

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**MODELAGEM E ANÁLISE**  
**DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS**

**Guilherme Luís Roeh Vaccaro**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia.

*Área de Concentração:* Engenharia de Produção

**Porto Alegre, Rio Grande do Sul**

**1997**

## MODELAGEM E ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

**Guilherme Luís Roehé Vaccaro**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO e aprovada na sua forma final pelo professor orientador e pelos membros da banca examinadora do curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.**

**Orientador:** \_\_\_\_\_

**Professor José Luís Duarte Ribeiro**

**Doutor em Engenharia pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.**

### **Banca Examinadora:**

– **Professor Enrico Antônio Colosimo**

**Doutor em Estatística pela *University of Wisconsin*, Madison, USA.**

– **Professor Alberto Tamagna**

– **Doutor em Estruturas pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.**

– **Professor Jorge Daniel Riera**

– **Doutor em Engenharia Civil pela *Princeton University*, NJ, USA.**

**Coordenador:** \_\_\_\_\_

**Professor Luís Antônio Lindau**

## AGRADECIMENTOS

Eles ergueram a torre de Babel  
para escalar o Céu.  
Mas Deus não estava lá!  
Estava ali mesmo, entre eles,  
ajudando a construir a torre.

**Mário Quintana**

*Por estas breves palavras gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram, das mais diversas formas, para a concretização de mais esta etapa de um longo caminho de estudo e pesquisa. Em especial agradeço a Deus, sem o qual nada tem sentido; a meus pais, Augusto e Hilda, a meu irmão, Fernando, e a sua esposa, Simone, pelo apoio e preocupação sempre constantes; ao professor Enrico Colosimo, que além das muitas contribuições e orientações, mostrou-se um grande amigo. A todos os amigos do Instituto de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, muito obrigado pelo apoio e incentivo. Aos professores Nivaldo Almeida Fonseca, Lori Viali e Elsa Mundstock, obrigado pelo incentivo e pelos livros. À Danielle Nunes, muito obrigado pelo apoio e pelas muitas madrugadas de trabalho. Às amigas Simone Echeveste e Dinara Fernandez, obrigado por ensinar o gosto pela Ciência Estatística. Aos amigos antigos e aos cultivados durante este período, em especial Alexandre, Letícia, Eliane e Dalcídio, obrigado por suportarem o habitual mau humor.*

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>COMENTÁRIOS INICIAIS</b>	<b>1</b>
1.1	O Conceito de Confiabilidade no Panorama do Mercado Atual	1
1.2	Tema e Relevância do Tema	3
1.3	Objetivos	5
1.4	Método de Abordagem e Cronograma de Atividades	6
1.4.1	Pesquisa Bibliográfica	6
1.4.2	Desenvolvimento de Algoritmos para Modelagem de Confiabilidade de Sistemas	6
1.4.3	Escolha e aprendizado da linguagem de programação e implementação do <i>software</i>	6
1.4.4	Depuração e Validação do <i>Software</i>	6
1.4.5	Confecção do Documento Final	7
1.5	Estrutura da Dissertação	7
1.6	Delimitações Deste Trabalho	8
<b>2.</b>	<b>FUNDAMENTOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE</b>	<b>10</b>
2.1	Qualidade versus Confiabilidade	10
2.2	Conceito de Confiabilidade	11
2.3	As Funções de Confiabilidade	13
2.3.1	As Funções Confiabilidade e Distribuição Acumulada de Falhas	14
2.3.2	A Função Densidade de Probabilidades de Falha	15
2.3.3	A Função Taxa de Risco	16
2.4	A Função de Confiabilidade e o Tempo Médio Até a Falha (MTTF)	18
2.5	A Função Taxa de Risco e as Fases da Vida de um Produto	19
2.6	A Função Taxa de Risco e os Modelos de Confiabilidade	21
2.6.1	Modelos Matemáticos para Análises de Confiabilidade	21
2.6.2	A Distribuição Exponencial	22
2.6.3	A Distribuição de Weibull	25
2.6.4	A Distribuição Normal	28
2.6.5	A Distribuição LogNormal	32
2.6.6	A Distribuição Gamma	35
2.6.7	A Distribuição Uniforme	37
2.7	Étapas da Modelagem e Estimação da Confiabilidade	39
2.7.1	Coleta de Dados via Testes	40
2.7.2	Estimação de Modelos	43
2.8	Métodos de Verificação de Adequação de Ajuste	64
2.8.1	Métodos Analíticos	65
2.8.2	Métodos Empíricos	67

<b>3.</b>	<b>SISTEMAS E CONFIABILIDADE DE SISTEMAS</b>	<b>75</b>
3.1	Introdução	75
3.2	Conceito de Sistema	76
3.3	Configurações de Sistemas	77
3.3.1	Sistemas em Série	77
3.3.2	Sistemas em Paralelo	78
3.3.3	Sistemas Mistos	79
3.3.4	Sistemas $k$ -out-of- $n:F$ Consecutivos	80
3.3.5	Sistemas $k$ -out-of- $n$	80
3.3.6	Sistemas Complexos	80
3.4	Sistemas com Redundância de Componentes	81
3.5	Estimação da Confiabilidade de Sistemas	81
3.5.1	Confiabilidade de Sistemas em Série	84
3.5.2	Confiabilidade de Sistemas em Paralelo	86
3.5.3	Confiabilidade de Sistemas Mistos	87
3.5.4	Confiabilidade de Sistemas $k$ -out-of- $n:F$ Consecutivos	88
3.5.5	Confiabilidade de Sistemas $k$ -out-of- $n$	89
3.5.6	Confiabilidade de Sistemas Complexos	90
3.5.7	Confiabilidade de Sistemas Reparados - Manutenção	90
3.6	Métodos para Estimação da Confiabilidade de Sistemas	92
3.6.1	O Método da Decomposição	93
3.6.2	O Método de Determinação de <i>Tie-Sets</i>	94
3.6.3	O Método de Determinação de <i>Cut-Sets</i>	95
3.6.4	O Método da Tabela Booleana	96
3.6.5	Simulação via Método de Monte Carlo	97
3.6.6	Método de Discretização da Confiabilidade	102
3.7	Identificação de Componentes Críticos para Confiabilidade	102
3.8	Alocação de Confiabilidade	104
3.8.1	Problemas Básicos de Alocação de Confiabilidade	106
3.8.2	Métodos de Alocação de Confiabilidade	107
<b>4.</b>	<b>PROGRAMAS DE PLANEJAMENTO E MANUTENÇÃO DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS PRODUTIVOS</b>	<b>116</b>
4.1	A Visão Gerencial da Confiabilidade	116
4.2	Programação da Confiabilidade em Sistemas Produtivos	117
4.2.1	Dados de Confiabilidade	119
4.2.2	Usos das Informações de Confiabilidade	120
4.3	Ferramentas da Programação de Confiabilidade	123
4.3.1	FMEA e FTA	124
4.3.2	<i>Softwares</i> de Confiabilidade de Sistemas	125
<b>5.</b>	<b>DESCRIÇÃO DO SOFTWARE RELYSYS</b>	<b>127</b>
5.1	Visão Geral e Filosofia do RelySys	127
5.2	Limitações do RelySys	129

<b>5.3</b>	<b>Instalação e Necessidades Mínimas de Ambiente Operacional</b>	<b>130</b>
5.3.1	Necessidades Mínimas de Ambiente	130
5.3.2	Instalação	130
5.3.3	Remoção	131
<b>5.4</b>	<b>Descrição do Ambiente de Trabalho</b>	<b>131</b>
5.4.1	Área de Edição	131
5.4.2	Painel de Controle	133
5.4.3	Menus e Barra de Ferramentas	135
<b>6.</b>	<b>ESTUDOS DE CASOS</b>	<b>154</b>
6.1	Introdução	154
6.2	Estudo de Caso 1: Análise de Confiabilidade de um Eixo Cardan	155
6.3	Estudo de Caso 2: Análise de Falhas de Motores a Combustão	163
<b>7.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>172</b>
7.1	Conclusões	172
7.2	Sugestões para Desenvolvimentos Futuros	174
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>175</b>
	<b>FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE PARA AS PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DE TEMPOS DE FALHA</b>	<b>180</b>
	<b>ALGORITMOS PARA A ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE DISTRIBUIÇÕES</b>	<b>181</b>
B.1	Algoritmo para o Cálculo do Parâmetro de Localização do Modelo de Weibull	181
B.2	Algoritmo para a Estimação dos Parâmetros do Modelo Normal para Amostras Censuradas por Tempo ou por Componentes	182
	<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE DISTRIBUIÇÕES</b>	<b>184</b>
C.1	Distribuição Normal	184
C.1.1	Distribuição Normal Direta	184
C.1.2	Distribuição Normal Inversa	186
C.2	Distribuição $\chi^2$	187
C.2.1	Distribuição $\chi^2$ Direta	187
C.2.2	Distribuição $\chi^2$ Inversa	188
7.3	Distribuição Dm	189
C.3	Distribuição F de Snedecor	189
C.3.1	Distribuição F Direta	189
C.3.2	Distribuição F Inversa	190
	<b>ALGORITMOS PARA MÉDIA E VARIÂNCIA</b>	<b>191</b>

<b>D.1 Algoritmo para a Média</b>	<b>192</b>
<b>D.2 Algoritmo para a Variância</b>	<b>192</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: "CURVA DO FUNDO DE BANHEIRA", APRESENTANDO AS TRÊS FASES DA EVOLUÇÃO DA TAXA DE RISCO DE UM COMPONENTE GENÉRICO. FONTE: RIBEIRO, 1995. _____	20
FIGURA 2: "CURVAS DE FUNDO DE BANHEIRA" PARA OS CASOS DE COMPONENTES MECÂNICOS (À ESQUERDA) E ELÉTRICOS (À DIREITA). FONTE: RIBEIRO, 1995. _____	21
FIGURA 3: FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO MODELO EXPONENCIAL PARA VALORES DA TAXA DE FALHAS $\lambda$ IGUAIS A 0,5, 1,0 E 2,0. _____	23
FIGURA 4: FUNÇÃO TAXA DE RISCO PARA O MODELO DE FALHAS EXPONENCIAL, APRESENTANDO VALORES DE $\lambda$ IGUAIS A 0,5, 1,0 E 2,0. _____	25
FIGURA 5: EXEMPLOS DE CONFIGURAÇÕES DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO MODELO DE WEIBULL PARA DIFERENTES VALORES DO PARÂMETRO $\gamma$ , TAMBÉM DENOMINADO 'PARÂMETRO DE FORMA'. DE MODO A FACILITAR A COMPARAÇÃO, O PARÂMETRO $\theta$ É MANTIDO CONSTANTE E IGUAL A 1,0. _____	26
FIGURA 6: FUNÇÃO TAXA DE RISCO PARA O MODELO DE FALHAS DE WEIBULL, APRESENTANDO $\theta$ IGUAL A 1,0 E VALORES DE $\gamma$ IGUAIS A 0,5, 1,0, 2,0 E 5,0. _____	28
FIGURA 7: EXEMPLOS DE FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO MODELO NORMAL DE FALHAS. OBSERVE-SE SUA SIMETRIA EM RELAÇÃO AO VALOR DA MÉDIA. _____	30
FIGURA 8: EXEMPLOS DA FUNÇÃO TAXA DE RISCO DO MODELO DE FALHAS NORMAL. O CRESCIMENTO MONÓTONO JUSTIFICA SUA UTILIZAÇÃO EM SISTEMAS CUJO DESGASTE AUMENTE COM O TEMPO E COM O USO. _____	31
FIGURA 9: EXEMPLOS DE CONFIGURAÇÕES DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO MODELO LOGNORMAL. OBSERVE-SE QUE O PARÂMETRO $m$ É MANTIDO CONSTANTE EM 1,0, ENQUANTO $\sigma$ ASSUME DIFERENTES VALORES. _____	33
FIGURA 10: EXEMPLOS DA VARIABILIDADE DE FORMATOS DA FUNÇÃO TAXA DE RISCO DO MODELO LOGNORMAL EM RELAÇÃO A SEUS PARÂMETROS. NESTE EXEMPLO SOMENTE $\sigma$ ASSUME DIFERENTES VALORES. _____	34
FIGURA 11: CONFIGURAÇÕES DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO MODELO GAMMA. _____	36
FIGURA 12: EXEMPLOS DE TAXA DE RISCO OBTIDOS ATRAVÉS DO MODELO GAMMA. _____	37
FIGURA 13: PAPEL DE PROBABILIDADE EXPONENCIAL CONTENDO UM CONJUNTO DE DADOS AMOSTRADOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL COM $\lambda=0,2$ (EM AZUL) E A RETA AJUSTADA VIA REGRESSÃO LINEAR (EM VERMELHO). O COEFICIENTE ANGULAR ESTIMADO PARA A RETA FOI 0,1742. _____	70
FIGURA 14: PAPEL DE PROBABILIDADE WEIBULL CONTENDO UM CONJUNTO DE DADOS AMOSTRADOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL COM $\gamma=1,5$ E $\theta=100$ (EM AZUL) E A RETA AJUSTADA VIA REGRESSÃO LINEAR (EM VERMELHO). OS COEFICIENTES ANGULAR E LINEAR ESTIMADOS PARA A RETA FORAM, RESPECTIVAMENTE 1,3262 E -6,1694, INDICANDO $\gamma=1,3262$ E $\theta=104,78$ . _____	71
FIGURA 15: PAPEL DE PROBABILIDADE NORMAL CONTENDO UM CONJUNTO DE DADOS AMOSTRADOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL COM $m=100$ E $\sigma=20$ (EM AZUL) E A RETA AJUSTADA VIA REGRESSÃO LINEAR (EM VERMELHO). OS COEFICIENTES ANGULAR E LINEAR ESTIMADOS PARA A RETA FORAM, RESPECTIVAMENTE 18,3055 E 103,0330, INDICANDO $m=103,0330$ E $\sigma=18,3055$ . _____	72
FIGURA 16: PAPEL DE PROBABILIDADE LOGNORMAL CONTENDO UM CONJUNTO DE DADOS AMOSTRADOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL COM $m=10$ E $\sigma=2$ (EM AZUL) E A RETA AJUSTADA VIA REGRESSÃO LINEAR (EM VERMELHO). OS COEFICIENTES ANGULAR E LINEAR ESTIMADOS PARA A RETA FORAM, RESPECTIVAMENTE 1,8615 E 10,0986, INDICANDO $m=10,0986$ E $\sigma=1,8615$ . _____	73
FIGURA 17: BOX-PLOT DE UM CONJUNTO DE DADOS QUE ASSUME DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL. OBSERVE-SE A EXISTÊNCIA DE UM OUTLIER NO EXTREMO DIREITO DO DIAGRAMA. _____	74
FIGURA 18: REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMA DE BLOCOS DE UM SISTEMA EM SÉRIE. _____	78
FIGURA 19: REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMA DE BLOCOS DE UM SISTEMA EM PARALELO. _____	78
FIGURA 20: SISTEMA SÉRIE-PARALELO _____	79
FIGURA 21: SISTEMA PARALELO-SÉRIE _____	79
FIGURA 22: EXEMPLO DE UM SISTEMA MISTO-PARALELO. _____	79
FIGURA 23: EXEMPLO DE SISTEMA COMPLEXO. _____	80
FIGURA 24: FLUXOGRAMA DESCREVENDO A TÉCNICA DE ESTIMAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE UM SISTEMA ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO. FONTE: ADAPTADO DE RIBEIRO (1995). _____	101
FIGURA 25: GRÁFICO ILUSTRATIVO DO MÉTODO DESIGN-TO-COST. FONTE: RIBEIRO (1995A). _____	115
FIGURA 26: O COMPROMISSO TRAZIDO PELA INCORPORAÇÃO DA CONFIABILIDADE NAS DIVERSAS ETAPAS DE UM PROJETO: OS MAIORES BENEFÍCIOS DAS ANÁLISES DE CONFIABILIDADE SÃO INCORPORADOS NAS FASES INICIAIS DO PROJETO. FONTE: TRONESS, 1991. _____	117

FIGURA 27: AMBIENTE DE TRABALHO DO RELYSYS, DESTACANDO UM SISTEMA DE QUATRO COMPONENTES E O MENU DE OPÇÕES PARA O COMPONENTE SELECIONADO (COMPONENTE 2).	132
FIGURA 28: OPÇÕES PARA CRIAÇÃO DE UM NOVO SISTEMA.	135
FIGURA 29: JANELA DO REPORT MANAGER.	137
FIGURA 30: DETERMINAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE ARQUIVOS DO RELYSYS.	138
FIGURA 31: OPÇÕES DE MODIFICAÇÃO NA FORMA DE TRATAMENTO DOS DADOS.	139
FIGURA 32: OPÇÕES DE CONFIGURAÇÃO DO AMBIENTE DE TRABALHO.	139
FIGURA 33: JANELA DE ENTRADA DE DADOS	140
FIGURA 34: TELA DE ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS	141
FIGURA 35: TELA DE HISTOGRAMA PARA UM CONJUNTO DE DADOS	142
FIGURA 36: TELA DE FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE PARA OS DADOS DE UM COMPONENTE	142
FIGURA 37: TELA DE BOX-PLOT PARA OS DADOS DE UM COMPONENTE	143
FIGURA 38: PAPEL DE PROBABILIDADES WEIBULL EVIDENCIANDO O AJUSTE DE UM CONJUNTO DE DADOS A ESTA DISTRIBUIÇÃO	144
FIGURA 39: TABELA ANOVA PARA A RETA AJUSTADA NO PAPEL DE PROBABILIDADE ACIMA APRESENTADO	144
FIGURA 40: TELA DE COMPARAÇÃO DE AJUSTES DISTRIBUIÇÕES PARA UM MESMO CONJUNTO DE DADOS.	145
FIGURA 41: TABELA DO TESTE $\chi^2$ PARA O MODELO WEIBULL SELECIONADO NA FIGURA ANTERIOR.	146
FIGURA 42: TELA DE ANÁLISE DE MODELO PARA UM SISTEMA CUJOS TEMPOS DE FALHA FORAM MODELADOS POR UMA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL.	147
FIGURA 43: JANELA DE TEMPOS CARACTERÍSTICOS DE CONFIABILIDADE, APRESENTANDO A TABELA DE TEMPOS CARACTERÍSTICOS E A CALCULADORA DE TEMPOS E CONFIABILIDADES PARA O MODELO ASSOCIADO A UM COMPONENTE.	147
FIGURA 44: JANELA DE ANÁLISES GRÁFICAS DE CONFIABILIDADE, APRESENTANDO OS GRÁFICOS DE CONFIABILIDADE PARA UM SISTEMA. À ESQUERDA, O ESTIMADO A PARTIR DOS DADOS E, À DIREITA, O CALCULADO A PARTIR DO MODELO AJUSTADO PARA OS DADOS.	148
FIGURA 45: TELA DE SIMULAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES. A DISTRIBUIÇÃO ESCOLHIDA E OS PARÂMETROS SÃO VISÍVEIS NO PAINEL DE CONTROLE DO SOFTWARE.	149
FIGURA 46: PREDIÇÃO DE TEMPOS E CONFIABILIDADES PARA UM SISTEMA.	150
FIGURA 47: ANÁLISE DE PARETO PARA PRIORIZAÇÃO DE COMPONENTES. O INSTANTE 412.000 HORAS INDICA O TEMPO ASSOCIADO À UMA CONFIABILIDADE DE CERCA DE 0.5 % PARA O SISTEMA.	151
FIGURA 48: JANELA DE VISUALIZAÇÃO SIMULTÂNEA DOS GRÁFICOS DOS MODELOS ASSOCIADOS AOS COMPONENTES DE UM SISTEMA. NA FIGURA ACIMA SÃO APRESENTADOS OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE FALHAS AO LONGO DO TEMPO.	152
FIGURA 49: DIAGRAMA REPRESENTATIVO DE UM EIXO CARDAN FORMADO POR 6 COMPONENTES, E CEDIDO PELA EMPRESA ONDE FOI REALIZADO O ESTUDO DE CASO. AS CRUZETAS 1 E 2 SÃO DE MESMO TIPO.	155
FIGURA 50: AJUSTES OBTIDOS PARA O EIXO CARDAN A PARTIR DOS DADOS OBSERVADOS EM CAMPO. OBSERVE-SE QUE OS TESTES DE ADERÊNCIA REJEITAM OS AJUSTES REALIZADOS, EXCETO PARA O MODELO NORMAL.	159
FIGURA 51: VISUALIZAÇÃO DA DENSIDADE DE FALHAS DOS DADOS SIMULADOS PARA O CONJUNTO DO CARDAN. NOTE-SE QUE A FORMA DA DISTRIBUIÇÃO ACIMA DESCARTA A POSSIBILIDADE DE UM BOM AJUSTE ATRAVÉS DE QUALQUER MODELO UNIMODAL.	159
FIGURA 52: FUNÇÕES CONFIABILIDADE PARA OS COMPONENTES DO EIXO CARDAN EM ESTUDO.	160
FIGURA 53: REPRESENTAÇÃO COMPARATIVA DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DO EIXO CARDAN OBTIDA PARA OS DADOS GERADOS PELO RELYSYS (À ESQUERDA) E PARA O MODELO AJUSTADO (À DIREITA).	162
FIGURA 54: GRÁFICO DE PARETO APRESENTANDO O PERCENTUAL DE FALHAS DE CADA COMPONENTE EM RELAÇÃO AO TOTAL DE FALHAS DO EIXO CARDAN.	163
FIGURA 55: GRÁFICO DE PARETO APRESENTANDO O PERCENTUAL DE FALHAS DE CADA COMPONENTE EM RELAÇÃO AO TOTAL DE FALHAS DO MOTOR EM ESTUDO.	167
FIGURA 56: FUNÇÕES CONFIABILIDADE AJUSTADAS PARA OS COMPONENTES DO SISTEMA EM ESTUDO.	167
FIGURA 57: ADEQUAÇÃO DOS AJUSTES OBTIDOS PARA O SISTEMA DO MOTOR A PARTIR DOS DADOS GERADOS PELO RELYSYS.	168
FIGURA 58: DENSIDADES DE PROBABILIDADE DOS DADOS GERADOS PELO RELYSYS E DO MODELO WEIBULL AJUSTADO PARA O CONJUNTO DO MOTOR.	168
FIGURA 59: ADEQUAÇÃO DOS AJUSTES OBTIDOS PARA O SISTEMA DO MOTOR A PARTIR DOS DADOS OBSERVADOS EM CAMPO.	169
FIGURA 60: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES TAXA DE RISCO DOS DADOS E DO MODELO DE WEIBULL AJUSTADO PARA OS DADOS DE VIDA DO MOTOR COMPLETO, INDICANDO A MELHOR ADEQUAÇÃO DESTES MODELOS EM RELAÇÃO AOS DEMAIS PROPOSTOS.	170

## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1: CONFIABILIDADES DE TEMPO DE MISSÃO PARA O SISTEMA DE DIREÇÃO DE UM AVIÃO COMERCIAL. FONTE: RIBEIRO (1995A). _____	108
TABELA 2: DADOS DE TESTE DE FADIGA REALIZADOS SOBRE OS SUBSISTEMAS DE UM EIXO CARDAN. TODOS OS VALORES SÃO APRESENTADOS EM 1000 CICLOS E FORAM MODIFICADOS DE MODO A GARANTIR A CONFIDENCIALIDADE DAS INFORMAÇÕES. _____	156
TABELA 3: INFORMAÇÕES SOBRE AS AMOSTRAS DE DADOS DE VIDA DOS SUBSISTEMAS A PARTIR DO DESEMPENHO OBSERVADO EM LABORATÓRIO. _____	157
TABELA 5: ESTIMAÇÃO EM INTERVALOS DE 90 % DE CONFIANÇA DOS VALORES DOS PARÂMETROS PARA CADA SUBSISTEMA. _____	158
TABELA 6: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS DADOS DE VIDA, CALCULADOS A PARTIR DOS MODELOS AJUSTADOS PARA OS SUBSISTEMAS. _____	158
TABELA 7: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS DADOS REPRESENTATIVOS DAS FALHAS DO SISTEMA, OBTIDOS DIRETAMENTE A PARTIR DAS INFORMAÇÕES DOS COMPONENTES. _____	158
TABELA 8: COMPARATIVO DAS ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS APRESENTADAS PELO RELYSYS PARA OS DADOS DE FALHA GERADOS PARA O SISTEMA E PARA O MODELO DE WEIBULL AJUSTADO AOS MESMOS. _____	161
TABELA 9: DADOS DA ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS ASSOCIADOS AO MODELO DE WEIBULL AJUSTADO PARA O EIXO CARDAN. O NÍVEL DE CONFIANÇA UTILIZADO FOI DE 90 %. _____	162
TABELA 10: RESULTADOS DO TESTE DE VIDA DE MOTORES DE COMBUSTÃO. _____	164
TABELA 11: INFORMAÇÕES SOBRE AS AMOSTRAS DE DADOS DE FALHA DOS SUBSISTEMAS DO MOTOR EM ESTUDO. _____	164
TABELA 12: MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DOS SUBSISTEMAS A PARTIR DOS DADOS DE TESTE. A REFERÊNCIA “TODOS” ENVOLVE OS MODELOS APRESENTADOS NO SOFTWARE: EXPONENCIAL, WEIBULL, LOGNORMAL, NORMAL E UNIFORME. _____	165
TABELA 13: ESTIMAÇÃO EM INTERVALOS DE 90 % DE CONFIANÇA DOS VALORES DOS PARÂMETROS PARA CADA SUBSISTEMA. _____	165
TABELA 14: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS DADOS DE VIDA DOS SUBSISTEMAS, CALCULADOS A PARTIR DOS MODELOS AJUSTADOS PELO RELYSYS. _____	166
TABELA 15: MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DOS SUBSISTEMAS DO MOTOR EM ESTUDO. FONTE: FRITSCH (1996). _____	166
TABELA 16: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS CALCULADAS A PARTIR: DOS DADOS DE FALHA DOS MOTORES; DOS DADOS DE FALHA GERADOS PELO RELYSYS; DO MODELO AJUSTADO SOBRE OS TEMPOS OBSERVADOS DE FALHA; E DO MODELO AJUSTADO SOBRE OS TEMPOS GERADOS PARA O SISTEMA, CONFORME OS MODELOS AJUSTADOS PARA OS COMPONENTES. _____	170

## ÍNDICE DE QUADROS

QUADRO 1: CRONOGRAMA DE ATIVIDADES REALIZADAS DURANTE A EXECUÇÃO DESTA TRABALHO. _____	7
QUADRO 2: EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS NA MODELAGEM DE CONFIABILIDADE. FONTE: ADAPTADO DE SPINGARN (1986B). _____	22
QUADRO 3: DESCRIÇÃO DA MEMÓRIA DE CÁLCULO DO EXEMPLO PELO MÉTODO DA TABELA BOOLEANA. _____	97
QUADRO 4: EXPRESSÕES PARA A GERAÇÃO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS ASSOCIADOS ÀS PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES EM CONFIABILIDADE. A NOTAÇÃO É A UTILIZADA NO CAPÍTULO 2 DO PRESENTE TRABALHO. _____	100
QUADRO 5: COMPARAÇÃO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE COMPONENTES CRÍTICOS DE CONFIABILIDADE. _____	104
QUADRO 6: MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DOS SUBSISTEMAS A PARTIR DOS DADOS DE TESTE. APESAR DOS MODELOS NORMAL E LOGNORMAL SEREM APRESENTADOS COMO VIÁVEIS PELO PAPEL DE PROBABILIDADES, A CENSURA ALEATÓRIA IMPEDE SUA UTILIZAÇÃO. _____	157
QUADRO 7: PRINCIPAIS MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE FALHA UTILIZADOS EM CONFIABILIDADE, ASSOCIADOS ÀS EXPRESSÕES DAS FUNÇÕES TAXA DE RISCO, DENSIDADE DE PROBABILIDADES E CONFIABILIDADE. FONTE: ADAPTAÇÃO DA TABELA APRESENTADA POR ELSAYED (1996), QUE APRESENTA MAIS FUNÇÕES DO QUE AS CONSIDERADAS NESTE TRABALHO. _____	180

## RESUMO

*Este trabalho apresenta uma discussão a respeito dos principais métodos e técnicas utilizados na modelagem e na análise da Confiabilidade de sistemas. Primeiramente são apresentados os mais importantes conceitos da área da Engenharia de Confiabilidade, bem como os principais métodos para a análise da Confiabilidade de componentes, que servem de fundamento para a análise da Confiabilidade de sistemas. A utilização das informações de Confiabilidade em ambientes produtivos, bem como as implicações técnicas e gerenciais associadas a metas de Confiabilidade também são sucintamente abordadas.*

*De modo a verificar a utilidade e a aplicabilidade prática dos métodos e algoritmos discutidos, é apresentado um software de apoio: o RelySys (Reliability Software for Systems Analysis). Operando com amostras de dados completas ou censuradas, sua principal função é a de auxiliar o engenheiro de Confiabilidade nas etapas de modelagem e análise da Confiabilidade de sistemas em série, a partir das informações de Confiabilidade dos componentes do sistema.*

## ABSTRACT

*This work presents a discussion about the most useful methods and techniques on systems' Reliability modeling and analysis. Initially, the most important concepts of the branch of Reliability Analysis and the leading methods on components' Reliability analysis, which are used as basis on systems Reliability analysis, are presented. The uses of Reliability information on productive environments, as well as the technical and administrative implications, are also discussed.*

*In order to verify the utility and the practical applicability of the methods and algorithms discussed, a software is presented: RelySys (Reliability Software for Systems Analysis). Based on Reliability information about the components of the system, and dealing with censored or non-censored samples, its main function is to provide support for Reliability Engineers in all steps of the Reliability modeling and analysis of series systems.*

## CAPÍTULO 1

### 1. COMENTÁRIOS INICIAIS

#### ***1.1 O Conceito de Confiabilidade no Panorama do Mercado Atual***

O mundo do final deste século apresenta-se inserido em um contexto de consolidação e reavaliação de muitos dos conceitos fundamentais que regem os sistemas de produção e distribuição de bens de consumo. Consolidação porque nunca como nos dias de hoje foram sentidos os efeitos das tendências de globalização da economia e internacionalização dos processos de concorrência iniciados após a II Guerra Mundial. Reavaliação porque a busca por “vantagens competitivas” tem sido uma das mais importantes metas administrativas e gerenciais de empresas pelo mundo inteiro. Por “vantagens competitivas” deve-se entender a implementação ou melhoria de qualquer característica em produtos, processos e serviços que possa garantir alguma vantagem sobre empresas concorrentes. Como exemplos de tais vantagens podem ser citados aspectos de desenvolvimento tecnológico, de otimização do gerenciamento de recursos e de processos, entre outros. É claro que esta situação não atinge apenas empresas. Muitas entidades que não possuem o lucro como objetivo final, tais como hospitais e entidades governamentais, têm buscado formas de melhoria constante dos serviços que prestam. No entanto, é nas empresas, inseridas em um mercado extremamente competitivo, que se faz sentir mais fortemente a necessidade destas “vantagens competitivas”, sob pena da exclusão total do mercado.

Para as empresas, as principais vantagens competitivas buscadas no final deste século talvez sejam alguma garantia de flexibilidade frente a variações mercadológicas e a garantia da qualidade “por excelência” em projetos, processos produtos e serviços. O atual quadro mercadológico pode ser comparado ao de uma verdadeira “ditadura da Qualidade”. Esta afirmação pode ser mais facilmente entendida se forem levadas em conta as exigências do mercado atual, um mercado capaz de impor, de forma cada vez mais forte, suas necessidades

de Qualidade, preços e prazos mais competitivos. Como consequência, empresas de todas as partes do mundo são obrigadas a um constante ato de melhoria dos conceitos e técnicas usados em suas plantas produtivas. Em um mundo onde a propaganda sozinha não pode mais caracterizar “a alma do negócio”, principalmente quando uma empresa pretende sobreviver por um longo tempo, é o mercado consumidor que impõe suas necessidades de Qualidade e, mais que isso, suas necessidades de Qualidade no decorrer do tempo, ou seja, Confiabilidade.

Mas o que é Confiabilidade? O que significa ter *Qualidade ao longo do tempo*? Um produto com Qualidade assegurada também tem Confiabilidade assegurada? Quais os efeitos da Confiabilidade sobre o desempenho de um produto no mercado? Para responder a tais questões, antes de mais nada, deve-se entender os conceitos de Qualidade e Confiabilidade. Pode-se definir genericamente o termo Qualidade como “a capacidade de um produto ou processo estar em conformidade com especificações e normas” (Halpern, 1978). Da mesma forma, pode-se definir o termo Confiabilidade como “a probabilidade de que um determinado item consiga cumprir algum objetivo especificado sob condições ambientais especificadas em um período de tempo especificado” (Halpern, 1978). Estimativas da Qualidade de um produto são obtidas através de intensivos testes de conformidade (para o caso da certificação da Qualidade de um produto) e de durabilidade (no caso de mensuração da Confiabilidade, através do monitoramento do MTBF - *Mean Time Between Failures* - e da taxa de falhas ao longo do tempo). No entanto, tais conceitos não são suficientes para se entender o alcance e a importância da mensuração da Confiabilidade de um componente ou equipamento. Através da avaliação da Confiabilidade é possível analisar os impactos do projeto sobre a *performance*, manutenibilidade e segurança oferecidos por um produto, de modo que não falhe prematuramente, obrigando ao gasto imprevisto de recursos em reparos e indenizações por riscos de vida, por exemplo. Em outras palavras, vem a tona todo um ramo da Engenharia, o qual tem atuação garantida em todas as fases de desenvolvimento de um produto ou de um processo: a Engenharia da Confiabilidade. Aliada à filosofia de Engenharia Simultânea, a Engenharia de Confiabilidade tem por objetivo a garantia de uma *performance* livre de falhas para os produtos, reduzindo, assim, os custos de garantia e melhorando o aspecto financeiro e mercadológico de toda a organização (Luthra, 1988).

A certificação da Qualidade de um sistema não garante, por si só, alta Confiabilidade. De modo geral, o conceito de Qualidade está associado a um julgamento durante o estágio de testes. Isto é, um produto (ou sistema) inspecionado, testado e verificado estar de acordo com as especificações requeridas será considerado de boa qualidade. Não há considerações sobre o

tempo de uso ou mesmo sobre seu desempenho ao longo do tempo (Halpern, 1978). Por outro lado, o conceito de Confiabilidade envolve diretamente considerações sobre o tempo. Ele parte do princípio de que nenhum produto dura para sempre e que haverá um instante em que apresentará sinais de fadiga, passando a ter chances de falha maiores. Em outras palavras, a Confiabilidade de um sistema é a medida de sua Qualidade sobre um período de tempo (Kapur, 1986; Luthra, 1988). Assim, um componente de um sistema pode ter sido exposto a todo o tipo de controle de qualidade necessário e ter atingido todos os requerimentos especificados e, ainda assim, funcionar com dificuldades como parte de um sistema. Estas dificuldades podem ocorrer, por exemplo, devido à falta de reconhecimento de possíveis interações entre os demais componentes do sistema. Este é claramente um problema de Confiabilidade e que só pode ser resolvido pela análise do sistema. Mesmo os mais estritos testes de Controle de Qualidade aplicados ao componente não poderiam resolver esta situação. Deve-se ter em mente que a Qualidade é intrínseca a cada parte do sistema (uma função claramente associada ao processo), enquanto que a Confiabilidade de um sistema é uma meta a ser atingida, a qual deve ser considerada desde os estágios iniciais de projeto. Nenhum método de inspeção ou análise pode aumentar a Confiabilidade de um sistema se esta não for incorporada em seu projeto desde as fases iniciais.

Finalmente, deve-se considerar que a análise da Confiabilidade não é apenas uma função técnica ou de engenharia, mas uma importante ligação entre o dimensionamento de garantias, a responsabilidade e a saúde financeira de qualquer processo produtivo. A Confiabilidade pode ser incorporada ao projeto através de uma série de técnicas oriundas de um plano organizado, mas que exige suporte gerencial (Ribeiro, 1995a).

## **1.2 Tema e Relevância do Tema**

A presente dissertação tem como tema principal o estudo da Confiabilidade de produtos, através da análise estatística de dados de vida e da inter-relação entre os componentes de tais produtos. Tanto amostras completas como amostras censuradas de tempos de vida são consideradas neste estudo.

De modo geral, clientes ou consumidores não estão interessados apenas em Qualidade. Quando um consumidor traz ao balcão de uma assistência técnica alguma reclamação sobre um produto, esta reflete o desejo da manutenção das características de Qualidade do produto *ao*

*longo do tempo*, o que novamente traz à tona o conceito de Confiabilidade. No entanto, a consideração e a obtenção da Confiabilidade para um produto, ou seja, para um sistema, não é menos dispendiosa que sua obtenção para algum de seus componentes. Pelo contrário, mais do que nunca as interações entre os componentes e sua forma de ligação tornam-se importantes para o resultado global de desempenho do sistema. Dessa forma, torna-se claro que apenas a utilização de componentes altamente confiáveis não é suficiente para garantir alta Confiabilidade para um sistema.

Neste ponto, cria-se um sério problema sob o ponto de vista da predição e manutenção da Qualidade *ao longo do tempo* para um produto. A obtenção de dados de Confiabilidade de um sistema, em geral composto de vários componentes, somente pode ser realizada através de testes (acelerados ou não) de sobrevida e com um número razoável de unidades (de modo a garantir respaldo estatístico para as análises). Tal expediente é, no mínimo, dispendioso sob o ponto de vista do tempo e dos recursos investidos. Além disso, ao se lidar com sistemas, está-se considerando simultaneamente todos seus componentes como possíveis modos de falha. A tarefa de analisar e correlacionar os tempos de vida dos sistemas em teste com todas as possíveis combinações de causas de falha pode tornar-se facilmente irrealizável. Como exemplo, pode-se citar o caso do teste, mesmo acelerado, de turbinas de aviões. O número de componentes e os custos associados são tão elevados que uma análise deste tipo poderia quase ser comparada à montagem de um quebra-cabeças muito caro! Assim, torna-se clara a dificuldade de se ensaiar sistemas de grande porte, bem como é clara a necessidade de se obter informações preditivas sobre a Confiabilidade de todo o sistema.

Por outro lado, a obtenção de dados de Confiabilidade para componentes, em geral de menor porte e com menos modos possíveis de falha, pode ser realizada com menos esforços através dos mesmos testes de sobrevida e a custos comparativamente menores. É a partir de tal observação que a Engenharia de Confiabilidade vai buscar subsídios na Teoria de Sistemas (em suas mais variadas formas) para estimar a Confiabilidade de um sistema a partir das confiabilidades de seus componentes. Desta forma, através de um ferramental teórico, reduz-se drasticamente a necessidade de se ensaiarem sistemas inteiros para verificações de Confiabilidade. Isto permite maior flexibilidade ao engenheiro de projeto na estipulação e verificação de metas de Confiabilidade para sistemas, a partir de alterações nos dados de Confiabilidade de seus componentes.

Por se tratar de uma meta a ser atingida desde as etapas de projeto, é desejável que sejam otimizados os esforços despendidos para a obtenção da Confiabilidade de um sistema. Assim,

o intensivo uso de recursos computacionais na alocação e no cálculo da Confiabilidade de Sistemas, principalmente nos mais complexos, torna-se uma necessidade cada vez maior. Dispondo de recursos computacionais que permitam a visualização imediata dos efeitos na Confiabilidade a partir de alterações no projeto do sistema (modificação de componentes e/ou do inter-relacionamento entre componentes), o Engenheiro de Confiabilidade terá muito mais condições de responder às necessidades de Confiabilidade impostas a um produto ainda nas fases iniciais de sua concepção. Como resultado, maiores entendimento e percepção visual do inter-relacionamento entre os componentes do sistema serão obtidos, diminuindo-se as possibilidades de ocorrência de inconsistências em termos da Confiabilidade do sistema e, conseqüentemente, as alterações e retrabalhos no projeto.

### **1.3 Objetivos**

O presente trabalho tem por objetivo principal apresentar um levantamento dos mais importantes conceitos, procedimentos e métodos associados ao assunto da Confiabilidade de Sistemas. Tal levantamento tem o propósito de servir como consolidação do ferramental teórico existente, de modo a permitir avanços associados ao tema proposto, além de permitir uma breve discussão a respeito da importância das informações trazidas pelas análises de Confiabilidade para empresas do setor produtivo.

Adicionalmente, tendo em vista a premente necessidade de ferramentas de apoio na determinação da Confiabilidade de Sistemas, o presente trabalho é acompanhado pelo desenvolvimento de um *software* para a modelagem da Confiabilidade de Sistemas em Série, próprio para o patamar computacional dos microcomputadores e em linguagem compatível com sistemas operacionais gráficos (GUI - *Graphical User Interfaces*), tais como o Microsoft Windows 95<sup>TM</sup>. Os objetivos pretendidos com o desenvolvimento deste *software* são a verificação da aplicabilidade prática e da implementabilidade dos principais métodos estudados de forma simples e amistosa, de modo a difundir o uso deste ferramental em ambientes produtivos.

## **1.4 Método de Abordagem e Cronograma de Atividades**

O presente trabalho foi dividido em 5 etapas, conforme segue:

### **1.4.1 Pesquisa Bibliográfica**

Levantamento do material disponível nas fontes de pesquisa com o objetivo de resumir e aprofundar os conteúdos relevantes ao tema de pesquisa. Levantamento dos materiais de apoio e técnicas disponíveis na literatura para a modelagem e avaliação da Confiabilidade de Sistemas.

### **1.4.2 Desenvolvimento de Algoritmos para Modelagem de Confiabilidade de Sistemas**

Seleção, com base no levantamento realizado na etapa anterior, de procedimentos para a Modelagem de Sistemas. Desenvolvimento de procedimentos computacionais e de algoritmos a serem implementados no *software* proposto.

### **1.4.3 Escolha e aprendizado da linguagem de programação e implementação do *software***

Etapa de execução simultânea com as demais etapas do trabalho. A implementação computacional foi iniciada imediatamente após o desenvolvimento dos algoritmos, servindo como estudo dirigido para o aprendizado da linguagem escolhida.

### **1.4.4 Depuração e Validação do *Software***

Fases de pós-otimização e validação do *software* de Modelagem de Confiabilidade de Sistemas. Tais fases foram realizadas de forma interativa, buscando-se, na validação do *software* através de casos reais com resultados de modelagem já conhecidos, a remoção de possíveis inconsistências e aspectos não conformes com o arcabouço teórico. Depurações e melhorias do ambiente do *software* foram realizadas com o auxílio de aulas práticas aplicadas em disciplinas de Confiabilidade, em nível de pós-graduação.

### 1.4.5 Confeção do Documento Final

Consolidação do trabalho. Redação do documento final, contendo o sumário das principais técnicas de Modelagem da Confiabilidade de Sistemas desenvolvido na primeira etapa, bem como o manual de utilização do *software* desenvolvido.

No Quadro 1 é apresentado o cronograma das atividades realizadas:

Atividade \ Mês	1996												1997		
	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	J	F	M
Revisão Bibliográfica	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Escolha e Aprendizado da Linguagem de Programação e Implementação do Software	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Desenvolvimento dos Algoritmos para Modelagem da Confiabilidade de Sistemas	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Depuração e Validação do Software	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Confeção do Documento Final	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Dedicação à atividade:      ■ Forte      ■ Média      ■ Fraca

Quadro 1: Cronograma de atividades realizadas durante a execução deste trabalho.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

O presente documento apresenta um sumário e posterior discussão das principais técnicas de Modelagem de Confiabilidade, enfatizando o caso de sistemas. Os conteúdos são dispostos em sete capítulos, começando por informações de caráter geral, tais com considerações sobre o tema, que buscam ambientar e justificar o trabalho e os objetivos propostos. Apresentam-se também as etapas realizadas para o desenvolvimento e as limitações de aplicabilidade desta dissertação.

No segundo capítulo são apresentados os principais conceitos associados à Confiabilidade. São incluídos também os tipos de censura sobre amostras de dados de falha, os modelos paramétricos mais comuns para descrição dos dados e os testes mais difundidos de seleção de modelos.

O terceiro capítulo introduz os conceitos relevantes ao assunto da Modelagem da Confiabilidade de Sistemas, tais como o conceito e os tipos de sistema. Também apresenta os principais resultados teóricos para a estimação da Confiabilidade de Sistemas.

No quarto capítulo apresenta-se uma breve discussão sobre os benefícios do conceito de Confiabilidade no desenvolvimento da Qualidade de produtos e processos.

O quinto capítulo contém a descrição do *software*: características gerais, ambiente de trabalho, resultados de análise fornecidos e limitações.

O sexto capítulo é composto por estudos de caso retirados de problemas encontrados junto ao meio industrial. Nestes estudos, o *software* é aplicado como ferramenta de análise, aproveitando-se para verificar a qualidade das análises fornecidas pelo mesmo.

No sétimo capítulo encontram-se as considerações finais sobre esta dissertação e sugestões para a continuação deste trabalho e para novas pesquisas.

Finalmente, nos anexos são apresentadas descrições dos algoritmos que foram implementados computacionalmente, aproveitando-se para discutir suas restrições e suas potencialidades.

## **1.6 Delimitações Deste Trabalho**

Os objetivos principais do trabalho proposto são a discussão das técnicas vigentes e o desenvolvimento de um programa computacional destinado à modelagem da Confiabilidade de Sistemas. No entanto, dada a diversidade de configurações em que podem ser encontrados sistemas das mais diversas áreas, torna-se potencialmente impossível a exaustão dos casos a serem modelados. Tal afirmação torna-se particularmente procedente ao se considerar configurações muito complexas de sistemas, onde praticamente não são evidenciadas relações com configurações clássicas em Série e em Paralelo.

Além disso, com a constante evolução deste ramo da Engenharia da Qualidade que é a Engenharia de Confiabilidade, é possível que algumas técnicas de modelagem de última geração não estejam contempladas neste estudo. Tal restrição deve-se principalmente à indisponibilidade de material de consulta.

Por restrições de tempo e conhecimento de programação orientada a objetos, o *software* apresentado neste trabalho opera apenas com configurações de sistemas em Série. Maiores detalhes sobre esta importante restrição podem ser encontrados nas seções 5.2 e 7.2.

## CAPÍTULO 2

### 2. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

#### 2.1 *Qualidade versus Confiabilidade*

Em geral, qualquer pessoa, ao avaliar um produto, refere-se ao termo “Qualidade”. No entanto, na maior parte dos casos, o verdadeiro conceito associado é o de “Confiabilidade”. É assim quando se ouve dizer: “Este produto não presta! Usei-o um pouco e já estragou...”. Ou então: “Aquele produto dura nada”. Elsayed (1996) cita diversos exemplos nos quais a realização de análises de Confiabilidade poderia ter evitado tragédias. Mas o mais indesejado por todas as empresas, ávidas por sua própria sobrevivência no mercado, é a inclusão de seu nome em frases deste tipo: “Os produtos daquela marca quebram no primeiro uso...”. Observe-se que em todos os exemplos acima nem o termo “Qualidade” nem o termo “Confiabilidade” foram utilizados, mas o senso comum é de que tais produtos não possuem Qualidade, pois não cumprem sua função. Tal consideração é verdadeira, mas superficial demais, uma vez que desconsidera as questões do uso e da forma de uso dos produtos. Todos os componentes falham, não são eternos. O tempo é a variável fundamental que distingue Qualidade de Confiabilidade. Nos exemplos acima, falta aos produtos não apenas Qualidade, mas “Qualidade ao longo do tempo”, isto é, Confiabilidade.

De modo geral, o termo Qualidade pode ser definido como o valor percebido em um produto por seu usuário (Kapur, 1986). Neste “valor” estão inclusos, além de todas as características e habilidades incorporadas de modo a satisfazer as necessidades do usuário, também os custos de compra e manutenção do produto. Mais especificamente, a Qualidade de um produto está condicionada por quatro aspectos principais (Ribeiro, 1995a):

1. Qualidade de projeto;
2. Qualidade de manufatura;
3. Excelência na distribuição e vendas;

#### 4. Qualidade que se sustenta ao longo do tempo: Confiabilidade.

O contexto em que se insere o estudo da Confiabilidade envolve a consideração de componentes (ou conjuntos de componentes associados na forma de sistemas) submetidos a algum tipo de tensão (tais como tração mecânica, calor, umidade e corrente elétrica) e sujeitos à ocorrência de falhas a uma certa taxa, característica e possivelmente dependente do tempo. Tais hipóteses são, de forma alguma, restritivas, uma vez que qualquer componente ou sistema as cumprirá. Assim, se o componente em consideração for uma viga de aço sujeita a uma força de tensão, ela poderá romper-se. Se for um fusível sujeito a uma corrente elétrica, terá uma probabilidade associada a sua queima. Se for a asa de um avião sujeita às forças do fluxo de ar, terá uma probabilidade de se empenar. Não se podem realizar análises estáticas sobre peças ou sistemas cujos níveis de estresse são alterados ao longo do tempo. Isto significa que a realização de análises que não levem em conta o envelhecimento dos elementos testados podem dar uma falsa impressão, demasiadamente otimista, de seu comportamento. É justamente neste ponto que se faz sentir a necessidade da realização de testes que sejam capazes de medir o desgaste de componentes ao longo do tempo.

Neste capítulo serão realizadas considerações a respeito dos principais conceitos que fundamentam estudos de Confiabilidade. Inicialmente serão apresentadas as definições associadas ao conceito de Confiabilidade, e, a seguir, as técnicas e os métodos mais difundidos para a modelagem da Confiabilidade de componentes isolados.

## **2.2 Conceito de Confiabilidade**

Um componente ou sistema exposto a condições de esforço terá associado a si um tempo de vida  $T$  (“duração de vida” ou “duração até a falha”, conforme Meyer, 1978) que é uma variável aleatória com alguma distribuição de probabilidades a ser estimada e que estará associada à Função de Confiabilidade do componente. A afirmação de que  $T$  não pode seguir diretamente um modelo determinístico pode ser facilmente evidenciada a partir da observação de que componentes “idênticos” sujeitos a esforços “idênticos” provavelmente terão tempos de falha diferentes e imprevisíveis *a priori* (Meyer, 1978). Assim, alguns falharão no início de sua vida, enquanto outros demorarão mais para falhar, definindo-se um comportamento aleatório para as falhas de tal tipo de componente. Desta forma, obtém-se uma primeira definição importante (adaptado de Tobias & Trindade, 1995, e de Meyer, 1978):

“A Confiabilidade de um componente (ou sistema) no instante de tempo  $t$ , denotada por  $R(t)$ , do inglês *Reliability*, é definida como  $R(t) = P( T > t )$ , onde  $T$  é a variável aleatória que modela a duração da vida do componente.”

Observe-se que a definição acima descreve a Confiabilidade de um componente como sendo a probabilidade de que o mesmo não venha a falhar durante o intervalo  $[0;t]$ , o que é equivalente a calcular a probabilidade de que o componente esteja em pleno funcionamento até o instante  $t$ . Este é o conceito mais geralmente usado para Confiabilidade, apesar de muitos outros significados técnicos serem apresentados para o termo *Reliability*.

A definição de Confiabilidade, conforme apresentado na página 2, envolve quatro elementos fundamentais (Halpern, 1978), aqui descritos em detalhe:

1. **Probabilidade:** A Confiabilidade é mensurável (computável, testável e verificável). Devido a esta natureza quantitativa de descrição do desempenho de um sistema ou componente em termos de uma fração ou porcentagem, tem-se disponível um verdadeiro arsenal de ferramentas estatísticas e matemáticas classicamente conhecidas.
2. **Tempo de operação:** A Confiabilidade depende do tempo; nenhum produto dura para sempre. Ademais, um produto pode ter um tempo de missão previamente especificado. O tempo de vida útil de um equipamento pode ser definido a partir de sua Confiabilidade e vice-versa. Esta característica é particularmente importante, por exemplo, para o dimensionamento de garantias: sabendo-se que, após um ano de uso, certo produto manterá altos níveis de Confiabilidade (ou seja, elevada probabilidade de manter-se operacional e de cumprir suas funções especificadas), uma empresa pode atribuir-lhe tal prazo a título de garantia.
3. **Desempenho:** Um produto pode estar operacional, mas, ao longo do tempo, deixar gradativamente de cumprir as funções para o qual foi designado. Isto configura não somente uma falha, mas a falta de Confiabilidade.
4. **Condições operacionais:** Somente se pode avaliar a Confiabilidade de um produto se forem determinadas as condições em que este deve operar. Um aparelho de televisão exposto à chuva não serve como parâmetro para se afirmar que sua Confiabilidade (ou sua Qualidade) é baixa. Ainda assim, é comum, em testes de Confiabilidade, adotar uma posição pessimista e submeter as unidades sob teste a condições operacionais extremas. Com este expediente, pressupõe-se que, em condições normais, a Confiabilidade obtida será pelo menos igual à mensurada neste testes com altos níveis de estresse.

Uma interessante releitura do termo *Reliability* pode ser encontrada em um artigo escrito por Luthra (1988): “Partindo da semântica do termo *Reliability* e separando-se seu prefixo, pode-se escrever ‘*Re-Liability*’, que pode ser também reescrito como ‘*Regarding-Liability*’ ou ‘*Reduce-Liability*’. Ora, o termo *Liability* significa “qualquer coisa pela qual uma pessoa ou organização é responsável - legitimamente associada, devido a seu trabalho ou produto”. Assim, pode-se entender a Análise de Confiabilidade como um conjunto de ferramentas cujo objetivo é analisar o impacto de melhorias no projeto de produtos e componentes em relação a sua *performance*, manutenibilidade e segurança, de modo que não ocorram falhas prematuras. O objetivo de se estudar a Confiabilidade de um componente ou de um sistema, em última análise, é o de garantir *performance* livre de custos, de modo a reduzir os custos de garantia e melhorar o quadro financeiro de toda uma organização”. Esta releitura reporta com precisão a mudança de atitude das organizações em relação à Confiabilidade: com o surgimento de produtos mais complexos e com grandes exigências de eficiência (e, portanto, mais caros), a Confiabilidade, inicialmente incorporada aos produtos através de seu super-dimensionamento, passou a ser considerada como uma importante variável de desempenho global.

A conceituação aqui apresentada não exaure, de forma alguma, as diversas aplicações da Confiabilidade. A Análise de Sobrevivência, uma das grandes áreas da Ciência Estatística e que muito tem se desenvolvido nos últimos 20 anos, fundamenta-se em definições semelhantes, e possui interpretações próprias para a Confiabilidade e outros conceitos associados, generalizando a aplicação deste ferramental a diversas áreas do conhecimento nas quais o tempo é variável de resposta analisada. No entanto, trataremos aqui das interpretações pertinentes às Ciências de Engenharia.

### **2.3 As Funções de Confiabilidade**

Para maior efetividade na Análise de Confiabilidade de dados de falha, é definido um conjunto de quatro funções, denominadas globalmente de *Funções de Confiabilidade*. Através das funções *Confiabilidade*, *Distribuição Acumulada de Falhas*, *Densidade de Probabilidades de Falha* e *Taxa de Risco*, torna-se possível uma descrição do comportamento da Confiabilidade de um produto.

### 2.3.1 As Funções Confiabilidade e Distribuição Acumulada de Falhas

De forma conceitual, a Confiabilidade é uma função que depende de várias variáveis e que associa a cada combinação de seus valores um número, o qual indica a proximidade do estado de funcionamento do produto ao estado de funcionamento ideal. Com efeito, sejam:

$A$ : um conjunto de condições ambientais de operação especificadas para um determinado produto.

$F$ : um conjunto de funções especificadas e associadas ao bom funcionamento do produto.

$T$ : o conjunto dos tempos de operação do produto, em horas ininterruptas.

A *Função Confiabilidade* do referido produto pode então ser definida como a função

$$R: A \times F \times T \rightarrow [0;1]$$

$$(a, f, t) \mapsto R(a, f, t)$$

Esta definição é de difícil aplicabilidade prática. Sabe-se, é claro, que a operação em condições ambientais mais extremas tende a gerar valores de Confiabilidade menores. No entanto, a inclusão das condições operacionais e ambientais é, em geral, difícil de ser mensurada e modelada com o rigor exigido por um modelo estritamente matemático. Por estas razões, é comumente aceito que, em determinadas faixas de condições ambientais e operacionais, a Confiabilidade possa ser expressa estritamente como uma função do tempo de utilização. A partir desta hipótese, chega-se a uma simplificação para a modelagem da função acima definida:

$$R: T \rightarrow [0;1]$$

$$t \mapsto R(t)$$

A definição da expressão da Função de Confiabilidade parte do ambiente em que está inserido o próprio conceito de Confiabilidade: a realização de testes de sobrevivência.

