas balanceando as emissões espontâneas e induzidas, o que é feito levando em conta a população da distribuição de fundo de acordo com a seguinte expressão [7]

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} \frac{1}{1 + 3k^2 \lambda_D^2},$$

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} k^2 \lambda_D^2 \sqrt{\frac{1 + k^2 \lambda_D^2}{1 + 3k^2 \lambda_D^2}} \frac{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i)}{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [F_e + (T_e/T_i) F_i]}. \quad (5.39)$$

Em termos das variáveis adimensionais usadas neste trabalho, e efetuando as integrais indicadas, as intensidades iniciais podem ser escritas da forma seguinte:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}(0) = \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2}$$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}(0) = \frac{g}{2z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S}. \quad (5.40)$$

Capítulo 6

Análise Numérica e Resultados

No capítulo anterior, expusemos a nossa intenção em obter a evolução temporal, bidimensional, da interação feixe-plasma não linear, adicionada de efeitos colisionais, através da integração numérica das equações que descrevem esse sistema. Em seguida, introduzimos uma série de variáveis adimensionais, com as quais escrevemos as equações bidimensionais da teoria de turbulência fraca e do operador colisional de Fokker-Planck. Esse procedimento permite que a análise dos dados obtidos pela integração numérica se torne mais fácil e clara. Por fim, definimos as condições iniciais para as funções de distribuição dos elétrons e dos íons e as amplitudes espectrais iniciais das ondas L e das ondas S .

Com as equações adequadamente definidas, isto é, prontas para a integração numérica, o próximo passo é descrever os métodos e os parâmetros utilizados para sua implementação. Isto será feito na primeira seção deste capítulo. Na seção seguinte, apresentaremos os resultados obtidos, discutindo e comparando-os com os resultados para o caso em que não se leva em conta os efeitos colisionais.

6.1 Análise Numérica

A integração das equações para as ondas L (5.26) e S (5.27), foi implementada no espaço de vetor de onda 2D utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem. Para tal, definimos uma grade de 51×51 pontos para o espaço de vetor de onda k_{\perp} e k_{\parallel} , com $0 < k_{\perp} v_{te} / \omega_p < 0.6$ e $0 < k_{\parallel} v_{te} / \omega_p < 0.6$. A equação (5.36) foi integrada no espaço de velocidades. O método empregado para a integração da equação de difusão em duas dimensões foi o *splitting*, com passo de tempo fixo. Uma grade 51×101 pontos foi usada para a construção do espaço de velocidades bidimensional, cobrindo um intervalo de $0 < v_{\perp} / v_{te} < 12$, para v_{\perp} / v_{te} e de $-12 < v_{\parallel} / v_{te} < 12$ para v_{\parallel} / v_{te} . Em ambos os casos, o passo de integração temporal $\Delta\tau = 0.1$ foi definido. As grades de integração foram configuradas ponderando tempo de integração e resolução gráfica, de maneira que pudéssemos obter bons resultados em um intervalo de tempo computacional razoável. As mesmas considerações foram feitas para a determinação do passo de integração temporal.

Para a análise que estamos fazendo neste trabalho, supomos um feixe de elétrons com a mesma temperatura dos elétrons do plasma de fundo, logo, $T_f / T_e = 1.0$. A razão entre temperatura dos íons e a temperatura dos elétrons é $T_e / T_i = 7.0$. O valor do parâmetro de

plasma foi definido em $(n_0 \lambda_D^3)^{-1} = 5.0 \times 10^{-3}$ e, para a temperatura dos elétrons, definimos $v_{te}^2/c^2 = 4.0 \times 10^{-3}$. Também supomos, para a velocidade e para a densidade do feixe, $v_f/v_{te} = 5.0$ e $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$, respectivamente. Todos esses valores foram escolhidos com a intenção de aproximar os parâmetros do nosso sistema aos parâmetros das emissões solares. As únicas exceções são os dois últimos parâmetros que são relativamente altos, comparado com o observado. Ambos foram definidos dessa forma com o intuito de reduzir o tempo computacional para a obtenção dos resultados numéricos, sem, no entanto, afetar os resultados obtidos.

6.2 Evolução do sistema e resultados

A nossa intenção inicial, com a inclusão dos efeitos colisionais, é saber se as colisões tem uma influência significativa na evolução temporal da interação feixe-plasma. Além disso, caso essa atuação seja importante, também queremos descobrir como ela afeta a evolução do sistema, em conjunto com os efeitos não lineares da teoria de turbulência fraca. Claro que a resposta para essas duas questões vem separadamente. Precisamos integrar o nosso sistema de equações em duas situações: com e sem os efeitos colisionais. Na primeira integração obtemos a evolução da instabilidade na presença de colisões; na segunda, geramos um parâmetro de comparação para mensurarmos a influência dos efeitos colisionais. Essa alternância entre a inclusão e a não inclusão das colisões pode ser feita facilmente, alterando o arquivo de inicialização que determina os parâmetros e os efeitos que atuarão no sistema durante a integração, selecionando - ou não - a subrotina que acrescenta os efeitos colisionais ao programa.

Os dados gerados foram graficados e distribuídos em duas colunas, sendo a primeira referente aos resultados sem colisões e a segunda com os efeitos colisionais. Cada linha dessas colunas contém os dois resultados, já mencionados, em um mesmo tempo normalizado de integração. Essa disposição foi usada tanto para a análise do crescimento das ondas, quanto para a evolução da difusão no espaço de velocidades; e tem o objetivo de tornar a comparação do caso colisional com o caso não colisional clara e prática. Os dados foram graficados em escala logarítmica com relação ao eixo vertical, para que até os efeitos mais sutis na evolução do sistema pudessem ser devidamente observados.

6.2.1 Evolução temporal da função de distribuição

O sistema evolui de maneira auto-consistente, ou seja, a difusão no espaço de velocidade irá afetar o crescimento das ondas no espaço de vetor de onda, e a evolução das ondas no espaço de vetor de onda irá afetar a difusão no espaço de velocidades. Vamos começar pelos resultados que mostram a evolução da função de distribuição, que foram graficados como função das componentes perpendicular e paralela do vetor velocidade normalizado \mathbf{u} , como pode ser visto nas figuras 6.1 e 6.2 .

