UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

THAÍSA JACINTHO MÜLLER

OBJETOS DE APRENDIZAGEM MULTIMODAIS E ENSINO DE CÁLCULO: UMA PROPOSTA BASEADA EM ANÁLISE DE ERROS

Prof. Dr. José Valdeni De Lima
Orientador

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Coorientadora

Porto Alegre
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

THAÍSA JACINTHO MÜLLER

Objetos de Aprendizagem Multimodais e Ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Informática na Educação

Prof. Dr. José Valdeni De Lima
Orientador

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Coorientadora

Porto Alegre
2015

CIP - Catalogação na Publicação

Müller, Thaísa Jacintho
Objetos de Aprendizagem Multimodais e Ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros / Thaísa Jacintho Müller. -- 2015.
203 f.

Orientador: José Valdeni de Lima.
Coorientadora: Helena Noronha Cury.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. 2. Análise de erros. 3. Objetos de aprendizagem. 4. Ambiente MOODLE. I. Lima, José Valdeni de, orient. II. Cury, Helena Noronha, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Thaísa Jacintho Müller

OBJETOS DE APRENDIZAGEM MULTIMODAIS E ENSINO DE CÁLCULO: UMA PROPOSTA BASEADA EM ANÁLISE DE ERROS

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Aprovada em 25 de agosto de 2015.

Prof. Dr. José Valdeni de Lima – Orientador

Profª Dra. Helena Noronha Cury – Coorientadora

Profª Dra. Carmen Vieira Mathias – UFSM

Profª Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana – UFRGS

Profª Dra. Liane Margarida Rockenbach Tarouco – PPGIE/UFRGS

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me dar forças para cumprir uma longa jornada de estudos que, certamente, não acaba aqui, mas que tem, com a conclusão desta tese, um marco muito significativo. Agradeço também a todas as pessoas e Instituições que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a minha formação e para o desenvolvimento deste trabalho. Mais especificamente, ou mais diretamente ligados à tese e ao tempo de Doutorado, agradeço:

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de realização deste curso;

À Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, por ceder espaço para realização desta pesquisa, fazendo com que tudo fosse possível. Também, aos alunos envolvidos na pesquisa, cuja participação viabilizou todas as etapas do processo;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, por todos os ensinamentos e experiências compartilhadas ao longo do curso. De modo especial, ao meu orientador professor Doutor José Valdeni de Lima, pela confiança depositada, pelo respeito às minhas convicções e pela liberdade de ação e à professora Doutora Helena Noronha Cury, por aceitar coorientar esta tese.

Ao Filipe, pelo grande apoio estatístico e textual, por todas as longas conversas nas tantas vezes em que precisei e pela parceria em muitos outros momentos;

Aos colegas da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, pelo apoio que recebi sempre que necessário. Em especial, à Neda pela participação na entrevista que encerra o ciclo proposto nesta tese e por tantas outras participações, mesmo que indiretas, ao longo destes anos de Doutorado;

A todos os amigos que conquistei durante a realização deste curso, que tornaram o dia a dia muito mais agradável. De modo especial, aos parceiros de trabalho: Alberto, Érico, Bárbara, Rosana, Kelly, Rodrigo;

Aos amigos que me acompanham desde o Mestrado e que são presença constante em minha vida, proporcionando momentos de descontração para “recarregar as energias”. Agradeço principalmente às Patis pelo esforço contínuo em não perdermos o contato mesmo com a correria da vida e por estarem sempre dispostas a ouvir e conversar;

Ao pessoal da turma dos jogos (em especial, Renato, Aninha, Emerson e Suzana) por também me proporcionarem muitos momentos alegres e por entenderem a minha ausência nos últimos tempos, para que este trabalho pudesse ser concluído;

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha família, especialmente meu pai Ricardo, minha mãe Marilene, meu irmão Thiago e minha avó Vera, que dividiram comigo todas as etapas de realização deste curso e a quem dedico este trabalho.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AdaptWeb®	Ambiente de Ensino-Aprendizagem Adaptativo na Web
AvalWeb®	Sistema de Gerenciamento de Questões e Respostas
ADSL	Asymetrical Digital Subscriber Line
BIOE	Banco Internacional de Objetos Educacionais
CAS	Sistema Algébrico Computacional (Computer Algebra System)
EDUMATEC	Educação Matemática e Tecnologia Informática
HTML	HyperText Markup Language
ILS	Index of Learning Styles
LAPREN	Laboratório de Aprendizagem
MOODLE	Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment
OA	Objeto de Aprendizagem
PBD	Pesquisa Baseada em Design
PGIE	Pós-Graduação em Informática na Educação
PHP	Personal Home Page
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
RCR	Resolução-comentário-resolução
SQL	Structured Query Language
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFF	Universidade Federal Fluminense
UNISINOS	Universidade do Vale do Rio dos Sinos
USP	Universidade de São Paulo
XML	Extensible Markup Language

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Esta tese teve como objetivo analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e Integral, bem como testar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos. Na primeira fase da pesquisa, foram realizadas análises de erros cometidos por estudantes de Cálculo, inicialmente de uma turma de Sistemas de Informação e, na sequência, de uma turma de Engenharia. Em ambos os testes identificou-se que as maiores dificuldades se referiam a conteúdos de Matemática Básica, pré-requisitos para o Cálculo. O trabalho teve como pressupostos teóricos as ideias de Ausubel, Tall, Vinner e de autores que discutem aprendizagem de Álgebra, visto que os erros mais encontrados nas análises se referiam à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição. A metodologia de investigação é quanti-qualitativa e está baseada nos pressupostos da Pesquisa Baseada em Design. Foi aplicado, também, um teste de estilos de aprendizagem, a fim de identificar quais os estilos preferenciais dos estudantes, o que guiou a construção de um Objeto de Aprendizagem voltado para a propriedade distributiva. Na segunda fase da pesquisa, foram realizadas atividades na Plataforma MOODLE, com alunos de Cálculo Diferencial e Integral I. Inicialmente, os estudantes responderam a um questionário que envolvia conteúdos de matemática básica, a fim de que fossem identificadas suas dificuldades. A partir delas, os grupos de alunos foram direcionados a objetos de aprendizagem, dentre os quais se tem o objeto construído na primeira etapa. Após o estudo com os objetos, os estudantes foram desafiados a discutir em fóruns, nos quais lançaram-se novas questões sobre as dificuldades encontradas. Nessa discussão, observou-se que muitas das considerações feitas nos pressupostos teóricos foram confirmadas. Por fim, foi aplicado um segundo questionário, semelhante ao primeiro, com fins de comparação do desempenho dos alunos envolvidos na pesquisa. A partir da análise estatística dos resultados, pode-se afirmar que houve uma melhora substancial no desempenho do grupo, o que indica que o trabalho realizado cumpriu com os objetivos propostos. Ainda, foi realizada uma entrevista com uma das professoras responsáveis pelo Laboratório de Aprendizagem da Instituição onde o trabalho foi desenvolvido, na qual foi salientada a importância de realizar uma pesquisa que possa dar subsídios para uso de recursos tecnológicos no Laboratório, para auxiliar os alunos a localizar e remediar suas dificuldades.

Palavras-Chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Análise de Erros, Objetos de Aprendizagem, Ambiente MOODLE.

Multimodal Learning Objects and Teaching Calculus: a proposal based on error analysis

ABSTRACT

This thesis aims to analyze learning difficulties presented by students of Differential and Integral Calculus and test possibilities to overcome these difficulties through technological resources. In the first phase of the research, error analyzes were performed using results from a Calculus test, initially from a group of Information Systems students and, afterward, from a group of Engineering students. In both tests, it was found that the main difficulties refer to Basic Mathematics content, prerequisites for the Calculus discipline. The work is based in conceits of Ausubel, Tall, Vinner and other authors who discuss learning Algebra, since the most common errors referred to the application of the distributive property of multiplication over addition. The research methodology is quantitative-qualitative and is based on assumptions of Research-Based Design. It was also applied a learning style test in order to identify the preferred styles of students, which guided the creation of a Learning Object directed to the distributive property. In the second phase of the research, activities were carried out in the MOODLE platform with students from Differential and Integral Calculus I. Initially, students answered a questionnaire involving basic math content in order to identify their difficulties. From these results, groups of students were directed to Learning Objects, among which is the object constructed in the first stage. After studying with these objects, students were challenged to discuss in forums in which were launched new questions about the difficulties encountered. In this discussion, it was noted that many of the considerations made in the theoretical assumptions were confirmed. Finally, a second questionnaire was applied, similar to the first, in order to compare the performance of the students involved in the research. From the statistical analysis, it can be said that there was a substantial improvement in performance of the group, indicating the work complied with the proposed objectives. An interview was conducted with one of the teachers responsible for the Learning Laboratory where the research was developed, in which was highlighted the importance of conducting a study to sustain the use of technological resources in the Laboratory, in order to help students locate and remedy its difficulties.

Keywords: Differential and Integral Calculus Teaching, Error Analysis, Learning Objects, MOODLE Environment.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta tese tem sua origem no trabalho em disciplinas de cunho matemático na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) e na Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), além de experiências anteriores da autora com projetos de pesquisa envolvendo Análise de Erros.

Observando as dificuldades dos alunos em turmas de Cálculo, nota-se que seus maiores problemas se encontram em conteúdos básicos, os quais devem servir como subsídios para a compreensão do que é, de fato, desenvolvido na disciplina. Esta observação é confirmada também por resultados obtidos nas pesquisas desenvolvidas na PUCRS, como o projeto de iniciação científica da autora, durante o ano de 2004, sob orientação da Profª. Dra. Helena Noronha Cury.

Constatar esses problemas na aprendizagem de Cálculo é causa de inquietação para o professor. Um primeiro questionamento que se impõe, ao propor esta pesquisa, é sobre o que pode ser feito para auxiliar estes alunos em suas dificuldades, uma vez que estes problemas acarretam um grande índice de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos superiores, desestimulando a permanência na Universidade.

Na realidade da Universidade privada, em que é difícil oferecer uma disciplina extra, como "Pré-cálculo" e, mais ainda, exigir que o aluno a curse, uma vez que isso acarretaria custos adicionais, acredita-se que o uso da tecnologia pode ser um grande aliado na superação das dificuldades dos estudantes. Assim, um segundo questionamento envolve o tipo de recurso tecnológico capaz de auxiliar nessa superação de problemas detectados.

Pesquisas na área de Educação Matemática têm mostrado dificuldades de alunos na resolução de exercícios e problemas relativos a conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (GIRALDO, 2004; HARDY, 2008; NASSER, 2009; LUZ, 2011).

Giraldo (2004) investigou contradições encontradas na formação da imagem de um conceito matemático, especialmente no caso da derivada de uma função, e os obstáculos enfrentados pelos estudantes ao trabalhar com sistemas de computação simbólica. Em anos recentes, o autor, juntamente com dois colegas, discutiu a integração de recursos computacionais à prática docente, o que, segundo eles, possibilita conexões entre conteúdos, “criando novas formas de explorar e aprender” (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p. viii).

Nasser (2009) investigou dificuldades de alunos no traçado de gráficos de funções reais de uma ou duas variáveis, relacionando seu desempenho ao estilo visual de aprendizagem. Segundo a autora, é necessário desenvolver estratégias de ensino apropriadas aos estilos de aprendizagens dos alunos, particularmente no trabalho com gráficos.

Hardy (2008) pesquisou dificuldades de alunos de Cálculo na resolução de tarefas envolvendo limites de funções. A autora mostra que as tarefas rotineiras de Cálculo, propostas pela instituição investigada, são frequentemente interpretadas pelos alunos como relacionadas com a linguagem e as características da Álgebra escolar e isso inibe a consolidação dos conceitos do Cálculo.

A análise de erros cometidos por estudantes de Cálculo, em cursos superiores da área de Ciências Exatas, aponta para a falta de significado atribuído a conceitos como limites, derivadas e integrais, que parecem se reduzir apenas a regras de cálculo, visto que poucas vezes é empregada a definição formal. Também é possível detectar dificuldades em conteúdos matemáticos de Ensino Fundamental ou Médio, que são básicos para a aprendizagem do Cálculo.

Segundo Sauer, Lima e Booth (2012), o futuro engenheiro não necessita estar apto apenas à aplicação de regras, é necessário encorajá-lo a pensar, fazer conjecturas, ler e interpretar e, a partir disto, buscar maneiras de resolver os problemas que se apresentam. Essa observação pode ser estendida a qualquer aluno de cursos das ciências exatas, especialmente aqueles que cursam as disciplinas de Cálculo.

Tentativas de usar tecnologia no ensino de Cálculo também têm sido documentadas (ZUCHI, 2005; OLIMPIO JR., 2006; GIRALDO; CARVALHO, 2008) e relativo sucesso parece ser possível em pequenos grupos de alunos ou em experiências pontuais. Zuchi (2005) investigou dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de limite e propôs a aplicação de uma sequência didática em um sistema tutorial inteligente.

Olimpio Jr. (2006), por sua vez, investigou a compreensão sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, trabalhando com um grupo de oito alunos de Cálculo, em experimentos planejados para serem executados com o software Maple.

Por outro lado, Giraldo e Carvalho (2008) fizeram uma revisão sobre experiências com uso de tecnologia computacional no ensino de Matemática avançada e consideram que a ênfase deixou de ser na utilidade das ferramentas computacionais e passou para a forma como elas são usadas. Certas limitações dessas ferramentas – tais como os “erros” de arredondamento – podem ser exploradas no sentido de melhor compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Outra possibilidade para o trabalho com tecnologia apontado em algumas dessas experiências é o uso de objetos de aprendizagem, como os disponibilizados no Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE), elaborados para o ensino de Matemática em todos os níveis.

Muitas Instituições de Ensino Superior têm desenvolvido sites com variadas experiências para uso de alunos de Matemática em cursos de graduação. Entre elas, pode-se citar o LAPREN (Laboratório de Aprendizagem), da PUCRS; o EDUMATEC (Educação Matemática e Tecnologia Informática), da UFRGS; o E-Cálculo, da USP; o site de Conteúdos Digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, da UFF. Nesses ambientes, são encontrados objetos de aprendizagem, elaborados sob diversas concepções de ensino e aprendizagem, todos tentando auxiliar os alunos em suas dificuldades.

Sauer (2004), em sua tese de doutorado, desenvolvida neste programa de Pós-Graduação, apresenta um ambiente desenvolvido para apoio a alunos de Cálculo, o qual é organizado em espaços ou contextos de aprendizagem e tem como objetivo promover a comunicação (com discussão de tópicos relacionados aos temas da disciplina), permitindo também a realização de tarefas. Tal ambiente possui espaços reservados para produções individuais e coletivas, promovendo a interação entre os usuários. Neste mesmo trabalho, a partir de uma experiência realizada com alunos repetentes em Cálculo (também utilizando ambientes virtuais como apoio), a pesquisadora confirma a dificuldade que tais estudantes têm em ler e interpretar enunciados de problemas, o que leva a crer que é preciso promover a cooperação entre eles. Confirma também que os diálogos promovidos no ambiente possibilitaram a aprendizagem.

Assim, a partir do que foi exposto até aqui e dos questionamentos que foram levantados, planejou-se esta pesquisa, que tem como **objetivo geral** analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e Integral e testar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos.

Como **objetivos específicos**, são propostos:

- analisar erros e dificuldades de alunos ingressantes em cursos de Engenharia e áreas afins, com relação a conteúdos de Matemática Básica, pré-requisitos para as disciplinas de Cálculo;
- testar proposta de uso de objeto(s) de aprendizagem que possa(m) auxiliar alunos calouros a superarem suas dificuldades.

O desenvolvimento desta tese é baseada nas ideias de Ausubel sobre aprendizagem significativa e sobre subsunçores, sistematizadas em textos como Ausubel, Novak e Hanesian (1980), Ausubel (2003), Moreira (1997, 2011a, 2011b), entre outros. Também são evocadas ideias de Tall e Vinner (1981) e Tall (1986), sobre imagem do conceito, definição do conceito e organizadores genéricos, bem como a Teoria dos Três Mundos da Matemática, de Tall (2013).

A pesquisa foi planejada conforme os pressupostos da Pesquisa Baseada em Design (PBD), apresentados no Capítulo 3. A PBD leva em conta o ambiente no qual se desenvolve a investigação e as atividades nas quais os participantes – alunos, professores e pesquisadores – se envolvem.

Esta tese está dividida em 6 Capítulos. Após esta Introdução, traz-se, no Capítulo 2, a fundamentação teórica na qual a pesquisa foi baseada, discutindo-se a aprendizagem significativa, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e seus pré-requisitos, os estilos de aprendizagem e os princípios norteadores para a criação do objeto de aprendizagem, além de alguns trabalhos correlatos.

No Capítulo 3, apresentam-se os procedimentos metodológicos, com a explicação sobre o tipo de pesquisa e sobre a análise dos dados, bem como a indicação dos instrumentos de pesquisa e dos participantes.

No Capítulo 4, trazem-se os resultados da primeira etapa, com dados das análises de erros e da aplicação do Teste de Estilos de Aprendizagem e a criação de um objeto de aprendizagem.

No Capítulo 5, tem-se a apresentação e análise dos resultados obtidos na segunda etapa da pesquisa, que envolveu questionários realizados na plataforma MOODLE, utilização de objetos de aprendizagem e discussões em fóruns. Traz-se também a análise de uma entrevista com uma professora que trabalha no Laboratório da instituição onde a pesquisa foi realizada.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e limitações da pesquisa, bem como sugestões de trabalhos futuros. Conclui-se a tese com as Referências utilizadas e os Apêndices.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento desta tese, foram usados como fundamentação teórica os constructos apresentados nas seções que seguem.

O estudo da teoria da aprendizagem significativa justifica-se pela aproximação com o que acontece com o aprendizado em Cálculo e, de modo geral, em Matemática. Em um segundo momento, apresentam-se algumas considerações sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, que é o foco da pesquisa desenvolvida.

Em seguida, revisa-se a teoria dos Três Mundos da Matemática, criada por David Tall, bem como se situam as dificuldades relacionadas a conteúdos de Álgebra. Por fim, estudam-se os pressupostos teóricos sobre Objetos de Aprendizagem, utilizando os conceitos de Multimodalidade e princípios de projeto de tais objetos, bem como os estilos de aprendizagem dos alunos.

2.1 Aprendizagem Significativa

Ao se fazer uma proposta que considere a importância de trabalhar na direção de "preencher as lacunas" identificadas na aprendizagem de alunos que cursam disciplinas de Cálculo, é importante ter em mente que tais disciplinas dependem de muitos conteúdos pré-requisitos, os quais, se não forem familiares aos estudantes, precisam ser retomados, ainda que sem uma ordem preestabelecida. Neste sentido, é importante atentar para questões relacionadas à aprendizagem significativa.

Em Ausubel (2003, p. xiii), encontra-se uma definição sucinta da Teoria da Assimilação, que compreende "processos e mecanismos mediadores da aprendizagem por recepção e retenção significativas e das variáveis cognitivas e afetivas/emocionais que colidem com os primeiros de forma positiva e negativa."

De imediato, é necessário explicitar como o autor entende a recepção e a retenção significativas. Para Ausubel (2003), recepção significativa é o processo de aquisição de novos significados a partir de material de aprendizagem apresentado; no entanto, destaca que a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem de material significativo, haja vista que o material só pode ser potencialmente significativo. O aprender significativamente implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, uma nova informação a outras com as quais o aluno já está familiarizado (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Além disso, é fundamental que o aluno manifeste uma disposição para aprender dessa forma.

É necessário que cada termo apresentado na teoria de Ausubel seja bem definido, para que se possa, posteriormente, embasar a proposta aqui apresentada. Assim, a expressão “não arbitrária” indica, segundo Moreira (1997), que o relacionamento da nova informação à estrutura cognitiva do aprendiz não é feito com qualquer aspecto dessa estrutura, mas com conhecimentos específicos, já existentes, que Ausubel chama de subsunçores.

Por outro lado, o que é incorporado à estrutura cognitiva é a substância do novo conhecimento, não apenas as palavras nas quais é expresso. Finalmente, “subsunçores” são conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, tais como proposições, concepções, ideias, invariantes operatórios ou representações sociais. Quando serve de âncora para um novo conhecimento, o subsunçor pode ser modificado, adquirindo novos significados (MOREIRA, 2011a).

Com relação ao Cálculo Diferencial e Integral, há uma grande quantidade de conceitos e propriedades, em particular dos conjuntos numéricos, que precisam estar disponíveis na estrutura cognitiva do aluno para que ele aprenda conteúdos, como os de limite, continuidade, derivadas e integrais. Entre esses, podem ser citados: as operações e propriedades definidas nos conjuntos numéricos, as relações de ordem nesses conjuntos, a noção de distância, o módulo de um número real, etc.

Os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral são considerados difíceis de serem compreendidos e a não compreensão provoca, muitas vezes, desânimo nos estudantes. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) comentam que a experiência crônica de fracasso em Matemática pode levar o aluno a uma falta de confiança em sua capacidade de aprender significativamente e, para evitar novos fracassos, esse aluno considera que a memorização é a melhor alternativa.

A aprendizagem significativa pode se apresentar em três diferentes tipos: aprendizagem representacional, conceitual e proposicional. A aprendizagem representacional implica aprender o significado de palavras ou símbolos ou dos elementos por eles representados. No Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, é fundamental aprender os símbolos que denotam os conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), mas essa aprendizagem só será significativa se o aluno souber distinguir os elementos de cada conjunto numérico representado por um determinado símbolo.

A aprendizagem conceitual está relacionada aos conceitos, ou seja, aos “objectos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolo” (AUSUBEL, 2003, p. 2). A formação conceitual, segundo Ausubel, ocorre principalmente em crianças pré-escolares, enquanto que naquelas de idade escolar e nos adultos, ocorre a assimilação conceitual, visto que já há referentes, na estrutura cognitiva, para se combinarem e serem utilizados na definição de novos conceitos.

A aprendizagem proposicional não se reduz ao aprendizado de palavras isoladas ou combinadas, mas se refere ao aprendizado do significado de novas ideias expressas em forma de proposições. Assim, por exemplo, as propriedades da derivação são aprendidas a partir do conceito, mas, para serem significativamente aprendidas, é necessário que conceitos e propriedades das operações nos conjuntos numéricos sejam subsunçores – conhecimentos prévios relevantes – para a nova aprendizagem.

Dois princípios da organização da estrutura cognitiva do aluno que também interessam ao estudo proposto são a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa. Segundo Ausubel (2003), o principal princípio é a diferenciação progressiva: ideias, conceitos, proposições mais gerais e inclusivas devem ser apresentadas no início do ensino de um determinado conteúdo, para que, progressivamente, sejam diferenciados, em termos de pormenores e especificidades.

Já o princípio da reconciliação integrativa propõe que a programação do material instrucional deve ser feita para explorar “relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes” (MOREIRA; MASINI, 2001, p. 30). Dessa forma, na estrutura cognitiva do aluno, os conhecimentos já estabelecidos podem se relacionar com os que forem introduzidos, de forma a adquirir novos significados.

O aluno de Cálculo, para aprender regras de derivação, por exemplo, precisa ter claras as palavras ou símbolos que estão envolvidos na definição das propriedades da derivação, que se consubstanciam em regras (quantificadores, operações e propriedades nos conjuntos numéricos, com ênfase para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, etc), combinando-os em sua estrutura cognitiva, de modo a assimilar o significado das propriedades da derivação. Em muitos casos, algumas dessas palavras ou símbolos foram memorizados sem compreensão, desde o Ensino Fundamental, e, com isso, nem sempre há possibilidade de relacioná-los para aprender significativamente o novo conceito.

Os subsunçores podem ser mais ou menos estáveis, mais ou menos diferenciados, mas no processo de assimilação de um novo conceito, eles se modificam, adquirindo novos significados. Assim, a aprendizagem significativa é dinâmica, pois a interação entre os conhecimentos prévios e os novos, que a caracteriza, é não literal (ou seja, substantiva) e não arbitrária (isto é, feita com elementos pré-existentes) (MOREIRA, 2011a).

Um problema que se apresenta ao professor de Cálculo é a falta de subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos. Por exemplo, entre os conteúdos estudados no Ensino Médio, muitas vezes o conceito de função, extremamente necessário para estudantes de Cálculo, não é trabalhado, sendo apenas apresentados gráficos de algumas funções. Assim, muitas vezes o estudante não dispõe de subsunçores que lhe permitam atribuir significado aos novos conhecimentos sobre limites, continuidade e derivadas, dentre aqueles que são apresentados em um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Um dos recursos sugeridos por Ausubel para resolver esse problema é o uso dos organizadores prévios.

Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do material com o qual o professor pretende introduzir o novo conteúdo. Esses organizadores vão servir de "ponte" entre o que o aluno já sabe e o que ele deveria saber para poder aprender significativamente o novo conteúdo. Segundo Moreira (2011a, p. 105), "[...] podem tanto fornecer ´ideias-âncora` relevantes para a aprendizagem significativa do novo material, quanto estabelecer relações entre ideias, proposições e conceitos já existentes na estrutura cognitiva e aqueles contidos no material de aprendizagem." Os organizadores prévios são recursos apresentados em níveis de abstração, generalização e inclusão mais altos do que o material a ser aprendido.

Segundo Moreira (2011a), há dois tipos de organizadores prévios: o expositivo e o comparativo. Quando o conteúdo é completamente novo e o aluno não tem subsunçores, um organizador prévio do tipo expositivo como, por exemplo, um texto apresentado ao aluno ou uma aula prévia sobre os conteúdos pode ajudar. Quando o material a ser introduzido na aula é relativamente familiar aos alunos, pode-se fazer uso de organizadores comparativos, que permitem integrar os novos conhecimentos à estrutura cognitiva do aprendiz (MOREIRA, 2011a).

Como se pode observar, as ideias apresentadas por este autor trazem algumas reflexões que podem ser adaptadas à questão do ensino de Cálculo. A seguir, são apresentadas algumas considerações específicas sobre esse ensino.

2.2 O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e seus Pré-requisitos

Historicamente tem-se observado uma incidência muito grande de reprovações e dificuldades dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Já é sabido que a maioria dessas dificuldades encontra-se em conteúdos de Matemática Básica, que são pré-requisitos para o estudo de limites e derivadas, por exemplo. Para Oliveira e Raad (2012), existe um mito acerca da dificuldade desta disciplina, uma vez que há uma questão considerada crônica para os baixos índices de aprovação, o que causa um grande temor nos estudantes. Segundo esses autores, a cultura de ensino do Cálculo é linear, ou seja, um conhecimento só é satisfatoriamente aprendido se o conteúdo que o antecede também for assimilado corretamente, de modo que, caso haja alguma falha nesta sequência, a reprovação é uma consequência natural. Neste sentido, a solução para o problema seria a implantação de disciplinas no estilo Pré-cálculo, promovendo revisões de conteúdos de Matemática Básica. Porém, segundo esses autores, nas instituições em que foi implantada, esta iniciativa não trouxe os resultados esperados, apesar de revisões de conteúdos e aumento de carga horária de Matemática Básica.

Já para Santos e Matos (2012), há uma transferência de responsabilidades no que diz respeito ao fracasso dos alunos nas disciplinas de Cálculo, uma vez que os estudantes culpam os professores (isto é, seus procedimentos didáticos) e vice-versa, pois os docentes atribuem o baixo rendimento à falta de motivação, à dificuldade de raciocínio, à falta de autonomia e à precária formação básica dos alunos. Pode-se acrescentar também a falta de postura ativa dos estudantes frente a um novo conhecimento, que remete a não conhecer outra aprendizagem que não seja a automática, pois muitos nunca tiveram experiências que proporcionassem tomar para si a responsabilidade por sua aprendizagem.

É fato também que a Matemática vista na escola não está em sintonia com o tipo de conhecimento necessário para que o aluno tenha sucesso na Matemática Superior, dada a sua atual abordagem. Conforme trazem Santos e Matos (2012), a partir do estudo do conceito de Cálculo Diferencial e Integral, nas últimas décadas do século XIX, vários países, como a

França, preocuparam-se em modernizar o ensino de Matemática nas escolas, o que sinaliza que esta discrepância já foi percebida também em outros países.

Neste sentido, Molon (2013), após um estudo sobre os índices de não aprovação nas disciplinas de Cálculo da Universidade Federal de Santa Maria, propôs a inserção de alguns conceitos mais próximos do Cálculo no estudo de Funções no Ensino Médio, obtendo resultados bastante satisfatórios.

Voltando à questão da aprendizagem do Cálculo em si, Sauer (2004) afirma que o alcance dos objetivos, na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, depende em grande parte da capacidade do professor, de, através de uma boa proposta metodológica, despertar no aluno curiosidade e motivação, para que este reconheça a importância do Cálculo em sua formação universitária. Considera-se, assim, relevante que o professor mostre ao aluno a importância e aplicabilidade do conteúdo na sua área de atuação, não se preocupando tanto com o rigor formal na apresentação de todos os teoremas, proposições e corolários (SANTOS; MATOS, 2012). Neste contexto, Giraldo (2004), apoiando-se nas ideias de David Tall, também afirma que uma definição formal matemática, em geral, não se converte naturalmente em um embasamento adequado para a abordagem pedagógica introdutória de um conceito matemático.

As ideias do educador matemático inglês David Tall são, muitas vezes, apresentadas em relação aos constructos *imagem do conceito* e *definição do conceito*[1], que foram trabalhados por Schlomo Vinner e por ele. Segundo Vinner (1983), a imagem de um conceito é algo não verbal, associado, na mente, ao nome do conceito. Por exemplo, à menção da palavra "função", um aluno pode evocar um exemplo, uma representação gráfica, a lei de alguma função já estudada, mas não necessariamente a definição formal. Como complementa o autor, não é costume consultar um dicionário para ter uma definição a qualquer instante em que uma palavra é mencionada.