A partir de um ambiente operacional previamente definido pelas condições de projeto, uma amostra composta por  $n_0$  unidades idênticas será submetida a teste. Ao final de cada instante  $t$ , pode-se observar um certo número de unidades que falharam,  $n_f(t)$ , e um certo número de unidades sobreviventes, isto é, em condições operacionais,  $n_s(t)$ . Observe-se que, devido à natureza do teste - é um teste de sobrevivência -, a ocorrência de uma falha é associada a um **sucesso** em termos probabilísticos. Obtém-se, então, uma primeira estimativa para a expressão da Confiabilidade, como sendo o percentual acumulado de **fracassos** (isto é, unidades que **não** falharam) ao longo do tempo:

$$\hat{R}(t) = \frac{n_s(t)}{n_0}, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Utilizando-se o fato de que a soma de unidades operacionais e falhadas é sempre constante, pode-se reescrever a expressão acima das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= \frac{n_s(t)}{n_0} = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = \\ &= \frac{n_s(t) + n_f(t) - n_f(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = 1 - \frac{n_f(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = 1 - \frac{n_f(t)}{n_0}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observando-se que o percentual acumulado de eventos (isto é, de falhas) é a *Distribuição Acumulada de Falhas*,  $F(t)$ , são obtidas as seguintes expressões:

$$\hat{F}(t) = \frac{n_f(t)}{n_0} = \frac{n_f(t)}{n_s(t) + n_f(t)}, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

$$R(t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

as quais relacionam as funções Confiabilidade e Distribuição Acumulada de Falhas.

### 2.3.2 A Função Densidade de Probabilidades de Falha

Para que seja possível a definição conceitual da *Distribuição<sup>1</sup> de Probabilidades de Falha*, é necessário introduzir a hipótese de que a Função Confiabilidade é derivável - e, então, contínua - em relação aos tempos de falha. Como consequência, pela expressão (2.4), a Distribuição Acumulada de Falhas também será derivável. Tal hipótese não impõe uma restrição severa ao tipo de função utilizado, uma vez que todas as distribuições de probabilidade teóricas utilizadas para modelar as Funções de Confiabilidade possuem tais características.

Sob a hipótese acima introduzida, pode-se derivar a Função de Distribuição Acumulada de Falhas para obter a Função Densidade de Probabilidades de Falhas - ou Função Distribuição de Probabilidades de Falha:

---

<sup>1</sup> Uma Distribuição de Probabilidades  $F$  com densidade de probabilidades  $f$  tem as seguintes propriedades (Nelson, 1982):

1.  $F$  é definida para um subconjunto de números reais;

2.  $f$  é uma função não-negativa em seu domínio, tal que  $F(t) = \int_{-\infty}^t f(s).ds$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s).ds = 1$ .

$$f(t) = \frac{dF}{dt}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

Da mesma forma, por (2.4) chega-se à conclusão que

$$\frac{dR}{dt}(t) = -\frac{dF}{dt}(t) = -f(t), \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

e, a partir destas equações (e sob as mesmas hipóteses), pode-se escrever:

$$F(t) = \int_0^t f(s).ds, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(s).ds, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

Para o caso de ensaios e testes de sobrevivência, uma aproximação largamente aceita é a da discretização da derivada. Assim, dado um intervalo de tempo  $\Delta t > 0$ , pode-se estimar  $f$  por:

$$\hat{f}(t) = \frac{n_f(t + \Delta t) - n_f(t)}{n_0 \cdot \Delta t}, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

que é a razão incremental do número total de falhas no intervalo  $\Delta t$ .

### 2.3.3 A Função Taxa de Risco

A *Taxa de Risco* (instantânea)  $h$  associada à variável aleatória  $T$  é definida por

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

onde  $f(t)$  é o valor da função de distribuição de probabilidades de  $T$  no instante  $t$  e  $R(t)$  é a Confiabilidade para o componente no instante  $t$ .

Esta é a definição teórica. Para o caso de dados de teste, discretos, pode-se usar a aproximação

$$\hat{h}(t) = \frac{n_f(t + \Delta t) - n_f(t)}{n_s(t) \cdot \Delta t}, \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

A Função Taxa de Risco é de grande importância para engenheiros de projeto, para engenheiros de sistemas, e para grupos de reparo e manutenção (Elsayed, 1996). Ela indica, a cada instante, qual a taxa de que o componente venha a falhar ou não cumpra mais as funções para as quais foi designado. Isto é, indica a influência percentual da Probabilidade de Falhas

em relação à Confiabilidade em cada instante. Se em um dado instante a probabilidade de que uma unidade falhe é pequena, mas sua Confiabilidade já atingiu níveis muito baixos, o risco de falha tenderá a ser grande! Tais informações são de grande utilidade na definição de períodos de tempo entre falhas, políticas de manutenção, tamanho das equipes de reparo, disponibilidade dos sistemas e custos associados à garantias (Elsayed, 1996).

Partindo-se da expressão (2.6) e dividindo-se ambos os lados pela Função Confiabilidade,  $R$ , obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt}(t) = -\frac{f(t)}{R(t)}, \quad t \geq 0$$

ou ainda

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt}(t) = -h(t), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

cuja solução pode ser obtida genericamente:

$$R(t) = C \cdot e^{-\int_0^t h(s) \cdot ds}, \quad C \in \mathfrak{R}, \quad t \geq 0$$

Como a Confiabilidade de um componente novo é 1, isto é,  $R(0)=1$ , substituindo esta condição inicial na solução acima, obtém-se:

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(s) \cdot ds}, \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

onde a expressão

$$H(t) = \int_0^t h(s) \cdot ds, \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

é denominada *Taxa Acumulada de Risco*.

As principais propriedades da Função Taxa Acumulada de Risco são (Nelson, 1982):

1. É monótona crescente, isto é,  $(\forall t_1, t_2 \in \text{Dom}(H))(t_1 \leq t_2 \Rightarrow H(t_1) \leq H(t_2))$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} H(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = +\infty$ .
3. É contínua à direita.

Em certas situações é mais simples e mais fácil trabalhar com esta função (também denominada Função de Risco Acumulado), como no caso de dados de falha com censuras múltiplas (Nelson, 1982).

## 2.4 A Função de Confiabilidade e o Tempo Médio Até a Falha (MTTF)

Uma das estatísticas mais importantes para a descrição e comparação da Confiabilidade de um produto em teste é o MTTF (*Mean-Time-To-Failure* ou Tempo Médio Até a Falha). Em sua essência, o MTTF é o valor médio dos tempos até falha das unidades em teste e é aplicável para produtos que não podem ser reparados.

Na notação utilizada nas seções anteriores e supondo que a duração da  $i$ -ésima unidade de um conjunto de  $n_0$  unidades seja descrita por  $t_i$ , pode-se obter uma estimativa para o MTTF através da expressão da média destes tempos:

$$\hat{MTTF} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} t_i \quad (2.15)$$

Conceitualmente, dada a variável aleatória contínua  $T$ , associada aos tempos de falha das unidades sob teste, o MTTF é dado pela Esperança Matemática de  $T$ ,

$$MTTF = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt$$

Utilizando a expressão (2.6) na expressão acima, obtém-se

$$MTTF = -\int_0^{+\infty} t \cdot \frac{dR}{dt}(t) \cdot dt = -\int_0^{+\infty} t \cdot dR(t)$$

Realizando-se a integração por partes da expressão acima, obtém-se

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t) \cdot dt \quad (2.16)$$

que relaciona o Tempo Médio até a Falha de um sistema a sua Confiabilidade.

Elsayed (1996) apresenta as expressões resultantes para a estimação do MTTF de sistemas formados por componentes independentes e identicamente distribuídos. São consideradas configurações em Série, Paralelo ou  $k$ -out-of- $n$ , além de diferentes modelos de distribuição.

Para uma melhor estimação do comportamento dos tempos até falha, faz-se necessária a obtenção do desvio padrão destes tempos (Elsayed, 1996):

$$\sigma_{TTF} = \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 \cdot f(t) \cdot dt - MTTF^2} \quad (2.17)$$

Para produtos cujos testes permitem a realização de reparos pode-se estimar o MTBF (*Mean-Time-Between-Failure* ou Tempo Médio Entre Falhas). Esta, juntamente com a avaliação de Disponibilidade, forma o conjunto das mais importantes medidas de performance deste tipo de sistemas. Em algumas técnicas para estimação do tempo de “depuração” (ou *burn-in*) de componentes ou de sistemas reparáveis, sugere-se utilizar conjuntamente as seguintes estatísticas (Guitar,1989): MTTFF (*Mean-Time-To-First-Failure* ou Tempo Médio Até a Primeira Falha), MTTSF (*Mean-Time-To-Second-Failure* ou Tempo Médio Até a segunda Falha) e MTTTF (*Mean-Time-To-Third-Failure* ou Tempo Médio Até a Terceira Falha). Elsayed (1996) discute longamente as questões de estimação do MTBF e da Disponibilidade de sistemas reparáveis, apresentando, como abordagens, o Processo de Renovação Alternada e a formulação via Cadeias de Markov<sup>2</sup>.

## 2.5 A Função Taxa de Risco e as Fases da Vida de um Produto

Em geral, um equipamento pode seguir três comportamentos distintos durante períodos de sua vida útil (Halpern, 1978):

1. Período de Mortalidade Infantil (também denominado período de *burn-in* ou período de “depuração”).
2. Período de Vida Útil.
3. Período de Velhice ou de Fadiga.

Durante o período de Mortalidade Infantil a probabilidade de ocorrência de falhas é alta. Tal fato deve-se à transformação de defeitos latentes em defeitos patentes através do uso. Defeitos até então não detectados pelos testes de Qualidade aparecem, provocando a falha de componentes. Esta falha prematura é tão indesejável para o fabricante como para seus clientes (Elsayed, 1996), pois enquanto estes ficam privados do uso do produto, a organização tem de arcar com custos de reparo desnecessários.

---

<sup>2</sup> Por fugirem ao escopo desta dissertação, estes assuntos não serão aprofundados.

Os sobreviventes à fase inicial iniciam a fase de vida útil, durante a qual apenas falhas aleatórias são esperadas. Durante a fase de vida útil assume-se que não restem componentes “fracos” (os quais foram eliminados na fase de mortalidade infantil) e que ainda seja muito cedo para o aparecimento de efeitos de desgaste de componentes. Portanto, as falhas ocorridas no decorrer deste período são assumidas como devidas a causas desconhecidas ou a alguma alteração brusca nas condições de tensão a que os componentes estão submetidos.

Finalmente, chega-se à fase de fadiga, onde os sinais de desgaste tornam-se mais fortes, provocando um aumento da taxa de falhas significativo em relação a taxa de falhas do período anterior. O aumento da taxa de falhas não mais pode ser atribuído a fatores aleatórios, mas sim à idade e fadiga dos componentes. Dentro desta fase, a taxa de falhas tende a aumentar muito rapidamente à medida que o produto se aproxima do final de sua vida (Elsayed, 1996). A manutenção de equipamentos que já tenham atingido esta fase tenderá a tornar-se demasiadamente onerosa.

Os comportamentos acima descritos podem ser melhor observados através da definição da Taxa de Risco associada à variável aleatória  $T$ , a qual define os tempos de falha (Johnson, 1990). A curva gerada por tal comportamento é classicamente conhecida como “Curva de Fundo de Banheira” (Figura 1):

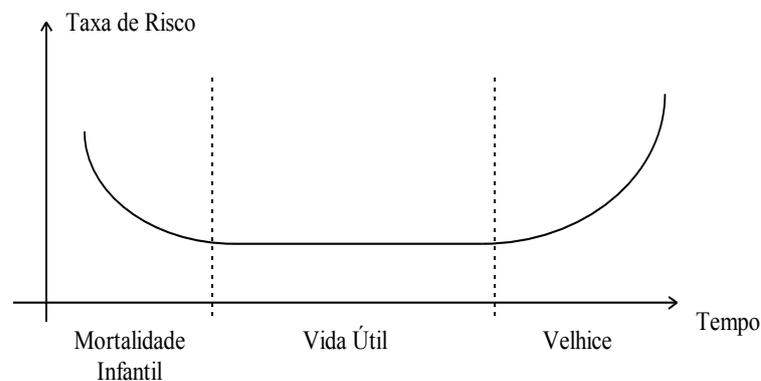


Figura 1: "Curva do Fundo de Banheira", apresentando as três fases da evolução da taxa de risco de um componente genérico. Fonte: Ribeiro, 1995.

Uma importante ressalva há que ser feita a este ponto. Em muitos casos, como no de componentes elétricos e eletrônicos, não há uma fase de velhice bem definida, uma vez que a taxa de falha tende a aumentar de forma lenta e linear (Ribeiro, 1995a). Assim, há uma forte distinção entre componentes elétricos e componentes mecânicos. Fisicamente, tal diferença de comportamento pode ser explicada da seguinte forma: componentes mecânicos estão inicialmente sujeitos a problemas de ajuste (fase de mortalidade infantil). Uma vez superados

tais problemas, estes componentes passam a operar de forma satisfatória até que o desgaste físico (por atrito, corrosão ou choque) torna seu funcionamento intermitente até a falha. Por outro lado, componentes elétricos e eletrônicos também sofrem problemas de “ajustes” (ou, mais propriamente, problemas de fabricação). No entanto, se estiverem livres de problemas de fabricação, não existe uma ação notável da fadiga sobre tal tipo de componentes. Assim, é bastante razoável admitir-se que um fusível durante sua vida útil seja “tão bom quanto novo”, enquanto ainda estiver funcionando (Meyer, 1978). Tais considerações levam às seguintes configurações para casos particulares da curva acima representada (Figura 2):

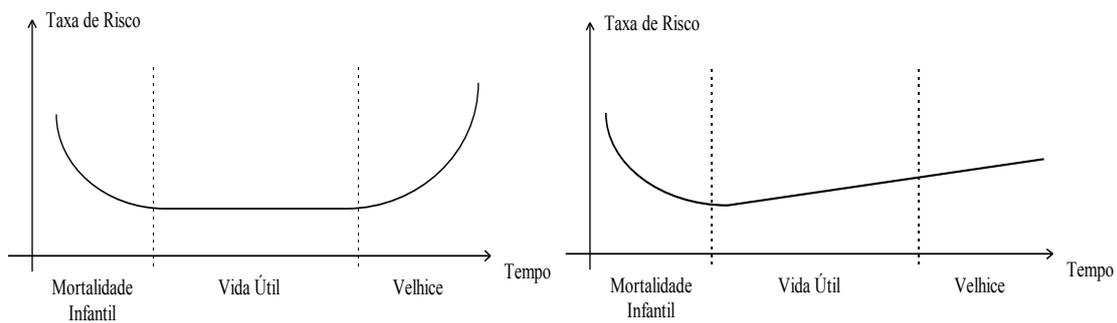


Figura 2: "Curvas de fundo de banheira" para os casos de componentes mecânicos (à esquerda) e elétricos (à direita). Fonte: Ribeiro, 1995.

## 2.6 A Função Taxa de Risco e os Modelos de Confiabilidade

A partir do comportamento da taxa de falhas de um determinado tipo de sistema pode-se associar distribuições de probabilidades para seu tempo de sobrevivência. Assim, se um sistema apresenta taxa de risco aproximadamente constante, tem associada uma distribuição de probabilidades Exponencial para sua duração até a falha. Além da distribuição Exponencial, outras distribuições comumente utilizadas para a modelagem da Confiabilidade de componentes são as distribuições de Weibull, Gamma e LogNormal.

### 2.6.1 Modelos Matemáticos para Análises de Confiabilidade

Modelos matemáticos, em qualquer campo de pesquisa, são utilizados para descrever o comportamento de algum tipo de sistema ou equipamento em níveis de maior ou menor detalhamento e sempre com o auxílio de algum tipo de formulação. Esta formulação tem funções matemáticas ou distribuições probabilísticas como ingrediente principal (Spingarn,

1986b). Através de sua utilização adquire-se uma maior habilidade na identificação e resolução de problemas: pode-se melhor compreender o padrão de vida de um produto durante seu uso, determinar se um processo está cumprindo seus objetivos de Confiabilidade e reconhecer possíveis causas de falhas.

Uma distribuição estatística representa um modelo probabilístico para algum acontecimento físico que se repete na natureza. A variabilidade é intrínseca a qualquer processo natural. Uma distribuição é gerada a partir da compreensão de um fenômeno observado e então é validada por alguma teoria matemática. O uso de distribuições para a descrição do comportamento de conjuntos de dados coletados da natureza permite a predição de comportamentos e, conseqüentemente, a antecipação de ações de melhoria. Estes comportamentos podem ser descritos através de parâmetros e de intervalos de confiança estatísticos. Para estes últimos, uma distribuição estatística apresenta-se muito útil: a Distribuição Chi-Quadrado. Outras distribuições probabilísticas são comumente utilizadas para a descrição de informações de Confiabilidade. O Quadro 1 apresenta exemplos da aplicabilidade de tais modelos:

<b>Distribuições Comuns em Análises de Confiabilidade</b>	
Distribuição Probabilística	Uso principal em Confiabilidade
Exponencial	Confiabilidade durante a vida útil do produto
Normal	Confiabilidade durante a fase de velhice do produto
Weibull	Análise de fadiga de materiais
Chi-Quadrado	Variabilidade de estimativas de parâmetros, tais como do MTBF

Quadro 2: Exemplos de aplicações de distribuições estatísticas na modelagem de Confiabilidade.  
Fonte: adaptado de Spingarn (1986b).

A seguir são apresentados em detalhe os principais modelos probabilísticos usados em Confiabilidade. As formulações descritas são estritamente conceituais, ou seja, pressupõem que os dados estão distribuídos de acordo com os domínios teóricos das distribuições e que nenhuma manipulação matemática foi realizada sobre eles. Um quadro contendo as principais expressões analíticas associadas discutidos aos modelos a seguir é apresentada no Anexo A.

## **2.6.2 A Distribuição Exponencial**

Conforme dito anteriormente, alguns tipos de sistemas e componentes tendem a apresentar taxas de risco constantes ao longo de sua vida útil. É o caso de componentes eletrônicos, tais como capacitores, transistores, resistores e circuitos integrados (Elsayed, 1996;

Nelson, 1982). A taxa de falhas constante é comumente observada para tais sistemas após o período de Mortalidade Infantil (o qual pode ser reduzido através de testes de *burn-in*). Para este tipo de componentes, o modelo associado à Função Taxa de Risco é

$$h(t) = \begin{cases} \lambda & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

onde  $\lambda$  é a taxa de falhas,  $\lambda \in \mathfrak{R}^+$ .

A aplicação da função acima na expressão (2.13), resulta em

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

e, pelas relações (2.4) e (2.5) tem-se

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

que são as expressões que definem o Modelo de Probabilidades Exponencial (Figura 3).

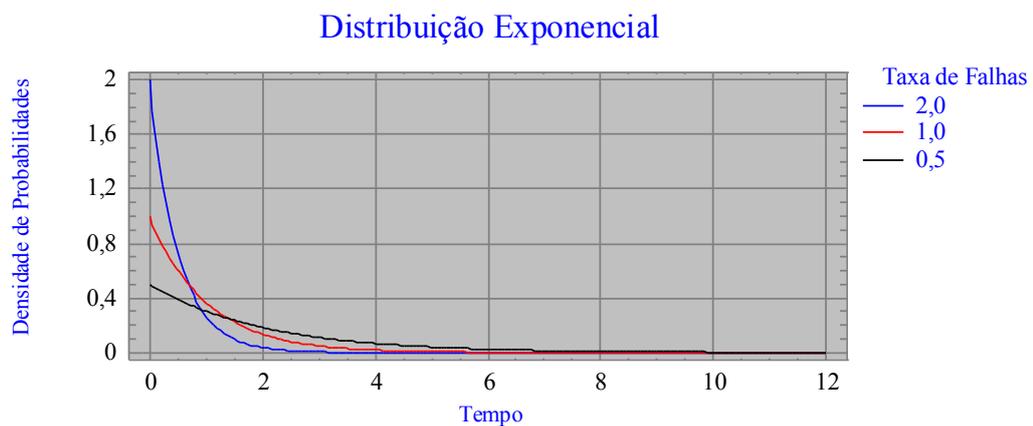


Figura 3: Função Densidade de Probabilidades do Modelo Exponencial para valores da taxa de falhas  $\lambda$  iguais a 0,5, 1,0 e 2,0.

O MTTF para esta distribuição pode ser calculado por (2.16), resultando em

$$MTTF = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Assim:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \quad (2.22)$$

Analogamente, a variância de dados que seguem este modelo pode ser obtida, resultando em

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.23)$$

De modo a dar maior flexibilidade ao modelo, é introduzido o Parâmetro de Localização,  $l$ . Adotando  $\lambda \in \mathfrak{R}^+$ ,  $l \in \mathfrak{R}$ , fica definido o Modelo Exponencial genérico:

$$h(t) = \begin{cases} \lambda & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.24)$$

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\lambda \cdot (t-l)} & t \geq l \\ 1 & t < l \end{cases} \quad (2.25)$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot (t-l)} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.26)$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t-l)} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.27)$$

Em um modelo exponencial, a taxa de risco é constante (Figura 4). Sistemas que seguem a distribuição Exponencial sofrem de “ausência de memória”. Isto significa que, devido à taxa de falha manter-se constante ao longo do tempo, tais sistemas não possuem registro de sua operação no passado. Conseqüentemente, a probabilidade de um sistema (que ainda não falhou) falhar após um certo período de uso é a mesma que a de um sistema novo. Em termos práticos, um sistema que siga a distribuição Exponencial, mesmo depois de várias horas de uso, será “tão bom quanto novo”.

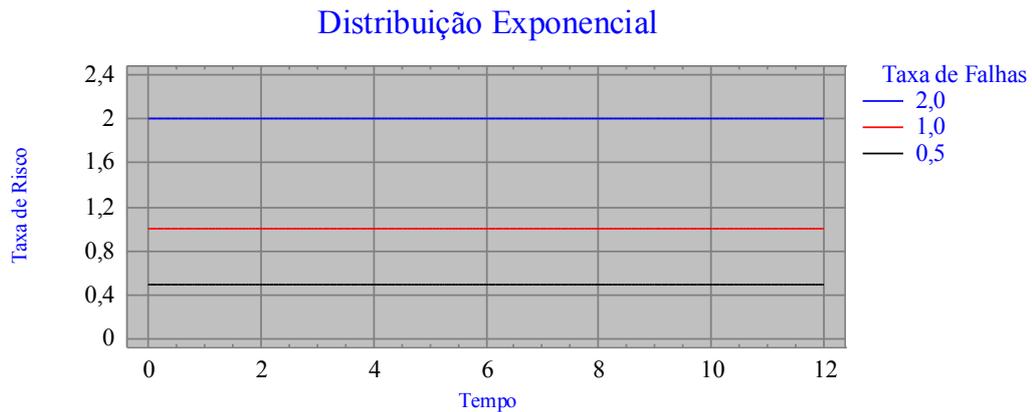


Figura 4: Função Taxa de Risco para o Modelo de Falhas Exponencial, apresentando valores de  $\lambda$  iguais a 0,5 , 1,0 e 2,0.

### 2.6.3 A Distribuição de Weibull

Este modelo foi introduzido em 1949 pelo sueco Waloddi Weibull como um método conveniente de análise de fadiga mecânica e tem sido utilizado por mais de 35 anos para analisar e estimar o comportamento de componentes desta natureza (Franck, 1988). Mais recentemente, esta “extensão” do modelo Exponencial passou a ser utilizada para a descrição de sistemas eletro-mecânicos bastante complexos, tais como discos rígidos. Elsayed (1996) recomenda o uso deste modelo quando a Função Taxa de Risco claramente não pode ser representada linearmente ao longo do tempo. Devido a sua capacidade de representar os mais diversos comportamentos monotônicos para a função Taxa de Risco, este é, sem dúvida, o modelo mais amplamente empregado em análises de Confiabilidade.

A Função Taxa de Risco para o modelo de Weibull é descrita como:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot t^{\gamma-1} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

onde  $\theta \in \mathfrak{R}_*^+$ ,  $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ .

A aplicação da função acima na expressão (2.13), resulta em

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

e, pelas relações (2.4) e (2.5) tem-se

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot t^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

que são as expressões que definem o Modelo de Probabilidades de Weibull<sup>3</sup>. Os parâmetros  $\theta$  e  $\gamma$  são respectivamente denominados *Parâmetro de Escala* (ou Característica de Vida) e *Parâmetro de Forma*. Nelson (1982) apresenta uma formulação alternativa para o Modelo de Weibull, com parâmetros diferentes:  $\alpha$  e  $\beta$ . No entanto, a formulação aqui apresentada é mais indicada para análises de Confiabilidade (Figura 5).

Note-se que, para as funções Taxa de Risco e Distribuição de Probabilidades, o expoente da variável  $t$  é  $\gamma - 1$ . Isto gera um problema de definição no modelo de Weibull quando  $\gamma < 1$ : o expoente assume valor negativo e então estas funções somente estão definidas para  $t > 0$ . Este problema - aparentemente uma técnica - do modelo de Weibull gera diversas complicações para o ajuste numérico dos parâmetros da distribuição.

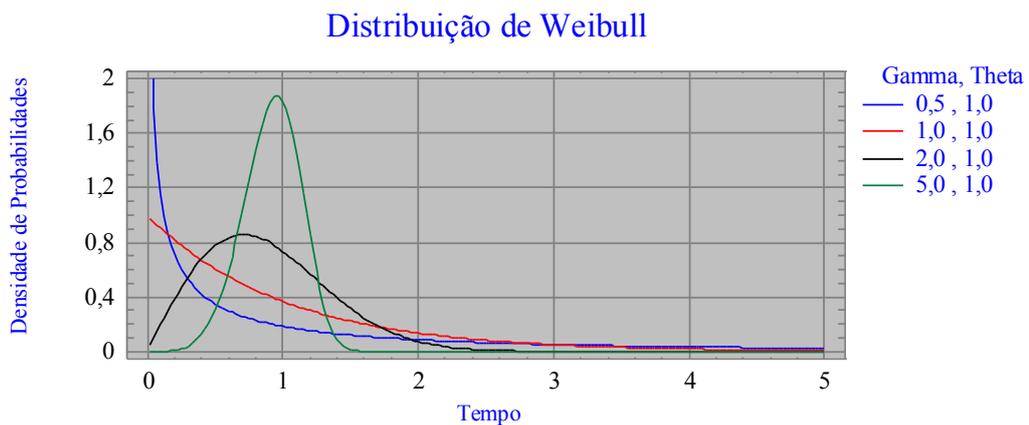


Figura 5: Exemplos de configurações da Função Densidade de Probabilidades do Modelo de Weibull para diferentes valores do parâmetro  $\gamma$ , também denominado 'parâmetro de forma'. De modo a facilitar a comparação, o parâmetro  $\theta$  é mantido constante e igual a 1,0.

<sup>3</sup> Pode-se encontrar mais informações sobre o Modelo Clássico de Weibull, bem como sobre o Modelo Misto de Weibull, em Elsayed (1996).

O MTTF para esta distribuição pode ser calculado por (2.16), resultando (Elsayed, 1996) em

$$MTTF = \theta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.32)$$

onde  $\Gamma$  representa a função matemática Gamma.

Analogamente, a variância de dados que seguem este modelo pode ser obtida, resultando em

$$Var(T) = \theta^2 \cdot \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.33)$$

Observe-se a versatilidade da Distribuição de Weibull em relação aos valores assumidos por  $\gamma$  (Figura 6):

- Para  $\gamma < 1$ , tem-se uma Função Taxa de Risco monótona decrescente, representando, por exemplo, as fases iniciais da vida dos mais diversos componentes mecânicos e elétricos.
- Para  $\gamma = 1$ , têm-se Taxa de Risco constante, ou seja, o próprio modelo Exponencial.
- Para  $\gamma > 1$ , têm-se Taxa de Risco monotonicamente crescente, própria para a representação de componentes que já atingiram a fase final de sua vida.

Elsayed (1996) cita um resultado encontrado por Makino (1984), que aproximou a Distribuição Normal por uma Distribuição de Weibull, encontrando o valor  $\gamma = 3,43927$ . Este valor é muito próximo do valor do parâmetro de forma  $\gamma = 3,43938$  da Distribuição de Weibull em que a média é igual à mediana.

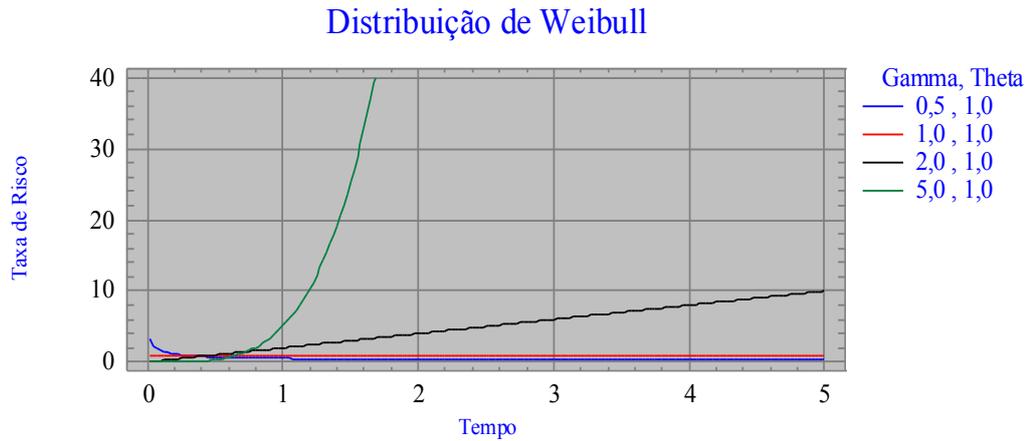


Figura 6: Função Taxa de Risco para o Modelo de Falhas de Weibull, apresentando  $\theta$  igual a 1,0 e valores de  $\gamma$  iguais a 0,5 , 1,0 , 2,0 e 5,0.

Novamente, introduzindo-se o Parâmetro de Localização,  $l$ , e adotando-se  $l \in \mathfrak{R}$ ,  $\theta \in \mathfrak{R}_*^+$ ,  $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ , pode-se definir o Modelo de Weibull com três parâmetros:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot (t-l)^{\gamma-1} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.34)$$

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t-l}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq l \\ 1 & t < l \end{cases} \quad (2.35)$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t-l}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.36)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot (t-l)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-l}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases} \quad (2.37)$$

#### 2.6.4 A Distribuição Normal

Esta é a mais conhecida e, possivelmente a mais antiga distribuição contínua de probabilidades existente na Ciência Estatística. Devida a Gauss, esta distribuição é própria para a representação de diversos comportamentos físicos, econômicos e biológicos. Segundo o

Teorema Central do Limite, emergente em muitos resultados estatísticos, o modelo Normal tende a ser a representação ideal para variáveis que são a soma de várias pequenas contribuições individuais.

A Função Taxa de Risco da Distribuição Normal é monótona crescente<sup>4</sup>. Por este motivo, sua utilização é particularmente interessante quando são modelados certos tipos de sistemas e componentes que não podem ser reparados, bem como componentes mecânicos cuja degradação aumenta de acordo com o uso. Usos comuns do Modelo Normal de Probabilidades são a descrição de componentes mecânicos submetidos a cargas cíclicas, tais como em testes de fadiga (Elsayed, 1996).

O Modelo Normal Padronizado é definido a partir de funções Densidade de Probabilidades e Distribuição Acumulada de Probabilidades são dadas por

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.38)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.39)$$

A Função Distribuição de Probabilidades do Modelo Normal genérico para uma variável aleatória  $T$  é definida por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.40)$$

onde  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ . Diz-se, sucintamente,  $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, o *Parâmetro de Localização* e o *Parâmetro de Forma* do Modelo Normal.

Como não há representação analítica explícita para a Distribuição Acumulada de Falhas deste modelo, tem-se:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.41)$$

cujos valores podem ser obtidos via integração numérica.

Ainda, por (2.4) e (2.10),

$$R(t) = 1 - F(t), \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.42)$$

<sup>4</sup> Ver Elsayed (1996), páginas 28-30, para uma indicação da prova formal desta propriedade.

$$h(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds}, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.43)$$

completa-se o conjunto de Funções de Confiabilidade para o Modelo Normal (Figura 7 e Figura 8).

Observe-se, nas equações anteriores, a expressão de transformação de uma variável que segue a Distribuição Normal genérica para outra, que segue a Distribuição Normal padronizada:

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.44)$$

onde  $T \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Z \sim N(0,1)$ .

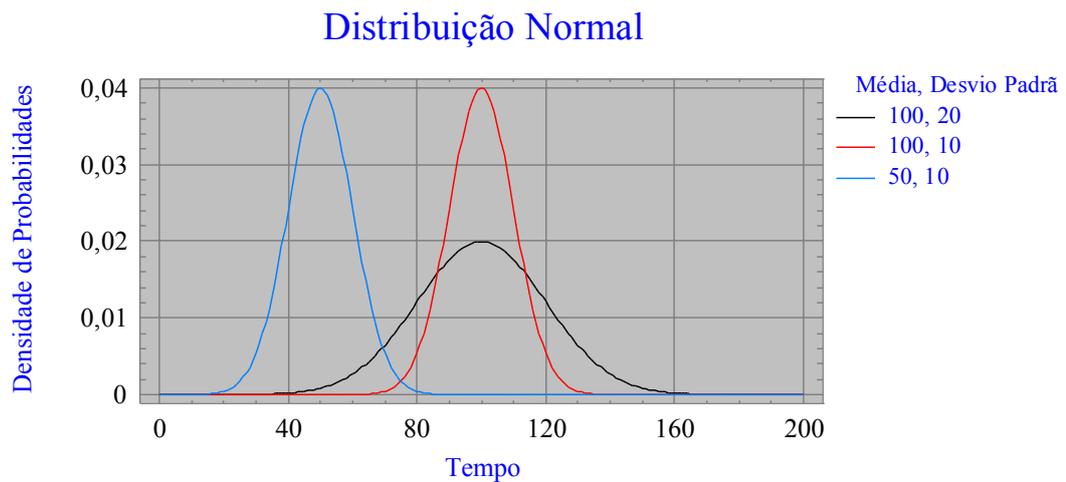


Figura 7: Exemplos de Função Densidade de Probabilidades do Modelo Normal de Falhas. Observe-se sua simetria em relação ao valor da média.

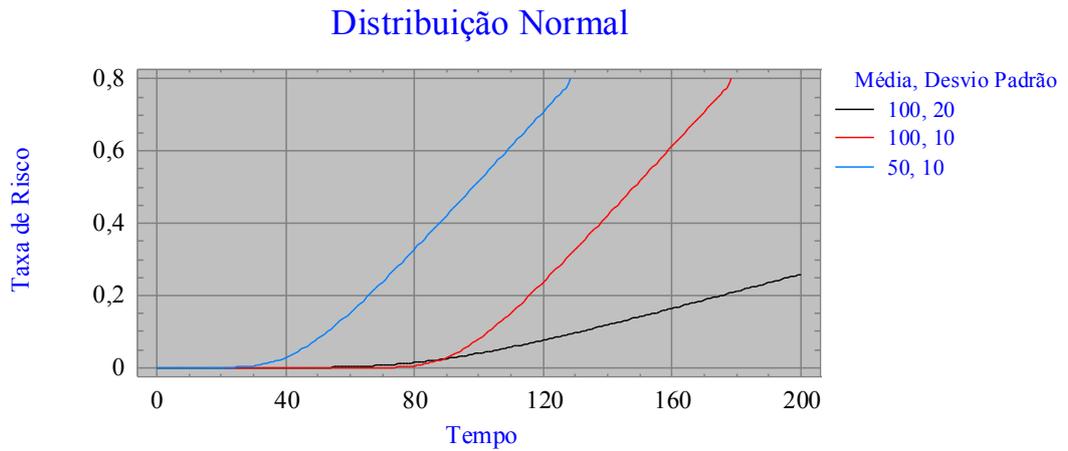


Figura 8: Exemplos da Função Taxa de Risco do Modelo de Falhas Normal. O crescimento monótono justifica sua utilização em sistemas cujo desgaste aumente com o tempo e com o uso.

A Esperança Matemática e a Variância para este modelo podem ser determinados, após algumas mudanças de variável e integrações por partes, como sendo

$$E[T] = \mu \quad (2.45)$$

$$V[T] = \sigma^2 \quad (2.46)$$

Há uma importante restrição que deve ser feita sobre este modelo para que possa ser utilizado para a modelagem de Confiabilidade. Esta é uma distribuição que não possui domínio limitado. Como as análises de Confiabilidade, em geral, utilizam dados de falha cuja natureza pode ser associada à variável *tempo*, deve-se impor uma restrição sobre o domínio deste modelo, de modo que os valores assumidos pela variável aleatória  $T$  sejam não negativos. Assim, obtém-se um modelo **truncado** para a Distribuição Normal:

$$f(t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.47)$$

$$F(t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_0^t e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{s-\mu}{\sigma} \right)^2} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.48)$$

$$R(t) = 1 - F(t), \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.49)$$

$$h(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}}{c \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.50)$$

onde  $0 \leq \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$

e  $c = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds$  é denominado *fator de correção*.

### 2.6.5 A Distribuição LogNormal

Este modelo é amplamente utilizado em ajustes de dados por apresentar uma grande quantidade de formatos, de acordo com seus parâmetros. É particularmente indicado em dados cujo intervalo de variação percorre várias ordens de grandeza. Exemplos genéricos de dados que seguem esta distribuição são dados econômicos e de crescimento populacional em colônias de bactérias. Entre exemplos de dados de Confiabilidade em Engenharia podem ser citados casos de fadiga metálica, vida de isolamentos elétricos e tempos de reparo de certos equipamentos. Elsayed (1996) cita ainda os casos de modelagem do mecanismo de falha de um semiconductor ou de um conjunto de mecanismos de falha intimamente relacionados.

Pode-se descrever o Modelo LogNormal através do Modelo Normal pelo uso de uma mudança de variável:

Seja a variável aleatória  $T$ , descrita por um modelo LogNormal. Então, escrevendo  $X = \ln(T)$  temos que  $X$  é descrita pelo modelo Normal. Assim, definem-se

$$E[\ln(T)] = \mu \quad (2.51)$$

$$Var[\ln(T)] = \sigma^2 \quad (2.52)$$

que são números puros. Isto significa que  $\mu$  e  $\sigma$  **não** têm a unidade dos dados de falha, mas sim do logaritmo da unidade de tempo. Deste modo, não têm a mesma interpretação dada no Modelo Normal.

A Função Densidade de Probabilidades de Falha para o Modelo LogNormal genérico é escrita como

$$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+ \quad (2.53)$$

onde  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ .

A Distribuição Acumulada de Falhas é dada por

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(s) - \mu}{\sigma}\right)^2}}{s} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+ \quad (2.54)$$

cujos valores podem ser obtidos via integração numérica.

Definindo-se ainda, por (2.4) e (2.10),

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right), \quad t \in \mathfrak{R}_*^+ \quad (2.55)$$

$$h(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)^2}}{t \cdot (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma - \int_0^t e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(s) - \mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds)} \quad , \quad t \in \mathfrak{R}_*^+ \quad (2.56)$$

fica completo o conjunto de Funções de Confiabilidade para o Modelo LogNormal. Nelson (1982) apresenta uma variação interessante deste modelo, a partir do uso do logaritmo **decimal** no lugar do logaritmo natural. A densidade de probabilidades do modelo LogNormal é apresentada na Figura 9.

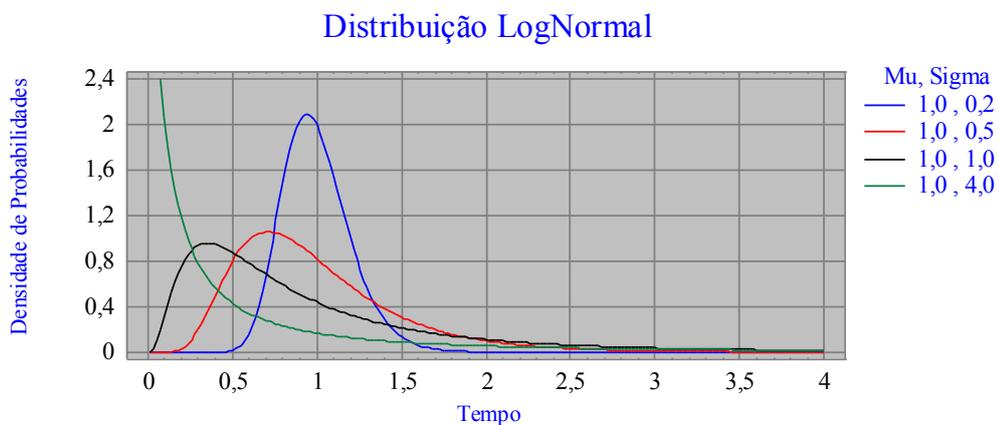


Figura 9: Exemplos de configurações da Função Densidade de Probabilidades do Modelo LogNormal. Observe-se que o parâmetro  $\mu$  é mantido constante em 1,0, enquanto  $\sigma$  assume diferentes valores.

A Taxa de Risco deste modelo apresenta comportamentos diversos, de acordo com os valores dos parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ . Por exemplo: para  $\mu=1$  e  $\sigma >2$ , tem-se risco decrescente; para  $\mu=1$  e  $\sigma \approx 1$ , tem-se risco rapidamente crescente no início da vida, seguido de um comportamento estável; para  $\mu=1$  e  $\sigma <0,3$ , tem-se risco crescente (Figura 10).

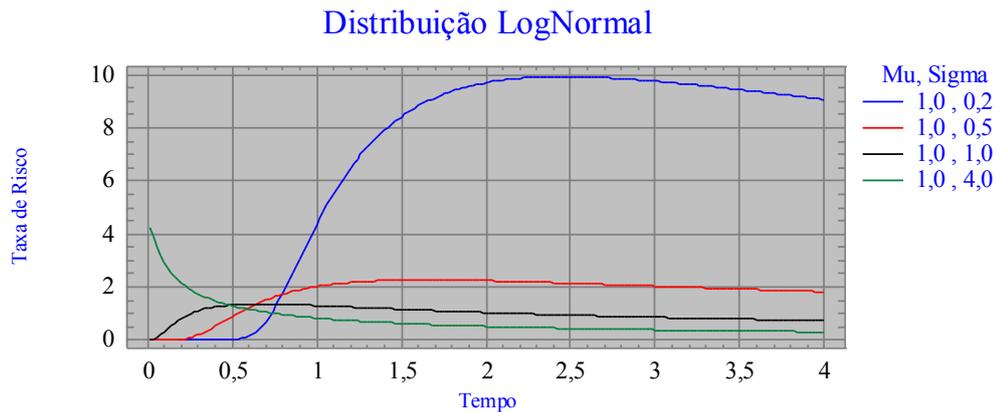


Figura 10: Exemplos da variabilidade de formatos da Função Taxa de Risco do Modelo LogNormal em relação a seus parâmetros. Neste exemplo somente  $\sigma$  assume diferentes valores.

Observe-se, ainda, que o Modelo LogNormal já possui domínio limitado inferiormente, não necessitando de truncamentos adicionais, como acontece no Modelo Normal.

Através da transformação  $t = e^x$  pode-se encontrar a expressão analítica para a Esperança Matemática deste modelo. A Esperança parte da expressão

$$E[T] = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt$$

onde o limite inferior da integral é zero, uma vez que  $f$  somente é definida para  $t > 0$ .

Realizando a mudança de variável na expressão acima, obtém-se

$$E[T] = E[e^X] = \int_0^{+\infty} e^x \cdot f(e^x) \cdot e^x \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \cdot f(e^x) \cdot dx$$

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma} \cdot e^x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(e^x) - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x - \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2.x.\mu + \mu^2}{2.\sigma^2}} . dx = \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2.x.(\mu + \sigma^2) + \mu^2}{2.\sigma^2}} . dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2 - \sigma^2.(2.\mu + \sigma^2)}{2.\sigma^2}} . dx = e^{\frac{(\mu + \sigma^2)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2.\sigma^2}} . dx
\end{aligned}$$

$$\text{Mas } \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2.\sigma^2}} . dx = \frac{1}{\sqrt{2. \pi. \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2.\sigma^2}} . dx = 1$$

e então

$$E[T] = e^{\frac{(\mu + \sigma^2)}{2}} \tag{2.57}$$

Analogamente, usando a transformação  $t^2 = e^{2x}$  pode-se encontrar a variância de  $T$ , dada por

$$\text{Var}[T] = (e^{\sigma^2} - 1) . e^{(2\mu + \sigma^2)} \tag{2.58}$$

### 2.6.6 A Distribuição Gamma

O Modelo Gamma, apesar de utilizado para modelagens de Confiabilidade é mais indicado para dados de sobrevivência vindos da área biomédica. O comportamento da Função Taxa de Risco deste modelo torna-o inapropriado para a maioria dos produtos (Nelson, 1982), isto porque, dependendo dos valores assumidos por seus parâmetros, sua forma é rapidamente alterada, dificultando seu ajuste a conjuntos de dados de falha. Elsayed (1996), no entanto, afirma que este modelo é apropriado para a descrição de tempos de falha de sistemas cujas falhas estão associadas a um certo número de *sub-falhas* com taxa de ocorrência constante, ou de um componente cuja falha somente é efetivada após um certo número de estágios.

A função Densidade de Probabilidades de Falha para o Modelo Gamma é dada por

$$f(t) = \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} . t^{\gamma-1} . e^{-\lambda.t}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \tag{2.59}$$

onde  $\Gamma$  é a função matemática Gamma,  $\gamma > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Ela é ilustrada na Figura 11. Os parâmetros  $\lambda$  e  $\gamma$  são, respectivamente, o Parâmetro de Escala e o Parâmetro de Forma da distribuição:

- Quando  $0 < \gamma < 1$ , a taxa de falhas decresce monotonicamente de  $+\infty$  até  $\lambda$ , para  $t$  indo de 0 até  $+\infty$ .
- Quando  $\gamma > 1$ , a taxa de falhas cresce monotonicamente de  $\lambda$  até  $+\infty$ , para  $t$  indo de 0 até  $+\infty$ .
- Quando  $\gamma = 1$ , a taxa de falhas mantém-se constante e igual a  $\lambda$ . Observe-se também que o domínio desta distribuição é limitado para valores estritamente positivos de  $t$  caso  $\gamma$  seja menor que 1.

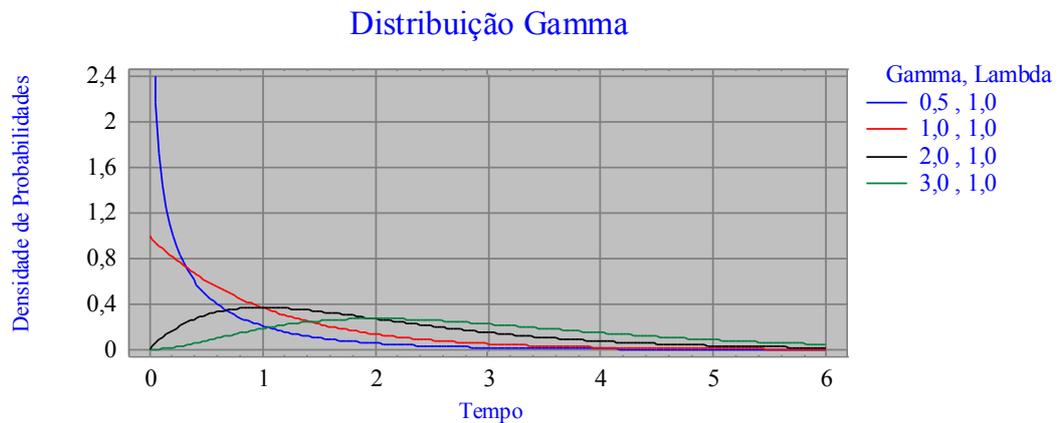


Figura 11: Configurações da Função Densidade de Probabilidades do Modelo Gamma.

As demais Funções de Confiabilidade para este modelo são:

$$F(t) = \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot \int_0^t s^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda \cdot s} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.60)$$

$$R(t) = \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot \int_t^{+\infty} s^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda \cdot s} \cdot ds, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.61)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.62)$$

A taxa de risco da distribuição Gamma é apresentada na Figura 12. Elsayed (1996) apresenta diversas extensões para estas expressões em termos da Função Gamma Incompleta, bem como para valores inteiros do parâmetro de forma.

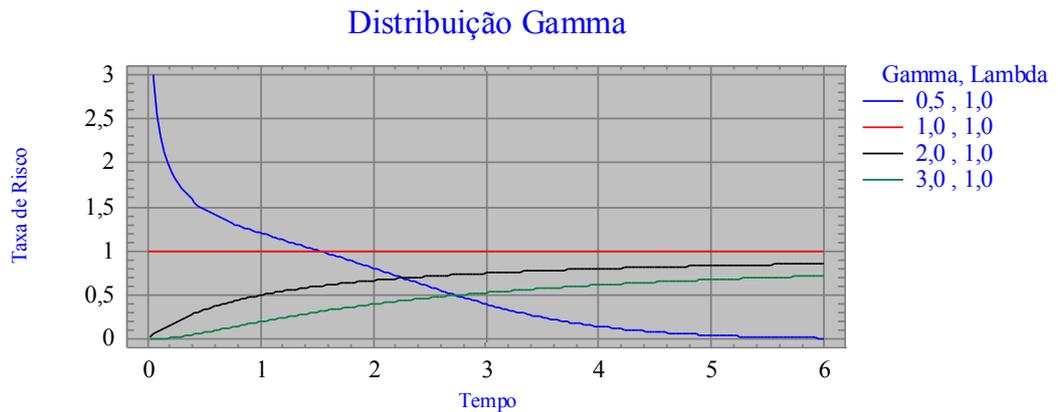


Figura 12: Exemplos de Taxa de Risco obtidos através do Modelo Gamma.

Pode-se mostrar que a Esperança Matemática e a Variância de uma variável aleatória  $T$  com Distribuição Gamma são, respectivamente<sup>5</sup>:

$$E[T] = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad \gamma > 0, \lambda > 0 \quad (2.63)$$

$$Var[T] = \frac{\gamma}{\lambda^2}, \quad \gamma > 0, \lambda > 0 \quad (2.64)$$

Observe-se ainda que:

- fazendo  $\gamma = 1$  temos a expressão que define a Distribuição Exponencial.
- fazendo  $\gamma = \nu/2$ ,  $\nu > 0$  e  $\lambda = 0,5$  obtém-se a expressão que define o Distribuição  $\chi^2$ .

### 2.6.7 A Distribuição Uniforme

O Modelo Uniforme, não é propriamente referenciado como um modelo comumente usado em análises de Confiabilidade. No entanto, sua utilização apresenta vantagens, sob o ponto de vista prático, no que toca à realização de inferências sobre novos componentes, para os quais não se possui informações sobre o comportamento das falhas.

A função Densidade de Probabilidades de Falha para o Modelo Uniforme é dada por

<sup>5</sup> Ver Elsayed (1996), páginas 37-9, para a descrição detalhada deste resultado.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{1}{r} & l \leq t < l+r, \\ 0 & t \geq l+r \end{cases}, \quad t \in \mathfrak{R}^+. \quad (2.65)$$

Os parâmetros  $l$  e  $r$  são, respectivamente, o Parâmetro de Localização e o Parâmetro de Duração da distribuição uniforme.

As demais Funções de Confiabilidade para este modelo são:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{t-l}{r} & l \leq t < l+r, \\ 1 & t \geq l+r \end{cases}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.66)$$

$$R(t) = \begin{cases} 1 & t < l \\ 1 - \frac{t-l}{r} & l \leq t < l+r, \\ 0 & t \geq l+r \end{cases}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.67)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{1}{r+l-t} & l \leq t < l+r, \\ \end{cases}, \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.68)$$

Observe-se que, por apresentar Densidade de Falhas constante, este modelo apresenta taxa de falhas estritamente crescente. Além disso, a Taxa de Risco do modelo Uniforme somente está definida para valores estritamente menores que  $l + r$ . Isto significa que o componente necessariamente deve falhar até este instante. Isto também pode ser observado através do fato de que as probabilidades fornecidas por este modelo estão concentradas em um intervalo finito de tempo, o que significa que um componente que tenha suas falhas modeladas por esta distribuição necessariamente falhará dentro de um período predeterminado de tempo,  $[l; l+r]$ .

Pode-se mostrar que a Esperança Matemática e a Variância de uma variável aleatória  $T$  que segue a Distribuição Uniforme são, respectivamente:

$$E[T] = l + \frac{r}{2} \quad (2.69)$$

$$Var[T] = \frac{r^2}{12} \quad (2.70)$$

## **2.7 Etapas da Modelagem e Estimação da Confiabilidade**

A modelagem da Confiabilidade de um sistema genérico requer o conhecimento de seu comportamento até a falha. Tal conhecimento não pode ser obtido, via de regra, sem a realização de testes. Mesmo no caso de dados oriundos de extrapolações de outros dados ou da experiência do engenheiro de Confiabilidade, em algum momento devem ser coletadas informações de testes.

Os testes acima referidos não necessariamente têm de ser realizados em laboratórios. Muitas vezes, o próprio banco de dados de reclamações dos clientes pode conter informações de Confiabilidade. No entanto, deve-se considerar que dados desta natureza podem não refletir a realidade de campo. Sob este mesmo ponto de vista, testes realizados em laboratórios tendem a ser muito mais informativos, trazendo a informação realmente necessária para as análises de Confiabilidade e com o benefício de não comprometer a imagem da empresa frente a seus clientes.

Testes de laboratório podem ser conduzidos de diversas maneiras. Na situação ideal, um ensaio contendo um número determinado de sistemas semelhantes deveria ser conduzido até que todas as unidades falhassem. No entanto, restrições monetárias e de tempo podem impedir a realização de testes completos, como por exemplo, no caso de sistemas cuja durabilidade seja muito elevada - meses, anos, etc. Nestes casos, pode-se optar por formas alternativas de testes, tais como testes acelerados ou testes com truncamento.

Uma vez recolhidos os dados de falha, parte-se para a etapa de análise. Neste ponto, todas as ferramentas matemáticas e estatísticas que permitam a real compreensão da informação contida nos dados são bem-vindas. De modo geral e quando apropriado (isto é, para amostras sem censura), opta-se primeiramente pela descrição dos dados, por exemplo, através da obtenção de estatísticas descritivas, tais como o MTTF e histogramas dos dados. De posse de tais informações, pode-se tentar inferir sobre o comportamento do sistema sob estudo. O ajuste de um modelo teórico nem sempre é possível devido às características dos dados, mas, nos casos em que é julgado adequado, disponibiliza muitas informações ao analista.

A modelagem da Confiabilidade de um sistema traz maior segurança ao engenheiro de Confiabilidade e à empresa: ao primeiro, porque permite um dimensionamento mais preciso e enxuto de projetos e processos; à segunda porque permite um melhor dimensionamento de garantias, além de indicar onde devem ser concentrados esforços de melhoria, contribuindo

assim para a melhoria contínua da Qualidade de seus produtos e de sua imagem frente ao mercado.

### **2.7.1 Coleta de Dados via Testes**

A obtenção de dados para a modelagem da Confiabilidade de sistemas pode ocorrer de diversas formas, as quais podem ser utilizadas simultaneamente:

#### *2.7.1.1 Levantamento de Dados Históricos*

Muitos componentes e sistemas são derivados de modificações de projetos anteriores, já suficientemente testados e com Confiabilidade já conhecida. Além destes casos, existem diversos bancos de dados de domínio público que fornecem estimativas de vida útil para os componentes e sistemas mais comumente utilizados. Tais bancos de dados são mantidos por diversos órgãos públicos e privados, tais como NASA, General Electrics e AT&T. Muitas vezes, no entanto, tais bancos não atingem um número suficiente de tipos de componentes, restringindo-se a resultados para componentes de uso geral.

Dados de falha de componentes são coletados de diferentes fornecedores e os resultados estimados são normatizados e gravados em tabelas. A utilização de índices associados a diferentes condições ambientais e de operação e a diferentes níveis de qualidade permite a determinação das exigências mínimas de operação e a verificação da Confiabilidade de um produto.

#### *2.7.1.2 Testes de Vida em Condições Normais de Operação*

Estes tipos de teste, apesar de trazerem informações diretas sobre os ensaios realizados, são, em geral, demorados. Tal fato ocorre porque a realização de testes sobre componentes e sistemas simulando suas condições normais de uso implica em dados de falha semelhantes aos de uso. Para componentes e sistemas cuja durabilidade é estimada em meses ou anos, tais testes resultam impraticáveis. Para minimizar tais problemas, muitas vezes são utilizadas amostras de grande tamanho, o que traz à tona um segundo problema: o alto custo associado a tais amostras. Testar um lote de 100 aparelhos de televisão é relativamente barato, mas testar um lote de 10 turbinas de avião pode ser extremamente oneroso!

Comumente são utilizados testes em condições normais de uso para componentes ou sistemas novos, em fase de desenvolvimento e cujas necessidades de durabilidade sejam

pequenas em termos de tempo. Desta forma tem-se uma maior confiança de que os níveis de Confiabilidade requeridos foram atingidos satisfatoriamente.

#### 2.7.1.3 Testes Acelerados de Vida

A utilização de testes acelerados, quando bem conduzida, traz benefícios na obtenção de dados de falha de componentes e sistemas. A lógica envolvida neste tipo de procedimento baseia-se no monitoramento simultâneo do tempo de vida e das condições de operação das unidades em teste. Assim, a partir de testes realizados sob condições extremas de operação, pode-se inferir sobre o comportamento das falhas das unidades quando sob condições normais de uso. Atenção especial deve ser dada ao fato de que tal expediente somente será válido caso o modo de falha das unidades não se altere com a variação das condições operacionais.