Na Figura 6.1 temos os resultados para os tempos normalizados de integração $\tau = 500$, $\tau = 1000$, $\tau = 2000$ e $\tau = 5000$; com a coluna da esquerda correspondendo aos resultados sem a presença de colisões e a coluna da direita apresentando os resultados com colisões. No topo da figura, com tempo de integração $\tau = 500$, vemos que o *plateau* característico da difusão quasilinear já está completamente formado, enquanto os efeitos não lineares de espalhamento e de decaimento são imperceptíveis. No que se refere aos efeitos colisionais, comparando os resultados vemos que, embora ambos sejam muito similares, já podemos perceber um leve

alargamento da curva de nível mais interna, na região do feixe. Logo abaixo temos os resultados para $\tau = 1000$, onde os primeiros efeitos não lineares começam a aparecer em ambos os casos, com o aquecimento dos elétrons com velocidade negativa, levando à formação de uma cauda na direção oposta ao feixe. Essa formação está relacionada em grande parte ao processo de espalhamento [7]. Ao compararmos as figuras, vemos que a atuação dos efeitos colisionais está mais evidente, mas ainda é pequena. Essa tendência se repete nos outros dois pares de resultados presentes na Figura 6.1, $\tau = 2000$ e $\tau = 5000$, com uma discreta, mas crescente influência das colisões sobre a evolução da função de distribuição.

Na Figura 6.2 prosseguimos com a evolução da função de distribuição, apresentando os resultados para $\tau = 10000$, $\tau = 15000$, $\tau = 20000$ e $\tau = 30000$. Nos resultados para $\tau = 10000$ já podemos perceber que a presença das colisões alterou drasticamente a forma da função de distribuição, alargando-a consideravelmente em comparação com o caso sem colisões. Outro efeito, este mais sutil, é a redução na cauda formada pelo processo de espalhamento, como se aqueles elétrons estivessem sendo redistribuídos em torno do corpo da função de distribuição. Para os estágios seguintes da evolução temporal os efeitos coletivos da teoria de turbulência fraca vão cada vez mais perdendo força, enquanto as colisões Coulombianas dominam a dinâmica da função de distribuição. Isso fica evidente ao compararmos os resultados entre os três últimos pares de figuras, para $\tau = 15000$, $\tau = 20000$ e $\tau = 30000$.

6.2.2 Evolução temporal da amplitude espectral

A evolução temporal foi calculada de maneira autoconsistente tanto para as ondas L, quanto para as ondas S. Nas figuras 6.3 e 6.4 temos a representação gráfica da evolução temporal da amplitude do espectro das ondas de Langmuir como função das componentes perpendicular e paralela do vetor de onda normalizado \mathbf{q} . Quanto às ondas íon acústicas, embora tenham uma participação importante no processo de decaimento de três ondas, seu espectro praticamente não evolui com o tempo¹, portanto não iremos graficá-lo.

Na Figura 6.3, temos os resultados para os tempos normalizados de integração $\tau = 500$, $\tau = 1000$, $\tau = 2000$ e $\tau = 5000$; lembrando que a coluna da esquerda corresponde aos resultados sem a presença de colisões e na coluna da direita temos os resultados com colisões. Vemos que no primeiro par de imagens, com $\tau = 500$, o espectro das ondas L já apresenta a formação total do pico gerado por efeitos quasilineares e o início da formação de um anel devido ao espalhamento das ondas de Langmuir primárias, bem como a formação de um segundo pico menor, de ondas retroespalhadas, propagando-se na direção oposta ao primeiro pico. Esta estrutura é característica da turbulência de Langmuir em 2D e surge devido aos efeitos não lineares de espalhamento e de decaimento das ondas [7, 9]. Do ponto de vista colisional, os dois resultados são muito similares, o que indica que nesse estágio da evolução temporal os efeitos das colisões ainda não são perceptíveis. Para $\tau = 1000$ a situação é a mesma, há evolução dos efeitos não lineares, mas os efeitos colisionais são praticamente imperceptíveis. No terceiro nível, de cima para baixo, temos $\tau = 2000$. Comparando as duas figuras, já podemos perceber uma pequena diferença nas curvas de nível abaixo da estrutura 3D, indicando que a presença de colisões já começou a afetar a dinâmica do sistema. Para $\tau = 5000$, o último par da Figura 6.3, a diferença já é evidente, com as colisões já demonstrando uma certa tendência a promover a simetria azimutal da estrutura do espectro.

¹A evolução temporal das ondas S pode ser consultada em [7].

Na [Figura 6.4](#), temos a continuação da evolução do espectro, com resultados para $\tau = 10000$, $\tau = 15000$, $\tau = 20000$ e $\tau = 30000$. Comparando o primeiro par de resultados, vemos que para $\tau = 10000$ a influência das colisões já alterou significativamente o espectro, espalhando as ondas de Langmuir em torno do ângulo azimutal do espaço de vetor de onda, dando ao espectro uma aparência mais simétrica, confirmando a primeira impressão que tivemos ao analisarmos o estágio anterior da evolução temporal. Os próximos três pares de resultados, $\tau = 15000$, $\tau = 20000$ e $\tau = 30000$, reforçam essa tendência, mostrando um espalhamento azimutal progressivo das ondas na região do pico inicial e uma atenuação do crescimento das ondas retroespalhadas. É como se as colisões estivessem impedindo o retroespalhamento das ondas ao redistribuir seu momentum em torno do anel.

6.2.3 Considerações gerais sobre a evolução temporal do sistema sob o efeito das colisões

Na [Subseção 6.2.1](#) vimos que os primeiros sinais da atuação colisional surgem logo nos estágios iniciais da evolução temporal da função de distribuição, enquanto a análise feita na [Subseção 6.2.2](#) nos revelou o oposto no que se refere à evolução do espectro das ondas L, onde os primeiros efeitos colisionais só vão ser percebidos a partir de $\tau = 2000$. Vamos fazer algumas considerações a respeito dessa discrepância e preencher algumas lacunas entre a evolução da distribuição de velocidades das partículas e o crescimento das ondas sob o efeito das colisões.

No [Capítulo 4](#), fizemos uma breve discussão a respeito da possibilidade de adição dos efeitos colisionais aos processos coletivos da teoria de turbulência fraca aplicados à evolução da instabilidade *bump-on-tail*. Naquela ocasião discutimos um pouco a respeito do tempo de atuação dos processos envolvidos, isto é, a interação onda partícula quasilinear, a interação onda-partícula não linear e a interação onda-onda não linear. Argumentamos que as colisões poderiam ser descartadas no processo quasilinear, visto que este tem uma atuação rápida e intensa sobre a função de distribuição e sobre o crescimento das ondas, saturando rapidamente, com a formação do *plateau* quasilinear e por isso as colisões teriam pouca influência neste caso. Contudo, não chegamos a mencionar quais seriam os possíveis efeitos das colisões sobre esta configuração da função de distribuição, visto que, na ausência de outros processos, a tendência é que a função de distribuição permaneça com essa forma por muito tempo. Sobre os processos não lineares argumentamos que, embora seus efeitos fossem menos intensos que os quasilineares, eles permaneciam atuando por mais tempo e por isso poderiam ser afetados pela presença de colisões.