Já a definição do conceito, segundo Tall e Vinner (1981), é uma maneira de usar palavras para especificar o conceito em questão. Pode ser aprendido por um aluno somente por memorização mecânica ou aprendido de maneira significativa, relacionando-se em maior ou menor grau com o conceito como um todo. De certa forma é o que o aluno evoca da imagem daquele conceito.

---

[1] "Concept image" e "concept definition"

Tall (1986), em sua tese apoiada nas ideias de Ausubel, usou a noção ausubeliana de organizadores prévios[2] para elaborar o que chama de organizadores genéricos[3], definidos também com apelo à ideia de micromundo, de Seymour Papert[4]. Para Tall, o organizador genérico é um micromundo que permite aos alunos manipularem exemplos de conteúdos matemáticos específicos. O termo "genérico" significa que a atenção do aprendiz está direcionada para certos aspectos de um conceito matemático específico. Como exemplos de organizadores genéricos, Tall cita o material Cuisinaire[5] e, no campo da tecnologia, o micromundo INTEGERS, que, segundo ele, é um ambiente semelhante ao LOGO, para explorar números inteiros. (TALL, 1986)

Como exemplo mais atual de organizador genérico, pode-se citar o ambiente criado pelo GeoGebra, software de geometria dinâmica que permite trabalhar conceitos da Geometria e da Álgebra de forma integrada. No caso da Geometria, existem recursos que permitem a construção de variados elementos, como ponto, reta, plano (neste caso, com o GeoGebra 3D) e figuras planas. Algumas dessas figuras já existem previamente no software, de modo que basta ao aluno selecioná-la em um de seus botões e escolher sua localização na área de trabalho. Para outras construções um pouco mais complexas, o aluno pode utilizar conhecimentos prévios de Geometria e criar as combinações necessárias entre os recursos disponíveis e, após isso, verificar suas propriedades invariantes, usando a dinamicidade do software, o que lhe permite construir suas próprias imagens conceituais.

Sendo a tese de Tall datada de 1986, não havia, ainda, recursos tecnológicos do tipo dos que se têm atualmente, em especial, no ensino de Cálculo, como, por exemplo, os objetos de aprendizagem, por meio dos quais o aluno pode interagir ativamente, criando condições para uma aprendizagem significativa.

Com relação ao uso da tecnologia para o ensino de Cálculo, Reis (2010) aponta que novas formas de ensinar e aprender vêm sendo pesquisadas em Educação Matemática. Tais pesquisas têm como objetivo não somente promover a construção do conhecimento pelos

---

[2] *Advance organizer*

[3] *Generic organisers*

[4] Um micromundo é "um ambiente de aprendizagem interativa baseado no computador onde os pré-requisitos estão embutidos no sistema e onde os aprendizes podem tornar-se ativos, arquitetos construtores de sua própria aprendizagem." (PAPERT, 1985, p. 151).

[5] O material Cuisenaire é constituído por um conjunto de barras de madeira coloridas que são usados, por exemplo, para o estudo de operações com números fracionários.

alunos, mas também desenvolver novos aplicativos para serem utilizados. É destacado, na maioria dos casos, o processo de visualização gráfica no entendimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, enriquecendo as representações numéricas e algébricas. De acordo com um levantamento realizado por este mesmo autor, alguns livros de Cálculo, em especial os publicados mais recentemente, abordam em seus textos possíveis utilizações de recursos tecnológicos.

Tall (1986) criou programas de computador que atuam como organizadores genéricos e que proporcionam representações gráficas dinâmicas de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Porém, como alerta o autor, sua intenção não foi de apresentar o conceito geral, mas um exemplo particular, de modo que, ao prestar atenção para os atributos genéricos específicos do exemplo, o aluno possa ser levado a adquirir informação potencialmente significativa, que leve à abstração do conceito geral.

Ao apelar novamente para as ideias de Ausubel, Tall (1986) comenta que os organizadores genéricos só podem ser potencialmente significativos. Pode ocorrer que um organizador seja mal utilizado e possa até distrair o aluno ou levar a obstáculos cognitivos. Assim, o aprendiz, em geral, necessita de um agente organizador externo, como a tutoria do professor, um livro-texto ou algum outro agente que possa apontar as características genéricas e evitar fatores dispersivos.

Um sistema organizacional genérico consiste, segundo Tall (1986) de um organizador genérico e de um agente organizador. O aluno pode precisar da tutoria desse agente, como, por exemplo, das demonstrações do professor, mas aos poucos necessitará explorar e discutir o organizador para compreender suas potencialidades. Mesmo que o aluno tenha mais tempo para essas explorações e discussões, ainda há a possibilidade de formarem-se obstáculos que são fatores de conflito potenciais. Por isso, o agente organizador (como o professor, por exemplo) deve revisar o progresso do estudante e proporcionar *feedback*. Nesse aspecto é que a análise de erros é fundamental, pois proporciona ao professor a oportunidade de detectar os problemas que surgiram na aprendizagem de um determinado conceito.

Um dos maiores problemas no planejamento de objetos de aprendizagem, por exemplo, é a decisão do que pode ser considerado como sabido pelo possível utilizador, já que é preciso um ponto de partida. Um caminho é inserir, antes da utilização do objeto propriamente dito, questões para que o aluno responda se conhece ou não determinado conteúdo e direcioná-lo conforme sua resposta; mas, nesse caso, é necessário considerar se a resposta dada pelo estudante corresponde à realidade.

2.2.1 A Teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall

Retomando a questão da aprendizagem de conceitos de Matemática, encontra-se, na teoria dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2004, 2013), uma visão um pouco mais ampla do desenvolvimento do pensamento matemático. Para esse autor, o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, em Matemática, envolve três mundos: *mundo conceitual corporificado, mundo operacional simbólico e mundo formal axiomático*. (TALL, 2013).

Tall (2004, 2013) partiu de ideias de teóricos como Piaget, Dienes e Bruner, entre outros, que forneceram elementos para indicar como se desenvolve o pensamento matemático. Assim, sua teoria aponta três possíveis "mundos", caracterizados a seguir.

O *mundo conceitual corporificado* "consiste em nosso pensamento sobre coisas que percebemos e sentimos, não só no mundo físico, mas em nosso próprio mundo mental de significado" (TALL, 2004, p. 285). Essa percepção está relacionada com a noção de imagem do conceito, também trazida por David Tall e já apresentada nesta tese. No caso da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, por exemplo, é feita uma corporificação a partir do momento que o aluno organiza um esquema mental para compreendê-la, conforme se vê na Figura 1, a seguir, ainda que seja "batizando-a" de "chuveirinho", como se observa, muitas vezes, em aulas de Cálculo:

Figura 1 – Esquema de representação da propriedade distributiva

$$\boxed{(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Fonte: A autora

Com relação aos aspectos presentes na *corporificação*, Lima (2007) chama atenção de que não se trata apenas de experiências que envolvam objetos físicos e observação, descrição, ação e reflexão sobre eles; pode referir-se também a experiências mentais, nas quais o objeto é manipulado apenas na mente do sujeito. Para a autora, um bom exemplo de corporificação é a utilização de softwares para plotar gráficos de funções.

O *mundo operacional simbólico* é relacionado à abstração e ao uso dos símbolos que são utilizados em Matemática, para indicar processos de rotina ou procedimentos empregados. Tall (2013) considera que os símbolos usados em aritmética e álgebra não só especificam operações que podem ser realizadas, mas também operam como entidades mentais. Por exemplo, a expressão 2x+6 pode ser interpretada como um processo (multiplicar x por 2 e adicionar 6), assim como uma expressão em si, que pode sofrer outras operações, tais como a fatoração 2(x+3). Essa dualidade entre processo e conceito gerou a palavra "proceito[6]" criada por Gray e Tall (1994).

Este *mundo operacional simbólico* também pode ser chamado de *mundo proceitual simbólico* e é caracterizado por "símbolos que representam as ações e as percepções que estão presentes no mundo corporificado" (Lima, 2007, p.76), isto é, são necessários cálculos e manipulação simbólica para mostrar que algo é verdade. Ainda, para Lima (2007), os símbolos são capazes de comprimir conceitos pensáveis, englobando situações que talvez não sejam possíveis de se representar por meio de corporificações. Então, considerando-se que os símbolos dão significado tanto aos conceitos pensáveis como às ações efetuadas, devem ser visto como *proceitos*.

O *mundo formal axiomático* é "baseado em *propriedades*, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar estruturas matemáticas (tais como \`grupo\`, ´corpo\`, 'espaço vetorial\`, espaço topológico\`, etc.)" (TALL, 2004, p. 285). Nesse mundo, o trabalho é caracterizado pelo uso da linguagem formal, de definições e demonstrações rigorosas, trabalhadas apenas em cursos de Matemática superior (mais fortemente nos cursos de bacharelado, mestrado ou doutorado em Matemática). Pode ser considerado o estágio final da definição do conceito, também trabalhada por Tall e comentada nas seções anteriores. Considera-se, assim, que o mundo formal axiomático só é explorado em níveis mais elevados de estudo, ou seja, praticamente não é trabalhado na escola básica.

---

[6] "procept"

Destaca-se ainda que, apesar das características individuais dos mundos, existem intersecções entre eles, uma vez que o sujeito pode se utilizar de características inerentes a cada um deles no estágio de desenvolvimento cognitivo em que se encontra. Por exemplo:

> Ao compreender o mundo formal como um todo, e não só algumas características dele, é possível também que um indivíduo faça uso de aspectos corporificados, bem como de cálculos e manipulação simbólica, para chegar a conclusões de como encaminhar a demonstração de um teorema, o que mostra também uma intersecção do mundo formal com os outros dois (LIMA, 2007, p. 82).

Por outro lado, a teoria dos Três Mundos da Matemática também está bastante relacionada à ideia dos subsunçores, apresentada por Ausubel. Considera-se que cada sujeito trilha seu próprio caminho nos três *mundos*, uma vez que o desenvolvimento cognitivo é individual e baseado em experiências anteriores. Essas experiências anteriores, neste caso, são denominadas por Tall de "*já-encontrados*"[7], e podem tanto ajudar como atrapalhar na formação de um novo conhecimento. Para Lima (2007, p. 88),

> [...] um 'já-encontrado' é toda e qualquer experiência anterior a certo aprendizado, considerada como constructo mental, presente na imagem do conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa.

Considera-se que a influência é positiva quando o conceito anterior está bem fundamentado e é coerentemente relacionado com o novo conhecimento, colaborando para que este seja adquirido. Por exemplo, se o aluno domina a operação de adição de frações numéricas, ou seja, já tem uma imagem do conceito de fração soma, ele terá facilidade em compreender a adição de frações algébricas.

A influência de um já-encontrado pode ser negativa quando não está bem estruturado na mente do sujeito e precisa de uma reconstrução, podendo vir a se tornar um obstáculo para uma nova aprendizagem. Por exemplo, se um aluno já estudou perímetro e área de polígonos regulares apenas por meio da memorização de fórmulas, isso pode se tornar um obstáculo para a compreensão dessas medidas para polígonos não regulares.

Deste modo, assim como experiências anteriores podem afetar novos aprendizados, novas experiências também podem interferir em aprendizados anteriores. Tall (2013, p. 20)

---

[7] "Met-before".

define o termo "*a-encontrar*"[8] como "uma estrutura mental com a qual nós nascemos, que pode levar certo tempo para amadurecer à medida que nossos cérebros fazem conexões em uma tenra idade".

Os "*a-encontrar*" são experiências que podem ainda não ser parte da imagem do conceito de um indivíduo, mas podem tanto modificá-la quanto vir a fazer parte dela. Neste último caso, os "*a-encontrar*" acabam se tornando "*já-encontrados*" (LIMA, 2007).

Por fim, é importante ressaltar que, para que o aluno se desenvolva matematicamente, é necessário que realize uma jornada pelos Três Mundos da Matemática, cabendo ao seu professor indicar caminhos para que isso aconteça. Para isso, é extremamente importante que sejam considerados seus conhecimentos prévios, para que se possam abrir esses novos caminhos na direção de novos conceitos, alavancando seu desenvolvimento cognitivo.

2.3 As Dificuldades Relacionadas a Conteúdos de Álgebra

Visto que as análises realizadas nesta pesquisa evidenciaram a prevalência dos erros relacionados à propriedade distributiva, buscaram-se alguns constructos, elaborados por pesquisadores da área de ensino de Álgebra, para posteriormente discutir os resultados obtidos. Entre esses constructos, destacam-se "saliência visual" (KIRSHNER; AWTRY, 2004) e "sentido da estrutura" (HOCH; DREYFUS, 2004).

Kirshner e Awtry (2004) caracterizam "saliência visual" como "senso estético da forma". Segundo eles, entre os alunos há uma tendência de gerar padrões de transformações incorretas de expressões, tais como as "regras" a seguir:

$$(a+b)^c = a^c + b^c,\ \sqrt[c]{a+b} = \sqrt[c]{a} + \sqrt[c]{b},\ a^{m+n} = a^m + a^n \text{ ou } \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Essas regras equivocadas podem ter origem na saliência visual da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em um conjunto numérico, por exemplo, sendo "sobregeneralizadas" para outras operações.

Os autores consideram que esses erros parecem ter um caráter superficial e que, ao invés de mostrarem uma compreensão errada das regras corretas, evidenciam uma percepção incorreta das formas corretas das regras. Na verdade, segundo os autores, as regras incorretas

---

[8] "Set-before"

são generalizações de regras corretas que são explicitadas na disciplina de Matemática, no currículo escolar.

Assim, as regras visualmente salientes têm uma coerência que faz com que o lado esquerdo e o direito, em uma equação, pareçam naturalmente relacionados. Além disso, Kirshner e Awtry (2004) consideram que a repetição de elementos e a separação visual deles em ambos os lados do sinal de igualdade também contribuem para a saliência visual. Por exemplo, conhecendo o modelo esquemático da propriedade distributiva, um aluno pode sobregeneralizá-la para quaisquer outras igualdades nas quais um elemento pareça estar se distribuindo em relação a outros. É o caso da pseudodistributividade da primeira regra errada, citada acima, que é uma sobregeneralização de $(a + b)c = ac + bc$.

Hoch e Dreyfus (2004) trazem a noção de "sentido da estrutura". Perguntam, primeiramente, se duas expressões algébricas que têm a mesma estrutura são equivalentes e citam, como exemplo, $30x^2 - 28x + 6$ e $(5x - 3)(6x - 2)$. Evidentemente a primeira é uma expressão quadrática e a segunda é um produto de dois fatores lineares. No entanto, as duas têm a mesma estrutura e saber qual delas empregar em um determinado contexto faz parte do que esses autores definem como sentido da estrutura e que pode ser descrito como um conjunto de habilidades que incluem, entre outros aspectos, a visão de uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade única, o reconhecimento de uma expressão algébrica como uma estrutura previamente estudada e das manipulações que podem ser nela executadas.

2.4 Estilos de Aprendizagem

As constatações das dificuldades na aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial podem ser atribuídas, em parte, à discrepância entre os estilos de aprendizagem dos alunos e a estratégia didática de seus professores. No Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, da UFRGS, encontram-se alguns trabalhos sobre estilos de aprendizagem, dos quais se destacam os de Geller, Tarouco e Franco (2004) e de Lindemann (2008).

Geller, Tarouco e Franco (2004) descrevem uma pesquisa que buscou a compreensão dos estilos cognitivos para modelar um *framework*[9] de adaptação de um ambiente virtual de aprendizagem. Com base nas informações adquiridas sobre os estilos predominantes, pretendiam adaptar um ambiente virtual de aprendizagem de apoio à EAD, utilizando técnicas de hipermídia adaptativa. Ao final do processo, estes autores concluíram que, "no sentido de evidenciar os estilos cognitivos predominantes dos sujeitos através dos registros armazenados em ambiente virtual, foi forte a presença de aspectos subjetivos que permeiam o complexo processo de ensino e aprendizagem" (p. 281). Destacam também que sujeitos com o mesmo estilo cognitivo podem apresentar preferências e opiniões distintas sobre um mesmo assunto, e que nem todos os comportamentos sociais se prestam a uma modelagem computacional. Mesmo assim, a modelagem do *framework* proposto foi possível, a partir da detecção de características comuns aos sujeitos devido ao seu estilo cognitivo predominante. Essa adaptação de ambientes virtuais aos estilos cognitivos dos estudantes certamente contribui para a construção de variadas estratégias de ensino. Por fim, os autores destacam que as preferências podem se modificar, à medida que os alunos desenvolvem habilidades e estratégias para enfrentar novos desafios no ambiente virtual.

Já Lindemann (2008), apresenta o desenvolvimento de um sistema computacional que contribui para o diagnóstico dos estilos, relacionando-o com as estratégias de ensino utilizadas pelo professor e os resultados observados na aprendizagem. Em sua pesquisa, cujo objetivo foi investigar se o conhecimento prévio dos estilos de aprendizagem pelos alunos e pelo professor contribui para a melhoria da aprendizagem, uma vez que pode causar alinhamento dos esforços de ambas as partes no processo, a pesquisadora confirma que esse conhecimento influi de forma positiva na aprendizagem. Segundo a autora, é possível afirmar que "a aplicabilidade dos conhecimentos sobre estilos de aprendizagem aumenta a sinergia no processo de ensino e aprendizagem e, consequentemente, contribui para a melhoria do desempenho dos acadêmicos" (p. 147).

O interesse pelas diferenças de pensamento tem sido enfocado pela Psicologia e pela Psicanálise. As ideias de Jung foram a base para estudos sobre estilos de aprendizagem, desenvolvidos por vários autores, tanto da área de Psicologia quanto de outras áreas, como

---

[9] Um *framework* ou arcabouço conceitual é um conjunto de conceitos usado para resolver um problema de um domínio específico. Framework de software compreende um conjunto de classes implementadas em uma linguagem de programação específica, usadas para auxiliar o desenvolvimento de software.

engenharia (FELDER; SILVERMANN, 1988), literatura (FELDER; HENRIQUES, 1995) e outros.

Felder (1996), citando autores de testes de estilos de aprendizagem, considera que os estudantes podem ser extrovertidos ou introvertidos, sensoriais ou intuitivos, pensadores ou empáticos, julgadores ou perceptivos. O autor aponta o fato de que, em Engenharia[10], os professores, em geral, orientam seus cursos para estudantes: introvertidos, fazendo preleções ao invés de solicitar envolvimento ativo e cooperativo; intuitivos, focalizando a teoria em vez de projetos e operações; objetivos, enfatizando a análise abstrata e esquecendo das considerações pessoais; e julgadores, concentrando-se nos prazos finais das tarefas, ao invés de enfocar as soluções criativas para problemas.

Já no modelo de Kolb, há quatro abordagens diferentes para aprender: a experiência concreta ou a conceitualização abstrata, que indicam como os alunos percebem a informação, e a experimentação ativa ou observação reflexiva, que indicam como eles internalizam a informação recebida (KOLB; KOLB, 2005). Felder (1996) considera que o ensino tradicional de Engenharia centra-se quase que exclusivamente na exposição do conteúdo, o que é confortável apenas para os alunos que são abstratos e reflexivos.

O instrumento de dominância cerebral de Herrmann (LUMSDAINE; LUMSDAINE, 1995) revela quatro maneiras de pensar e conhecer: a) analítica, lógica e quantitativa; b) sequencial, organizada e detalhada; c) interpessoal, sensória e cinestésica; d) inovadora, holística e conceitual. Em geral, os professores de Engenharia (e os de Matemática, em maior grau), revelam-se lógicos, analíticos e quantitativos, o que privilegia somente o primeiro modo de pensar.

O modelo de Felder e Silverman utiliza muitas dessas ideias e classifica os aprendizes em cinco dimensões, cada uma delas compreendendo dois estilos: ativos/reflexivos; sensoriais/intuitivos; visuais/verbais; indutivos/dedutivos; sequenciais/globais. A primeira dimensão indica como o estudante prefere processar a informação, se de modo ativo, através de um engajamento em atividades físicas ou discussões, ou de modo reflexivo, através da introspecção. A segunda dimensão aponta o tipo de informação que os alunos preferem perceber: sensorial, ou seja, visões, sons, sensações físicas, ou intuitiva, por meio de memórias, ideias e discernimento (FELDER; HENRIQUES, 1995).

[10] Cabe salientar que muitos dos alunos de Cálculo, participantes desta pesquisa, são estudantes de Engenharia.

A terceira dimensão indica o meio pelo qual a informação sensorial é mais efetivamente percebida: visual, que engloba fotos, diagramas, gráficos, ou verbal, por meio de palavras e fórmulas, escritas ou faladas. A quarta dimensão aponta a organização da informação com a qual o estudante se sente mais confortável: indutiva, ou seja, quando os fatos e observações são dados e os princípios subjacentes são inferidos, ou dedutiva, quando os princípios são dados e as consequências e aplicações são deduzidas.

Por último, a quinta dimensão envolve a maneira como o estudante progride na direção da compreensão: sequencialmente, em uma progressão lógica de pequenos passos, ou globalmente, em largos saltos, tendo uma visão global.

A partir desse modelo, Felder e Soloman criaram o teste de Estilos de Aprendizagem (ILS – Index of Learning Styles), que foi traduzido, no Brasil, pelos professores Marcius Giorgetti e Nidia Kuri, da Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo em São Carlos. A versão utilizada nesta pesquisa (Apêndice C) é, assim, a traduzida por Giorgetti e Kuri, já aplicada em turmas de alunos de Engenharia da Instituição em que se realiza esta pesquisa (CURY, 2000). Esse instrumento avalia preferências em quatro dimensões do modelo, excluindo a indutiva-dedutiva. O teste é composto por 44 questões, com duas alternativas cada uma, podendo ser acessado e preenchido em http://www.engr.ncsu.edu/learningstyles/ilsweb.html, em inglês, recebendo-se a classificação correspondente às respostas.

Nesta pesquisa, foi empregado o teste ILS, que forneceu subsídios para a proposta de um objeto de aprendizagem para alunos de Cálculo, em especial para os que apresentam dificuldades em conteúdos do Ensino Médio, em particular a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

2.5 Objetos de Aprendizagem Multimodais e Princípios para Criação de Objetos em Geral

De acordo com o IEEE (2000), um objeto de aprendizagem é definido como qualquer entidade, que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o aprendizado apoiado por computador. Pode conter recursos variados, desde os mais simples, como um texto ou um vídeo, até alguns mais sofisticados, como um hipertexto, um curso ou até mesmo uma animação com áudio e recursos mais complexos.

Para Wiley (2000), objetos de aprendizagem são pequenos componentes instrucionais que podem ser reutilizados em diferentes contextos de aprendizagem. Este autor destaca que os objetos de aprendizagem devem ser autoexplicativos, modulares, agregáveis, digitais, interoperáveis e reutilizáveis. Assim, cada objeto deve constituir-se de um módulo com conteúdo autoexplicativo, ou seja, que o aluno possa estudar sozinho, e estes módulos devem ser complementares, de forma que juntos formem um bloco mais completo de conteúdo. Além disso, o autor sugere que estes materiais devem ser digitais e reutilizáveis em diferentes situações e por diferentes grupos. Esta definição, basicamente, é que guiou o trabalho com objetos contido nesta pesquisa.

No âmbito educacional, tem-se observado que os objetos vêm sendo utilizados em larga escala, sendo um recurso muito importante para aulas a distância, mas também servindo como apoio ao ensino presencial. São recursos educacionais que podem ser utilizados para mediar e qualificar os processos de ensino e de aprendizagem. Devem ser materiais que motivem o estudante, através, por exemplo, da apresentação de situações-problema, que o desafiem e instiguem sua curiosidade.

Outro conceito importante a ser observado no momento do planejamento de materiais digitais é o de multimodalidade, o qual pode variar dependendo do autor considerado. Neste trabalho, considera-se como multimodal aquele objeto que, em sua estrutura, utiliza simultaneamente dois modos de apresentação: verbal e não verbal. (PAIVIO, 1986)

Moreno e Mayer (2007) chamam atenção para os princípios multimodais do *design* instrucional, segundo os quais a combinação de representações verbais e não verbais de conteúdos de conhecimento deve, sempre que possível, envolver mais do que uma modalidade. A mesma ideia é apresentada por Tarouco et al (2009), com o argumento de que esta combinação torna a aprendizagem mais eficiente, pois a arquitetura mental humana tem canais limitados independentes para o processamento da informação. Sendo assim, se a apresentação dos conteúdos privilegiar apenas uma modalidade, haverá maior probabilidade de sobrecarregar a capacidade cognitiva do aprendiz, motivo pelo qual é preciso mesclar os modos e as modalidades. Ou seja, a multimodalidade pode ser considerada uma forma de minimizar o risco de sobrecarga cognitiva, a qual acontece quando o sistema instrucional exige do estudante uma capacidade de processamento acima dos seus limites disponíveis (SWELLER, 1988).

Com relação aos estilos de aprendizagem, a multimodalidade certamente proporciona um ganho de eficácia educacional, uma vez que a utilização simultânea dos modos verbal e não verbal privilegia tanto aqueles estudantes que são mais visuais quanto aqueles que são mais verbais.

Por fim, destacam-se também os princípios apresentados por Sung e Mayer (2012), os quais devem ser observados na construção de materiais educacionais digitais:

- Princípio Multimídia – se o objeto integrar palavras e imagens, promoverá a construção do conhecimento de forma mais efetiva;
- Princípio da Proximidade Espacial – deve ficar clara a relação entre imagens e palavras, quando houver. Para isso, a proximidade gráfica entre elas é essencial;
- Princípio da Proximidade Temporal – imagens e palavras devem ser utilizadas simultaneamente, não em tempos diferentes, para que o conteúdo seja mais bem assimilado;
- Princípio da Coerência – não devem ser utilizadas mídias que não sejam relevantes ao assunto, ou seja, sua escolha deve ser coerente com os objetivos educacionais;
- Princípio de Modalidade – o ideal é quando o objeto apresenta uma narração ligada a uma animação, ao invés de textos escritos;
- Princípio de Redundância – além da narração relacionada com a animação, às vezes é necessária também a utilização de um texto para complementar o conteúdo, mesmo que isto seja caracterizado como redundância;
- Princípio das Diferenças Individuais – considerando-se que os alunos possuem formas diferentes de aprender, estas diferenças devem ser respeitadas.

Este último princípio também se relaciona, de certa forma, com a observação aos estilos individuais de aprendizagem.

De um modo geral, pode-se dizer que estes foram os princípios observados na criação do Objeto de Aprendizagem apresentado no capítulo 4, em que são descritos os passos de sua concepção.

2.6 Trabalhos Correlatos

Nesta seção, apresentam-se algumas pesquisas (além das já mencionadas nas seções anteriores) relacionadas aos temas desenvolvidos nesta tese. O primeiro item aborda trabalhos da área de Educação Matemática e o segundo, da área de Informática na Educação.

2.6.1 Trabalhos relacionados à Educação Matemática

As evidências das dificuldades dos estudantes, de um modo geral, e com relação à aplicação da propriedade distributiva, de modo particular, são diversas. Este fato foi confirmado, por exemplo, na dissertação de Dias (2004), que realizou um estudo com alunos de Educação Básica e constatou que, efetivamente, a aplicação da propriedade distributiva é um obstáculo a ser superado. A autora relata uma experiência de aplicação da propriedade distributiva em diferentes contextos e aponta o que mais trouxe dificuldades, a saber, a resolução de problemas, devido à interpretação necessária. Em contextos mais específicos, no momento da aplicação da propriedade, apareceram dificuldades relativas a cálculos com números menos conhecidos e trabalhados pelos estudantes, tais como raízes e frações.

Cerulli (2007) descreve em sua tese o desenvolvimento e aplicação de um software chamado L'Algebrista, que foi criado com vistas à exploração de manipulações algébricas, como na resolução de equações, por exemplo, e que trabalha fortemente com as propriedades das operações. Os experimentos relatados referem-se à identificação e manipulação de expressões numéricas equivalentes, as quais são obtidas por meio da aplicação das propriedades. A partir de alguns testes, a pesquisadora relata que o uso do software facilitou o desenvolvimento de pequenas demonstrações por alunos da escola básica, uma vez que auxilia nas manipulações algébricas, que só podem ser feitas a partir de comandos preestabelecidos ou outros a serem criados pelo próprio usuário, quando este "descobre" alguma relação válida. Porém, tais experimentos (e o software em si) chamam a atenção pela importância dada às propriedades das operações, as quais são a base para os procedimentos necessários, confirmando a ideia aqui defendida: que as dificuldades detectadas com relação à propriedade distributiva, ou propriedades das operações em geral, devem ser superadas.

Estes dois trabalhos, ainda que relacionados à propriedade distributiva, têm diferenças em relação ao que foi proposto nesta tese, em que se pretendeu partir da análise de erros para direcionar os alunos à correta utilização da propriedade, de modo a direcioná-los para um determinado objeto de aprendizagem.

Considera-se que analisar os erros deve ser uma das tarefas do cotidiano dos professores, pois, ao avaliar as dificuldades apresentadas por seus alunos nas questões sugeridas, os docentes encontram subsídios para buscar novas estratégias e atividades pedagógicas que possam ser utilizadas em suas salas de aula, e que auxiliem os estudantes a superar suas dificuldades.

Borasi (1987) diz que é preciso uma exploração mais ampla dos erros dos alunos, fazendo-os refletir, por exemplo, sobre as situações em que o erro cometido seria uma resposta válida. Segundo esta pesquisadora, "uma interpretação dos erros somente como ferramenta para diagnóstico e solução teria apenas explorado parte do potencial educacional dos erros discutidos". (p.5). Essa afirmativa justifica-se, entre outros motivos, pelo fato de que, se a utilização dos erros é feita apenas como diagnóstico, têm-se somente professores e pesquisadores envolvidos no processo de análise, sem a participação essencial dos estudantes, os quais seriam privados da oportunidade de remediar seus próprios erros, o que poderia vir a ser uma atividade motivadora.