Há dois tipos principais de aceleração de testes (Elsayed, 1996):

- **aumento da frequência de utilização do produto.** Por exemplo, pode-se acionar continuamente um interruptor ou um cardan até que a falha ocorra.
- **aumento da tensão de trabalho do produto,** que pode ser obtido através da modificação das condições de umidade, temperatura, pressão, voltagem ou peso. No caso de componentes eletrônicos, são comuns aumentos nos níveis de estresse de voltagem e umidade.

Testes acelerados de vida são, em geral, mais rápidos e, conseqüentemente, menos custosos. Uma importante ressalva é a de que a informação monitorada deve ser transformada para níveis normais de uso. Diversos modelos de aceleração podem ser utilizados, dependendo da natureza dos sistemas em teste. Elsayed (1996) apresenta uma extensa discussão sobre a recuperação da informação obtida em testes acelerados.

#### 2.7.1.4 Tipos de Censura de Testes

Em diversas situações, testes de vida são interrompidos antes que o ensaio se complete, isto é, antes que todas as unidades da amostra tenham falhado. A utilização deste expediente é comum em estimativas de Confiabilidade, com o objetivo de reduzir os custos e o tempo de ensaio.

O processamento dos dados de testes com truncamento em informações úteis depende da existência de resultados teóricos que permitam a correta interpretação da informação obtida. Este embasamento teórico é fornecido pela Análise de Sobrevivência, da qual vêm os fundamentos da Análise de Confiabilidade. No entanto, há ainda muitas lacunas neste campo de pesquisa. Por exemplo, nem todas as distribuições possuem expressões analíticas explícitas

para os estimadores de amostras com censura, como é o caso das distribuições Normal e LogNormal com amostras censuradas aleatoriamente. Para casos como estes, os valores assumidos pelos estimadores podem ser obtidos através do uso de métodos numéricos apropriados, tais como métodos numéricos para a solução de sistemas de equações diferenciais.

Quando um dado é censurado, ele traz uma informação incompleta. Tudo o que se pode afirmar sobre a unidade associada àquele dado é que ela durou **até** o instante de truncamento, mas poderia ter durado mais... O “quanto” mais poderia ter durado esta unidade não se sabe; este é um dado cuja informação é **censurada**. Assim, sempre que possível, a realização de testes completos (isto é, sem censura) é melhor, pois é mais informativa.

A notação mais comumente utilizada para indicar dados com informação censurada (ou simplesmente dados censurados) é a utilização de um super-índice “+” após o valor do dado. Para melhor entendimento dos tipos de truncamento sobre testes, consideraremos uma amostra com  $n$  unidades sob teste, das quais  $r$  terão falhado, tendo-se dados de falha  $t_1, t_2, \dots, t_r$  e dados truncados  $t_{r+1}^+, t_{r+2}^+, \dots, t_n^+$ .

#### 2.7.1.4.1 *Censura Tipo I (ou por Tempo)*

A duração do teste é predeterminada, e o instante em que o teste é encerrado é denominado *tempo de truncamento* e denotado por  $T$ . Como consequência, o número de falhas,  $r$ , é uma variável aleatória que depende das características das unidades testadas e da duração do teste.

Tempos associados a um teste com censura por tempo são formalmente descritos como  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r \leq t_{r+1}^+ = t_{r+2}^+ = \dots = t_n^+ = T$ . Note-se que o tempo da última falha,  $t_r$ , usualmente não coincide com o tempo de truncamento.

#### 2.7.1.4.2 *Censura Tipo II (ou por Componentes)*

A duração do teste não é predeterminada, mas sim o número de falhas que devem ocorrer:  $r$ . Conseqüentemente, este tipo de teste garante o número mínimo desejado de dados de falha para as análises de Confiabilidade. O instante da última falha, no qual o teste é encerrado, é denominado *tempo de truncamento* e denotado por  $T$ . Assim, o tempo de duração do teste é uma variável aleatória que depende das características das unidades testadas e do número de falhas programado.

Tempos associados a um teste com censura por componentes são formalmente descritos como  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r = t_{r+1}^+ = t_{r+2}^+ = \dots = t_n^+ = T$ . Note-se que a única sutileza na representação

de dados de teste em relação aos do tipo de teste anterior é o fato de que, para truncamentos por componentes, o tempo de truncamento é igual ao tempo da última falha.

#### 2.7.1.4.3 *Censura Aleatória*

Neste tipo de truncamento, unidades são retiradas de funcionamento - mesmo antes da ocorrência de falha - em instantes aleatórios. Testes com censura aleatória são muito comuns em ensaios de componentes inseridos em sistemas. Isto porque o sistema pode falhar devido à quebra de outro componente que não o analisado e, como consequência, o componente testado é retirado do teste sem ter falhado. Por exemplo, para o teste de uma cruzeta, é necessário montar um cardan. Caso ocorra, em um instante aleatório, a quebra de uma ponteira sem que se quebre a cruzeta, teremos uma censura aleatória para a cruzeta.

Tempos associados a um teste com censura aleatória são descritos como  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r ; t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ .

#### 2.7.1.4.4 *Truncamentos Múltiplos (Dados Multicensurados)*

Em certos tipos de teste, é comum a ocorrência de dois tipos diferentes de truncamento. Por exemplo, em um teste previamente projetado para censura do tipo I (por tempo), se algumas peças forem censuradas devido a problemas de funcionamento de uma das máquinas de teste, ter-se-á uma amostra multicensurada. Neste caso, cuidados especiais devem ser utilizados para retirar a informação de Confiabilidade contida na amostra. Diversos métodos não-paramétricos são discutidos na literatura (Nelson, 1982; Elsayed, 1996), tratando este tipo de situação de forma semelhante a casos de censura aleatória.

### 2.7.2 **Estimação de Modelos**

Quando são calculadas estatísticas tais como a média ou a variância de um conjunto de dados, o objetivo é o de descrever (com o nível de detalhe necessário) o comportamento da fonte geradora de tais dados (ou da informação neles contida). As estatísticas média aritmética e variância de uma amostra são valores representativos da distribuição de probabilidade da população de onde foi retirada esta amostra.

Quando são realizados testes de falha sobre componentes ou sistemas, o objetivo é o de descrever - ou estimar - o comportamento de sua sobrevida. Para se ajustar modelos para a distribuição que descreva o comportamento das falhas de um sistema, é necessário **estimar** os valores dos parâmetros destes modelos.

Em ambos os casos acima descritos, cuidados são necessários com o tamanho das amostras e com a metodologia utilizada (que vai desde os procedimentos de amostragem até os métodos de estimação dos parâmetros de interesse). Tais cuidados são necessários porque deles dependem a exatidão de todas as análises realizadas posteriormente. As expressões matemáticas que permitem a estimação de valores representativos de parâmetros de uma população de dados a partir de um conjunto de dados são denominadas **estimadores**.

Três dos métodos mais largamente utilizados para a estimação de parâmetros populacionais são o Método dos Momentos, o Método da Máxima Verossimilhança e o Método dos Mínimos Quadrados (Elsayed, 1996).

### 2.7.2.1 Propriedades de um Bom Estimador

Um bom estimador, em termos estatísticos, deve representar o mais fielmente possível o real valor de um parâmetro populacional. Para a descrição das propriedades estatisticamente desejáveis em um bom estimador, denotaremos  $\theta$  para um parâmetro populacional genérico e  $\hat{\theta}$  para seu estimador.

#### 2.7.2.1.1 Não-Tendenciosidade

Um estimador é não-tendencioso se, para qualquer amostra retirada de uma mesma população, seu valor médio é igual ao parâmetro populacional estimado. Formalmente, esta definição pode ser reescrita como

“ $\hat{\theta}$  é um estimador não-tendencioso de  $\theta$  se e somente se  $E(\hat{\theta}) = \theta$ ”.

Um estimador tendencioso - ou viesado - é aquele que superestima ou subestima sistematicamente o parâmetro populacional. O viés de um estimador pode ser calculado por

$$\text{Viés}[\hat{\theta}] = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Um exemplo de estimador viesado para uma variável aleatória,  $X$ , que siga uma distribuição Normal é o Desvio Quadrático Médio (*Mean Squared Deviation* ou *MSD*):

$$MSD = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (2.71)$$

Na média, o *MSD* subestima a variância populacional. No entanto, modificando-se o denominador para  $n-1$ , obtém-se a expressão da variância de uma amostra,

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (2.72)$$

que já foi provada como sendo um estimador não-tendencioso para a variância populacional normal<sup>6</sup>. Outro exemplo de estimador não-viesado é o da média populacional.

#### 2.7.2.1.2 Variância Mínima (Eficiência)

Para se obter um bom estimador, além de tender ao valor populacional, é desejável que os valores estimados fiquem altamente concentrados em torno do valor do parâmetro populacional. Isto significa que a variância do estimador deve ser “pequena” - ou seja, deve tender a zero conforme o tamanho da amostra aumenta. Formalmente, a eficiência relativa de um estimador sobre outro pode ser enunciada como:

“Para dois estimadores não-viesados,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ ,

a eficiência relativa de  $\hat{\theta}_1$  comparado a  $\hat{\theta}_2$  é dada por  $\frac{Var[\hat{\theta}_2]}{Var[\hat{\theta}_1]}$ .”

Para o caso da comparação de estimadores tendenciosos e não-tendenciosos, deve-se considerar que nem sempre um estimador não-tendencioso é o melhor. Por exemplo, em certas situações, é melhor escolher um estimador com um pequeno viés e pequena variância do que um estimador não-viesado e com grande variância (Wonnacott & Wonnacott, 1977). Nestes casos, pode-se recorrer ao Erro Quadrático Médio de Estimação (*Mean Squared Error* ou *MSE*), dado por

$$MSE[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]. \quad (2.73)$$

Assim, chega-se à seguinte definição de eficiência relativa:

“Para quaisquer dois estimadores,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ , viesados ou não,

a eficiência relativa de  $\hat{\theta}_1$  comparado a  $\hat{\theta}_2$  é dada por  $\frac{MSE[\hat{\theta}_2]}{MSE[\hat{\theta}_1]}$ .”

<sup>6</sup> De fato, a tendenciosidade do *MSD* pode ser facilmente observada para uma amostra de tamanho unitário. Neste caso, a média amostral,  $\bar{X}$ , será igual ao valor amostrado,  $x_1$ , resultando em  $MSD = 0$ , o que é, obviamente, uma subestimativa da variância populacional. No entanto, este mesmo caso resultaria em  $s^2 = \frac{0}{0}$ , que é indeterminado. Mas isto não é um contra-senso e sim um bom aviso de que uma amostra unitária não possui desvio e, portanto, não é capaz de estimar a variância populacional (Wonnacott & Wonnacott, 1977).

### 2.7.2.1.3 Suficiência

Um estimador é dito suficiente se utiliza toda a informação contida na amostra. Por exemplo, a média aritmética é um estimador suficiente para a média populacional, enquanto que a mediana, não, pois não necessita de todos os valores para seu cálculo.

### 2.7.2.1.4 Consistência

Intuitivamente, um estimador consistente é aquele que tende a se concentrar perfeitamente no valor do parâmetro populacional estimado à medida em que o tamanho da amostra utilizada aumenta indefinidamente. Formalmente:

*“ $\hat{\theta}$  é um estimador consistente de  $\theta$  se tanto seu viés como sua variância tendem a zero quando o tamanho da amostra utilizada tende a  $+\infty$ ”.*

Observe-se que, pela definição acima, um estimador é consistente se seu *MSE* tende a zero quando o tamanho da amostra aumenta (Wonnacott & Wonnacott, 1977).

Somente porque um estimador é consistente, não significa que seja bom. Por exemplo, tanto a mediana como a média de uma amostra são estimadores consistentes para a média de uma amostra que se distribui normalmente. No entanto, a média amostral é preferida por ser consistente e eficiente. A consistência é uma propriedade estritamente matemática e que pode ser estabelecida mesmo quando não se pode conhecer as demais propriedades de um estimador. No entanto, ela de nada adianta se não for levada em conta a velocidade de convergência do estimador em relação ao tamanho da amostra. Assim, chega-se a uma segunda definição de consistência relativa de um estimador:

*“Dados dois estimadores,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ , diz-se que  $\hat{\theta}_1$  é mais consistente que  $\hat{\theta}_2$  se tanto seu viés como sua variância tendem a zero mais rapidamente que os de  $\hat{\theta}_2$  quando o tamanho da amostra utilizada tende a  $+\infty$ ”.*

### 2.7.2.2 Método da Máxima Verossimilhança

Máxima Verossimilhança é uma técnica muito popular de estimação por apresentar, em geral, muitas das propriedades associadas a grandes amostras (tais como eficiência e consistência). Este método ocupa posição fundamental na Inferência Estatística devido a sua grande aplicação em problemas práticos, e consiste em encontrar o valor hipotético do parâmetro populacional que seja o mais provável para gerar a amostra observada (Wonnacott & Wonnacott, 1977). Assim, um Estimador de Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood*

*Estimate*, MLE) é um valor populacional hipotético que maximiza a verossimilhança da amostra observada.

Formalmente, seja uma amostra  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  formada por  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) observações independentes não-censuradas e retirada de uma população com distribuição de probabilidades  $P(t/\theta)$ , onde  $\theta$  é um parâmetro populacional desconhecido, o qual se deseja estimar. Denominando a probabilidade associada a cada  $t_i$  por  $P(t_i/\theta)$ , a probabilidade conjunta da amostra será dada por

$$P(t_1, t_2, \dots, t_n / \theta) = P(t_1 / \theta) \cdot P(t_2 / \theta) \dots P(t_n / \theta) = \prod_{i=1}^n P(t_i / \theta) \quad (2.74)$$

Assim, definindo-se a Função de Verossimilhança como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(t_i / \theta), \quad (2.75)$$

o MLE é o valor hipotético de  $\theta$  que maximiza  $L$ .

O Método da Máxima Verossimilhança, segundo diversos autores (Choi & Wette, 1969; Harther & Moore, 1965), é o mais eficiente na produção de estimadores para parâmetros de distribuições de Confiabilidade. A utilização do logaritmo da Função de Verossimilhança, quando o tamanho da amostra é muito grande, é uma forma de simplificar a obtenção dos valores para os procedimentos de otimização. Wonnacott & Wonnacott (1977) apresentam uma extensa discussão e diversos resultados associados a Estimadores de Máxima Verossimilhança, tais como: a média aritmética,  $\bar{X}$ , é o estimador MLE para a média populacional,  $\mu$ , em uma população Normal; e, em um modelo de regressão Normal, o estimador MLE é idêntico à estimativa dada por mínimos quadrados.

### 2.7.2.3 Método dos Mínimos Quadrados

Um estimador obtido via Mínimos Quadrados é calculado de forma a minimizar o erro quadrático médio global entre os dados amostrais e o modelo teórico a ser ajustado. Por este motivo, um estimador deste tipo será eficiente e não-viesado (Elsayed, 1996). Exemplos comuns de aplicação deste método são os procedimentos de Regressão. Wonnacott & Wonnacott (1977) apresentam diversos outros exemplos de sua aplicação na obtenção de estimadores.

#### 2.7.2.4 Principais Estimadores para Distribuições de Confiabilidade

Estimadores podem ser obtidos através de diversos métodos, tais como os anteriormente descritos. Ao longo do tempo, a obtenção de estimadores com certas propriedades (principalmente eficiência e consistência) fez com que certas técnicas fossem preferidas em relação a outras. Assim, sob o ponto de vista da Estatística Paramétrica, começou-se a preferir Estimadores Lineares Não-Tendenciosos (*Best Linear Unbiased Estimates* - BLUE) e Estimadores de Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood Estimates* - MLE). Em contrapartida, pode-se ainda tratar dados de vida de uma forma não parametrizada (assunto que não será abordado nesta dissertação, mas que pode ser encontrado em Bolfarine *et alli*, 1991; Cox & Oakes, 1984; e Soares & Colosimo, 1995).

Serão apresentadas a seguir, considerações sobre a estimação de parâmetros das distribuições mais utilizadas em modelagem de Confiabilidade:

##### 2.7.2.4.1 Estimadores para o Modelo Exponencial

A Função Densidade de Probabilidades do Modelo Exponencial genérico foi definida pela expressão (2.27):

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t-l)} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases}$$

onde  $\lambda$  é a taxa de falhas (constante),  $\lambda \in \mathfrak{R}^+$ ,  $l \in \mathfrak{R}$ .

Há, então, dois parâmetros a serem estimados:  $\lambda$  e  $l$ . Pela mudança de variáveis

$$X = T - l \tag{2.76}$$

pode-se escrever

$$f(x+l) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- *Estimadores para Amostras Não Censuradas*

Aplicando-se a mudança de variáveis (2.76) nos tempos  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  da amostra, obtém-se  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . A função de verossimilhança para  $\lambda$  e  $l$  é dada por

$$L(\lambda, l) = \prod_{i=1}^n \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i} \tag{2.77}$$

Buscando os máximos da função acima em relação a  $\lambda$  e a  $l$ , são obtidos os Estimadores de Máxima Verossimilhança em função dos valores  $x_i$  (Mann *et alli*, 1974):

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (2.78a)$$

$$e \quad \hat{l} = t_1 \quad (2.78b)$$

Ribeiro (1995a) propõe a utilização do estimador

$$\hat{l} = t_1 - \frac{1}{\hat{\lambda} \cdot n} \quad (2.78b')$$

que é citado por Mann *et alli* (1974) como o melhor estimador invariante para este modelo.

Da expressão (2.22) tem-se a MLE para a média dos dados de falha:

$$\hat{MTTF} = \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \quad (2.79)$$

Pode-se ainda obter estimativas intervalares para os parâmetros  $\lambda$  e  $MTTF$ . Segundo Halperin (1952), a razão  $\frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\lambda}$  segue uma distribuição  $\chi^2$  com  $2 \cdot n$  graus de liberdade para um modelo com parâmetro de localização conhecido. No caso mais geral, o número de graus de liberdade será de  $2 \cdot (n-1)$ . Assim, utilizando-se a expressão (2.79), são obtidos os intervalos de confiança para  $\lambda$  e  $MTTF$ :

$$\lambda \in \left[ \hat{\lambda} \cdot \frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-1)}^2}{2 \cdot n}; \hat{\lambda} \cdot \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-1)}^2}{2 \cdot n} \right] \quad (2.80)$$

$$MTTF \in \left[ \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} \cdot \frac{2 \cdot n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-1)}^2}; \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} \cdot \frac{2 \cdot n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-1)}^2} \right] \quad (2.81)$$

onde  $\alpha$  é o nível de significância da estimativa,  $0 < \alpha < 1$ , ou seja, a probabilidade associada ao erro da estimativa acima.

Para grandes tamanhos de amostra ( $n > 30$ ), pode-se aproximar a distribuição de  $\hat{\lambda}$  por uma distribuição Normal com média  $\lambda$  e variância  $\lambda^2/n$ :

$$\lambda \in \left[ \hat{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right); \hat{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

onde  $\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$  e  $\Phi$  é a Distribuição Normal Acumulada padronizada.

- *Estimadores para Amostras Censuradas*

Para a obtenção de MLE para  $\lambda$  e  $l$ , não surgem dificuldades em relação ao caso anterior. A única modificação é a inclusão de tempos censurados: para amostras com censura, (quer **por tempo**, quer **por componentes**, quer **aleatória**), os dados amostrados são descritos em dois conjuntos  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  e  $t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ . Aplicando-se a transformação (2.76), a função de verossimilhança fica

$$L(\lambda, l) = \prod_{i=1}^r \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i} \cdot \prod_{i=r+1}^n e^{-\lambda \cdot x_i^+} \quad (2.82)$$

e as MLE obtidas têm expressões idênticas em qualquer caso de censura:

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^r x_i + \sum_{i=r+1}^n x_i^+} \quad (2.83a)$$

$$e \quad \hat{l} = t_1 - \frac{1}{\hat{\lambda} \cdot n} \quad (2.83b)$$

Novamente, da expressão (2.22) tem-se a MLE para a média dos dados de falha:

$$\widehat{MTTF} = \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} \quad (2.84)$$

As estimativas intervalares para os parâmetros  $\lambda$  e  $MTTF$  são obtidas, segundo Halpern (1952), observando-se que a razão  $\frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\lambda}$  segue uma distribuição  $\chi^2$  com  $2 \cdot r$  graus de liberdade no caso de o parâmetro de localização ser conhecido. No caso mais geral, o número de graus de liberdade será dado por  $2 \cdot (r-1)$ . Assim, os intervalos de confiança para  $MTTF$  e  $\lambda$  são:

$$\lambda \in \left[ \hat{\lambda} \cdot \frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (r-1)}^2}{2 \cdot r}; \hat{\lambda} \cdot \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (r-1)}^2}{2 \cdot r} \right] \quad (2.85)$$

$$MTTF \in \left[ \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} \cdot \frac{2 \cdot r}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (r-1)}^2}; \hat{l} + \frac{1}{\hat{\lambda}} \cdot \frac{2 \cdot r}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (r-1)}^2} \right] \quad (2.86)$$

onde  $\alpha$  é o nível de significância da estimativa.

Para grandes conjuntos de dados de falha ( $r > 30$ ), pode-se aproximar a distribuição de  $\hat{\lambda}$  por uma distribuição Normal com média  $\lambda$  e variância  $\lambda^2/(r-1)$ :

$$\lambda \in \left[ \hat{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{r-1}}\right); \hat{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{r-1}}\right) \right]$$

onde  $\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$  e  $\Phi$  é a Distribuição Normal Acumulada padronizada.

#### 2.7.2.4.2 Estimadores para o Modelo de Weibull

A Função Densidade de Probabilidades do Modelo de Weibull de três parâmetros foi definida pela expressão (2.37) como:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot (t-l)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-l}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq l \\ 0 & t < l \end{cases}$$

onde  $l \in \mathfrak{R}$ ,  $\theta \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ .

Pela mudança de variáveis

$$X = T - l \quad (2.87)$$

pode-se escrever

$$f(x+l) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot x^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- *Estimadores para Amostras Não Censuradas*

Aplicando-se a mudança de variáveis (2.87) nos tempos  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  da amostra, obtém-se  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . A função de verossimilhança para  $l$ ,  $\gamma$  e  $\theta$  é dada por

$$L(l, \gamma, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot x_i^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\gamma} \quad (2.88)$$

Procedendo-se à derivação parcial do operador acima em relação a cada um dos parâmetros, obtém-se um conjunto de equações que devem ser resolvidas simultaneamente. Conforme indicado em Mann *et alli* (1974), a solução de tal sistema de equações não-lineares é de difícil obtenção e requer métodos numéricos elaborados ou um grande custo computacional. A dificuldade reside no cálculo simultâneo dos três parâmetros. Partindo-se da observação de que o problema da estimação de dois dos parâmetros pode ser solucionado de forma bem menos onerosa, diversos métodos alternativos são apresentados na literatura. Mann *et alli* (1974) citam diversas aproximações sugeridas por outros autores para a estimação do parâmetro de localização em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\theta$ .

Outra forma alternativa de estimação do modelo de Weibull com três parâmetros é proposta por Ribeiro<sup>7</sup> e testado pelo autor do presente trabalho, e aproveita os resultados classicamente conhecidos para a estimação do modelo de Weibull com dois parâmetros. Para o modelo de Weibull com dois parâmetros, os estimadores MLE são dados por (Keats & Lawrence, 1997):

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}} \cdot \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}}} - \frac{1}{\hat{\gamma}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \quad (2.89a)$$

$$\hat{\theta} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i^{\hat{\gamma}})}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \quad (2.89b)$$

O método proposto consiste na estimação simultânea dos valores de  $\gamma$  e de  $l$  através de um algoritmo iterativo e foi testado computacionalmente através de um modelo de regressão ajustado sobre diversas configurações características do modelo de Weibull. O procedimento de cálculo de  $l$  é apresentado no Anexo B e  $\gamma$  deve ser obtido por algum método numérico, tal como o Método de Newton-Raphson ou algum método *Regula Falsi*. O valor de  $\hat{\gamma}$  encontrado<sup>8</sup> deve ser utilizado para estimar  $\hat{\theta}$ .

Sabendo-se que

<sup>7</sup> Este é um resultado de pesquisa, ainda sem referência.

<sup>8</sup> Uma ressalva em relação ao estimador obtido para  $\gamma$  é sua tendenciosidade quando o número de falhas na amostra é pequeno. Correções para este problema serão abordadas no final desta seção.

$$Var(\hat{\gamma}) \cong \frac{n}{\hat{\gamma}^2} + \frac{1}{\hat{\theta}} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}} \cdot \ln^2(x_i) \quad (2.90)$$

$$e \quad Var(\hat{\theta}) \cong -\frac{n}{\hat{\theta}^2} + \frac{2}{\hat{\theta}^3} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}} \quad (2.91)$$

pode-se mostrar (Mann *et alli*, 1974) que, para uma amostra de tamanho grande ( $n > 30$ ), os intervalos de confiança para  $\gamma$  e  $\theta$  são dados por:

$$\gamma \in \left[ \hat{\gamma} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{Var(\hat{\gamma})}; \hat{\gamma} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{Var(\hat{\gamma})} \right] \quad (2.92)$$

$$\theta \in \left[ \hat{\theta} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{Var(\hat{\theta})}; \hat{\theta} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{Var(\hat{\theta})} \right] \quad (2.93)$$

onde  $\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$  e  $\Phi$  é a Distribuição Normal Acumulada padronizada.

- *Estimadores para Amostras Censuradas*

A obtenção de MLE para  $\gamma$ ,  $\theta$  e  $l$ , é semelhante ao caso anterior. A inclusão de dados censurados (por **tempo**, por **componentes** ou **aleatória**),  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  e  $t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ , previamente transformados por (2.87), resulta em uma função de verossimilhança dada por

$$L(l, \gamma, \theta) = \prod_{i=1}^r \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot (x_i)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\gamma} \cdot \prod_{i=r+1}^n e^{-\left(\frac{x_i^+}{\theta}\right)^\gamma} \quad (2.94)$$

Procedendo-se de forma semelhante ao caso anterior, obtém-se o conjunto final de equações de difícil solução. Alternativamente, pode-se utilizar o mesmo algoritmo proposto por Ribeiro para amostras não censuradas e que usa os estimadores para  $\gamma$  e  $\theta$  provenientes do modelo de Weibull de dois parâmetros para amostras censuradas (Keats & Lawrence, 1997):

$$\frac{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\gamma}} \cdot \ln(x_i) + \sum_{i=r+1}^n x_i^{+\hat{\gamma}} \cdot \ln(x_i^+)}{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\gamma}} + \sum_{i=r+1}^n x_i^{+\hat{\gamma}}} - \frac{1}{\hat{\gamma}} - \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln(x_i) = 0 \quad (2.95a)$$

$$\hat{\theta} = \left( \frac{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\gamma}} + \sum_{i=r+1}^n x_i^{+\hat{\gamma}}}{r} \right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \quad (2.95b)$$

Uma importante ressalva é a de que, pelo fato de o algoritmo proposto ser indicado para amostras completas, seus resultados podem apresentar certa degradação para o caso de amostras com elevado número de censuras. O procedimento de solução é semelhante ao do caso de amostra completa<sup>9</sup>.

Novamente tem-se que

$$Var(\hat{\gamma}) \cong \frac{r}{\hat{\gamma}^2} + \frac{1}{\hat{\theta}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\gamma}} \cdot \ln^2(x_i) + \sum_{i=r+1}^n x_i^{+\hat{\gamma}} \cdot \ln^2(x_i^+) \right] \quad (2.96)$$

e

$$Var(\hat{\theta}) \cong -\frac{r}{\hat{\theta}^2} + \frac{2}{\hat{\theta}^3} \cdot \left[ \sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\gamma}} + \sum_{i=r+1}^n x_i^{+\hat{\gamma}} \right]. \quad (2.97)$$

Pode-se ainda mostrar (Elsayed, 1996) que, para uma amostra de tamanho grande ( $n > 30$ ), o intervalo de confiança para  $\gamma$  é dado por:

$$\gamma \in \left[ \hat{\gamma} \cdot \left( \frac{\chi_{(1-\alpha), df}^2}{c \cdot r} \right)^{\frac{1}{1+p^2}}; \hat{\gamma} \cdot \left( \frac{\chi_{(\alpha), df}^2}{c \cdot r} \right)^{\frac{1}{1+p^2}} \right]$$

onde:  $p = \frac{r}{n}$

$$c = \frac{2}{(1+p^2)^2 \cdot p \cdot c_{22}}$$

$df = c \cdot (r - 1)$  é o número de graus de liberdade do ajuste.

$c_{22} = 0,6079$  é um dado tabelado fornecido por Elsayed (1996)<sup>10</sup>.

Da mesma forma, o intervalo de confiança para  $\theta$  é dado por:

<sup>9</sup> Novamente, o estimador obtido para  $\gamma$  é tendencioso quando o número de falhas na amostra é pequeno. Correções para este problema serão abordadas no final desta seção.

<sup>10</sup> A partir do trabalho de Bain & Engelhardt (1991).

$$\theta \in \left[ \hat{\theta} \cdot \exp\left(\frac{-U_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot \hat{\gamma}}\right); \hat{\theta} \cdot \exp\left(\frac{-U_{\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot \hat{\gamma}}\right) \right]$$

onde Bain e Engelhardt (1991) fornecem tabelas com os valores de percentagem  $U_\alpha$ .

- *Correção da Tendenciosidade de  $\hat{\gamma}$*

Para as expressões de  $\hat{\gamma}$  acima apresentadas, se o número de falhas na amostra é pequeno (quando há poucas falhas em uma amostra censurada ou quando a amostra é pequena e sem censura), a estimativa dada por  $\hat{\gamma}$  é tendenciosa. A forma mais aceita de correção deste viés é a utilização de um fator multiplicativo,  $G_n$ , (sugerido por Bain & Engelhardt, 1991; e discutido por Elsayed, 1996):

$$\hat{\gamma}_{unbiased} \cong G_n \cdot \hat{\gamma} \quad (2.98)$$

Os valores de  $G_n$  dependem essencialmente do tamanho da amostra de falhas utilizada e podem ser encontrados em tabelas. Alternativamente, pode-se utilizar a seguinte aproximação (Ribeiro, 1995a):

$$G_n \cong 1,0 - \frac{1,346}{n} - \frac{0,8334}{n^2} \quad (2.99)$$

onde  $n$  é o tamanho da amostra de falhas.

Após a correção de  $\hat{\gamma}$ , pode-se estimar  $\hat{\theta}$  pelas equações (2.89b) ou (2.95b). Maiores detalhes a respeito de formas de correção desta tendenciosidade podem ser encontradas em Elsayed (1996).

#### 2.7.2.4.3 *Estimadores para o Modelo Normal*

Pela expressão (2.40), a Função Densidade de Probabilidade do Modelo Normal genérico é

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2}, \quad t \in \mathfrak{R}$$

onde  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ .

São conhecidos estimadores MLE para os casos de amostras sem truncamento, com censura por tempo ou com censura por componentes.

- *Estimadores para Amostras Não Censuradas*

O operador de verossimilhança para este modelo para dados de falha  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  é dado por

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t_i - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (2.100)$$

Buscando-se os pontos de máximo do operador acima, encontram-se:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad (2.101)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{\mu})^2}{n}} \quad (2.102)$$

O estimador para  $\sigma$  é tendencioso para amostras de pequeno tamanho, sendo necessária uma correção. Assim, tem-se

$$\hat{\sigma}_{unbiased} = \hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{\mu})^2}{n-1}} \quad (2.103)$$

Determinado um nível de significância  $\alpha$ , o intervalo de confiança para a média é dado por

$$\mu \in \left[ \hat{\mu} - t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.104)$$

onde  $t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}$  é o ponto dado pela Distribuição  $t$  de Student com  $(n-1)$  graus de liberdade tal que

$$P(T \leq t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

O intervalo de confiança para a variância é dado por (Wonnacott & Wonnacott, 1977):

$$\sigma^2 \in \left[ \frac{\hat{s}^2}{C^2_{\frac{\alpha}{2}}}; \frac{\hat{s}^2}{C^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

onde  $C^2$  indica a Distribuição  $\chi^2$  Modificada. Como  $C^2 = \frac{\chi^2}{d.f.}$ , onde  $d.f.$  representa o número

graus de liberdade da amostra, pode-se escrever

$$\sigma^2 \in \left[ \frac{n \cdot \hat{s}^2}{\chi_{\alpha/2, (n-1)}^2}; \frac{n \cdot \hat{s}^2}{\chi_{1-\alpha/2, (n-1)}^2} \right] \quad (2.105)$$

- *Estimadores para Amostras Com Censura por Tempo ou por Componentes*

O operador de verossimilhança para uma amostra formada por dados  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  e  $t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$  que sigam o Modelo Normal é dado por

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t_i - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot \prod_{i=r+1}^n \left( 1 - \Phi \left( \frac{t_i^+ - \mu}{\sigma} \right) \right) \quad (2.106)$$

Não há formulas fechadas para os estimadores  $\mu$  e  $\sigma$  com amostras desta natureza. Ribeiro (1995a) referencia um algoritmo para a estimação dos parâmetros do Modelo Normal sob estas condições. O algoritmo é apresentado no Anexo B e baseia-se na estimação dos quartis da amostra e em fórmulas que relacionem os quartis com a média e o desvio padrão de uma Distribuição Normal. As informações de truncamento são incorporadas através do cálculo da proporção entre as probabilidades associadas aos quartis e as probabilidades associadas aos valores dos quartis calculados sobre a amostra censurada. Maiores informações sobre estimadores para este modelo podem ser obtidas na literatura (Elsayed, 1996).

#### 2.7.2.4.4 *Estimadores para o Modelo LogNormal*

A Função Densidade de Probabilidades da Distribuição LogNormal foi definida na expressão (2.53) como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma \cdot t}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a média e o desvio padrão do logaritmo dos dados,  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ .

- *Estimadores para Amostras Não Censuradas*

$\mu$  e  $\sigma$  são simultaneamente parâmetros de escala e de forma. Seus valores podem ser estimados a partir das estimativas do Modelo Normal<sup>11</sup> para dados de falha  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  (Lee, 1980):

---

<sup>11</sup> Apesar de terem a mesma notação, os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  do Modelo LogNormal **não** são os mesmos e **nem** têm o mesmo significado que os do Modelo Normal. No modelo LogNormal,  $\mu$  e  $\sigma$  **não** têm a mesma unidade dos dados.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \quad (2.107)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln^2(t_i) - \hat{\mu}^2. \quad (2.108)$$

O intervalo de confiança para  $\mu$  é dado por (2.106):

$$\mu \in \left[ \hat{\mu} - t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}; \hat{\mu} + t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} \right] \quad (2.109)$$

onde  $t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$  é o ponto dado pela Distribuição  $t$  de Student com  $(n-1)$  graus de liberdade tal que

$$P(T \leq t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

O intervalo de confiança para  $\sigma$  é dado por (2.105):

$$\sigma^2 \in \left[ \frac{n \cdot \hat{\sigma}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}^2}; \frac{n \cdot \hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}^2} \right] \quad (2.110)$$

Conforme (2.57), o tempo médio até a falha da Distribuição LogNormal é dado por

$$MTTF = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}. \quad (2.111)$$

Denominando

$$\tau = \mu + \frac{\sigma^2}{2}, \quad (2.112)$$

o estimador para  $\tau$  será dado por

$$\hat{\tau} = \hat{\mu} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \quad (2.113)$$

e então

$$\hat{MTTF} = e^{\hat{\tau}}. \quad (2.114)$$

Para amostras grandes (Elsayed, 1996),  $\hat{\tau}$  é a média de uma distribuição aproximadamente Normal com variância dada por

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = Var(\hat{\mu}) + \frac{1}{4} \cdot Var\left(\frac{n}{n-1} \cdot \hat{\sigma}^2\right) + 2 \cdot Cov\left(\hat{\mu}, \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \hat{\sigma}^2\right).$$

Sabendo-se que  $Var(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}$  e  $Var\left(\frac{n}{n-1} \cdot \hat{\sigma}^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^3} \cdot \hat{\sigma}^4$  obtém-se

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n^2 \cdot \hat{\sigma}^4}{(n-1)^3} \quad (2.115)$$

Assim, o intervalo de confiança com nível de significância  $\alpha$  para o *MTTF* é dado por (Elsayed, 1996):

$$MTTF \in \left[ \exp\left(\hat{\tau} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\tau}}\right); \exp\left(\hat{\tau} + Z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\tau}}\right) \right] \quad (2.116)$$

onde  $\Phi\left(Z_{1-\alpha/2}\right) = \alpha/2$  e  $\Phi$  é a Distribuição Normal Acumulada padronizada.

- *Estimadores para Amostras Com Censura por Tempo ou por Componentes*

Seja uma amostra com dados  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  e  $t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ , censurada por tempo ou por componentes. Assim como no caso da distribuição Normal, não são conhecidas expressões analíticas explícitas para se obter estimativas dos parâmetros do Modelo LogNormal em amostras censuradas aleatoriamente. Métodos numéricos são adequados para a obtenção de soluções nesta situação.

Para amostras de pequeno tamanho ( $n < 20$ ), igualmente não há solução explícita para as estimativas MLE. No entanto, métodos numéricos podem ser convenientemente utilizados para a estimação dos valores dos parâmetros. Uma abordagem alternativa é proposta por Sarhan e Greenberg (1956, 1958), estimando  $\mu$  e  $\sigma$  como combinações lineares dos logaritmos dos dados de falha:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^r a_i \cdot \ln(t_i) \quad (2.117)$$

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^r b_i \cdot \ln(t_i) \quad (2.118)$$

Segundo Elsayed (1996), os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) são tabelados por Sarhan e Greenberg como função de  $n$  e  $(n-r)$ . Também são fornecidas tabelas para o cálculo da variância e da covariância de  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$ .

Para amostras de tamanho maior que 20, as estimativas MLE para este modelo são dadas por (Cohen, 1959, 1961):

$$\hat{\mu} = \hat{y} - \lambda(a, b) \cdot (\hat{y} - \ln(t_r)) \quad (2.119)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{s}^2 + \lambda(a, b) \cdot (\hat{y} - \ln(t_r))^2 \quad (2.120)$$

onde

$$\hat{y} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i) \quad (2.121)$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i) - \hat{y}^2 \quad (2.122)$$

e  $\lambda$  é tabelado a partir dos coeficientes  $a$  e  $b$  (Cohen, 1961):

$$a = \frac{\hat{s}^2}{(\hat{y} - \ln(t_r))^2} \quad (2.123)$$

$$b = \frac{n-r}{n} \quad (2.124)$$

Alternativamente,  $\lambda$  pode ser aproximado a partir da seguinte expressão (Ribeiro, 1995a):

$$\lambda(a, b) \cong [1,136 \cdot a^3 - \ln(1-a)] \cdot [1 + 0,437 \cdot b - 0,250 \cdot a \cdot b^{1,3}] + 0,08 \cdot (1-a) \quad (2.125)$$

com erro máximo de 5 %.

As variâncias de  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$  podem ser obtidas por

$$Var(\hat{\mu}) = m_1(c) \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \quad (2.126)$$

$$Var(\hat{\sigma}) = m_2(c) \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \quad (2.127)$$

onde  $c = \frac{\ln(t_r) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$ ,

e  $m_1$  e  $m_2$  podem ser obtidos em tabelas (Cohen, 1961) ou através das fórmulas abaixo (adaptadas de Ribeiro, 1995a):

$$m_1(c) = \begin{cases} 0,52 + e^{-1,838.c+0,354.c^2} + 0,391.c - 0,676.c^2 & c < 0 \\ 1 + 0,1.e^{-2,5.c} & c \geq 0 \end{cases} \quad (2.128a)$$

$$m_2(c) = \begin{cases} 0,24 + e^{-c+0,384.c^2} + 0,0507.c - 0,2735.c^2 & c < 0 \\ 0,5 + 0,74.e^{-1,6.c} & c \geq 0 \end{cases} \quad (2.128b)$$

#### 2.7.2.4.5 Estimadores para o Modelo Gamma

A Função Densidade de Probabilidades da Distribuição Gamma foi definida na expressão (2.59) como

$$f(t) = \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot t^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda.t}, \quad t \in \mathfrak{R}^+$$

onde  $\lambda$  e  $\gamma$  são, respectivamente, o parâmetro de escala e o parâmetro de forma,  $\lambda \geq 0, \gamma \geq 0$ .

- *Estimadores para Amostras Não Censuradas*

A função de verossimilhança do modelo Gamma para uma amostra completa  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  é dada pela expressão:

$$L(\lambda, \gamma) = \left( \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \right)^n \cdot \left[ \prod_{i=1}^n t_i \right]^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n t_i} \quad (2.129)$$

O Método da Máxima Verossimilhança produz o conjunto de equações a seguir:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\gamma}}{\bar{t}} \quad (2.130a)$$

$$\ln(\hat{\gamma}) - \psi(\hat{\gamma}) - M = 0 \quad (2.130b)$$

onde:

$$M = \ln\left(\frac{\bar{t}}{\tilde{t}}\right) \quad (2.131)$$

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad (2.132)$$

$$\tilde{t} = \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.133)$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (2.134)$$

$$\Gamma'(\hat{\gamma}) = \int_0^{+\infty} \zeta^{\hat{\gamma}-1} \cdot \ln(\zeta) \cdot e^{-\zeta} \cdot d\zeta \quad (2.135)$$

As equações acima devem ser resolvidas iterativamente, ou através da aproximação sugerida por Greenwood e Durand (1960) e citada por Elsayed (1996):

$$\begin{cases} \hat{\gamma} = \frac{0.50009}{M} + 0.16488 - 0.054427 \cdot M & 0 < M \leq 0.5772 \\ \hat{\gamma} = \frac{8.8989 + 9.0599 \cdot M + 0.97754 \cdot M^2}{(17.797 + 11.968 \cdot M + M^2) \cdot M} & 0.5772 < M \leq 17 \\ \hat{\gamma} = \frac{1}{M} & M > 17 \end{cases} \quad (2.136)$$

Como os estimadores MLE são viesados, é necessária a realização de uma correção de seus valores (principalmente para valores pequenos de  $n$ ):

$$\hat{\gamma}_{unbiased} = \hat{\gamma} \cdot \frac{n-3}{n} + \frac{2}{3 \cdot n} \quad (2.137)$$

$$\hat{\lambda}_{unbiased} = \frac{\hat{\gamma}_{unbiased} \cdot \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}_{unbiased} \cdot n}\right)}{\bar{t}} \quad (2.138)$$

- *Estimadores para Amostras Com Censura por Tempo ou por Componentes*

Seja uma amostra censurada com dados  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  e  $t_{r+1}^+ \leq t_{r+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ . Elsayed (1996) sugere o seguinte algoritmo para a estimação dos parâmetros do Modelo Gamma:

1. Calcular os valores das médias geométrica e aritmética dos dados de falha:

$$\bar{t}_c = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r t_i \quad (2.139)$$

$$\tilde{t}_c = \left( \prod_{i=1}^r t_i \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.140)$$

2. Calcular:

$$NR = \frac{n}{r} \quad (2.141)$$

$$S = \frac{\bar{t}_c}{t_r} \quad (2.142)$$

$$Q = \frac{1}{1 - \frac{\widehat{t}_c}{\bar{t}_c}} \quad (2.143)$$

3. Finalmente, calcular  $\hat{\gamma}_{unbiased}$  como função dos valores acima calculados (conforme o formulário desenvolvido por Ribeiro e documentado em Elsayed, 1996):

- Para  $S < 0,42$ :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{unbiased} = & 1.061 \cdot (1 - \sqrt{Q}) + 0.2522 \cdot Q \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{S}}{NR^4}\right) + \\ & + 1.953 \cdot \left(\sqrt{S} - \frac{1}{Q}\right) - \frac{0.220}{NR^4} + \frac{0.1308 \cdot Q}{NR^4} + \frac{0.4292}{Q \cdot \sqrt{S}} \end{aligned} \quad (2.144a)$$

- Para  $0,42 < S < 0,80$ :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{unbiased} = & 0.5311 \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{NR^2} - 1\right) + 1.436 \cdot \ln(Q) + 0.7536 \cdot S \cdot (Q - 1) - \\ & - \frac{2.040}{NR} + \frac{0.260 \cdot Q \cdot S}{NR^2} + 2.489 \cdot \sqrt{\frac{NR}{Q}} \end{aligned} \quad (2.144b)$$

- Para  $S > 0,80$ :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{unbiased} = & 1.151 + 1.448 \cdot \frac{Q \cdot (1 - S)}{NR} - 1.024 \cdot (Q + S) + \\ & + 0.5311 \cdot \ln(Q) + 1.541 \cdot Q \cdot S - 0.515 \cdot \sqrt{\frac{Q}{NR}} \end{aligned} \quad (2.144c)$$

4. A partir do valor de  $\hat{\gamma}_{unbiased}$ , calcular:

$$\hat{\lambda}_{unbiased} = \frac{\hat{\gamma}_{unbiased} \cdot \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}_{unbiased} \cdot r}\right)}{\bar{t} + \frac{n-r}{n} \cdot t_r} \quad (2.145)$$

As estimativas dadas pelo passo 3 são boas para  $S \geq 0,12$ ,  $1,2 \leq Q \leq 12$  e  $NR \leq 3,0$ . Fora destes limites não é garantida sua exatidão. Fórmulas para a estimação intervalar dos parâmetros acima podem ser encontradas em Elsayed (1996).

#### 2.7.2.4.6 Estimadores para o Modelo Uniforme

A Função Densidade de Probabilidades da Distribuição Uniforme foi definida na expressão (2.65) como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{1}{r} & l \leq t < l+r, \\ 0 & t \geq l+r \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}^+$$

onde  $l$  e  $r$  são, respectivamente, o parâmetro de localização e o parâmetro de duração deste modelo.

Utilizando-se uma amostra com dados  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  e  $t_{k+1}^+ \leq t_{k+2}^+ \leq \dots \leq t_n^+$ , ( $k \leq n$ ), completa ou com censuras por tempo ou por componentes, o procedimento básico para a estimação dos parâmetros  $l$  e  $r$  de uma amostra com tempos de falha que sigam o modelo Uniforme pode ser descrito pelo seguinte algoritmo:

1. Estimar o espaçamento médio entre os tempos de falha

$$\hat{s} = \frac{t_k - t_1}{k - 1}. \quad (2.146)$$

2. Estimar o parâmetro de localização através da expressão:

$$\hat{l} = \max\left(t_1 - \frac{\hat{s}}{2}, 0\right) \quad (2.147)$$

3. Estimar o parâmetro de duração da distribuição por

$$\hat{r} = n \cdot \hat{s} \quad (2.148)$$

A aplicabilidade deste algoritmo para o caso de censuras aleatórias encontra-se em fase de estudo.

## 2.8 Métodos de Verificação de Adequação de Ajuste

Há duas etapas distintas em um processo de estimação de um modelo para dados de falha: *escolha do modelo apropriado para a descrição da população e estimação dos parâmetros do modelo escolhido*. A falta de aderência de um ajuste deve-se primordialmente à inadequação do modelo escolhido para descrever o comportamento de um sistema.

Em muitos casos, a escolha de um determinado modelo para descrever o comportamento de dados de vida é realizada unicamente com base na experiência do engenheiro de Confiabilidade, obtida através de seu trabalho, da realização de experimentos com produtos

semelhantes, do conhecimento dos modos de falha, ou por outro motivo similar. No entanto, devido à óbvia importância da escolha do modelo mais adequado, tal escolha não pode ser embasada unicamente em informações empíricas e de fonte informal. A escolha realizada deve ser, pelo menos, justificável para outros setores da empresa.

Para fundamentar tais escolhas, pode-se recorrer a diversos métodos. Para distribuições simples e específicas, encontram-se disponíveis testes de aderência bastante bons, tais como o Teste de Bartlett<sup>12</sup> para o Modelo Exponencial. Infelizmente, o analista de Confiabilidade não terá testes semelhantes para todas as distribuições estatísticas. Em geral, somente a combinação de vários métodos de verificação da adequação do ajuste com a experiência do engenheiro de Confiabilidade é que poderá garantir a escolha do modelo mais adequado para um conjunto de dados.

### 2.8.1 Métodos Analíticos

Métodos analíticos são, em geral preferidos para a análise da qualidade de ajuste de uma determinada distribuição a um conjunto de dados. No entanto, nem sempre tais métodos são aplicáveis diretamente. Os métodos apresentados a seguir são adequados para amostras completas. Para amostras censuradas tais métodos não devem ser aplicados na forma a seguir descrita. O desenvolvimento de testes de aderência para amostras censuradas ainda requer muitos esforços de pesquisa.

#### 2.8.1.1 Teste $\chi^2$ para Adequação de Ajuste

O  $\chi^2$  é uma forma bastante popular de formulação de testes de hipóteses. Sua lógica é baseada na estimação de diferenças existentes entre as frequências esperadas e as observadas em intervalos predefinidos. As hipóteses envolvidas na aplicabilidade deste teste são a de independência entre repetições do experimento que origina os dados e a de nulidade, sob a qual é possível definir a proporção de dados pertencentes a cada classe predefinida. O número de repetições necessárias para a realização do teste deve ser superior ao número de parâmetros a serem ajustados, acrescido de um.

Para a realização do teste, deve-se primeiramente formular a hipótese a ser testada: “o conjunto de dados pode ser modelado pela Função Distribuição Acumulada de Probabilidades ‘F’”. Esta será a hipótese nula,  $H_0$ . A hipótese alternativa, no caso de rejeição da hipótese nula,

---

<sup>12</sup> Este teste pode ser encontrado em detalhes em Elsayed (1996).

é a de que a distribuição não produz um bom ajuste para o conjunto de dados testados. A seguir, a seguinte rotina é executada:

(a). Obter a distribuição de freqüências para o conjunto de dados, definindo:

$n$ : número de classes da distribuição de freqüências;

$t_{ii}$ : limite inferior do  $i$ -ésimo intervalo;

$t_{is}$ : limite superior do  $i$ -ésimo intervalo;

$O_i$ : freqüência observada no  $i$ -ésimo intervalo.

(b). Definir a freqüência esperada para o  $i$ -ésimo intervalo,  $E_i$ , por

$$E_i = (F(t_{is}) - F(t_{ii})) \cdot n \quad (2.149)$$

(c). Calcular a estatística  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} \quad (2.150)$$

(d). Calcular a probabilidade associada à estatística obtida, através de uma distribuição  $\chi^2$  com  $(n - p - 1)$  graus de liberdade, onde  $p$  é o número de parâmetros a serem ajustados na distribuição escolhida. Como a distribuição  $\chi^2$  devolve a probabilidade associada à região à direita do ponto de corte, valores altos para a estatística calculada estarão associados a pequenos valores de probabilidade e, portanto, à rejeição da hipótese nula em favor da hipótese alternativa.

O Teste  $\chi^2$  é uma forma bastante popular de formulação e teste de hipóteses. No entanto, é também alvo de substanciais abusos. Analistas não suficientemente preparados podem “fazer a pergunta errada” e transformar o teste  $\chi^2$  em uma ferramenta indiscriminadamente aplicável (Wonnacott & Wonnacott, 1977). Por ser extremamente dependente do critério de definição dos intervalos de classes, são comuns, na literatura, recomendações para que somente seja usado em amostras de grandes dimensões, uma vez que, quanto maior a amostra utilizada, mais sensível torna-se o teste a pequenas variações. Wonnacott & Wonnacott (1977) apresentam uma discussão com referência aos erros de interpretação e da má aplicação deste teste. Em particular, os autores concluem a discussão observando que qualquer hipótese nula pode ser rejeitada a partir de uma amostra grande o suficiente caso a condução do teste (definição das classes e formulação das hipóteses) não seja realizada meticulosamente.

### 2.8.1.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov para Qualidade de Ajuste

Este é um teste não paramétrico que compara puntualmente as frequências acumuladas obtidas a partir dos dados da amostra com a Distribuição Acumulada de Probabilidades do modelo teórico que se deseja utilizar. Uma das vantagens de tal expediente é a eliminação do viés provocado pela classificação arbitrária dos dados em classes, como ocorre no Teste  $\chi^2$ .

Para a realização deste teste, as seguintes etapas devem ser realizadas:

(a). Para cada dado  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de uma amostra de tamanho  $n$ , calcular  $F(t_i)$ , onde  $F$  é a Função Distribuição Acumulada de Probabilidades do modelo que se quer utilizar para descrever o conjunto de dados.

(b). Obter as frequências relativas acumuladas,  $\hat{F}(t_i)$  a partir dos dados:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n} \quad (2.151)$$

(c). Calcular as estatísticas  $D^+$  e  $D^-$ , dadas por:

$$D^+ = \max_i |F(t_{i+1}) - \hat{F}(t_i)| \quad (2.152a)$$

$$D^- = \max_i |F(t_i) - \hat{F}(t_i)| \quad (2.152b)$$

(d). Obter a estatística  $D_m$ , dada por  $D_m = \max\{D^+, D^-\}$ , a qual é associada a um valor de probabilidade acumulada dado pela Distribuição  $D_m$ . Quanto maior a probabilidade acumulada associada a  $D_m$ , maior será a significância do ajuste.

Valores pequenos de probabilidade indicam valores altos de  $D_m$ , os quais estão associados a um grande distanciamento entre as frequências observadas nos dados e as esperadas pelo modelo. Esta grande distância indica que o ajuste não é adequado. Estudos realizados mostram que o Teste de Kolmogorov-Smirnov para Qualidade de Ajuste é suficientemente robusto para não cometer o erro de aceitar a hipótese nula - de ajuste satisfatório - quando a mesma é falsa (erro Tipo II).

## 2.8.2 Métodos Empíricos

A visualização e identificação de formas talvez seja o método empírico mais utilizado na determinação da distribuição mais adequada para a modelagem de um conjunto de dados. No entanto, dada a diversidade de formatos que certas distribuições podem assumir, torna-se

difícil saber qual é a mais indicada. Corre-se o risco de achar que “tudo pode ser modelado por uma distribuição Normal...” (ou, em Confiabilidade, por uma distribuição Exponencial). É necessário que se tenha um recurso gráfico suficientemente robusto para minimizar tais erros, por exemplo, através da identificação de formas simples, como retas. É neste contexto que se inserem o Papel de Probabilidades e o diagrama Box-Plot.

### 2.8.2.1 *Papel de Probabilidades*

O Papel de Probabilidades é um recurso gráfico para a verificação da qualidade de ajuste de uma distribuição. As escalas são transformadas de modo que a Função Distribuição Acumulada de Probabilidades da distribuição utilizada é representada por uma reta. Note-se, desta forma, que deve haver um Papel de Probabilidades próprio para cada distribuição. No entanto, infelizmente, muitas distribuições não podem ser associadas a tal recurso, como o caso da Distribuição Gamma.

Com a utilização de papéis de probabilidade, pode-se ter maior intuição de quais as distribuições que modelam melhor o conjunto de dados analisado. Pode-se ainda visualizar *outliers* (pontos fora do padrão da amostra), no caso em que um determinado ponto fica fora do padrão dos demais em diversos papéis de probabilidades. Nelson (1982) recomenda largamente o uso de Papéis de Probabilidade em análises, a partir das seguintes observações:

1. É mais rápido e mais simples de utilizar que muitos métodos numéricos, não requerendo grandes conhecimentos técnicos nem grandes esforços para sua confecção;
2. Apresenta os dados em uma forma de fácil compreensão, o que facilita não somente a obtenção de conclusões, mas também a explanação para outros membros de uma equipe;
3. Para uma dada distribuição, fornece estimativas simples para parâmetros, percentis, percentagem de falhas em garantia, etc.;
4. Indica o quanto uma distribuição teórica realmente se adequa aos dados;
5. A partir de algumas modificações, pode ser aplicável tanto para amostras completas como para amostras censuradas;
6. É útil na visualização de dados não-conformes em relação aos demais: a aparição de dados fora dos padrões podem indicar dados ruins ou, quando as causas são conhecidas, fornecer informações importantes sobre o comportamento do sistema;
7. Permite visualizar o cumprimento das hipóteses admitidas em métodos analíticos aplicados aos dados.

No entanto, este é um método empírico e sua utilização deve sempre ser acompanhada de pelo menos um método analítico, de modo a validar seu resultado. O Papel de Probabilidades serve para a visualização e confirmação da qualidade de um ajuste, mas dificilmente servirá como um discriminante entre dois ajustes razoáveis. Nelson (1982) também apresenta algumas ressalvas ao uso deste método:

1. Não é objetivo, o que significa que analistas diferentes podem obter estimativas ligeiramente diferentes do comportamento observado;
2. Não fornece estimativas intervalares (tais como intervalos de confiança ou testes de hipóteses).

A seguir é apresentada a formulação para a construção dos papéis de probabilidade, a qual parte sempre da expressão da Função Distribuição Acumulada de Probabilidades e pressupõe que as distribuições têm parâmetro de localização **nulo**. Como exemplos, serão utilizadas as distribuições mais freqüentes em análises de Confiabilidade: Exponencial, de Weibull, LogNormal e Normal<sup>13</sup>. Para efeitos de melhor qualidade de visualização, é utilizada uma correção sobre os valores das freqüências acumuladas (Johnson, 1951; Nelson, 1982; Tobias & Trindade, 1995):

$$\tilde{F}(t_i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2.153)$$

onde  $n$  é o tamanho da amostra, e  $t_i$  o  $i$ -ésimo dado ordenado de forma crescente na amostra.