Pelos resultados obtidos, confirmamos que, de fato, as colisões tem uma influência muito fraca durante o período de atuação do processo quasilinear, que vai até aproximadamente $\tau = 500$, apresentando uma pequena alteração na forma da distribuição de velocidades, e nenhuma variação detectável no espectro das ondas L; portanto não interferem no processo, que prossegue normalmente até a formação do *plateau* e a saturação das ondas, como de costume. Outro ponto que confirma a discussão feita no [Capítulo 4](#) é o fato de que as colisões começam a ter uma atuação maior na função de distribuição mais ou menos no mesmo intervalo de tempo em que os efeitos não lineares começam a aparecer no espaço de velocidades. Isso ocorre lá por $\tau = 2000$. Esses efeitos “competem” entre si até $\sim \tau = 5000$. Vemos que nesse intervalo o crescimento da atuação dos efeitos colisionais na função de distribuição é lento e contínuo, se resumindo ao alargamento das bordas. Por outro lado, considerando o mesmo intervalo de tempo, no espaço de vetor de onda, o que vemos é que a discrepância entre os resultados com

e sem colisões vai de imperceptível em $\tau = 1000$, passando por uma diferença praticamente insignificante em $\tau = 2000$, até uma alteração considerável em $\tau = 5000$.

Se comparado ao crescimento lento e contínuo da influência colisional no espaço de velocidades, podemos considerar essa resposta às colisões um tanto quanto repentina. Desse ponto em diante as colisões parecem ter um efeito muito significativo, a ponto de praticamente dominarem a evolução temporal do sistema e, tanto a forma da função de distribuição, quanto a forma do espectro, passam a apresentar alterações cada vez maiores em comparação ao caso não colisional. Obviamente não é possível determinar com certeza em que momento as colisões tomaram conta, nem se começou no espaço de velocidades ou no espectro das ondas; o caráter autoconsistente do sistema de equações não nos permite isso. No entanto, podemos perceber que a mudança repentina na forma do espectro na região do feixe retroespalhado, está diretamente ligada à redução da cauda formada pelos efeitos não lineares de espalhamento (que permaneceria ali caso não houvesse a presença de colisões), o que não só freia o crescimento do pico retroespalhado, como o desmancha.

Outro efeito da atuação colisional, talvez o mais importante, tem a ver com o alargamento e a tendência à simetrização azimutal da função de distribuição e do espectro das ondas. Essa tendência das colisões de atenuar qualquer instabilidade que esteja presente e levar a função de distribuição para um estado de equilíbrio térmico, na forma de uma distribuição Maxwelliana, pode ser observada, em seus estágios iniciais, no último resultado da [Figura 6.2](#), para $\tau = 30000$. Isso nos leva à resposta de um questionamento feito no início dessa subseção, sobre quais seriam os resultados da atuação colisional no plateau quasilinear, visto que esta é uma formação de longo prazo: as colisões iriam desmanchá-lo e a função de distribuição também tenderia à uma Maxwelliana.

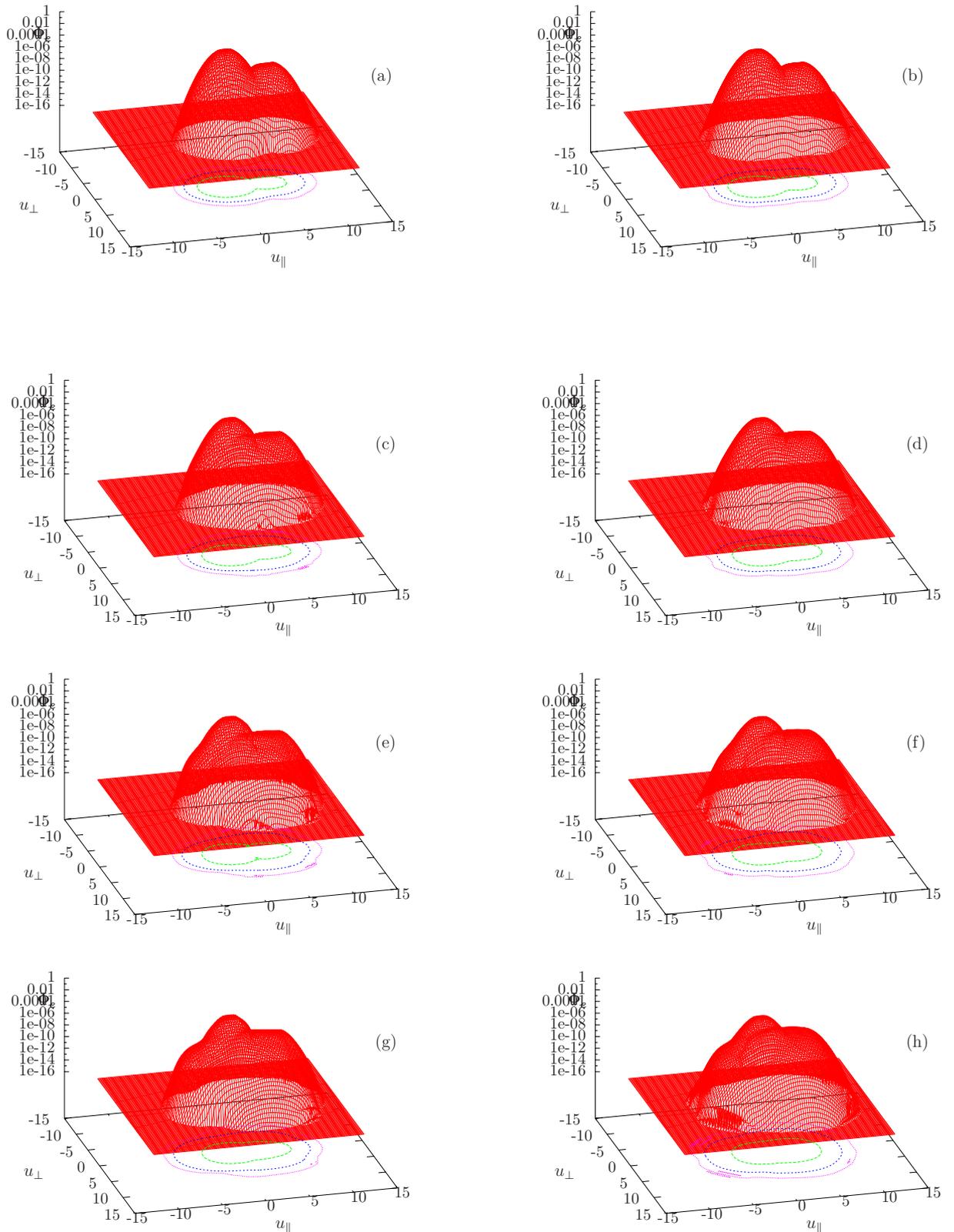


Figura 6.1: Função de distribuição dos elétrons normalizada de v_{\parallel} e v_{\perp} , em escala logarítmica. (a) $\tau = 500$, sem colisões; (b) $\tau = 500$, com colisões; (c) $\tau = 1000$, sem colisões; (d) $\tau = 1000$, com colisões; (e) $\tau = 2000$, sem colisões; (f) $\tau = 2000$, com colisões; (g) $\tau = 5000$, sem colisões; (h) $\tau = 5000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$.