Por outro lado, "erros não apenas permitem identificar falhas na estratégia escolhida para alcançar um objetivo pré-determinado. O mais importante é que os erros também apontam os pontos fortes e limitações das estratégias disponíveis" (BORASI, 1987, p.6). Nesse sentido, os erros podem ajudar o professor ou pesquisador a entender características do contexto em que sua pesquisa está inserida e mostrar uma possível necessidade de readequação de seus objetivos.

Pochulu (2005) também defende ideias semelhantes ao afirmar que, além de motivar e propiciar explorações matemáticas criativas pelos alunos, os erros podem proporcionar uma compreensão mais completa e profunda do conhecimento matemático em si e da natureza da Matemática, uma vez que traz à tona questões relativas ao ensino e à aprendizagem desta disciplina.

Exemplos de aplicação da análise de erros são variados, como aqueles relativos ao ensino de Cálculo, já citados na Introdução. Estudos foram realizados também com professores de Matemática em formação inicial ou continuada (CURY, RIBEIRO e MÜLLER, 2011), uma vez que as dificuldades dos professores poderão se refletir diretamente em seus alunos, os quais, por sua vez, chegarão às universidades com deficiências, recomeçando o ciclo. Nestas investigações, comprovou-se que os professores apresentavam dificuldades em reconhecer padrões ou mesmo propriedades básicas das operações nos conjuntos numéricos. Constatou-se também que a falsa generalização de propriedades é bastante comum em alunos de qualquer nível.

Os trabalhos relativos às referências acima citadas são diferentes do que foi proposto nesta tese, pelo fato de que esta não se restringiu a analisar erros, mas buscou obter respostas dos alunos a partir de um banco de questões inseridas no ambiente MOODLE e trabalhar com estes erros a partir de discussões em fóruns, baseadas na teoria estudada, e na concepção e utilização de Objetos de Aprendizagem.

Ainda, com relação à análise dos erros cometidos pelos estudantes, Barichello (2008) apresenta uma proposta de aplicação da dinâmica RCR (resolução-comentário-resolução), na qual o aluno tem chance de refazer o problema proposto a partir dos comentários de seu professor na folha de respostas, processo que pode ser repetido diversas vezes. Segundo o autor, esta dinâmica amplia os horizontes para a compreensão das causas do erro cometido, dando ao professor a possibilidade de interagir com o erro enquanto ele ainda está se manifestando, não somente fazendo uma análise *a posteriori*. A diferença em relação à proposta de Barichello é que nesta tese os erros identificados são usados para que o professor direcione o ensino através de OAs apropriados a cada tipo de erro focando na dificuldade de cada aluno.

Por fim, é importante destacar, dada a concordância com o que foi detectado no desenvolvimento desta tese, que, em muitos dos trabalhos citados, são mencionados os erros que os alunos cometem na aplicação da propriedade distributiva, tanto em situações mais amplas, como na resolução de problemas, como em outras mais simples de resolução de equações.

2.6.2 Trabalhos relacionados a Ambientes de Aprendizagem

Atentando-se um pouco mais para a questão tecnológica e pensando em modos de automatizar a detecção de erros cometidos pelos alunos, bem como no uso de materiais instrucionais digitais, optou-se, nesta pesquisa, pela utilização do ambiente MOODLE, até mesmo por ser o ambiente virtual adotado pela Universidade na qual a pesquisa foi desenvolvida. Dessa forma, são apresentados alguns trabalhos desenvolvidos nesse ambiente de aprendizagem, complementando com informações sobre outros ambientes compatíveis com a ideia de avaliar desempenho de alunos.

O MOODLE é um ambiente virtual de aprendizagem que oferece aos professores a possibilidade de criar e conduzir cursos à distância, por meio de atividades que exigem ação do aluno, como responder e discutir. Possui também a possibilidade de inserção de materiais para consulta e estudo organizados a partir de um plano de ensino. Este ambiente começou a ser desenvolvido em 2001 é um dos mais utilizados no mundo todo. O uso do MOODLE é predominante entre as universidades brasileiras (LEITE, 2008), tendo diversos recursos disponíveis, tais como fóruns, enquetes e questionários, todos estes utilizados nesta tese.

Tecnicamente, o MOODLE é uma plataforma de ensino a distância baseada em software livre, cuja sigla significa Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (ambiente modular de aprendizagem dinâmica orientada a objetos). É uma aplicação baseada na Web e possui dois componentes: um servidor central em uma rede IP, que abriga os scripts, softwares, diretórios, bancos de dados, etc. e clientes de acesso a um ambiente virtual (que é visualizado através de qualquer navegador da Web). O MOODLE é desenvolvido na linguagem PHP e suporta vários tipos de bases de dados. Além disso, tem seu código fonte disponibilizado gratuitamente, e pode ser adaptado, estendido, personalizado, etc., pela organização que o adota (SABBATINI, 2007).

Com relação aos aspectos educacionais, Sabbatini (2007) afirma que os cursos desenvolvidos no MOODLE são criados em um ambiente centrado no estudante e não no professor. Este ajuda o aluno a construir o conhecimento com base nas suas habilidades e características próprias, ao invés de simplesmente publicar e transmitir esse conhecimento. Seguindo esta linha, o MOODLE dá uma grande ênfase nas ferramentas de interação entre os protagonistas e participantes de um curso. A filosofia pedagógica do MOODLE também leva em conta que a aprendizagem é favorecida em ambientes colaborativos. Por esse motivo, existem, no ambiente, ferramentas que apoiam o compartilhamento de papéis dos participantes (que podem ser tanto formadores quanto aprendizes, dependendo da situação) e a geração colaborativa de conhecimento, como wikis, e-livros, assim como ambientes de diálogo, como diários, fóruns, bate-papos, etc.

Porém, destaca-se que existem outras possibilidades de utilização das ideias propostas nesta tese em ambientes diferentes do MOODLE, como é o caso dos sistemas Avalweb® e Adaptweb®, apresentados a seguir.

Segundo Cardoso (2001), o Avalweb® é um sistema de avaliação que armazena questões criadas e gera avaliações em função do aluno e exigências do professor. Este sistema permite auxiliar o professor na difícil tarefa de detectar falhas na aprendizagem de seus alunos, o que o autor chama de pontos críticos, em que são enfrentadas as maiores dificuldades na matéria. Ele também automatiza o processo de avaliação, proporcionando *feedback* imediato, de forma totalmente automática, sem necessitar de grande tempo ou esforço por parte do professor e servindo como complemento em cursos regulares ou para substituir avaliações que seriam feitas em aulas tradicionais.

O sistema criado pode ou não exigir que o aluno responda uma questão para passar à próxima, dando a ele uma oportunidade que tem em uma avaliação feita no papel: rever as questões e alterar suas respostas. Isso não acontece em um sistema adaptativo, no qual a pergunta seguinte é determinada a partir da resposta à pergunta anterior, o que também pode ser uma das modalidades de uso do Avalweb®. Neste caso, o sistema faz com que o aluno responda uma questão por vez, podendo ser de dificuldade progressiva ou regressiva.

Cardoso (2001) cita vantagens e desvantagens da avaliação por computador, tais como: eliminação da subjetividade na avaliação, rapidez de correção, maior tempo de preparação e a certeza de que de fato é o aluno que está respondendo, caso o professor não esteja presente.

Com relação ao funcionamento do Avalweb®, são usados códigos PHP e HTML, com um banco de dados MySQL no servidor, e a ideia é que os professores e os alunos necessitem somente de um *browser*, bem como acessar a página web para usar/navegar, de modo que a utilização por parte destes é bastante simples. O professor pode definir a disciplina, as questões a serem disponibilizadas aos alunos e criar avaliações. Ele próprio dá acesso aos alunos que, por meio de um código, acessam as avaliações propostas. Esse processo pode ser feito diretamente pelo docente, sem a necessidade de um administrador. O professor, quando cadastra as questões, indica o nível de dificuldade de cada uma. Porém, o sistema auxilia na melhoria do ensino, pois é capaz de listar quais os tópicos em que os alunos vêm enfrentando maiores dificuldades. Além disso, todas as ações realizadas pelos usuários (professores e alunos) são gravadas no banco de dados para estatísticas futuras. É importante destacar que o sistema ainda é um protótipo, de modo que tais estatísticas e levantamentos ainda são sugestões a serem implementadas.

No Avalweb®, existe também um módulo de auto avaliação em que o *feedback* vai apenas para o aluno, não para o professor. Quando o aluno erra, além de apontar o erro e atribuir a nota final, o sistema mostra também a solução do problema, para que o estudante aprenda com seus erros.

Nas avaliações, o professor pode escolher o número de questões ou deixar a quantidade padrão do sistema, que é de 10 itens. Pode escolher também quantas questões de cada tipo (múltipla escolha, verdadeiro ou falso, etc.) vão ser ofertadas e se vai ser estipulado um tempo para o aluno responder.

Além do nível de dificuldade definido previamente pelo professor, o sistema faz sua própria classificação das questões, visto que, de acordo com a quantidade de erros ou acertos que vêm sendo apresentados, sugere o novo nível ao professor.

Complementando o estudo apresentado por Cardoso (2001), Morais, Lima e Franco (2005) afirmam que uma maior validação ainda se faz necessária, pois a ideia é integrar o Avalweb® com outros Sistemas na Web utilizando os tradicionais links de interesses dos usuários. “Neste sentido, esta é uma proposta alternativa, que, aplicável para o ensino, e para um projeto EAD, pode ser considerada também uma visão de avanço do aprendizado, e uma alternativa para contribuir na busca de novos caminhos no contexto da pesquisa e inovação.” (p. 4).

Seguindo com as pesquisas sobre o Avalweb®, Torres (2009) apresenta o Avalweb® 2.0, que possui como principal diferença a possibilidade de o professor inserir um *feedback* imediato para o aluno, conforme a resposta que o estudante apresenta a cada questão. Dessa forma, pode-se dizer que, nessa nova versão, a ferramenta também ensina enquanto avalia.

Na versão 2.0, o Avalweb® foi dividido em quatro módulos-base: banco de questões, banco de provas, aplicação (referente à execução das provas) e retorno (armazenamento das estatísticas e provas realizadas pelos alunos). Os módulos são independentes, podendo apenas um deles, por exemplo, ser incorporado a algum ambiente de ensino a distância.

Outro aspecto trazido por Torres (2009) é que professores da mesma disciplina têm suas questões compartilhadas (ainda que seja dado o devido crédito ao autor). Além disso, há a possibilidade de o professor escolher se a prova será estática ou dinâmica. Na prova estática, todos os alunos resolvem as mesmas questões, conforme os níveis e tipos estipulados pelo professor. Já a prova dinâmica é adaptativa, sobre a qual o professor não tem controle, pois o aluno vai sendo guiado para certas questões de acordo com seus acertos e erros. Pode ter nível crescente ou decrescente de dificuldade. Em ambas, o professor pode escolher se só usa questões suas ou de outros colegas também. Depois de todas as preferências determinadas, o aluno recebe apenas um código, que insere no sistema para abrir e iniciar a prova.

O outro sistema mencionado, o AdaptWeb®, é um sistema adaptativo[11] de EAD baseado na web que tem como finalidade adaptar o conteúdo, a apresentação e a navegação de acordo com o perfil do usuário. A sua adaptação é suportada pela criação de um modelo flexível do aluno, no qual, para cada aluno, são armazenadas informações pessoais tais como seu curso, conhecimento, preferências e histórico navegacional, recursos tecnológicos e estilo de aprendizagem (GASPARINI et al, 2009).

O AdaptWeb® tem como objetivo promover a autoria e a apresentação adaptativa de disciplinas de modo a proporcionar, aos diversos alunos de diferentes cursos, a apresentação do conteúdo de forma divergente, adequada às suas preferências individuais. Para isso, são armazenadas informações sobre o curso, conhecimento, preferências e histórico navegacional.

Em seu artigo, Gasparini et al (2009) esclarecem que a preferência navegacional do estudante é suportada por duas formas de navegação: a) modo tutorial, no qual são considerados os pré-requisitos definidos pelo autor na fase de autoria, de modo que o usuário só pode acessar um conceito se seus pré-requisitos já forem conhecidos, ou seja, ele é direcionado pela definição criada pelo professor para aquela disciplina; b) modo livre, que não considera os pré-requisitos, e o usuário pode navegar sem restrições.

Com relação às formas de comunicação entre professores e alunos, a partir de uma ferramenta incorporada, os professores podem entender o comportamento do aluno em uma determinada disciplina, analisando informações tais como conceitos mais acessados, tipo de navegação, utilização de ajuda e mapa de navegação, dias da semana mais acessados, etc. Além disso, foram implementados o Mural de Recados e o Fórum de Discussão.

Assim como no Avalweb®, no AdaptWeb® existe um Ambiente de Avaliação de Aprendizagem, no qual os professores podem criar avaliações a serem realizadas pelos estudantes, que podem automaticamente verificar seu resultado.

Além dos aspectos já mencionados, Gasparini (2003) aponta que a implementação do AdaptWeb® utiliza a linguagem de programação PHP, o gerenciador de banco de dados MySQL e a linguagem XML para organizar e disponibilizar as disciplinas. O XML possui

---

[11] Sistemas adaptativos são sistemas que refletem algumas características dos alunos no modelo do usuário e aplicam este modelo para adaptar vários aspectos visíveis do sistema.

uma estrutura hierárquica, além de manter o conteúdo instrucional separado do layout da apresentação. Apresenta também os tópicos que podem ser adaptados, a saber: 1) formação do usuário (que ele próprio declara ao fazer login), a qual serve para direcionar exemplos, interface e o próprio conteúdo; 2) ambiente de trabalho (conexão *dial up* ou ADSL, também informado pelo usuário); 3) conhecimento: um conceito só é liberado após o aluno ter visitado os conceitos anteriores; 4) preferência pelo modo de navegação (tutorial ou livre – opção de escolha do usuário).

Como se pode perceber, as ideias propostas tanto no modelo AdaptWeb® como no Avalweb® permitem a personalização do ensino e da avaliação, fornecendo ao professor informações sobre o acompanhamento do aprendizado, as quais podem ser úteis na detecção dos erros dos alunos e direcionamento das atividades a serem desenvolvidas posteriormente. Porém, estes sistemas não foram usados nesta tese (especialmente de forma integrada, como se cogitou na elaboração do projeto) por dificuldades encontradas, relacionadas, por exemplo, à versão disponível do Avalweb® e do tempo excessivo que seria necessário para novamente torná-lo funcional.

Ainda que o MOODLE não possua a alternativa de gerar avaliações a partir de questões armazenadas, suas outras funcionalidades mostraram-se, nesta pesquisa, suficientes para a realização de todas as etapas propostas. Portanto, em instituições que trabalham especificamente com a plataforma MOODLE, é possível usar este ambiente para estudos e pesquisas relacionados ao ensino de Cálculo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa, de caráter quanti-qualitativo, foi planejada segundo os pressupostos da Pesquisa Baseada em Design (PBD). Para situar os passos da pesquisa, desde sua fundamentação teórica, é necessário, primeiramente, trazer as ideias da PBD.

3.1 Pesquisa Baseada em Design

A Pesquisa Baseada em Design (PBD) vem sendo estudada e utilizada desde que Ann Brown, em 1992, apresentou suas tentativas de desenvolver investigações com características que fugiam do paradigma dominante[12], levando em conta o ambiente no qual se desenvolvem as pesquisas e as atividades nas quais os participantes se envolvem.

Segundo Bell e Sandoval (2004), a Pesquisa Baseada em Design, também chamada de Pesquisa Baseada em Desenvolvimento ou Pesquisa Baseada em Projeto, surgiu como uma alternativa ao problema constantemente existente nas pesquisas da Psicologia Educacional: a crítica de que não produzia um conhecimento aplicável na prática, mas que, ao mesmo tempo, deveria ser um conhecimento científico. Sendo assim, a PBD tem um caráter bastante experimental sem desvincular-se da teoria. Pelo contrário, a teoria e a prática estão fortemente aliadas, podendo-se dizer que uma se alimenta da outra. Difere da pesquisa dita tradicional no momento em que assume que o contexto não pode ser dissociado dos processos de ensino e aprendizagem, portanto não é possível uma análise de um fenômeno de forma isolada e sem interferências. A PBD, assim, possui características em comum com a pesquisa-ação (colaboração entre pesquisadores e participantes, apoio em práticas locais) e com a metodologia de avaliação formativa (realização em cenários naturais, iteração).

Nesse contexto é que Wang e Hannafin (2005, p.6) afirmam que a teoria é ao mesmo tempo o fundamento e o resultado da PBD. Estes autores definem a PBD “como uma metodologia sistemática, mas flexível, que objetiva aperfeiçoar as práticas educacionais, através de análise iterativa, projeto, desenvolvimento e implementação, com base na colaboração entre pesquisadores e profissionais, no cenário do mundo real”. Desta forma, a

---

[12] A autora refere-se a pesquisas com aprendizagem de alunos em ambientes de laboratório, isolados de outros estudantes e dos tutores.

intenção não é testar se a teoria funciona ou não (VAN DEN AKKER, 1999), uma vez que design e teoria são mutuamente desenvolvidos no processo de pesquisa.

Barab e Squire (2004) consideram que a PBD não é tanto uma abordagem, mas uma série de abordagens, que têm como objetivo produzir novas teorias, artefatos e práticas que possam ser empregados para melhorar o ensino e a aprendizagem. Sendo assim, uma de suas características é o foco em problemas educacionais, para os quais são realizadas experiências ou intervenções, que por sua vez podem incluir o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), seja no desenvolvimento do experimento em si ou como apoio no entendimento e solução do problema de forma mais ampla. Para Ramos (2010), o uso das TIC na PBD é fundamental, uma vez que as tecnologias facilitam a coerência na união da teoria com a prática e permitem construir um material que seja compatível tanto com as intenções pedagógicas e teorias de aprendizagem como com as práticas dos contextos de aprendizagem. Esta construção de materiais é feita com base "tanto nos pressupostos da teoria norteadora quanto nas expectativas dos sujeitos sobre a integração das TIC com a prática, o que se concretiza nas características das ferramentas, recursos, materiais e estrutura de aprendizagem" (p. 38), e envolve uma equipe de profissionais, tais como professores, pesquisadores e programadores, promovendo integração, uma das características do método.

Segundo Wang e Hannafin (2005), a PBD é fundamentada, pragmática, interativa, iterativa e flexível, integrativa e contextualizada. Quando se pensa, por exemplo, em pesquisar a eficiência de um determinado objeto de aprendizagem, que vai ser usado por alunos, sob a orientação de monitores, em um laboratório de aprendizagem, é necessário, efetivamente, fundamentar a criação desse objeto em teorias que levem em conta o conteúdo em si e as dificuldades dos alunos em se apossar de tal conteúdo, mas também que realimentem a teoria com novos dados.

Neste sentido, a pesquisa é pragmática, ou seja, busca resolver problemas práticos da aprendizagem de um determinado conteúdo. Já a interatividade se manifesta na necessidade de trabalhar em conjunto com os professores desses alunos, com os monitores do laboratório e com outros pesquisadores que desenvolvem recursos semelhantes.

A iteração é evidenciada na necessidade de que as intervenções do pesquisador, ao introduzir o objeto em questão, sejam realimentadas continuamente com testes e refinadas por meio de novos projetos, o que permite desenvolver a pesquisa com flexibilidade maior do que em outras abordagens metodológicas.

É integrativa porque os pesquisadores necessitam integrar uma variedade de métodos e abordagens, tanto quantitativos quanto qualitativos, dependendo das necessidades da pesquisa. E, finalmente, a pesquisa é contextualizada porque os resultados são "conectados tanto com o processo de design por meio do qual os resultados são gerados como com o ambiente no qual a pesquisa é conduzida" (WANG; HANNAFIN, 2005, p. 11).

Ainda de acordo com Bell e Sandoval (2004), perguntas comuns tais como "O que determina o sucesso de uma intervenção específica em uma situação particular?" ou "Como se pode generalizar um resultado positivo a partir de uma observação de um caso particular?" podem ser respondidas pelos princípios da PBD. Este tipo de pesquisa pode produzir diferentes tipos de conhecimento, incluindo melhor compreensão teórica dos fenômenos de aprendizagem por meio de uma intervenção e práticas de *design* generalizáveis.

Quanto às características da PBD, destaca-se novamente a colaboração interativa entre os pesquisadores e os profissionais, e a necessidade de integrar uma variedade de métodos e abordagens, tanto dos paradigmas da pesquisa quantitativa como da qualitativa, dependendo das necessidades da pesquisa. Porém, é importante ressaltar que é característica da PBD a possibilidade de alteração dos métodos ao longo do percurso de pesquisa, uma vez que novas necessidades podem emergir do próprio contexto.

Conforme Ramos (2010), o desenvolvimento da PBD no Brasil ainda é bastante lento, sendo mais comum no cenário internacional. Além disso, todas as experiências nacionais listadas por esta autora fazem parte do chamado tipo I, aquele que "envolve situações específicas em que o processo de desenvolvimento do produto educacional, em um contexto particular, é descrito, analisado e o produto final avaliado", ainda que se possa discutir os resultados obtidos em contextos similares (p. 26).

Pode-se relacionar diretamente a proposta desta pesquisa com os pressupostos da PBD. Inicialmente, partiu-se de teorias de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo (Ausubel e Tall) e de pressupostos da análise de erros, que foi colocada em prática na análise de algumas questões selecionadas, em instrumentos avaliativos diversificados. A partir de resultados obtidos, voltou-se à teoria, desta vez buscando entender como as dificuldades em Cálculo Diferencial podem ser limitadores para os alunos ingressantes em cursos da área de Ciências Exatas. Trabalhou-se, então, com ideias de Tall e Vinner, sobre imagem do conceito e definição do conceito, bem como a teoria dos Três Mundos da Matemática.

Indo novamente para a prática, foram encontrados dados sobre dificuldades em Álgebra, que levaram à busca de autores que discutem o ensino desse ramo da Matemática. Também foram estudados os pressupostos da construção de objetos de aprendizagem, quando se teve a atenção despertada para os estilos de aprendizagem dos alunos. Aplicou-se, então, novo instrumento, a fim de se obter dados sobre os estilos dominantes do público-alvo.

Na segunda fase da pesquisa, foi utilizado o ambiente MOODLE, no qual foi criado um questionário para detecção das dificuldades dos alunos em Matemática Básica. Após esta etapa, os alunos foram contatados de acordo com os erros cometidos e convidados a trabalhar com objetos de aprendizagem, tanto o construído na primeira etapa da pesquisa como outros elaborados por bolsistas de Iniciação Científica ou selecionados na rede.

Na sequência, foram propostos, também no ambiente MOODLE, fóruns de discussão, os quais foram iniciados com questões relativas aos temas trabalhados nos objetos de aprendizagem. A partir das manifestações dos alunos nesses fóruns, foi necessária uma volta à teoria, para entender como alguns conceitos haviam sido (ou não) construídos por esses estudantes.

Em seguida, foi feito um novo questionário, semelhante ao primeiro, bem como uma comparação dos resultados obtidos pelos alunos antes e depois de todo o trabalho realizado, tendo sido usados testes estatísticos para uma análise quantitativa, evidenciando a variedade de métodos usados. Finalmente, foi realizada uma entrevista aberta com uma das professoras responsáveis pelo Laboratório de Informática da Instituição em questão, cuja transcrição foi submetida à análise de conteúdo (BARDIN, 1979).

3.2 Análise de Erros

A análise de erros, além de fundamentar os estudos teóricos para a realização dos primeiros testes, insere-se nesta pesquisa como uma técnica de coleta e análise de dados que segue três fases para a análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira fase, de pré-análise, os testes respondidos são indicados por letras, para evitar a identificação dos alunos. Em seguida, são fotocopiados e as soluções para cada questão são recortadas. As respostas válidas (que não estão em branco) de cada questão são coladas (em folhas, se as respostas não estão digitalizadas, ou em arquivo de texto), permitindo a leitura conjunta. Essas questões, assim organizadas, formam o *corpus*, sobre o qual é realizada a análise das respostas.

Na correção das soluções, em geral têm sido usados os critérios empregados na correção dos testes do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), considerando-se quatro tipos de resposta: correta (código “2”), parcialmente correta (código “1”), incorreta (código “0”) e em branco (código “9”).

A segunda fase da análise, de exploração do material, envolve os procedimentos de unitarização e categorização. A unitarização consiste em reler o material para definir as unidades de análise. Nessa releitura, cada unidade é codificada e, a seguir, individualizada. Tendo destacado as unidades, o próximo passo é a categorização, que “tem por primeiro objectivo [...] fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos.” (BARDIN, 1979, p. 119). Os critérios de classificação podem ser criados *a priori* (se já há uma classificação para os erros cometidos em relação ao conteúdo analisado) ou *a posteriori* (a partir da observação das respostas apresentadas, por meio do agrupamento das respostas semelhantes).

Em cada etapa da análise, o pesquisador já produz uma forma de interpretação, pois suas decisões sobre as categorias a serem definidas já trazem suas concepções sobre os erros cometidos ou envolvem os objetivos do trabalho.

Na fase de tratamento dos resultados, é feita a descrição das categorias por meio de tabelas ou gráficos que mostram a distribuição dos erros por categoria. Essa parte quantitativa é seguida por outra, qualitativa, que consiste em produzir um texto-síntese sobre cada classe de erros.

3.3 As Etapas da Pesquisa e os Instrumentos Utilizados

Esta pesquisa foi realizada em uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, daqui por diante denominada apenas como “Instituição”, para evitar a identificação dos seus participantes.

A pesquisa foi dividida em três etapas. Na etapa preliminar, já apresentada na qualificação do projeto de tese, foram realizadas duas experiências investigativas, a fim de verificar possibilidades da análise de erros como técnica de pesquisa.

Inicialmente, foi aplicado um teste a alunos de Cálculo Diferencial e Integral, com o propósito de analisar erros cometidos por esses alunos na solução das questões. Escolheu-se uma turma de Cálculo do curso de Sistemas de Informação da Instituição e, para a análise de erros, uma das questões da segunda prova aplicada à turma (Apêndice A), que tratava de regras de derivação. A opção por esse conteúdo se deu pelo fato de que, nesse curso de Sistemas de Informação (assim como em outros, como Engenharias), as derivadas são empregadas em aplicações, em disciplinas subsequentes.

A partir do que foi observado neste primeiro teste com erros relacionados a conteúdos da educação básica, questionou-se, ao iniciar um novo semestre letivo (2013/1), se os alunos ingressantes na disciplina de Cálculo teriam conhecimentos de Matemática elementar e, em caso negativo, como poderiam ser auxiliados, nas atividades de monitoria desenvolvidas no Laboratório de Aprendizagem, para que os conteúdos básicos fossem recuperados.

Assim, planejou-se investigar conhecimentos básicos de Matemática dos alunos calouros de Cálculo dessa Instituição, para poder projetar o ensino e, também, para indicar, aos monitores do laboratório, recursos que pudessem auxiliar os estudantes. Para isso, foi planejado um teste de sondagem (Apêndice B), composto por cinco questões abertas, que foi aplicado a calouros de Cálculo Diferencial e Integral, pelos professores responsáveis pelas turmas, no primeiro dia de aula.

Em um terceiro momento desta primeira etapa, ainda no semestre 2013/1, foi aplicado o Teste de Estilos de Aprendizagem (Apêndice C) em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I, da mesma Instituição. Este teste foi feito com objetivo de identificar as preferências dos alunos no momento da aprendizagem, o que auxiliou na construção de recursos adequados a esse público-alvo. Ainda nessa primeira etapa, foi elaborado um Objeto de Aprendizagem, descrito no item 4.4.

Na segunda etapa, no ano de 2014, foi elaborado um questionário inicial (Apêndice D), para obter informações sobre os alunos e um teste denominado “Questões 1” (Apêndice E), com vistas a detectar dificuldades dos alunos, desta vez aplicado diretamente no ambiente MOODLE. Para o planejamento desse teste, foram usadas questões já testadas em pesquisas anteriores (CURY; MORAES, 2006) bem como outras adaptadas de livros didáticos de Matemática, do Ensino Fundamental e Médio. A escolha das alternativas é detalhada no item 5.2.

Todas as questões são de escolha simples, com cinco alternativas cada. As alternativas incorretas foram criadas aplicando-se estratégias equivocadas que, conforme pesquisas já realizadas com Análise de Erros (BORTOLI, 2011), são usadas pelos alunos que não acertam a questão. Em seguida, com auxílio de um bolsista de Iniciação Científica, foram criados outros materiais de apoio, relativos a módulos e frações algébricas.

Após o trabalho com objetos de aprendizagem e discussões em fóruns, criou-se um novo questionário, “Questões 2” (Apêndice F), nos mesmos moldes do anterior, com fins de analisar a evolução dos alunos nos conteúdos matemáticos envolvidos. Os resultados dos dois testes foram objeto de tratamento estatístico, que é apresentado no item 5.7.

Na etapa final, foi realizada, ainda, uma entrevista com uma das professoras responsáveis pela área de Matemática do Laboratório de Aprendizagem da Instituição, com o objetivo de avaliar a adequação da proposta às necessidades dos alunos que o frequentam.

3.4 Participantes da Pesquisa

Com relação ao primeiro instrumento elencado na seção 3.3, da turma de 51 alunos, 35 fizeram a prova, visto que alguns vieram a desistir da disciplina logo no início do curso e outros optaram por fazer a prova de recuperação ao final do semestre.

Já o teste de sondagem foi respondido por 333 alunos de diferentes turmas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e o teste de estilos, por 54 alunos dessa mesma disciplina.

Os questionários aplicados no MOODLE contaram com a participação de 74 e 55 alunos de Cálculo Diferencial e Integral I, respectivamente na primeira e na segunda versão.