#### 2.8.2.1.1 *Papel de Probabilidades para a Distribuição Exponencial*

A expressão da Distribuição Acumulada de Probabilidades para o Modelo Exponencial é dada por (2.20):

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Para  $t \geq 0$ , isolando-se o termo exponencial e tomando-se o logaritmo natural em ambos os membros da expressão acima, obtém-se:

$$\ln(1 - F(t)) = -\lambda.t, \quad t \geq 0$$

---

<sup>13</sup> Nelson (1982) apresenta ainda extensas considerações, passo a passo, a respeito de como confeccionar e analisar papéis de probabilidade para todas as distribuições acima citadas. Tal informação detalhada não será apresentada nesta dissertação.

que, para melhor visualização, pode ser reescrita como:

$$\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right) = \lambda \cdot t, \quad t \geq 0 \quad (2.154)$$

Assim, o Papel de Probabilidades Exponencial será o gráfico dado pelos pares ordenados  $(t_i, \ln(\frac{1}{1-\tilde{F}(t_i)}))$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dispostos sobre uma reta (Figura 13). Observe-se ainda que  $\lambda$  é a coeficiente angular da reta traçada e pode ser estimado a partir de um procedimento de Regressão Linear Simples sobre os valores traçados no Papel de Probabilidades.

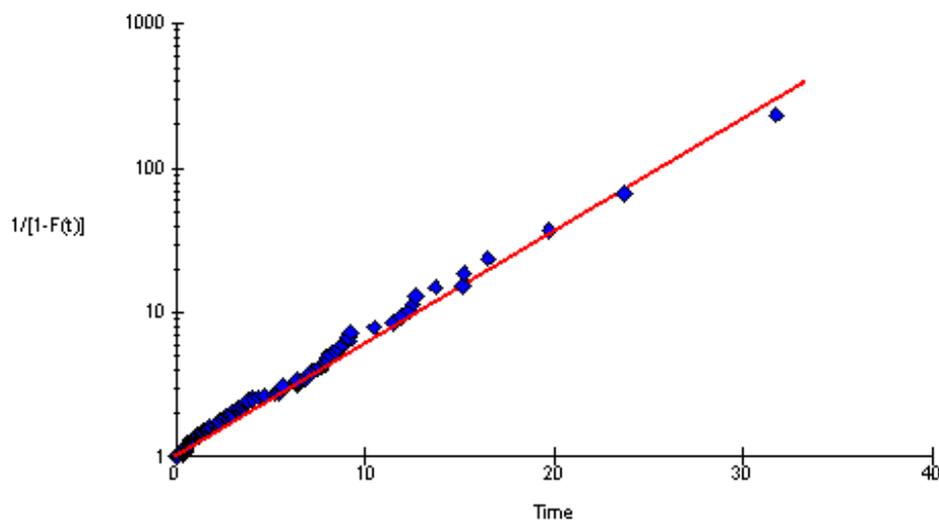


Figura 13: Papel de Probabilidade Exponencial contendo um conjunto de dados amostrados de uma distribuição Exponencial com  $\lambda=0,2$  (em azul) e a reta ajustada via Regressão Linear (em vermelho). O coeficiente angular estimado para a reta foi 0,1742.

### 2.8.2.1.2 Papel de Probabilidades para a Distribuição de Weibull

A expressão da Distribuição Acumulada de Probabilidades para o Modelo de Weibull é dada por (2.30):

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}, \quad t \geq 0, \theta \in \mathfrak{R}_*^+, \gamma \in \mathfrak{R}^+$$

Isolando-se o termo exponencial e tomando-se o logaritmo natural em ambos os membros da expressão acima, obtém-se:

$$\ln(1 - F(t)) = -\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma, \quad t \geq 0, \theta \in \mathfrak{R}_*^+, \gamma \in \mathfrak{R}^+$$

Aplicando-se novamente o logaritmo natural em ambos os membros da expressão acima, obtém-se:

$$\ln(-\ln(1 - F(t))) = \gamma \cdot \ln\left(\frac{t}{\theta}\right), \quad t \geq 0, \theta \in \mathfrak{R}_*^+, \gamma \in \mathfrak{R}^+$$

que, para melhor visualização, pode ser reescrita como:

$$\ln(-\ln(1 - F(t))) = \gamma \cdot \ln(t) - \gamma \cdot \ln(\theta), \quad t \geq 0, \theta \in \mathfrak{R}_*^+, \gamma \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.155)$$

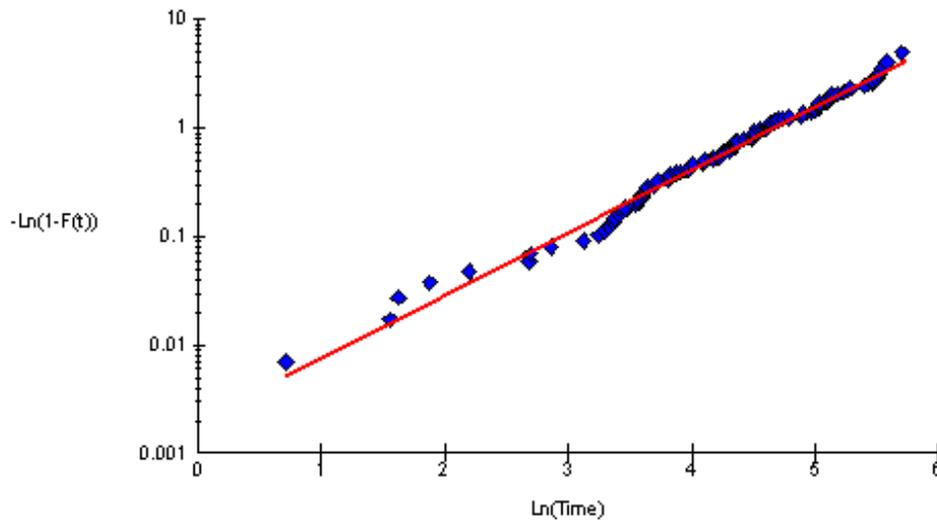


Figura 14: Papel de Probabilidade Weibull contendo um conjunto de dados amostrados de uma distribuição Weibull com  $\gamma=1,5$  e  $\theta=100$  (em azul) e a reta ajustada via Regressão Linear (em vermelho). Os coeficientes angular e linear estimados para a reta foram, respectivamente 1,3262 e -6,1694, indicando  $\gamma=1,3262$  e  $\theta=104,78$ .

Assim, o Papel de Probabilidades do Modelo Weibull será o gráfico dado pelos pares ordenados  $(\ln(t_i), \ln(-\ln(1 - \tilde{F}(t_i))))$ ,  $0 \leq i \leq n$ , que deverão seguir um comportamento retilíneo. Tem-se ainda que  $\gamma$  é o coeficiente angular da reta traçada e pode ser estimado a partir de um procedimento de Regressão Linear Simples sobre os valores traçados no Papel de Probabilidades. A partir do valor de  $\gamma$  pode-se obter  $\theta$ , uma vez que o coeficiente linear desta mesma reta é dado por  $-\gamma \cdot \ln(\theta)$ .

### 2.8.2.1.3 Papel de Probabilidades para a Distribuição Normal

O procedimento de obtenção do Papel de Probabilidades Normal é ligeiramente diferente dos casos anteriores. Para o Modelo Normal, parte-se da expressão (2.44):

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R}$$

Reescrevendo a expressão acima, obtém-se

$$t = \sigma \cdot z + \mu, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R}$$

ou seja:

$$t = \sigma \cdot \Phi^{-1}(F(t)) + \mu, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (2.156)$$

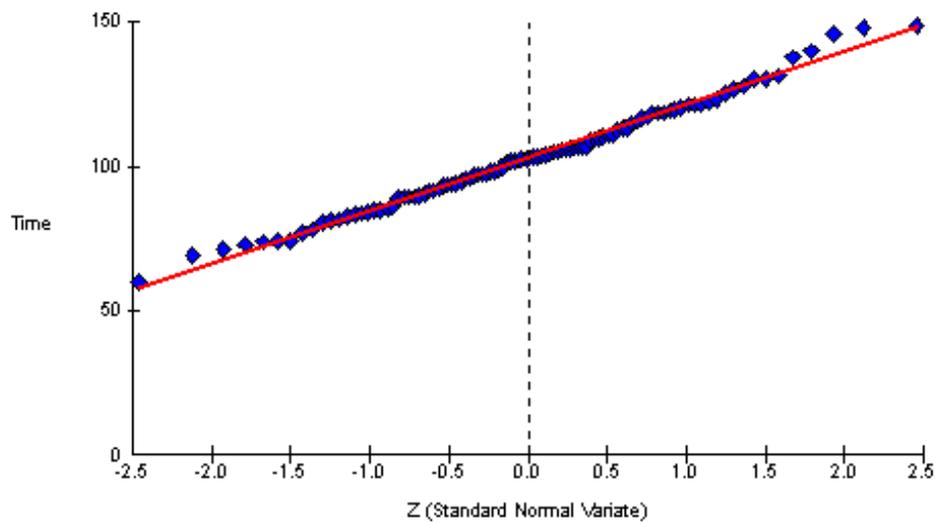


Figura 15: Papel de Probabilidade Normal contendo um conjunto de dados amostrados de uma distribuição Normal com  $\mu = 100$  e  $\sigma = 20$  (em azul) e a reta ajustada via Regressão Linear (em vermelho). Os coeficientes angular e linear estimados para a reta foram, respectivamente 18,3055 e 103,0330, indicando  $\mu = 103,0330$  e  $\sigma = 18,3055$ .

Assim, o Papel de Probabilidades Normal será o gráfico dado pelos pares ordenados  $(\Phi^{-1}(\tilde{F}(t_i)), t_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dispostos sobre uma reta de coeficiente angular  $\sigma$  e coeficiente linear  $\mu$ . Ambos coeficientes podem ser estimados a partir de um procedimento de Regressão Linear Simples sobre os valores traçados no Papel de Probabilidades.

#### 2.8.2.1.4 Papel de Probabilidades para a Distribuição LogNormal

O Papel de Probabilidades LogNormal pode ser facilmente obtido a partir o Papel de Probabilidades Normal e da observação de que, se  $T$  é uma variável aleatória que segue o Modelo LogNormal, então  $X = \ln(T)$  será uma variável aleatória que seguirá o Modelo Normal. Assim, pode-se transformar a variável aleatória  $T$  para a Normal padrão, utilizando

$$z = \frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+$$

onde, de (2.51) e (2.52), recordamos que  $\mu = E[\ln(T)]$  e  $\sigma^2 = Var[\ln(T)]$ . Assim, pode-se reescrever:

$$\ln(t) = \sigma \cdot z + \mu, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+$$

ou seja:

$$\ln(t) = \sigma \cdot \Phi^{-1}(F(t)) + \mu, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0, \quad t \in \mathfrak{R}_*^+ \quad (2.157)$$

Como no caso do Modelo Normal, o Papel de Probabilidades LogNormal será o gráfico dado pelos pares ordenados  $(\Phi^{-1}(\tilde{F}(t_i)), \ln(t_i))$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dispostos sobre uma reta de coeficiente angular  $\sigma$  e coeficiente linear  $\ln(\mu)$ . Ambos coeficientes podem ser estimados a partir de um procedimento de Regressão Linear Simples sobre os valores traçados no Papel de Probabilidades.

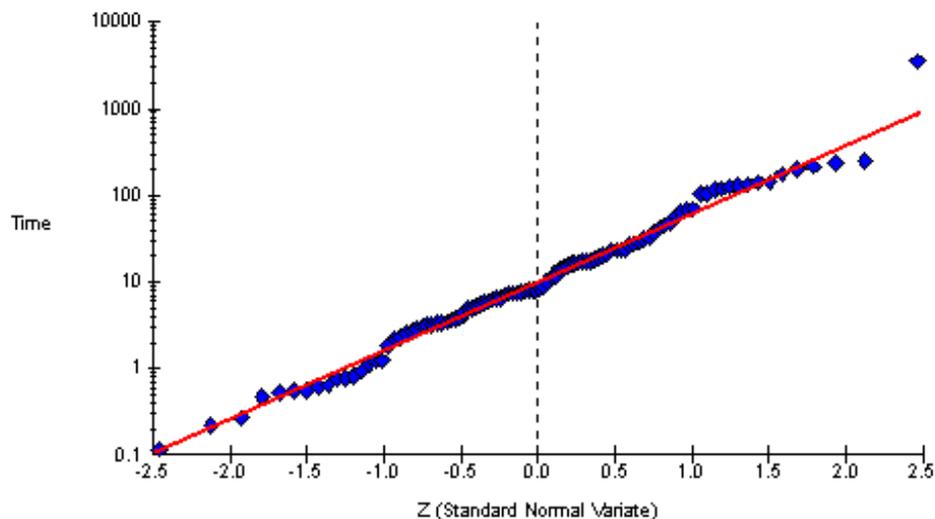


Figura 16: Papel de Probabilidade LogNormal contendo um conjunto de dados amostrados de uma distribuição LogNormal com  $\mu = 10$  e  $\sigma = 2$  (em azul) e a reta ajustada via Regressão Linear (em vermelho). Os coeficientes angular e linear estimados para a reta foram, respectivamente 1,8615 e 10,0986, indicando  $\mu = 10,0986$  e  $\sigma = 1,8615$ .

### 2.8.2.2 Box-Plot

O Box-Plot é um diagrama que divide um conjunto de dados através de seus quartis, sendo aplicável, na forma aqui descrita, a amostras completas de dados. Sua utilização facilita

a identificação de assimetrias, além de permitir a visualização de *outliers*, isto é, pontos que possuem comportamentos não similares ao apresentado pela maior parte da amostra.

Um Box-Plot aproximadamente simétrico indica que as distribuições mais indicadas para a modelagem da massa de dados são distribuições simétricas, tais como as distribuições Normal, *t* de Student e Uniforme.



Figura 17: Box-Plot de um conjunto de dados que assume distribuição LogNormal. Observe-se a existência de um outlier no extremo direito do diagrama.

Abaixo é apresentado o algoritmo para a construção deste diagrama:

- (a). Obter os valores dos quartis do conjunto de dados, isto é, valores na mesma escala do conjunto de dados - mas não necessariamente inclusos entre os dados - que dividem os dados em grupos de aproximadamente 25 % do tamanho da amostra. Uma fórmula para a obtenção de tais valores é:

$$Q_i = \frac{t_{\lceil \frac{i \cdot n}{4} \rceil} + t_{\lfloor \frac{i \cdot n}{4} \rfloor}}{2}, \quad (i \in \{1,2,3\}) \quad (2.158)$$

onde  $Q_i$  é o  $i$ -ésimo quartil e  $t_j$  é o  $j$ -ésimo valor na amostra ordenada.

- (b). A seguir, desenhar uma caixa de comprimento  $Q_3 - Q_1$ . Marcar a posição relativa de  $Q_2$  (mediana) no interior da caixa com uma linha.
- (c). Traçar duas hastes a partir dos pontos médios dos lados da caixa, cada uma com comprimento máximo de  $1,5 \cdot (Q_3 - Q_1)$ . Os pontos que não forem atingidos pelas hastes são considerados *outliers* e assinalados com marcas pontuais. Caso uma haste seja mais longa que um dado extremo, seu tamanho é ajustado para esta distância.

## CAPÍTULO 3

### 3. SISTEMAS E CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

#### 3.1 *Introdução*

No capítulo anterior foram abordados aspectos relevantes à determinação da Confiabilidade de componentes, bem como da utilidade desta informação. No entanto, tais considerações de nada adiantariam se, através de seu conhecimento, não fosse possível inferir sobre a Confiabilidade de algum sistema formado por tais componentes. O segredo da obtenção de padrões elevados de Confiabilidade é a eliminação da fase de mortalidade infantil e a extensão da vida útil de todo o sistema por um período maior que o tempo de missão especificado (Raheja, 1989). Tais metas podem ser monitoradas através de testes, mas somente podem ser incorporadas a um sistema se a Confiabilidade for inerente ao trabalho de cada engenheiro de projeto.

Há muitos procedimentos que podem ser utilizados de modo a garantir a incorporação da Confiabilidade a um produto. Tais procedimentos devem ser usados o quanto antes, preferencialmente desde os estágios de desenvolvimento do sistema, uma vez que não há substituto para um bom projeto, cuidadosamente planejado, que leve em conta os efeitos de diferentes usos em diferentes condições ambientais. A Confiabilidade de um sistema pode ser aumentada (levando a apreciáveis economias de tempo e dinheiro, e reduzindo o risco que um sistema falhe) desde que tais procedimentos sejam realizados de modo a garantir que todo o sistema (desde cada componente individual) foi protegido de abusos e condições operacionais adversas (Pullen Jr., 1986). Com este expediente podem-se minimizar flutuações estatísticas no comportamento do sistema, de modo que este se torne mais estável e se obtenha funcionamento livre de problemas causados por estresse indevido.

O senso comum diz que “um sistema nunca falha; suas partes é que falham” (Luthra, 1988). Estas falhas estão geralmente associadas com um ou mais defeitos de projeto ou de fabricação, em geral causados por processos de má qualidade, mão-de-obra não qualificada,

Controle de Qualidade inadequado, tempo de teste insuficiente, componentes de má qualidade, obsoletos ou inadequados, ou projetos mal dimensionados. Isto significa que não somente a visão microscópica (sobre os componentes) garante Qualidade ao longo do tempo, mas também a visão macroscópica (envolvendo o projeto e o ambiente produtivo) deve receber especial atenção. A partir de uma visão global do inter-relacionamento de componentes, isto é, a partir de uma visão do sistema, pode-se abordar importantes questões tais como:

- Como o *design* do sistema afeta sua Confiabilidade ?
- Quais os benefícios do uso de componentes redundantes em termos da Confiabilidade do sistema ?
- Como sistemas complexos podem ser reduzidos a combinações de sistemas mais simples ?

Para se poder responder a tais questões é necessário definir previamente o conceito de sistema e os modelos básicos de sistemas descritos na literatura.

### **3.2 Conceito de Sistema**

De forma genérica, um “sistema” é qualquer conjunto de componentes arranjados segundo um desenho específico (Ribeiro, 1995a). Elsayed (1996) associa o conceito de sistema (ou produto) a uma coleção de componentes arranjados de acordo com um desenho específico de modo a realizar funções desejadas com desempenho e Confiabilidade aceitáveis. De modo geral, nota-se que não apenas a Confiabilidade dos componentes é importante, mas também sua disposição e seu interrelacionamento. Um sistema formado por componentes altamente confiáveis *tende* a ser altamente confiável, mas o que determina o resultado final de Confiabilidade é a estrutura do sistema. Assim, da mesma forma que se pode obter bons níveis de Confiabilidade a partir de componentes “fortes”, pode-se também, a partir de componentes de menor Qualidade e modificando-se a estrutura do sistema, obter os **mesmos** níveis de Confiabilidade<sup>14</sup>.

Sistemas podem ser configurados de diversas formas, tais como:

- Série;

---

<sup>14</sup> Elsayed (1996) apresenta uma discussão sobre a natureza combinatorial da alocação da Confiabilidade para um sistema com base no arranjo existente entre seus componentes. É apresentado também um algoritmo heurístico, o TDH (*Top Down Heuristic*, devido a Baxter & Harche, 1992), destinado a determinar qual a configuração que maximize a Confiabilidade global de um sistema não complexo.

- Paralelo;
- Paralelo-Série ou Série-Paralelo;
- outras configurações complexas, tais como redes.

Uma vez que um sistema é configurado, sua Confiabilidade deve ser avaliada e comparada com um nível mínimo aceitável (Elsayed, 1996). Se a Confiabilidade observada encontrar-se abaixo do mínimo requerido, o sistema deve ser reestruturado, através de um processo contínuo, até que seja julgado satisfatório.

### **3.3 Configurações de Sistemas**

A teoria envolvida na modelagem de sistemas não é nova e é ferramenta de muitas áreas da Engenharia e da Matemática. O uso de diagramas de blocos e linhas para a representação de componentes e de suas conexões, é amplamente difundido e ensinado em cursos de graduação de Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Matemática Aplicada. Com esta ferramenta, torna-se fácil a representação de sistemas com as mais variadas configurações. Além disso, o fluxo de informações torna-se claro, podendo-se evidenciar as relações entre os componentes e compreender, por exemplo, por que um sistema com redundâncias tende a durar mais que outro sem redundâncias.

#### **3.3.1 Sistemas em Série**

Este é o modelo mais comumente usado para a avaliação da Confiabilidade de Sistemas. Assume-se que o sistema é composto por  $n$  componentes independentes, os quais devem estar todos em estado operacional simultaneamente para que se obtenha a condição operacional. O sistema falha se algum de seus componentes falhar. Por este motivo também é conhecido na literatura como **Modelo em Cadeia** ou ainda **Modelo de Primeira Falha** (*First-Fail Model*). Elsayed (1996) observa, por exemplo, que um automóvel possui muitos subsistemas conectados em série, tais como os sistemas de freios, de ignição e de direção. Qualquer falha em um destes subsistemas acarreta o funcionamento inadequado do carro (e, portanto, sua falha).

A representação gráfica mais comumente aceita para sistemas em série é a que segue, onde os blocos representam os componentes:

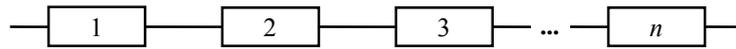


Figura 18: Representação em diagrama de blocos de um Sistema em Série.

Uma das mais importantes peculiaridades deste tipo de estrutura é o fato de fornecer razoáveis estimativas de Confiabilidade mesmo em sistemas nos quais a hipótese de independência entre componentes, ou a de arranjo estritamente em série, não pode ser totalmente aceita (Tobias & Trindade, 1995)<sup>15</sup>. Tal fato demonstra sua robustez e justifica sua extensa utilização.

### 3.3.2 Sistemas em Paralelo

Este modelo de sistema pode ser considerado como o extremo oposto de um sistema em Série. Em uma configuração em paralelo, o sistema se mantém em operação até que o último componente falhe. Em outras palavras, apenas um componente em estado operacional é condição necessária para o funcionamento de todo o sistema, motivo pelo qual tal configuração também é chamada **Sistema Redundante**. Sistemas em paralelo oferecem grandes vantagens em termos de Confiabilidade, em especial em situações em que as necessidades de baixas taxas de falha sobrepujam as preocupações com o *custo*. Como exemplo pode-se citar o caso dos computadores de um ônibus espacial (Tobias & Trindade, 1995), onde cada sistema é replicado com várias cópias de segurança, cada um contendo uma versão independente do *software* de controle.

A representação gráfica mais comumente aceita para sistemas em paralelo é a que segue, onde os blocos representam os componentes:

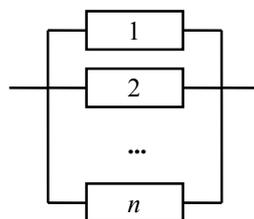


Figura 19: Representação em diagrama de blocos de um Sistema em Paralelo.

<sup>15</sup> No entanto, acarreta em redução da Confiabilidade do sistema.

### 3.3.3 Sistemas Mistos

Muitos sistemas são constituídos de uma combinação de subsistemas em série e subsistemas em paralelo (Ribeiro, 1995a). Alguns tipos especiais de sistemas mistos são dignos de menção:

#### 3.3.3.1 Sistemas Série-Paralelo

São compostos de  $m$  subsistemas em série, cada um com  $n$  componentes em paralelo.

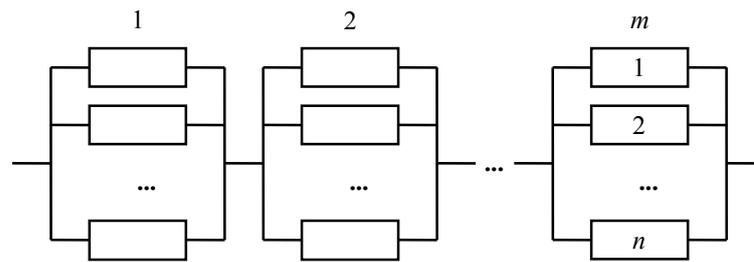


Figura 20: Sistema Série-Paralelo

#### 3.3.3.2 Sistemas Paralelo-Série

São compostos de  $m$  subsistemas em paralelo, cada um com  $n$  componentes em série.

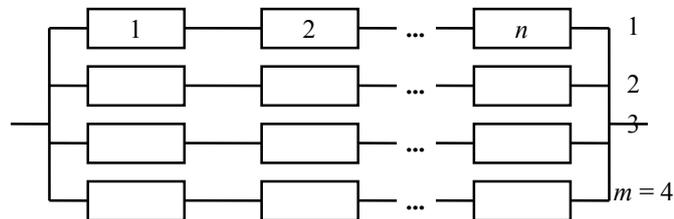


Figura 21: Sistema Paralelo-Série

#### 3.3.3.3 Sistemas Mistos-Paralelo

Sistemas Mistos-Paralelo possuem arranjos variados de seus componentes, dispostos em série ou em paralelo (Elsayed, 1996).

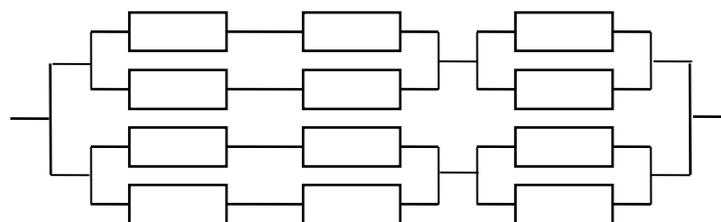


Figura 22: Exemplo de um Sistema Misto-Paralelo.

### 3.3.4 Sistemas $k$ -out-of- $n:F$ Consecutivos

Sistemas deste tipo são arranjos de  $n$  componentes nos quais o sistema somente é considerado falhado após a falha de  $k$  componentes consecutivos. Elsayed (1996) cita como exemplo um sistema de telecomunicações formado por  $n$  estações de transmissão, as quais somente podem transmitir o sinal para uma das duas estações seguintes. O sinal somente deixará de ser transmitido se duas estações consecutivas falharem. É o exemplo de um sistema  $2$ -out-of- $n:F$ .

### 3.3.5 Sistemas $k$ -out-of- $n$

Existem muitos sistemas cuja falha está associada à falha de  $k$  subsistemas em  $n$ , sem que estes sejam consecutivos. É o caso do sistema de propulsão de um avião com 4 turbinas, mas que somente necessite de duas para seu funcionamento em vôo. Outro exemplo é o de uma ponte sustentada por cabos: somente uma parte dos cabos é necessária para que a ponte suporte a carga prevista; os demais cabos são colocados por segurança (Elsayed, 1996).

Sistemas deste tipo estão largamente associados à utilização de redundâncias em componentes principais.

### 3.3.6 Sistemas Complexos

São ditos Sistemas Complexos, sistemas em que o arranjo dos componentes não pode ser descrito como uma mera combinação de subsistemas em série e subsistemas em paralelo. Tais sistemas, em geral, são mais difíceis de serem analisados e, em certas ocasiões, tendem a requerer análises muito particulares para a obtenção de estimativas de Confiabilidade.

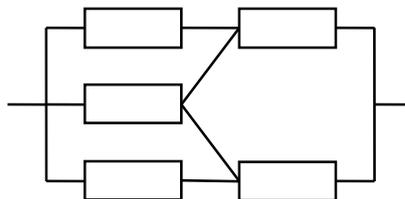


Figura 23: Exemplo de Sistema Complexo.

### 3.4 *Sistemas com Redundância de Componentes*

Em muitos sistemas, a utilização de um número maior que o necessário de certos componentes ou subsistemas muito importantes é um expediente comum para a garantia do cumprimento de suas funções. É o caso de um retroprojektor com duas lâmpadas: caso uma queime, a outra poderá ser acionada imediatamente, sem prejuízo para o usuário. Muitas outras situações podem ser utilizadas como exemplos de uso da redundância como alternativa para o aumento da Confiabilidade de um sistema. Processos contínuos, em geral, contam com linhas inteiras de equipamentos redundantes, os quais são utilizados não apenas em caso de falha, mas também durante procedimentos de manutenção preventiva. O único tipo de sistema que não permite o uso de redundância é um Sistema em Série.

Há dois tipos de redundância (Elsayed, 1996):

- **Redundância Ativa:** quando todos os componentes do sistema estão em operação simultaneamente, como por exemplo, no caso de um avião, que, mesmo necessitando de apenas duas turbinas durante o vôo, mantém todas em estado operacional. Este tipo de redundância tem uma segunda finalidade, que é a divisão do esforço sofrido por cada subsistema;
- **Redundância Inativa:** Quando os componentes redundantes apenas são ativados alternativamente aos componentes principais. São exemplos: o retroprojektor com redundância de lâmpadas, o sistema de *no-break* de uma rede de computadores e as rotas alternativas de produção em um processo contínuo.

O uso de redundâncias permite a geração de projetos mais robustos, com maior tempo de vida útil e, portanto, maior Confiabilidade. No entanto, redundâncias aumentam os custos, o tamanho e o peso dos produtos (Halpern, 1978), não podendo substituir os esforços de melhoria das equipes de projeto. Elsayed (1996) apresenta uma breve discussão a respeito dos usos e da alocação de redundância em sistemas.

### 3.5 *Estimação da Confiabilidade de Sistemas*

Um produto, em geral é um sistema constituído por um certo número de componentes. Este número pode ir de um único até um grande número de subsistemas, cada um destes

composto por muitos componentes, como no caso de um automóvel. Medir e garantir a Confiabilidade de intrincados sistemas de peças elétricas, eletrônicas e mecânicas são duas das mais árduas tarefas impostas para empresas e organizações de todo o mundo. Isto se faz necessário para que, assegurando elevados padrões de Qualidade ao longo do tempo, estas organizações mantenham uma boa imagem perante o mercado. Na indústria automotiva americana, a Confiabilidade é um dos principais fatores considerados como medida da satisfação dos clientes (Allmen & Lu, 1990).

Como auxílio na realização deste objetivo, as empresas têm o expediente de testar amostras de seus produtos, de modo a estimar sua Confiabilidade e, então, definir prazos de garantia. Ocorre que testar sistemas inteiros é demasiadamente oneroso. Em alguns casos, quando as exigências de Confiabilidade são altas, muitas empresas optam pela realização de **Testes de *Burn-In***, de modo a evitar que seus clientes tenham acesso aos produtos ainda em fase de Mortalidade Infantil, quando o risco de falha é muito alto (Guitar, 1989). Isto equivale a testar **todas** as unidades produzidas durante um certo número de horas, levando a altos custos e, em certas ocasiões, não garantindo que os níveis desejados de Confiabilidade sejam mantidos ao longo do tempo. Este procedimento padrão, é, na verdade, insuficiente em muitos casos, no sentido de retirar todas as falhas referentes à fase de mortalidade infantil. Mesmo com níveis adequados de estresse e de duração dos testes, podem haver outras causas de falha não afetadas pelos testes. Componentes eletrônicos, por exemplo, têm poucos modos de falha, pois são fruto de configurações e processos padronizados; componentes mecânicos, no entanto, têm como norma a utilização de projetos específicos, não padronizados, resultando em um enorme número de variáveis a ser considerado em testes de estresse, e que mudam de acordo com o projeto sob análise. Neste último caso, testes especiais são requeridos (Raheja, 1989).

Em contrapartida, no ciclo de desenvolvimento de um sistema, a utilização de predições de Confiabilidade dá uma estimativa da taxa de sucesso de seu projeto, considerando-se os estresses térmicos, elétricos e ambientais sofridos pelos componentes deste sistema. Por exemplo, o projeto de um sistema elétrico que leva em conta predições de Confiabilidade tenderá a resultar em um *design* bem dimensionado, com uma margem de erro suficiente de modo que as tolerâncias a flutuações de corrente, aquecimento e envelhecimento não serão causas de falha. A este ‘projeto com 100 % de Confiabilidade’, devem-se aliar processos de manufatura e garantia de Qualidade ‘com Confiabilidade 100 %’, isto é, adequados e aptos a eliminar a possibilidade de que um consumidor receba um produto com Qualidade inadequada (Marsh & Jacobs, 1989). Assim, uma alternativa mais econômica de se estimar e de se *garantir*

a Confiabilidade de sistemas inteiros pode ser utilizada, desde que incorporada desde as fases iniciais do projeto de um produto. Na incorporação da Confiabilidade, os projetos devem levar em conta uma imensa gama de tipos de usuários, que submetem os produtos a níveis de estresse diferenciados. A Confiabilidade incorporada ao produto deve ser tal que, em seu nível mais baixo, ainda atenda às expectativas de uso dos consumidores mais severos (Allmen & Lu, 1990).

Modelos são necessários para a descrição de equipamentos complexos. Tais modelos são fórmulas associadas à operação do equipamento, listando todos os elementos necessários para um desempenho satisfatório e descrevendo as interconexões significantes entre suas partes. Este expediente é realizado subdividindo um sistema em suas partes funcionais básicas. Estas partes funcionais fornecem a estrutura matemática necessária para a análise do sistema, bem como a base para, a partir das informações de Confiabilidade de cada subsistema, a estimação da Confiabilidade do equipamento inteiro. A modelagem representa uma caracterização de como cada elemento atua em relação a componentes semelhantes e como influencia o sistema. Modelos matemáticos fornecem o suporte necessário para a compreensão e resolução de problemas industriais (Spingarn, 1986b).

A Confiabilidade de sistemas formados por muitos componentes é comumente avaliada através da decomposição do sistema em subsistemas menores ou em componentes. Se sua estrutura é simples, pode-se fazer uso de métodos analíticos simplificados, tais como o dos *tie-sets* ou outros métodos baseados em probabilidade condicional. Devido à diversidade e complexidade das configurações, são comuns simplificações, tais como a introdução da hipótese de independência dos tempos de falha dos subsistemas ou, até mesmo, a consideração de componentes com tempos de falha identicamente distribuídos. Quando os componentes seguem distribuições idênticas, a estimação da Confiabilidade é classicamente considerada como uma tarefa simples, principalmente se adicionada a hipótese de independência entre os mesmos. Entretanto, quando os subsistemas (ou componentes) seguem distribuições de falha diferentes, a obtenção da solução requer grandes quantidades de manipulações algébricas e cálculos (Kim & Fard, 1993). No caso de estruturas maiores e mais complexas, a obtenção de estimativas de Confiabilidade a partir de métodos analíticos torna-se mais difícil, podendo-se chegar à impossibilidade de obtenção de uma solução numérica direta.

Alternativamente, a disponibilização da computação eletrônica digital aos mais diversos segmentos da sociedade, ocorrida a partir do processo de miniaturização dos computadores ocorrida na década de 80, tornou passíveis de utilização diversas técnicas de análise, tais como

as de simulação probabilística. Tais técnicas, antes consideradas de uso exclusivo de pesquisadores e estudiosos, e limitadas às universidades e centros de pesquisa, tornaram-se de uso comum nos ambientes produtivos e rapidamente ganharam espaço como uma abordagem mais fácil e prática na modelagem de sistemas complexos. Surgiram, então, ambientes de programação voltados à realização de simulações probabilísticas (também chamadas ‘Simulações de Monte-Carlo’) nos quais, em lugar das complexas manipulações algébricas, o desenvolvimento de modelos computacionais eficazes e eficientes tornou-se o maior consumidor de esforços. Apesar da qualidade das estimativas encontradas estar sujeita a pequenas flutuações, a troca foi ainda vantajosa, permitindo uma descrição mais detalhada do comportamento de todo o sistema (Kim & Fard, 1992).

### **3.5.1 Confiabilidade de Sistemas em Série**

A estimação da Confiabilidade para esta configuração de sistema pode ser descrita de diversas formas. A necessidade de que todos os componentes estejam operacionais é um forte fator na determinação do comportamento de falhas do sistema, levando ao seguinte resultado prático:

**“A Confiabilidade de um sistema em série é sempre menor ou igual  
à Confiabilidade de seu componente mais fraco”.**

É interessante ressaltar o significado prático da afirmação acima: Em uma corrente, cada elo contribui para sua integridade física. Quando o elo mais fraco se rompe, a integridade da corrente é perdida. Em um sistema em série, todos os componentes devem estar em condições de funcionamento para garantir o estado operacional do sistema. Traçando-se uma analogia com o exemplo da corrente, é intuitivo pensar que o componente mais “fraco”, ou seja, de menor Confiabilidade, é quem ditará a Confiabilidade do sistema. Conseqüentemente, poderão ocorrer situações em que não será este componente mais fraco o causador da pane no sistema. Assim sendo, a Confiabilidade do sistema nunca poderá exceder a Confiabilidade do componente mais fraco.

Formalmente, a estimativa da Confiabilidade para esta configuração de sistema pode ser descrita através do teorema a seguir:

**Teorema 3.1:** Se  $n$  componentes forem montados em um sistema em série e assumindo-se que funcionem independentemente e que o  $i$ -ésimo componente possua Confiabilidade  $R_i(t)$  no instante  $t$ , então a Confiabilidade de todo o sistema,  $R$ , será dada por

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \dots R_n(t). \quad (3.1)$$

Tal resultado<sup>16</sup> pode ser ainda enunciado sob formas alternativas (Tobias & Trindade, 1995), em termos da função de distribuição acumulada dos tempos até a falha,  $F$ ,

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(t)], \quad (3.2)$$

ou, ainda, em termos da taxa de risco,  $h$ , do sistema:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t). \quad (3.3)$$

A partir de manipulações algébricas, pode-se verificar a veracidade do resultado prático descrito anteriormente.

---

<sup>16</sup> Demonstração (adaptada de Meyer, 1995):

Para o sistema encontrar-se em funcionamento, é necessário que todos os componentes estejam em estado operacional. Assim, indicando-se por

$T$ : variável aleatória associada a duração do sistema,

$T_i$ : variável aleatória associada a duração do  $i$ -ésimo componente ( $1 \leq i \leq n$ ),

a probabilidade de que o sistema continue operacional até um instante de tempo  $t$  é dada por

$$P(T \geq t) = P((T_1 \geq t) \wedge (T_2 \geq t) \wedge \dots \wedge (T_n \geq t)).$$

Pela hipótese de independência de funcionamento dos componentes tem-se que

$$P(T \geq t) = P(T_1 \geq t) \cdot P(T_2 \geq t) \dots P(T_n \geq t).$$

Mas  $P(T \geq t) = R(t)$  e  $P(T_i \geq t) = R_i(t)$ , que são, respectivamente, as confiabilidades do sistema e do  $i$ -ésimo componente no instante  $t$ . Assim, a expressão acima pode ser reescrita como

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \dots R_n(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t),$$

conforme enunciado.

### 3.5.2 Confiabilidade de Sistemas em Paralelo

A estimativa da Confiabilidade para esta configuração de sistema pode ser descrita através do teorema abaixo:

**Teorema 3.2:** Se  $n$  componentes forem montados em um sistema em paralelo e assumindo-se que funcionem independentemente e que o  $i$ -ésimo componente possua confiabilidade  $R_i(t)$  no instante  $t$ , então a Confiabilidade de todo o sistema,  $R$ , será dada por

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]. \quad (3.4)$$

Novamente, tal resultado<sup>17</sup> pode ser ainda enunciado sob formas alternativas (Tobias & Trindade, 1995), em termos da função de distribuição acumulada dos tempos até a falha,  $F$ ,

$$F(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t). \quad (3.5)$$

Não há equivalente para a propriedade aditiva das taxas de risco de sistemas em série. De fato, a taxa de falha do sistema é menor que a menor taxa de falha dentre os componentes. Uma forma alternativa de enunciar tal resultado é a que segue:

---

<sup>17</sup> Demonstração (adaptada de Meyer, 1995):

Para o sistema falhar, é necessário que todos os componentes falhem. Assim, indicando-se por

$T$ : variável aleatória associada a duração do sistema,

$T_i$ : variável aleatória associada a duração do  $i$ -ésimo componente ( $1 \leq i \leq n$ ),

a probabilidade de que o sistema falhe em um instante de tempo  $t$  é dada por

$$P(T \leq t) = P((T_1 \leq t) \wedge (T_2 \leq t) \wedge \dots \wedge (T_n \leq t))$$

Pela hipótese de independência de funcionamento dos componentes tem-se que

$$P(T \leq t) = P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) \dots P(T_n \leq t)$$

mas  $P(T \leq t) = F(t) = 1 - R(t)$  e  $P(T_i \leq t) = F_i(t) = 1 - R_i(t)$ , que são, respectivamente, as probabilidades acumuladas de falha sistema e do  $i$ -ésimo componente no instante  $t$ . Assim, a expressão acima pode ser reescrita como

$$1 - R(t) = (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \dots (1 - R_n(t)) = \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)),$$

ou

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)),$$

conforme enunciado.

**“A Confiabilidade de um sistema em paralelo é sempre maior ou igual à Confiabilidade de seu componente mais forte”.**

Esta observação pode ser derivada diretamente da expressão em termos das confiabilidades dos componentes anteriormente descrita. Como feito no caso de sistemas em série, restringiremos a ressaltar o significado prático de tal afirmação: Como já visto, em um sistema em paralelo, basta que um dos componentes funcione para garantir o estado operacional do sistema. Assim, é intuitivo pensar que o componente mais “forte”, ou seja, de maior confiabilidade é quem ditará a Confiabilidade do sistema. Ainda assim, poderão ocorrer situações em que este componente mais forte falhará, mas o sistema permanecerá operacional devido a outros componentes mais fracos, ainda operacionais. A Confiabilidade do sistema nunca poderá, então, ser menor que a Confiabilidade de seu componente mais forte.

Algumas considerações sobre a redundância de componentes devem ser feitas. Apesar dos grandes benefícios em termos de Confiabilidade, a utilização de componentes redundantes envolve a consideração de outros três aspectos cruciais para o projeto do sistema, quais sejam: **peso**, **tamanho** e **custo**. Além disso, outro aspecto deve ser considerado (adaptado de Halpern, 1978):

“(…) No caso de um sistema elétrico com redundâncias, por exemplo, se um componente falha ‘por queima’ não ocorre interação com a parte boa restante do sistema e a redundância torna-se eficaz. No entanto, caso a falha origine um curto circuito, nenhum benefício do uso de redundância será sentido. Tal aspecto é de fundamental importância na consideração do uso de componentes redundantes no projeto de um sistema.”

### 3.5.3 Confiabilidade de Sistemas Mistos

São apresentados a seguir os resultados para a estimação da Confiabilidade de sistemas mistos. Por se tratarem de aplicações conjugadas dos teoremas 3.1 e 3.2, as demonstrações formais serão omitidas.

#### 3.5.3.1 Sistemas Série-Paralelo

Supondo que o  $k$ -ésimo subsistema paralelo tenha Confiabilidade dada por

$$R_{[k]}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_{i,[k]}(t)), \quad (1 \leq k \leq m),$$

onde  $R_{i,[k]}$  é a Confiabilidade do  $i$ -ésimo componente deste subsistema, pode-se estimar a Confiabilidade de todo o sistema,  $R$ , pela expressão (3.1):

$$R(t) = \prod_{k=1}^m R_{[k]}(t),$$

ou, por mais precisamente,

$$R(t) = \prod_{k=1}^m \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_{i,[k]}(t)) \right) \quad (3.6)$$

Em particular, se considerarmos todos os componentes com igual Confiabilidade  $r(t)$ , a Confiabilidade resultante para o sistema Série-Paralelo será

$$R(t) = (1 - (1 - r(t))^n)^m. \quad (3.7)$$

### 3.5.3.2 Sistemas Paralelo-Série

Supondo que o  $k$ -ésimo subsistema série tenha Confiabilidade dada por

$$R_{[k]}(t) = \prod_{i=1}^n R_{i,[k]}(t), \quad (1 \leq k \leq m),$$

onde  $R_{i,[k]}$  é a Confiabilidade do  $i$ -ésimo componente deste subsistema, pode-se estimar a Confiabilidade de todo o sistema,  $R$ , pela expressão (3.4):

$$R(t) = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - R_{[k]}(t)),$$

ou, por mais precisamente,

$$R(t) = 1 - \prod_{k=1}^m \left( 1 - \prod_{i=1}^n R_{i,[k]}(t) \right) \quad (3.8)$$

Em particular, se considerarmos todos os componentes com igual Confiabilidade  $r(t)$ , a Confiabilidade resultante para o sistema Paralelo-Série será

$$R(t) = 1 - (1 - r^n(t))^m. \quad (3.9)$$

### 3.5.4 Confiabilidade de Sistemas $k$ -out-of- $n:F$ Consecutivos

Para a estimação da Confiabilidade deste tipo de sistema, deve-se primeiramente determinar, através de análise combinatória, todos os possíveis modos de falha do sistema (isto

é, combinações de componentes consecutivos cujas falhas provoquem a falha do sistema). A Confiabilidade  $R$  do sistema será então dada pela probabilidade de não ocorrência de qualquer destes modos de falha. Supondo um sistema  $k$ -out-of- $n:F$ , tem-se:

$$R(t) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-k+1} \left(\bigcap_{r=0}^{k-1} \bar{x}_{i+r}(t)\right)\right) \quad (3.10)$$

onde:  $\bar{x}_j$  é o evento “falha do componente  $j$ ”.

Para componentes identicamente distribuídos pode-se mostrar (Elsayed, 1996) que a Confiabilidade de um sistema  $k$ -out-of- $n:F$  será dada recursivamente por:

$$R(p, k, n) = \sum_{y=1}^{n-k+1} \sum_{m=y+1}^{y+k-1} R(p, k, n-m) \cdot p^y \cdot (1-p)^{m-y} + p^{n-k+1} \quad (3.11)$$

$$R(p, k, j) = \begin{cases} 1 & 0 \leq j < k \\ 0 & j < 0 \end{cases}$$

onde:

$p$  : é a probabilidade de um componente estar operacional em um dado instante  $t$ .

Em particular, para um sistema  $2$ -out-of- $n:F$ , Elsayed (1996) cita a solução apresentada por Chiang & Niu (1981), dada por:

$$R(p, 2, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} P(\{\text{sistema estar operacional} / j \text{ componentes falharam}\}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-j+1}{j} \cdot (1-p)^j \cdot p^{n-j}$$

### 3.5.5 Confiabilidade de Sistemas $k$ -out-of- $n$

Para sistemas cujas falhas dependem da ocorrência simultânea da falha de  $k$  subsistemas em  $n$ , a Confiabilidade pode ser calculada através de análise combinatória. A formulação aqui apresentada pressupõe componentes com distribuições de falha idênticas. Denominando  $p$  a probabilidade de um subsistema estar em estado operacional em um determinado instante de tempo  $t$ , a probabilidade de ocorrência de exatamente  $r$  unidades operacionais é dada pela distribuição binomial:

$$P(r, n, p) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \quad (r = 0..n)$$

O sistema é considerado operacional se o número de unidades operacionais é maior ou igual a  $k$ . Assim,

$$R(k, n, p) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \quad (3.12)$$

### 3.5.6 Confiabilidade de Sistemas Complexos

Para o caso de sistemas complexos, não há expressões previamente definidas para a estimação da Confiabilidade. Para este tipo de sistemas, mais do que nunca, faz-se necessário o uso de técnicas mais apuradas de Análise de Sistemas, tais como as vistas na Teoria de Sistemas Digitais. Exemplos de métodos comumente utilizados no cálculo da Confiabilidade deste tipo de sistemas são<sup>18</sup>: *Cut-Sets*, *Tie-Sets*, Decomposição e Tabela Booleana. A não existência de um padrão predeterminado para o caso de sistemas complexos dificulta a sistematização das análises, principalmente sob o ponto de vista de aplicações computacionais.

### 3.5.7 Confiabilidade de Sistemas Reparados - Manutenção

Na prática diária, muitas vezes, sistemas que falham não são inteiramente substituídos por novos. Se um sistema pode ter sua vida estendida por um período adicional a um custo menor que o de um sistema novo, então não há porque incorrer em gastos maiores. A manutenção periódica de equipamentos ou de produtos pode, seletivamente, substituir partes que apresentem taxa de falha crescente (evitando propriamente as falhas) ou que tenham se tornado obsoletas. Com a substituição de um subsistema, formar-se-á um **novo sistema**, cuja Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade dependem do conjunto composto pelo sistema velho acrescido das novas partes. Este tipo de avaliação requer diversos cuidados especiais sobre os parâmetros utilizados (Reiche, 1988):

1. a tendência das taxas de falha dos componentes remanescentes deve ser recalculada e re-analisada, levando-se em conta apenas a porção restante de sua vida útil. Deste modo, estar-

---

<sup>18</sup> Por serem aplicáveis a qualquer configuração de sistema, estes métodos serão abordados em uma seção própria.

- se-á levando em conta o desgaste (e, conseqüentemente, a redução na Confiabilidade) provocado pela utilização de tais componentes;
2. deve-se replanejar a política de manutenção dos componentes remanescentes em função da nova vida operacional pretendida para o sistema. O número de horas necessárias para realizar a manutenção do equipamento deve ser acompanhado ao longo do tempo desde o início de sua utilização, de modo a se conhecer esta tendência para os períodos subseqüentes. Dificuldades de suporte logístico devem ser listadas e analisadas;
  3. devem ser identificados os componentes remanescentes com altas taxas de falha, se existirem, para possível substituição posterior;
  4. a Confiabilidade e a Manutenibilidade previstas para as novas partes devem ser conhecidas;
  5. de modo a se obter uma previsão da tendência global de comportamento do novo sistema, devem-se analisar conjuntamente as distribuições de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade dos componentes novos e antigos;
  6. dados de Confiabilidade, Disponibilidade e Manutenibilidade devem ser utilizados para avaliar o impacto, em termos de custos, da manutenção deste novo sistema;

Todas as informações devem ser armazenadas em um sistema de informações de modo a facilitar a visualização da tendência dos dados de Confiabilidade, Disponibilidade e Manutenibilidade. Isto porque, mesmo peças novas podem apresentar sinais de desgaste e obsolescência, por exemplo, devido ao tempo de espera, na prateleira. Uma política de manutenções deve levar em conta também estas informações.

Para lançar mão das informações advindas das análises de Confiabilidade e programar uma política de substituições em seus equipamentos, uma organização deve ter informações sobre os componentes usados em suas máquinas. O uso de distribuições condicionais é um expediente indicado para representar os subsistemas que serão mantidos, permitindo incorporar níveis de Confiabilidade menores para os componentes já usados. Nelson (1982) apresenta diversas distribuições condicionais, que podem ser utilizadas para incorporar a fadiga provocada pela ação temporal. Alternativamente pode-se utilizar modelos de degradação como ponderadores. Reiche (1988) comenta diversas dificuldades dos sistemas de informações vigentes (tais como o acesso à informação de Confiabilidade dos componentes comumente usados em ambientes industriais) e cita a existência de um documento, denominado TD-85-3 *Reliability and Maintainability Data for Industrial Parts*, no qual, além de um banco de

informações de Confiabilidade e Manutenibilidade, também é encontrada uma descrição de quais informações seriam desejáveis para um sistema deste tipo:

- distribuição de falhas;
- nome do item;
- descrição do item;
- tempos de reparo;
- modos de falha;
- fatores que afetam a Confiabilidade;
- taxas de falha;
- etc.

A decisão entre a utilização de reparos ou a troca de sistemas é principalmente uma questão de análise de dados, bom senso e economia. No entanto, optando-se pela manutenção do equipamento existente, uma série de análises tornam-se necessárias e nelas deve ser incorporado o desgaste das peças remanescentes<sup>19</sup>. Assim, pode-se, através de dados de Confiabilidade, identificar e prever a necessidade e a viabilidade de novas manutenções.

### **3.6 Métodos para Estimação da Confiabilidade de Sistemas**

Os métodos aqui apresentados são classicamente utilizados para o tratamento e a modelagem da Confiabilidade de sistemas complexos. No entanto, sob o ponto de vista computacional, tais métodos podem ser aplicados em sistemas genéricos. Como consequência, os resultados apresentados na seção anterior são transformados em casos particulares da aplicação dos métodos a seguir.

Além dos métodos aqui apresentados, existem ainda muitos outros (tais como Método da Redução, de *Path-Tracing*, e Algoritmos Fatoriais), que são combinações destes ou simples

---

<sup>19</sup> Distribuições condicionais de probabilidade de falha são adequadas para a modelagem deste tipo de situação. Nelson (1982) apresenta alguns resultados a este respeito, bem como a formulação das principais distribuições condicionais para uso em Confiabilidade.

aplicações de expedientes comumente utilizados na Teoria de Probabilidades. Por este motivo, tais métodos não serão descritos em detalhes, podendo ser encontrados em Elsayed (1996).

### 3.6.1 O Método da Decomposição

Este método analítico consiste em, recursivamente, decompor o sistema através de probabilidades condicionais. Inicialmente, são determinados componentes-chave, que dividam o sistema em subsistemas mais simples (Elsayed, 1996). A seguir, a probabilidade de operação do sistema é decomposta em probabilidades condicionais, determinadas pelas probabilidades de operação e de não-operação destes componentes-chave.

Formalmente, este método pode ser expresso da seguinte forma:

Seja  $X$  um componente-chave selecionado, cuja Confiabilidade em um certo instante  $t$  seja dada por  $R_X(t)$ . Definindo-se os estados

$X$  : o componente está operacional; e

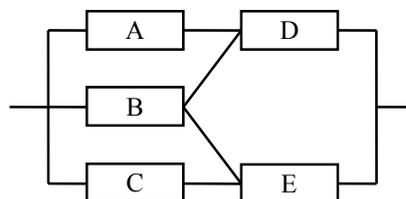
$\bar{X}$  : o componente não está operacional (estado de falha),

a Confiabilidade do sistema,  $R$ , neste mesmo instante  $t$  será dada por

$$R(t) = R(t / X) \cdot R_X(t) + R(t / \bar{X}) \cdot (1 - R_X(t)) \quad (3.13)$$

Para elucidar a forma de aplicação deste método, é apresentado o seguinte exemplo (adaptado de Ribeiro, 1995a):

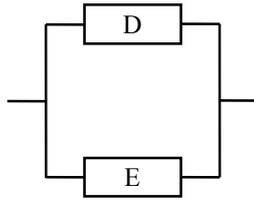
Seja o sistema dado pelo diagrama abaixo:



onde a Confiabilidade do  $i$ -ésimo componente é dada por  $R_i$ , ( $i \in \{A, B, C, D, E\}$ ).

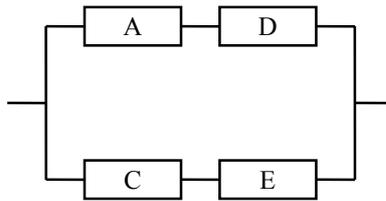
O componente B é identificado como componente chave, uma vez que sua presença determina a configuração de sistema complexo.

- Sabendo-se que B está operacional, a Confiabilidade do sistema, em um dado instante  $t$ , será dada pelo subsistema:



isto é,  $R(t / B) = R_D(t) + R_E(t) - R_D(t) \cdot R_E(t)$ .

- Sabendo-se que B não está operacional, a Confiabilidade do sistema, em um dado instante  $t$ , será dada pelo subsistema:



isto é,  $R(t / \bar{B}) = R_A(t) \cdot R_D(t) + R_C(t) \cdot R_E(t) - R_A(t) \cdot R_D(t) \cdot R_C(t) \cdot R_E(t)$ .

- A Confiabilidade do sistema,  $R$ , em um dado instante  $t$ , será dada por (3.13):

$$R(t) = R(t / B) \cdot R_B(t) + R(t / \bar{B}) \cdot (1 - R_B(t)).$$

Um engenheiro experiente deve ser capaz de identificar componentes-chave de um sistema qualquer. No entanto, mesmo que um componente seja impropriamente considerado como chave, ainda assim é possível utilizar este método para estimar corretamente a Confiabilidade do sistema (Elsayed, 1996).

### 3.6.2 O Método de Determinação de *Tie-Sets*

Um *Tie-Set* pode ser definido como “um conjunto de componentes que estabelecem um caminho que assegura a operação do sistema” (Ribeiro, 1995a), ou ainda como “um caminho completo através do diagrama de blocos que representa o sistema” (Elsayed, 1996). O termo *Tie-Set* define, então, um caminho **mínimo** que assegura o funcionamento do sistema. O presente método baseia-se no fato de que a Confiabilidade do sistema é dada pela probabilidade de que pelo menos um *Tie-Set* esteja operacional.

Formalmente, pode-se descrever este método como:

Seja um sistema onde são identificados  $k$  *Tie-Sets*. Indicando-se por  $T_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) a duração do  $i$ -ésimo *Tie-Set*, a Confiabilidade do sistema,  $R$ , em um dado tempo  $t$  será dada por

$$R(t) = P((T_1 \geq t) \vee (T_2 \geq t) \vee \dots \vee (T_k \geq t)). \quad (3.14)$$

Para o exemplo da seção anterior, ter-se-ia:

*Tie-Sets*:  $T_1$ : AD,  $T_2$ : BD,  $T_3$ : BE,  $T_4$ : CE.