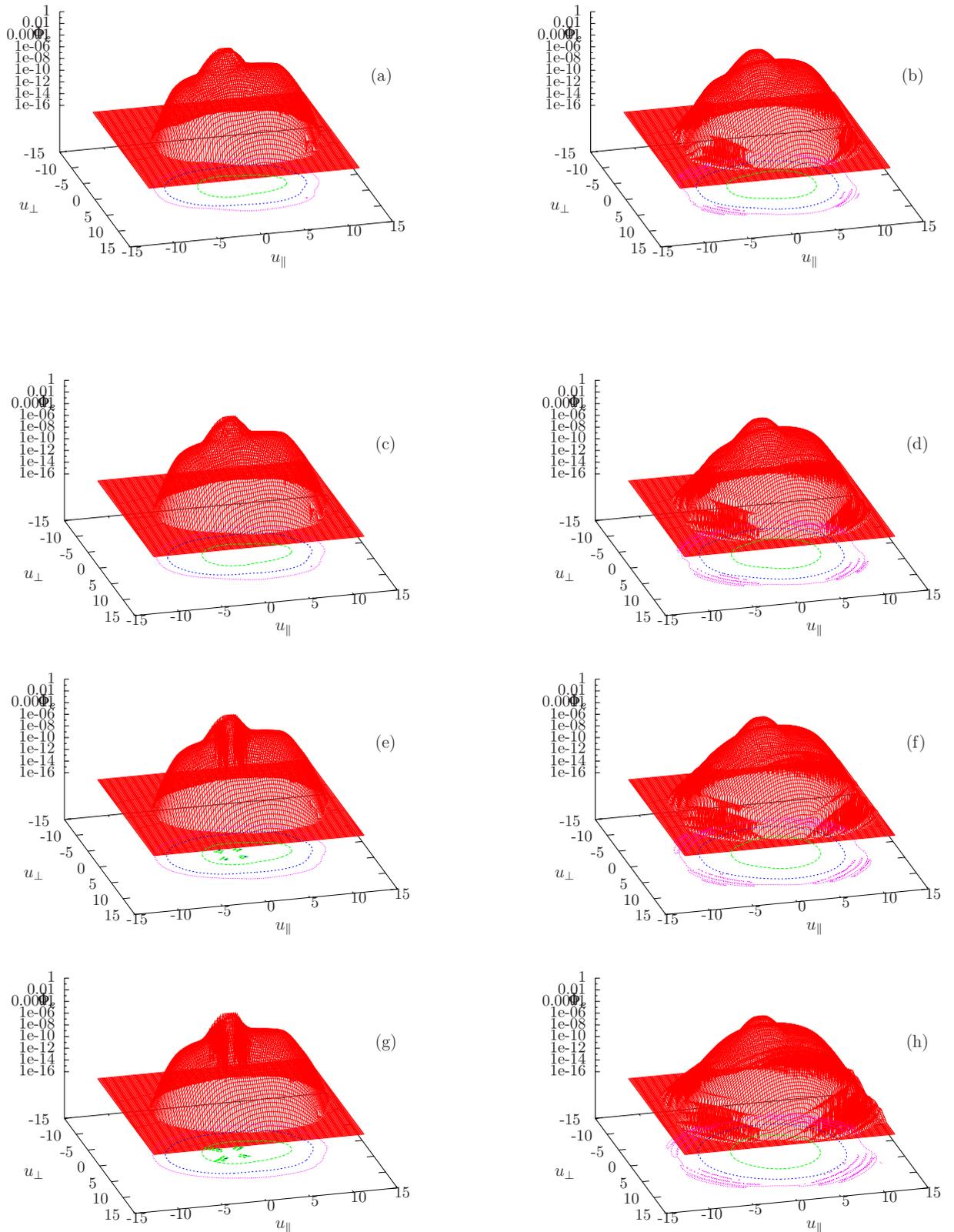


Figura 6.2: Função de distribuição dos elétrons normalizada em função de $v_{||}$ e v_{\perp} , em escala logarítmica. (a) $\tau = 10000$, sem colisões; (b) $\tau = 10000$, com colisões; (c) $\tau = 15000$, sem colisões; (d) $\tau = 15000$, com colisões; (e) $\tau = 20000$, sem colisões; (f) $\tau = 20000$, com colisões; (g) $\tau = 30000$, sem colisões; (h) $\tau = 30000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$.