Na etapa final da pesquisa, houve a participação de uma das professoras responsáveis pela Matemática no Laboratório de Aprendizagem da Instituição.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PRIMEIRA ETAPA

Neste capítulo, apresentam-se os primeiros experimentos realizados ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Na seção 4.1, é feito o relato da primeira pesquisa dos erros cometidos por alunos de Cálculo A, no segundo semestre de 2012. A seção 4.2 traz a análise dos erros cometidos no teste de sondagem aplicado a 333 alunos de Cálculo Diferencial e Integral I, no primeiro dia de aula de 2013, o qual continha questões de nível básico, visando identificar a dificuldade dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia e afins. As próximas seções trazem a pesquisa sobre os estilos de aprendizagem, bem como discorrem sobre a criação e aplicação de um objeto de aprendizagem a partir do que foi observado nas investigações citadas.

4.1 Primeira Experiência Investigativa: prova de Cálculo A

Apresenta-se aqui a análise quanti-qualitativa das respostas da questão escolhida para a primeira pesquisa, cujo enunciado é:

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3}$

b) $g(x) = \cos x - x.e^x$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$

Iniciando a análise dos dados coletados, foi feita uma contagem da quantidade de respostas que se enquadram em cada uma das quatro categorias: corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. Os resultados obtidos são indicados no Quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Distribuição das classes de respostas da questão

Classes	Categoria	Respostas					
		Item a		Item b		Item c	
		n	%	n	%	n	%
2	Correta	12	34,3	2	5,7	13	37,1
1	Parc. Correta	18	51,4	21	60,0	9	25,7
0	Incorreta	5	14,3	10	28,6	10	28,6
9	Em branco	0	0,0	2	5,7	3	8,6
Total		**35**	**100**	**35**	**100**	**35**	**100**

Fonte: Dados da pesquisa

De maneira geral, pode-se observar que a maioria dos alunos tentou efetivamente responder à questão, visto que a classe 9 (respostas em branco) é a menos frequente, chegando a não existir no item “a”. Além disso, a maior parte das respostas foi enquadrada na categoria “parcialmente correta”, uma vez que foi bastante comum, por exemplo, o aluno iniciar corretamente a aplicação da regra de derivação, mas se equivocar nos cálculos que seguiam.

Apresenta-se, a seguir, uma análise mais detalhada das respostas contabilizadas nas categorias “parcialmente correta” e “incorreta”.

1) **Item a**:

No item a, solicitava-se a derivada da função dada por $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3}$. A resposta esperada é: $f'(x) = \dfrac{(x^2+3).2-(2x-1).2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2x^2+6-4x^2+2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-2x^2+2x+6}{(x^2+3)^2}$.

Nesse item, foram categorizados sete tipos de erros, indicados a seguir:

A) erros quanto à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração): nesse caso, os alunos fizeram mau uso dos parênteses, na segunda parcela do numerador, quando deveriam ter usado parênteses em –(2x-1) para multiplicar por 2x. Foram detectadas expressões sem parênteses, tais como -2x-1 ou 2x-1, o que acarretou erro no resultado final.

B) erros relacionados à regra da derivada do quociente, em que era esperada, como resposta correta, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$. Para esse item, foram detectadas expressões dos tipos: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)}{g'(x)}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x)}{g'(x)}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x).g(x).f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x).g(x)+f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$.

C) erros de simplificação de fração algébrica: foram encontradas simplificações do tipo: $\frac{2x-1}{2x}=-1$; $\frac{-2x^2-2x+6}{(x^2-3)^2}=-2x^2-2x+6$; $\frac{(x^2-3)(2x)-(2x-1)(2x)}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2+3-2x-1}{(x^2-3)^2}$.

D) erro na derivada de x^2+3, indicada como 2.

E) erro no quadrado de um binômio, efetuado como: $(x^2+3)^2 = x^4+9$.

F) cópia equivocada da função: um aluno trocou x^2+3 por x^2-5.

G) erro não identificado.

2) Item b:

No item b, solicitava-se a derivada de $g(x) = \cos x - x.e^x$ e esperava-se que os estudantes respondessem $g'(x) = -senx - (x.e^x + e^x) = -senx - x.e^x - e^x$.

Nesse item, foram categorizados três tipos de erros, indicados a seguir:

H) erros quanto à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração): na segunda parte da resposta, o termo $-(xe^x + e^x.1)$ foi trocado por $-xe^x + e^x.1$ ou $-e^x + x.e^x$. Também houve casos em que a expressão $cosx - xe^x$ foi vista como $(cosx - x)e^x$, ocasionando a utilização da regra do produto para derivadas.

I) erros relacionados à regra de derivação do produto de duas funções, em que era esperada a resposta $(f(x).g(x))' = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$: as regras equivocadamente aplicadas foram: $(f(x).g(x))' = f'(x).g'(x)$ e $(f(x).g(x))' = f(x).g'(x)$.

J) erro não identificado.

3) Item c:

No item c, solicitava-se ao aluno que derivasse a função dada por $f(x) = \sqrt{x^3-2x+5}$, cuja resposta deveria ser $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2x+5}}.(3x^2-2) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+5}}$.

Nessa questão, foram encontrados cinco categorias de erros:

K) erros relacionados à regra da cadeia, de três tipos:

i) derivada correta da raiz quadrada, mas sem a multiplicação por $3x^2 - 2$. (Não utilização da regra da cadeia propriamente dita);

ii) uso, na derivada, da expressão $3x^2 - 2$ dentro da raiz quadrada, mas uso correto da regra da derivada da potência;

iii) resposta multiplicada pela expressão $x^3 - 2x + 5$;

L) erros relacionados a regras de derivação, de maneira geral, como a resposta do aluno que manteve a raiz quadrada e derivou apenas a função do radicando ou que considerou ser a derivada de $u^{1/2}$ igual a $-\frac{1}{2}.u.u'$ ou, ainda, igual a $\frac{1}{2}.u.u'$;

M) erros relacionados à operação de potenciação, também de três tipos:

i) transformação da raiz quadrada em potência (sendo usado outro expoente no lugar de ½).

ii) uso de falsa "propriedade distributiva" da potenciação em relação à adição;

iii) no uso da regra da cadeia, a potência ½ é indicada também em $3x^2 - 2$.

N) erro na cópia da expressão: nesse caso, foram consideradas as respostas em que o aluno "perdeu" o 2 do denominador de uma linha para outra da resolução ou em que houve troca do expoente -1/2 por -1;

O) erro não identificado.

Sintetizando a classificação no Quadro 2, tem-se a seguinte distribuição:

Quadro 2 – Distribuição das classes de erros por item da questão

Item	Classe de erro	Número de ocorrências
A	A	14
	B	7
	C	3
	D	1
	E	1
	F	1
	G	1
B	H	9
	I	14
	J	9
C	K	3
	L	3
	M	6
	N	2
	O	4

Fonte: Dados da pesquisa

Na classificação acima, destacam-se, então: no item *a*, a classe de erro A, relacionada à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; no item *b*, as classes de erros H e I, relacionadas também à propriedade distributiva; no item *c*, a classe de erros M-ii, relacionada à operação de potenciação.

Efetivamente, pode-se considerar que o maior problema desses estudantes está relacionado à propriedade distributiva: no item *a*, esse fato já está indicado na própria análise; no item *b*, além da distributividade do fator (-1), pode-se considerar que há um equívoco ao ser criada uma "distributividade" da derivação em relação à operação de multiplicação de funções; no item *c*, da mesma forma, uma "distributividade" da potenciação em relação à adição ou multiplicação.

Assim, conjectura-se que esses alunos apresentam um "já-encontrado", representado pela ideia de distribuir qualquer operação em relação à outra. Usando as ideias de Tall, pode-se dizer que esses estudantes formaram imagens conceituais do conceito de distributividade que não estão corretas. Desse modo, esse "já-encontrado" influenciou os alunos de forma negativa, pois o que eles evocam dessa propriedade os levam a não superar o obstáculo cognitivo que se lhes apresenta, à medida que tentam aplicar essa ideia de distributividade para operações que não gozam dessa propriedade, tais como a derivação em relação à multiplicação.

Pelos erros detectados e analisados, pode-se dizer que a aprendizagem das regras de derivação exige que sejam, primeiramente, superados os obstáculos representados por imagens equivocadas de conceitos de Álgebra elementar. Uma das possibilidades para auxiliar os alunos é criar organizadores genéricos, que lhes permitam fazer a ponte entre as propriedades das novas operações que lhes estão sendo ensinadas no Cálculo e as que deveriam ter sido aprendidas significativamente na educação básica.

4.2 Segunda Experiência Investigativa: teste de sondagem no Cálculo I

Após a aplicação do teste de sondagem, apresentado no Apêndice B, as respostas foram recolhidas e o material foi objeto de análise do conteúdo dos erros. Foram, então, escolhidas e analisadas as questões que seguem:

<u>Questão 1</u>: Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação: $(x+1)(x+2)=(x+5)^2$

Considerando-se esta questão, as respostas de cada turma foram agrupadas e indicadas por uma letra e um número, sendo que a letra corresponde ao nome do docente responsável pela turma; assim, a resposta B5 é do 5º aluno do professor B, sendo as provas numeradas conforme os alunos as entregavam. Dessa forma, nem o docente nem seus alunos são identificados. As respostas foram corrigidas e classificadas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. É importante destacar que a resposta foi considerada parcialmente correta apenas no caso em que o erro foi no sinal de x, ao final da resolução.

Na fase de tratamento dos resultados, as categorias foram descritas e exemplificadas, destacando-se os dados que serão utilizados para o planejamento do recurso instrucional. A classificação inicial das respostas às questões do teste aplicado aos 333 calouros de Cálculo, em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco, é mostrada no Quadro 3, a seguir, em que as turmas são indicadas pela primeira letra do nome do docente e as colunas correspondem à classificação das respostas.

Quadro 3 – Distribuição das respostas dos alunos na questão 1

Turma	Respostas				Total
	Corretas	Parcialmente Corretas	Incorretas	Em branco	
B	36	11	6	1	**54**
C	17	6	10	0	**33**
F	39	7	4	1	**51**
G	39	8	6	0	**53**
I	24	7	19	2	**52**
M	28	8	9	0	**45**
T	20	1	21	3	**45**
Total	**203**	**48**	**75**	**7**	**333**

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, as 75 respostas incorretas foram unitarizadas e categorizadas, obtendo-se, assim, cinco tipos de erros, a seguir indicados:

Erro do tipo I: o aluno erra o desenvolvimento do produto dos binômios do primeiro membro ou o quadrado da soma do segundo membro.

Erro do tipo II: o aluno erra a redução dos termos semelhantes ou não efetua a redução.

Erro do tipo III: o aluno erra a solução da equação de 1º grau resultante ou resolve como se fosse uma equação de 2º grau, ou ainda, não a resolve.

Erro do tipo IV: o aluno copia mal a questão ou comete um erro de cálculo apenas no final.

Erro do tipo V: o aluno apresenta uma resolução incompreensível e que não se consegue classificar.

No Quadro 4, a seguir, apresenta-se o número de respostas em cada categoria, um exemplo[13] de resposta de determinado aluno e um comentário sobre o exemplo.

Quadro 4 – Distribuição dos tipos de erro e exemplos

Tipo de erro	Número de respostas na categoria	Exemplo	Comentário
I	42	$(x+1)(x+2) = (x+5)^2$ $(x+1)(x+2)=(x+5)(x+5)$ $x^2+2x+x^2+2=x^2+5x+x^2+5x$ $2x+2 = 5x+5x$ $8x = 2$ $x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	O aluno I32 erra a multiplicação de binômios, em ambos os membros. Pode-se supor que tenha lembrado do esquema da distributividade, mas não tenha formado a *imagem do conceito* dessa propriedade.
II	12	$(x+1)(x+2) = (x+5)^2$ $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 10x + 25$ $2x^2 - 7x + 27$	O aluno T 33 mostra conhecer o procedimento para multiplicar binômios, mas seu erro evidencia que não sabe transpor os termos de um para outro membro e, também, que não conserva a noção de igualdade, visto que “perde” o sinal de “igual” e não conclui a resolução.
III	12	$(x+1)(x+2) = (x+5)^2$ $x^2+2x+x+2 = 0$ $x^2+3x+2 = 0$ $\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}$ $\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}\begin{array}{l}\nearrow -1\\ \searrow 2\end{array}$ $x^2+2.x.5+5^2$ $x^2+10x+25$ $\frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 100}}{2}$	O aluno G15 resolve separadamente cada produto e considera que são equações distintas, pois iguala a zero e busca resolver pela fórmula de Bháskara, obtendo 2 valores para x. Já na resolução da “equação” do segundo membro, nota-se que o estudante não sabe aplicar a mesma fórmula. Também se nota, pelas duas resoluções de equação polinomial de 2º grau, que G15 não visualiza a

[13] Todos os exemplos foram digitados, porque as respostas foram escritas a lápis e não ficaram legíveis no escaneamento.

		$\frac{-10 \pm 1}{2}$	possibilidade de obter as raízes do polinômio de 2º grau, quando se apresenta fatorado.
IV	7	$(x+1)(x+2) = (x+5)^2$ $x^2 + 5x + 5x + 25$ $\underline{-x^2 - 2x - x - 2}$ $3x + 4x + 23$ $8x + 23$ $x = \frac{23}{8}$	O aluno C 33 mostra saber efetuar os produtos, mas precisa armar uma "conta de subtração" para resolver a equação. Apesar de ter obtido uma expressão correta, não a iguala a zero, o que talvez tenha contribuído para que adicionasse incorretamente os termos em x e, além disso, não levasse em conta que o termo independente, ao trocar de membro, deve ser negativo.
V	2	$-2x = 6$	O aluno C10 mostra apenas essa igualdade em sua resposta, não sendo possível entender que cálculos fez para chegar a 2x no primeiro membro e a 6 no segundo.

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que há grande número de respostas incorretas relacionadas ao produto de dois binômios, em que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é utilizada.

Questão 2: Resolva, em ℝ, a equação: $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$.

Da mesma forma que na questão 1, neste caso cada resposta foi indicada por uma letra e um número, utilizando-se a inicial do professor da turma e o número do aluno. As respostas foram corrigidas e classificadas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco.

No Quadro 5, é apresentada a distribuição das 333 respostas conforme a correção feita pela pesquisadora.

Quadro 5 – Distribuição das respostas dos alunos na questão 2

Turma	Respostas				Total
	Corretas	Parcialmente Corretas	Incorretas	Em branco	
B	7	2	43	2	**54**
C	8	0	25	0	**33**
F	13	3	34	1	**51**
G	12	1	40	0	**53**
I	2	2	41	7	**52**
M	3	1	37	4	**45**
T	1	0	32	12	**45**
Total	**46**	**9**	**252**	**26**	**333**

Fonte: Dados da pesquisa

Para analisar as 252 respostas incorretas, optou-se por classificar apenas o primeiro erro cometido pelo aluno. Assim como no caso anterior, tomou-se esta decisão devido à grande quantidade de participantes, o que dificulta a análise de mais uma ocorrência. Muitas vezes houve, por exemplo, um erro inicial na redução ao mesmo denominador e depois o mesmo aluno cometeu um erro de cálculo, mas o tipo de erro classificado é o relacionado com a redução ao mesmo denominador.

A categorização das respostas incorretas foi feita em duas etapas: foram criadas inicialmente 16 classes e, após a revisão dos tipos de erros, essas foram refinadas, obtendo-se, ao final, cinco classes, a seguir descritas e exemplificadas. Note-se que a resposta foi digitada como foi apresentada, ou seja, com o erro inicial e o desdobramento, que pode estar correto ou apresentar mais erros.

Erros do tipo A: fazem parte desta categoria as respostas em que o aluno mostra ter dificuldades com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Como exemplo, têm-se as respostas dos alunos G49 e T20, indicadas, respectivamente, nas Figuras 2 e 3, a seguir.

Figura 2 – Resposta do aluno G49	**Figura 3 – Resposta do aluno T20**
$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$ $\frac{4x+12-3x-12}{6}=2-\frac{x+1}{4}$ $\frac{x}{6}=2-\frac{x+1}{4}$ $\frac{2x+3x+3}{12}=2$ $\frac{5x+3}{12}=2$ $5x+3=24$ $5x=27$ $x=\frac{27}{5}$	$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$ $2x+2-x-2=2-\frac{x+1}{4}$ $x+4=$

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que o aluno G49 cometeu o primeiro erro ao reduzir as frações do lado esquerdo da igualdade ao mesmo denominador 6, pois, ao multiplicar a segunda fração por 3, não levou em conta que o sinal de menos na frente dessa fração indicava (-1)(x-4).

Pode-se supor que a separação entre o sinal de menos e a fração $\frac{x-4}{2}$ levou o aluno G49 a considerar que essa operação indicada pelo sinal de menos é relativa a toda a fração. Assim, salienta-se visualmente a fração, em detrimento do binômio x-4. Talvez tenha havido uma aprendizagem mecânica da propriedade distributiva durante o Ensino Fundamental e o estudante gravou um esquema como o da Figura 1 (p.30), mas sem entendimento do seu significado.

Ao não reconhecer que $-\frac{x-4}{2}$ indica $(-1)\left(\frac{x-4}{2}\right)$, o estudante mostra que não reconheceu as manipulações possíveis, ou seja, que não tem, ainda, o sentido da estrutura.

Já o aluno T20 "cancelou", nas frações do lado esquerdo da igualdade, respectivamente o 3 do numerador com o 3 do denominador na primeira fração e o 4 do numerador com o 2 do denominador da segunda fração. Ou seja, não se deu conta de que, para "cancelar" um termo, em uma soma ou diferença, é necessário que haja um fator comum que possa ser colocado em evidência. Possivelmente o resultado inesperado desse primeiro erro levou o estudante a abandonar a questão, apenas reduzindo (incorretamente) os termos semelhantes do lado esquerdo.

O lado direito da equação indicada na Figura 1, que representa a lei da propriedade distributiva, é muito pouco trabalhado em sala de aula e, por vezes, sequer é identificado com tal propriedade. Mais especificamente, muito poucas vezes a igualdade é lida da direita para a esquerda, de modo que "colocar o fator comum em evidência" não é visto como propriedade distributiva, mas como um caso de fatoração.

No lado esquerdo da equação $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$, o aluno T20 não reconhece a falta do 3, na primeira fração, nem a falta do 2, na segunda fração, como fatores comuns para ser possível o "cancelamento" com os respectivos denominadores. Assim, mostra não reconhecer convenções e propriedades básicas que permitam o "cancelamento" de termos.

Erro do tipo B: fazem parte desta categoria as respostas em que o aluno mostra não saber reduzir frações ao mesmo denominador, como, por exemplo, a do estudante G33, indicada na Figura 4:

Figura 4 – Resposta do aluno G33

$$\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$$

$$\frac{2x+6}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{-x+1}{8}$$

$$\frac{4x+12-3x-12}{6} = \frac{-x+1}{8}$$

$$\frac{4x-3x}{6} = \frac{-x+1}{8}$$

$$\frac{16x-12x=-24x+24}{24}$$

$$4x+24x=24$$

Fonte: Dados da pesquisa

Considera-se que o erro principal dessa resolução aparece no segundo membro, quando o aluno G33 multiplica o inteiro 2 pelo denominador 4, obtendo um denominador igual a 8.

G33 parece ter formado uma imagem do conceito de reduzir ao mesmo denominador que exige a multiplicação do denominador por cada numerador, sem que tenha se dado conta de que 2 é um inteiro, equivalente ao racional $\frac{16}{8}$.

Erro do tipo C: nesta classe, estão as respostas que apresentam erros de cálculo, entendidos como erros em operações elementares. Um exemplo é a resposta do aluno C27, na Figura 5, que errou, logo no início, o produto 4.2.3, indicando como 48.

Figura 5 – Resposta do aluno C27

$$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$$

$$\frac{8x+48}{12}-\frac{6x-24}{12}=\frac{24}{12}-\frac{3x+3}{12}$$

$$8x+48-(6x-24)=24-(3x+3)$$

$$2x+48+24=24+3x-3$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, o erro é aritmético e mostra dificuldades com o sentido do número.

Erro do tipo D: nesta classe, estão as respostas incompletas, em que o estudante só resolve um dos dois membros ou ambos, mas não sabe concluir; também foram inseridas nesta classe as respostas em que o aluno, após resolver ambos os membros, corretamente, passou todos os termos para o primeiro membro e não igualou a zero, ficando apenas com uma expressão e não com uma equação. Por exemplo, o aluno M40 apresentou a resposta indicada na Figura 6:

Figura 6 – Resposta do aluno M40

$$\frac{2(\mathrm{x}+3)}{3}-\frac{\mathrm{x}-4}{2}=2-\frac{\mathrm{x}+1}{4}$$

$$\frac{4\mathrm{x}+12-3\mathrm{x}+12}{6}=\frac{8-\mathrm{x}-1}{4}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de apresentar corretamente os primeiros passos da solução, o aluno M40 mostra não saber o que fazer com a equação resultante, talvez porque os denominadores não são iguais em ambos os lados. Falta-lhe, talvez, o sentido da estrutura, pois não reconhece as manipulações que poderia fazer para continuar a resolução.

Erro do tipo E: nesta classe estão agrupadas as respostas que apresentam erros cometidos por apenas um aluno e que, portanto, não formam uma categoria à parte, mas que apresentam algum detalhe que merece ser analisado. Como exemplo, é indicada a resposta do aluno I2, observada na Figura 7:

Figura 7 – Uma das respostas da classe VII

$$\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$$

$$4\left(\frac{(2x+6)}{3} - \frac{x-4}{2}\right) = 2 - x - 1$$

Fonte: Dados da pesquisa

A resposta do aluno I2 é interessante porque mostra que ele considerou, erroneamente, que o denominador da fração do segundo membro poderia multiplicar todo o primeiro membro. Parece que esse estudante tinha uma imagem do conceito equivocada sobre a "multiplicação cruzada".

Após a classificação das respostas em cinco categorias, foi elaborado o Quadro 6:

Quadro 6 - Distribuição das respostas por classe de erro

Classe	Respostas	
	n	%
A	150	60
B	59	23
C	22	9
D	14	6
E	7	3
Total	**252**	**100**

Fonte: Dados da pesquisa

Pela grande percentagem de erros categorizados na classe A, há preocupação em entendê-los e preparar algum recurso que possa superar tais dificuldades. Afinal, os alunos são calouros da disciplina de Cálculo Diferencial e a manipulação algébrica é uma condição necessária para o trabalho com limites e derivadas.

Sintetizando as dificuldades encontradas por meio deste teste, pode-se notar a falta de subsunçores relacionados aos conteúdos de Ensino Fundamental, especialmente a Propriedade Distributiva da multiplicação em relação à adição.

4.3 Teste de Estilos

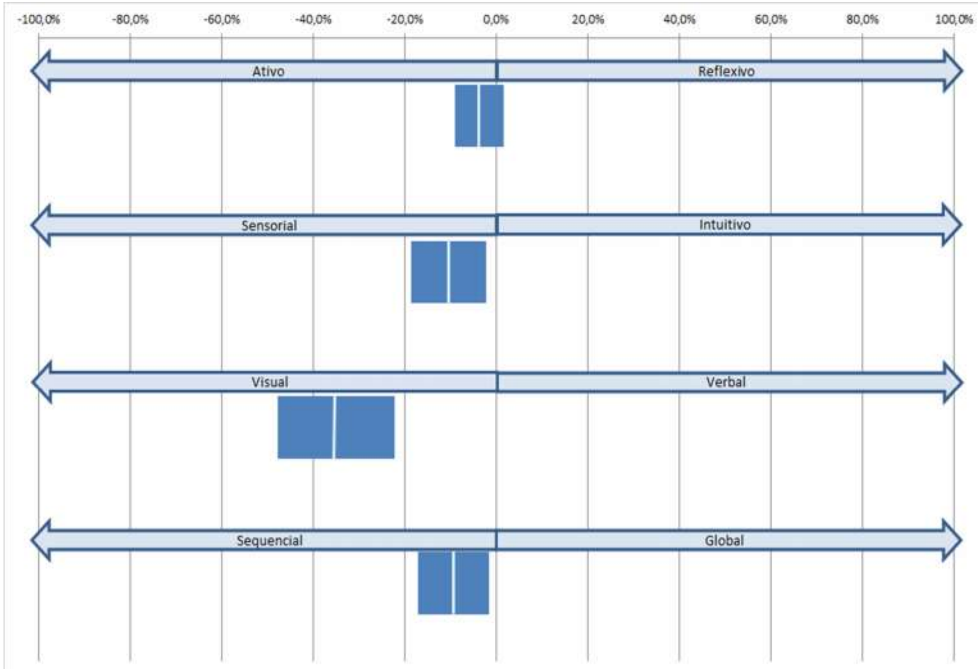
Para a aplicação do teste ILS, foi escolhida uma turma de 60 alunos da Instituição, na disciplina de Cálculo Diferencial. Os estudantes receberam as folhas com as questões do teste e a informação sobre o objetivo do estudo. Também lhes foi informado que o preenchimento do teste, sem identificação pessoal, indicaria sua autorização para a publicação dos resultados. Seis alunos optaram pelo não preenchimento e teve-se, então, 54 respondentes.

Após a aplicação, os testes foram recolhidos e as respostas foram tabuladas, conforme indicações de Felder, encontradas em seu site[14].

Foi então computada, para cada dimensão, a quantidade de alunos que teve preferência por cada um dos estilos. Em seguida, calculou-se a percentagem correspondente e os dados foram inseridos em uma planilha Excel, para obtenção do gráfico indicado na Figura 8, a seguir. Os escores do teste ILS foram apurados em cada uma das dimensões, em um intervalo entre -100% e +100%. Na dimensão ativo/reflexivo, o valor -100% corresponde à máxima pontuação como ativo e o valor +100% corresponde à máxima pontuação como reflexivo. A pontuação nas demais dimensões foi atribuída de forma análoga. O gráfico apresenta o escore médio e o erro padrão (variabilidade média dos valores em relação à média do conjunto) em cada uma das dimensões.

[14] http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/RMF.html

Figura 8 - Distribuição percentual dos alunos conforme os estilos



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo gráfico, vê-se que os alunos dessa turma são, preferencialmente, ativos (média de -3%), sensoriais (média de -12,1%), visuais (média de -35%) e sequenciais (média de -9,4%). Esses dados vêm ao encontro do que foi relatado por Felder e Silverman (1988) e Kuri, Silva e Pereira (2006), ainda que, nos dois trabalhos, os alunos tenham mostrado leve preferência pelo estilo global.

Santos (2013) também realizou uma pesquisa com 102 alunos de Licenciatura em Matemática a fim de identificar seus estilos de aprendizagem. Os resultados obtidos, mais uma vez, revelaram as preferências pelos estilos ativo, sensorial, visual e sequencial. Segundo o autor, "É fundamental que se detectem as preferências de estilos de aprendizagem dos alunos, professores e a compatibilidade com o material a ser utilizado, pois as uniões destes fatores potencializam a aprendizagem (p.13)".

Assim, para auxiliar os alunos em suas dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo, em que erros em conteúdos pré-requisitos têm sido detectados, foi planejada a construção de um objeto de aprendizagem que viesse ao encontro dos estilos preferenciais dos estudantes, conforme os dados acima comentados, e que propusesse exercícios e atividades relacionadas com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

É importante destacar que os alunos cujos estilos foram investigados neste trabalho são fortemente visuais, o que vem ao encontro da ideia de elaborar objetos de aprendizagem, que são, na maior parte das vezes, elementos com forte apelo visual.

4.4 Concepção do Objeto de Aprendizagem

A partir das análises das respostas dadas pelos alunos às questões selecionadas nos dois casos descritos, um objeto de aprendizagem começou a ser projetado. Procurou-se explorar a propriedade distributiva de forma mais abrangente, não apenas no caso das operações usuais de adição e multiplicação.

Decidiu-se iniciar a abordagem com números reais e propriedades das operações, para que a distributividade não aparecesse de forma isolada no material. Esta decisão foi tomada com base no fato de os alunos pesquisados terem se mostrado predominantemente sequenciais, isto é, demonstrarem preferência pelo aprendizado em pequenos passos, sequencialmente, ao invés de dar grandes saltos, tendo uma visão global do assunto.

Durante todo o desenvolvimento do material, procurou-se privilegiar elementos visuais, também baseado no estilo predominante demonstrado pelos alunos no teste. Assim, buscou-se a utilização de figuras, diagramas e gráficos, em detrimento da utilização apenas de palavras e fórmulas, que seriam mais importantes para estudantes que preferem o estilo verbal.

Com relação à tecnologia utilizada para confecção do objeto, destaca-se aqui que foi selecionada a plataforma Adobe Flash CS5.5, a qual se baseia em vetores para a criação de animações. Devido à sua facilidade de uso, compatibilidade com múltiplos navegadores, fácil carregamento e diversas possibilidades de animação, esta é a plataforma utilizada na Instituição e em cujo repositório o objeto construído ficará armazenado. Além disso, foi utilizado o software Fireworks CS5.5 como apoio na criação e manipulação de imagens, as quais são posteriormente importadas para o Flash.

A Figura 9 mostra a página inicial do objeto de aprendizagem que, devido ao caráter assumido, foi chamado de “Números Reais: operações e propriedades”.

Figura 9 - Interface do objeto

Fonte: Elaboração da autora

Já na tela inicial, alguns pontos podem ser observados: 1) o aluno sempre poderá localizar-se em sua navegação, devido à numeração que consta no canto superior direito da página; 2) é possível também um controle de ritmo por parte do usuário, que pode ser feito nas setas localizadas na parte inferior, que lhe permitem ir e voltar conforme sentir necessidade.

O início possui ainda uma trilha sonora, que deverá servir como elemento afetivo e motivador. Porém, caso o aluno não considere assim, ou seja, sinta-se perturbado pelo som, também tem a opção de cancelá-lo.