A Confiabilidade do sistema seria dada por

$$R(t) = P((T_1 \geq t) \vee (T_2 \geq t) \vee (T_3 \geq t) \vee (T_4 \geq t))$$

que, após transformações algébricas resultaria em:

$$\begin{aligned} R(t) = & R_{\langle 1 \rangle}(t) + R_{\langle 2 \rangle}(t) + R_{\langle 3 \rangle}(t) + R_{\langle 4 \rangle}(t) - \\ & - R_{\langle 12 \rangle}(t) - R_{\langle 13 \rangle}(t) - R_{\langle 14 \rangle}(t) - R_{\langle 23 \rangle}(t) - R_{\langle 24 \rangle}(t) - R_{\langle 34 \rangle}(t) + \\ & + R_{\langle 123 \rangle}(t) + R_{\langle 124 \rangle}(t) + R_{\langle 134 \rangle}(t) + R_{\langle 234 \rangle}(t) - \\ & - R_{\langle 1234 \rangle}(t) \end{aligned}$$

onde  $R_{\langle I \rangle}(t)$  indica a Confiabilidade associada ao conjunto de *Tie-Sets*  $I$ .

### 3.6.3 O Método de Determinação de *Cut-Sets*

Um *Cut-Set* é definido como “um conjunto de componentes que, caso removidos do sistema, interrompem sua operação” (adaptado de Ribeiro, 1995a). O método de Determinação de *Cut-Sets* baseia-se no fato de que a Probabilidade de Falha do sistema é dada pela probabilidade de que pelo menos um *Cut-Set* ocorra.

Formalmente, pode-se descrever este método como:

Seja um sistema onde são identificados  $k$  *Cut-Sets*. Indicando-se por  $C_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) a duração do  $i$ -ésimo *Cut-Set*, a Confiabilidade do sistema,  $R$ , em um dado tempo  $t$  será dada por

$$R(t) = 1 - P((C_1 \geq t) \vee (C_2 \geq t) \vee \dots \vee (C_k \geq t)). \quad (3.15)$$

Para o exemplo da seção anterior, ter-se-ia:

*Cut-Sets*:  $C_1$ : ABC,  $C_2$ : ABE,  $C_3$ : BCD,  $C_4$ : DE.

A Confiabilidade do sistema seria dada por

$$R(t) = 1 - P((C_1 \geq t) \vee (C_2 \geq t) \vee (C_3 \geq t) \vee (C_4 \geq t))$$

que, após transformações algébricas resultaria na mesma resposta dada pelos métodos anteriores.

### 3.6.4 O Método da Tabela Booleana

Dentre os métodos analíticos, este é o mais indicado para a aplicação computacional. Baseia-se no Método do Espaço Amostral, que consiste em determinar todos os possíveis eventos associados a combinações de estados operacionais de componentes e, então, estimar a Confiabilidade do sistema para todos os eventos nos quais o sistema se encontra operacional. O Método da Tabela Booleana é um procedimento exaustivo que examina todas as possibilidades de operação (ou não) do sistema. A indicação das  $k$  possibilidades é realizada através de um método dicotômico no qual cada componente é considerado operacional (1) ou não operacional (0).

A Confiabilidade de cada evento é estimada pelo produto das Confiabilidades ou Probabilidades Acumuladas de Falha de cada componente, dependendo do estado operacional dos componentes:

- ◇ Para componentes operacionais utiliza-se a Confiabilidade;
- ◇ Para componentes não operacionais utiliza-se a Probabilidade Acumulada de Falha.

Este procedimento pressupõe que todos os componentes tenham comportamentos de falha independentes entre si e ao longo do tempo (Elsayed, 1996). A configuração do sistema é indicada por uma variável binária adicional,  $S$ , que é associada a seu estado operacional.

A Confiabilidade do sistema,  $R$ , em um dado instante  $t$  é dada pela soma das confiabilidades em cada possibilidade ( $i$ ) em que o sistema se encontre operacional (indicadas por  $S_i = 1$ ):

$$R(t) = \sum_{i=1}^k S_{[i]} \cdot R_{[i]}(t) \quad (3.16)$$

Para o exemplo anterior, a tabela booleana gerada seria (Quadro 3):

$i$	A	B	C	D	E	$S_{ i }$	Confiabilidade $R_{ i }(t)$
1	1	1	1	1	1	1	$R_A(t). R_B(t). R_C(t). R_D(t). R_E(t)$
2	1	1	1	1	0	1	$R_A(t). R_B(t). R_C(t). R_D(t). (1-R_E(t))$
3	1	1	1	0	1	1	$R_A(t). R_B(t). R_C(t). (1-R_D(t)). R_E(t)$
4	1	1	1	0	0	0	-
5	1	1	0	1	1	1	$R_A(t). R_B(t). (1-R_C(t)). R_D(t). R_E(t)$
6	1	1	0	1	0	1	$R_A(t). R_B(t). (1-R_C(t)). R_D(t). (1-R_E(t))$
7	1	1	0	0	1	1	$R_A(t). R_B(t). (1-R_C(t)). (1-R_D(t)). R_E(t)$
8	1	1	0	0	0	0	-
9	1	0	1	1	1	1	$R_A(t). (1-R_B(t)). R_C(t). R_D(t). R_E(t)$
10	1	0	1	1	0	1	$R_A(t). (1-R_B(t)). R_C(t). R_D(t). (1-R_E(t))$
11	1	0	1	0	1	1	$R_A(t). (1-R_B(t)). R_C(t). (1-R_D(t)). R_E(t)$
12	1	0	1	0	0	0	-
13	1	0	0	1	1	1	$R_A(t). (1-R_B(t)). (1-R_C(t)). R_D(t). R_E(t)$
14	1	0	0	1	0	1	$R_A(t). (1-R_B(t)). (1-R_C(t)). R_D(t). (1-R_E(t))$
15	1	0	0	0	1	0	-
16	1	0	0	0	0	0	-
17	0	1	1	1	1	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). R_C(t). R_D(t). R_E(t)$
18	0	1	1	1	0	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). R_C(t). R_D(t). (1-R_E(t))$
19	0	1	1	0	1	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). R_C(t). (1-R_D(t)). R_E(t)$
20	0	1	1	0	0	0	-
21	0	1	0	1	1	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). (1-R_C(t)). R_D(t). R_E(t)$
22	0	1	0	1	0	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). (1-R_C(t)). R_D(t). (1-R_E(t))$
23	0	1	0	0	1	1	$(1-R_A(t)). R_B(t). (1-R_C(t)). (1-R_D(t)). R_E(t)$
24	0	1	0	0	0	0	-
25	0	0	1	1	1	1	$(1-R_A(t)). (1-R_B(t)). R_C(t). R_D(t). R_E(t)$
26	0	0	1	1	0	0	-
27	0	0	1	0	1	1	$(1-R_A(t)). (1-R_B(t)). R_C(t). (1-R_D(t)). R_E(t)$
28	0	0	1	0	0	0	-
29	0	0	0	1	1	0	-
30	0	0	0	1	0	0	-
31	0	0	0	0	1	0	-
32	0	0	0	0	0	0	-

Quadro 3: Descrição da memória de cálculo do exemplo pelo método da Tabela Booleana.

Enfim, a Confiabilidade do sistema seria a soma das confiabilidades dadas na última coluna<sup>20</sup>.

### 3.6.5 Simulação via Método de Monte Carlo

Simulação é a tentativa de reprodução do mundo real através de um modelo a partir de um conjunto de hipóteses (Ribeiro, 1995a). A idéia de se construir modelos de simulação é muito antiga, passando por maquetes, para a construção de edificações, bem como por galhos e pedras, representando exércitos e obstáculos em simulações de combate (Dachs, 1988). Com

<sup>20</sup> Observe-se que o número de linhas na tabela é dado por  $2^{\#\text{componentes}}$ , o que dificulta o uso de tal expediente para um número grande de componentes.

o aparecimento do computador eletrônico digital, tornou-se possível a criação de modelos de simulação para situações mais complexas, tais como mecanismos de estresse ou fadiga de componentes mecânicos e eletrônicos, ou, ainda, variações cambiais de moeda. A partir da popularização desta importante ferramenta, tornou-se acessível, a engenheiros e técnicos, a predição de comportamentos de diversas ordens de sistemas.

Genericamente falando, um procedimento de simulação via Método de Monte Carlo envolve a geração de diversos conjuntos de valores de variáveis aleatórias (associados a distribuições de probabilidade supostamente conhecidas) e produz, ao final do processo, um conjunto de valores para as variáveis aleatórias de resposta. Este conjunto pode ser estatisticamente analisado.

A simulação de Monte Carlo pode ser utilizada quando é impossível ou impraticável a obtenção de soluções analíticas fechadas, seja pela necessidade de procedimentos muito custosos ou desconhecidos, seja pela exigência de simplificações grosseiras. Nestes casos, a obtenção de uma solução numérica aproximada é satisfatória. Simulações de Monte Carlo podem também servir para a validação de soluções aproximadas obtidas por outros procedimentos.

### 3.6.5.1 O Método de Monte Carlo

O nome Monte Carlo foi e é utilizado para indicar genericamente procedimentos que envolvam simultaneamente geração de números aleatórios, simulação e, propriamente, o Método de Monte Carlo. Na última década tornou-se freqüente utilizar este nome como referência ao uso do computador para a geração de diferentes situações amostrais com o objetivo de se estudar o desempenho de um processo dinâmico através de procedimentos e técnicas estatísticas<sup>21</sup>.

O Método de Monte Carlo, em sua essência, é originado da estimação do valor de integrais através de procedimentos amostrais. Mais que isso, o modelo conceitual do método envolve tal tipo de estimação em um hipercubo com arestas dadas por (0;1). Assim, o procedimento básico de Monte Carlo pode ser genericamente descrito como (Kennedy & Gentle, 1980):

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot du_1 \cdot du_2 \dots du_n$$

<sup>21</sup> Kennedy & Gentle (1980) e Dachs (1989) citam como excelente referência para descrição das potencialidades do Método de Monte Carlo, o livro de Hammersley & Handscomb (1964).

A este ponto, dois problemas diferenciam o modelo conceitual da aplicação prática do método:

- A Variabilidade: como o Método de Monte Carlo usa amostras para obter estimativas, melhores resultados serão obtidos se a variabilidade do processo for minimizada. Técnicas de redução de variância são muito úteis nestas situações, aumentando não só a eficiência do método no sentido de se obter estimativas melhores, mas também a velocidade de obtenção de tais estimativas. Maiores esclarecimentos a respeito de tais técnicas podem ser obtidos em Ribeiro (1995a). Kennedy & Gentle (1980) citam ainda as referências Cochran (1977) e Hammersley & Handscomb (1964).
- Nas aplicações estatísticas mais comuns do Monte Carlo, enquanto continua sendo verdadeira a afirmação de que o problema é essencialmente o de estimação de alguma integral, o integrando pode não estar claramente descrito através de uma expressão matemática (Kennedy & Gentle, 1980).

### 3.6.5.2 Geração de Números Aleatórios

A geração de números aleatórios ocupa posição fundamental em estudos de simulação. A base da geração de números aleatórios para uma dada distribuição é a geração de números que sigam a distribuição uniforme padronizada, isto é, valores com igual probabilidade de ocorrência distribuídos no intervalo  $[0;1]$ . No ambiente computacional não é possível a obtenção de seqüências de números completamente aleatórios. A opção comumente adotada em diversas linguagens de simulação é a geração de seqüências de números pseudo-aleatórios, isto é, seqüências periódicas de números com comportamento suficientemente imprevisível a “olho nu” e com período bastante grande. Dachs (1988) e Kennedy & Gentle (1980) apresentam diversos algoritmos para geradores deste tipo, entre os quais o modelo mais utilizado: o do gerador de Congruências Lineares.

A partir de valores gerados para a distribuição uniforme padronizada podem-se obter valores aleatórios associados a outras distribuições probabilísticas. O Quadro 2 apresenta as expressões mais comumente utilizadas, onde os termos  $u$ ,  $u_1$  e  $u_2$  representam valores amostrados de distribuições uniformes em  $[0;1]$ .

Distribuição	Densidade de Probabilidades	Geração de Valor Aleatório
Normal Padronizada	$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$	$t_{NR} = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot u_2)$
Normal	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$t_N = \sigma \cdot t_{NR} + \mu$
Exponencial	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	$t_E = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - u)$
Weibull	$f(t) = \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot t^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}$	$t_W = \theta \cdot (-\ln(1 - u))^{\frac{1}{\gamma}}$
LogNormal	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$t_L = e^{\sigma \cdot t_{NR} + \mu}$
Gamma	$f(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\theta^\gamma \cdot \Gamma(\gamma)} \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$	$t_G = -\theta \cdot \sum_{i=1}^{\gamma} \ln(1 - u)$

Quadro 4: Expressões para a geração de números aleatórios associados às principais distribuições em Confiabilidade. A notação é a utilizada no capítulo 2 do presente trabalho.

Fonte: adaptada de Ribeiro, 1995.

### 3.6.5.3 Confiabilidade de Sistemas via Simulação de Monte Carlo

Para a estimação da Confiabilidade de sistemas, principalmente no caso de configurações complexas, o Método de Monte Carlo traz o benefício de produzir soluções bastante aproximadas da solução analítica exata, mas a um custo computacional significativamente menor (Ribeiro, 1995a). Da mesma forma que em outras aplicações deste método, técnicas de redução de variância devem ser utilizadas sempre que necessário, de modo a garantir a eficiência do método.

Para a obtenção de valores da Confiabilidade de todo o sistema é primeiramente necessário:

- **Conhecer os componentes do sistema**, através de dados históricos, de teste, ou de bancos de dados de componentes, de modo a definir suas distribuições probabilísticas de tempo de falha;
- **Conhecer a estrutura do sistema**, ou seja, a forma como os componentes estão conectados. Dois componentes conectados em paralelo gerarão um sistema potencialmente mais confiável que outro, formado por estes mesmos componentes conectados em série.

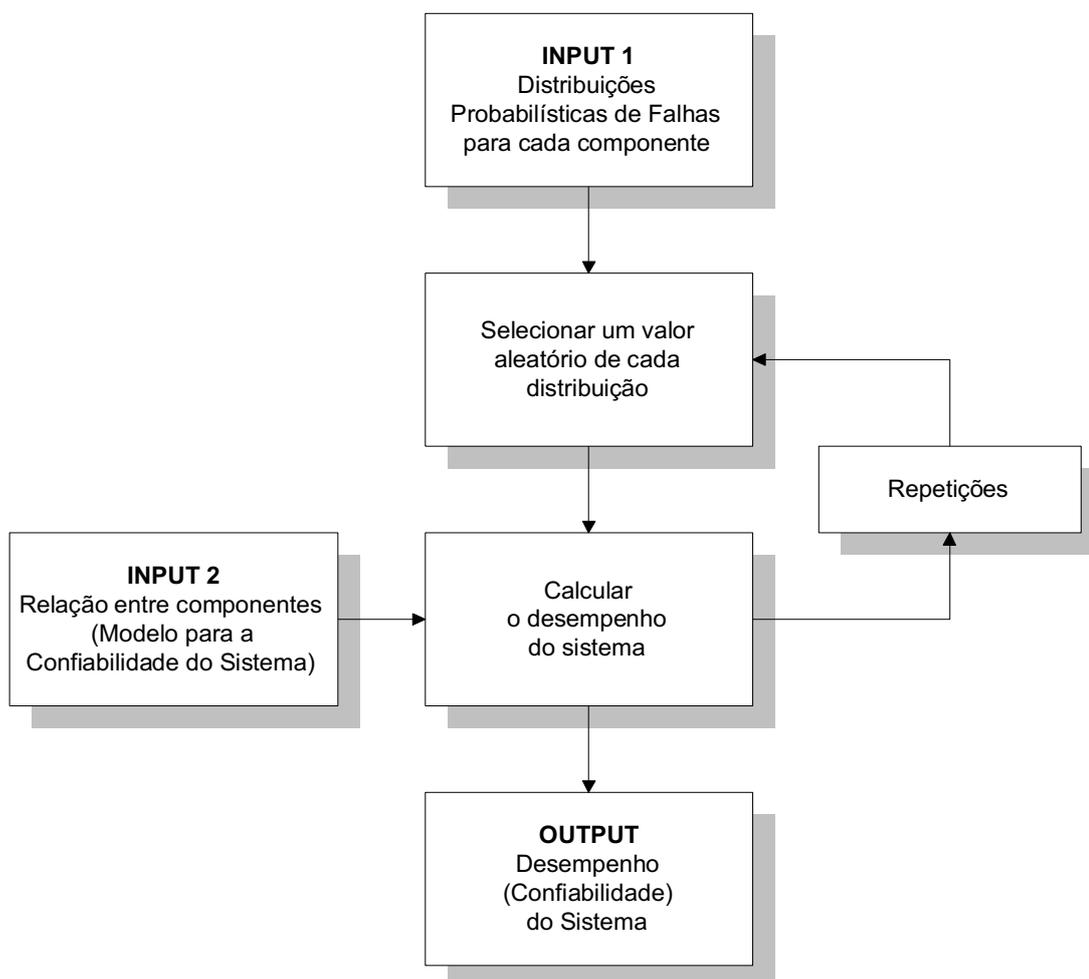


Figura 24: Fluxograma descrevendo a técnica de estimação da Confiabilidade de um sistema através de simulação de Monte Carlo. Fonte: Adaptado de Ribeiro (1995).

O passo seguinte é a criação de um modelo conceitual, de simulação. A partir das distribuições de falhas dos componentes “definem-se” os dados de entrada do processo de simulação, os quais terão a função de representar as diversas situações em que o sistema estará operando. A partir da estrutura do sistema define-se propriamente o modelo de simulação, isto é, a forma lógica de operação sobre os dados aleatórios de entrada.

Entre as vantagens deste método podem-se citar: a possibilidade de se obter estimativas e previsões diretamente do modelo computacional, sem a necessidade da montagem física de todo o sistema, e a flexibilidade de alterações do modelo gerado, permitindo-se verificar facilmente, por exemplo, o efeito da substituição de um componente por outro mais forte.

### 3.6.6 Método de Discretização da Confiabilidade

Alternativamente ao processo de simulação, uma abordagem determinística e sistemática pode ser utilizada para a estimação da Confiabilidade de um sistema. O método é bastante apropriado para aplicações computacionais, e consiste em determinar valores característicos de Confiabilidade para o sistema a partir de sua configuração e dos modelos associados à Confiabilidade de seus componentes.

O algoritmo pode ser sucintamente descrito pelas seguintes etapas:

1. Determinação da estimativa  $t$  para o tempo associado à Confiabilidade **máxima** de 0,5 % para o sistema. Esta estimativa é obtida através de um processo iterativo, para o qual é sugerida a utilização de algum algoritmo com passo variável, de modo a otimizar o processo de estimação.
2. Discretização do intervalo  $[ 0 ; t ]$  em um número  $k$ , suficientemente grande, de valores  $t_i = i \cdot \frac{t}{k}$  ( $0 \leq i \leq k$ ). Quanto maior o valor de  $k$ , maior será a exatidão obtida. Porém, o esforço computacional será proporcionalmente dado por  $k.n$ , onde  $n$  é o número de componentes do sistema. Sugere-se o uso de  $k = 1000$ , de modo a garantir uma boa exatidão nas estimativas.
3. Obtenção dos valores de Confiabilidade  $c_i$  do sistema, associados aos valores  $t_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ).
4. Definição dos valores característicos de Confiabilidade  $C_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ) a serem estimados.
5. Para cada valor característico de Confiabilidade  $C_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ), obtenção da estimativa do tempo característico respectivo através de uma interpolação linear sobre os valores estimados de Confiabilidade  $c_{a,j}$  e  $c_{p,j}$  associados aos valores  $c_i$  imediatamente anterior e posterior a  $C_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ).

### 3.7 Identificação de Componentes Críticos para Confiabilidade

No projeto de um sistema, alguns componentes têm maior importância ou causam apreciável impacto nas estimativas globais de Confiabilidade, desempenho, segurança, disponibilidade ou custos durante a vida útil de um sistema (Tyler & Gendron, 1986). Tais ‘componentes críticos de Confiabilidade’ podem ser identificados através de análises e técnicas de avaliação de Confiabilidade, com o objetivo primário de se garantir seu monitoramento e

melhoria antes que o produto chegue às mãos dos clientes. Entre as muitas técnicas que podem ser utilizadas para a identificação destes itens, estão Predição da Confiabilidade, FMEA e FTA.

Componentes críticos de Confiabilidade são os primeiros candidatos para análises detalhadas de Confiabilidade. Estas análises trazem informações a respeito de mau dimensionamento ou má aplicação dos componentes, bem como indicam possíveis soluções e direcionam esforços de melhoria.

A identificação de componentes como críticos é muito importante na melhoria da Confiabilidade de um sistema. A maior parte dos métodos de identificação de criticidade de componentes é baseada na observação das confiabilidades (ou “inconfiabilidades”) do sistema quando o componente em questão está operacional ou não. Estas confiabilidades medidas para o sistema, associadas à Confiabilidade do componente em estudo, são manipuladas algebricamente de forma a se obter diferentes medidas de importância para o mesmo (Elsayed, 1996). A consideração de criticidade de um componente pode ser devida, por exemplo (Tyler & Gendron, 1986):

- a sua alta contribuição no percentual de falhas do sistema, identificada através de uma análise de Pareto;
- a considerações logísticas, como o tempo de espera de reposição de peças;
- aos altos custos de manutenção do componente.

A existência deste sem número de fontes de criticidade leva à necessidade de que se definam critérios de classificação dos componentes realmente críticos para a Confiabilidade do sistema em estudo. Se um subsistema não crítico for considerado para análise, então tempo e recursos serão gastos sem necessidade. No entanto, se um subsistema crítico não for considerado, os prejuízos para a organização e para a sociedade tenderão a ser grandes. Assim, o que se necessita é de métodos sistemáticos para a determinação de tais componentes, principalmente se for levada em conta a crescente complexidade de configurações dos sistemas atualmente produzidos. O Quadro 3 apresenta as principais técnicas para identificação componentes críticos de Confiabilidade.

<b>Técnicas de Identificação de Itens Críticos de Confiabilidade</b>		
<b>Técnica</b>	<b>Vantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
Análise de Pareto (baseada em predição de Confiabilidade)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Baixo custo;</li> <li>• Rápida;</li> <li>• Considera todos os componentes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Medida pouco acurada;</li> <li>• Não considera características funcionais.</li> </ul>
FMEA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Completo;</li> <li>• Considera características funcionais, de segurança, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lento;</li> <li>• Custoso.</li> </ul>
FTA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Completo;</li> <li>• Considera características funcionais, de segurança, etc.;</li> <li>• Mais rápido que a FMEA.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lento;</li> <li>• Custoso.</li> </ul>
Itens de Manuseio Especial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cobre causas de falha súbita, tais como descargas elétricas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cobre um pequeno espectro de itens, em geral componentes.</li> </ul>
Identificação de Dispositivos Configuráveis	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cobre o estado da arte, bem como componentes configuráveis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Escopo limitado;</li> <li>• Em geral considera somente novas tecnologias.</li> </ul>
Considerações Logísticas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cobre custos e questões de disponibilidade de componentes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não inclui considerações funcionais.</li> </ul>
Considerações Históricas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desconsidera componentes “assumidamente confiáveis”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não inclui considerações funcionais ou logísticas.</li> </ul>

Quadro 5: Comparação de técnicas de identificação de componentes críticos de Confiabilidade.

Fonte: Adaptado de Tyler & Gendron, 1986.

Elsayed (1996) apresenta vários critérios para a classificação da criticidade (ou importância) de componentes de um sistema para sua Confiabilidade. As medidas de importância de Birnbaum, de Fussell-Vesely, de Barlow-Proschan e a Medida de Criticalidade são discutidas e exemplos de aplicação são apresentados. Todas as medidas acima citadas são definidas a partir de probabilidades condicionais de operação do sistema em relação ao estado operacional dos componentes.

### **3.8 Alocação de Confiabilidade**

O termo Alocação de Confiabilidade é comumente utilizado para designar um conjunto de métodos cuja finalidade é dimensionar a Confiabilidade de componentes a partir de uma meta de Confiabilidade definida para todo o sistema. A meta de Confiabilidade pode ser definida através de especificações contratuais ou de necessidades estratégicas da empresa. Podem ainda influir significativamente na definição da meta de Confiabilidade de um produto (Ribeiro, 1995a):

1. a capacidade do suporte logístico;
2. o impacto da Confiabilidade sobre o sucesso da missão do produto;
3. as necessidades de manutenibilidade do produto;
4. limitações orçamentárias de projeto e processo;
5. necessidades de segurança;

O dimensionamento da Confiabilidade pode ser realizado com duas finalidades:

- **maximização da Confiabilidade:** a partir de um objetivo de Confiabilidade para o sistema em um dado tempo de missão, indicar qual as melhorias de Confiabilidade necessárias e quais componentes devem ser melhorados.
- **minimização de custos:** indicar quais componentes podem ser substituídos por outros menos fortes e mais baratos, sem prejuízo do objetivo de Confiabilidade para o sistema.

Com o uso de métodos de alocação de Confiabilidade pode-se especificar a Confiabilidade ótima para cada subsistema, necessária para a obtenção da Confiabilidade pretendida para todo o sistema (Ribeiro, 1995a). Esta etapa deve ser realizada durante a fase de projeto do sistema, previamente à fase de seleção de materiais e componentes. Deste modo, as equipes de projeto passam a ter maior conhecimento dos problemas básicos de Confiabilidade inerentes a seu trabalho, bem como das necessidades específicas de Confiabilidade associadas a cada subsistema. Como resultado, é promovida uma maior interação entre os times de projeto, manufatura, operação e manutenção, obtendo-se um trabalho mais objetivo e de maior qualidade. Através de procedimentos de alocação de Confiabilidade pode-se, ainda, gerar projetos mais consistentes e econômicos, e que podem contemplar simultaneamente (Ribeiro, 1995a):

- a complexidade do produto;
- a criticidade de certos componentes;
- o custo dos componentes;
- outros fatores, tais como manutenibilidade, peso e espaço físico.

### 3.8.1 Problemas Básicos de Alocação de Confiabilidade

Há três problemas básicos nos quais a utilização de métodos de Alocação de Confiabilidade pode trazer benefícios (Ribeiro, 1995a):

#### 3.8.1.1 Alocação Ótima de Confiabilidade para um Sistema Composto por $n$ Subsistemas em Série

Este problema consiste em maximizar a Confiabilidade do sistema,

$$R_s = \prod_{j=1}^n R_j \quad (3.17a)$$

sujeito às restrições

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \cdot R_j \leq B_i \quad (i = 1..k) \quad (3.17b)$$

onde:

$R_j$  : Confiabilidade do subsistema  $j$ .

$G_{ij}$  : Recurso  $i$  usado no subsistema  $j$  (restrições de custo, espaço, tempo, peso, manutenibilidade, etc.).

$B_i$  : Quantidade total do recurso  $i$  existente para o sistema.

#### 3.8.1.2 Alocação Ótima de Redundâncias para um Sistema Misto

Este problema consiste em maximizar a Confiabilidade do sistema,

$$R_s = f(R_1(X_1), R_2(X_2), \dots, R_n(X_n)) \quad (3.18a)$$

sujeito às restrições

$$\sum_{j=1}^n G_{ij}(X_j) \leq B_i \quad (i = 1..k) \quad (3.18b)$$

onde:

$R_j$  : Confiabilidade do subsistema  $j$ .

$G_{ij}$  : Recurso  $i$  usado no subsistema  $j$  (restrições de custo, espaço, tempo, peso, manutenibilidade, etc.).

$B_i$  : Quantidade total do recurso  $i$  existente para o sistema.

$X_j$  : Número máximo de componentes no estágio  $j$  ou número de estágios do sistema misto.

### 3.8.1.3 Minimização do Custo Total do Sistema

Este problema consiste em minimizar o custo do sistema

$$C_s = \sum_{j=1}^n C_j(R_j) \quad (3.19a)$$

sujeito às restrições

$$R_s \geq R_R \quad (3.19b)$$

onde:

$R_j$  : Confiabilidade do subsistema  $j$ .

$R_s$  : Confiabilidade do sistema.

$R_R$  : Confiabilidade requerida para o sistema.

$C_j$  : Custo do subsistema  $j$ .

$C_s$  : Custo do sistema.

$G_{ij}$  : Recurso  $i$  usado no subsistema  $j$  (restrições de custo, espaço, tempo, peso, manutenibilidade, etc.).

$B_i$  : Quantidade total do recurso  $i$  existente para o sistema.

$X_j$  : Número máximo de componentes no estágio  $j$  ou número de estágios do sistema misto.

## 3.8.2 Métodos de Alocação de Confiabilidade

Há diversos critérios que podem ser usados para a alocação de Confiabilidade. Serão apresentados neste trabalho apenas os mais utilizados<sup>22</sup>.

Para melhor compreensão e visualização das diferenças entre os métodos, utilizar-se-á como exemplo os dados do sistema de direção de um avião comercial, classicamente apresentado como exemplo de sistema em série (Ribeiro, 1995a), para o qual foi definido um tempo de missão de 100 horas de uso contínuo (Tabela 1):

---

<sup>22</sup> Elsayed (1996), Nelson (1982) e Tobias & Trindade (1995) apresentam os métodos aqui descritos com maior detalhamento. Da mesma forma, podem ser encontradas referências a outros métodos não contemplados neste trabalho.

Componente	Confiabilidade ao final do tempo de missão
Elemento Sensor	$R_1 = 0,75$
Subsistema de Direção	$R_2 = 0,80$
Subsistema Computacional	$R_3 = 0,87$
Filtro de Voltagem	$R_4 = 0,90$
Radar	$R_5 = 0,95$
Amplificador de Sinal	$R_6 = 0,99$
<b>Confiabilidade do sistema</b>	$R = \prod_{i=1}^6 R_i = 0,75 \cdot 0,80 \cdot 0,87 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,99 = 0,4418$
<b>Confiabilidade Requerida</b>	$R_* = 0,53$

Tabela 1: Confiabilidades de tempo de missão para o sistema de direção de um avião comercial. Fonte: Ribeiro (1995a).

Outros tipos de sistema poderiam ser utilizados com pequenas modificações nos procedimentos aqui apresentados.

### 3.8.2.1 Método Clássico

Consiste em alocar as necessidades de Confiabilidade do sistema no componente de maior influência. Assim, em um sistema em série, é o componente mais fraco que deverá ser melhorado. Em um sistema em paralelo, o componente de maior Confiabilidade merecerá o esforço de melhoria.

As demais hipóteses deste método são:

- cada subsistema somente pode alternar entre dois estados: *operacional* e *não-operacional*.
- o estado de cada subsistema é independente dos estados dos demais.

A utilização deste método é indicada quando há um componente com Confiabilidade muito abaixo da dos demais.

Aplicando-se o método clássico de alocação de Confiabilidade no exemplo citado, tem-se que o Elemento Sensor é a parte mais “fraca” do sistema. A melhoria de Confiabilidade deve ser concentrada sobre este componente:

$$\prod_{i=1}^6 R_i = R_1 \cdot 0,80 \cdot 0,87 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,99 = 0,53 \Rightarrow R_1 = 0,8996$$

Assim, os esforços de melhoria somente serão efetivos se a Confiabilidade ao final do tempo de missão do Elemento Sensor for aumentada de 0,75 para 0,8996.

A despeito de apontar um possível procedimento para a adequação da Confiabilidade do sistema aos níveis requeridos, este método apresenta o problema de, em geral, **não** alocar os

esforços de melhoria de forma ótima. Para sistemas em paralelo, por exemplo, a melhoria de Confiabilidade deve ser realizada sobre o componente mais forte, o que nem sempre é possível, devido às restrições físicas ou econômicas. Pode ainda ocorrer o caso de a Confiabilidade necessária para o componente a ser melhorado exceder 1,0! Neste caso, o procedimento indicado é o de considerar tal Confiabilidade em um nível alto, por exemplo 0,99 e repetir o processo para outro componente, agora mais fraco.

### 3.8.2.2 Método do Esforço Mínimo

Este método apresenta uma forma de alocação distribuída de esforços de melhoria sobre os componentes. O princípio básico deste método pode ser descrito como “alocar esforços em todos os componentes fracos, mas ainda mantendo-os como os mais fracos”.

As demais hipóteses deste método são as mesmas do Método Clássico (Ribeiro, 1995a):

- cada subsistema somente pode alternar entre dois estados: *operacional* e *não-operacional*.
- o estado de cada subsistema é estatisticamente independente dos estados dos demais.

A primeira etapa é a ordenação dos componentes em valores crescentes de Confiabilidade:

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n. \quad (3.20)$$

A seguir, deve-se definir o número  $k$  de componentes cuja Confiabilidade deve ser aumentada:

$$k = \max_{R_0 \leq R_{k+1}}(R_0) \quad (3.21)$$

Para o caso de um sistema em Série, tem-se:

$$R_0 = \left( \frac{R_*}{\prod_{i=k+1}^n R_i} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (3.22)$$

onde  $R_*$  é a Confiabilidade desejada para o sistema e  $k$  deve ser encontrado iterativamente. Para o caso de um sistema em paralelo, Ribeiro (1995) cita a utilização de uma expressão semelhante, porém com o uso da média aritmética em lugar da média geométrica.

Aplicando-se a formulação acima nos dados do exemplo do início desta seção tem-se:

$$k = 1: R_0 = \left( \frac{0,53}{\prod_{i=2}^6 R_i} \right)^{\frac{1}{1}} = \frac{0,53}{0,80 \cdot 0,87 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,99} = 0,8996 > R_2 = 0,80$$

$$k = 2: R_0 = \left( \frac{0,53}{\prod_{i=3}^6 R_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{0,53}{0,87 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,99}} = 0,8483 \leq R_3 = 0,87$$

Então,  $k = 2$  e as Confiabilidades dos componentes 1 e 2, isto é, Elemento Sensor e Subsistema de Direção, devem ser melhoradas para 0,8483.

Em alguns casos, devido a restrições físicas, técnicas ou econômicas, pode não ser possível a obtenção dos níveis de Confiabilidade desejáveis para um determinado componente a ser modificado. Neste caso, há duas opções para a alocação da Confiabilidade (Ribeiro, 1995a):

1. Fixar a Confiabilidade deste componente no maior valor possível;
2. Usar redundância sobre este componente.

Em qualquer dos casos é necessário repetir a aplicação do método sobre os demais componentes do sistema.

### 3.8.2.3 Método da Alocação Balanceada

Na versão aqui descrita, este método somente é aplicável para sistemas em série e cujos subsistemas possuam taxa de risco constante, o que implica em modelos exponenciais de falha. Apesar da perda de generalidade, muitos sistemas, durante a fase de vida útil, ainda enquadram-se nessas condições.

O princípio básico do Método da Alocação Balanceada é distribuir esforços de melhoria sobre todos os subsistemas (Ribeiro, 1995a). Assim, a Confiabilidade  $R_*$  desejada para o sistema pode ser descrita como uma função  $f$  das confiabilidades  $R_{*,i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) alocadas para seus  $n$  subsistemas:

$$R_*(t) = f(R_{*,1}(t), R_{*,2}(t), \dots, R_{*,n}(t)) \quad (3.23)$$

Utilizando a hipótese de taxa de falha constante, pode-se escrever:

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i \cdot t} = e^{-t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (3.24)$$

onde  $\lambda_i$  é a taxa de risco medida para o subsistema  $i$ .

O método consiste em dispendir esforços de melhoria de modo a obter taxas de risco dadas por

$$\lambda_{*,i} = w_i \cdot \lambda_* \quad (3.25)$$

onde

$$w_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (3.26a)$$

$$\lambda_* = \frac{-\ln(R_*(t))}{t} \quad (3.26b)$$

Neste caso específico, tem-se ainda que:

$$R_{*,i}(t) = e^{-\lambda_{*,i} \cdot t} = e^{-w_i \cdot \lambda_* \cdot t} = \left(e^{-\lambda_* \cdot t}\right)^{w_i} = \left(R_*(t)\right)^{w_i} \quad (3.27)$$

Como exemplo, aplicando-se o método sobre os dados do sistema de direção de um avião comercial e introduzindo as hipóteses:

1. de que as taxas de falha dos componentes sejam constantes; e
2. de que o tempo de missão do aparelho seja de 100 horas contínuas de uso;

tem-se:

$$\lambda_* = \frac{-\ln(R_*(t))}{t} = \frac{-\ln(0,53)}{100} = 6,3488 \cdot 10^{-3}$$

As taxas de falha medidas, os pesos de ponderação e as taxas de falha alocadas serão dados por:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\cong 2,8768 \cdot 10^{-3} & w_1 &= \frac{2,8768 \cdot 10^{-3}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,3522 & \lambda_{*,1} &= 0,3522 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 2,2360 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_2 &\cong 2,2314 \cdot 10^{-3} & w_2 &= \frac{2,2314 \cdot 10^{-3}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,2732 & \lambda_{*,2} &= 0,2732 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 1,7345 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_3 &\cong 1,3926 \cdot 10^{-3} & w_3 &= \frac{1,3926 \cdot 10^{-3}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,1705 & \lambda_{*,3} &= 0,1705 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 1,0825 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_4 &\cong 1,0536 \cdot 10^{-3} & w_4 &= \frac{1,0536 \cdot 10^{-3}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,1290 & \lambda_{*,4} &= 0,1290 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 8,1899 \cdot 10^{-4} \\
\lambda_5 &\cong 5,1293 \cdot 10^{-4} & w_5 &= \frac{5,1293 \cdot 10^{-4}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,0628 & \lambda_{*,5} &= 0,0628 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 3,9870 \cdot 10^{-4} \\
\lambda_6 &\cong 1,0050 \cdot 10^{-4} & w_6 &= \frac{1,0050 \cdot 10^{-4}}{8,1679 \cdot 10^{-3}} \cong 0,0123 & \lambda_{*,6} &= 0,0123 \cdot 6,3488 \cdot 10^{-3} = 7,8090 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

E as respectivas confiabilidades alocadas são:

$$\begin{aligned}
R_{*,1} &= (R_*(100))^{w_1} = (0,53)^{0,3522} = 0,7996 \\
R_{*,2} &= (R_*(100))^{w_2} = (0,53)^{0,2732} = 0,8408 \\
R_{*,3} &= (R_*(100))^{w_3} = (0,53)^{0,1705} = 0,8974 \\
R_{*,4} &= (R_*(100))^{w_4} = (0,53)^{0,1290} = 0,9214 \\
R_{*,5} &= (R_*(100))^{w_5} = (0,53)^{0,0628} = 0,9609 \\
R_{*,6} &= (R_*(100))^{w_6} = (0,53)^{0,0123} = 0,9922
\end{aligned}$$

A vantagem deste método é a de que todos os componentes recebem esforços de melhoria, proporcionalmente a seus desempenhos. Este critério opera com a lógica de que é mais barato e mais rápido a obtenção de pequenas melhorias em vários subsistemas do que grandes melhorias em poucos componentes.

Observe-se também que o **tempo de missão** é efetivamente utilizado como variável de entrada, permitindo melhor compreensão das necessidades de melhoria para missões de diferentes durações.

Como desvantagem deste método, tem-se sua perda de generalidade, pois somente é aplicável para sistemas em série e com componentes cujas taxas de risco sejam constantes<sup>23</sup>.

### 3.8.2.4 Método Agree

Assim como o Método de Alocação Balanceada, o Método *Agree* tem a desvantagem de ser somente aplicável sistemas em série, formados por subsistemas independentes e com taxa de falha constante. Há ainda a hipótese de que os subsistemas são, internamente,

<sup>23</sup> Não foram encontradas, em nenhuma das referências pesquisadas, variações deste método para outros tipos de sistema.

dispositivos em série (o que significa que se um componente de um subsistema falhar, então o subsistema falhará). Entre as vantagens apresentadas para este método tem-se (Ribeiro, 1995a):

- leva em consideração a complexidade dos subsistemas;
- considera explicitamente a relação entre os subsistemas e a falha do sistema;
- pode ser usado para determinar o MTTF mínimo para cada subsistema.

A taxa de falha alocada para o subsistema  $i$  será dada por (Ribeiro, 1995a):

$$\lambda_{*,i} = \frac{-n_i \cdot \ln(R_*(t))}{N \cdot E_i \cdot t_i} \quad (3.28)$$

onde:

$R_*$  : é a Confiabilidade desejada para o sistema;

$t$  : é o tempo de missão do sistema;

$t_i$  : é o número de horas que o subsistema  $i$  irá operar durante a missão;

$E_i$  : é a criticidade do subsistema  $i$  em relação à Confiabilidade do sistema;

$n_i$  : é o número de módulos existentes no subsistema  $i$ ;

e

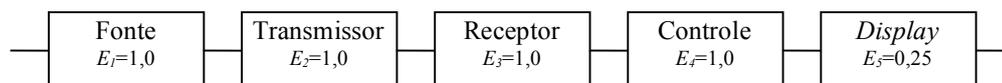
$$N = \sum_{i=1}^n n_i$$

A Confiabilidade alocada para o subsistema  $i$  será dada por (Ribeiro, 1995a):

$$R_{*,i}(t_i) = 1 - \frac{1 - (R_*(t))^{\frac{n_i}{N}}}{E_i} \quad (3.29)$$

Devido à falta de informações sobre a composição dos subsistemas do sistema de direção de um avião comercial, será apresentado outro exemplo de aplicação deste método (Ribeiro, 1995a):

Seja um sistema de radar cuja missão é detectar a presença de aeronaves e cuja Confiabilidade requerida é de 0,90:



Os dados técnicos para cálculo da Confiabilidade são:

Subsistema	Número de Módulos	Tempo de Operação	Criticidade	Taxa de Falha	Confiabilidade
Fonte	35	12	1,00	0,000576	0,993
Transmissor	91	12	1,00	0,001495	0,982
Receptor	88	12	1,00	0,001445	0,983
Controle	231	12	1,00	0,003790	0,955
<i>Display</i>	88	6	0,25	0,011600	0,932
<b>Total</b>	<b>533</b>	<b>12</b>	<b>-</b>	<b>0,008780</b>	<b>0,900</b>

As taxas de falha e as Confiabilidades associadas aos componentes resultam:

$$\lambda_{*,1} = \frac{-35 \cdot \ln(0,90)}{533 \cdot 1,00 \cdot 12} \cong 5,7655 \cdot 10^{-4} \quad R_{*,1} = 1 - \frac{1 - (0,90)^{\frac{35}{533}}}{1,00} = 0,9931$$

$$\lambda_{*,2} = \frac{-91 \cdot \ln(0,90)}{533 \cdot 1,00 \cdot 12} \cong 1,4990 \cdot 10^{-3} \quad R_{*,2} = 1 - \frac{1 - (0,90)^{\frac{91}{533}}}{1,00} = 0,9822$$

$$\lambda_{*,3} = \frac{-88 \cdot \ln(0,90)}{533 \cdot 1,00 \cdot 12} \cong 1,4496 \cdot 10^{-3} \quad R_{*,3} = 1 - \frac{1 - (0,90)^{\frac{88}{533}}}{1,00} = 0,9828$$

$$\lambda_{*,4} = \frac{-231 \cdot \ln(0,90)}{533 \cdot 1,00 \cdot 12} \cong 3,8052 \cdot 10^{-3} \quad R_{*,4} = 1 - \frac{1 - (0,90)^{\frac{231}{533}}}{1,00} = 0,9554$$

$$\lambda_{*,5} = \frac{-88 \cdot \ln(0,90)}{533 \cdot 0,25 \cdot 6} \cong 1,1597 \cdot 10^{-2} \quad R_{*,5} = 1 - \frac{1 - (0,90)^{\frac{88}{533}}}{0,25} = 0,9310$$

Observe-se que o método leva em consideração a complexidade de cada subsistema e sua importância para a manutenção da Confiabilidade do sistema a partir de seus número de componentes e criticidade. Desta forma, pode-se observar que:

- apesar de as complexidades do Receptor e do *Display* serem semelhantes, o Receptor deverá receber maior atenção na melhoria da Confiabilidade, pois é mais crítico;
- o Controle é muito mais complexo que os demais subsistemas e, portanto, mais difícil de ter sua Confiabilidade aumentada. O método aloca para este subsistema uma melhoria muito pequena, adequada com sua complexidade.

### 3.8.2.5 Método Desing-To-Cost

Este é um método que tem por objetivo aliar objetivos de desempenho e custo. Para seu funcionamento é necessário um bom fluxo de informações entre as equipes de projeto,

manutenção, processo e os setores administrativos da organização. Um programa típico baseado neste método tem por objetivos (Ribeiro, 1995a):

- Minimizar o custo de ciclo de vida do produto;
- Reduzir os custos de produção;
- Reduzir os custos de operação e utilização do produto;
- Maximizar a *performance* e a Confiabilidade, atendendo a metas financeiras.

Não há um procedimento padronizado para a aplicação deste método, mas podem ser encontradas na literatura sugestões de execução que passam pelas seguintes etapas (Ribeiro, 1995a):

1. Trabalhar em equipes multidisciplinares, envolvendo engenheiros de Confiabilidade e Manutenibilidade no projeto.
2. Estabelecer limites aceitáveis para as variáveis sendo otimizadas:
  - Limites máximos: Custos de produção e Custos de manutenção;
  - Limites mínimos: Confiabilidade, Manutenibilidade e Desempenho.
3. Definir o melhor compromisso, dentre os limites acima, entre custo e desempenho.

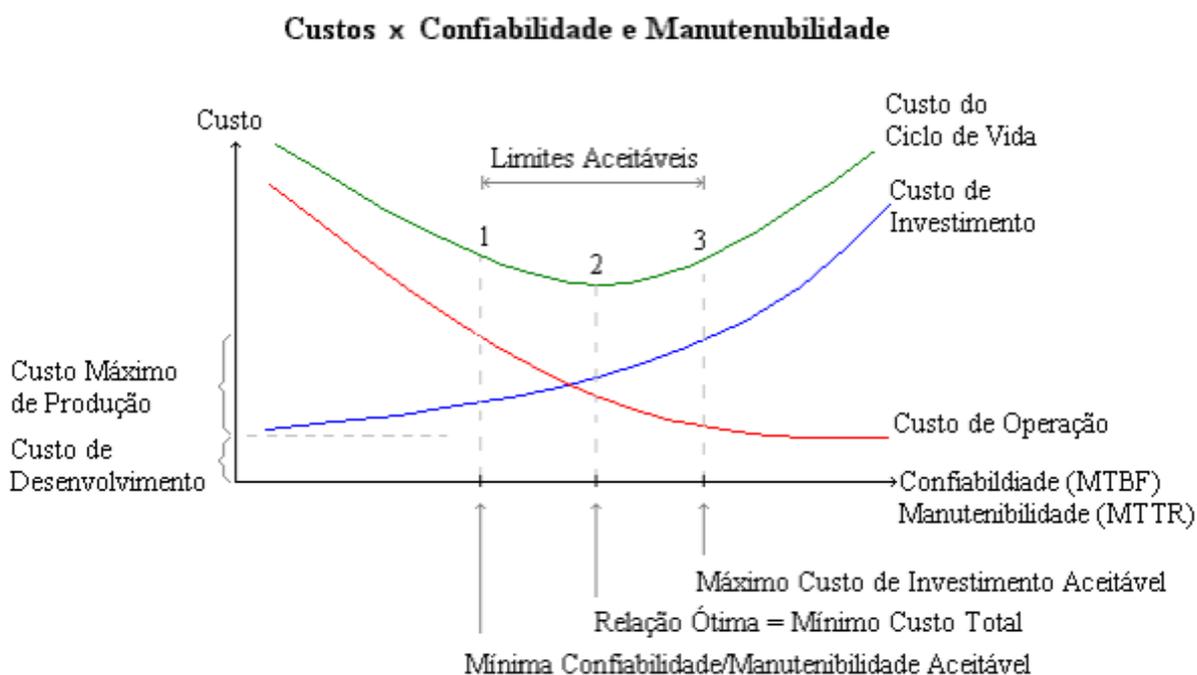


Figura 25: Gráfico ilustrativo do método Design-To-Cost. Fonte: Ribeiro (1995a).

## CAPÍTULO 4

### 4. PROGRAMAS DE PLANEJAMENTO E MANUTENÇÃO DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS PRODUTIVOS

#### 4.1 A Visão Gerencial da Confiabilidade

No atual quadro em que se encontram os ambientes produtivos, tem-se constatado uma forte tendência de associação entre ‘novas tecnologias’ e ‘aumento da produção e da competitividade’. No entanto, há também uma tendência, principalmente por parte das castas gerenciais, de esquecimento do real papel que os termos **Confiabilidade**, **Manutenibilidade** e **Disponibilidade** ocupam no aumento da efetividade de um sistema. Deming em sua clássica ‘Reação em Cadeia’, afirma que a produtividade de um sistema (produtivo) somente pode ser eficientemente melhorada através da diminuição de retrabalhos, erros e atrasos. No entanto, dificilmente se poderá melhorar o *output* de um sistema produtivo se não for concebida uma melhor tecnologia para os processos. Em outras palavras, Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade devem ser efetivamente planejadas e gerenciadas (Madu, 1993). Se um produto opera eficientemente por um longo período de tempo e atinge os objetivos para os quais foi projetado antes de quebrar, então os custos de perda de produção devidos a falhas no sistema produtivo são minimizados. Imagine-se o efeito, frente aos usuários, de uma chamada para substituição de peças defeituosas de um lote de automóveis; imagine-se o tempo e os investimentos em *marketing* necessários para reconquistar a confiança dos clientes...

O Tempo Médio Até a Falha (MTTF) e o Tempo Médio Até o Reparo (MTTR) são medidas para a Confiabilidade e para a Manutenibilidade que se relacionam diretamente com a satisfação dos clientes (e, portanto, com a capacidade competitiva de toda a organização). As equipes de engenharia de projeto devem conhecer os níveis de Confiabilidade considerados aceitáveis pelos consumidores e aceitar o desafio de criar produtos que atendam a tais necessidades mínimas sem ultrapassar os limites financeiros a que estão sujeitas, ou, como classicamente dito, “as vozes dos usuários finais devem ser ouvidas e integradas ao projeto” (Shewhart, 1931, citado por Kapur, 1986).

Confiabilidade e fidedignidade (do inglês *dependability*) foram os fatores principais que permitiram que japoneses dominassem boa parte do mercado automotivo mundial (Madu, 1993). Em um mercado no qual cada vez mais cresce a dependência nos avanços tecnológicos, as empresas que desejarem sobreviver terão de vencer o mesmo desafio: fabricar produtos cada vez mais confiáveis e fidedignos. Isto não se resume apenas em máquinas mais modernas, mas principalmente na manutenção de programas de melhoria contínua da Confiabilidade, da Manutenibilidade e da Disponibilidade de seus produtos, objetivo que somente pode ser atingido com o compromisso de toda a organização.

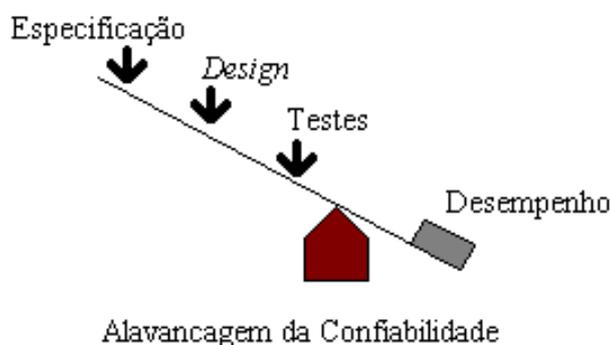


Figura 26: O compromisso trazido pela incorporação da Confiabilidade nas diversas etapas de um projeto: os maiores benefícios das análises de Confiabilidade são incorporados nas fases iniciais do projeto. Fonte: Troness, 1991.

## 4.2 Programação da Confiabilidade em Sistemas Produtivos

Sob o ponto de vista gerencial, deve-se sempre incentivar a obtenção das metas de Confiabilidade para um determinado projeto desde suas fases iniciais. Isto porque a única maneira de se garantir “Qualidade que se sustenta ao longo do tempo” (Ribeiro, 1995a) é através da manutenção de um forte Programa de Confiabilidade dentro da empresa. Sempre que algo é feito apenas para cumprir exigências contratuais ou legais, os resultados, em geral, são insatisfatórios ou, até mesmo, desagradáveis. Da mesma forma, sempre que os esforços de Confiabilidade forem apenas estimados em termos de custos, a tendência gerencial será a de cumprir apenas as necessidades mínimas contratuais (Luthra, 1989). Esta atitude produzirá, certamente, baixos custos nas fases de desenvolvimento e de produção, mas, igualmente, será baixa a Confiabilidade de seus produtos.

Luthra (1989) define como quatro as bases de um programa de Confiabilidade destinado ao desenvolvimento de produtos e gerenciamento de projetos:

1. *Performance*
2. Custo
3. Programação
4. Confiabilidade

Os três primeiros itens são motivo de preocupação de toda a organização, mas sem *performance* nenhum outro terá sentido. E qual o tipo de desempenho que clientes e usuários podem querer que não aquele que se sustenta *ao longo do tempo*? A Confiabilidade é, no entanto, relegada à condição de exigência contratual, um custo a mais a ser carregado pela organização. No entanto, os custos de conserto de problemas no ambiente externo à empresa podem facilmente exceder os custos de agregação da Confiabilidade através de programas adequados. Luthra (1989) compara esta situação à de uma pessoa sentada em uma cadeira que possui uma perna mais curta!

Se a Confiabilidade não é cuidadosamente considerada desde as fases iniciais de um projeto, nenhuma ação produtiva posterior poderá aumentá-la além da capacidade latente, incorporada durante a concepção do projeto. O dispêndio de maiores esforços na concepção de produtos mais confiáveis, encarando a Confiabilidade não apenas como um exigência contratual é coroado com a redução dos custos de garantia, a melhoria da imagem da empresa frente a clientes e consumidores, e, conseqüentemente, redução nos custos.

O objetivo destas considerações não é o de questionar a inteligência ou o conhecimento das equipes de projeto, mas sim o de evidenciar a atitude do cliente frente à segurança e ao desempenho potenciais de um produto que compra. Para tornar isto claro, o fabricante (ou fornecedor) deve dispor de métodos rigorosos e estruturados para identificar e quantificar todos possíveis modos de falha ainda nas fases de desenvolvimento do produto. Isto minimiza grandemente as necessidades de testes estatísticos para a validação de lotes, por exemplo, já que as falhas subseqüentes seriam devidas a causas aleatórias. Troness (1991) define precisamente este fato:

“não é aceitável testar uma máquina por 20 horas, observar uma falha apenas e dizer que o MTBF é de 20 horas! É tempo de se compreender que a Confiabilidade de

um sistema é a ‘probabilidade de seu sucesso’ e que o conhecimento do comportamento da distribuição de falhas provê compreensão sobre:

- a qualidade do processo de montagem;
- a taxa de falhas durante a operação real do produto;
- os riscos associados a um determinado prazo de garantia.”

#### **4.2.1 Dados de Confiabilidade**

Dados de Confiabilidade consistem em informações de tempos de operação de um equipamento associados a falhas, discrepâncias ou problemas de operação. Os detalhes das falhas, para serem úteis, devem incluir condições operacionais, sintomas de não conformidade, causas do problema, consertos realizados, componentes repostos, tempo de reparo, comentários dos usuários e das equipes de reparo, além da configuração do item falhado. Estes dados podem vir de um cliente que traz um produto defeituoso, de observações de campo (informações obtidas enquanto o produto é utilizado para os propósitos para os quais foi desenvolvido), das equipes de manutenção corretiva e/ou preventiva ou, ainda, de testes de aceitação de unidades ou lotes de produtos. O termo “falha” é genericamente utilizado como sinônimo de “alguma coisa ou algo que não funciona como esperado” (Spingarn, 1986a):

1. Necessidade de reposição, reparo ou ajuste de componentes de modo a tornar um produto novamente operacional;
2. Desvios estruturais tais como rachos, deterioração de componentes, corrosão ou degradação de partes do produto;
3. Evidências de danos causados por manuseio indevido do produto durante o transporte, ou mau empacotamento;
4. Falta de clareza ou erros nas instruções de manuseio e operação.

Dados de Confiabilidade devem ser obtidos, se possível, a partir de formulários padronizados, próprios para reportar deficiências de produtos. A eficiência e o valor de tais informações dependem diretamente da consistência da informação recebida, da precisão do pessoal que redige os relatórios e da clareza dos formulários e de suas instruções. A informação mínima de Confiabilidade que se deve armazenar é (Spingarn, 1986a):

- Tipo, modelo, série e/ou número de modificação do produto;

- Número de série;
- Número da parte;
- Data de falha;
- Tempo ou número de ciclos de uso;
- Como a falha foi descoberta;
- Condições operacionais;
- Descrição do problema;
- Disposição do item falhado.

Uma possível maneira de se obter informações de Confiabilidade é recusar unidades retornadas sem a devida informação (Spingarn, 1986a). Já que algum tipo de documentação deve ser retornado com o produto falhado, por que não conter a informação necessária para a compreensão da Confiabilidade do produto, e, possivelmente a ser utilizada para esforços de melhoria e ações corretivas? Em alguns produtos pode-se incorporar mecanismos capazes de armazenar continuamente informações de uso. Tais informações podem ser utilizadas para a recuperação de informações de Confiabilidade.