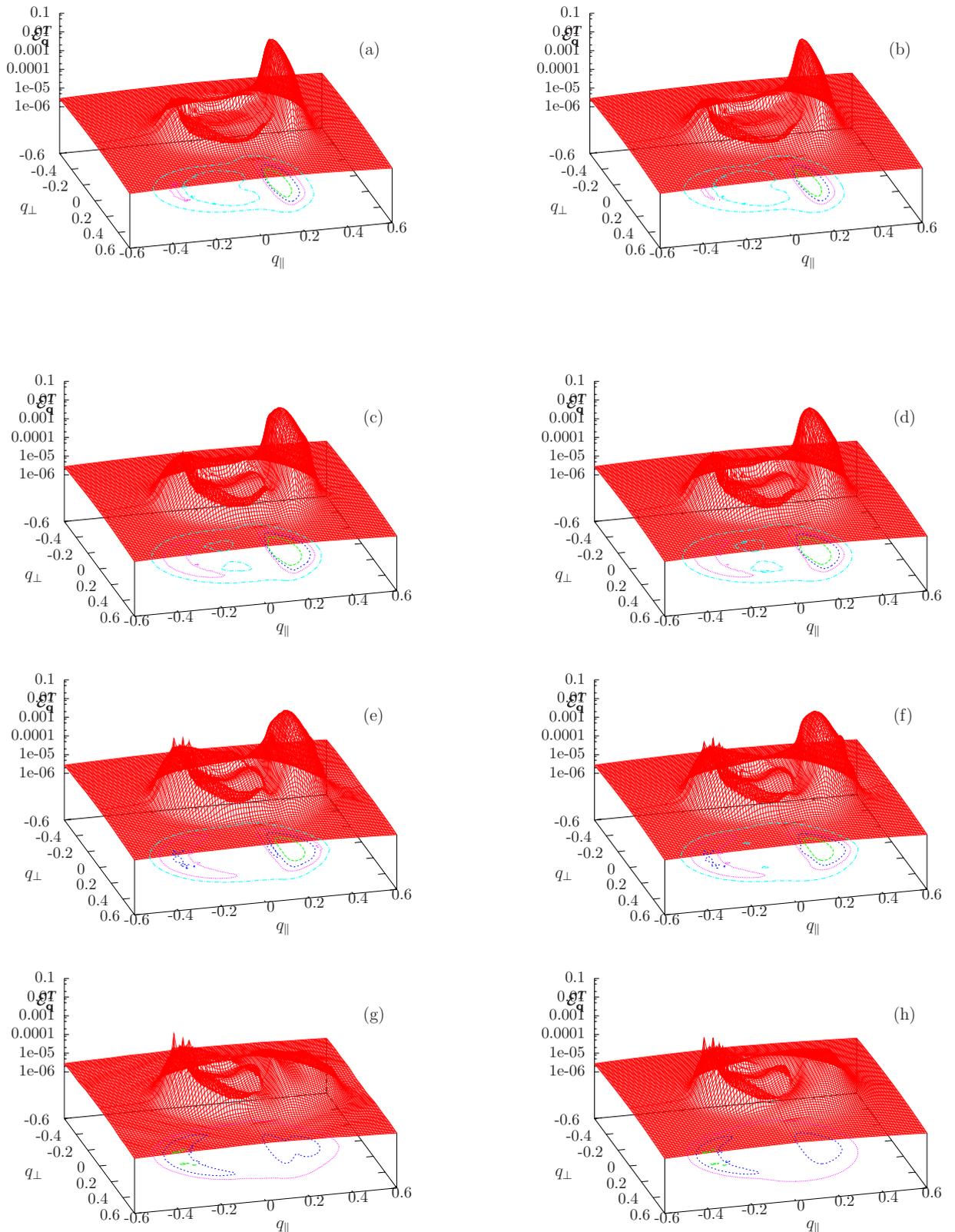


Figura 6.3: Intensidade normalizada para ondas L como função de q_{\parallel} e q_{\perp} , em escala logarítmica. (a) $\tau = 500$, sem colisões; (b) $\tau = 500$, com colisões; (c) $\tau = 1000$, sem colisões; (d) $\tau = 1000$, com colisões; (e) $\tau = 2000$, sem colisões; (f) $\tau = 2000$, com colisões; (g) $\tau = 5000$, sem colisões; (h) $\tau = 5000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$.

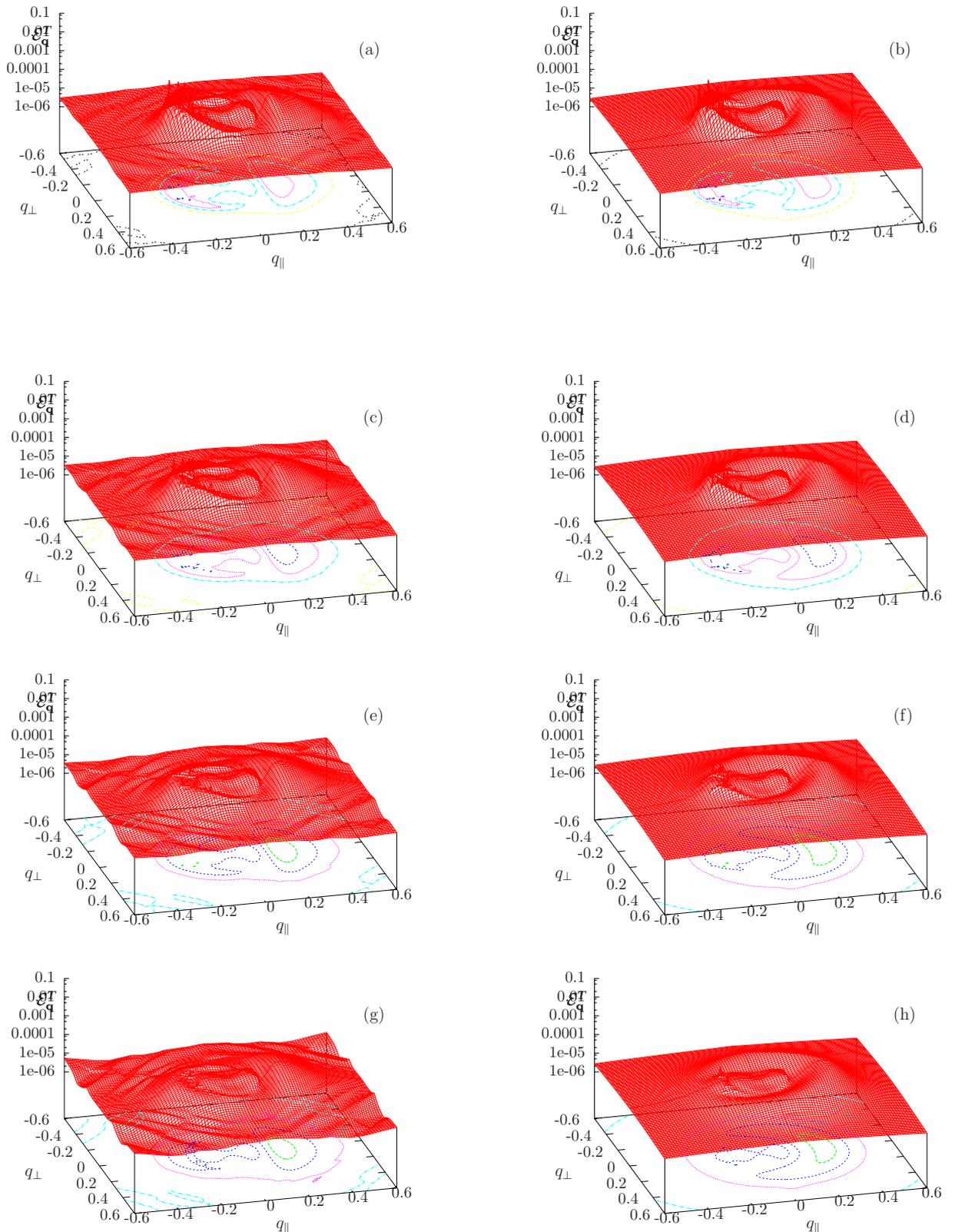


Figura 6.4: Intensidade normalizada para ondas L como função de q_{\parallel} e q_{\perp} , em escala logarítmica. (a) $\tau = 10000$, sem colisões; (b) $\tau = 10000$, com colisões; (c) $\tau = 15000$, sem colisões; (d) $\tau = 15000$, com colisões; (e) $\tau = 20000$, sem colisões; (f) $\tau = 20000$, com colisões; (g) $\tau = 30000$, sem colisões; (h) $\tau = 30000$, com colisões. Razão de densidade $n_f/n_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e velocidade do feixe $v_f/v_{te} = 5.0$.