Seguindo-se com o conteúdo, na introdução é feita uma conscientização do aluno sobre a importância do estudo de números reais, operações e propriedades, uma vez que este será seu universo de trabalho em Cálculo Diferencial. Neste momento, é inserido um agente animado, que acompanha o estudante em todas as telas que possuem algum tipo de narração, outro elemento afetivo a ser considerado.

Após esta etapa, baseando-se no perfil ativo, parte-se para um sumário interativo, no qual são apresentados os blocos do objeto. De fato, de acordo com o perfil ativo demonstrado pelos estudantes na aplicação do questionário ILS, pode-se afirmar que eles preferem engajar-se em atividades físicas ou discussões, ao invés da introspecção, característica do estilo reflexivo. Neste momento, é sugerida uma ordem de navegação por meio de um caminho criado com setas, mas deixa-se claro para o aluno que, caso ele considere pertinente, pode visitar apenas um dos blocos, alterar a ordem ou voltar a um bloco considerado anterior.

Figura 10 - Sumário interativo

Fonte: Elaboração da autora

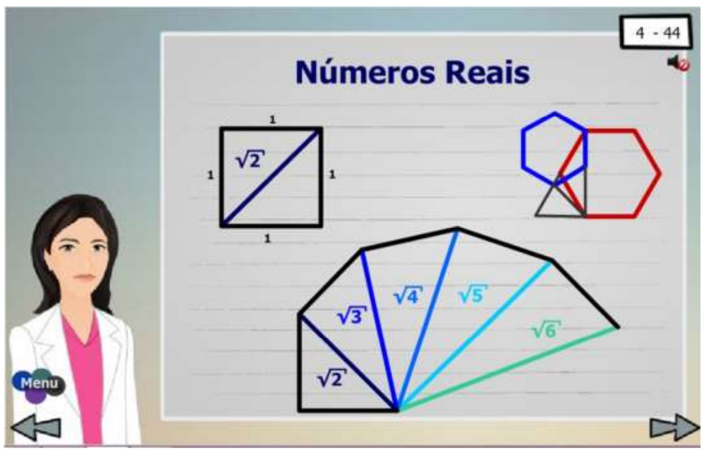
Como se pode ver na Figura 10, neste sumário são usadas formas geométricas circulares e coloridas, as quais são elementos sensíveis, de modo que o aluno será convidado a selecioná-las com o passar do mouse. Clicando sobre cada uma delas, será direcionado para a seção correspondente. A explicação de que o caminho sugerido não precisa ser necessariamente seguido ficará por conta do agente animado, através de uma narração. Com isto, espera-se evitar a redundância verbal considerada desnecessária, bem como a sobrecarga cognitiva.

Seguindo nesta linha, o objeto possui cinco seções distintas, que serão descritas a seguir. Destaca-se aqui que, em cada tela que as compõem, são observados fortemente os princípios de elaboração de um objeto de aprendizagem, já apresentados neste trabalho. Por exemplo, procuram-se usar sempre palavras, áudios e imagens de forma coerente e integrada, próximas graficamente e temporalmente quando tiverem relação. O princípio da Multimodalidade também é observado durante todo o tempo, uma vez que são usados textos, figuras, narrações e áudios não verbais, integrados de tal forma que existam simultaneamente os modos de apresentação verbal e não verbal, privilegiando tanto os alunos mais visuais, como aqueles que preferem o modo verbal.

Também foi contemplado o fato de os estudantes terem mostrado, no teste aplicado, uma preferência pelo estilo sensorial, uma vez que elementos visuais e sonoros, por exemplo, são largamente utilizados. No caso de os estudantes terem demonstrado preferência pelo estilo intuitivo, seriam usados mais recursos que estimulassem memórias, ideias e discernimento.

Seguindo-se com a ordem sugerida pelo menu apresentado na Figura 10, a primeira seção refere-se a novas considerações sobre números reais, diferentes das já apresentadas na introdução. Mostra-se a necessidade que foi sentida historicamente para o surgimento desses números (mais especificamente, dos números irracionais), isto é, o desejo de expressar grandezas incomensuráveis que geometricamente demonstravam sua existência. Esses fatos são apresentados de forma narrada e ilustrada, conforme mostra a Figura 11 a seguir.

Figura 11 - Introdução sobre números reais



Fonte: Elaboração da autora

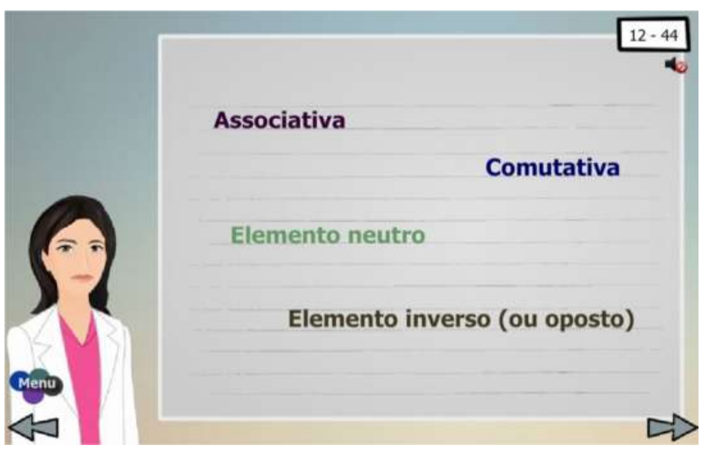
É ilustrado também um pouco do surgimento dos conjuntos numéricos em geral, mostrando a necessidade que se sentiu, ao longo do tempo, de ampliação dos conjuntos numéricos já existentes. Sendo assim, parte-se do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e por fim os reais, levando o aluno a compreender que o objetivo do trabalho a ser realizado é adquirir familiaridade com as operações de números reais e suas propriedades (que, por construção, também valem para os outros conjuntos já conhecidos). Além disso, o aluno deve perceber que estas propriedades têm por objetivo facilitar seus cálculos e resolução de problemas, ou seja, que as propriedades são suas aliadas, o que deverá motivá-lo para melhor compreensão do assunto.

Feitas estas observações, parte-se para a segunda seção, denominada “Teste seus Conhecimentos”. Esta é uma parte essencial do objeto, pois nela o aluno resolverá questões relativas a operações com números reais, que são conhecimentos necessários para o bom entendimento das propriedades. Nesta etapa, além de exercícios de adição e multiplicação envolvendo números inteiros, racionais e raízes (sendo estes dois últimos tópicos bastante enfatizados, pois costumam também serem fontes de erros), é explorado o significado de algumas palavras envolvidas no contexto, como comutar, associar, distribuir, etc.

Conforme o aluno vai respondendo às questões, seu escore vai sendo mostrado, de modo que o *feedback* é instantâneo, pois ele pode conferir cada resposta dada diretamente no sistema, sem necessidade de ajuda do professor ou monitor. Nesta seção, também, são indicados materiais externos a serem consultados caso o aluno não obtenha um bom desempenho no teste. Vale destacar que são ainda explorados problemas, de modo que o raciocínio sobre a situação apresentada é fundamental para o bom desempenho.

Quando o estudante passa desta etapa, ele é levado à etapa seguinte, que se chama "Propriedades da Adição e da Multiplicação". Neste momento, são exploradas as operações comuns à adição e à multiplicação e o aluno é lembrado de que a multiplicação pode ser vista como uma adição de parcelas iguais, o que explica, de certa forma, estas propriedades comuns. Estes lembretes são feitos em forma de áudio, enquanto as propriedades, com as quais ele também já deve ter tido contato vão sendo apresentadas na tela, fato que pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 - Propriedades da adição e da multiplicação



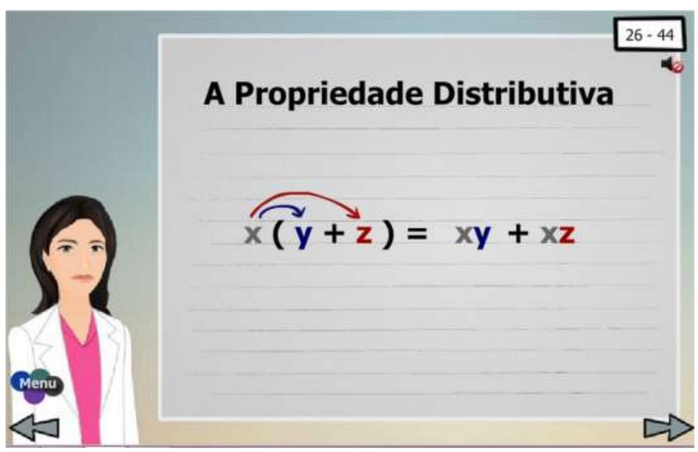
Fonte: Elaboração da autora

Atentando-se mais uma vez para os perfis ativo e sensorial, este bloco inicia-se com uma forte participação do usuário, o qual deve ir respondendo perguntas e completando lacunas sobre o que já conhece do assunto. Porém, levando em conta a necessidade de sequencialidade, logo em seguida são apresentadas telas mais teóricas, que trazem informações pertinentes sobre as propriedades consideradas. É importante destacar que a definição formal de operação e a demonstração, também formal, de suas propriedades, não são objeto de estudo em disciplinas de Cálculo, motivo pelo qual não são exploradas neste objeto.

Também a partir deste momento, começam a ser trazidas visões mais amplas das aplicações das propriedades, não apenas com números, ou seja, são apresentados exemplos geométricos ou que se utilizam da teoria dos conjuntos, entre outros tópicos. Pelo princípio da reconciliação integrativa, de Ausubel, o objeto aponta similaridades entre operações que gozam da propriedade distributiva. Este olhar abrangente é levado até o fim do material, sendo abordado em cada seção da forma que é considerada mais pertinente.

A próxima seção na ordem sugerida é a denominada "A Propriedade Distributiva", que é o tópico central do Objeto de Aprendizagem, uma vez que ele foi construído com o propósito de se trabalhar esta propriedade. A tela inicial desta seção é mostrada na Figura 13.

Figura 13 - Apresentação da propriedade distributiva

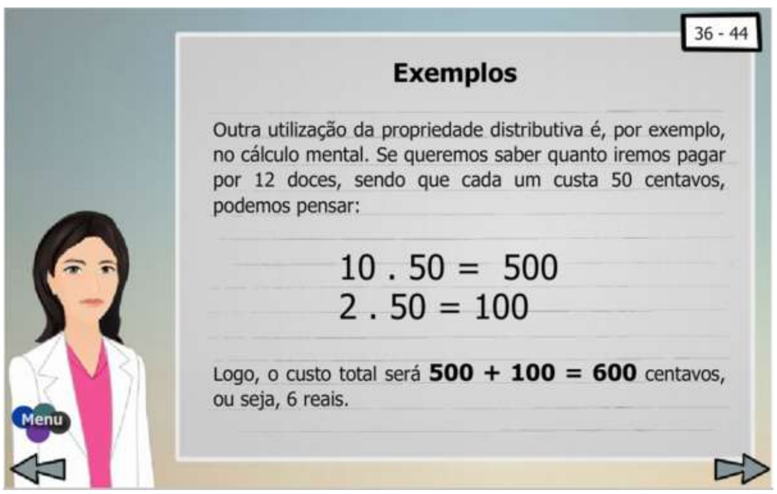


Fonte: Elaboração da autora

Como se pode observar na figura, são utilizados elementos visuais para fixar o que diz esta propriedade, colocados também em forma de animação. Mais uma vez, o agente animado cumpre seu papel de narração, explicando que esta propriedade não foi colocada junto com as demais porque não é relativa a uma única operação, podendo-se dizer que a distributiva é a propriedade que abrange a adição e a multiplicação. Segue-se, então, com a definição propriamente dita, exemplos e observações. Uma destas observações, que merece destaque, é a que se refere ao fato conhecido como “colocar em evidência”. Sabe-se, por regras de fatoração que, quando se tem uma adição em que todas as parcelas possuem um fator comum, é possível colocar este fator em evidência. Porém, poucas vezes isto é visto como aplicação da propriedade distributiva, pois uma vez que ela é dada por uma igualdade, conforme ilustrado na Figura 13, esta igualdade pode ser lida tanto da esquerda para a direita como da direita para a esquerda.

Outra observação importante que consta nesta seção é a aplicabilidade da propriedade distributiva ao cálculo mental, apresentada na Figura 14:

Figura 14 - Aplicação da propriedade distributiva ao cálculo mental

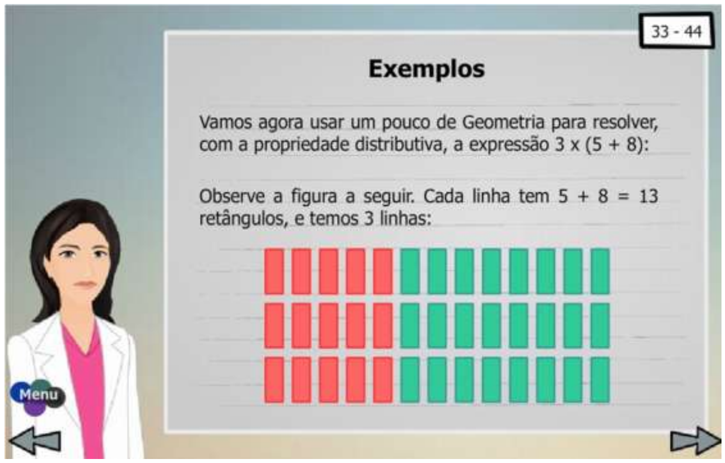


Fonte: Elaboração da autora

Nesse caso, a situação apresentada é considerada uma aplicação da propriedade distributiva ao cálculo mental porque, de fato, é muito mais simples de se realizarem mentalmente os cálculos apresentados na Figura 14 do que se fazer 12.50, que seria a única possibilidade, caso a propriedade distributiva não fosse conhecida.

É chamada atenção, ainda, para uma interpretação geométrica da propriedade distributiva, conforme a Figura 15, a seguir:

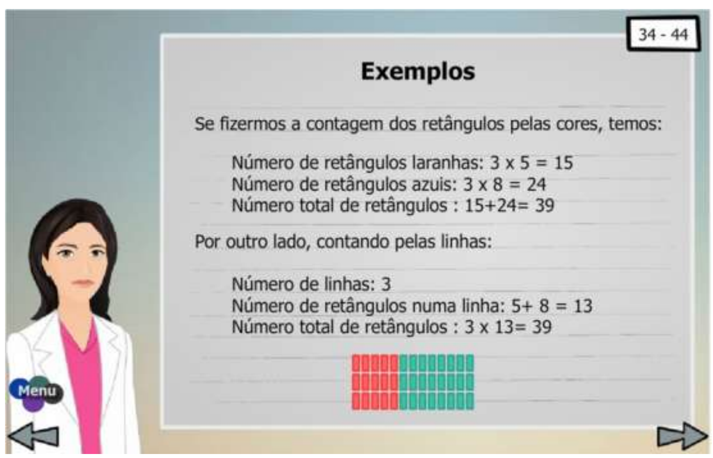
Figura 15 - Visão geométrica da distributividade



Fonte: Elaboração da autora

Observando-se o desenho apresentado na Figura 15, pode-se prosseguir com a resolução da situação proposta, conforme colocado na Figura 16:

Figura 16 - Resolução do exercício usando a visão geométrica



Fonte: Elaboração da autora

Por fim, o último segmento do objeto de aprendizagem refere-se a exercícios que abordam mais fortemente a propriedade distributiva, tais como sua aplicação na resolução de equações, por exemplo. Da mesma forma que na seção “Teste seus Conhecimentos”, a cada resposta é dado um *feedback* ao aluno, porém desta vez, não são indicados materiais externos, pois, caso o estudante não tenha um bom rendimento, deverá estudar novamente o conteúdo presente no próprio objeto.

Neste momento, também são explorados significados das palavras e resoluções de problemas. Além de fornecer ao estudante a correção da questão, o sistema só permite que a resposta seja solicitada após o usuário ter feito alguma tentativa de resolução, ou seja, não é possível que ele verifique diretamente a resposta, seja ela somente a resposta final ou o desenvolvimento (no caso dos problemas) sem que tente, efetivamente, responder à questão.

Com isto, encerra-se o ciclo, o qual pode ser revisitado quantas vezes o estudante achar necessário até que se sinta seguro para usar estes conhecimentos em aplicações futuras, na resolução de exercícios específicos de Cálculo.

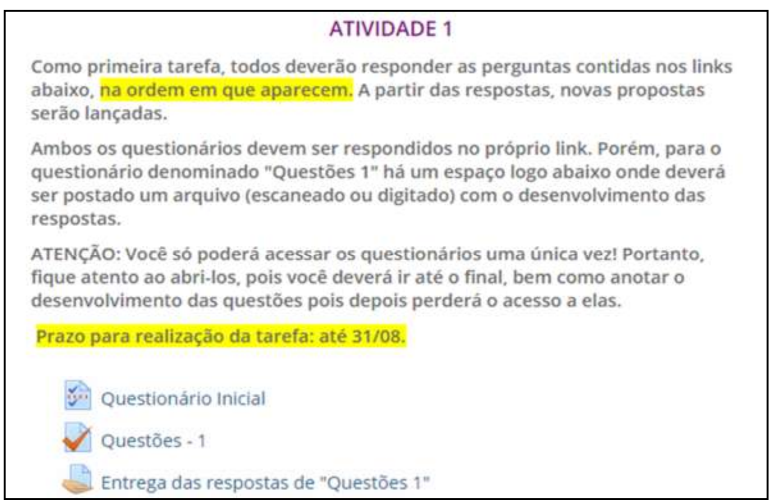
Este Objeto de Aprendizagem pode ser considerado um organizador genérico (TALL, 1986), porque, no ambiente de aprendizagem interativo representado pelo computador e pelo Objeto de Aprendizagem, a atenção do aprendiz vai estar direcionada para um tópico matemático específico, a saber: a propriedade distributiva. Além disso, pode-se considerá-lo, conforme classificação proposta por Canto et al (2013), como Multimodal Efetivo, uma vez que traz as informações, predominantemente, nos modos áudio verbal e visual não verbal, ainda que algumas partes apresentem pequenos textos a serem lidos, especialmente quando são colocados exercícios.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS ALCANÇADOS NA SEGUNDA ETAPA

Durante o ano de 2014, foram realizadas atividades que deram origem aos resultados que são apresentados neste capítulo. Para tal, contou-se com o auxílio de dois bolsistas de Iniciação Científica, estudantes de Licenciatura em Matemática da Instituição. O primeiro bolsista trabalhou de abril a julho, período em que se focou no desenvolvimento de materiais e no planejamento das atividades. Foi criado um espaço na plataforma MOODLE, chamado "Espaço do Cálculo I" no qual estavam inscritos todos os 685 alunos matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, nas diferentes turmas em que ela era oferecida. Foi-se, então, estruturando essa área conforme descrito a seguir.

No primeiro bloco, foi feita uma apresentação da professora pesquisadora, explicando aos alunos que eles participariam de atividades que serviriam para identificar suas maiores dificuldades na disciplina e disponibilizar recursos para auxiliá-los a superá-las. Após esta apresentação inicial, partiu-se para a atividade 1, apresentada na Figura 17, abaixo:

Figura 17 – Atividade 1 do Espaço do Cálculo I



Fonte: Elaboração da autora

Como se pode ver na Figura 17, esta atividade consistiu do preenchimento de dois questionários. O chamado "Questionário Inicial" (Apêndice D) continha perguntas de âmbito geral, ou seja, o curso/semestre do aluno, além de sua opinião sobre conteúdos de Matemática que considerava difíceis. Ao final dele, o estudante era convidado a participar do restante da pesquisa. Partiu-se, então, para o segundo bloco de perguntas, chamado “Questões 1” (Apêndice E), o qual tratava de questões de conteúdos de Matemática de Ensino Fundamental e Médio, ou seja, conteúdos que o aluno já deveria dominar para obter um desempenho satisfatório na disciplina de Cálculo. A razão pela qual não se avançou nas atividades com esses estudantes é que a maior parte deles, não sendo alunos da professora-pesquisadora, não tiveram interesse em participar do trabalho, visto que não “valia nota” para a avaliação de aprendizagem na disciplina.

Depois de construídos esses primeiros questionários, projetou-se a utilização de objetos de aprendizagem para trabalhar com os possíveis erros apresentados por alunos nesse teste “Questões 1”. A partir das análises realizadas em situações semelhantes e apresentadas na etapa preliminar desta tese, já era possível se ter uma ideia dos erros que seriam recorrentes. Partindo-se do erro mais comum até então, na aplicação da propriedade distributiva, foi pensada a utilização do objeto criado na primeira fase desta pesquisa e apresentado no capítulo 4. Além dele, foram construídos, com a ajuda do bolsista, outros dois materiais: o primeiro deles referente a módulos e inequações, utilizando o GeoGebra (Apêndice G) e o outro sobre manipulações com frações algébricas (Apêndice H), visto que esses conteúdos foram os que geraram mais erros, além da propriedade distributiva.

O trabalho com os alunos de todas as turmas de Cálculo I do primeiro semestre de 2014 foi realizado para que a professora-pesquisadora e o bolsista tivessem uma visão geral sobre a perspectiva de uso do ambiente MOODLE, já que a escolha desse ambiente foi determinada pela impossibilidade de utilizar os ambientes previamente estudados.

No final do primeiro semestre, foi necessária a substituição do bolsista, devido a seu afastamento para intercâmbio. Sendo assim, após se ambientar com o projeto e com os materiais produzidos, o segundo bolsista começou a trabalhar, auxiliando na implantação das primeiras atividades com os 106 alunos que, no segundo semestre de 2014, tinham a pesquisadora como professora. Aproveitou-se, então, o Questionário inicial e o teste “Questões 1”, inserindo-os novamente no ambiente MOODLE, no qual se cadastraram esses 106 estudantes. A atividade 1, portanto, teve a mesma interface apresentada na Figura 17. Todos os 106 alunos foram convidados a participar da pesquisa e os resultados são descritos nas seções que seguem.

Como essas atividades estavam no ambiente MOODLE, isto é, não foram aplicadas em sala de aula, apenas 64 alunos responderam ao questionário inicial. Posteriormente, mais alguns se inscreveram no ambiente e 74 responderam ao teste “Questões 1”. Na análise das respostas desses 74 alunos, além dos erros já mencionados, sobre aplicação da propriedade distributiva, trabalho com módulos, inequações e frações, outros foram identificados. Porém, como o tempo para produção de objetos de aprendizagem é bastante longo, optou-se pela busca de materiais na rede, referentes aos novos assuntos que necessitavam de revisão.

Após essa busca, todos os materiais (construídos ou apenas compartilhados) foram colocados à disposição dos alunos no ambiente, solicitando-se que fossem explorados durante um determinado período de tempo. Passado este tempo e controlados os acessos aos materiais, foram criados fóruns de discussão, cada um relativo a um dos tópicos estudados nos objetos de aprendizagem. Em cada fórum, foi lançada uma nova questão a ser discutida pelo grupo, as quais geraram debates que são descritos na seção 5.5.

Ao final deste processo, foi aplicado um novo teste, chamado “Questões 2” (Apêndice F), composto por questões semelhantes às do teste inicial, com o objetivo de verificar a evolução dos alunos após o cumprimento de todas as etapas propostas. Responderam a esse novo teste apenas 55 alunos, já que alguns já haviam desistido da disciplina. Os resultados obtidos na comparação entre as respostas aos dois testes são descritos na seção 5.7.

Por fim, para validação de todos os procedimentos planejados e implementados, foi realizada uma entrevista com uma das professoras que trabalham no Laboratório de Aprendizagem da Instituição, que é conhecedora das dificuldades dos alunos que buscam atendimento no local. Essa entrevista é descrita na seção 5.8.

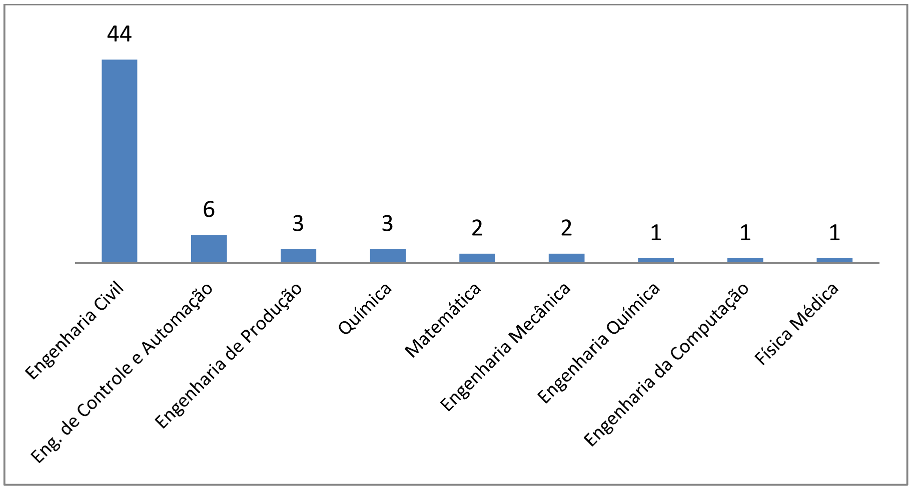
Ressalta-se novamente que os resultados descritos a partir daqui, ao longo deste capítulo, referem-se às atividades realizadas com esses alunos que cursaram a disciplina de Cálculo I sob responsabilidade da pesquisadora, no segundo semestre de 2014.

5.1 Apresentação e Análise das Respostas ao Questionário Inicial

O questionário inicial, indicado na Figura 17, tinha como objetivo traçar um perfil dos alunos inscritos no ambiente MOODLE. Para sua implantação, foi utilizada a ferramenta “enquete”.

Apresenta-se, agora, uma breve análise das respostas obtidas em cada uma das perguntas. Na questão 2, que solicitava o curso do aluno, obtiveram-se as respostas conforme o gráfico da Figura 18:

Figura 18 – Cursos frequentados pelos participantes

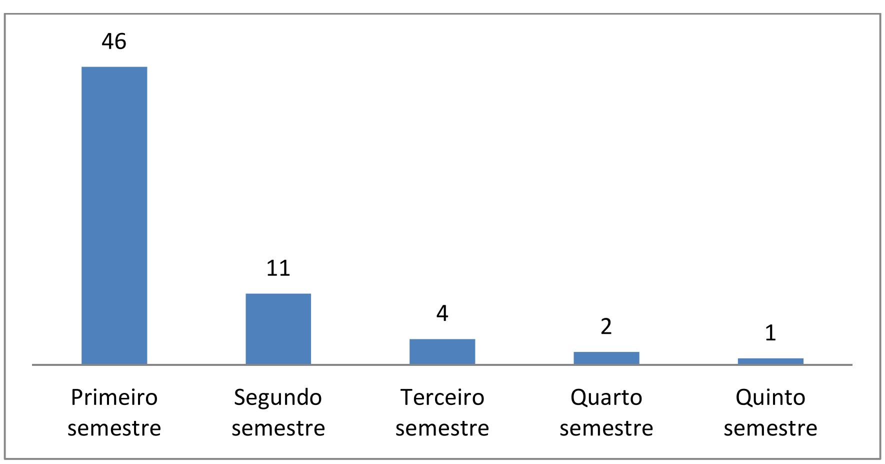


Fonte: Dados da pesquisa

Além desses, um aluno respondeu à questão colocando o nome da disciplina 4115M-04 - Cálculo Diferencial e Integral I, ou seja, não declarou o curso ao qual está vinculado.

Para a questão 3, relativa ao semestre cursado pelo aluno, os resultados são apresentados na Figura 19:

Figura 19 – Semestre cursado pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se observar, a partir das respostas à questão 2, que a maioria (91%) dos alunos cursa alguma das engenharias. Além disso, 72% deles estão no primeiro semestre, o que indica que estão frequentando pela primeira vez a disciplina de Cálculo I.

As questões 4 a 8 tiveram suas respostas computadas pelo próprio ambiente MOODLE, sendo apresentadas nas Figuras 20 a 24, a seguir:

Figura 20 – Respostas à questão 4

4 Como você avalia o conhecimento matemático adquirido no Ensino Fundamental e Médio?

Resposta	Média	Total
Ótimo	5%	3
Muito Bom	30%	19
Bom	34%	22
Regular	25%	16
Péssimo	6%	4
Total	100%	64/64

Fonte: Elaboração da autora

Pelas respostas, nota-se que apenas 31% dos alunos consideraram que seu conhecimento matemático adquirido durante o Ensino Fundamental e Médio é regular ou péssimo, enquanto os restantes julgaram ser bom, muito bom ou ótimo. Esses resultados são consistentes com as taxas de acerto nas nove questões do teste “Questões 1”, que foi disponibilizado no MOODLE, já que a maioria das questões desse teste teve altos índices de acertos.

Figura 21– Respostas à questão 5

5 No Ensino Fundamental e Médio, qual era sua opinião sobre a disciplina de Matemática?

Resposta	Média	Total
Muito fácil	2%	1
Fácil	36%	23
Média	52%	33
Difícil	6%	4
Muito Difícil	5%	3
Total	100%	64/64

Fonte: Elaboração da autora

Na questão 5, vê-se que apenas 11% dos alunos consideraram ser a Matemática do Ensino Fundamental ou Médio uma disciplina difícil ou muito difícil. Também, se pode considerar esse resultado como esperado, uma vez que a maioria desses alunos frequenta cursos que utilizam muito a Matemática e, assim, precisam ter uma compreensão razoável da disciplina para poderem concluir os estudos.