Os instantes mais comuns de obtenção de dados de Confiabilidade são (Spingarn, 1986a):

1. Testes de aceitação do produto, em condições operacionais e ambientais especificadas, tanto dentro como fora do ambiente de fábrica;
2. Instalação no ambiente do usuário;
3. Operação, tanto na fábrica como no ambiente do usuário;
4. Realização de reparos ou manutenção, tanto em testes de laboratório como no ambiente do usuário.

#### **4.2.2 Usos das Informações de Confiabilidade**

Dados de Confiabilidade são necessários para a avaliação do desempenho de um produto ou equipamento, e para a percepção de quais áreas requerem maiores esforços e ações corretivas. Um sumário de dados quantitativos é um elemento essencial para um programa de

melhoria de Qualidade e Confiabilidade. Relatórios de campo fornecem, em particular, informações importantes e úteis, e que devem afetar significativamente a Qualidade futura dos produtos manufaturados, especialmente em relação à Qualidade dos componentes utilizados.

A disseminação de informações de Confiabilidade é uma parte vital de qualquer programa produtivo de diminuição de custos e melhoria da Confiabilidade de produtos. Alguns dos objetivos de tais programas nos quais a Confiabilidade se encontra inserida são:

- Uso de informações de Confiabilidade como medida do progresso de um novo projeto;
- Uso de informações de Confiabilidade como um meio de identificação de tendências desfavoráveis e desencadeamento de ações corretivas;
- Manutenção de um sistema de informações que armazene os problemas de projeto existentes e ajude continuamente na sua eliminação.

Informações de Confiabilidade são de particular importância durante o projeto do produto. As equipes de projeto necessitam incorporar as informações de Confiabilidade obtidas para produtos anteriores de modo a conceber produtos melhores. Durante as diversas fases de um Programa de Confiabilidade, o mesmo tipo de informação pode ser utilizado de diversas formas. Abaixo são apresentadas possíveis utilizações das informações de Confiabilidade em diversas etapas do processo produtivo (Spingarn, 1986a):

- Fase de Projeto:
  1. Estimar a Confiabilidade e comparar com valores previstos;
  2. Identificar problemas de Confiabilidade;
  3. Calcular as necessidades de reservas logísticas e de parâmetros de Manutenibilidade (tempo e frequência dos reparos);
  4. Medir o progresso desde o pré-projeto, até a fase final do trabalho.
- Fase de Desenvolvimento:
  1. Medir tendências de Confiabilidade;
  2. Demonstrar melhorias (ações corretivas);
  3. Predição de Confiabilidade.
- Fase de Produção:
  1. Continuar as atividades de Confiabilidade iniciadas durante a fase de desenvolvimento;

2. Computar e avaliar a Confiabilidade em campo.
- Em todas as fases:
    1. Identificar problemas de Confiabilidade do produto;
    2. Determinar as causas do problema de Confiabilidade do produto;
    3. Ajudar a eliminar as causas do problema;
    4. Monitorar resultados.

Os custos associados com falhas na Confiabilidade são extremamente importantes em programas de custos da não Qualidade. Dos quatro custos básicos da Qualidade (Prevenção, Avaliação, Falhas Internas e Falhas Externas), os esforços de melhoria da Confiabilidade durante a fase de projeto são considerados como Prevenção. Falhas em campo são consideradas Falhas Externas. Os custos associados às Falhas Externas incluem, além das mudanças de projeto devidas a ações corretivas, o diagnóstico da falha, o reparo, e a eliminação de refugos e retrabalhos.

Para operar com dados de Confiabilidade, além das ferramentas já descritas no capítulo 2 deste trabalho, são ainda utilizadas muitas outras ferramentas estatísticas, tais como (Spingarn, 1986a):

- Gráficos de Pareto (para separar causas principais de problemas de causas secundárias);
- Histogramas (para visualização da variabilidade);
- Gráficos de Dispersão (para análises de Correlação e de Regressão);
- Cartas de Controle (para a visualização de tendências).

Entre as principais informações a serem reportadas estão:

- Causas dominantes de falha, preferencialmente criticizadas por severidade, através de Gráficos de Pareto.
- Gráficos de Confiabilidade considerando o tempo de produção e o tempo de uso;
- Comparações de estimativas de Confiabilidade preditas com os valores obtidos durante a operação em campo.

Sem dados de Confiabilidade de boa qualidade e bem gerenciados, qualquer Programa de Confiabilidade opera às cegas (Spingarn, 1986a).

### **4.3 Ferramentas da Programação de Confiabilidade**

Nenhum Programa de Confiabilidade pode ter pleno êxito se não levar em conta a necessidade da responsabilidade e da Confiabilidade pessoais. Todos os indivíduos envolvidos em um projeto ou processo de fabricação devem estar cientes da importância de sua contribuição, a qual deve estar livre de defeitos. Ao invés de simplesmente jogar a culpa da falta de Qualidade ao longo do tempo na variabilidade existente em qualquer processo, um Programa de Confiabilidade disposto a esforços de melhoria deve começar com um comprometimento de melhoria em cada posto de trabalho e em todos os níveis da organização.

O primeiro passo de uma organização na tentativa de satisfazer as necessidades de Qualidade de seus clientes é traduzir, o melhor possível, tais exigências em características físicas e variáveis do processo de manufatura (Shewhart, 1931, citado por Kapur, 1986). Este é um dos objetivos do QFD (*Quality Function Deployment*)<sup>24</sup>, ou seja, transformar a ‘voz do cliente’ em características de qualidade, configurações e parâmetros de projeto, e características de processo equivalentes através de toda a organização: *marketing*, planejamento do produto, projeto, engenharia, vendas, manufatura e serviços.

O segundo passo na direção da melhoria da Confiabilidade é a utilização de um programa de Confiabilidade centrado na redução da variabilidade em relação a alvos especificados no passo anterior, preferencialmente através da avaliação das perdas devidas a tais variações, conforme sugerido por Taguchi (1980). Sob este enfoque, a função de um programa de Confiabilidade é a de minimizar as perdas globais para a sociedade, tanto para o cliente como para o produtor. De modo a aumentar a Qualidade de um produto (e também sua Confiabilidade) o objetivo torna-se “mudar a distribuição de probabilidades associada aos desvios dos valores alvo” e não apenas observar a fração de unidades não conformes. Assim, a Confiabilidade de um sistema pode ser aumentada desde que seja dada a atenção necessária (de acordo com as perdas geradas em cada caso) a todos os desvios das características de qualidade de seus valores ideais (Kapur, 1986).

É claro que a predição da Confiabilidade é um dos critérios que devem ser utilizados como diferencial entre duas alternativas de projeto. No entanto, deve ser lembrado que tais

---

<sup>24</sup> Este tópico não compete ao escopo desta dissertação e não será abordado, mas pode ser encontrado na referência citada.

estimativas são baseadas apenas nas taxas de falhas de componentes e na experiência do engenheiro em diferentes sistemas. A escolha de uma determinada configuração deve incluir também outros estudos, de modo a garantir produtividade, durabilidade ambiental e habilidades de suporte de tolerâncias a variações das condições ambientais (Marsh & Jacobs, 1989). Tal busca de Qualidade de Projeto (em seu sentido mais amplo, por incluir o tempo) somente pode ser validada através de um Programa de Confiabilidade bem planejado e rigoroso, o qual somente será efetivo se auxiliado por técnicas e ferramentas eficientes e eficazes.

#### 4.3.1 FMEA e FTA

A manutenção de elevados padrões de Qualidade ao longo do tempo exige um fluxo de informações simples, claro e efetivo. As informações são a matéria-prima básica para a realização de esforços conjuntos das equipes de projeto, produto e processo, requerimento imprescindível para a eficácia de um programa de Confiabilidade. A garantia da Qualidade de um produto exige (Ribeiro, 1995b):

- *Excelência de projeto*, que introduz Qualidade potencial ao produto em desenvolvimento;
- *Excelência de processo*, que viabiliza a transformação da Qualidade potencial em Qualidade real ao longo do tempo.

Os mesmos princípios podem ser aplicados para a garantia da Confiabilidade, ou seja, Qualidade que se sustenta ao longo do tempo.

As técnicas de *Failure Mode and Effects Analysis* (FMEA ou, ainda, Análise dos Modos e Efeitos de Falha) e *Failure Tree Analysis* (FTA ou, também, Análise de Árvores de Falha) apresentam-se muito eficazes sob a ótica de melhoria contínua da Qualidade (e, é claro, da Qualidade ao longo do tempo). São técnicas que se destinam a auxiliar a busca pela excelência de produto e de processo, servindo de linha mestra para a disseminação e direcionamento de informações e esforços de melhoria.

Os objetivos principais da FMEA são (Ribeiro, 1995b):

1. Reconhecer e avaliar as falhas potenciais que podem surgir em um produto ou processo;
2. Identificar ações que possam eliminar ou reduzir a chance de ocorrência de falhas;
3. Documentar as análises, criando um referencial técnico.

Da mesma forma, os objetivos principais da FTA são (Ribeiro, 1995b):

1. Identificar, a partir de efeitos indesejáveis, todas as possíveis combinações de eventos que possam ser causadoras de tais problemas;
2. Estudar a probabilidade de ocorrência de cada causa e, a partir de tais informações, conhecer a probabilidade de ocorrência do efeito final, indesejável;
3. Priorizar ações de melhoria para a minimização ou, preferencialmente, a eliminação de tais causas.

Estudos de FMEA e FTA devem ser realizados ciclicamente, acompanhando atividades de melhoria contínua de produtos e de processos. Com a utilização de técnicas padronizadas de análise, tais como FMEA e FTA, as equipes de engenharia podem mais facilmente identificar pontos fracos de sistemas e, conseqüentemente, obter subsídios para atividades de melhoria contínua. O diagnóstico sistematizado de produtos e de processos produzido por tais técnicas auxilia na detecção e eliminação de possíveis modos de falha de modo hierárquico, priorizando causas consideradas mais críticas, quer por sua freqüência, quer por sua importância, ou, ainda, por seu custo.

Sob a ótica de Confiabilidade, tais técnicas promovem a realização de estudos preventivos, isto é, a realização de testes e a execução de ações de melhoria *antes* da utilização em campo de um componente ou produto. Em uma situação ideal, isto significa que, modos potenciais de falha são eliminados do projeto e do processo, garantindo produtos com Qualidade incorporada e, desde que incorporado como objetivo, Qualidade *que se sustenta ao longo do tempo*.

#### **4.3.2 Softwares de Confiabilidade de Sistemas**

Para modelar necessidades de Confiabilidade e determinar planos estatísticos válidos de testes, são necessários muitos cálculos complexos. Sob este ponto de vista, a utilização de *softwares* de apoio é bastante agradável. Um *software* de Confiabilidade deve ser encarado como uma ferramenta destinada a auxiliar o engenheiro na detecção de possíveis melhorias no projeto de um sistema, a partir das informações vindas dos testes de Confiabilidade. Com tal ferramenta em mãos, o Engenheiro de Confiabilidade terá maiores condições de verificar prontamente quais os efeitos de uma alteração de projeto, podendo obter, com maior segurança, resultados sobre a redução de complexidade do sistema, a decisão pelo uso de componentes redundantes ou outras ações corretivas.

Adicionalmente, o uso de opiniões de sistemas especialistas ou de “julgamentos informados” têm se tornado uma prática comum em análises de risco e de Confiabilidade (Aboura *et alli*, 1989). Este expediente tem particularmente se agravado devido ao fato de que os componentes e sistemas atualmente fabricados são, cada vez mais, projetados para garantir altos índices de Confiabilidade. Desta forma, a informação de Confiabilidade obtida com amostras pequenas e em curtos espaços de tempo de teste tem se tornado cada vez mais escassa. A questão reside em como incorporar informações de especialistas nas análises e de forma acessível a todos os interessados. Sob estes aspectos, programas de computador são um veículo bastante atrativo. Através do uso de dados coletados em testes de sobrevivência, de distribuições estatísticas e de uma linguagem mais amigável (por exemplo definido parâmetros de distribuições através de estimativas das medidas de tendência central - média, mediana e moda -, e de variabilidade - desvio padrão e variância), é possível incorporar, com benefícios, a informação de especialistas para a determinação da distribuição de Confiabilidade mais apropriada para novos componentes<sup>25</sup> (Aboura *et alli*, 1989).

Entre muitas outras utilidades que um *software* de Confiabilidade pode oferecer, podem-se citar (adaptado de Troness, 1991):

1. Compreensão da capacidade do produto baseada em sua performance ao longo do tempo;
2. Especificação de objetivos necessários e suficientes para garantir Qualidade que se sustenta ao longo do tempo;
3. Compreensão dos impactos do desempenho em termos de custos de manutenção;
4. Especificação mais acurada das necessidades de testes estatísticos de validação;
5. Predição mais acurada das necessidades e do planejamento de manutenção a partir da Confiabilidade do produto.

Estas informações, uma vez fornecidas ao engenheiro, permitem-lhe entender dinamicamente a correlação entre as diversas características de um produto. Por exemplo, um engenheiro pode ter especial interesse nas metas de Confiabilidade e necessidades de teste de um determinado equipamento. O uso de um *software* pode facilmente auxiliá-lo na alocação de necessidades de Confiabilidade (e então de esforços de melhoria) **ao nível de subsistemas** deste equipamento.

---

<sup>25</sup> Como exemplo, pode-se citar o desenvolvimento de um *software* de Modelagem de Garantias ao longo do calendário, através das informações de falhas, o qual está sendo desenvolvido como subproduto de outra dissertação de mestrado, por Bell, Ribeiro & Vaccaro.

## CAPÍTULO 5

### 5. DESCRIÇÃO DO SOFTWARE *RelySys*

#### 5.1 *Visão Geral e Filosofia do RelySys*

O *RelySys - Reliability Software for Systems Analysis* - é um *software* de análise e estimativa de Confiabilidade de sistemas e foi desenvolvido para demonstrar a utilidade e a aplicabilidade prática do conjunto de conceitos e técnicas descrito nos capítulos anteriores. As capacidades deste *software* contemplam as principais etapas da Análise de Confiabilidade, desde a modelagem do sistema em diagrama de blocos e entrada dos dados de falha até a estimação do comportamento do sistema (ou de componentes isolados) ao longo do tempo<sup>26</sup>.

Totalmente desenvolvido em ambiente gráfico, o *RelySys* tem por princípio facilitar ao usuário o acesso às informações importantes de Confiabilidade sem o penoso esforço da manipulação matemática dos dados de teste. Neste sentido, o *software* conta com um extenso conjunto de rotinas que se encarregam das operações de análise sobre os dados, disponíveis ao usuário através de menus e botões.

O sistema analisa conjuntos de dados completos ou censurados (censuras por tempo, por número de componentes ou aleatória). Diversas estatísticas descritivas são fornecidas ao usuário, tais como MTTF, desvio padrão e variância, bem como distribuições de frequências e histograma dos dados. As distribuições de Confiabilidade são apresentadas para os dados através de histogramas, permitindo uma análise inicial do comportamento de falhas de cada componente. De modo a facilitar e dar maior robustez à modelagem de distribuições estatísticas aos dados de falha, são fornecidos ainda:

- Diagrama Box-Plot;
- Gráficos em papel de probabilidade (para as distribuições incorporadas ao *software*).

---

<sup>26</sup> A versão aqui apresentada analisa apenas sistemas em Série, mas foi planejada de modo a facilitar a inclusão de rotinas de análise de para outras configurações de sistemas, tais como sistemas em paralelo, mistos ou complexos.

Uma vez retirada a informação estatística contida nos dados, pode-se modelá-los através de alguma das seguintes distribuições:

- Distribuição Exponencial
- Distribuição de Weibull
- Distribuição Normal (exceto para amostras com censura aleatória)
- Distribuição LogNormal (exceto para amostras com censura aleatória ou contendo dados iguais a zero)
- Distribuição Uniforme

Caso o usuário defina *a priori* qual distribuição deseja ajustar, o *software* estimará os valores mais adequados para os parâmetros da distribuição escolhida. Também será realizado o Teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar a qualidade do ajuste. Em caso contrário, o *software* encarregar-se-á de estimar os parâmetros de todas as distribuições disponíveis e fornecerá resultados de diversos testes de aderência, tais como o Teste de Kolmogorov-Smirnov e o Teste  $\chi^2$ . Caberá ao usuário escolher, com o auxílio dos resultados fornecidos pelo RelySys, a distribuição mais adequada.

Uma vez ajustados modelos para todos os componentes, o sistema pode ser analisado. O *software* utilizará os modelos ajustados para cada componente e gerará, através do Método de Discretização de Confiabilidades descrito no capítulo 3, um conjunto suficientemente grande de tempos de falha para o sistema. Poderão então ser repetidas as análises acima descritas sobre estes dados, representativos do comportamento de todo o sistema.

O *software* foi desenvolvido em Microsoft Visual Basic 4.0 for Windows 95<sup>TM</sup>. As rotinas implementadas são versões numéricas dos métodos e técnicas descritos anteriormente, projetadas de modo a garantir estabilidade numérica e minimizar, nas análises, a ocorrência de erros provenientes do ambiente computacional, tais como erros de arredondamento. Adicionalmente, nos anexos B, C e D são apresentados os principais algoritmos implementados no *software*.

## 5.2 Limitações do RelySys

Na versão aqui apresentada, o *software* trata apenas do caso de sistemas em série. Tal importante restrição deve-se ao fato de que seu objetivo é o de demonstrar a aplicabilidade das ferramentas teóricas aqui descritas. O único inconveniente existente para a extensão deste *software* para sistemas em paralelo e sistemas mistos seria o esforço adicional de extensão e de programação dos algoritmos. Para o caso de sistemas complexos, no entanto, seriam necessárias outras técnicas de análise de sistemas, tais como métodos de separação de *Tie-Sets* e *Cut-Sets*, cuja implementação computacional pode tornar-se bastante onerosa.

O *software* requer o ajuste de modelos teóricos para cada componente. Todas as análises para o sistema são realizadas com base em tais modelos. Desta forma, modelos inadequados, quer por má escolha do usuário quer por insuficiência de base estatística nas amostras, tenderão a gerar análises equivocadas para o sistema. Tal restrição é justificada ao se considerar o fato de que, em geral, realizar testes para componentes isoladamente é menos custoso economicamente, e mais informativo, do que testar sistemas completos. Assim, os custos de realização de um número suficiente de testes para cada componente, de modo a formar amostras com respaldo estatístico, tenderiam a ser mais baratos e trariam mais informação útil que o mesmo número de testes para sistemas completos, conforme já discutido.

Há uma extensa lista de distribuições que poderiam ser utilizadas para a modelagem das funções de Confiabilidade. No entanto, devido a restrições principalmente de tempo, optou-se pela implementação apenas das distribuições consideradas mais importantes, de acordo com a frequência de utilização em situações práticas no meio industrial. Por estes motivos, por exemplo, optou-se pela não inclusão da distribuição Gamma nesta versão do *software*.

As limitações impostas pelo objeto de gráfico do Microsoft Visual Basic 4.0 não permitem, por exemplo, a geração de histogramas (segundo os preceitos estatísticos). Por este motivo, esta versão do *software* apresenta gráficos de colunas com o nome de histogramas. O mesmo ocorre com os gráficos apresentados para as Funções de Confiabilidade. O objetivo não é o de cometer uma heresia estatística, mas sim o de indicar o real sentido da interpretação que se deve realizar sobre este gráfico. A utilização de um novo objeto gráfico eliminará esta restrição nas versões posteriores do *software*.

## 5.3 Instalação e Necessidades Mínimas de Ambiente Operacional

### 5.3.1 Necessidades Mínimas de Ambiente

Para seu funcionamento, o RelySys necessita de um microcomputador com as seguintes características:

- IBM-PC/AT compatível;
- Processador de 80486 com velocidade de 100 MHz ou superior;
- Placa controladora de vídeo SVGA ou superior;
- Resolução mínima de vídeo de 800 x 600 pixels;
- 8 *megabytes* de memória RAM (16 *megabytes* são recomendados para melhor *performance*);
- 2 *megabytes* de espaço em disco;
- Sistema operacional Microsoft Windows 95 ou superior;
- *Mouse* compatível.

### 5.3.2 Instalação

Para proceder a instalação do RelySys deve-se:

1. Inserir o primeiro disquete de instalação no *drive* A: (ou B:).
2. A seguir, pode-se utilizar qualquer procedimento padrão de instalação de *software* para Windows 95, tais como:
  - A partir do menu **Iniciar**, escolher Executar e digitar A:\*setup.exe*
  - A partir do **Painel de Controle**, seleccionar o ícone “Instalar ou remover programas”. Seleccionar então “Instalar” e, a seguir, “Concluir”. Seguir então as instruções que surgirão na tela.
  - A partir da **janela do drive**, clicar duas vezes sobre o ícone “Setup.exe”
  - A partir do **Windows Explorer**, clicar duas vezes sobre o ícone “Setup.exe”

3. O programa de instalação encarregar-se-á de copiar os arquivos e configurar os menus do Windows.

### 5.3.3 Remoção

Em qualquer instante o programa pode ser removido do computador, procedendo-se da seguinte forma:

1. A partir do menu **Iniciar**, seleccionar a opção **Configurações** e, a seguir, **Painel de Controle**.
2. A partir do **Painel de Controle**, seleccionar o ícone “Instalar ou remover programas”.
3. Seleccionar “RelySys” na lista de programas passíveis de remoção.
4. Seleccionar a opção “Remover”.
5. Remover, manualmente, os arquivos de dados e os directórios criados para o RelySys.

## 5.4 Descrição do Ambiente de Trabalho

O ambiente de trabalho do RelySys é composto de uma Área de Edição, um Painel de Controle, uma Barra de Menus e uma Barra de Ferramentas. O *software* pode ser totalmente operado através do *mouse* e, em cada etapa da operação, guia o usuário, disponibilizando apenas as opções compatíveis com as informações existentes.

### 5.4.1 Área de Edição

Nesta região o usuário gera graficamente o diagrama de blocos que representará o sistema em série. Este diagrama será a base para todas as demais ações e análises realizadas pelo *software*, tais como a seleção de componentes e a entrada dos dados de falha.

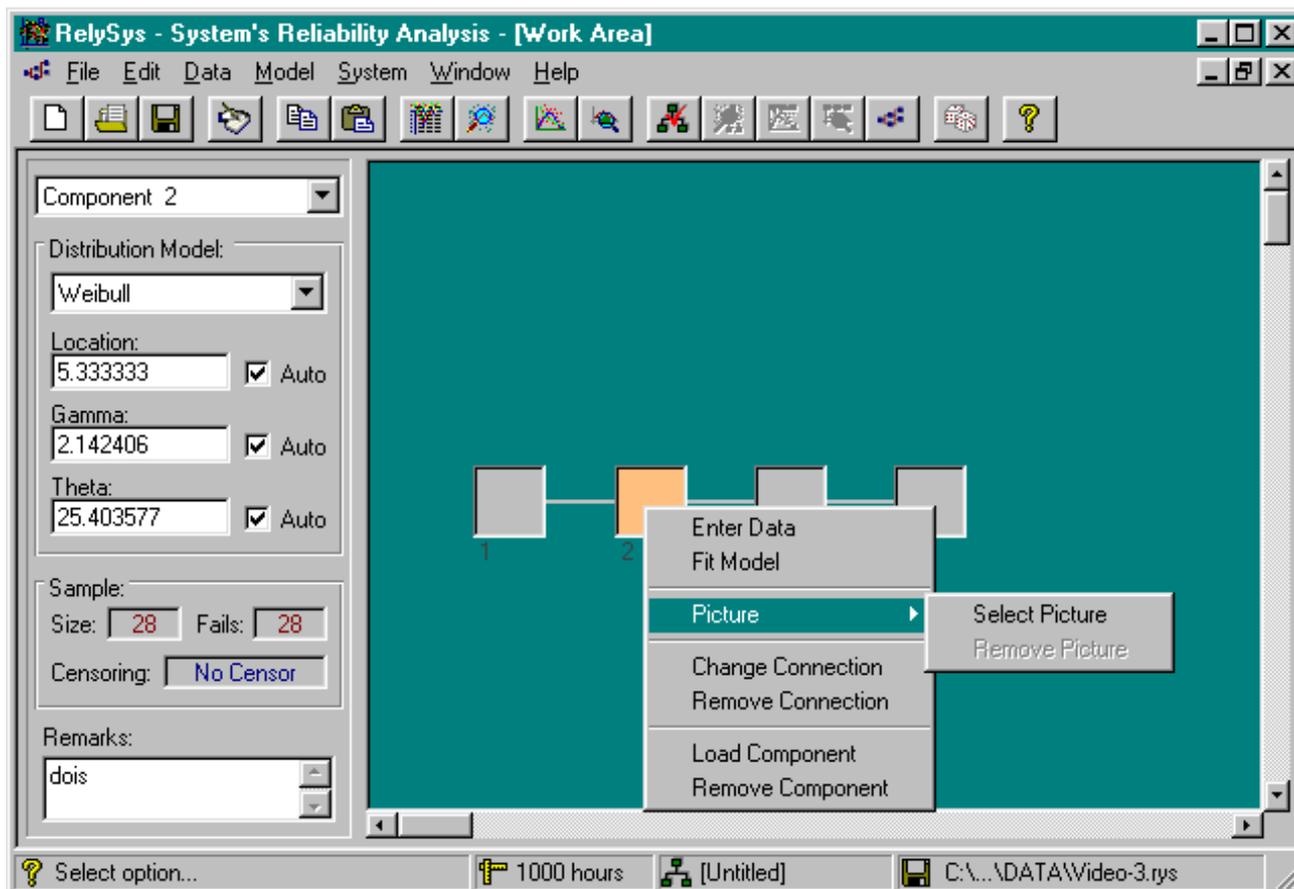


Figura 27: Ambiente de trabalho do RelySys, destacando um sistema de quatro componentes e o menu de opções para o componente selecionado (componente 2).

Para a criação de um sistema, devem-se gerar os componentes e, em seguida, as conexões entre os componentes. Um componente é criado pelo duplo clique do botão esquerdo do *mouse* sobre o fundo da Área de Edição. Uma vez gerado o componente, diversas opções tornam-se acessíveis através da barra de menus. As opções mais úteis para a seqüência do trabalho são disponibilizadas através de um menu *pop-up*, que é ativado pressionando-se o botão direito do *mouse* sobre o ícone do componente. Neste menu são encontradas as seguintes opções:

- **Enter Data:** atalho para a opção *Enter Data*, encontrada no menu *Data* (vide seção 5.4.3).
- **Fit Model:** atalho para a opção *Fit Model*, encontrada no menu *Model* (vide seção 5.4.4).
- **Picture:** submenu que permite ao usuário associar ou remover uma figura ao componente selecionado.
- **Connect Next:** opção que cria conexões entre componentes, ou seja, que define a estrutura lógica do sistema. Para criar uma conexão entre dois componentes, deve-se escolher esta

opção sobre o componente mais à esquerda. Uma linha será gerada, a partir deste componente, podendo ser movimentada livremente até o interior do componente alvo, mais à direita. Clicando-se sobre o componente alvo, a linha será conectada a ele e será estabelecida uma conexão lógica entre os componentes. Clicando-se sobre o fundo da Área de Edição durante o processo de conexão, o processo é interrompido.

- **Change Connection:** opção semelhante à anterior, mas disponível apenas para componentes que já possuam conexão estabelecida.
- **Remove Connection:** opção para remoção de conexão entre um componente e seu sucessor.
- **Load Component:** opção para carregamento dos dados de um componente a partir de um arquivo. Esta opção será melhor descrita adiante, juntamente com a opção “*Save System As Component*” do menu *System* (vide seção 5.4.3.5.5).
- **Remove Component:** esta opção permite a remoção de um componente da Área de Edição. Uma tela de confirmação surge ao selecionar-se esta opção. Uma vez removido um componente, os dados nele contidos são perdidos. Caso este componente esteja conectado a outros, as conexões são atualizadas automaticamente.

Após gerado um componente, ele pode ser movido livremente pela área de edição através de um processo padrão de “arrastar e soltar”: pressiona-se o botão esquerdo do *mouse* sobre o componente e, mantendo-o pressionado, move-se o cursor para o ponto desejado. O ícone representando o componente será posicionado no local onde o botão do *mouse* for liberado. As conexões existentes serão movidas automaticamente.

Clicando-se uma vez sobre um componente, seleciona-se o componente. Clicando-se uma vez sobre o fundo da Área de Edição com o botão direito do *mouse*, seleciona-se todo o sistema.

## 5.4.2 Painel de Controle

Esta região apresenta as informações básicas para a identificação de cada componente do sistema, bem como para o sistema em si. Através do Painel de Controle pode-se selecionar e modificar as distribuições, e verificar informações genéricas para as amostras de cada componente. Pode-se ainda acrescentar algum comentário de referência para o arquivo de dados. O comentário será gravado juntamente com os dados, em arquivo.

O Painel de Controle é dividido nas seguintes partes:

#### 5.4.2.1 Caixa de Seleção de Componentes

A escolha de um componente ou de todo o sistema é realizada através de um clique. Sua utilização equivale a clicar sobre um determinado componente ou sobre o fundo da área de edição. Uma vez selecionado um componente, as informações sobre a distribuição para ele escolhida e eventual amostra são automaticamente atualizadas nos demais controles.

No caso específico de um sistema com apenas um componente, a escolha da opção *System* torna-se inválida e é automaticamente corrigida. Isto porque o único componente é o próprio sistema e nenhuma análise adicional pode ser realizada.

#### 5.4.2.2 Caixa de Seleção de Distribuições

Este comando tem duas finalidades:

- apresentar ao usuário o modelo associado a seu conjunto de dados, para consulta, quando for selecionado um componente.
- permitir a seleção de uma distribuição estatística para a modelagem das funções de Confiabilidade de um determinado componente (ou do sistema, após as etapas de modelagem dos componentes e análise do sistema).

Quando é selecionada uma distribuição, as caixas de informação de parâmetros são automaticamente atualizadas, e seu conteúdo é tornado nulo. O usuário pode, então, realizar duas ações:

- Preencher os valores dos parâmetros manualmente, sem o respaldo do *software*, como no caso de componentes “teóricos”, para os quais não se tem dados de testes ou cujos ajustes foram realizados em outro *software*.
- Escolher a opção de ajuste de distribuição. Esta opção somente estará habilitada quando houver dados para o componente em questão.

Uma distribuição cujos parâmetros são todos nulos é automaticamente descartada ao ser selecionado outro componente.

#### 5.4.2.3 Caixas de Informação de Parâmetros

Estas caixas são destinadas a receber os valores dos parâmetros associados a uma determinada distribuição. Os valores podem ser advindos de rotinas de estimação contidas no programa ou da intervenção do usuário.

Os valores introduzidos devem ser não negativos, uma vez que os dados utilizados em amostras de Confiabilidade podem ser sempre associados a “tempos” de falha e, então, os modelos implementados têm apenas parâmetros com esta natureza. Qualquer alteração nos valores dos parâmetros é automaticamente reconhecida pelo sistema.

#### 5.4.2.4 Painel de Sumário de Dados

São apresentados o tamanho da amostra, o número de falhas contido na amostra e o tipo de censura existente sobre os dados.

### 5.4.3 Menus e Barra de Ferramentas

#### 5.4.3.1 Menu File

Neste menu são apresentadas as opções relacionadas a entrada e saída de dados.

##### 5.4.3.1.1 New System

Permite a criação de um novo sistema. O usuário tem a possibilidade de introduzir um nome para o sistema e escolher entre começar com a área de trabalho vazia ou com uma configuração pré-pronta de sistema. Caso escolha a segunda opção, é necessário indicar o número de componentes do sistema.

No caso de o usuário estar trabalhando com outro sistema previamente e não ter salvo eventuais modificações, o RelySys emitirá um pedido de confirmação desta ação.

Atalho na barra de ferramentas:

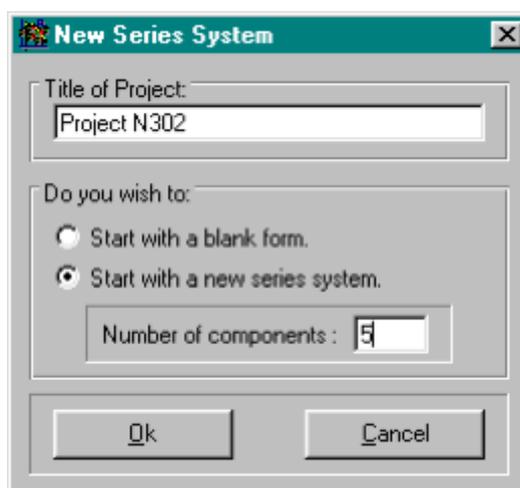


Figura 28: Opções para criação de um novo sistema.

#### 5.4.3.1.2 *Open System*

Carrega as informações de um arquivo previamente gravado pelo RelySys para a memória. O sistema é automaticamente configurado no ambiente de trabalho no mesmo estágio em que havia sido gravado anteriormente.

No caso de o usuário estar trabalhando com outro sistema previamente e não ter salvo eventuais modificações, o RelySys emitirá um pedido de confirmação desta ação.

Atalho na barra de ferramentas:



#### 5.4.3.1.3 *Close System*

Fecha uma sessão de trabalho no RelySys. Caso tenham sido feitas modificações nos dados apresentados na área de trabalho, é pedida uma confirmação antes do fechamento.

#### 5.4.3.1.4 *Save System e Save As...*

Na opção *Save System* o RelySys salva para um arquivo todas as informações contidas em sua estrutura de dados: configuração do sistema; nomes das figuras, dados e distribuições associados a cada componente; dados de análise gerados para o sistema; etc.

Caso o sistema não esteja previamente associado a um arquivo de dados, será pedido o nome de um arquivo através da opção *Save As...*

Atalho na barra de ferramentas:



#### 5.4.3.1.5 *Save Graphics...*

Esta opção somente encontra-se ativa nas janelas que possuem gráficos. Permite a gravação de um gráfico apresentado no RelySys nos formatos “Microsoft Windows *Metafile*” (.wmf) ou “Bitmap” (.bmp).

#### 5.4.3.1.6 *Report Manager*

Permite a escolha de quais as informações deverão ser enviadas para o relatório de análises: componentes devem ser incluídos e relatórios de quais análises. Esta flexibilidade permite que o usuário enfatize apenas as informações que deseja nos relatórios.

O relatório é gerado em formato Windows (*Rich Text Format*), podendo ser carregado em editores de texto compatíveis.

Atalho na barra de ferramentas:



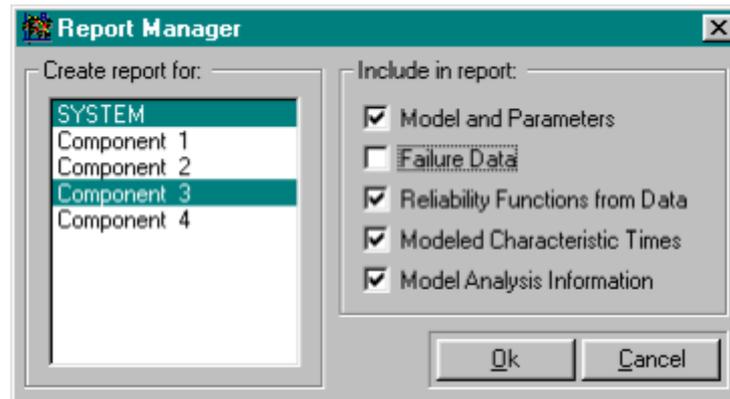


Figura 29: Janela do Report Manager.

#### 5.4.3.1.7 Print Graphics

Permite que um gráfico seja enviado diretamente para a impressora. Esta opção só encontra-se ativa para janelas que contenham gráficos.

Por restrição do objeto gráfico utilizado, a qualidade do gráfico impresso dependerá não só da qualidade da resolução utilizada, mas também do tamanho do gráfico apresentado. Assim, para se obter gráficos com a melhor qualidade possível é recomendável maximizar a tela contendo o gráfico antes de selecionar esta opção.

#### 5.4.3.1.8 Exit

Termina a execução do RelySys. Caso haja um sistema sendo analisado e alguma informação não tenha sido salva, o programa pedirá uma confirmação para esta ação.

#### 5.4.3.2 Menu Edit

Este menu apresenta as principais opções de transferência de informações no ambiente Microsoft Windows.

##### 5.4.3.2.1 Copy

Este é um submenu que possui duas opções:

- **Copy Data:** para enviar o conteúdo de uma janela para a área de transferência: texto contido em janelas de análise, bem como texto contido em tabelas. Por restrições de compatibilidade com aplicativos diversos, nenhuma formatação é copiada.
- **Copy Graphic:** para enviar gráficos para a área de transferência. Os gráficos são enviados em formato “Bitmap”.

Atalho na barra de ferramentas: 

#### 5.4.3.2.2 Paste

Permite colar texto nas diversas caixas de texto existentes no programa. Este artifício foi incluído para permitir que parâmetros calculados em outros *softwares* possam ser imediatamente incluídos em componentes de um sistema.

Atalho na barra de ferramentas:



#### 5.4.3.2.3 Settings

Permite alterar algumas opções do RelySys, desde seu ambiente até a forma de tratamento dos dados:

- **File Locations:** indicação dos diretórios onde devem ser gravados dados e figuras. O diretório *Data* é destinado a arquivos de dados, gráficos e relatórios gerados pelo RelySys. O diretório *Picture* é destinado às figuras a serem associadas a cada componente.

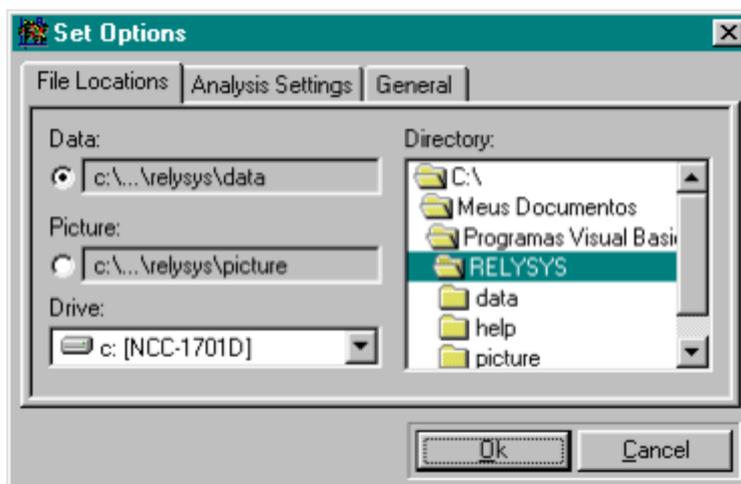


Figura 30: Determinação da localização de arquivos do RelySys.

- **Analysis Settings:** escolha da unidade dos dados que estão sendo analisados, bem como do nível de confiança para as predições estatísticas. Há ainda a opção de utilização de intervalos de classe calculados com ou sem arredondamento para a primeira casa decimal. Esta opção é utilizada para a definição de distribuições de frequências, bem como histogramas e gráficos.

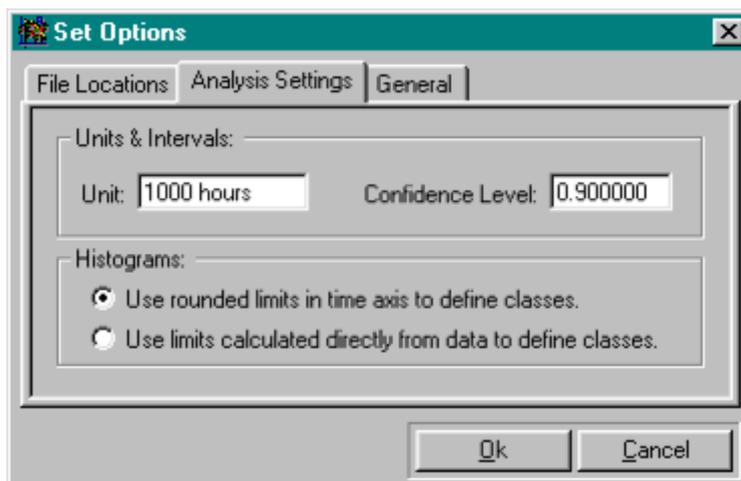


Figura 31: Opções de modificação na forma de tratamento dos dados.

- **General:** definição do tamanho dos componentes e dos separadores decimais interno e externo. Sempre que uma informação numérica for exportada, seu separador decimal será convertido para o separador escolhido como separador externo. Da mesma forma, dados importados para o RelySys serão convertidos para o padrão do separador decimal interno. Tais opções foram incluídas por questões de compatibilidade de língua (Língua Portuguesa e Língua Inglesa) entre o *software* e aplicativos em padrão Microsoft Windows.

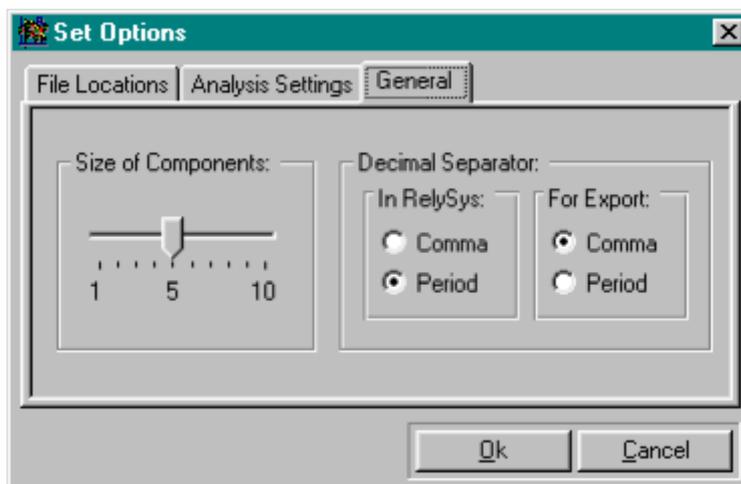


Figura 32: Opções de configuração do ambiente de trabalho.

#### 5.4.3.3 Menu Data

Este menu apresenta as opções de entrada e tratamento dos dados de falha.

#### 5.4.3.3.1 Enter Data

Lança uma janela de entrada e edição de dados, composta por uma caixa de texto, onde pode ser atribuído um nome ao componente ou sistema, e uma tabela, onde os dados do componente podem ser inseridos. Para o caso do sistema, a tabela não pode ser editada.

A janela de entrada de dados possui um menu contendo opções de edição, tais como:

- Copiar ou recortar dados e enviá-los para a área de transferência;
- Colar dados contidos na área de transferência;

Figura 33: Janela de entrada de dados

- Inserir e remover linhas na tabela. A operação de inserção de linhas pode também ser realizada mantendo-se pressionada a tecla **Control** e pressionando-se a tecla **Insert**. Analogamente, a remoção de linhas pode ser realizada mantendo-se pressionada a tecla **Control** e pressionando-se a tecla **Delete**.

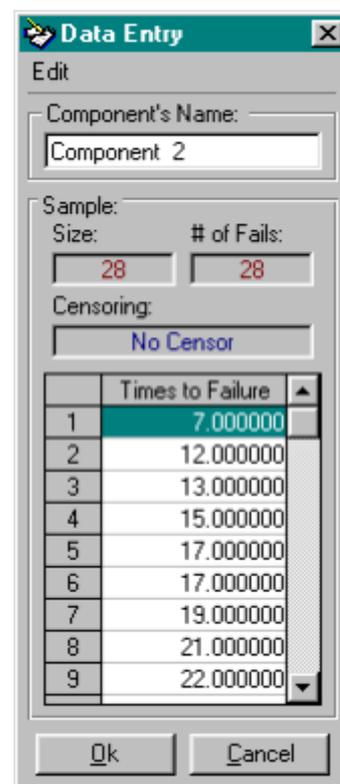
- Limpar todos os valores existentes na tabela de dados.

Se uma região for marcada na tabela, pode-se realizar as opções acima descritas para múltiplas linhas simultaneamente.

Para a edição dos dados na tabela foram acrescentados ainda os seguintes comandos:

- **Delete**: apaga o conteúdo de uma célula.
- **P ou p (Previous value)**: repete o valor contido na célula imediatamente anterior. Esta opção foi acrescentada devido à natureza dos dados de falha. Muitas vezes, como no caso de censuras de tipo I ou de tipo II, dados de falha são extensamente repetidos.
- **C, c ou +**: alterna o estado de um dado entre dado de falha ou dado censurado. Uma das formas de representação de dados censurados é a utilização do sinal “+” após o valor do dado.

Após a edição dos dados, o usuário deve clicar sobre o botão *Ok* para confirmar as alterações realizadas e proceder à análise de censura dos dados. Caso esta opção seja escolhida



e haja alguma distribuição já ajustada para os dados previamente existentes, o ajuste anterior será descartado.

#### 5.4.3.3.2 Descriptive Statistics

São apresentadas as principais estatísticas descritivas dos dados analisados: Medidas de Tendência Central: MTTF e Quartis; Medidas de Variabilidade: Desvio Padrão, Variância e Coeficiente de Variação, Limite Inferior e Limite Superior da amostra; Distribuição de Freqüências.

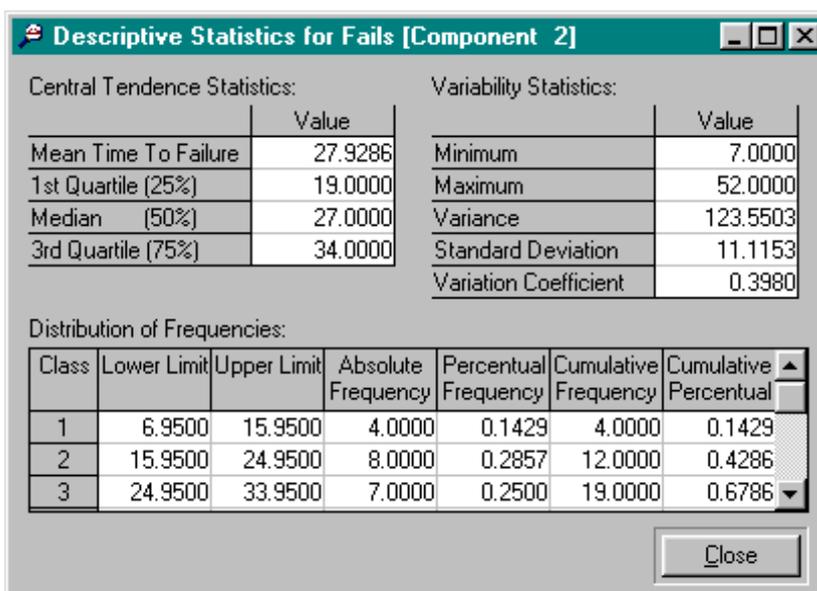


Figura 34: Tela de Estatísticas Descritivas

#### 5.4.3.3.3 Histogram

Produz uma representação gráfica para a Distribuição de Freqüências apresentada na opção anterior. Permite a visualização do Histograma de Falhas utilizando freqüências absolutas ou freqüências relativas. Na seção 5.2 foram comentadas as restrições computacionais que levaram ao uso de um gráfico de colunas em lugar de um histograma.

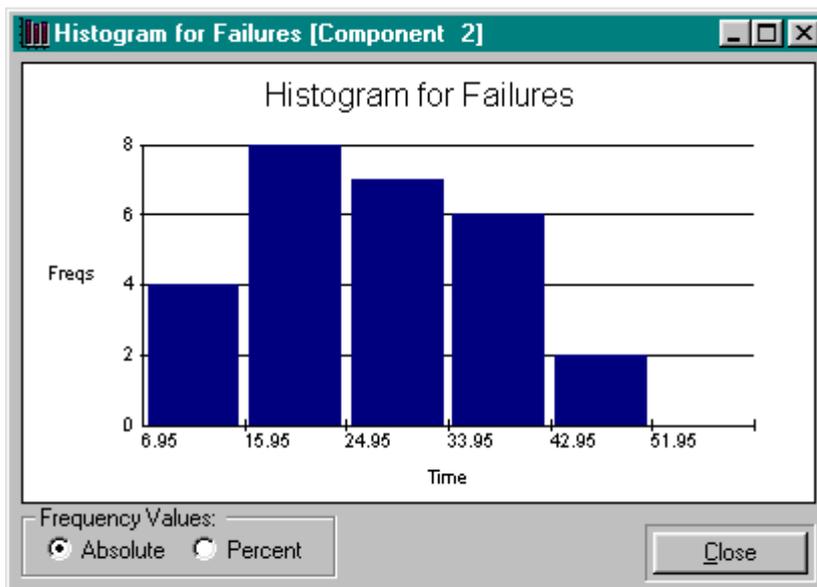


Figura 35: Tela de Histograma para um conjunto de dados

#### 5.4.3.3.4 Reliability Functions

Estima as Funções de Confiabilidade para os dados, apresentando uma tabela com os valores característicos de cada função. Apresenta também a visualização de tais funções através de gráficos discretizados.

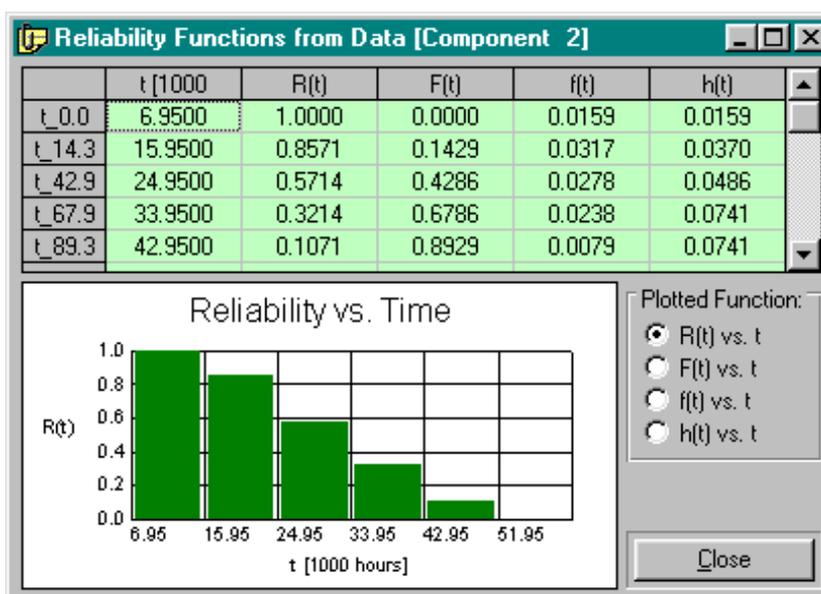


Figura 36: Tela de Funções de Confiabilidade para os dados de um componente

#### 5.4.3.3.5 Box-Plot

Apresenta o *box-plot* dos dados do componente selecionado ou do sistema.

O box-plot pode ser copiado para a Área de Transferência ou gravado em arquivo, mas somente em formato “Bitmap” (.bmp).

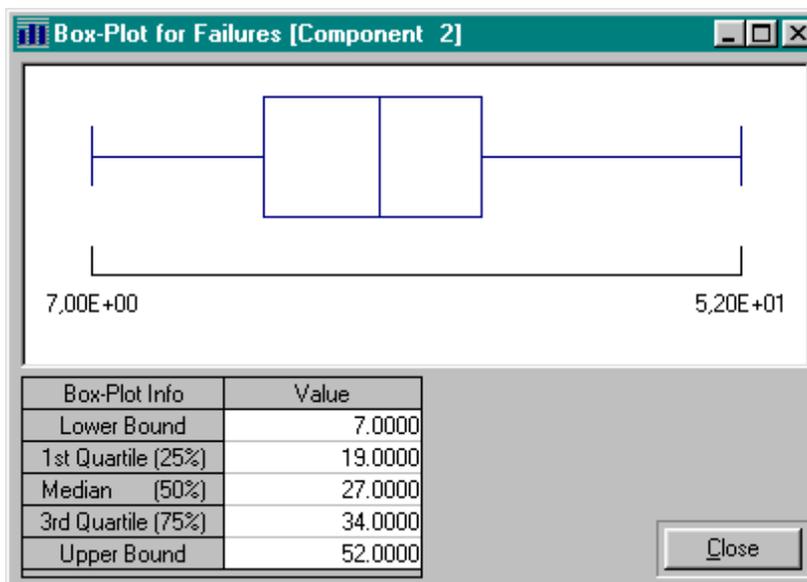


Figura 37: Tela de Box-Plot para os dados de um componente

#### 5.4.3.3.5.1 Probability Papers

Esta opção apresenta uma tela onde podem ser visualizados os dados em papel de probabilidade. Cada distribuição possui um papel de probabilidade diferenciado, de acordo com a natureza de sua expressão algébrica. Por este mesmo motivo, para certos conjuntos de dados alguns papéis de probabilidade podem não estar disponíveis porque as distribuições associadas não podem ser aplicadas para ajuste.

Os papéis de probabilidade apresentam ainda a possibilidade de traçar a reta ajustada ao conjunto de dados segundo o modelo de papel escolhido. Quanto mais próxima desta reta for a configuração dos dados no papel de probabilidades, maior será a possibilidade de que tal ajuste seja adequado. Dados atípicos podem ser igualmente reconhecidos por se apresentarem muito distanciados da massa de dados.

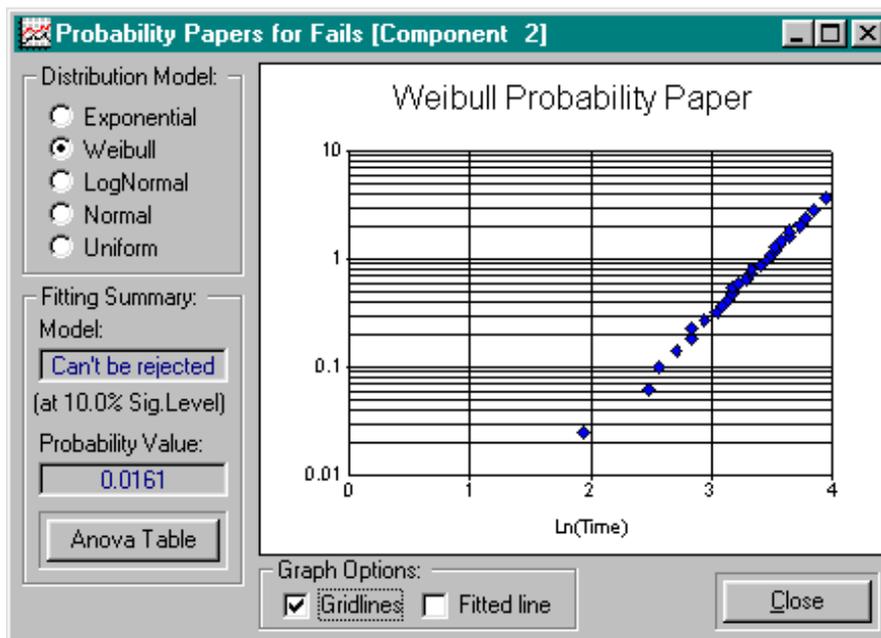


Figura 38: Papel de Probabilidades Weibull evidenciando o ajuste de um conjunto de dados a esta distribuição

Para um dado papel de probabilidade, pode-se ainda obter informações sobre a qualidade do ajuste da distribuição através da tabela ANOVA para a reta ajustada neste papel.

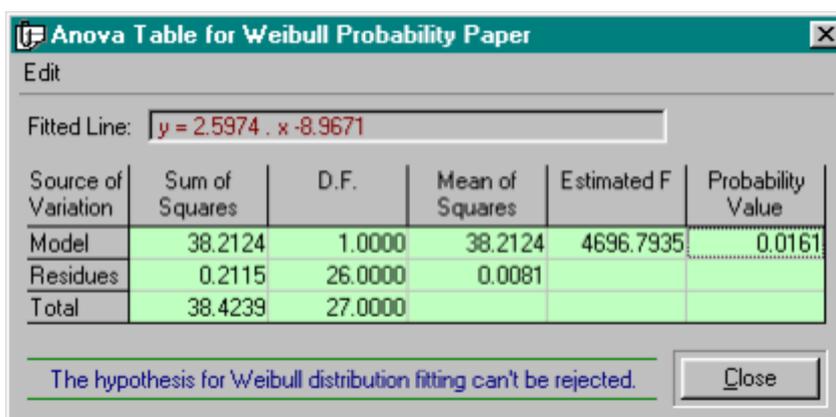


Figura 39: Tabela ANOVA para a reta ajustada no papel de probabilidade acima apresentado

#### 5.4.3.3.6 Fit Model

Ajusta modelos a um conjunto de dados. Esta opção pode ser utilizada para componentes que possuam dados ou para o sistema, após o *software* ter-lhe gerado dados de falha.

Caso o usuário escolha um modelo específico na Caixa de Seleção de Modelos, o *software* ajustará os parâmetros do modelo escolhido automaticamente. Em caso contrário, serão ajustados todos os modelos disponíveis para o conjunto de dados e será apresentada uma

tela, contendo os resultados dos ajustes, além de diversas estatísticas de verificação de qualidade de ajuste: Erro Quadrático Médio (*Mean Square Error*); Estatística KS e Nível de Confiança do Teste de Kolmogorov-Smirnov; Estatística  $\chi^2$  e Nível de Confiança do Teste  $\chi^2$ .