Capítulo 7

Considerações finais

Nessa dissertação apresentamos um tratamento teórico e numérico desenvolvido no contexto da teoria de turbulência fraca com inclusão de efeitos colisionais com aplicação ao problema da interação feixe-plasma não linear, em duas dimensões. O objetivo deste trabalho foi complementar uma série de estudos desenvolvidos por Ziebell, Yoon, Gaelzer e Pavan sobre a evolução temporal da instabilidade *bump-in-tail* não linear no contexto da teoria de turbulência fraca [6, 7, 8, 9, 39]. Em nossa abordagem, consideramos a presença de ondas eletrostáticas em um plasma não magnetizado, com função de distribuição de fundo Maxwelliana, adicionada de um feixe tênue de elétrons energéticos descritos por uma distribuição Maxwelliana deslocada, na região de altas velocidades.

Com a intenção de dar uma boa base teórica para o formalismo que seguiria, começamos com um resumo da teoria cinética de plasmas, no [Capítulo 2](#). A seguir, no [Capítulo 3](#), passamos à teoria de turbulência fraca, discutindo em detalhes aspectos fundamentais do formalismo e suas aplicações. No [Capítulo 4](#) abordamos as colisões em plasmas de um ponto de vista teórico, chegando à forma final do operador colisional a ser empregado, tendo como ponto de partida o formalismo de Klimontovich. Com as equações prontas, passamos ao [Capítulo 5](#), onde foram discutidos aspectos importantes do trabalho. O operador colisional foi projetado em duas dimensões, colocado em forma adimensional e agrupado às equações da teoria de turbulência fraca, que aparecem já projetadas em 2D e normalizadas. No [Capítulo 6](#) foram discutidos os métodos numéricos empregados e os resultados obtidos.

Os resultados anteriores, sem atuação colisional, [6, 7, 8, 9, 39] mostram que a evolução temporal da instabilidade *bump-on-tail* tem início com uma forte influência da interação onda-partícula quasilinear, relacionada à formação de um pico de crescimento das ondas ressonantes no espaço de vetor de onda, que rapidamente resulta no achatamento progressivo da região entre o feixe e o corpo da função de distribuição, culminando na formação de um *plateau* na função de distribuição e na saturação do crescimento das ondas. Os efeitos não lineares de espalhamento e de decaimento começam a ficar mais evidentes somente após a saturação dos efeitos quasilineares, com o aquecimento dos elétrons na região de velocidades oposta à do feixe e, no espaço de vetor de onda, com o surgimento de um pico contrapropagante ao pico inicial e a formação de um anel de interligando esses dois picos.

Sob uma análise superficial, os resultados obtidos neste trabalho nos indicam que os primeiros sinais da atuação colisional, embora muito sutis, surgem logo no início da evolução temporal da função de distribuição. Por outro lado, as colisões só irão afetar a evolução das ondas

bem mais tarde, quando passam a dominar a dinâmica do sistema, promovendo uma simetrização lenta, mas progressiva, tanto no espaço de velocidades, quanto no espaço de vetor de onda.

Traçando um paralelo com os resultados não colisionais, vemos que esses primeiros efeitos surgem na função de distribuição ao final da evolução da emissão quasilinear, ou seja, quando o *plateau* já está formado, portanto não interferem nesse processo. A atuação colisional começa a ser mais efetiva na função de distribuição mais ou menos ao mesmo tempo em que os efeitos não lineares começam a aparecer no espaço de velocidades. Essa atuação cresce lenta e continuamente. Para as ondas, no entanto, não podemos dizer o mesmo sobre o crescimento da influência colisional. O que ocorre no espaço de vetor de onda é uma mudança abrupta na forma do espectro. A partir desse momento, a impressão que temos, é que as colisões passam a dominar a evolução temporal do sistema. Essa prevalência é percebida com a crescente tendência à simetrização azimutal da função de distribuição e do espectro das ondas.

As perspectivas deste trabalho são promissoras. Em um futuro mais imediato, deveremos prosseguir com uma análise mais profunda da interação feixe-plasma envolvendo a evolução de ondas eletrostáticas, uma vez que é provável que em pouco tempo teremos resultados que poderão ser publicados em um artigo. Outra possibilidade que surge a partir deste trabalho é a possibilidade de inclusão de efeitos colisionais em um formalismo de turbulência fraca que inclua as interações envolvendo ondas eletromagnéticas, visando investigar os efeitos de colisões sobre os processos de emissão solar conhecidos como *type II radio bursts* e *type III radio bursts*. Portanto, a ideia é seguir no doutorado com um abordagem mais completa do problema da interação feixe-plasma, no contexto da teoria de turbulência fraca.

Apêndice A

Cálculo do potencial efetivo para uma distribuição Maxwelliana

Partindo de (4.134), lembrando das definições (4.130) e $x_{ab} \equiv v_a/v_{th_b}$, para uma distribuição Maxwelliana,

$$f(v_b) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_{th_b}} \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right), \quad (\text{A.1})$$

substituindo em (4.134), obtemos

$$F(x_{ab}) = \frac{2}{v_{th_b}^4 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv_b v_b^2 \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|. \quad (\text{A.2})$$

Expandindo a expressão para o módulo da diferença entre os vetores velocidade, obtemos

$$F(x_{ab}) = \frac{2}{v_{th_b}^4 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv_b v_b^2 \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(v_a^2 - 2v_a v_b \cos\theta + v_b^2\right)^{1/2}. \quad (\text{A.3})$$

A integração da parte angular de (A.3) pode ser feita por partes, resultando em

$$F(x_{ab}) = \frac{2}{v_{th_b}^4 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv_b v_b^2 \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) \frac{1}{3v_a v_b} \left[(v_a + v_b)^3 - |v_a - v_b|^3\right]. \quad (\text{A.4})$$

Cancelando o v_b do denominador com o quadrado no numerador e colocando 1/3 para fora da integral, ficamos com

$$F(x_{ab}) = \frac{2}{3v_{th_b}^4 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dv_b v_b}{v_a} \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) \left[(v_a + v_b)^3 - |v_a - v_b|^3\right]. \quad (\text{A.5})$$

Separando (A.5) em duas partes, podemos remover módulo do último termo, ficando com:

$$F(x_{ab}) = \frac{4}{3v_{th_b}^4 \sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{v_a} \int_0^{v_a} dv_b v_b^2 (3v_a^2 + v_b^2) \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) + \int_{v_a}^\infty dv_b v_b (v_a^2 + 3v_b^2) \exp\left(-v_b^2/v_{th_b}^2\right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Agora, definindo a variável adimensional $t = v_b/v_{thb}$, utilizando o parâmetro já anteriormente definido $x_{ab} = v_a/v_{thb}$ e suprimindo os subscritos a e b , por simplicidade de notação, ficamos com:

$$F(x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} \int_0^x dt t^2 (3x^2 + t^2) e^{-t^2} + \int_x^\infty dt t (x^2 + 3t^2) e^{-t^2} \right). \quad (\text{A.7})$$

A integral de 0 a x pode ser resolvida em termos da função erro e a integral de x a ∞ é trivial, o que resulta em:

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2x} \right) \Phi(x) + \frac{1}{2} \Phi'(x), \quad (\text{A.8})$$

onde $\Phi(x)$ é a função erro e é dada por

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (\text{A.9})$$

e $\Phi'(x)$, a derivada da função erro, tem a seguinte forma

$$\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Cálculo detalhado da projeção bidimensional do operador colisional

Partindo da equação (4.151) e usando as propriedades (4.138), (4.139) e (4.140), podemos desenvolver as derivadas vetoriais do operador colisional e obter sua forma bidimensional nas coordenadas x e z . Como em (4.151) todas as derivadas de velocidade são com relação às partículas do tipo a , iremos suprimir definitivamente este subíndice.