Figura 22 – Respostas à questão 6

6 Dentre os conteúdos listados a seguir, assinale aqueles que você considera mais importantes para a resolução de problemas em Matemática:

Resposta	Média	Total
frações	13%	34
fatoração	12%	31
produtos notáveis	9%	23
polinômios	6%	17
operações e suas propriedades	17%	46
trigonometria	13%	35
geometria	12%	32
funções	17%	46

Fonte: Elaboração da autora

Na questão 6, observou-se que os alunos consideraram a maioria dos conteúdos apresentados como opções de respostas igualmente importantes para a resolução de problemas em Matemática, com destaque para funções, operações e suas propriedades. Também se considera esperada essa resposta visto que o conteúdo de funções estava sendo estudado no momento da realização do questionário.

Figura 23 – Respostas à questão 7

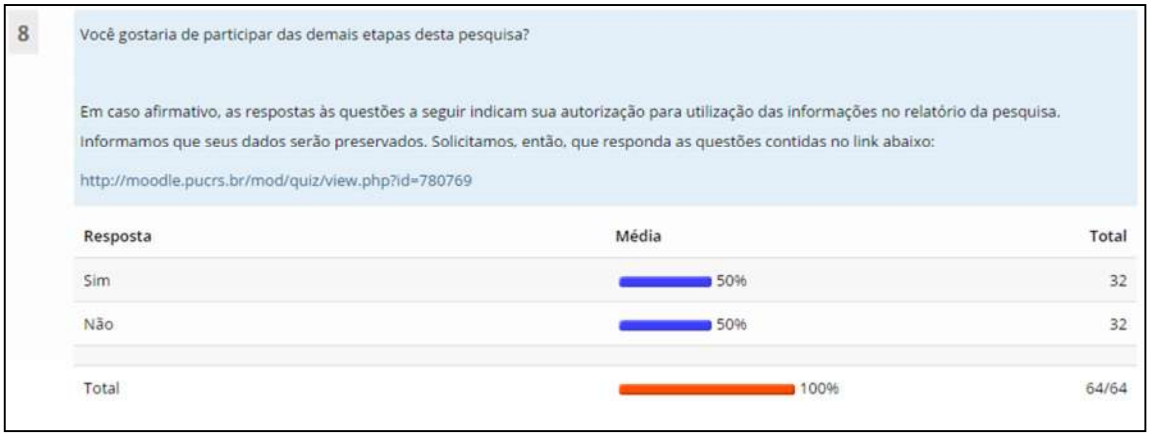
7 Dentre os conteúdos listados a seguir, assinale aqueles em que você, usualmente, tem dificuldades:

Resposta	Média	Total
frações	6%	8
fatoração	5%	7
produtos notáveis	10%	13
polinômios	14%	19
operações e suas propriedades	5%	6
trigonometria	18%	24
geometria	15%	20
funções	27%	36

Fonte: Elaboração da autora

Na questão 7, as funções também foram apontadas como o conteúdo no qual os alunos têm mais dificuldades, seguido de trigonometria. Surpreendentemente, apenas 5% dos estudantes disseram ter dificuldades nas operações e propriedades e 6%, em frações, quando, pelas respostas ao teste “Questões 1”, constatou-se que foram cometidos muitos erros relacionados a esses tópicos. Isso pode significar que os alunos não notam que muitas de suas dificuldades nos conteúdos mais avançados possuem origem em falta de domínio dos conteúdos básicos.

Figura 24 – Respostas à questão 8


8

Você gostaria de participar das demais etapas desta pesquisa?

Em caso afirmativo, as respostas às questões a seguir indicam sua autorização para utilização das informações no relatório da pesquisa. Informamos que seus dados serão preservados. Solicitamos, então, que responda as questões contidas no link abaixo:

http://moodle.pucrs.br/mod/quiz/view.php?id=780769

Resposta	Média	Total
Sim	50%	32
Não	50%	32
Total	100%	64/64

Fonte: Elaboração da autora

Na questão 8, a metade (32) dos alunos indicou que não queria participar da próxima etapa da pesquisa. Porém, observou-se que, posteriormente, um número maior de estudantes responderam as questões do teste “Questões 1”.

5.2 Preparação do Teste “Questões 1”

O teste “Questões 1” foi planejado com base em resultados de pesquisas anteriores e em adaptações de exercícios de livros didáticos de Matemática; cada questão tinha cinco alternativas, sendo uma delas a correta. É importante salientar que as questões formuladas permitem, em função da resposta do aluno, identificar um tipo específico de erro cometido sobre o conteúdo envolvido. Em cada questão apontada a seguir, a alternativa em negrito é a correta e os parênteses, em itálico, representam os tipos de erros das demais possibilidades de resposta.

Questão 1: Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou 6/8 do caminho, Pedro 9/12; Ana, 3/8 e Maria 4/6. Os amigos que se encontraram no mesmo ponto do caminho são:

a) **João e Pedro**

b) João e Ana (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
c) Ana e Maria (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
d) Pedro e Ana (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
e) João e Maria (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)

A questão exigia o conhecimento de simplificação de frações (6/8 e 9/12 são frações equivalentes a 3/4). No planejamento, foram elencadas cinco das possibilidades de combinação de quatro elementos, dois a dois. A resposta correta indica que os dois primeiros amigos estavam no mesmo ponto do caminho e as erradas envolvem dificuldades na simplificação ou não reconhecimento de frações equivalentes. Uma possibilidade para os erros nas alternativas **b** e **d** pode ser o obstáculo representado pela palavra "mesmo", no enunciado, que pode ter levado o aluno a tomar as duas frações que têm denominador igual (alternativa **b**), ou que tenha simplificado a fração 9/12, obtendo ¾, que comparou com os 3/8 e analisou como "um mesmo numerador" (alternativa **d**).

Questão 2: Decompondo o polinômio $P(x) = 5x^2 + 5x - 30$ em fatores do 1º grau, obtém-se:

a) 5(x-5)(x-3) (*cálculo de raízes de equação do segundo grau – fórmula de Báskhara ou Soma e Produto*)
b) 5(x-2)(x+3)
c) 5(x+2)(x-3) (*fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes*)
d) 5(x+5)(x+3) (*cálculo de raízes de equação do segundo grau – fórmula de Báskhara ou Soma e Produto*)
e) 5(x-2)(x-3) (*fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes*)

Nessa questão, a alternativa correta indica que o aluno sabe determinar as raízes de uma equação polinomial de segundo grau (usando a fórmula de Báskhara ou a soma e produto das raízes) e fatorar o polinômio, segundo o Teorema Fundamental da Álgebra. Nas demais alternativas, o aluno pode ter trocado o sinal de uma ou de ambas as raízes ou, no caso das alternativas a e d, pode ter errado o cálculo dessas raízes.

Questão 3: Qual(is) o(s) valor(es) de x que satisfaz(em) a sentença $|x - 2| < 1$?

a) x < 3 (*definição e propriedades de módulo*)
b) x < -1 (*definição e propriedades de módulo + resolução de inequações*)
c) 1 < x < 3
d) x = 2 (*definição e propriedades de módulo + resolução de inequações*)
e) -1 < x < 1 (*definição e propriedades de módulo*)

Nessa questão, o aluno deveria saber a definição de módulo e, também, a propriedade que afirma: se $|x| < b$, então –b < x < b. Além disso, deveria saber resolver uma inequação, pois, de $|x - 2| < 1$, deveria escrever -1 < x − 2 < 1 e resolver ambas as inequações. Assim, nas alternativas, foram indicadas essas possibilidades: em **a**, o aluno terá resolvido somente a inequação à direita; em **b**, terá resolvido a inequação à esquerda e trocado o sinal de desigualdade; em **d**, terá igualado a zero o módulo; em **e**, terá desconsiderado o termo (x-2), usando somente x na propriedade citada.

Questão 4: *O valor de x na equação* $(x + 1)(x + 2) = (x + 5)^2$ *é:*

a) 23 (*produto notável+ propriedade distributiva*)
b) -23/7
c) 23/3 (*produto notável*)
d) -23/10 (*propriedade distributiva*)
e) 23/7 (*resolução de equações*)

Nesta questão, o aluno deveria usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para multiplicar os binômios do lado esquerdo da igualdade e efetuar um produto notável no lado direito (que é um caso de aplicação da propriedade distributiva), para então resolver a equação. Na alternativa **a**, o estudante poderia ter errado o produto notável, efetuando $(x+5)^2$ como x^2+25, esquecendo, ainda, de dividir o segundo membro pelo coeficiente do primeiro ao final da resolução; na **c**, teria errado o produto notável, efetuando $(x+5)^2$ como x^2+25; na **d**, teria errado o produto $(x + 1)(x + 2)$, considerando-o como $x^2 + 2$; na **e**, teria feito um erro de sinal.

Questão 5: *O valor de x na equação* $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$ *é:*

a) 21/5 (*propriedade distributiva*)

b) 27/5 (*propriedade distributiva*)

c) 102/10 (*propriedade distributiva + resolução de equações*)

d) 18/10 (*propriedade distributiva + resolução de equações*)

e) -27/5

Novamente, nessa equação o aluno deveria usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para resolver a equação, mas ainda teria de saber como adicionar frações algébricas.

Questão 6: Se $x \neq 2$ e $x \neq 0$ então a expressão $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$ pode ser escrita como

a) x + 3 (*simplificação de frações algébricas*)

b) $\boldsymbol{\frac{x+3}{8}}$

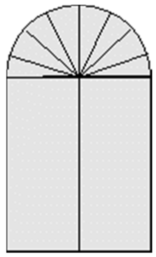
c) 8x (*simplificação de frações algébricas*)

d) $\frac{4}{x+3}$ (*simplificação de frações algébricas*)

e) 16 (*simplificação de frações algébricas*)

Nessa questão, o aluno deveria colocar termos em evidência no numerador e no denominador, para poder simplificar a fração algébrica. Efetivamente, pode-se pensar que também é um erro relacionado à propriedade distributiva, haja vista que se pode considerar que colocar o fator x em evidência em uma expressão do tipo ax^2+bx corresponde a escrever: x(ax+b), ou seja, é o "outro membro" da lei da distributividade. Assim, os erros correspondentes às alternativas a, c, d, e podem ser pensados como originados por dificuldades com a propriedade distributiva e com a simplificação de frações.

Questão 7: A figura a seguir mostra uma janela em que a parte superior é formada por um semicírculo e a parte inferior por um retângulo, cuja altura h possui o dobro da medida da base b.



A medida da altura total da janela é

a) $\frac{3b}{2}$ (*adição de frações algébricas*)

b) $\mathbf{\frac{5b}{2}}$

c) $\frac{b}{2}$ (*sobreposição de figuras*)

d) *2b* (*sobreposição de figuras*)

e) *b* (*adição de frações algébricas*)

Essa questão envolve o conhecimento da nomenclatura relacionada a medidas de figuras planas, pois, sendo a metade da medida da base igual ao raio, então a medida da altura total é h mais $\frac{b}{2}$, ou seja, $2b + \frac{b}{2}$, igual a $\frac{5b}{2}$. Na alternativa **a**, por exemplo, o aluno teria errado a adição de frações, considerando $2b + \frac{b}{2}$ igual a $\frac{3b}{2}$.

Questão 8: O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:

a) 5.000 (*resolução de sistemas*)

b) 13.000

c) 18.000 (*resolução de sistemas*)

d) 23.000 (*resolução de sistemas*)

e) 41.000 (*resolução de sistemas*)

Nessa questão, o aluno deveria saber resolver um sistema de duas equações a duas incógnitas, depois de ter entendido como modelá-lo. De qualquer forma, as alternativas incorretas indicam dificuldades nessa resolução.

Questão 9: Um produto foi revendido por R$ 1.035,00, com um lucro de 15% sobre o preço de compra. Esse produto foi adquirido por

a) R$ 1.020,00 (*porcentagem e lucro*)
b) R$ 1.000,00 (*porcentagem e lucro*)
c) R$ 935,00 (*porcentagem e lucro*)
d) R$ 900,00
e) R$ 835,00 (*porcentagem e lucro*)

Essa questão, envolvendo porcentagem, apresenta, entre as alternativas incorretas, uma dificuldade recorrente no trabalho com problemas de diferenciais no Cálculo I (CURY, 2007), a saber, a ideia de que 15% é o mesmo que 15. Na alternativa **a**, por exemplo, apenas é efetuada a diferença entre o preço de venda, 1035,00 e o valor 15 (considerado um valor monetário), obtendo-se 1020,00. Outros erros correspondem a dificuldades nos conceitos de preço de compra, preço de venda e lucro.

Têm-se nove questões com cinco alternativas cada, sendo uma correta, ou seja, são 36 alternativas incorretas. Contabilizando as ocorrências de cada possível tipo de erro no teste "Questões 1" (isto é, quantas alternativas ao longo do teste referem-se a cada tipo de erro), obtém-se o Quadro 7:

Quadro 7 – Distribuição de possíveis erros do teste “Questões 1”

Tipos de erros encontrados	Ocorrência no questionário
E1 – Simplificação de frações/frações equivalentes	4
E2 – Cálculo de raízes de equação do segundo grau	2
E3 – Fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes	2
E4 – Definição e propriedades de módulo	4
E5 – Resolução de inequações	2
E6 – Propriedade distributiva	6
E7 – Produto notável	2
E8 – Resolução de equações	3
E9 – Simplificação de frações algébricas	4
E10 – Adição de frações algébricas	2
E11 – Sobreposição de figuras	2
E12 – Resolução de sistemas	4
E13 – Porcentagem e lucro	4

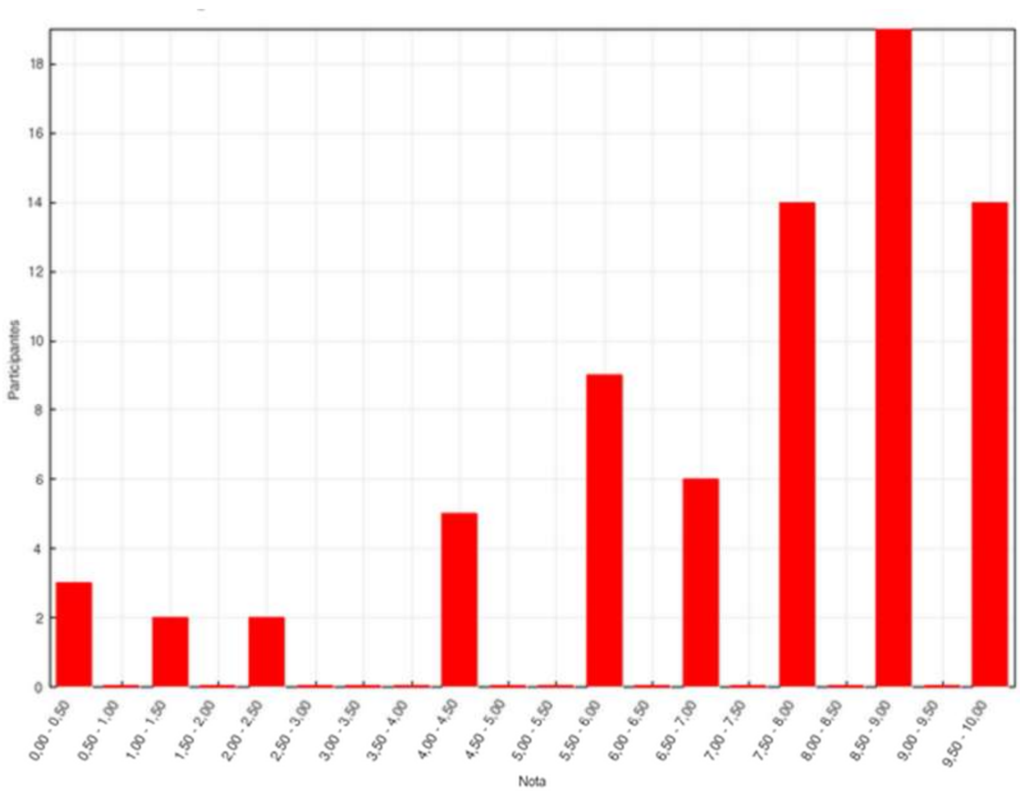
Fonte: Dados da pesquisa

5.3 Apresentação e Análise das Respostas ao Teste “Questões 1”

Após responder as perguntas iniciais, descritas na seção 5.1, os alunos envolvidos na pesquisa deveriam partir para o segundo bloco de questões, chamado “Questões 1”, apresentado na seção 5.2, que foi construído com a ferramenta “questionário” do MOODLE e tratava de temas de matemática básica.

No momento da análise, notou-se que 74 alunos haviam respondido ao teste. Para que fosse observado o aproveitamento de um modo geral, solicitou-se que o MOODLE fornecesse uma nota para cada aluno. Como o questionário era composto de nove perguntas de escolha simples, a cada resposta correta foi atribuída uma pontuação de 1,11[15] e, a cada resposta incorreta, uma pontuação de 0,00. Após a contagem dos pontos, obteve-se o gráfico da Figura 25:

Figura 25 – Notas dos alunos no teste "Questões 1"



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro 8, a seguir, tem-se o número e o percentual de alunos que erraram cada questão:

[15] 10 pontos, divididos igualmente por nove questões.

Quadro 8 – Distribuição dos erros no teste "Questões 1"

Questões	Número de alunos que erraram, calculado a partir da média dada pelo MOODLE	
	n	%
Q1	8	11
Q2	18	24
Q3	32	43
Q4	19	26
Q5	39	53
Q6	29	39
Q7	20	27
Q8	9	12
Q9	9	12

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o quadro, chama a atenção o fato de que, nas Questões 3, 5 e 6, houve maior número de erros, condizendo com os resultados do semestre anterior e com os conteúdos abordados nos materiais que já haviam sido produzidos (propriedade distributiva, módulos e inequações e simplificação de frações algébricas). A nota média dos alunos nesse teste foi 7,25.

Contabilizando a quantidade de alunos que marcou cada uma das alternativas, em cada questão, tem-se o Quadro 9:

Quadro 9 – Contagem das respostas dos alunos

Alternativa	Questões								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	67	2	15	4	4	5	9	1	4
B	1	56	2	55	27	45	54	65	0
C	1	12	41	3	3	7	1	3	1
D	1	0	6	1	2	4	6	2	65
E	2	1	5	8	35	8	1	0	1
Em branco	2	3	5	3	3	5	3	3	3

Fonte: Dados da pesquisa

Comparando esse Quadro 9 com as informações sobre os tipos de erros apresentadas no planejamento das questões (item 5.2), pode-se construir o Quadro 10, o qual indica o número de alunos que cometeram cada tipo de erro:

Quadro 10 – Contagem das ocorrências de cada tipo de erro

Tipo de erro	Número de alunos
E1 - Simplificação de frações- frações equivalentes	5
E2 - Cálculo de raízes de equação do segundo grau	2
E3 - Fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes	13
E4 - Definição e propriedades de módulo	**29**
E5 - Resolução de inequações	8
E6 - Propriedade distributiva	**39**
E7 - Produto notável	7
E8 - Resolução de equações	11
E9 - Simplificação de frações algébricas	**24**
E10 - Adição de frações algébricas	10
E11- Sobreposição de figuras	7
E12 - Resolução de sistemas	6
E13 - Porcentagem e lucro	6

Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim, pode-se notar que os erros mais frequentes são aqueles em negrito, que correspondem às questões 3, 5 e 6, respectivamente sobre módulo, propriedade distributiva e simplificação de frações algébricas; ou seja, essas ocorrências estão de acordo com o que se previu no primeiro semestre de 2014 na confecção de materiais.

5.4 Utilização dos Objetos de Aprendizagem

A partir dos erros detectados no teste “Questões 1”, foram disponibilizado no MOODLE materiais de apoio para a revisão dos conteúdos nos quais os alunos tiveram dificuldades. Os estudantes receberam e-mails individuais, informando o que deveria ser acessado, mas todos foram convidados a explorarem os materiais e realizarem as atividades propostas em cada um dos links.

Os materiais de apoio utilizados foram o objeto de aprendizagem sobre propriedades das operações, construído na primeira etapa desta pesquisa e apresentado no capítulo 4, e dois materiais construídos com auxílio dos bolsistas, relativos a módulos e inequações (Apêndice G), bem como trabalho com frações algébricas (Apêndice H). Optou-se pela confecção de materiais relativos a esses tópicos por serem erros bastante frequentes encontrados na correção do teste, conforme Quadro 10.

Além disso, para os demais erros encontrados, foram disponibilizados mais dez objetos buscados em rede. A lista desses materiais encontra-se no Apêndice I. Procurou-se selecionar materiais que fossem mais compatíveis com os preceitos para a confecção de objetos de aprendizagem, apresentados no item 2.5.

A Figura 26, a seguir mostra a disponibilização dos objetos no MOODLE.

Figura 26 – Objetos de Aprendizagem disponibilizados no MOODLE

Fonte: Dados da pesquisa

Contabilizando-se os acessos através do MOODLE, percebeu-se que 39 alunos interagiram com os objetos no prazo estabelecido para essa atividade. Este número oscilou um pouco durante a realização das outras atividades, quando os alunos sentiram necessidade de ter os conhecimentos envolvidos, e optou-se por estabelecer um prazo para a realização de cada uma.

5.5 Apresentação e Discussão das Interações nos Fóruns

Após a realização do teste “Questões 1” e do tempo estipulado para acesso aos objetos de aprendizagem, foram criados fóruns no ambiente MOODLE com questões para discussão, referentes a cada tipo de erro[16]. Sendo assim, contou-se com 13 fóruns, ou 13 tópicos de discussão, que foram alimentados pelos alunos e pela professora-pesquisadora.

As Figuras de 27 a 35, a seguir, mostram a interface de acesso a cada fórum na plataforma MOODLE, com o número de comentários, bem como as perguntas norteadoras de cada um deles:

Figura 27 – Fóruns: Propriedade Distributiva e Produto Notável

Tópico	Autor		Comentários	Não lida
Produtos Notáveis		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	30	0
Propriedade Distributiva		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	27	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questões propostas para discussão:

1) É possível desenvolver as expressões $\mathbf{(3x+1)^2}$ e $\mathbf{(x-1).(x+1)}$ sem fazer uso da propriedade distributiva? Como seria?
2) Você concorda que foi usada a propriedade distributiva nas igualdades abaixo? Justifique.
   a) $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$
   b) $(x – 3) . (x – 2) = x^2 -2x -3x +6$

[16] Muitas das questões propostas nos fóruns foram retiradas dos problemas propostos na tese de Noguti (2014).

Figura 28 – Fóruns: Módulos e Inequações

Tópico	Autor		Comentários	Não lida
Módulo		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	16	0
Inequações		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	18	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questões propostas para discussão:

1) Como se inicia a resolução da equação |5x-3| = 12? A resposta será única?
2) O que você considera um bom raciocínio inicial para resolver a inequação (x+3)(x-2) < 0?

Figura 29 – Fóruns: Fatoração, simplificação e adição de frações algébricas

Tópico	Autor		Comentários	Não lida
Soma de frações algébricas		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	15	0
Fatoração		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	10	0
Simplificação de frações algébricas		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	12	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questões propostas para discussão:

1) Explique como devemos proceder para somar as frações abaixo:

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x-1}{x}$$

2) Como você faria para fatorar o polinômio $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$? Este mesmo procedimento poderia ser usado para fatorar o polinômio $y^2 - 8y + 15$?
3) Como se poderia simplificar a fração abaixo?

$$\frac{x^2-4}{x+2}$$

Figura 30 – Fórum: Simplificação de frações

Tópico	Autor	Comentários	Não lida ✓
Resolvendo um problema	THAÍSA JACINTHO MÜLLER	11	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Observe a situação abaixo:

   Marcos, Pablo e Jamile são garçons. Eles juntam suas gorjetas, colocando-as em uma jarra grande e, no final do dia de trabalho, cada um deles leva 1/3 do dinheiro. Um dia, ao ir embora, Marcos levou 1/3 do dinheiro do pote. Pablo, não sabendo que Marcos já tinha tomado a sua parte, levou 1/3 do dinheiro do pote. Jamile, não sabendo que os colegas já haviam levado suas partes, tomou 1/3 do dinheiro do pote. Restaram R$ 16,00 no pote. Quanto dinheiro tinha no pote antes deles retirarem suas partes?

   Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Figura 31 – Fórum: Resolução de sistemas

Tópico	Autor	Comentários	Não lida ✓
Resolvendo um problema	THAÍSA JACINTHO MÜLLER	14	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Observe a situação abaixo:

   Noemi tem certa quantia em um banco. Sua irmã Alice tem R$500,00 a mais. Juntas, elas têm R$3.000,00. Quanto tem Noemi? Quanto tem Alice?

   Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Figura 32 – Fórum: Sobreposição de figuras

Tópico	Autor		Comentários	Não lida
Resolvendo um problema		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	10	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Explique como você resolveria o problema abaixo:

   Calcule a área e o perímetro da figura abaixo, sabendo que é formada por um quadrado de lado 5 cm e um triângulo equilátero:

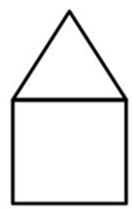


Figura 33 – Fórum: Porcentagem e lucro

Tópico	Autor		Comentários	Não lida
Resolvendo um problema		THAÍSA JACINTHO MÜLLER	20	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Observe a situação abaixo:

   Mike acabou de comprar uma bicicleta nova. Incluindo 6% de imposto sobre a venda, Mike pagou R$296,80 pela bicicleta. A loja acrescentou R$20,00 ao custo para cobrir o trabalho de montagem, o que deu margem de um lucro de 40%. Quanto custou a bicicleta para a loja?

   Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Figura 34 – Fórum: Raízes de equações do segundo grau

Tópico	Autor	Comentários	Não lida ✓
Questão sobre o assunto	THAÍSA JACINTHO MÜLLER	22	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Como você faria para encontrar as raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$?

Figura 35 – Fórum: Resolução de equações

Tópico	Autor	Comentários	Não lida ✓
Resolvendo uma equação	THAÍSA JACINTHO MÜLLER	17	0

Fonte: Dados da pesquisa

Questão proposta para discussão:

1) Como se inicia a resolução da equação abaixo?

$$x - 1 = \sqrt{x^2 + 4}$$

Com relação à participação dos alunos nos fóruns, foi contabilizada a interação de 45 estudantes, sendo que a maioria deles fez mais de uma postagem ao longo do período estipulado para participação nessa atividade.

Notou-se que muitos alunos, após acessarem os fóruns das questões, voltaram a acessar os objetos de aprendizagem, pois quando surgia alguma dúvida que estava no material de apoio, era indicado ao aluno acessar novamente o material.

Toda a discussão sobre as questões foi mediada pela professora-pesquisadora. Praticamente todas as questões buscaram fazer com que o aluno raciocinasse, não apenas reproduzisse algo que já havia estudado. Sendo assim, o conteúdo envolvido teve maior destaque e a conversa nos fóruns permitiu que se chegasse a uma conclusão em quase todos os casos. No final, para as questões que ainda não haviam sido resolvidas, foi postada a resolução e aberta a possibilidade de a professora-pesquisadora continuar a solucionar dúvidas.

Entre as questões propostas para discussão, a que mais gerou controvérsias foi a relativa à porcentagem e lucro, o que se refletiu também nas etapas seguintes da pesquisa, pois, como se verá mais adiante, este foi o único tópico em que os alunos não melhoraram seu desempenho.

Além disso, durante as discussões em cada um dos fóruns, foi possível observar que muitas das dificuldades que os alunos apresentaram tinham origem na falta de subsunçores e em imagens distorcidas ou definições equivocadas dos conteúdos. A seguir, são descritas e analisadas as postagens nos fóruns sobre “Propriedade distributiva”, “Módulos” e “Simplificação de Frações algébricas”. Esses fóruns foram escolhidos pelo fato de se referirem aos conteúdos nos quais os alunos tiveram mais dificuldades, segundo o Quadro 10. Nesses três fóruns, optou-se por digitar as postagens dos alunos e da professora-pesquisadora, visto que o processo de copiar e colar as telas do MOODLE originou imagens pouco nítidas. Além disso, cada postagem de alunos traz seu nome e evitou-se identificá-los, sendo apresentados, apenas, pelas letras A, B e C (respectivamente, em cada um dos três fóruns), seguidas de um número. Mesmo quando um determinado aluno é mencionado diretamente pela professora-pesquisadora, em suas postagens, o nome foi substituído pela letra que aqui o identifica.

Os demais fóruns são apresentados no Apêndice J, em que foram copiadas as telas, com o cuidado de manter o anonimato dos participantes.

5.5.1 Detalhamento do Fórum sobre Propriedade Distributiva

Apenas para exemplificar as telas do MOODLE nos fóruns, nesse primeiro é apresentada, abaixo, na Figura 36, a primeira intervenção[17] do aluno A1, seguida da digitação dessa postagem e das seguintes do fórum:

Figura 36 – Postagem do aluno A1


Re: Propriedade Distributiva
por [redacted] quinta, 9 Out 2014, 18:59

Concordo, pois a propriedade distributiva relaciona operações, assim a multiplicação pode ser distribuída pelas parcelas da adição. É o método "chuveirinho" onde cada termo é multiplicado com o outro da outra equação.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Fonte: Dados da pesquisa

Postagem do aluno A1: *"Concordo, pois a propriedade distributiva relaciona operações, assim a multiplicação pode ser distribuída pelas parcelas da adição. É o método "chuveirinho" onde cada termo é multiplicado com o outro da outra operação."*

Postagem do aluno A2: *"A) Foi apenas colocado em evidência o 2x; B) Foi feito o ´chuveirinho`."*

Postagem do aluno A3: *"Concordo, pois na letra A botou-se em evidência, para eliminar o expoente, distribuindo o x em 2 partes. Já na letra B ´abriu-se` a equação com o método do ´chuveirinho` obtendo uma equação de 2º grau".*

Nota-se que esses três alunos têm uma imagem de conceito da propriedade distributiva que leva em conta elementos corporificados (TALL, 2013), especificados pela palavra "chuveirinho", expressão usada por eles para expressar o que já foi apresentado na Figura 1, p. 29.