Os modelos serão apresentados em ordem decrescente de qualidade de ajuste. Na última coluna é apresentado o resultado geral de aceitação de cada modelo. Caso o ajuste seja julgado adequado por ambos os testes, receberá a marca ‘não pode ser rejeitado’. Em caso contrário, será marcado com ‘rejeitar modelo’. O rigor utilizado no critério de aceitação dos modelos depende do nível de confiança definido na opção *Settings* (vide seção 5.4.3.2.3).

Fitted Model	Mean Squared Error	Kolmogorov-Smirnov Test		Chi-Square Test		Acceptance Criteria at 10.0% Significance Level
		DN Statistic	Right Tail Probability	Chi-Square Statistic	Right Tail Probability	
Normal	0.1343	0.0241	0.999999	0.9463	0.995649	Can't reject
Weibull	0.0799	0.0162	0.999999	0.3831	0.998985	Can't reject
LogNormal	0.3735	0.0615	0.837988	7.2178	0.406565	Can't reject
Uniform	0.8524	0.1256	0.081658	27.5558	0.000265	Reject model
Exponential	1.5404	0.2434	0.000012	62.1939	4.779E-7	Reject model

Location:

Gamma:

Theta:

Figura 40: Tela de comparação de ajustes distribuições para um mesmo conjunto de dados.

Atalhos na barra de ferramentas:

para componentes: 

para o sistema: 

Ao selecionar um modelo da lista apresentada, o usuário tem a sua disposição, também, a tabela do Teste  $\chi^2$ , desde que os graus de liberdade sejam suficientes para a realização do teste.

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chi Square Term
Below	9.8500	5.0000	4.5140	0.0523
9.8500	12.8500	9.0000	8.3244	0.0548
12.8500	15.8500	13.0000	13.3904	0.0114
15.8500	18.8500	16.0000	17.1484	0.0769
18.8500	21.8500	18.0000	18.0658	0.0002
21.8500	24.8500	16.0000	15.7658	0.0035
24.8500	27.8500	11.0000	11.3468	0.0106
27.8500	30.8500	7.0000	6.6664	0.0167
30.8500	33.8500	3.0000	3.1546	0.0076
33.8500	Above	2.0000	1.5235	0.1491

Degrees of Freedom:  [ (# of classes) - (# of parameters) - 1 ]

Chi-Square Statistic:

Significance Level:

Figura 41: Tabela do Teste  $\chi^2$  para o modelo Weibull selecionado na figura anterior.

#### 5.4.3.4 Menu Model

Este menu apresenta opções de análise para um modelo que tenha sido selecionado para um componente ou para o sistema. As análises opções de contemplam gráficos das Funções de Confiabilidade, estimação intervalar de parâmetros e estimação de tempos característicos de Confiabilidade.

##### 5.4.3.4.1 Model Analysis

Exibe uma tela comparativa entre estatísticas provenientes do conjunto de dados e estatísticas provenientes do modelo analisado. Caso não haja dados associados, apenas as estatísticas do modelo são apresentadas.

Também é apresentada uma tabela contendo os intervalos de confiança para os principais parâmetros associados ao modelo escolhido. Estes intervalos podem ser recalculados através da modificação do nível de confiança apresentado ao lado da tabela. Como o cálculo de alguns intervalos de confiança exige o valor do tamanho de uma amostra, caso não haja dados é suposto um tamanho de amostra igual a 30 dados e uma indicação da suposição é acrescentada ao cabeçalho da tabela.

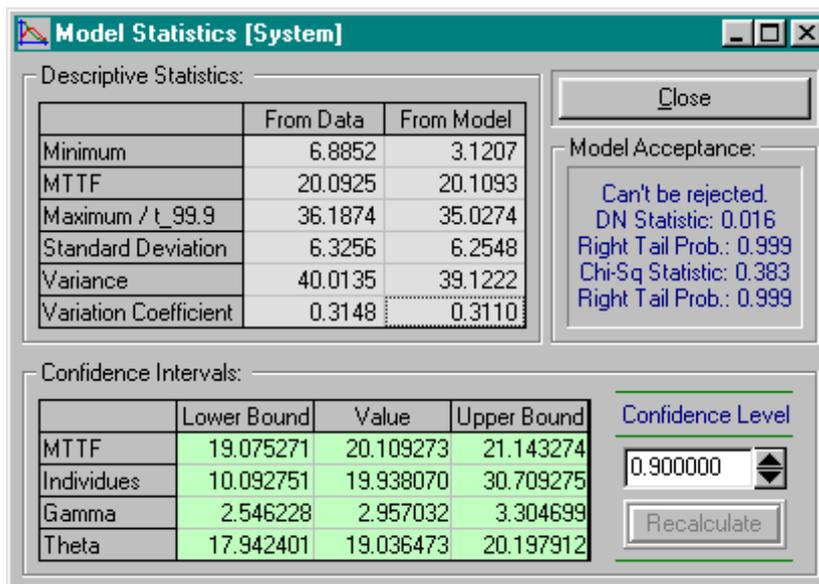


Figura 42: Tela de análise de modelo para um sistema cujos tempos de falha foram modelados por uma distribuição Weibull.

#### 5.4.3.4.2 Characteristic Times

Nesta janela é apresentada uma tabela de Tempos Característicos de Confiabilidade, onde encontram-se, além dos valores dos tempos característicos, também os respectivos valores de Confiabilidade, Probabilidade Acumulada de Falhas, Densidade de Probabilidade de Falhas e Taxa de Risco.

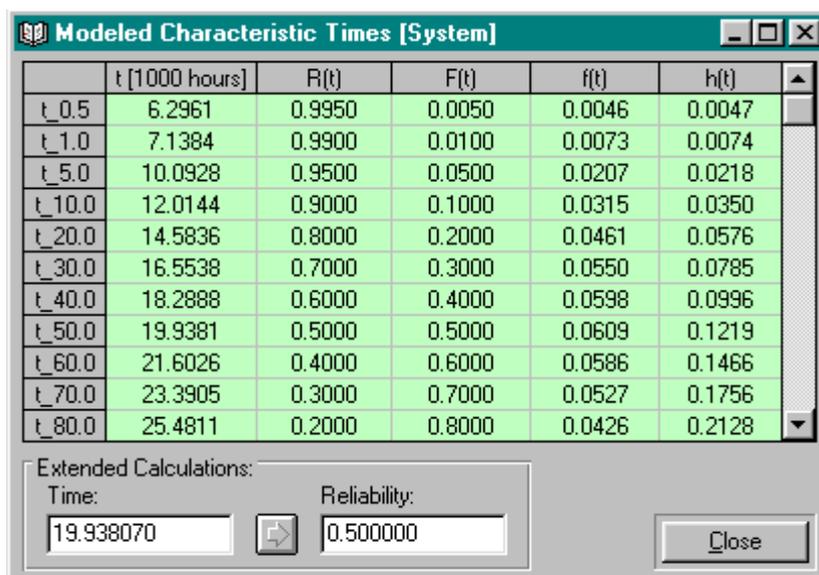


Figura 43: Janela de tempos característicos de Confiabilidade, apresentando a tabela de Tempos Característicos e a calculadora de tempos e confiabilidades para o modelo associado a um componente.

É encontrada também uma calculadora de tempos e confiabilidades. Esta calculadora funciona em dois sentidos, isto é: fornecendo-se um valor de tempo, será calculada a Confiabilidade associada; fornecendo-se um valor de Confiabilidade, será calculado o respectivo tempo característico. Os valores são estimados a partir do modelo associado ao componente ou ao sistema.

#### 5.4.3.4.3 Reliability Graphics

Nesta tela são apresentados dois gráficos de Funções de Confiabilidade, um representando as estimativas a partir dos dados (caso existam), e o outro, valores calculados com base no modelo escolhido.

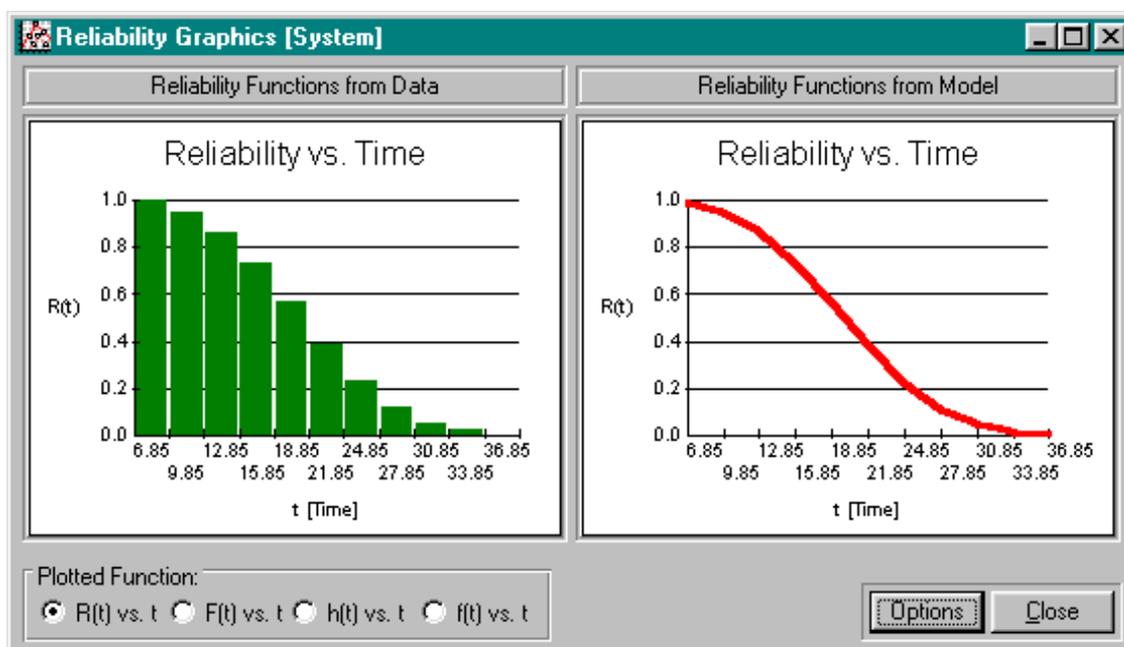


Figura 44: Janela de análises gráficas de Confiabilidade, apresentando os gráficos de Confiabilidade para um sistema. À esquerda, o estimado a partir dos dados e, à direita, o calculado a partir do modelo ajustado para os dados.

Clicando-se duas vezes sobre um gráfico, pode-se maximizar ou minimizar seu tamanho. Pressionando-se o botão “Options”, têm-se disponíveis opções para a configuração dos gráficos, tais como determinação de extremos e alteração das linhas de grade.

#### 5.4.3.4.4 Simulate Data

Uma vez que um modelo foi associado a um conjunto de dados de um componente, pode-se simular dados a partir deste modelo. Esta é uma facilidade que foi incluída no RelySys

de modo a permitir a geração de dados aleatórios a partir de uma distribuição específica. Sua utilização não está relacionada aos procedimentos de análise de Confiabilidade do *software*.

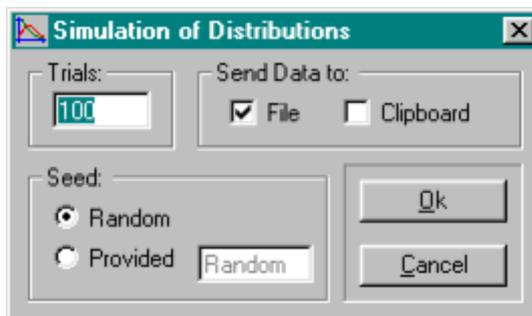


Figura 45: Tela de simulação de distribuições. A distribuição escolhida e os parâmetros são visíveis no Painel de Controle do software.

Através desta opção é apresentada uma tela onde o usuário pode definir o número de ensaios que deseja realizar e ainda escolher entre:

- utilizar uma semente aleatória para a simulação (calculada a partir do “*clock*” do processador) ou prover um valor fixo de semente (o que permite a realização de testes comparativos de simulação).
- enviar os dados simulados para a Área de Transferência, para um arquivo em formato texto, ou simultaneamente para ambos.

Atalho na barra de ferramentas: 

#### 5.4.3.5 Menu System

Este menu apresenta opções destinadas à análise de sistemas. Por este motivo, só é ativado se existirem dois ou mais componentes na Área de Edição. As seguintes opções são encontradas:

##### 5.4.3.5.1 Analyse System

Gera dados de falha para o sistema, calculando tempos a partir do modelo atribuído a cada componente. A amostra gerada contém 1.000 tempos de vida e os respectivos valores de Confiabilidade. Os dados calculados para os componentes são tratados segundo a metodologia descrita para o caso de Sistemas em Série, obtendo-se um conjunto de dados para o sistema com valores de Confiabilidade desde 100,0 % até 0,1 %. A partir desta amostra são definidos 100 valores representativos dos percentis, por amostragem sistemática e interpolações lineares

nos valores de Confiabilidade, os quais serão posteriormente utilizados para o ajuste de um modelo para os dados de falha do sistema.

Caso haja componentes desconectados ou sem distribuição associada, será emitida uma mensagem de erro e indicada a primeira fonte de inconsistência.

Após a realização desta análise, as demais opções do menu *System* são habilitadas.

Atalho na barra de ferramentas: 

#### 5.4.3.5.2 Reliability and Time Forecasts

Lança uma calculadora de tempos e confiabilidades. Os valores calculados são obtidos via interpolações lineares sobre a base de 1.000 dados calculada pela opção anterior. Por esta razão, os valores calculados não podem ultrapassar o limite inferior de 0,1 % de Confiabilidade.

Como na janela de Análises de Confiabilidade, esta calculadora também pode ser utilizada em dois sentidos: fornecendo-se um valor de tempo é estimada a Confiabilidade associada para o sistema naquele instante e vice-versa.

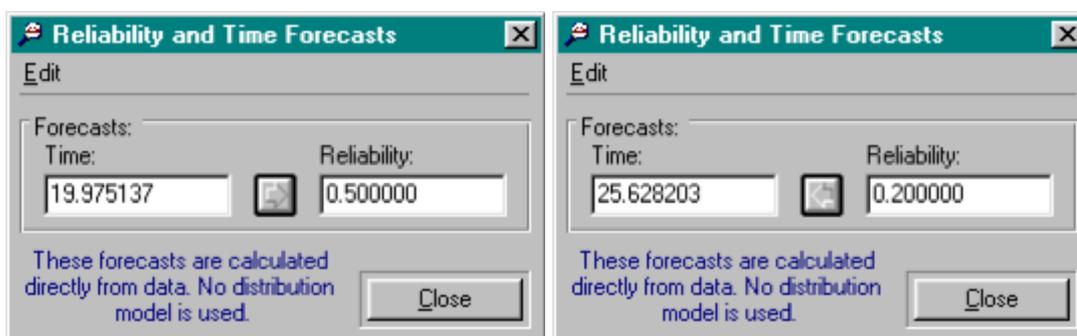


Figura 46: Predição de tempos e confiabilidades para um sistema.

#### 5.4.3.5.3 Pareto Analysis

Constrói o Gráfico de Pareto para os componentes do sistema, permitindo priorizar os componentes por criticidade de:

- **Falhas:** apresenta a contribuição percentual de cada componente sobre o total de falhas do sistema. Para melhor visualização dos níveis de criticidade dos componentes, é definido um padrão de cores, cujas faixas de variação podem ser alteradas a critério do usuário: componentes ‘fracos’, isto é, com alto percentual de falhas, recebem a cor vermelha;

componentes com percentuais intermediários de falha recebem a cor amarela; e componentes baixos percentuais de falha, considerados ‘fortes’, recebem a cor verde.

- **MTTF**: Os componentes são ordenados de forma decrescente pelos valores de MTTF, sendo que os mais críticos tenderão a ter menores tempos de falha e, portanto, encontrar-se-ão mais à direita do Gráfico de Pareto.
- **$t_{10}$ ,  $t_{50}$  ou  $t_{90}$** : A interpretação destes gráficos é semelhante à do caso anterior. A única diferença é o significado dos valores das ordenadas:  $t_{10}$  representa o primeiro decil da distribuição acumulada de falhas;  $t_{50}$  é a mediana da distribuição dos tempos de falha; e  $t_{90}$  representa o nono decil da distribuição acumulada de falhas, quando a Confiabilidade do sistema é de cerca de 10 %.

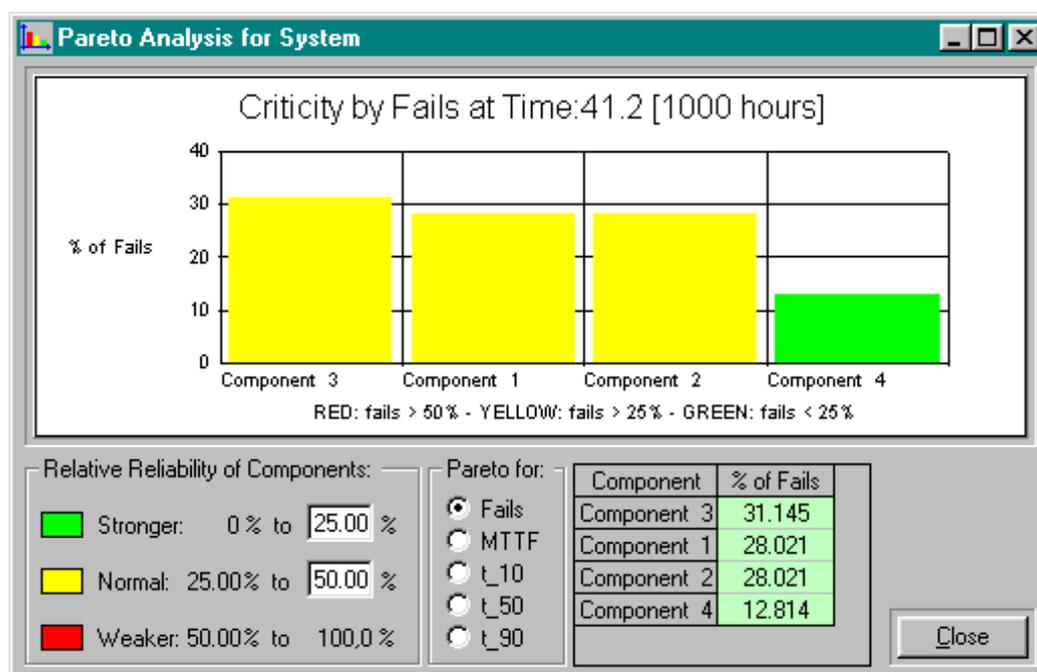


Figura 47: Análise de Pareto para priorização de componentes. O instante 412.000 horas indica o tempo associado à uma Confiabilidade de cerca de 0.5 % para o sistema.

#### 5.4.3.5.4 Graphics for All Components

Esta opção permite a visualização simultânea dos gráficos das Funções de Confiabilidade para todos os componentes do sistema que possuam distribuição ajustada para seus respectivos dados. Os gráficos podem ser redimensionados, impressos ou salvos em arquivo. No caso de salvamento em arquivo, o *software* pedirá um nome padrão e acrescentará um sufixo no nome de cada arquivo, de acordo com o componente associado ao gráfico.

Os gráficos são apresentados na mesma escala, facilitando a visualização do comportamento de cada componente ao longo do tempo. Comparando os comportamentos dos

componentes o usuário pode ter uma melhor percepção da influência de cada parte no comportamento da Confiabilidade do sistema. Deste modo, tem à mão uma ferramenta que lhe auxilia a priorizar esforços no sentido de melhorar a Confiabilidade de seus produtos.

Atalho na barra de ferramentas: 

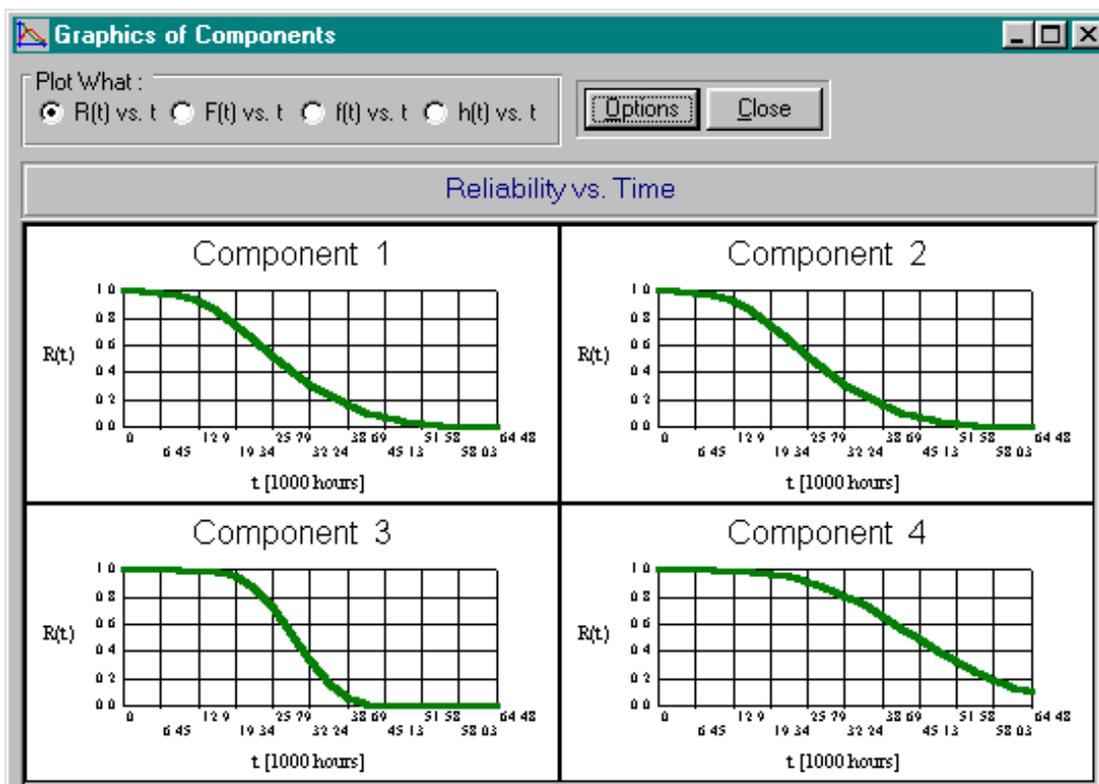


Figura 48: Janela de visualização simultânea dos gráficos dos modelos associados aos componentes de um sistema. Na figura acima são apresentados os gráficos das funções Densidade de Probabilidade de Falhas ao longo do tempo.

#### 5.4.3.5.5 Save System as Component

Permite o salvamento dos dados gerados para o sistema, bem como da distribuição associada a estes dados em um arquivo, de forma que tais informações possam ser recuperadas como dados de um único componente.

Esta opção pode ser conjugada com a opção “*Load Component*”, encontrada no menu *pull-down* associado a cada componente. Desta forma, pode-se realizar análises de confiabilidade para sistemas compostos por outros subsistemas, aumentando-se a versatilidade das análises realizadas. Pode-se igualmente gerar uma biblioteca de Confiabilidade de subsistemas, de modo que a criação de um novo sistema para análise pode-se resumir em operações de apontar e clicar.

#### 5.4.3.6 Menu Window

Este menu apresenta opções de posicionamento das janelas ativas no *software*:

- A opção *Cascade* ordena as janelas em cascata, facilitando o acesso às informações presentes na tela.
- A opção *Fit to Workspace* posiciona lado a lado a janela ativa e o painel de controle, ocupando todo o ambiente de trabalho do RelySys.
- A opção *Minimize All* permite que o usuário minimize todas as janelas ativas.
- A opção *Close All* permite que o usuário feche todas as janelas de análise ativas, restaurando a Área de Edição a seu tamanho natural.
- Finalmente, a opção *View* contém uma lista das janelas ativas, permitindo ao usuário acessar também as janelas sobrepostas por outras.

#### 5.4.3.7 Menu Help

Este menu apresenta as diversas opções de auxílio padronizadas pelo ambiente Microsoft Windows:

- A opção *Contents* leva o usuário ao arquivo de ajuda do RelySys, onde são encontradas instruções de como navegar pelo *software*, criar sistemas e realizar análises.

Atalho na barra de ferramentas: 

- A opção *Help on Work Area* traz uma descrição das principais opções disponíveis na Área de Edição do RelySys.
- A opção *Help on Command Menus* traz uma descrição resumida das opções dos menus, com base na descrição aqui realizada.
- A opção *Glossary* apresenta uma coleção de termos e conceitos utilizados no RelySys.
- Finalmente, a opção *Help On Help* apresenta ao usuário o arquivo de Ajuda do Microsoft Windows 95.

## CAPÍTULO 6

### 6. ESTUDOS DE CASOS

#### 6.1 Introdução

Neste capítulo, o principal objetivo é a aplicação prática dos desenvolvimentos teóricos apresentados nos capítulos anteriores. O *software* apresentado é utilizado como facilitador, nas etapas de processamento de dados e geração dos resultados, de modo a demonstrar sua utilização prática em ambientes produtivos e sobre dados reais de vida de componentes. São apresentados ainda, ao longo de cada um dos estudos, comentários sobre os resultados obtidos.

O primeiro estudo de caso representa um dos vários ensaios realizados em uma empresa do ramo automotivo, na qual a aplicação direta do pacote computacional permitiu aos engenheiros de processo a análise e o direcionamento de esforços de melhoria na solução de problemas práticos envolvendo tempos de vida de componentes e produtos. Este estudo, que também serviu de teste para o *software*, apresentou bons resultados, conforme o retorno fornecido por estes profissionais.

O segundo estudo de caso é uma revisão de um estudo de caso apresentado por Fritsch (1996), no qual é analisado o comportamento de falhas de um tipo de motor a combustão. Sua inclusão demonstra a sensibilidade dos resultados de análise em relação à disponibilidade de diferentes modelos de Confiabilidade. Além disso, serve para validar o método utilizado para a análise de Confiabilidade de sistemas, uma vez que os testes apresentam também os dados de falha relativos aos sistemas.

## 6.2 Estudo de Caso 1: Análise de Confiabilidade de um Eixo Cardan

O presente estudo foi realizado em uma empresa líder do setor automotivo, objetivando demonstrar a aplicabilidade prática da metodologia descrita neste trabalho, bem como evidenciar o tipo de informações às quais empresas em geral podem ter acesso com a utilização de *softwares* de Análise de Confiabilidade.

Um eixo cardan é um sistema de transmissão de força utilizado, geralmente, em veículos automotores de grande porte, tais como caminhões. Normalmente, um sistema desta natureza é constituído de 5 a 7 subsistemas dispostos em série. O eixo cardan aqui estudado é composto por 6 partes, conforme o diagrama abaixo:

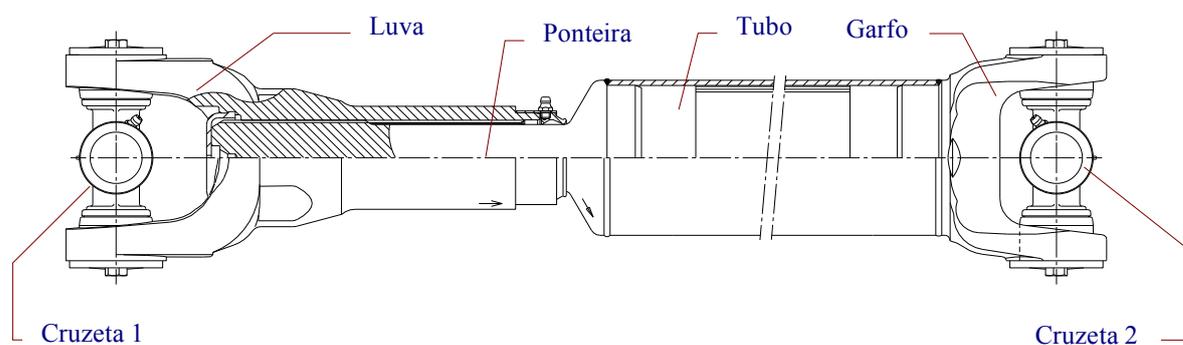


Figura 49: Diagrama representativo de um Eixo Cardan formado por 6 componentes, e cedido pela empresa onde foi realizado o estudo de caso. As cruzetas 1 e 2 são de mesmo tipo.

Os dados foram obtidos a partir de testes de fadiga realizados sobre cada componente e fornecidos pela empresa com valores modificados, de modo a garantir a confidencialidade de suas informações. De acordo com as normas de conformidade da companhia, cada peça foi testada em condições de estresse iguais ou superiores às de utilização em campo. Peças que excederam o limite de conformidade ou cujo dispositivo de teste falhou tiveram seu teste interrompido e suas durações foram consideradas como dados truncados.

A partir dos dados de teste, foram realizadas as etapas de modelagem e análise de Confiabilidade de cada subsistema, segundo a metodologia descrita anteriormente. As análises foram realizadas com o uso do RelySys, através das seguintes etapas:

1. Classificação das amostras de dados;
2. Análise dos dados e estimação de modelos de Confiabilidade para cada subsistema, dentre os oferecidos pelo *software*;

3. Escolha do modelo mais adequado para cada subsistema;
4. Geração dos dados de Confiabilidade para o sistema, a partir dos modelos escolhidos para os subsistemas;
5. Determinação de um modelo de Confiabilidades para o sistema.

<b>Cruzeta</b>	<b>Luva</b>	<b>Ponteira</b>	<b>Tubo</b>	<b>Garfo</b>
101,650 +	222,580	304,980 +	182,415 +	346,830
101,650 +	243,220 +	305,220 +	232,785 +	426,000 +
101,650 +	250,234	307,320 +	266,415 +	426,000 +
101,650 +	272,900 +	359,130 +	274,875 +	426,000 +
101,650 +	332,260	393,940	277,800 +	465,570 +
101,650 +	387,120	406,560 +	290,340 +	532,830 +
101,660 +	402,020	413,460	301,515	549,750 +
102,440 +	412,800	465,570 +	301,650	555,600 +
111,290 +	424,300	502,390 +	303,285	580,680
119,710 +	494,790	502,390 +	306,570	603,300
121,610 +		502,390 +	318,375	603,300
125,170 +		525,990	349,050	606,570
136,450 +		532,830	371,085	613,140 +
155,190 +		549,750		636,750
166,130 +		549,890		698,100
177,610		555,600		742,170
183,250 +		603,300		
185,200 +		606,570		
193,590		613,640		
201,010		698,100		
201,100				
202,190 +				
204,380				
206,400 +				
212,650				
232,700				
247,390				
502,390				
502,390				
502,390				

Tabela 2: Dados de teste de fadiga realizados sobre os subsistemas de um eixo cardan. Todos os valores são apresentados em 1000 ciclos e foram modificados de modo a garantir a confidencialidade das informações.

Todas as amostras apresentaram censura aleatória, restringindo o número de modelos aplicáveis a três: Exponencial, Weibull e Uniforme. Este fato deveu-se à abordagem realizada não apresentar expressões para a obtenção de estimativas para os parâmetros dos modelos Normal e LogNormal no caso de censura aleatória. A partir das análises realizadas sobre os dados foram obtidas algumas estatísticas descritivas do comportamento de falhas de cada subsistema. A Tabela 3 apresenta as principais informações relativas às amostras:

Subsistema	Tamanho da Amostra	Nº de Dados Censurados	Tipo de Censura	Mínimo	Máximo
<b>Cruzeta</b>	30	19	Aleatória	101,7 +	502,4
<b>Luva</b>	10	2	Aleatória	222,6	494,8
<b>Ponteira</b>	20	9	Aleatória	305,0 +	698,1
<b>Tube</b>	13	6	Aleatória	182,4 +	371,1
<b>Garfo</b>	15	8	Aleatória	346,8	742,2

Tabela 3: Informações sobre as amostras de dados de vida dos subsistemas a partir do desempenho observado em laboratório.

Com base nas informações anteriores foi realizado o ajuste dos modelos para as falhas de cada subsistema. A conjugação dos métodos empíricos e numéricos apresentados resultou no Quadro 6:

Subsistema	Modelo	Parâmetros	Teste de Kolmogorov-Smirnov	Papel de Probabilidade
<b>Cruzeta</b>	Weibull	$l = 168,4$ $\gamma = 0,912$ $\theta = 344,9$	Estatística DN: 0.4977 Prob. de Aceite: 0.0090	Weibull
<b>Luva</b>	Weibull	$l = 164,6$ $\gamma = 2,588$ $\theta = 246,9$	Estatística DN: 0.3198 Prob. de Aceite: 0.4020	Weibull, LogNormal ou Normal
<b>Ponteira</b>	Weibull	$l = 134,7$ $\gamma = 5,836$ $\theta = 460,3$	Estatística DN: 0.4432 Prob. de Aceite: 0.0276	Weibull, LogNormal ou Normal
<b>Tube</b>	Weibull	$l = 296,0$ $\gamma = 1,029$ $\theta = 47,44$	Estatística DN: 0.3791 Prob. de Aceite: 0.2855	Weibull, Exponencial ou LogNormal
<b>Garfo</b>	Weibull	$l = 74,49$ $\gamma = 6,454$ $\theta = 632,5$	Estatística DN: 0.4012 Prob. de Aceite: 0.1621	Weibull ou LogNormal

Quadro 6: Modelagem da Confiabilidade dos subsistemas a partir dos dados de teste. Apesar dos modelos Normal e LogNormal serem apresentados como viáveis pelo papel de probabilidades, a censura aleatória impede sua utilização.

A despeito dos baixos valores apresentados pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, a avaliação visual dos gráficos apresentados, bem como a observação empírica das estatísticas descritivas obtidas, justificou os ajustes escolhidos. A aparente má qualidade dos ajustes deveu-se basicamente a três razões: o reduzido tamanho das amostras, o elevado número de dados truncados e a ocorrência de censuras aleatórias.

Foram ainda estimados intervalos de confiança para os parâmetros dos modelos, bem como diversas estatísticas descritivas (Tabela 5 e Tabela 6):

Subsistema	Parâmetro	Limite Inferior	Valor Estimado	Limite Superior
Cruzeta	MTTF	322,9	528,8	734,7
	Falha Individual	181,7	399,1	1317
	$\gamma$	0,4650	0,9116	1,290
	$\theta$	220,5	344,8	1143
Luva	MTTF	327,3	383,8	440,4
	Falha Individual	242,9	378,9	541,8
	$\gamma$	1,166	2,588	3,648
	$\theta$	195,7	246,9	365,9
Ponteira	MTTF	546,8	594,3	641,8
	Falha Individual	432,9	600,6	733,5
	$\gamma$	3,055	5,836	8,177
	$\theta$	460,3	496,2	585,1
Tubo	MTTF	312,3	342,9	373,5
	Falha Individual	298,6	329,2	433,8
	$\gamma$	0,3804	1,029	1,461
	$\theta$	28,38	47,44	221,7
Garfo	MTTF	597,2	663,6	729,9
	Falha Individual	473,7	672,0	824,1
	$\gamma$	2,660	6,454	9,089
	$\theta$	586,4	632,4	785,7

Tabela 4: Estimação em intervalos de 90 % de confiança dos valores dos parâmetros para cada subsistema.

Subsistema	MTTF	Mínimo	$t_{10}$	$t_{50}$	Desvio Padrão
Cruzeta	528,8	168,4	197,6	399,1	395,8
Luva	383,8	164,6	268,1	378,9	90,97
Ponteira	594,3	134,7	472,1	600,7	91,36
Tubo	321,7	296,0	301,3	329,2	27,61
Garfo	663,6	74,49	520,8	672,0	106,7

Tabela 5: Estatísticas descritivas dos dados de vida, calculados a partir dos modelos ajustados para os subsistemas.

A partir dos modelos acima, foram obtidos dados para o tempo de vida de todo o sistema, através do procedimento descrito para a análise do sistema. Os dados gerados foram igualmente analisados estatisticamente, e tentou-se ainda o ajuste de um modelo para a distribuição de falhas do sistema (Tabela 7).

MTTF	Tempo Mediano	Mínimo	Máximo ( $t_{99,9}$ )	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
261,84	260,0	168,9	419,0	60,17	0,2298

Tabela 6: Estatísticas descritivas dos dados representativos das falhas do sistema, obtidos diretamente a partir das informações dos componentes.

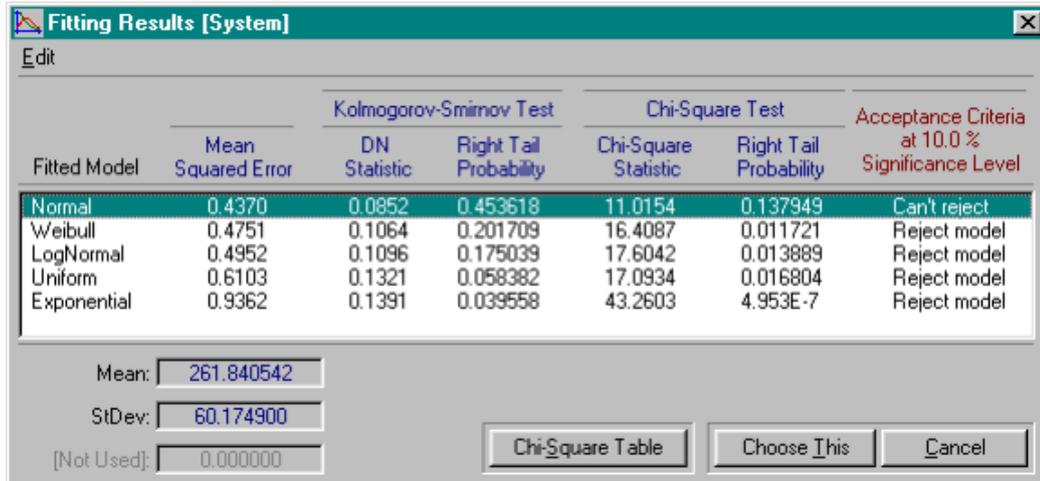


Figura 50: Ajustes obtidos para o eixo cardan a partir dos dados observados em campo. Observe-se que os testes de aderência rejeitam os ajustes realizados, exceto para o modelo Normal.

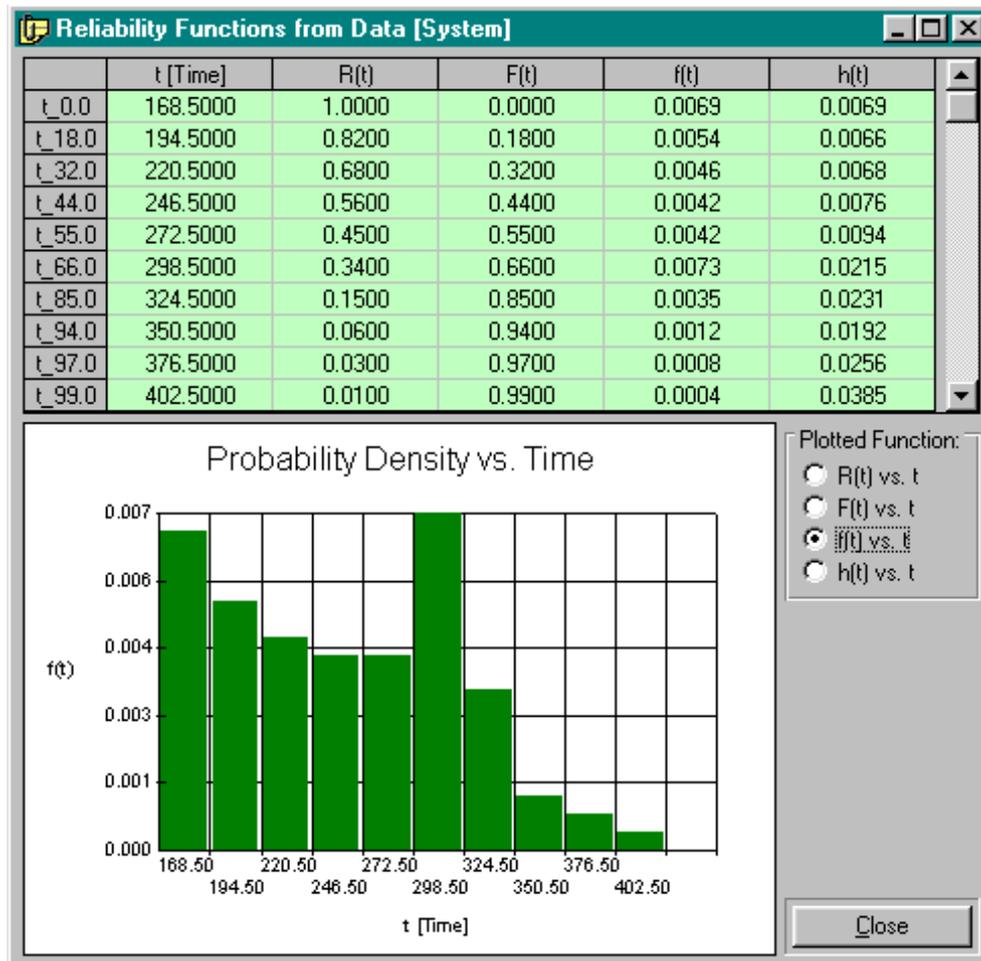


Figura 51: Visualização da Densidade de Falhas dos dados simulados para o conjunto do cardan. Note-se que a forma da distribuição acima descarta a possibilidade de um bom ajuste através de qualquer modelo unimodal.

Pelos testes de aderência realizados, nenhum modelo foi considerado adequado para a descrição dos tempos de falha do sistema, exceto o modelo Normal. A observação do histograma das falhas associadas ao sistema evidenciou a causa da má qualidade dos ajustes, que é a existência de uma distribuição **bimodal**, contra-indicando, até mesmo, a utilização do modelo Normal.

Através de uma das facilidades do RelySys, os gráficos de Confiabilidade de cada componente puderam ser apresentados na mesma escala temporal. A análise simultânea dos gráficos dos componentes permitiu a visualização dos comportamentos das confiabilidades dos mesmos, proporcionando a identificação das causas da existência das duas modas de falha para o sistema:

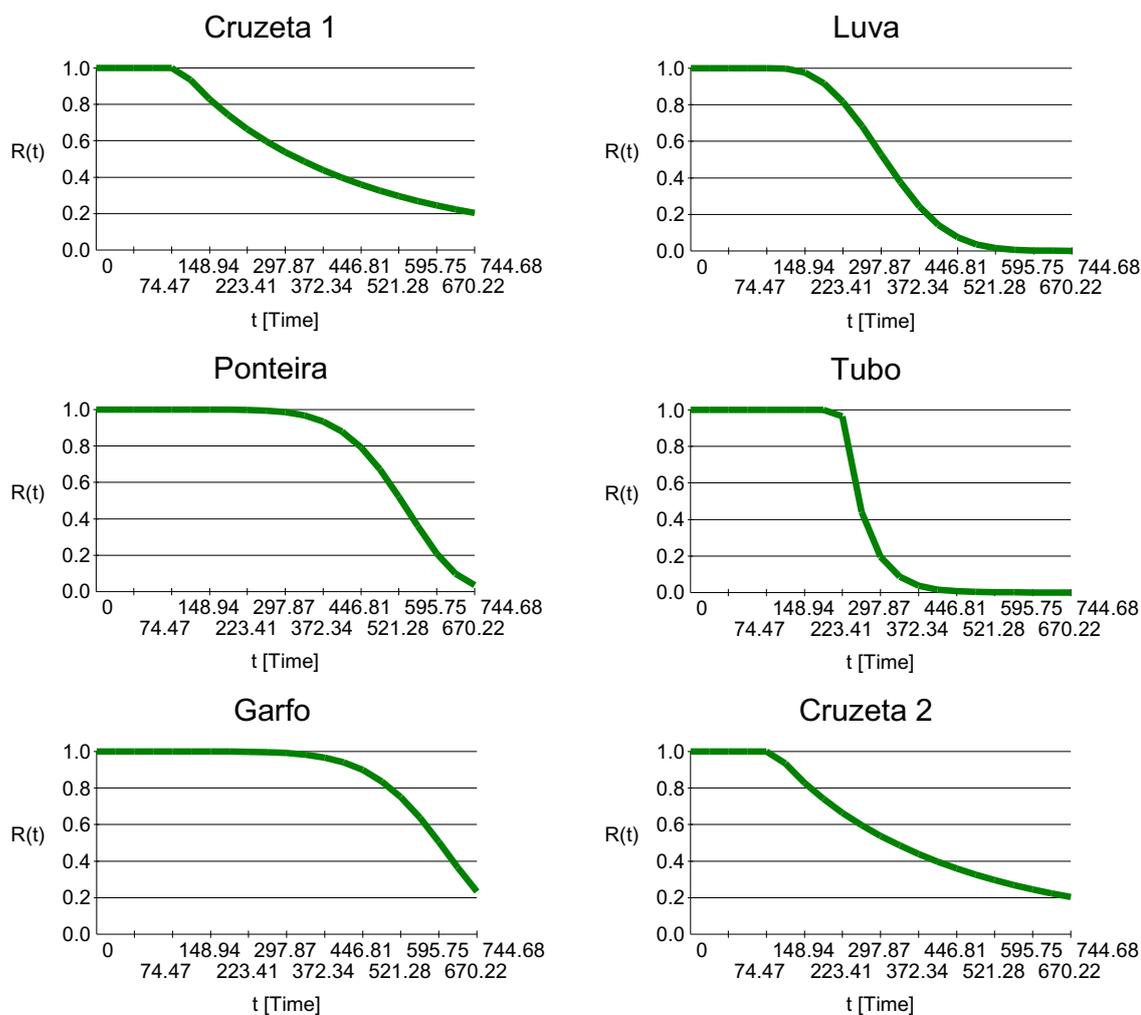


Figura 52: Funções Confiabilidade para os componentes do eixo cardan em estudo.

- a primeira moda pôde ser associada às falhas na cruzeta, que passam a ocorrer já a partir dos 170 mil ciclos;
- a segunda moda foi causada pela concentração das falhas do Tubo entre 250 e 350 mil ciclos.

Devido à bimodalidade da distribuição de falhas observada para o sistema, o procedimento recomendado de análise é a realização de inferências diretamente sobre os dados gerados pelo RelySys. O *software* apresenta diversas estatísticas para o sistema, as quais independem do ajuste de um modelo para a descrição de suas falhas. Isto tende a produzir análises mais robustas e permite a obtenção de informações mais precisas do que as fornecidas por um modelo inadequado.

A partir da observação empírica que o *software* proporciona sobre os dados do sistema, pôde-se constatar que o modelo de Weibull, mesmo considerado inadequado segundo os testes de aderência, produziu estatísticas razoavelmente coerentes com o comportamento dos dados de falha. Pelo fato de possuir três parâmetros para ajuste, o modelo foi suficientemente versátil para retratar um comportamento “intermediário” para as modas de falha. Este ajuste não indica o melhor procedimento de análise das falhas do sistema, mas sim um procedimento alternativo caso seja imprescindível o ajuste de um modelo unimodal a esta amostra de dados.

Sistema	MTTF	Tempo Mediano	Mínimo	Máximo (t <sub>99,9</sub> )	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
Valores obtidos a partir dos dados	261,8	260,0	168,9	419,0	60,17	0,2298
Valores modelados	261,8	254,2	151,5	427,9	60,06	0,2294

Tabela 7: Comparativo das estatísticas descritivas apresentadas pelo RelySys para os dados de falha gerados para o sistema e para o modelo de Weibull ajustado aos mesmos.

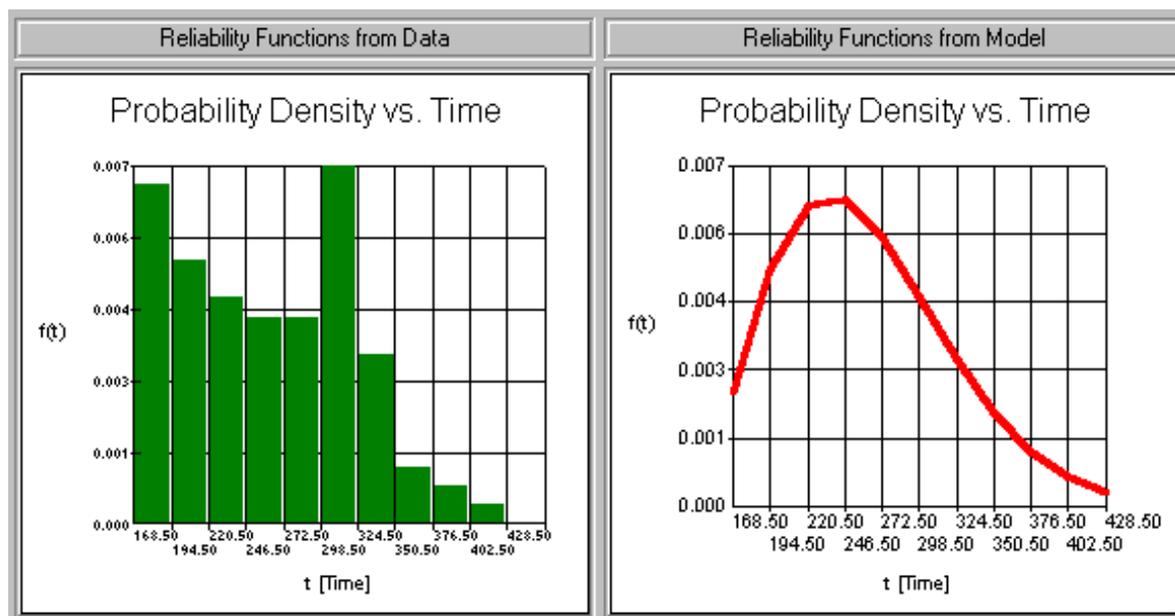


Figura 53: Representação comparativa da Função Densidade de Probabilidades do eixo cardan obtida para os dados gerados pelo RelySys (à esquerda) e para o modelo ajustado (à direita).

Sistema				
Parâmetro	Limite Inferior	Valor Estimado	Limite Superior	Teste de Kolmogorov-Smirnov
MTTF	251,9	261,8	271,8	Estatística DN: 0,1064 Prob. de Aceite: 0,2017
Falha Individual	177,8	254,2	372,3	
$\gamma$	1,647	1,912	2,137	
$\theta$	113,5	124,4	136,3	

Tabela 8: Dados da estimação dos parâmetros associados ao modelo de Weibull ajustado para o eixo cardan. O nível de confiança utilizado foi de 90 %.

Com o auxílio do gráfico de Pareto para o percentual de falhas do sistema ao longo do tempo apresentado pelo *software*, pôde-se identificar a criticidade do ‘Tubo’ em relação aos demais componentes, por ocasionar a falha prematura do sistema na faixa compreendida entre 250 e 350 mil ciclos. Deve-se observar, no entanto, que este gráfico demonstra a criticidade dos componentes ao longo de toda a vida do sistema (cerca de 450 mil ciclos). Para tempos inferiores (como por exemplo 200 mil ciclos), a criticidade maior seria atribuída às ‘Cruzetas’.

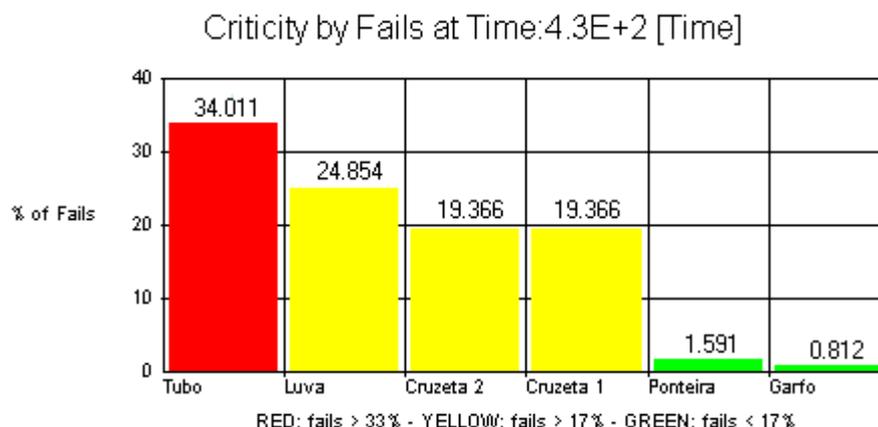


Figura 54: Gráfico de Pareto apresentando o percentual de falhas de cada componente em relação ao total de falhas do eixo cardan.

### 6.3 Estudo de Caso 2: Análise de Falhas de Motores a Combustão

O presente estudo de caso tem por objetivo a descrição da Confiabilidade de motores a combustão que foram testados em condições reais de operação, no laboratório de Confiabilidade de uma empresa deste ramo. Os dados foram modificados, de modo a garantir sua confidencialidade. Adicionalmente, os resultados obtidos com a metodologia apresentada neste trabalho são comparados com os apresentados por Fritsch (1996).

O experimento foi realizado sobre uma amostra de vinte motores, em condições normais de operação, e simulando-se a carga de trabalho estimada para condições de campo. Os motores foram considerados como sistemas em série, compostos por 6 subsistemas principais: *Combustível*, *Carcaça*, *Cilindro*, *Silenciador*, *Ignição* e *Arranque*. A duração dos testes foi fixada em 300 horas contínuas, durante as quais foram monitorados os tempos de operação de cada subsistema. Subsistemas com duração medida de 300 horas contínuas foram retirados do teste (censura Tipo I). Subsistemas falhados tiveram sua duração registrada e foram substituídos por novos, de modo a continuar o teste para os demais componentes.

n°	Subsistemas							Motor
	Combustível	Carcaça	Cilindro	Silenciador	Ignição	Arranque	Outros	
1	300,0 +	17,3	199,1	65,1	112,9	300,0 +	300,0 +	17,3
2	90,2	108,1	135,3	221,0	300,0 +	300,0 +	300,0 +	90,2
3	237,1	71,6	69,3	300,0 +	223,7	112,0	300,0 +	69,3
4	260,7	201,3	83,1	127,0	278,5	18,0	300,0 +	18,0
5	300,0 +	99,2	295,0	294,0	185,4	300,0 +	300,0 +	99,2
6	300,0 +	142,5	48,1	300,0 +	300,0 +	300,0 +	300,0 +	48,1
7	63,2	174,0	300,0 +	300,0 +	300,0 +	146,4	300,0 +	63,2
8	300,0 +	123,0	142,3	194,0	85,5	59,2	300,0 +	59,2
9	104,5	132,5	130,1	300,0 +	136,7	135,0	300,0 +	104,5
10	300,0 +	173,7	67,3	300,0 +	300,0 +	147,9	300,0 +	67,3
11	140,3	258,8	159,6	300,0 +	282,7	300,0 +	83,4	83,4
12	201,9	44,0	50,7	248,8	124,9	6,1	300,0 +	6,1
13	300,0 +	174,2	300,0 +	52,7	151,1	237,1	300,0 +	52,7
14	275,7	68,6	252,4	300,0 +	261,3	20,1	300,0 +	20,1
15	297,3	151,4	170,2	143,7	198,4	20,4	300,0 +	20,4
16	179,4	300,0 +	48,1	300,0 +	179,8	300,0 +	300,0 +	48,1
17	234,4	214,9	97,7	58,1	66,0	82,2	300,0 +	58,1
18	246,5	92,3	166,3	181,4	201,9	9,9	300,0 +	9,9
19	199,6	300,0 +	204,1	300,0 +	300,0 +	84,8	300,0 +	84,8
20	120,8	201,7	143,9	300,0 +	118,6	300,0 +	300,0 +	118,6

Tabela 9: Resultados do teste de vida de motores de combustão.

Os dados acima apresentados foram analisados de forma semelhante à descrita no estudo anterior. As principais estatísticas descritivas obtidas a partir dos dados foram:

Subsistema	Tamanho da Amostra	N° de Dados Censurados	Tipo de Censura	Mínimo	Máximo
Combustível	30	6	Por Tempo	63,20	300,0 +
Carcaça	30	2	Por Tempo	17,30	300,0 +
Cilindro	30	2	Por Tempo	48,10	300,0 +
Silenciador	30	10	Por Tempo	52,70	300,0 +
Ignição	30	5	Por Tempo	66,00	300,0 +
Arranque	30	7	Por Tempo	6,100	300,0 +

Tabela 10: Informações sobre as amostras de dados de falha dos subsistemas do motor em estudo.

Dentre os modelos estimados pelo RelySys para cada subsistema, foram escolhidos os julgados de maior aderência pelos testes  $\chi^2$ , de Kolmogorov-Smirnov e pelos métodos empíricos fornecidos pelo *software*. A título de ilustração, os resultados de alguns destes testes, tais como os do teste de Kolmogorov-Smirnov, são apresentados na Tabela 12:

Subsistema	Modelo	Parâmetros	Teste de Kolmogorov-Smirnov	Papel de Probabilidade
Combustível	Uniforme	$l = 54,84$ $r = 326,1$	Estatística DN: 0.3227 Probabilidade: 0.1084	Uniforme, LogNormal ou Weibull
Carcaça	Normal	$\mu = 147,8$ $\sigma = 78,33$	Estatística DN: 0.1958 Probabilidade: 0.4913	Normal, Uniforme ou Weibull
Cilindro	Normal	$\mu = 141,0$ $\sigma = 92,89$	Estatística DN: 0.1583 Probabilidade: 0.7524	Normal, Uniforme ou LogNormal
Silenciador	Exponen-cial	$l = 35,04$ $\lambda = 0,002831$	Estatística DN: 0.5459 Probabilidade: 0.0056	Uniforme, Normal ou Exponencial
Ignição	Normal	$\mu = 203,5$ $\sigma = 112,5$	Estatística DN: 0.2517 Probabilidade: 0.2937	Todos
Arranque	Weibull	$l = 0,0000$ $\gamma = 1,120$ $\theta = 207,5$	Estatística DN: 0.5044 Probabilidade: 0.0027	Weibull, Exponencial ou LogNormal

Tabela 11: Modelagem da Confiabilidade dos subsistemas a partir dos dados de teste. A referência “todos” envolve os modelos apresentados no software: Exponencial, Weibull, LogNormal, Normal e Uniforme.