Vamos começar definindo o vetor velocidade como

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.1})$$

onde $v_z \mathbf{e}_z$ é a velocidade paralela ao feixe, $v_x \mathbf{e}_x$ é a velocidade perpendicular ao feixe, e o módulo da velocidade é dado por $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$.

A expressão para a derivada é a seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.2})$$

O cálculo das derivadas vetoriais pode ser efetuado com o uso da seguinte propriedade:

$$\nabla \cdot (\Psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{B.3})$$

tendo em mente que a expressão (B.2) é o mesmo que $\nabla_{\mathbf{v}}$, sendo Ψ uma função escalar qualquer e \mathbf{a} um vetor arbitrário.

Com isso também podemos abrir as referidas propriedades das derivadas vetoriais, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v_{tb}} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{v_{tb}} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \\ &= \frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v_{tb}} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v_{tb}} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[\frac{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right],
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 x_{ab}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v_{tb}} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left[\frac{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[-\frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} - \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(\frac{v_x^2 \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + v_x v_z \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + v_z v_x \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + v_z^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left\{ -\frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} - \left[\frac{2v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z + v_x \mathbf{e}_x + 2v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3v_x \frac{v_x^2 \mathbf{e}_x + v_x v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{5/2}} - 3v_z \frac{v_x v_z \mathbf{e}_x + v_z^2 \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{5/2}} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[-\frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} - 3 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} + 3v_x^2 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{5/2}} + 3v_z^2 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{5/2}} \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[-\frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} - 3 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} + 3 \frac{v_x^2 + v_z^2}{(v_x^2 + v_z^2)^{5/2}} (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[-\frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} - 3 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} + 3 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \\
&= -\frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{ab}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \cdot \left[\frac{\overleftarrow{\mathbf{I}}}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{v_{tb}} \left[\frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{v_x^2 + v_z^2} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{v_x^2 + v_z^2} \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Por simplicidade, vamos calcular separadamente cada termo da equação (4.151).

Primeiro termo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] &= \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\frac{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \right] \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} \right) \\
&\quad - \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \left[\frac{v_x}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + \frac{v_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \left[\left(\Phi'(x_{ab}) - \frac{\Psi'(x_{ab})}{2x_{ab}^2} + \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^3} \right) \frac{1}{v_{tb}} \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \right] \\
&= \frac{v_x^2 + v_z^2}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \left(v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \\
&= \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \left[\left(v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} - 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \right].
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] &= \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left[\left(v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} - 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \right] \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De outra forma, isolando a derivada mais externa, em termos das componentes x e z

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial v_z} \left[\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v_z} \left[\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde foi usado

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v_x \partial v_x} = \frac{v_z^2}{v^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial v_x \partial v_z} = \frac{\partial^2 v}{\partial v_z \partial v_x} = -\frac{v_x v_z}{v^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial v_z \partial v_z} = \frac{v_x^2}{v^3}. \quad (\text{B.12})$$

Segundo termo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \frac{(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)(v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z)}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \left[\frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right] \\ &\quad + (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \left[\frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right] \\ &= \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \\ &\quad + \frac{1}{v_x} \frac{1}{v_x^2 + v_z^2} \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \left(\frac{\Psi'(x_{ab})}{x_{ab}^2} - \frac{2\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Da definição da função $\Psi(x)$, temos que:

$$\Psi'(x) = \Phi'(x) - \Phi'(x) - x\Phi''(x),$$

onde

$$\Phi''(x) = -\frac{4\pi}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = -2x\Phi'(x),$$

portanto

$$\Psi'(x) = 2x^2\Phi'(x).$$

Eliminando os termos que se anulam e substituindo $\Psi'(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) &= \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left[\left(v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \left(x_{ab} \Phi'(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde usamos

$$\frac{1}{v_{tb}} \frac{1}{v_x^2 + v_z^2} = \frac{x_{ab}}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} = \frac{x_{ab}}{v^3}. \quad (\text{B.15})$$

Também podemos escrever também da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z v_x}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_z^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Terceiro termo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\mathbf{v}}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right] &= 2 \frac{m_a}{m_b} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left[f_a \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \Psi(x_{ab}) \right] \\ &= 2 \frac{m_a}{m_b} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \left[f_b \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \Psi(x_{ab}) \right] \right. \\ &\quad \left. + (v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_z} \mathbf{e}_z \right) \left[f_a \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \Psi(x_{ab}) \right] \right\} \\ &= 2 \frac{m_a}{m_b} \left[\frac{2}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} f_a \Psi(x_{ab}) + \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \Psi(x_{ab}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} f_a \Psi(x_{ab}) + f_a \frac{1}{v_{tb}} \frac{1}{v_x^2 + v_z^2} \Psi'(x_{ab}) \right] \\ &= 2 \frac{m_a}{m_b} \left[\frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} - f_a \right) \Psi(x_{ab}) + f_a \frac{1}{v_{tb}} \frac{1}{v_x^2 + v_z^2} \Psi'(x_{ab}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

substituindo $\Psi'(x_{ab}) = 2x_{ab}^2\Phi'(x_{ab})$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{\mathbf{v}}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right] = 2 \frac{m_a}{m_b} \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left[\left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} - f_a \right) \Psi(x_{ab}) + 2f_a x_{ab}^3 \Phi'(x_{ab}) \right]. \quad (\text{B.18})$$

Escrevendo de outra forma:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[2 \frac{m_a}{m_b} f_b \frac{\mathbf{v}}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right] = \frac{\partial}{\partial v_x} \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_x}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right) + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_z}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right). \quad (\text{B.19})$$