Postagem do aluno A3: *"Concordo, pois na letra A foi colocado em evidência, que é um método da propriedade distributiva e na letra B abriu a equação, que também é".*

---

[17] Conforme colocado no item anterior, a questão proposta para discussão neste fórum era: *É possível desenvolver as expressões $(3x+1)^2$ e $(x-1).(x+1)$ sem fazer uso da propriedade distributiva? Como seria?*

Postagem da professora-pesquisadora: *"E esse colocar em evidência, será que pode também ser chamado de aplicação da propriedade distributiva? Lembrem que a igualdade é uma ´via de duas mãos`. Tem uma dica para isso no material sobre esse assunto".*

Postagem do aluno A4: *"A) se bota em evidencia, pq era de interesse tirar o expoente 2 da variável x. B)* $x.x=x^2$*;* $x. -2= - 2x$*;* $-3. x= - 3x$*;* $-3.-2= -6$*;* $x^2-2x-3x+6$*".*

Postagem da professora-pesquisadora: *"Pessoal, vamos seguir a discussão a partir dos comentários dos colegas! Até o momento, todos que se manifestaram, disseram que há aplicação da propriedade distributiva... vamos eliminar a palavra "chuveirinho". Mas alguns se referiram a ´por em evidência`. O que isso tem a ver com a propriedade distributiva? Ela não significa ´distribuir`, ao invés de ´por em evidência`?".*

Postagem do aluno A5: *"Acredito que ´por em evidência` seja o processo inverso da distributiva, ou seja, desfazer a distribuição. Veja bem: no exemplo A, para por em evidência o 2x foi necessário desfazer a distributiva de* $2x^2-4x$*".*

Postagem do aluno A6: *"Concordo que a propriedade distributiva fora utilizada na letra B, pois foi multiplicada as duas propriedades dentro dos parênteses para que achasse a fórmula, porém na letra A foi o contrário da B, que foi colocado o 2x em evidência".*[18]

Nota-se, nesse diálogo, que a professora-pesquisadora desafiou os estudantes, para verificar se eles tinham uma definição do conceito de distributiva ou se apenas estavam ligados à representação figural. A resposta do aluno A5 mostra um subsunçor bem estabelecido e a ancoragem de novos conceitos sobre essa propriedade, mas A6 ainda não tem clara a definição.

Postagem da professora-pesquisadora: *"E se lermos a igualdade* $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$ *como* $2x(x-2) =2x^2- 4x$*? Neste caso faz sentido falar em processo inverso da distributiva? Observem que isto é perfeitamente possível numa igualdade, pois se a=b então b=a".*

Postagem do aluno A7: *"Acho que não seria um inverso da distributiva, pois ambos só trocaram o lado na igualdade, não?".*

Postagem do aluno A8: *"Isto não seria o processo inverso da distributiva, pois as duas equações são iguais, só muda o lado na igualdade, sem fatoração em nenhuma das duas".*

---

[18] Optou-se por copiar as respostas da forma como foram postadas.

Postagem do aluno A9: *"Não, pois só foi alterado o lado das operações na igualdade. A propriedade não se inverte, continua a mesma coisa".*

Postagem do aluno A10: *"Não seria um processo inverso da distributiva e sim uma forma mais simplificada".*

Postagem do aluno A11: *"Na questão A, foi colocado em evidência o fator comum do $2x^2$-4x. Na questão B, foi feita a distributiva do produto. Acredito que não há um processo inverso à distributiva, pois a equação continua a mesma nos dois lados da operação".*

Novamente a professora-pesquisadora instigou os estudantes a pensarem sobre o significado da palavra "inverso", pois notou que eles a usavam como se estivessem se referindo aos membros de uma equação. É interessante notar que os alunos procuram opinar, ainda que usando expressões incorretas. Por exemplo, ao falar em "dois lados da operação", A11 parece considerar que o sinal de igualdade indica uma operação, equívoco bastante encontrado em pesquisas (BURGELL, 2012).

Postagem do aluno A12: *"Sim, apesar de neste caso a PD estar sendo utilizada apenas para ´simplificar` uma equação".*

Postagem do aluno A13: *"Na primeira equação o 2x foi colocado em evidência, que aplicando o chuveirinho resultaria naquela equação de grau 2. Na segunda equação aplicando a propriedade de que cada termo do parênteses é multiplicado pelos outros termos do outro, resulta a outra equação".*

Postagem do aluno A14: *"Não necessariamente, a letra A pode ser dita sim, ter sido colocado em evidência e ter sido feita a propriedade distributiva, pois o 2x acaba sim, multiplicando os valores dentro dos parênteses".*

Postagem do aluno A15: *"Sim, a letra A foi aplicado a propriedade da distributiva pelo método de colocar em evidência e na letra B também pelo método ´chuveirinho`."*

Postagem da professora-pesquisadora: *"Pessoal, antes de postar, leiam as respostas, minhas e dos colegas. Vocês viram o objeto de aprendizagem que trata deste assunto? E mais uma vez, vamos eliminar a palavra chuveirinho, ok? Não é o termo correto".*

Notando que os alunos estavam tentando, cada um, mostrar sua participação, mas às vezes com contribuições que repetiam as anteriores e sem cuidados com a linguagem matemática, a professora-pesquisadora se preocupou em direcioná-los para a leitura das telas do objeto postado, que tinha as explicações e as expressões corretas para a propriedade. A seguir, encerrou a discussão, visto que, pelo andamento das postagens, já haviam se passado 20 dias desde o início da discussão.

Postagem final da professora-pesquisadora para esse fórum: *"Para encerrarmos a discussão: é fato que, nos dois itens, foi usada a Propriedade Distributiva. Talvez no segundo de forma mais explícita, mas também no primeiro, uma vez que a igualdade pode ser lida tanto da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Isso consta, inclusive, no objeto de aprendizagem relativo às propriedades das operações. Após todas as postagens, creio que o problema foi resolvido. Quem ainda tiver dúvidas, pode seguir em contato".*

Comparando os erros analisados e as postagens desses estudantes, fica claro que alguns alunos possuem apenas a imagem do conceito "propriedade distributiva", apelando para o esquema com flechas da Figura 1, que chamam de "chuveirinho". Porém, a falta da definição de propriedade distributiva causa problemas ao resolver questões que envolvam esse conteúdo, quando precisam identificar, por exemplo, que "colocar em evidência" também é usar a propriedade distributiva.

5.5.2 Detalhamento do Fórum sobre Módulo

Assim como no item 5.5.1, apresenta-se aqui a digitação das postagens dos alunos e da professora-pesquisadora. Neste fórum, a pergunta feita inicialmente pela professora-pesquisadora era: *Como se inicia a resolução da equação |5x-3| = 12? A resposta será única?*

Postagem do aluno B1: *"Partindo da definição de módulo tem-se:*

$$\begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Logo,

1) $5x - 3 \geq 0$
$5x - 3 = 12$
$x = 3$

2) $5x - 3 < 0$
$-(5x - 3) = 12$
$-5x + 3 = 12$
$-5x = 9\ (-1)$
$x = -9/5$

Portanto, as duas respostas que satisfazem a equação são: x = 3 e x = -9/5."

Postagem da professora-pesquisadora: "*Todos concordam com a solução da colega? A resposta de uma equação com módulo pode ser negativa?"*

Postagem do aluno B2: *"Não, pois modulo sempre dá resposta positiva!"*.

Nota-se que esse aluno não tem a definição bem formada do conceito de módulo, uma vez que se confunde com a pergunta da professora-pesquisadora, achando que o fato de x ser negativo faz com que o modulo seja negativo.

Postagem do aluno B3: *"Temos |x| = x, se x >= 0 e |x| = -x, se x < 0. Então temos como respostas:*

1) $5x - 3 \geq 12$
$5x \geq 12 + 3$
$x \geq 15/5$
$x \geq 3$

2) $-(5x - 3) < 12$
$-5x + 3 < 12$
$-12 + 3 > 5x$
$-9/5 > x$

|x| não deveria ser negativo, pois usamos -x para x < 0 para que o resultado não seja negativo. Não sei se está certo, mas acho que na 2 o x ficou negativo porque |x| é menor que 12 e não menor que 0. Essa questão me deixou meio confusa... ☹".

Postagem da professora-pesquisadora: *"B2, observa a parte final do que escreveu B3."*

Pergunta para o grupo: o que acontece se substituirmos o x pelos dois valores encontrados (3 e -9/5) na equação que foi dada?"

Postagem do aluno B4: *"O X poderá assumir estes dois valores, mas após encontrarmos o número final dentro do módulo, ele deverá ser transformado em positivo, caso seja negativo, e, se for positivo, permanecerá positivo.".*

Postagem da professora-pesquisadora: *"Mas quando substituirmos o x por estes dois valores, no módulo, vai dar uma resposta negativa?".*

Postagem do aluno B5: *"Substituindo:*

quando x=3;
|5x-3| = 12
|5(3)-3| = 12
|12| = 12

quando x=-9/5;
|5(-9/5)-3| = 12
|-12| = 12".

Nota-se, nesse diálogo, que a professora-pesquisadora procurou promover uma interação entre os estudantes, começando por solicitar que um lesse a resposta do outro. Por outro lado, os alunos B4 e B5 mostram que o módulo é um *já encontrado* para eles, pois conseguem lidar com a definição para darem suas respostas, ainda que B4 não se expresse de forma precisa.

Postagem do aluno B6: *"Tenho uma dúvida se quando eu substituir o x por -9/5 como fiz logo abaixo, eu sou obrigado a simplificar o 5*-9/5, cortando o 5 de cima pelo de baixo ou faço da outra forma?*

Se substituirmos o x por 3 obteremos:

*|(5*3)-3|=12*

|12|=12

Se substituirmos o x por -9/5 obteremos: DÚVIDOSA

|(5-9/5)-3|=12* *5/1-9/5=16, pois o mmc entre 1 e 5 é 5.*

|16-3|=12

|13|=12

O segundo valor de x não confere.

Ou

|(5-9/5)-3|=12*

simplifico os 5.

|-9-3|=12

|12|=12".

Postagem da professora-pesquisadora: *"Oi, B6! Observa que tu não podes fazer 5/1-9/5=16, pois se trata de uma multiplicação, e não de uma subtração. Sendo assim, a tua segunda opção é mais adequada, lembrando apenas, no final, que -9-3 = -12".*

Resposta do Aluno B6: *"Há bom, eu só deixei o menos 12 em módulo por isso coloquei ele positivo, mas seria -12 então?"*

Resposta da professora-pesquisadora: *"Não, o que eu quis dizer foi o seguinte: nas duas últimas linhas do teu texto, escreveste*

|-9-3|=12

|12|=12

O correto seria

|-9-3|=12

|-12|=12

já que -9-3 = -12. ☺"

Nova Resposta do Aluno B6: *"Compreendi , brigado agora vi meu erro."*

Nesta sequência, pode-se perceber que o aluno B6 manifestava a falta de experiências anteriores que configurassem um *já-encontrado*, tais como conhecimentos de adição e multiplicação de frações, para aplicar a definição de módulo, na qual ele também se equivocava, ao já tirar o sinal de menos de dentro do módulo antes de eliminar o respectivo símbolo. Essas dificuldades com as operações e a simbologia mostra que, em termos de desenvolvimento cognitivo, alguns desses estudantes que se manifestaram nesse fórum não estão, ainda, no *mundo operacional-simbólico*, o que, evidentemente, traz dificuldades para acompanhar uma disciplina como o Cálculo.

Postagem do aluno B7: *"Como é Módulo, terá duas respostas.*

5x-3=12, x=3 e 5x-3=-12, x=-9/5

A resposta pode ser negativa, pois vai estar dentro do módulo e não é a resposta da equação, mas sim do x que está dentro do módulo."

Postagem do aluno B8: *"Entendido, bom ler minhas dúvidas escritas pelos colegas. Obrigado!".*

Postagem final da professora-pesquisadora para esse fórum: *"Fechando a discussão feita pelo grupo: de acordo com tudo que foi exposto conclui-se que, de fato, existem duas respostas possíveis, que são x = 3 e x = -9/5. Caso alguém ainda tenha ficado em dúvida, pode se manifestar!".*

Conforme se pode observar nas postagens desses estudantes, alguns ainda não possuem a definição do conceito de módulo bem formada, o que pode ter prejudicado seu desempenho no teste "Questões 1". Com a interação dos colegas e da professora-pesquisadora, alguns tiraram suas dúvidas, o que parece ter contribuído para uma melhora no desempenho no teste "Questões 2".

5.5.3 Detalhamento do Fórum sobre Simplificação de Frações Algébricas

Novamente, apresenta-se nesta seção a digitação das postagens dos alunos e da professora-pesquisadora, bem como alguns comentários relacionados.

Neste fórum, a pergunta feita inicialmente pela professora-pesquisadora era: *Como se poderia simplificar a expressão* $\frac{x^2-4}{x+2}$ *?*

Postagem do aluno C1*: "Eu faria bhaskara que me dá: -2 e +2, depois.*

$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

simplifica numerador (x+2), com denominador (x+2) e fica:

$\frac{x-2}{1} = x - 2.$*"*

Postagem do aluno C2: *"Eu abriria o produto notável no numerador, que seria (x-2)(x+2), depois cortaria o (x+2) de cima com o debaixo, dai sobraria a resposta que seria (x-2)."*

Postagem do aluno C3: *"Faria a distributiva de x^2-4, o transformando em (x-2)(x+2), logo simplificaria o resultado, ficando x-2".*

Postagem do aluno C4: *"Basta enxergar que x^2+4=(x-2)(x+2) para depois simplificar".*

Postagem do aluno C5: *"Transformaria o x^2 -4 em (x-2)(x+2), depois cortaria os dois (x+2) e teria x-2"*

Postagem da professora-pesquisadora: "*Ok, concordo com todos que se manifestaram até o momento que podemos usar, no numerador, ou a fórmula de Báskhara ou a regra do produto notável para depois simplificar.*

Alguma outra possibilidade? Podemos simplificar um x do numerador com o x do denominador?"

Neste momento, a professora-pesquisadora tenta verificar se os alunos sabem, de fato, que não é possível simplificar a fração sem fatorar o numerador, e tenta também relacionar os conteúdos que estavam sendo trabalhados nos fóruns, chamando a atenção para uma possível aplicação de um produto notável, visto que havia alunos que tinham cometido mais de um erro no teste "Questões 1" e, portanto, haviam sido solicitados a participar de mais de um fórum.

Nova Postagem do aluno C2: *"Não, porque temos uma soma no numerador e no denominador, se tivéssemos um produto, por exemplo, daí sim poderíamos cortá-los."*

Nova Postagem do aluno C4: *"A subtração e a soma não permitem o corte."*

Nestas respostas, observa-se que os alunos possuem a ideia correta da simplificação, porém trabalham, ainda, apenas com a imagem do "corte", e não com a definição do conceito propriamente dita. Mostram, assim, aspectos do mundo *conceitual corporificado* (TALL, 2013), haja vista que manipulam mentalmente o cancelamento de termos percebendo-o como um "corte".

Postagem do aluno C6: *"Não, porque quando se tem uma soma no numerador e uma no denominador é impossível simplificar. Por exemplo, se tivesse uma soma no numerador e uma subtração no denominador, aí sim pode simplificar".*

Observa-se que o aluno C6 fez uma confusão sobre o que é permitido ou não na simplificação, uma vez que o fato de ter uma soma no numerador e uma subtração no denominador não é garantia de possibilidade de simplificação. Pode-se afirmar, assim, que para este aluno, a simplificação de frações algébricas ainda é um "a-encontrar".

Postagem do aluno C7: *"Não dá para cortar apenas um x do numerador com um do denominador, pois ambos há soma. Porém, se fatorar o numerador e obter (x-2)(x+2), então poderia cortar ambos os (x+2) e sobraria apenas (x-2).".*

Postagem do aluno C8: *"Não é possível simplificar um x do numerador com um do denominador pois é uma soma. Então, eu abriria o produto notável (x^2-4) = (x + 2) (x - 2). A fração ficaria: (x + 2) . (x - 2) / (x + 2). Como existe um produto no numerador, cortaria o (x + 2) do numerador e do denominador, tendo como resposta x - 2.".*

Postagem final da professora-pesquisadora para esse fórum: *"Encerrando a discussão: De fato, a resposta é x-2, uma vez que o numerador pode ser fatorado como (x+2)(x-2) e o fator x+2 será simplificado com o denominador.*

Em caso de dúvidas, entrem em contato novamente!".

Com as respostas dadas neste fórum, foi possível perceber que a maioria dos alunos têm ideia de como resolver o problema, uma vez que mencionaram a fatoração do numerador de algumas formas, ou calculando as raízes do polinômio correspondente ou usando produtos notáveis, fato que foi chamado atenção pela professora-pesquisadora.

A partir das postagens desses estudantes, é possível afirmar que a simplificação de frações algébricas precisa, de fato, ser mais trabalhada, pois alguns alunos ainda possuem apenas a imagem do conceito ou ainda não compreendem o processo, mas que a maioria já parece ter superado esta dificuldade.

Sendo este um conteúdo de Matemática do Ensino Fundamental, é esperado que os estudantes tenham domínio desse assunto, ainda mais que a simplificação de frações algébricas é base para a resolução de muitos problemas de Cálculo, tais como cálculo de limites, e de outras disciplinas de cursos da área de Ciências Exatas.

Acredita-se que os fóruns foram bastante ricos, uma vez que as discussões renderam frutos tanto no ambiente MOODLE como em sala de aula. No entanto, é importante destacar que muitos dos estudantes que se manifestaram nesses fóruns parecem apresentar um desenvolvimento cognitivo mais compatível com o mundo conceitual corporificado, pois não lidam bem com os símbolos. Além disso, também pode ser destacada a falta de subsunçores relacionados a conteúdos do Ensino Fundamental, que são essenciais para a aprendizagem do Cálculo. Mesmo assim, observou-se um melhor resultado no segundo teste sobre os tópicos discutidos, conforme mostrado a seguir.

5.6 Teste “Questões 2”

Após todas as etapas descritas até aqui, foi realizada a aplicação de um novo teste com conteúdos de Matemática Básica, chamado de “Questões 2” (Apêndice F), a fim de verificar se o auxilio de recursos tecnológicos promoveu uma aprendizagem significativa dos conteúdos envolvidos. Esse teste foi projetado nos mesmos moldes do “Questões 1”, ou seja, com o mesmo número de questões, com os mesmos tipos de possíveis erros distribuídos nas alternativas incorretas e usando-se novamente a ferramenta “Questionário” do MOODLE.

Também para este questionário, para cada uma das questões foram identificados os possíveis erros por alternativa, isto é, caso o aluno tivesse marcado uma determinada alternativa como resposta, seria possível afirmar ter cometido um erro sobre determinado tópico. Segue abaixo a listagem de possíveis tipos de erros. Em cada questão, a alternativa em negrito é a correta e os parênteses, em itálico, representam os tipos de erros das demais possibilidades de resposta.

Questão 1: Para viajar de Porto Alegre ao Rio de Janeiro, Marcelo percorreu trechos da viagem com meios de transporte diferentes. Em 1/3 do trajeto ele andou de avião, 3/9 de carro, 2/10 de ônibus e 4/30 de trem. Com quais meios de transporte ele percorreu a mesma distância?

a) Avião e ônibus (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
b) Avião e carro
c) Carro e trem (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
d) Carro e ônibus (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)
e) Trem e ônibus (*Simplificação de frações – frações equivalentes*)

Questão 2: Fatorando a expressão $3x^2 + 3x - 6$, obtém-se:

a) 3(x-1)(x+2)

b) 3(x+1)(x-2) (*fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes*)

c) 3(x+3)(x-1) (*cálculo de raízes de equação do segundo grau – fórmula de Báskhara ou Soma e Produto*)

d) 3(x-3)(x+2) (*cálculo de raízes de equação do segundo grau – fórmula de Báskhara ou Soma e Produto*)

e) 3(x-1)(x-2) (*fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes*)

Questão 3: Quais são os possíveis valores de x na inequação $|x + 1| > 3$?

a) x > 2 (*definição de módulo*)

b) x > 4 (*definição de módulo + resolução de inequações*)

c) x > 2 ou x < -4

d) x > 3 ou x < -3 (*definição de módulo*)

e) x = -1 (*definição de módulo + resolução de inequações*)

Questão 4: Quais são os possíveis valores de x na equação $2\mathrm{x} - (x-1) = (x+1)^2$?

a) 0 (*resolução de equações*)

b) 1 (*produto notável + propriedade distributiva*)

c) Não é um número real (*propriedade distributiva*)

d) 0 ou 1 (*produto notável*)

e) 0 ou -1

Questão 5: O valor de x na equação $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = 2(x-1)$ é:

a) 5/11 (*propriedade distributiva*)

b) 19/11 (*propriedade distributiva*)

c) 6 (*propriedade distributiva + resolução de equações*)

d) 1

e) 8 (*propriedade distributiva + resolução de equações*)

Questão 6: Simplificando a expressão $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ obtém-se:

a) $\boldsymbol{\frac{x+2}{x+1}}$

b) $\frac{-x-6}{-2x-3}$ (*simplificação de frações algébricas*)

c) 6/5 (*simplificação de frações algébricas*)

d) 2 (*simplificação de frações algébricas*)

e) $\frac{x-7}{x-6}$ (*simplificação de frações algébricas*)

Questão 7: Na figura abaixo, tem-se a representação simples da planta baixa de uma escola. A partir da entrada, segue-se com a parte das salas de aula, representada por um retângulo de base b, e cuja altura é a metade da base. A seguir, tem-se a parte do refeitório e banheiros, aqui representada por um quadrado cujos lados têm a mesma medida que a altura do retângulo. Qual o comprimento total da escola, da entrada até os fundos?

a) b (*soma de frações algébricas*)
b) $\boldsymbol{\frac{3b}{2}}$
c) 3b (*sobreposição de figuras*)
d) $\frac{b}{2}$ (*sobreposição de figuras*)
e) $\frac{5b}{2}$ (*soma de frações algébricas*)

Questão 8: Se (a, b) é a solução do sistema podemos afirmar que $a.b - 2$, vale:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

a) 32 (*resolução de sistemas*)
b) **30**
c) 12 (*resolução de sistemas*)
d) 10 (*resolução de sistemas*)
e) 8 (*resolução de sistemas*)

Questão 9: Um relógio foi vendido pelo preço de R$ 500,00 com o lucro de 8% sobre o preço de custo. Qual o preço de custo do relógio?

a) R$ 460,00 (*porcentagem e lucro*)

b) R$ 277,78 (*porcentagem e lucro*)

c) R$ 492,00 (*porcentagem e lucro*)

d) R$ 462,96

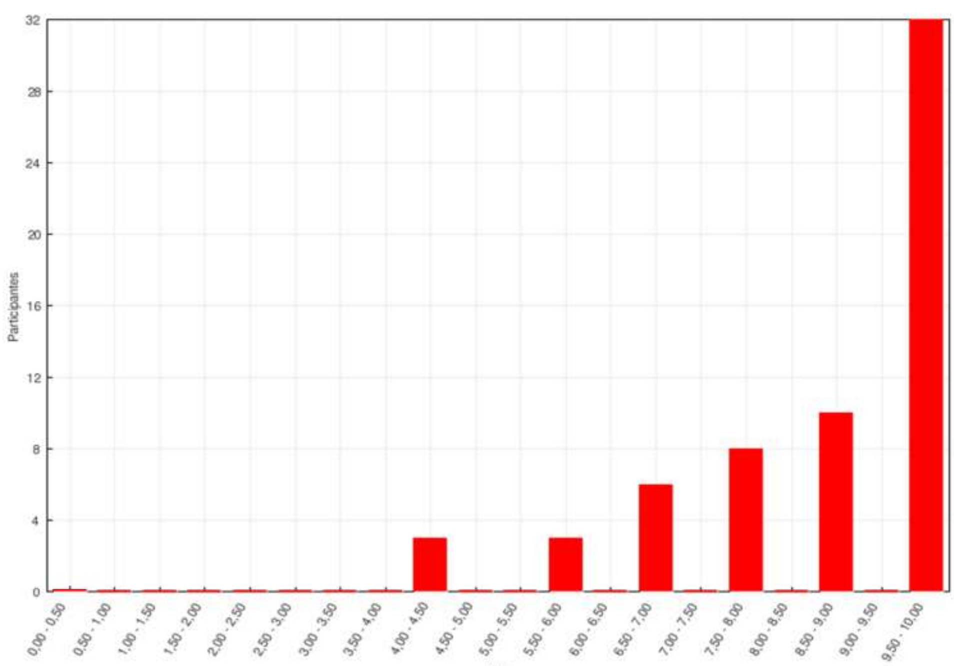
e) R$ 400,00 (*porcentagem e lucro*)

Assim como no Questionário 1, têm-se nove questões com cinco alternativas cada, sendo uma correta, isto é, 36 alternativas incorretas. As ocorrências de cada tipo de erro nas respostas ao questionário são exatamente as apresentadas no Quadro 7 anterior, para garantir uma comparabilidade entre os resultados.

A partir do Quadro 11, mais abaixo, já se pode notar um menor número de erros após a utilização de objetos de aprendizagem relativos às dificuldades observadas na aplicação do teste "Questões 1" e as discussões nos fóruns. A média de notas da turma nesse teste "Questões 2"– 8,73 – foi superior à média obtida no teste anterior.

Cinquenta e cinco alunos responderam ao teste "Questões 2". Novamente, para que fosse observado o aproveitamento, de um modo geral, solicitou-se que o MOODLE fornecesse uma nota para cada aluno. Da mesma forma que no Teste "Questões 1", a cada resposta correta foi atribuída uma pontuação de 1,11. Após a contagem dos pontos, obteve-se o gráfico da Figura 37 a seguir:

Figura 37 – Notas dos alunos no teste "Questões 2"



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro 11, a seguir, têm-se o número e o percentual de alunos que erraram cada questão:

Quadro 11 – Distribuição dos erros no teste "Questões 2"

Questões	Número de alunos que erraram, calculado a partir da média dada pelo MOODLE	
	n	%
Q1	0	0
Q2	6	11
Q3	10	18
Q4	8	15
Q5	9	16
Q6	7	13
Q7	9	16
Q8	2	4
Q9	12	22

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o Quadro 11, é possível notar que, em geral, todas as questões apresentaram um percentual maior de acertos com relação ao teste "Questões 1", exceto pela questão nove, que teve uma redução de 10% no seu percentual de acertos.

Contabilizando a quantidade de alunos que marcou cada uma das alternativas, em cada questão, tem-se o Quadro 12:

Quadro 12 – Contagem das respostas dos alunos

Alternativa	Questões								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
A	0	49	8	1	2	48	3	1	10
B	55	4	1	2	6	1	46	53	0
C	0	1	45	3	1	3	6	0	1
D	0	1	1	2	46	2	0	0	43
E	0	0	0	47	0	1	0	1	1
Em branco	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: Dados da pesquisa

Comparando esse Quadro 12 com as informações sobre os tipos de erros, apresentadas no planejamento das questões desse teste "Questões 2", pode-se construir o Quadro 13, que indica o número de alunos que cometeram cada tipo de erro:

Quadro 13– Contagem das ocorrências de cada tipo de erro

Tipo de erro	Número de alunos
E1 - Simplificação de frações- frações equivalentes	0
E2 - Cálculo de raízes de equação do segundo grau	2
E3- Fatoração de polinômio de grau 2, conhecendo as raízes	4
E4 - Definição e propriedades de módulo	**10**
E5 - Resolução de inequações	1
E6 - Propriedade distributiva	**14**
E7 - Produto notável	4
E8 - Resolução de equações	2
E9 - Simplificação de frações algébricas	**7**
E10 - Adição de frações algébricas	3
E11 - Sobreposição de figuras	6
E12 - Resolução de sistemas	2
E13 - Porcentagem e lucro	**12**

Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim, pode-se notar que os erros mais frequentes na aplicação do Questionário 1 seguem sendo frequentes aqui, ainda que em menor escala. Além disso, conforme já foi dito, chama atenção o fato de terem aumentado e serem em grande número, comparando-se aos demais, os erros relativos a porcentagem e lucro. Ainda que merecedor de uma análise mais detalhada, não foi possível aprofundar esse dado pelo fato de que o teste "Questões 2" foi aplicado ao final do segundo semestre de 2014, ou seja, ao final do contato da professora-pesquisadora com a turma.

5.7 Comparação dos Resultados dos Testes

5.7.1 Fundamentação Estatística para a Comparação

Para análise dos resultados obtidos na segunda etapa desta pesquisa, realizada no ano de 2014 e descrita nos itens anteriores, foram usados métodos quantitativos para observação da evolução dos alunos.

Com vistas à comparação dos resultados dos questionários, foram usados testes de hipóteses para a comparação de médias e proporções. Tais testes se fazem necessários para avaliar se existe diferença significativa entre as medidas (médias ou proporções) dos grupos, antes e depois da intervenção. A utilização dos testes surgiu da necessidade de comparar a média das notas atribuídas aos alunos – geral e por questão – bem como avaliar se a proporção de cada um dos possíveis erros diminuiu. Ambos os testes foram escolhidos considerando-se que os grupos analisados são distintos, uma vez que se tinha 74 participantes no Questionário 1 e 55 no Questionário 2.