Os modelos ajustados foram, então, analisados, obtendo-se os seguintes intervalos de confiança para seus principais parâmetros:

Subsistema	Parâmetro	Limite Inferior	Valor Estimado	Limite Superior
Combustível	MTTF	174,9	217,9	260,8
	Falha Individual	71,14	217,9	364,6
Carcaça	MTTF ( $\mu$ )	114,7	147,8	180,8
	Falha Individual	18,94	147,8	276,6
	$\sigma$	63,27	78,33	112,9
Cilindro	MTTF ( $\mu$ )	101,8	141,0	180,2
	Falha Individual	0,0000	141,0	293,8
	$\sigma$	75,03	92,89	133,8
Silenciador	MTTF	259,9	388,2	686,0
	Falha Individual	53,16	279,8	1093
	$\lambda$	0,001536	0,002831	0,004447
Ignição	MTTF	150,5	203,5	256,4
	Falha Individual	18,37	203,5	388,5
	$\sigma$	89,54	112,5	170,0
Arranque	MTTF	114,5	199,1	283,7
	Falha Individual	14,62	149,6	552,9
	$\gamma$	0,6469	1,120	1,543
	$\theta$	142,3	207,5	402,6

Tabela 12: Estimação em intervalos de 90 % de confiança dos valores dos parâmetros para cada subsistema.

Subsistema	MTTF	Mínimo	$t_{10}$	$t_{50}$	Desvio Padrão
Combustível	217,9	54,84	87,45	217,9	94,13
Carcaça	147,8	0,000	58,30	150,7	78,33
Cilindro	141,0	0,000	47,88	148,5	92,89
Silenciador	388,2	35,04	72,25	279,9	353,2
Ignição	203,5	0,000	77,64	203,5	112,5
Arranque	199,1	0,000	27,80	149,6	178,2

Tabela 13: Estatísticas descritivas dos dados de vida dos subsistemas, calculados a partir dos modelos ajustados pelo RelySys.

Fritsch (1996), analisou o mesmo conjunto de dados com o auxílio de um *software* para a modelagem dos tempos de vida de componentes isolados. O *software*, denominado RELEST, apresentava, como opções de ajuste, os modelos Exponencial, Weibull, LogNormal e Gamma. Os modelos considerados como melhores ajustes tanto para os dados de falha dos componentes como para os dados de falha dos motores completos são apresentados na Tabelas 15:

Subsistemas	Modelo	Parâmetros		MTTF	$t_{10}$	$t_{50}$
Combustível	Weibull	$\gamma = 2,186$	$\theta = 280,3$	248,2	100,1	237,0
Carcaça	Weibull	$\gamma = 1,695$	$\theta = 176,3$	157,3	46,7	142,0
Cilindro	Weibull	$\gamma = 1,656$	$\theta = 178,0$	159,1	45,7	142,6
Silenciador	Weibull	$\gamma = 1,382$	$\theta = 391,2$	357,3	76,7	300,0
Ignição	Weibull	$\gamma = 2,062$	$\theta = 253,9$	224,9	85,2	212,5
Arranque	Exponencial	$\lambda = 0,00409$	$\mu = 244,6$	244,6	25,8	169,6
SISTEMA	Weibull	$\gamma = 1,597$	$\theta = 62,57$	55,11	15,3	49,8

Tabela 14: Modelagem da Confiabilidade dos subsistemas do motor em estudo. Fonte: Fritsch (1996).

Fritsch (1996) afirma que os testes de aderência para os modelos utilizados indicam que os mesmos são adequados para descrever os dados de cada subsistema em estudo, mas que o modelo de Weibull para o sistema pode ser rejeitado. As diferenças encontradas entre os resultados apresentados por Fritsch (1996) e os apresentados pelo RelySys devem-se, principalmente, à indisponibilidade das distribuições Normal e Uniforme no *software* utilizado por Fritsch (1996), e à utilização de algoritmos diferenciados para a realização das estimativas dos parâmetros das distribuições no RelySys e no RELEST. Em particular, constatou-se que o RELEST superestima os valores das significâncias das estatísticas DN no teste de Kolmogorov-Smirnov. Este fato foi evidenciado não apenas através do RelySys, mas principalmente através da comparação dos resultados deste estudo em outros *softwares* estatísticos de uso comum, tais como o SPSS (*Statistical Package for Social Sciences*) e o StatGraphics.

Para a análise do sistema, realizou-se primeiramente uma análise comparativa da Confiabilidade dos componentes do motor. Os resultados são apresentados na Figura 55:

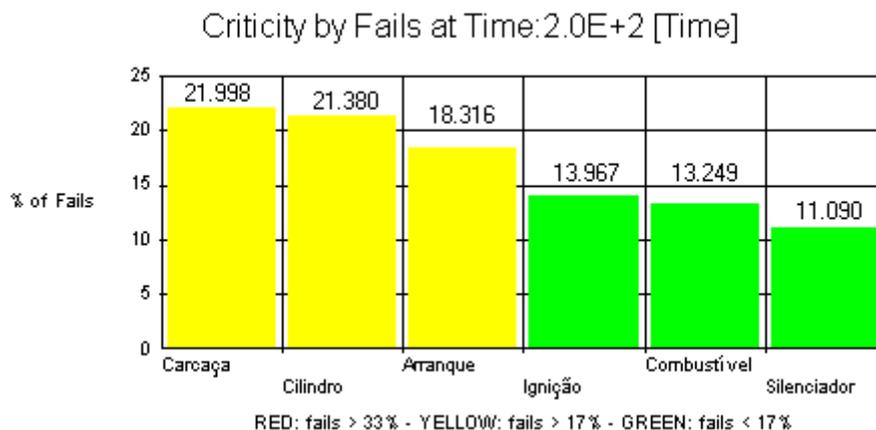


Figura 55: Gráfico de Pareto apresentando o percentual de falhas de cada componente em relação ao total de falhas do motor em estudo.

Pela análise dos gráficos constatou-se uma moderada criticidade do Cilindro, da Carcaça e do Arranque em relação ao percentual de falhas do sistema. Os gráficos de Confiabilidade dos componentes confirmaram um maior desgaste destes componentes nos tempos iniciais.

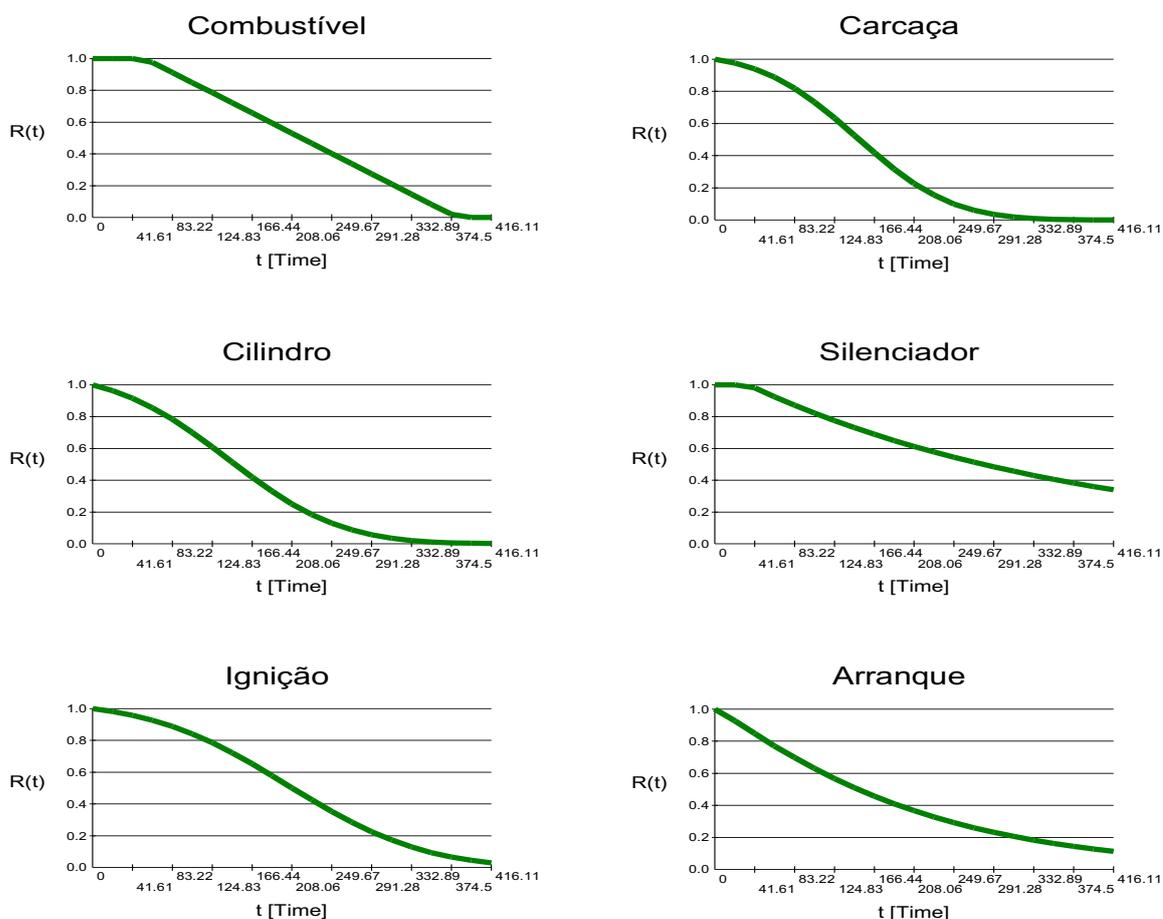


Figura 56: Funções Confiabilidade ajustadas para os componentes do sistema em estudo.

Foram gerados dados de falha para a análise da Confiabilidade do sistema. A análise realizada sobre estes dados demonstrou a existência de uma distribuição unimodal. Análises subsequentes foram realizadas diretamente sobre os dados gerados pelo *software* (através do método de discretização de confiabilidades). A seguir, tentou-se modelar tal conjunto de dados. Através dos testes de aderência realizados, não foram verificadas evidências de rejeição dos modelos de Weibull e Normal. A observação empírica dos resultados apresentados pelo *software*, permitiu comprovar os resultados dos testes de aderência. Assim, por ter-se mostrado razoavelmente eficaz na descrição do comportamento das falhas do sistema, o modelo de Weibull foi o escolhido.

Fitting Results [System]						
Edit						
Fitted Model	Mean Squared Error	Kolmogorov-Smirnov Test		Chi-Square Test		Acceptance Criteria at 10.0 % Significance Level
		DN Statistic	Right Tail Probability	Chi-Square Statistic	Right Tail Probability	
Weibull	0.2119	0.0380	0.998568	3.0256	0.805622	Can't reject
Normal	0.3681	0.0607	0.848756	3.4966	0.835587	Can't reject
LogNormal	0.7152	0.1163	0.129159	21.4839	0.003116	Reject model
Exponential	1.0017	0.1634	0.008920	24.6425	0.000878	Reject model
Uniform	1.9856	0.2993	2.000E-8	42.7518	7.041E-7	Reject model

Location: 0.000000  
Gamma: 1.542085  
Theta: 74.234619

Buttons: Chi-Square Table, Choose This, Cancel

Figura 57: Adequação dos ajustes obtidos para o sistema do motor a partir dos dados gerados pelo RelySys.

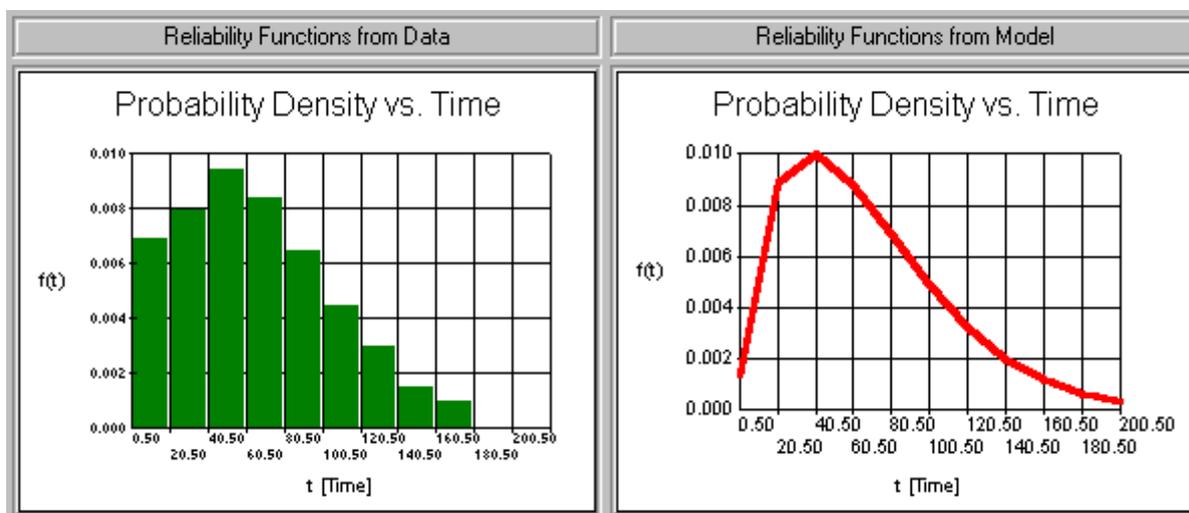


Figura 58: Densidades de probabilidade dos dados gerados pelo RelySys e do modelo Weibull ajustado para o conjunto do motor.

Dispondo, ainda, dos tempos de falha medidos em laboratório para os motores, pôde-se estimar a qualidade dos resultados fornecidos pelo RelySys. Através análises realizadas para os dados de falha dos motores, foi encontrada uma distribuição novamente unimodal. De modo a proceder uma comparação completa entre as informações provenientes dos dados observados em laboratório e as advindas dos dados gerados pelo *software*, foi ajustado um modelo para a descrição deste conjunto de dados. Através dos resultados dos testes de aderência realizados, bem como de análises empíricas, o modelo de Weibull mostrou-se o mais adequado para esta tarefa. Note-se que, devido ao pequeno tamanho de amostra existente, os métodos analíticos apresentados não indicam “preferência” entre os modelos Uniforme, Normal e de Weibull. A observação dos resultados apresentados pelos métodos empíricos, no entanto, indica uma leve vantagem do modelo de Weibull sobre os demais, confirmando os resultados obtidos através do modelo de componentes.

Fitted Model	Mean Squared Error	Kolmogorov-Smirnov Test		Chi-Square Test		Acceptance Criteria at 10.0 % Significance Level
		DN Statistic	Right Tail Probability	Chi-Square Statistic	Right Tail Probability	
Uniform	0.3903	0.1551	0.717125	0.9991	0.317519	Can't reject
Normal	0.2432	0.1613	0.670965	0.4134	0.520254	Can't reject
Weibull	0.3350	0.1672	0.625767	-	- (*)	Can't reject
LogNormal	0.4390	0.2429	0.185092	2.1271	0.144715	Can't reject
Exponential	0.5411	0.2837	0.077968	3.6395	0.056423	Reject model

Location:  (\*) Insufficient degrees of freedom

Gamma:

Theta:

Figura 59: Adequação dos ajustes obtidos para o sistema do motor a partir dos dados observados em campo.

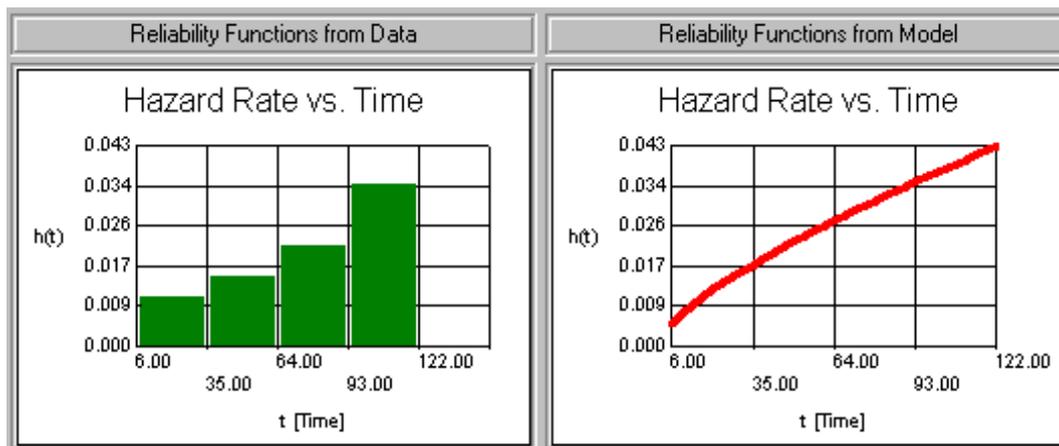


Figura 60: Comparação entre as funções Taxa de Risco dos dados e do modelo de Weibull ajustado para os dados de vida do motor completo, indicando a melhor adequação deste modelo em relação aos demais propostos.

	MTTF	Mínimo	$t_{10}$	$t_{50}$	Desvio Padrão
<b>Dados de Teste</b>	56,93	6,100	13,60	58,10	33,63
<b>Dados Gerados pelo RelySys</b>	67,17	0,8958	14,94	61,56	42,80
<b>Modelo para os Dados de Teste</b>	56,65	0,1789	17,13	51,26	34,06
<b>Modelo para os Dados Gerados</b>	66,80	0,000	17,25	58,53	42,22

Tabela 15: Estatísticas descritivas calculadas a partir: dos dados de falha dos motores; dos dados de falha gerados pelo RelySys; do modelo ajustado sobre os tempos observados de falha; e do modelo ajustado sobre os tempos gerados para o sistema, conforme os modelos ajustados para os componentes.

A Tabela 19 evidencia que, através da análise realizada diretamente sobre os dados de falha gerados para o sistema, os dados gerados pelo RelySys podem descrever os dados de falha do sistema de forma razoavelmente conservadora. As estimativas apresentadas pelo *software*, apesar de levemente otimistas em relação às estatísticas provenientes da amostra de tempos de falha dos motores, apresentaram diferenças suficientemente pequenas, principalmente se levado em conta o tamanho de amostra utilizado. Em particular, a descrição eficiente do comportamento do sistema do motor nas fases iniciais de sua vida ( $t_{10}$ ) por parte dos dados gerados pelo RelySys evidencia um dos pontos de maior utilidade prática desta ferramenta, principalmente no que toca a aspectos gerenciais, tais como o dimensionamento de prazos de garantias. Assim, pôde-se considerar os valores preditos pelo *software* como satisfatórios para representação das falhas dos motores, além de ser possível associar eventuais distorções, em grande parte, à má qualidade de alguns ajustes utilizados para a descrição das falhas dos componentes. Observe-se ainda que, ao se ajustarem modelos unimodais para estes conjuntos de dados, as discrepâncias são minimizadas, uma vez que são “filtradas” as diferenças existentes devido natureza das amostras.

Enfim, é importante que se leve em conta, para a compreensão dos resultados aqui apresentados, a importância de se obter, a custos mais baixos, estimativas suficientemente boas para priorizar esforços de melhoria da Qualidade e monitorar a Qualidade ao longo do tempo de produtos e processos. Em geral, como já comentado ao longo deste trabalho, os dados de falha de um sistema não se encontrarão disponíveis em quantidade suficiente para estimar-lhe a Confiabilidade. Assim, estimativas dos tempos de falha obtidas a baixos custos, mesmo que consideradas apenas razoáveis, certamente serão melhores que nenhuma estimativa, bem como serão economicamente mais acessíveis que estimativas refinadas, vindas da análise de sistemas inteiros.

## CAPÍTULO 7

### 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

#### 7.1 *Conclusões*

O presente trabalho procurou apresentar, de forma sucinta, os principais tópicos associados ao campo da modelagem e análise da Confiabilidade de sistemas. Foram focalizados os aspectos mais relevantes de cada etapa dos processos de modelagem e de análise da Confiabilidade, sempre sob o ponto de vista das aplicações em ambientes produtivos.

Partindo da observação de que produtos nada mais são que sistemas de componentes interagindo sob alguma forma particular de arranjo, a metodologia apresentada neste trabalho busca estimar a Confiabilidade de um sistema a partir da análise de Confiabilidade dos dados de falha de seus componentes. Os altos custos envolvidos na realização de ensaios tornam inviáveis análises de Confiabilidade sobre sistemas inteiros. Em contrapartida, a obtenção de informações de Confiabilidade de componentes é comparativamente mais barata e mais fácil de se realizar. A este ponto, diversos métodos analíticos fazem-se presentes para a descrição e análise da Confiabilidade de um sistema, por facilmente incorporarem as informações de Confiabilidade dos componentes. Os principais métodos foram descritos e sua aplicabilidade, demonstrada através de exemplos.

A grande utilidade das informações de Confiabilidade de um sistema, quer na priorização de ações de melhoria de produtos e processos, quer na determinação de prazos de garantia de produtos, ou, ainda, no estabelecimento de padrões mínimos de Qualidade ao longo do tempo, justifica as preocupações em se estimar corretamente e em se dispender esforços na obtenção de produtos com alta Confiabilidade. O crescente número de artigos associados aos aspectos gerenciais da análise de Confiabilidade de produtos e processos demonstrou que a questão da Confiabilidade não pode ser considerada apenas como uma exigência contratual, que leva em conta somente os custos associados à implantação de programas de melhoria, mas

sim como um aspecto estratégico importante, que tem influência direta na missão de qualquer organização, que é manter uma boa imagem frente a seus clientes, de modo a aumentar sua participação no mercado. Da mesma forma, ficou claro que o atingimento das metas de Confiabilidade para um produto depende de vários fatores técnicos (de projeto e de processo) e gerenciais (suporte e apoio aos Programas de Confiabilidade dentro da empresa), e que falhas nestes aspectos podem comprometer significativamente os objetivos de Qualidade por parte de toda a organização.

Alguns dos métodos apresentados foram utilizados para o desenvolvimento de um *software* próprio para a análise da Confiabilidade de sistemas. A fase de implementação computacional, em diversas ocasiões, trouxe à tona interessantes problemas computacionais, os quais levaram ao desenvolvimento de soluções alternativas, tais como os procedimentos de estimação de parâmetros das distribuições de Weibull e Normal, apresentados nos anexos desta dissertação. Os dois estudos de caso apresentados serviram para validar as análises fornecidas pelo *software*, demonstrando a aplicabilidade prática da metodologia estudada. Além disso, a utilização do *software* em situações reais e junto a engenheiros de Confiabilidade permitiu a observação de diversas vantagens, dentre as quais foram notórias:

- a diminuição do tempo necessário para o desenvolvimento de análises com alta exatidão de resultados;
- a diminuição do tempo de resposta para as equipes de projeto e processo, facilitando-se o trabalho de engenharia simultânea, por exemplo, em programas de melhoria contínua, como estudos de FMEA e FTA;
- a maior acessibilidade, por parte dos engenheiros, às informações de Confiabilidade e, conseqüentemente, um maior entendimento do real comportamento de falhas e da Qualidade do sistema em estudo ao longo do tempo.

Enfim, vale ressaltar que nenhuma Qualidade interessa a um cliente a não ser aquela que se sustenta ao longo do tempo. Afinal, não será a toa o fato de a Confiabilidade ser classicamente considerada como *a quarta dimensão da Qualidade*.

## **7.2 Sugestões para Desenvolvimentos Futuros**

O presente trabalho de forma alguma esgota o conteúdo de Confiabilidade de Sistemas. Diversos outros métodos poderiam ter sido descritos, tais como os baseados em abordagens não-paramétricas. Mesmo as abordagens paramétricas poderiam ser constantemente expandidas, através da inclusão de novos modelos de distribuições de tempos de falha e de novos estimadores para os parâmetros de tais modelos. Ademais, a utilização de métodos e técnicas de análise de Confiabilidade para amostras multicensuradas apresentar-se-ia como uma importante extensão do presente trabalho.

A extensão da capacidade de operação do *software* para novas configurações de sistemas, bem como a inclusão de outros procedimentos de análise de Confiabilidade, disponibilizaria uma ferramenta de grande flexibilidade e de fácil manuseio, própria para a difusão da metodologia de Análise de Confiabilidade no meio industrial. A inclusão de módulos especialistas poderia introduzir mais fielmente informações históricas, de conhecimento dos engenheiros de Confiabilidade, que não se encontram disponíveis em amostras de tamanho reduzido. Finalmente, uma versão em Língua Portuguesa seria bem-vinda sob o ponto de vista da difusão destas técnicas entre os engenheiros de Confiabilidade brasileiros.

O assunto de Programas de Confiabilidade abrange, simultaneamente, aspectos administrativos e de engenharia. Estudos de FMEA e FTA são apenas exemplos de técnicas que se podem utilizar no sentido da melhoria contínua de produtos e processos. O impacto das informações de Confiabilidade sobre estes e outros procedimentos foi apenas brevemente discutido nesta dissertação, podendo ser assunto de um trabalho em separado.

Da mesma forma, a utilização das informações de Confiabilidade em programas de manutenção preventiva e na modelagem de tempos de garantia poderia render novos estudos na área de Confiabilidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOURA, K.; SINGPURWALLA, N. & SOYER, R. *Using expert opinion in reliability assessment*. Reliability Review, v. 9, p. 11-12,16, December, 1989.
- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover. New York, NY, 1972.
- ADAMS, A. G. *Remark on algorithm 304: Normal curve integral*. Comm. ACM, v. 12, p. 565-566, 1969.
- ALLMEN, C. R. & LU, M. *Accounting for variability during reliability development*. Reliability Review, v. 10, p. 5-6,16, December, 1990.
- BAIN, L. J. & ENGELHARDT, M. *Statistical analysis of reliability and life-testing models*. 2. Ed., Marcel Dekker, Inc., New York, NY, 1991.
- BHATTACHARJEE, G. P. *Algorithm AS32. The Incomplete Gamma Integral*. Applied Statistics (JRSSC), v. 19, p. 285-287, 1970.
- BEST, D. J. & ROBERTS, D. E. *Algorithm AS91. The percentage points of the Chi-squared distribution*. Applied Statistics (JRSSC), v. 24, p. 385-388, 1975.
- BOLFARINE, H.; RODRIGUES, J. & ACHCAR, J. A. *Análise de sobrevivência*. 2ª Escola de Modelos de Regressão, Rio de Janeiro, RJ, 1991.
- CLÁUDIO, D. M. & MARINS, J. M. *Cálculo numérico computacional*. Editora Atlas, S. A., São Paulo, SP, 1989.
- CHIANG, D. T. & NIU, S. C. *Reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems*. IEEE Transactions on Reliability, v. R-30, p. 87-89, 1981.
- CHOI, S. C. & WETTE, R. *Maximum likelihood estimation of the parameters of the Gamma distribution and their bias*. Technometrics, v. 11, n. 4, p. 683-690, 1969.
- COCHRAN, W. G. *Sampling techniques*. 3. Ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 1977.
- COHEN Jr., A. C. *Simplified estimators for the Normal distribution when samples are singly censored or truncated*. Technometrics, v. 1, n. 3, p. 217-237, 1959.

- COHEN Jr., A. C. *Tables for maximum likelihood estimation: Singly truncated and singly censored samples*. *Technometrics*, v. 3, p. 535-541, 1961.
- COOKE, D.; CRAVEN, A. H. & CLARKE. *Basic Statistical Computing*. Edward Arnold Publ. Co., London, 1981.
- COX, D. R. & OAKES, D. *Analysis of survival data*. Chapman and Hall, London, 1984.
- DACHS, J. N. W. *Estatística computacional*. Livros Técnicos e Científicos, Ed. Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 1988.
- ELSAYED, E. A. *Reliability engineering*. 1. Ed. Addison Wesley Longman, Inc., Reading, MA, 1996.
- FRANCK, J. R. *A Simple explanation of the Weibull distribution and its applications*. *Reliability Review*, v. 8, p. 6-9, September, 1988.
- FRITSCH, C. *Modelos de Confiabilidade para testes de sobrevivência*. Dissertação de Mestrado. PPGEP, UFRGS. Porto Alegre, RS, 1996.
- GREENWOOD, J. A. & DURAND, D. *Aids for fitting the Gamma distribution by maximum likelihood*. *Technometrics*, v. 2, p. 55-65, 1960.
- GUITAR, R. *Burn in*. *Reliability Review*, v. 9, p. 6-8,16, March, 1989.
- HAHN, G. H. & SHAPIRO, S. S. *Statistical models in engineering*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1967.
- HALPERN, S. *The assurance sciences. An introduction to quality control and reliability*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- HALPERIN, M. *Maximum likelihood estimation in truncated samples*. *Annals of Mathematical Statistics*, Ann Arbor, Mich., v. 23, p. 226-238, 1952.
- HAMMERSLEY, J. M. & HANDSCOMB, D. C. *Monte Carlo methods*. Methuen, London, 1964.
- HARTHER, H. L. & MOORE, A. H. *Maximum likelihood estimation of the parameters of Gamma and Weibull populations from complete and from censored sample*. *Technometrics*, v. 7, n. 4, p. 639-643, 1965.
- HILL, G. H. Algorithm 395: *Student's t-distribution*. *Comm. ACM*, v. 13, p. 617-619, 1970a.
- HILL, G. H. Algorithm 396: *Student's t-quantiles*. *Comm. ACM*, v. 13, p. 619-620, 1970b.
- JOHNSON, L. G. *The median ranks of sample values in the population with an application to ceratin fatigue studies*. *Industrial Mathematics*, v. 2, p. 1-9, 1951.

- JOHNSON Jr., N. *System reliability and MTBF*. Reliability Review, v. 10, p. 3-4, December, 1990.
- KAPUR, K. C. *Quality evaluation system for reliability*. Reliability Review, v. 6, p. 19-20, June, 1986.
- KEATS, J. B. & LAWRENCE, F. P. *Weibull maximum likelihood parameter estimates with censored data*. Journal of Quality Technology, v. 29, n. 1, p. 105-110, January, 1997.
- KENNEDY, W. J. & GENTLE, J. E. *Statistical computing*. Statistics: textbooks and monographs, v. 33. 7. Ed., Marcel Dekker, Inc., New York, NY, 1980.
- KIM, J. J. & FARD, N. S. *Multi-component systems reliability modeling using digital simulation techniques*. IEEE Transactions on Reliability, v. R-51, p. 100-103, 1993.
- LAU, C. L. Algorithm 147. *A simple series of the Incomplete Gamma Integral*. Applied Statistics (JRSSC), v. 29, p. 113-114, 1980.
- LEE, E. T. *Statistical methods for survival data analysis*. Wadsworth, Belmont, CA, 1980.
- LUTHRA, P. *Reliability: What it means*. Reliability Review, v. 8, p. 10,16, September, 1988.
- LUTHRA, P. *Reliability: A short leg*. Reliability Review, v. 9, p. 9,16, March, 1989.
- MADU, C. N. *Building quality through reliability, maintainability and available (RMA)*. Reliability Review, v. 13, p. 5-8, June, 1993.
- MAJUNDER, K. L. & BHATTACHARJEE, G. P. *Algorithm AS63. The Incomplete Beta Integral*. Applied Statistics (JRSSC), v. 22, p. 409-411, 1973.
- MAKINO, T. *Mean hazard rate and its application to the Normal approximation of the Weibull distribution*. Naval Research Logistics Quarterly, v.31, p. 1-8, 1984,
- MANN; SCHAFFER & SINGPURWALLA, N. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. 6. Ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 1974.
- MARSH, W.A. & JACOBS, E. W. *Reliability prediction considerations*. Reliability Review, v. 9, p. 10,16, March, 1989.
- MEYER, P. L. *Probabilidade: Aplicações à estatística*. Livros Técnicos e Científicos, Ed. Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 1978.
- NELSON, W. *Applied life data analysis*. 5. Ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1982.
- ODEH, R. E. & EVANS, J. O. *Algorithm AS70: Percentage points of the Normal distribution*. Applied Statistics (JRSSC), v. 23, p. 96-97, 1974.

- PAULSON, E. *An approximate normalization of the analysis of variance distribution*. *Annals of Mathematical Statistics*, v. 13, p. 233-235, 1942.
- PEIZER, D. B. & PRATT, J. W. *A Normal approximation for Binomial, F, Beta and other common, related tail probabilities I*. *Journal of American Statistical Association*, v. 63, p. 1416-1465, 1968.
- PULLEN Jr., K. A. *Electronic system reliability considerations*. *Reliability Review*, v. 6, p. 6-7,24, March, 1986.
- RAHEJA, D. *Mechanical reliability - An Alice in wonderland*. *Reliability Review*, v. 9, p. 11-12, March, 1989.
- REICHE, H. *Reliability of old and new coupled system*. *Reliability Review*, v. 8, p. 12,15, June, 1988.
- RIBEIRO, J. L. D. *Confiabilidade de sistemas*. Notas de Aula. PPGE, UFRGS. Porto Alegre, RS, 1995a.
- RIBEIRO, J. L. D. *FMEA e FTA no diagnóstico e melhoria de produtos e processos*. Notas de Aula. PPGE, UFRGS. Porto Alegre, RS, 1995b.
- SARHAN, A. E. & GREENBERG, B. G. *Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples, Part I: The Normal distribution up to sample of size 10*. *Annals of Mathematical Statistics, Ann Arbor, Mich.*, v. 27, p. 427-451, 1956.
- SARHAN, A. E. & GREENBERG, B. G. *Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples, Part II*. *Annals of Mathematical Statistics, Ann Arbor, Mich.*, v. 29, p. 79-105, 1958.
- SHEWHART, W. A. *Economic control of quality of a manufactured product*. D. Van Nostrand Company, 1931.
- SOARES, J. F. & COLOSIMO, E. A. *Métodos estatísticos na pesquisa clínica*. cap. 4. 40<sup>a</sup> Reunião Anual da RBRAS e 6<sup>o</sup> SEAGRO, Ribeirão Preto, SP, 1995.
- SPINGARN, R. *Tutorial - Reliability data*. *Reliability Review*, v. 6, p. 10-12, March, 1986a.
- SPINGARN, R. *Tutorial - Math models*. *Reliability Review*, v. 6, p. 25-27, June, 1986b.
- TAGUCHI, G. *On-line quality control*. Japanese Standards Association, 1980.
- TOBIAS, P. A. & TRINDADE, D. C. *Applied reliability*. 2. Ed. Van Nostrand Reinhold, Inc., New York, NY, 1995.

- TYLER, D. F. & GENDRON, R. P. *The identification & control of reliability - Critical items*. Reliability Review, v. 6, p. 8-9, March, 1986.
- TRONESS, D. A. *Driving equipment reliability*. Reliability Review, v. 11, p. 13-16, March, 1991.
- WONNACOTT, T. H. & WONNACOTT, R. J. *Introductory statistics for business and economics*. 2. Ed., John Willey & Sons, Inc., New York, NY, 1977.

## ANEXO A

### Funções de Confiabilidade para as Principais Distribuições de Tempos de Falha

Distribuição	$h(t)$	$f(t)$	$R(t)$	Parâmetros
Exponencial	$\begin{cases} \lambda & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$	$\lambda$
Weibull	$\begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot t^{\gamma-1} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\gamma}{\theta^\gamma} \cdot t^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma} & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$	$\gamma, \theta$
Normal	$\frac{\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma \cdot R(t)}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_t^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot ds$	$\mu, \sigma$
LogNormal	$\frac{\phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)}{t \cdot \sigma \cdot R(t)}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{s} \cdot ds$	$\mu, \sigma$
Gamma	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot t^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	$\frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot \int_t^{+\infty} s^{\gamma-1} \cdot e^{-\lambda \cdot s} \cdot ds$	$\lambda, \gamma$
Uniforme	$\begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{1}{r} & l \leq t < l+r \\ r & t \geq l+r \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & t < l \\ 1 - \frac{t-l}{r} & l \leq t < l+r \\ 0 & t \geq l+r \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & t < l \\ \frac{1}{r+l-t} & l \leq t < l+r \end{cases}$	$l, r$

Quadro 7: Principais Modelos de Distribuição de Tempos de Falha utilizados em Confiabilidade, associados às expressões das funções Taxa de Risco, Densidade de Probabilidades e Confiabilidade. Fonte: Adaptação da tabela apresentada por Elsayed (1996), que apresenta mais funções do que as consideradas neste trabalho.

## ANEXO B

### Algoritmos para a Estimação de Parâmetros de Distribuições

Os algoritmos apresentados a seguir foram propostos por Ribeiro durante o desenvolvimento desta dissertação. De modo geral, as expressões apresentadas foram obtidas através de procedimentos de Regressão Não-Linear. Satisfeitas as condições impostas à aplicabilidade de cada um dos procedimentos abaixo, podem ser obtidas estimativas com erros inferiores a 5 % dos valores reais.

#### ***B.1 Algoritmo para o Cálculo do Parâmetro de Localização do Modelo de Weibull***

O presente algoritmo foi originalmente desenvolvido para o cálculo do parâmetro de localização do modelo de falhas de Weibull em amostras completas. Empiricamente constatou-se sua aplicabilidade em amostras censuradas, sendo ainda desenvolvidos estudos para este último caso. O procedimento, que é descrito em detalhes a seguir, deve ser utilizado conjuntamente com os estimadores para os parâmetros de forma e escala deste modelo. Os valores de  $k_1$  e de  $k_2$  foram obtidos por Ribeiro através de regressões não-lineares, com erros inferiores a 5%, sobre amostras provenientes de configurações características do modelo de Weibull.

O modelo parte de um conjunto de dados  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ :

1. Iniciar utilizando

$$dt = \frac{t_n - t_1}{n - 1} \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{l} = t_1 - dt \quad (\text{B.2})$$

2. Ajustar o modelo de Weibull para os tempos  $x_i = t_i - \hat{l}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), obtendo o valor estimado do parâmetro gamma:  $\hat{\gamma}$ .

3. Calcular

$$\begin{cases} k_1 = 0,0919 \cdot n^{0,643} \cdot \gamma^{1,768} \\ k_2 = 0,1762 \cdot n^{0,630} \cdot \gamma^{1,533} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

4. Calcular:

$$t_a = (t_1 - k_1 \cdot dt) + (t_2 - k_2 \cdot dt) \quad (\text{B.4})$$

5. Se  $t_a < 0$  utilizar  $\hat{l} = 0$ . Em caso contrário utilizar

$$\hat{l} = \max\left(0, \min\left(\frac{t_a}{2}, t_1 - \frac{dt}{10}\right)\right) \quad (\text{B.5})$$

6. Retornar ao passo 2 até que a precisão desejada tenha sido atingida.

## ***B.2 Algoritmo para a Estimação dos Parâmetros do Modelo Normal para Amostras Censuradas por Tempo ou por Componentes***

O algoritmo proposto por Ribeiro diferencia os casos de amostras com níveis de censura pequenos e médios. Sendo  $r$  o número de dados de falha em uma amostra de tamanho  $n$ , e  $T$  o tempo de censura de tal amostra, tem-se:

- Para  $\frac{r^2}{n} > 5$ :

1. Calcular as aproximações dos tempos mediano e de censura:

$$ta_1 = \begin{cases} t_{r/2+1} & n \text{ ímpar} \\ \frac{t_{r/2} + t_{r/2+1}}{2} & n \text{ par} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$ta_2 = \frac{t_r + T}{2} \quad (\text{B.7})$$

2. Obter as probabilidades associadas aos tempos característicos estimados acima:

$$P(ta_1) = \frac{r}{2 \cdot n} \quad (\text{B.8})$$

$$P(ta_2) = \frac{r}{n} \quad (\text{B.9})$$

3. Estimar os valores padronizados, obtidos a partir do Modelo Normal, associados às probabilidades acumuladas calculadas no passo anterior:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi^{-1}(P(ta_1)) \\ z_2 &= \Phi^{-1}(P(ta_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

4. Obter as estimativas para a média e para o desvio padrão do modelo Normal:

$$\hat{\sigma} = \frac{ta_2 - ta_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{\mu} = ta_1 - z_1 \cdot \hat{\sigma} \quad (\text{B.12})$$

- Para  $\frac{r}{n} \geq 0,75$ , pode-se trabalhar com os quartis da distribuição:

1. Estimar o primeiro e o terceiro quartis do conjunto de dados como  $ta_1$  e  $ta_2$ .
2. Utilizando os valores teóricos associados ao primeiro e ao terceiro quartis da distribuição Normal,

$$\begin{aligned} P(ta_1) = 0,25 &\Rightarrow z_1 \doteq -0,675 \\ P(ta_2) = 0,75 &\Rightarrow z_2 \doteq +0,675 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

3. Obter as estimativas para a média e para o desvio padrão do modelo Normal:

$$\hat{\sigma} = \frac{ta_2 - ta_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\mu} = ta_1 - z_1 \cdot \hat{\sigma} \quad (\text{B.15})$$

## ANEXO C

### Implementação Numérica de Distribuições

#### C.1 Distribuição Normal

Entre as distribuições mais usadas em aplicações computacionais, a distribuição Normal é a principal (Kennedy & Gentle, 1980). Existem diversos algoritmos para a obtenção de valores de probabilidade e de pontos sobre a curva de Gauss.

##### C.1.1 Distribuição Normal Direta

O algoritmo utilizado para o cálculo de probabilidades  $p$  associadas a pontos  $x$  da distribuição Normal padronizada no presente trabalho é devido a Adams (1969) & Hill (1972) e foi retirado da referência Kennedy & Gentle (1980). Para valores pequenos de  $|x|$ , Hill sugere uma expansão em Série de Taylor:

$$p(x) = \frac{1}{2} + \phi(x) \cdot \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^7}{3.5.7} + \dots \right)$$

onde  $\phi$  é a expressão da Função Densidade de Probabilidades Normal padronizada. Para valores grandes de  $|x|$ , é utilizada uma adaptação de uma fração contínua sugerida por Adams (1969):

$$p(x) = \frac{1}{x} \cdot \left( 1 - \frac{1}{x^2 + 3 - \frac{6}{x^2 + 7 - \frac{20}{x^2 + 11 - \frac{42}{x^2 + 15 - \frac{72}{x^2 + 19 + \dots}}}} \right)$$

As expressões acima podem ser reescritas recursivamente como:

$$\begin{aligned}
 p(x) &\cong \frac{1}{2} + \phi(x) \cdot w_1 \\
 w_{2s+1} &= x \\
 w_{2r-1} &= \frac{w_{2r+1} \cdot x^2}{2 \cdot r + 1} + x \quad (r = s, s-1, \dots, 1)
 \end{aligned} \tag{C1}$$

e

$$\begin{aligned}
 p(x) &\cong \begin{cases} \frac{\phi(x) \cdot (\frac{1}{v_3} - 1)}{x} & \text{para } x < 0 \\ 1 + \frac{\phi(x) \cdot (\frac{1}{v_3} - 1)}{x} & \text{para } x > 0 \end{cases} \\
 v_{4s+3} &= x^2 \\
 v_{4r-1} &= x^2 + 4 \cdot r - 1 - + \frac{2 \cdot r \cdot (2 \cdot r + 1)}{v_{4r+3}} \quad (r = s, s-1, \dots, 1)
 \end{aligned} \tag{C2}$$

respectivamente.

O procedimento básico de cálculo é o que segue:

Intervalo que contém x	Recursão utilizada	Valor de s
$(-10.0; -1.5]$	C2	$s = \text{abs}\left(\left\ 4 - \frac{52}{x} + \frac{345}{x^2}\right\ \right)$
$(-1.5; 3.0]$	C1	$s = \left\ 10 + 10 \cdot \text{abs}(x)\right\ $
$(3.0; 10.0]$	C2	$s = \text{abs}\left(\left\ -10 + \frac{85}{x} + \frac{255}{x^2}\right\ \right)$
outros	$p(x) = 0$	-

onde  $\| \cdot \|$  é a função parte inteira e  $\text{abs}(\cdot)$  é a função valor absoluto. Segundo as referências, o presente algoritmo fornece alta exatidão nas estimativas: em máquinas com precisão de até 25 dígitos, fornece pelo menos 23 dígitos exatos (Kennedy & Gentle, 1980).

Dachs (1988) apresenta uma seção comparando diversos outros algoritmos para o cálculo de probabilidades normais. Entre os métodos citados, destaca-se um método híbrido conjugando as aproximações desenvolvidas por Zelen & Severo (1964) para valores de x inferiores a 1.9 em módulo, e por Peizer & Pratt (1968) para os demais valores. Na primeira

região são garantidos pelo menos 4 algarismos decimais corretos. Nas caudas, o erro relativo é descrito como inferior a 0.5 %.

### C.1.2. Distribuição Normal Inversa

Para a estimação de valores  $x$  associados a valores de probabilidade Normal  $p$ , o procedimento utilizado foi retirado da referência Kennedy & Gentle (1980), tendo sido sugerido por Odeh & Evans (1974). Baseado na aproximação de uma fração racional que fornece uma exatidão de cerca de 7 casas decimais para valores de  $p$  entre  $10^{-20}$  e 0.5, este algoritmo pode ser descrito como:

$$x = \begin{cases} y + \frac{(((y \cdot p_4 + p_3) \cdot y + p_2) \cdot y + p_1) y + p_0}{(((y \cdot q_4 + q_3) \cdot y + q_2) \cdot y + q_1) y + q_0} & p > 0.5 \\ 0 & p = 0.5 \\ -y - \frac{(((y \cdot p_4 + p_3) \cdot y + p_2) \cdot y + p_1) y + p_0}{(((y \cdot q_4 + q_3) \cdot y + q_2) \cdot y + q_1) y + q_0} & p < 0.5 \end{cases} \quad (C3)$$

onde

$$y = \begin{cases} \sqrt{-2 \cdot \ln(1-p)} & p > 0.5 \\ \sqrt{-2 \cdot \ln(p)} & p < 0.5 \end{cases} \quad (C4)$$

e os coeficientes são dados por:

Valores dos coeficientes $p_i$	Valores dos coeficientes $q_i$
$p_0 = -0.322232431088$	$q_0 = 0.099348462606$
$p_1 = -1.000000000000$	$q_1 = 0.588581570495$
$p_2 = -0.342242088547$	$q_2 = 0.531103462366$
$p_3 = -0.0204231210245$	$q_3 = 0.103537752850$
$p_4 = -4.53642210148E-05$	$q_4 = 0.0038560700634$

Kennedy & Gentle (1980) e Dachs (1988) apresentam diversos outros métodos para a aproximação da distribuição Normal inversa. Os demais métodos apresentados fornecem exatidões menores, mas apresentam a vantagem de um custo computacional menor.

## C.2 Distribuição $\chi^2$

Esta distribuição é comumente utilizada na obtenção de estimativas intervalares para parâmetros de distribuições.

### C.2.1 Distribuição $\chi^2$ Direta

A aproximação aqui apresentada é composta de duas partes e foi encontrada em Dachs (1988). A primeira parte, para graus de liberdade maiores ou iguais a 10, é devida a Peizer & Pratt (1968). A segunda parte, para graus de liberdade entre 1 e 10, é uma expansão introduzida por Lau (1980).

Para a primeira parte, a probabilidade  $p$ , associada a uma distribuição  $\chi^2$  com  $k$  graus de liberdade, no ponto  $x$ , é dada por:

$$p(x, k) = \Phi(z(x, k)) \quad (C5)$$

onde  $\Phi$  é a distribuição Normal Padrão acumulada e  $z$  é o desvio normal equivalente.

Para o cálculo do desvio normal equivalente, necessário para a estimação da probabilidade  $\chi^2$ , Peizer & Pratt introduzem a função  $g$ :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 10^{-9} \\ 0 & |1 - x| < 10^{-3} \\ \frac{1 - x^2 + 2 \cdot x \cdot \ln(x)}{(1 - x)^2} & \text{c. c.} \end{cases} \quad (C6)$$

O desvio normal equivalente é então dado por:

$$z = \left(x - k + \frac{2}{3} - \frac{0.08}{k}\right) \cdot \sqrt{\frac{1 + g\left(\frac{k-1}{x}\right)}{2 \cdot x}} \quad (C7)$$

Para a segunda parte, a única aproximação realizada é no cálculo do logaritmo da Função Gamma, devido a Abramowitz & Stegun (1964):

$$Fnl = \frac{1}{12.x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{105} - \frac{1}{140.x}\right)\right)\right) \quad (C8)$$

$$p = 0.3989422804 * e^{\frac{k}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) + t \cdot Fnl(t^2) - \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(t) + t - \frac{x}{2}} \cdot f \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right) \quad (C9)$$

onde  $t = \frac{k}{2} + 2$  e  $f$  é obtido através do laço abaixo:

```
f = 1
c = 1
a = k / 2
Do
  a = a + 1
  c = c . x / (2 . a)
  f = f + c
Loop Until (c <= 0.0000005 . f)
```

Segundo Dachs (1988), esta aproximação apresenta no mínimo 3 algarismos decimais exatos. Kennedy & Gentle (1980) descrevem outras aproximações para esta distribuição, mas não quantificam a exatidão obtida nos diversos métodos apresentados.

### C.2.2 Distribuição $\chi^2$ Inversa

O cálculo eficiente de aproximações de valores  $x$  associados a probabilidades  $p$  desta distribuição é bastante oneroso. O algoritmo utilizado aqui é uma adaptação feita por Dachs (1988) de um método sugerido por Best & Roberts (1975)<sup>27</sup>. Em sua forma original, Dachs (1988) cita que podem até mesmo ser utilizados graus de liberdade não inteiros. Os procedimentos básicos consistem no cálculo do valor do logaritmo da Função Gamma completa, com pelo menos 5 decimais corretos, bem como de uma aproximação da Função Gamma incompleta. Para este último, Dachs (1988) sugere o algoritmo de Bhattacharjee (1970). Como produto final, aproximações com pelo menos quatro algarismos decimais corretos são obtidas.

<sup>27</sup> Os algoritmos são suficientemente complexos para justificarem sua não apresentação neste trabalho, mas podem ser encontrados, na referência citada, inclusive com implementações didáticas, na linguagem de programação Pascal.

### 7.3 Distribuição $D_m$

A distribuição  $D_m$  é utilizada para indicar o nível de significância do Teste de Qualidade de Ajuste de Kolmogorov-Smirnov. O algoritmo de cálculo é baseado em uma Série de Taylor:

$$D_m(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot e^{-2 \cdot x^2 \cdot k^2} \quad (\text{C10})$$

Testes realizados mostraram que a expressão acima garante pelo menos quatro decimais corretos, o que é suficiente para os propósitos de sua aplicação neste trabalho.

### C.3 Distribuição $F$ de Snedecor

Segundo Dachs (1988) e Kennedy & Gentle (1980) esta é, sem dúvidas, uma das distribuições mais difíceis de se obter aproximações.

#### C.3.1 Distribuição $F$ Direta

Para a obtenção de valores de probabilidade desta distribuição com pelo menos 3 algarismos decimais corretos seguiu-se o procedimento indicado por Dachs (1988)<sup>28</sup>.

- Para um grau de liberdade no denominador ou um grau de liberdade no numerador, usar a aproximação sugerida por Peizer & Pratt (1968) - que necessita do cálculo do desvio normal equivalente para posterior aplicação em aproximações das distribuições Normal e  $t$  de Student - agregada à modificação apresentada por Dachs (1988).
- Para graus de liberdade maiores ou iguais a 10, usar diretamente a aproximação sugerida por Peizer & Pratt (1968).
- Para graus de liberdade entre 1 e 10, usar a aproximação de Majunder & Bhattacharjee (1973), que se baseia no cálculo da Integral Beta incompleta através de sua expansão em série numérica.

---

<sup>28</sup> Novamente, a complexidade dos algoritmos citados justifica sua não apresentação neste trabalho. Exemplos e programas didáticos em linguagem Pascal podem ser encontrados em Dachs (1988).

### C.3.2 Distribuição F Inversa

O algoritmo apresentado aqui compõe-se de duas partes: a primeira é uma aproximação menos acurada, devida a Paulson (1942), para os valores  $x$  associados a valores de probabilidade  $p$  e cuja utilidade é servir como valor inicial para a segunda parte, sugerida primeiramente por Cooke *et alli* (1981), e que refina o valor de  $x$  através do Método de Newton-Raphson. Dachs (1988) ainda sugere uma modificação para a última parte, através do uso de interpolações lineares. O resultado obtido é apresentado na forma de aproximações com cerca de 5 dígitos corretos e para as mais variadas combinações de valores de graus de liberdade no numerador e no denominador.

O algoritmo de Paulson (1942), que fornece a aproximação inicial para  $x$ , parte do desvio normal equivalente da probabilidade  $p$ , dado por  $z = \Phi^{-1}(p)$ . Sendo  $k_1$  o número de graus de liberdade do numerador e  $k_2$  o número de graus de liberdade do denominador, tem-se:

$$x = w^3 \quad (\text{C11})$$

onde  $w$  pode ser obtida por

$$\frac{\left(1 - \frac{2}{9 \cdot k_2}\right) \cdot w - \left(1 - \frac{2}{9 \cdot k_1}\right)}{w^2 \cdot \frac{2}{9 \cdot k_2} + \frac{2}{9 \cdot k_1}} = z. \quad (\text{C12})$$

Para  $k_2$  menor ou igual a 3 sugere-se ainda utilizar, no lugar do desvio normal equivalente, o desvio normal corrigido por

$$z_* = z \cdot (1.1581 - 0.229 \cdot u - 0.0042 \cdot u^2 - 0.0027 \cdot u^3)$$

$$u = \frac{z}{\sqrt[4]{k_2^3}} \quad (\text{C13})$$

## ANEXO D

### Algoritmos para Média e Variância

A implementação de fórmulas em ambiente computacional não pode ser frivolamente tratada. Se tais fórmulas são intensivamente utilizadas, as consequências de “arredondamentos” indevidos ou de má programação podem resultar em uma completa dissociação entre os valores reais e os valores estimados computacionalmente. A precisão finita dos computadores deu origem a todo um ramo da ciência Matemática, cujo objetivo principal é o estudo e a minimização de erros devidos a implementações computacionais (Cláudio & Marins, 1989). Um exemplo pode ser encontrado em Dachs (1988), através do cálculo da média aritmética de 100 valores, sendo que 99 deles são iguais a  $10^{-10}$  e o centésimo é igual a 100. Um programa computacional em linguagem Pascal foi utilizado para implementar diretamente a fórmula usual da média aritmética. Somando-se todos os valores em ordem crescente e dividindo-se pelo número de termos o resultado obtido foi 1.000000000100. Repetindo-se a soma, porém em ordem decrescente, e dividindo-se pelo número de termos, o resultado foi 1.000000000000. O resultado correto seria 1.000000000099. Apesar do erro surgir nas últimas casas decimais, não é difícil imaginar aplicações nas quais este ínfimo erro poderia levar a resultados completamente equivocados (como por exemplo, um desvio condicional para a média estritamente maior que 1!).

Cláudio e Marins (1989) discutem extensivamente a questão da geração e do acúmulo de erros computacionais devidos a problemas de programação. Dachs (1988) e Kennedy & Gentle (1980) discutem extensivamente a questão da utilização de fórmulas computacionalmente estáveis para a estimação de parâmetros populacionais tais como a média e a variância. Outras referências podem ser encontradas na literatura, sob os títulos de *Matemática Numérica*, *Matemática Computacional* e *Estatística Computacional*.

### **D.1 Algoritmo para a Média**

O algoritmo implementado neste trabalho para o cálculo da média aritmética  $\bar{x}$  de um conjunto de dados  $x_i$  ( $i = 1..n$ ) faz parte de uma família de algoritmos denominados algoritmos adaptativos, cuja característica principal é a recursividade:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= m(n) \\ m(0) &= 0 \\ m(i) &= m(i-1) + \frac{x_i - m(i-1)}{i} \quad (i = 1..n) \end{aligned} \tag{D1}$$

A estabilidade numérica e a eficácia deste e de outros algoritmos adaptativos são discutidas em Dachs (1988).

### **D.2 Algoritmo para a Variância**

Para o cálculo da variância  $s^2$  de um conjunto de dados  $x_i$  ( $i = 1..n$ ), foi novamente implementado um algoritmo adaptativo:

$$\begin{aligned} s^2 &= s(n) \\ s(0) &= 0 \\ s(i) &= s(i-1) + \frac{i-1}{i} \cdot (x_i - m(i-1))^2 \quad (i = 1..n) \\ m(0) &= 0 \\ m(i) &= m(i-1) + \frac{x_i - m(i-1)}{i} \quad (i = 1..n) \end{aligned} \tag{D2}$$

Note-se que a recursão  $m$  apresentada é a utilizada para o cálculo da média aritmética do conjunto de dados. A estabilidade numérica e a eficácia deste e de outros algoritmos adaptativos são discutidas em Dachs (1988).