Agrupando os termos

Somando os resultados de cada termo obtido acima, temos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
\theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left\{ \left[\left(v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} - 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \right. \right. \\
& - \left. \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \right] \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \\
& + \left(v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \\
& + 2 \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \left(x_{ab} \Phi'(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \\
& \left. + 2 \frac{m_a}{m_b} \left[\left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} - f_a \right) \Psi(x_{ab}) + 2f_a x_{ab}^3 \Phi'(x_{ab}) \right] \right\}. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Usando $x\Phi'(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$ podemos juntar alguns desses termos, como segue

$$\begin{aligned}
\theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{1}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \left\{ \left[\left(v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} - 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \right. \right. \\
& - \left. \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \right] \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \\
& + \left(v_x^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_z^2} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_x \partial v_z} \right) \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \\
& + 2 \left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \right) \left(\Phi(x_{ab}) - \Psi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \\
& \left. + 2 \frac{m_a}{m_b} \left[\left(v_x \frac{\partial f_a}{\partial v_x} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial v_z} - f_a \right) \Psi(x_{ab}) + 2f_a x_{ab}^3 \Phi'(x_{ab}) \right] \right\}. \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Outra forma de escrever, é explicitando as derivadas em x e em z , como temos abaixo

$$\begin{aligned}
\theta(f_a, f_b) = & \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial v_x} \left\{ \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_x}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) - \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\} \\
& + \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial v_z} \left\{ \left(2 \frac{m_a}{m_b} f_a \frac{v_z}{v^3} \Psi(x_{ab}) \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_z v_x}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) + \left(\frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_z^2}{v^3} \frac{\Psi(x_{ab})}{x_{ab}^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial f_a}{\partial v_z} \frac{v_x^2}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) - \frac{\partial f_a}{\partial v_x} \frac{v_x v_z}{v^3} \left(\Phi(x_{ab}) - \frac{\Psi(x_{ab})}{2x_{ab}^2} \right) \right\}. \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Francis F. Chen. Industrial applications of low-temperature plasma physics. *Physics of Plasmas*, 2(6):2164–2175, June 1995.
- [2] P. M. Bellan *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press 2006.
- [3] May-Britt, Kallenrode. *Space physics: an introduction to plasmas and particles in the heliosphere and magnetospheres*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, 2nd updated ed.
- [4] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Plenum, New York, 1984, 2nd. ed.
- [5] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. INPE-FAPESP, São José dos Campos, 1995, 2nd. ed.
- [6] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and Peter H. Yoon. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Phys. Plasmas*, 8(9):3982–3995, Sept. 2001.
- [7] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 50(8):085011, 15p., 2008.
- [8] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Dynamics of Langmuir wave decay in two-dimensions. *Phys. Plasmas*, 15(1):032303, 11p., Mar. 2008.
- [9] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer and J. Pavan. Langmuir condensation by spontaneous scattering off electrons in two dimensions. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 54(12):055012, 6pp., 2012.
- [10] YU. L. Klimontovich. *The Statistical Theory Of Non-Equilibrium Processes In A Plasma*. Pergamon, 1967.
- [11] R. C. Davidson. *Physics of Nonneutral Plasmas*. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.
- [12] A. I. Akhiezer & R. V. Polovin & K. N. Stepanov. Pergamon Press, 1975. *Plasma Electrodynamics Volume 1*.
- [13] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. Mc Graw-Hill, New York, 1973.
- [14] D. A. Gurnett & A. Bhattacharjee. *Introduction to Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2005.
- [15] B. D. Fried and S. D. Conte. *The Plasma Dispersion Function*. Academic Press, New York, 1961.

- [16] A. I. Akhiezer & R. V. Polovin & K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics Volume 2*. Pergamon Press Ltd, 1975.
- [17] V. N. Tsytovich. *Non Linear Effects in Plasmas*. Plenum Press, New York, 1970.
- [18] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev. *Nonlinear Plasma Theory*. Benjamin, New York, 1969.
- [19] R. C. Davidson. *Methods In Nonlinear Plasma Theory* Academic Press, New York, 1972.
- [20] V. N. Tsytovich. *Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*. Pergamon Press, 1972.
- [21] V. N. Tsytovich. *Theory of Turbulent Plasma*. Consultants Bureau, New York, 1977.
- [22] D. B. Melrose. *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [23] Peter H. Yoon. Generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 7(12):4858–4871, Dec. 2000.
- [24] Peter H. Yoon. Statistical theory of electromagnetic weak turbulence. *Physics of Plasmas*, 13:022302, 15p., 2006.
- [25] C. T. Dum and R. N. Sudan. Nonlinear beam-plasma interactions and stochastic acceleration. *Phys. Fluids*, 14, 414, 1971
- [26] L. Muschietti and C. T. Dum. Nonlinear wave scattering and electron beam relaxation. *Phys. Fluids B*, 3(8):1968-1982, Aug. 1991
- [27] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan Electromagnetic weak turbulence theory revisited *Physics of Plasmas* 19:102303, 08.p, 2012
- [28] Peter H. Yoon. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 12:042305, 2005.
- [29] YU. L. Klimontovich. *Kinetic Theory of Non Ideal Gases and Nonideal Plasmas*. Pergamon Press, 1982.
- [30] J. D. Gaffey Jr., Energetic ion distribution resulting from neutral beam injection in tokamaks. *J. Plasma Phys.*, 16(2):149-169, 1976.
- [31] Lucio M. Tozawa. Difusão estocástica de íons energéticos em tokamaks sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior. MSc Diss., UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Física, 31 mar. 1998.
- [32] I. Alexeff, R. V. Neidigh, W. F. Peed, E. D. Shipley, E. G. Harris. Hot-Electron Plasma by Beam-Plasma Interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 10:273, 1963.
- [33] D. M. Karfidov, A. M. Rubenchik, K. F. Sergeichev, I. A. Sychev, Strong Langmuir turbulence excited by an electron beam in plasma. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ISSN 0044-4510)* vol. 98, Nov. 1990, p. 1592-1604. In Russian. *Physics Of Plasmas*, 12:042306, 2005.
- [34] F. J. R Simões Jr., J. Pavan, R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and P. H. Yoon. PIC simulations os spontaneous thermal magnetic field fluctuations. *Phys. Plasmas*, 20:100702, Oct. 2013.
- [35] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, F. J. R Simões Jr., R. Gaelzer, and J. Pavan. Spontaneous emission of electromagnetic radiation in turbulent plasmas. *Phys. Plasmas*, 21(1):010701, Jan. 2014.

- [36] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan. Transition from thermal to turbulent equilibrium with a resulting electromagnetic spectrum. *Phys. Plasmas*, 21(1):012306, Jan. 2014.
- [37] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan. Plasma emission by weak turbulence processes. *Astrophys. J. Lett.*, 795:L32, Nov. 2014.
- [38] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, L. T. Petruzzellis, R. Gaelzer, and J. Pavan. Plasma emission by nonlinear electromagnetic processes. *Astrophys. J.*, 806:237, June. 2015
- [39] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, R. P. Lin, and L. Wang. Langmuir turbulence and suprathermal electrons. *Space Science Reviews*, 173(1-4):459–489, Nov. 2012.
- [40] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan. Electromagnetic weak turbulence theory revisited. *Phys. Plasmas*, 19(10):102303, 9pp, Oct. 2012.