Nos testes de hipóteses consideram-se duas hipóteses, H_0 (hipótese nula) e H_1 (hipótese alternativa). Como se desejava verificar se a proporção de erros diminuiu significativamente de uma aplicação de questionário para outra, em função da estratégia remediadora utilizada, consideram-se p_1 e p_2 as proporções de erros antes e depois da intervenção, respectivamente. Toma-se como hipótese nula $H_0: p_1 = p_2$, ou seja, considera-se que as proporções de erros antes e depois da intervenção são iguais. Como hipótese alternativa, considera-se $H_1: p_1 \neq p_2$, a saber, que as proporções de erros são diferentes; pode-se denotar também como $H_0: p_1 - p_2 = 0$ *vs* $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$. No caso da rejeição de H_0, há evidências de que houve diferença significativa entre as proporções. Para a realização do procedimento, é necessário calcular a seguinte estatística de teste:

Sendo n_1 e n_2 os números de participantes nos questionários 1 e 2, respectivamente, x_1e x_2 os números de ocorrências do(s) erros(s) nos questionários 1 e 2, respectivamente, $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ e $N(0,1)$ a distribuição normal padrão, calcula-se a estatística de teste conforme a fórmula do Quadro 14:

Quadro 14 – Estatística de teste para comparação de proporções

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

Fonte: Montgomery; Runger, 2003, p. 361

Além disso, tomando $\alpha = 0{,}05$, ou seja, usando um nível de confiança de 95%, pode-se rejeitar H_0 caso $|Z_0| > z_{97,5\%} = 1{,}96$. Note-se que $z_{97,5\%} = 1{,}96$ é o quantil[19] da distribuição normal padrão que acumula $\theta = 97{,}5\%$ de probabilidade.

Para o caso do teste de comparação de médias, considera-se o desvio padrão populacional σ desconhecido, μ_1 e μ_2 as médias de notas antes e depois da intervenção, respectivamente. Neste caso, a hipótese nula é $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (ou $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$) e a hipótese alternativa é $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (ou $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$).

Sendo n_1 e n_2 os números de participantes nos questionários 1 e 2, respectivamente, s_p o desvio padrão amostral ponderado, calculado por $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$, onde s_1^2 e s_2^2 são as variâncias amostrais[20] dos grupos 1 e 2, respectivamente, e $t_{n_1+n_2-2}$ a distribuição *t* com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade[21], a estatística de teste é dada pela fórmula do Quadro 15:

Quadro 15 – Estatística de teste para comparação de médias (σ desconhecido)

$$T_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Fonte: Montgomery; Runger, 2003, p. 337

---

[19] **Quantil** é uma medida que "fatia" uma distribuição, com probabilidade θ à sua esquerda e $1-\theta$ à sua direita.

[20] A **variância amostral** de uma variável aleatória é uma medida da sua dispersão, indicando "o quão longe" em geral os seus valores se encontram do valor esperado. É obtida calculando-se $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$.

[21] **Grau de liberdade** é o número de determinações independentes (dimensão da amostra) menos o número de parâmetros estatísticos a serem estimados na população. No caso, usa-se menos 2, pois estimam-se μ_1 e μ_2.

Novamente tomando $\alpha = 0{,}05$, ou seja, um nível de confiança de 95%, pode-se rejeitar H_0 caso $|T_0| > T_{97,5\%;\ n_1+n_2-2}$. Note-se que $T_{97,5\%;\ n_1+n_2-2}$ é o quantil da distribuição *t* com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade que acumula $\theta = 97{,}5\%$ de probabilidade. Não há um valor específico, como no caso da distribuição normal (1,96), pois o valor está em função dos graus de liberdade. Tais valores estão tabelados ou disponíveis em *softwares* que manipulam funções estatísticas.

Outros conceitos importantes, também utilizados nos testes realizados nesta tese, são:

p-value **(ou valor-p):** probabilidade de errar rejeitando H_0 quando esta hipótese for verdadeira. É obtido calculando-se $Pr(|Z| > Z_0)$ ou $Pr(|T| > T_0)$. Para detalhes do cálculo, vide Apêndice K.

Desvio Padrão Amostral (s): raiz quadrada da variância amostral, obtido por $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Erro Padrão (ep): desvio padrão da média, obtido por $ep = \frac{s}{\sqrt{n}}$, sendo n o tamanho da amostra.

Os detalhes da aplicação de ambos os testes, bem como os resultados obtidos, são apresentados a seguir.

5.7.2 Comparação dos Desempenhos dos Alunos

Com o objetivo de comparar o desempenho dos alunos em ambos os questionários aplicados, foi realizada uma análise quantitativa dos resultados obtidos em ambos, conforme descrito na Seção 5.7.1.[22]

Em um primeiro momento, decidiu-se analisar as incidências de erros. A Tabela 1 mostra a comparação das ocorrências de erros, geral e por questão. Na coluna "Onda 1" tem-se a proporção de erros para cada questão no Questionário 1, e na "Onda 2" a proporção de erros para cada questão no Questionário 2, o que foi denominado genericamente de $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ na

[22] Destaca-se aqui que as questões em branco não foram contabilizados em nenhuma das tabelas, uma vez que as análises foram pautadas nos erros cometidos. Assim, não se pode contabilizar um erro no caso de o estudante ter deixado a questão em branco.

Seção 5.7.1. Por exemplo, 20,3% erraram a questão 2 no Questionário 1 e 10,9% no Questionário 2. Ressalta-se aqui que esta comparação é possível uma vez que as questões foram planejadas, uma a uma, de forma muito semelhante em ambos os questionários, tratando dos mesmos conteúdos e com o mesmo nível de dificuldade.

Ainda na Tabela 1, a coluna "Delta" corresponde à diferença "Onda 1 – Onda 2", referente à diferença $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ apresentada na Seção 5.7.1.

Tabela 1 – Comparação dos erros cometidos nos Questionários 1 e 2, analisados por questão

Prop. Erros por Questão	Onda 1	Onda 2	Delta	p̂	Z	p-value	
Q1	0,068	0,000	0,068	0,039	1,97	0,0493	**
Q2	0,203	0,109	0,094	0,163	1,42	0,1544	
Q3	0,392	0,182	0,210	0,302	2,57	0,0102	**
Q4	0,216	0,145	0,071	0,186	1,02	0,3071	
Q5	0,486	0,164	0,323	0,349	3,80	0,0001	***
Q6	0,324	0,127	0,197	0,240	2,59	0,0096	***
Q7	0,230	0,164	0,066	0,202	0,93	0,3547	
Q8	0,081	0,036	0,045	0,062	1,04	0,2977	
Q9	0,081	0,218	-0,137	0,140	-2,22	0,0263	**
Geral	0,197	0,105	0,092	0,002	10,77	0,0000	***

0 *** 0,01 ** 0,05 * 0,10 1

Fonte: Dados da Pesquisa

Conforme a Tabela 1, a proporção de erros geral foi reduzida, indicando melhoria significativa (p-value = 0,0000) dos alunos. As questões 3, 5 e 6 - aquelas em que houve um tratamento mais apurado do material de apoio - contribuíram para a significativa redução da proporção de erros por questão. Tais materiais foram projetados pela pesquisadora com auxílio de bolsistas sob sua orientação, observando-se os preceitos apresentados nesta tese para construção de objetos de aprendizagem.

Seguindo-se com a análise da incidência de erros em ambos os questionários, resolveu-se verificar a evolução dos alunos relativa a cada tipo de erro cometido. Sendo assim, construiu-se a Tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Comparação dos erros cometidos nos Questionários 1 e 2, analisados por tipo de erro

Prop. Erros por Tipo de Erro	Onda 1	Onda 2	Delta	$\hat{p}$	Z	p-value	
E1	0,068	0,000	0,068	0,039	1,97	0,0493	**
E2	0,027	0,036	-0,009	0,031	-0,30	0,7622	
E3	0,176	0,073	0,103	0,132	1,71	0,0874	*
E4	0,392	0,182	0,210	0,302	2,57	0,0102	**
E5	0,108	0,018	0,090	0,070	1,98	0,0474	**
E6	0,527	0,200	0,327	0,388	3,77	0,0002	***
E7	0,095	0,073	0,022	0,085	0,44	0,6601	
E8	0,149	0,036	0,112	0,101	2,10	0,0362	**
E9	0,324	0,127	0,197	0,240	2,59	0,0096	***
E10	0,135	0,055	0,081	0,101	1,50	0,1327	
E11	0,095	0,109	-0,014	0,101	-0,27	0,7868	
E12	0,081	0,036	0,045	0,062	1,04	0,2977	
E13	0,081	0,218	-0,137	0,140	-2,22	0,0263	**

0 *** 0,01 ** 0,05 * 0,10 1

Fonte: Dados da Pesquisa

Neste caso, também foi utilizado o teste de comparação de proporções, assim como os cálculos apresentados na Tabela 1. Em ambos os casos, este teste foi escolhido por se tratar de percentuais por tipo de erro. Sendo assim, a nomenclatura utilizada na Tabela 2 é a mesma da Tabela 1.

Na Tabela 2, a simbologia ** e *** indica diferença significativa entre as aplicações dos questionários. O erro 13 – correspondente a porcentagem e lucro – demonstrou um aumento significativo na proporção de ocorrências no Questionário 2, em concordância com o que já foi comentado.

Os erros 4, 5, 6 e 9 – relativos a módulos, inequações, propriedade distributiva e frações algébricas, correspondentes às questões 3, 5 e 6 da Tabela 1 – novamente estão entre os que apresentaram as diferenças mais significativas.

Após a reflexão sobre as proporções de erros cometidos, verificou-se a diferença das médias das notas obtidas pelos alunos nos questionários, conforme mostra a Tabela 3:

Tabela 3 – Comparação das médias de notas nos Questionários 1 e 2

	Onda 1				Onda 2				Testes de diferença de médias					
Nota média por questão	Média	Var.	DP	EP	Média	Var.	DP	EP	Delta	Var. pond	T	gl	p-value	
Q1	1,01	0,11	0,33	0,04	1,11	0,00	0,00	0,00	0,11	0,06	2,38	127	0,0189	**
Q2	0,84	0,23	0,48	0,06	0,99	0,12	0,35	0,04	0,15	0,18	1,95	127	0,0534	*
Q3	0,63	0,31	0,55	0,06	0,91	0,19	0,43	0,05	0,28	0,26	3,09	127	0,0025	***
Q4	0,83	0,24	0,49	0,06	0,95	0,16	0,40	0,05	0,12	0,20	1,54	127	0,1263	
Q5	0,53	0,31	0,56	0,06	0,93	0,17	0,41	0,05	0,40	0,25	4,51	127	0,0000	***
Q6	0,68	0,30	0,55	0,06	0,97	0,14	0,37	0,04	0,29	0,23	3,44	127	0,0008	***
Q7	0,81	0,25	0,50	0,06	0,93	0,17	0,41	0,05	0,12	0,22	1,44	127	0,1537	
Q8	0,98	0,13	0,37	0,04	1,07	0,04	0,21	0,02	0,09	0,10	1,72	127	0,0877	*
Q9	0,98	0,13	0,37	0,04	0,87	0,21	0,46	0,05	-0,11	0,17	-1,47	127	1,0000	
Geral	7,27	6,94	2,63	0,31	8,73	2,94	1,72	0,23	1,46	5,24	3,58	127	0,0005	***

0 *** 0,01 ** 0,05 * 0,10 1

Fonte: Dados da Pesquisa

No caso da análise apresentada na Tabela 3, foi utilizado o teste de comparação de médias, uma vez que se tratam de valores médios por questão. Diferentemente da nomenclatura genérica introduzida na Seção 5.7.1, na Tabela 3 apresentam-se a variância (Var), o desvio padrão (DP), o erro padrão (EP), Delta ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) e graus de liberdade (gl).

Com relação aos resultados apresentados na Tabela 3, assim como no caso da proporção, observa-se na linha "Geral" que a média dos alunos no questionário subiu significativamente, uma vez que nessa análise encontrou-se $T = 3{,}58$ e $p - value = 0{,}0005$. Por outro lado, com relação às médias de notas obtidas em cada questão, assim como foi visto para as proporções, é possível afirmar que as questões 3, 5 e 6 – apresentadas nas linhas indicadas com ***, para as quais se deu um tratamento especial aos materiais/métodos utilizados – estão entre as que apresentaram diferença mais significativa no aumento da média de notas, e para elas também foram obtidos os menores valores de *p-value*. As questões 4, 7 e 8 não apresentaram diferença significativa de médias.

Com a evasão de 19 alunos ao longo do levantamento[23], realizou-se um teste não pareado de comparação de médias, a fim de não desconsiderar a informação do grupo desistente.

Tabela 4 – Estatísticas descritivas dos grupos (persistentes e desistentes)

Notas Onda 1	19	55
Média	7,19	7,29
Variância	4,21	7,76
Desvio padrão	2,05	2,78
Erro padrão	0,47	0,38
n	19	55

Fonte: Dados da Pesquisa

Tabela 5 – Comparação das médias de notas dos alunos que persistiram e que desistiram, relativas ao teste "Questões 1"

Delta média	0,10
Var. pond	6,87
T	0,21
gl	72
p-value	0,83099

Fonte: Dados da Pesquisa

Para garantir que o comportamento dos ausentes não influenciasse substancialmente os resultados, analisou-se a média dos 19 desistentes em comparação à média dos 55 alunos que permaneceram na pesquisa. Pelas Tabelas 4 e 5 é possível afirmar que os desistentes tiveram, no Questionário 1, um desempenho bastante semelhante ao dos 55 que permaneceram e responderam ao Questionário 2. O teste para a diferença de médias apresentou $p - value = 0{,}8310$, ou seja, não há diferença significativa entre a média dos dois grupos.

A partir de tudo que foi dito, pode-se afirmar, então, que houve uma melhora substancial no rendimento dos alunos após todas as atividades realizadas na segunda etapa do

[23] Os 19 alunos que responderam ao teste Questão 1 e não responderam ao teste Questões 2 fazem parte do grupo dos que abandonaram a disciplina ao longo do semestre.

trabalho realizado. Além disso, observou-se que a melhora mais significativa foi com relação aos erros mais cometidos no primeiro teste, os quais foram mais trabalhados pela professora-pesquisadora por meio da confecção de materiais de apoio e pelas discussões nos fóruns.

5.8 Entrevista com a Professora do Laboratório de Aprendizagem

A entrevista foi realizada com uma das professoras do Laboratório de Aprendizagem, que é graduada e mestre em Matemática e tem vasta experiência com ensino de Matemática, na educação básica e em cursos superiores, lecionando há 37 anos na instituição.

Tendo aceitado o convite para ser entrevistada, a docente preencheu o termo de Consentimento Esclarecido (Apêndice L) e a entrevista foi realizada no laboratório de Aprendizagem, com duração de uma hora.

Sendo uma entrevista aberta, a professora-pesquisadora mostrou à entrevistada, inicialmente, as análises dos erros cometidos pelos alunos em questões de Matemática básica, os objetos disponibilizados e as postagens nos fóruns. A seguir, propôs à docente uma primeira pergunta, para desencadear a entrevista: "*A partir do que mostrei, sobre os resultados da minha pesquisa, eu gostaria de saber a tua opinião sobre o trabalho, se consideras a proposta viável para ser implementada no Laboratório de Aprendizagem*". A entrevista, gravada, foi transcrita e a transcrição está disponibilizada no Apêndice M.

O texto da transcrição foi submetido à análise de conteúdo; primeiramente o texto foi relido, para definir as unidades de significado (MORAES, 1999) que, posteriormente, foram agrupadas, por semelhança, originando seis categorias, descritas a seguir:

1) **Dificuldades relacionadas à propriedade distributiva**

As dificuldades dos alunos de disciplinas matemáticas de cursos superiores quanto à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição foram bastante salientadas pela entrevistada. Ela considera que essas dificuldades aparecem nas respostas de alunos de Cálculo I desta pesquisa, mas também entre os que frequentam o Laboratório.

> *E aparecem até aqui no Laboratório. Nós fizemos aqui no semestre passado, o [nome de aluno], na disciplina de estágio, tinha que ter mais horas, porque não veio à aula, algo assim... eu o coloquei aqui no Laboratório, acompanhando os bolsistas,*

> *e ele fez um relatório sobre as dificuldades apresentadas. E entre elas, estava a propriedade distributiva. Então é uma coisa que já se tem... entende?*

Além disso, menciona uma possível origem dessas dificuldades, localizando-a no Ensino Fundamental.

> *[...] distributiva, fatoração, produto notável... tinha que ter uma hora em que o professor lá do Ensino Fundamental não se preocupasse com o aprofundamento dos tópicos, entende? Porque aí o aluno perde a noção do conteúdo que está vendo.*

Até em disciplinas mais adiantadas na grade curricular, como Cálculo IV, a entrevistada relata detectar essa dificuldade.

> *Ontem um aluno meu de Cálculo IV foi pôr em evidência lá um termo,* $3x^2 + 3x$, *certo? E aí ele colocou o 3 em evidência, por conta dele, e começou a chutar os elementos que iam lá dentro do parênteses para descobrir quais os que iam. E aí, sabe o que ele fez depois para ver se estava certo? Multiplicou para ver ... então, parece que ele tem noção de distributividade, mas ele não tem. Porque ele começou a chutar os elementos lá de dentro, quer dizer, ele não sabe que a divisão vai te dar uma ideia inversa, então ele não sabe a distributiva.*

Essas observações da entrevistada remetem ao que Lima (2007) chama de *corporificação,* pois trata de experiências mentais, em que o aluno tenta resolver um problema manipulando um esquema em sua mente (tal como o "chuveirinho", apresentado na Figura 1). Também, pode-se lembrar do que Kirshner e Awtry (2004) chamam de "saliência visual", pois parece haver uma tendência de gerar padrões incorretos de expressões visualmente salientes, como a do "chuveirinho".

A entrevistada mostra estar satisfeita com o fato de que não é necessário pesquisar novamente sobre as dificuldades com a propriedade distributiva no Laboratório: "E com essa propriedade aqui nós não precisamos mais nos preocupar... ela está pronta, não é?". E complementa, referindo-se à correção das provas: "[...] vamos falar especificamente dessa propriedade distributiva – que o professor que corrigisse notasse esse problema e que ele [o aluno] tivesse esse tempo para vir aqui".

Essa última observação da entrevistada sobre essa propriedade indica que o trabalho realizado para esta tese pode ser uma fonte de novas experiências no Laboratório.

2) Confiabilidade do trabalho realizado

Uma segunda categoria de respostas que se destacam na entrevista relaciona-se à confiabilidade dos alunos para com o trabalho realizado, especialmente pelo fato de que, por haver a figura do professor como suporte para as atividades realizadas no ambiente MOODLE, o aluno sente-se mais comprometido com o estudo.

> *Eu acho que a tua figura por trás, sendo uma pessoa a quem eles davam uma certa importância, teve influência nos teus resultados. [...] Fizeste pensando em alguém... eu acho que isso é o forte, que pode se dizer que é um trabalho confiável.*

Essa afirmativa corrobora o que já havia sido detectado no primeiro semestre de 2014, quando o ambiente foi criado, mas a maior parte dos alunos, por frequentarem aulas com outros docentes que não a professora-pesquisadora, não seguiram o trabalho no MOODLE.

A característica do trabalho que foi realizado, que permite ao aluno buscar o apoio no Laboratório, também é mencionado pela entrevistada.

> *Ele precisa é ter o professor como apoio! Por exemplo, se eu pegar uma turma minha e indicar alunos para fazer isso, eles vão sentir que há minha orientação por trás, embora alguém no Laboratório possa dar uma orientada... quando ele estiver perdido, vem aqui e a gente dá uma orientação...*

A entrevistada também parece confiar na pesquisa porque comprovou, pelos resultados apresentados, que houve um trabalho bastante detalhado e fundamentado.

> *É óbvio que nós também não iríamos fazer o teu trabalho de novo, porque ninguém consegue... esse monte de testes, esse monte de coisas. Mas já se viu que ele dá certo. Está comprovado que ele dá certo.*

Nesse Laboratório de Aprendizagem aqui mencionado não houve, ainda, possibilidade de fazer um trabalho detalhado sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos que procuram atendimento. Os relatórios dos bolsistas ou das professoras responsáveis, em geral, trazem dados quantitativos, sem uma análise do tipo de erro cometido pelos alunos ou de sua dedicação a um determinado trabalho de retomada dos conteúdos nos quais apresentam dificuldades. Esse parece ser o resultado mais apreciado pela entrevistada, pois traz possibilidades de partir do que já foi investigado.

3) Objeto endereçado para dificuldades específicas

O Objeto de Aprendizagem elaborado para revisar operações e propriedades dos números reais, bem como aqueles que buscaram retomar conceitos de módulo e frações algébricas, parecem ter atingido as expectativas da entrevistada. Construídos segundo os princípios indicados na seção 2.5, buscam retomar os conteúdos de disciplinas de cursos de Ciências Exatas e poderiam ser exemplo para elaboração de outros objetos.

> *[...] eu já tentei fazer um objeto desse jeito. Eu já tentei. Mas ele teria que ser assim: um objeto, dividido em diversas partes, e aí eu vejo um pouco essa parte tua aí, que tu poderias... em cada parte, um tipo de integral indefinida de tabela. Então nós precisaríamos ter um objeto dividido em 13 partes, tu entendes? Porque aí é*

> *assim... mas eu não sei fazer isso. Eu comecei a fazer, eu já tenho feito para uma parte. Mas eu desanimei, porque aí tem que fazer assim: se é isso então tenta aquilo... se é aquilo, tu achas que é isso? Então, é por ali... e aí tu tens que fazer um monte de...if, if, if... e o bolsista enlouqueceu quando eu falei para ele [risos].*

Tall (1986) considera, em sua tese, a possibilidade de usar organizadores genéricos, tais como esses Objetos de Aprendizagem, que permitem aos alunos interagirem com exemplos de conteúdos específicos, como as propriedades dos números reais, o módulo e as operações com frações algébricas. Da mesma forma, se poderia fazer um Objeto que apoiasse a utilização de tabelas de integrais.

Especificamente em relação ao Objeto de Aprendizagem sobre propriedade distributiva, a entrevistada já antevê possibilidades para trabalhos futuros.

> *[...] nós poderíamos com o tempo aumentar o banco de questões, certo? Para que o aluno tivesse... até sorteasse para ser diferente para um, diferente para outro, entende?*

Essa possibilidade, já pensada pela professora-pesquisadora e referendada pela entrevistada, é uma das possibilidades de continuação do trabalho realizado para esta tese.

4) Compartimentalização dos conteúdos

Quando a professora-pesquisadora concordou que a dificuldade com a propriedade distributiva é um fato já conhecido dos professores de Matemática, a entrevistada comentou as possíveis causas desse problema.

> *Agora, a causa de ser problema, é difícil... Tu sabes bem que as coisas são vistas compartimentadas por eles [...] Então, por exemplo, tu vais apresentar uma fatoração lá no Ensino Fundamental, e tu usas x, y, z, m, t e solicita que eles ponham em evidência o fator comum... eles nem enxergam o que é aquilo ali. E eles nem enxergam que têm dificuldade, porque noutro ano... no quinto ano (não sei se é sexto ano agora)... a distributividade e a fatoração são apresentadas e eles não veem ligação com a fatoração do número inteiro. Então é tudo muito separado, eu não sei se as pessoas todas veem que é junto.*

É possível notar, como já foi apontado em outras pesquisas citadas nesta tese (CURY, 2004; HARDY, 2008), que as dificuldades em conteúdos de Matemática básica, em especial em Álgebra, são determinantes para a construção de conceitos no ensino superior. Tall (2013), ao caracterizar o *mundo operacional simbólico*, explica que os símbolos usados na Álgebra especificam as operações a serem realizadas, mas também se transformam em conceitos.

Essa dualidade, que Gray e Tall (1994) denominaram de *proceito*[24], é algo pouco explorado na educação básica, em que os conteúdos são apresentados de forma compartimentada, sem que se volte, em certo momento, a trabalhar com o que já foi estudado em séries anteriores.

5) Possibilidades de trabalho no Laboratório de Aprendizagem

Um dos objetivos específicos desta pesquisa é testar proposta de uso de objetos de aprendizagem que possam auxiliar alunos calouros a superarem suas dificuldades. Dessa forma, em certo momento a entrevista foi direcionada para o trabalho no Laboratório, para ver se a proposta feita poderia ser implementada na Instituição.

> *Então... eu já acho que a gente tinha que mudar um pouco a aparência do Laboratório. Em duas partes: tinha que ter aqueles que vêm pra fazer o que sempre estão fazendo...tirar dúvidas. E tinha que ter um grupo específico, que a gente detectasse coisas para que eles continuassem desenvolvendo. Mas aí nós tínhamos que ter assim: se o aluno foi mal na primeira prova de Cálculo I... acho que isso aí a gente pode fazer... foi mal, aí ele vem, mas eu acho que, para começo, não podiam ser todos [...] porque eu acho que esse deveria ser o objetivo do Laboratório: melhorar mesmo o desempenho do aluno, e não ajudá-lo só em dúvidas que ele tenha.*

Pela resposta dada, entende-se que a proposta desenvolvida nesta tese poderia ser dirigida aos estudantes que tivessem necessidades específicas, detectadas por meio de provas de avaliação ou por testes, e para os quais se fizesse um atendimento seletivo, individual ou para pequenos grupos.

Isso não invalida, no entanto, o que foi proposto, ou seja, o uso do ambiente de aprendizagem, pois para aqueles alunos que vêm tirar dúvidas, é necessário sugerir um trabalho complementar em tais ambientes, visto que as dúvidas não se resolvem no pouco tempo de que dispõem em um atendimento no Laboratório. Além disso, em disciplinas como o Cálculo I, ingressam na Instituição cerca de 1000 alunos por semestre, o que, evidentemente, faz com que haja pouco tempo disponível para cada estudante que procura o Laboratório.

---

[24] Este termo, já definido, refere-se à dualidade entre processo e conceito.

6) Possibilidade de realizar o trabalho a distância

No final da entrevista, a professora-pesquisadora preocupou-se, então, em saber a opinião da entrevistada sobre a possibilidade de fazer o trabalho a distância, conforme mencionado no último parágrafo acima, no ambiente MOODLE ou em outro que pudesse ser disponibilizado no Laboratório. A entrevistada concordou: “Mas eu acho que isso pode ser feito a distância. Isso que eu falei não precisa ser feito aqui”. E complementou sua opinião.

> *[...] vai ter que depender do professor da sala de aula dele [do aluno]. Certo? Porque se o professor da sala de aula dele não acreditar, não adianta. A gente podia até fazer assim... pegar uma sala de aula para cada semestre, vamos dizer assim. Porque tu estás perguntando se existe a possibilidade de usar no Laboratório, não é uma coisa passageira... e sim organizar um trabalho em que desse para fazer esse tipo de coisa.*

Assim, conforme essa opinião da entrevistada, os elementos que foram disponibilizados no ambiente MOODLE podem ser adaptados para as turmas que solicitam auxílio no Laboratório, dependendo de testes que poderiam ser os já aplicados nesta pesquisa ou outros, elaborados a partir de um banco de questões. O trabalho, iniciado em um determinado semestre, poderia ser aumentado aos poucos, englobando mais alunos e mais professores interessados no trabalho, gerando novas investigações sobre o tema.

Essa observação está de acordo com Sabbatini (2007), para quem o ambiente MOODLE é centrado no estudante e não no professor; assim, no trabalho preparatório, de proposta de uso do ambiente, deveriam ser enfatizadas as ferramentas de interação, como os fóruns apresentados nesta pesquisa, que permitiram as discussões entre alunos e professora-pesquisadora.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como considerações finais, apresenta-se, neste capítulo, uma síntese da pesquisa relatada nesta tese e dos resultados obtidos, bem como limitações e dificuldades encontradas ao longo de seu desenvolvimento. Além disso, são comentadas algumas possibilidades de continuidade do trabalho, como desdobramentos da pesquisa.

6.1 Síntese da Pesquisa e dos Resultados

Conforme foi indicado na Introdução, uma das motivações desta pesquisa foi o conhecimento de que os alunos que ingressam em cursos superiores que possuem disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em seus currículos apresentam muitas dificuldades, especialmente em conteúdos básicos que já deveriam ser conhecidos na etapa em que se encontram. As razões dessas dificuldades são muitas, inclusive aquelas atribuídas à falta de acompanhamento pelos pais, da educação de seus filhos, passando pela falta de condições para o estudo fora de sala de aula até problemas de qualidade do Ensino Básico. Trabalhando no ensino superior, pensou-se em abordar esse nível de ensino e planejar a pesquisa com o objetivo geral de analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e Integral e testar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos.

A escolha da Pesquisa Baseada em Design como metodologia de pesquisa deveu-se ao fato de que esta abordagem, além de permitir que teoria e prática se alimentem uma da outra, provocando alternância entre os pressupostos teóricos estudados e a coleta de dados, também pressupõe a integração entre métodos qualitativos e quantitativos e o uso de recursos tecnológicos.

Inicialmente, partiu-se das ideias de Ausubel, especialmente das conceituações de subsunçores – conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz – e dos princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa; o primeiro pressupõe que as ideias e conceitos mais gerais sejam apresentados no início do ensino de um determinado conteúdo e o segundo princípio estabelece que o material instrucional explore relações entre as ideias apresentadas. Em Cálculo, por exemplo, deveriam ser apresentados, inicialmente, as proposições que estabelecem propriedades das operações nos conjuntos numéricos, para posteriormente detalhar as propriedades específicas dos limites e derivadas de uma função definida no conjunto dos reais.

Em seguida, estudaram-se as ideias de Tall e Vinner (1981), sobre imagem do conceito e definição do conceito, respectivamente caracterizados como algo não verbal, associado na mente do aluno ao conceito e conjunto de palavras evocadas pelo estudante para definir tal conceito.

Ainda, de Tall (2013), foram consideradas a Teoria dos Três Mundos da Matemática, que tem muitos pontos em comum com as ideias de Ausubel, como, por exemplo, o conceito de "já-encontrado", que remete às experiências anteriores do aluno sobre certo conteúdo e que lembra os subsunçores ausubelianos. Também é de Tall o termo "a-encontrar", referente a experiências que ainda não fazem parte da imagem do conceito de um aluno, mas que podem vir a modificá-la à medida que esse faz as relações entre os conceitos aprendidos.

A pesquisa foi realizada em três etapas: na primeira, foram coletadas resoluções de alunos de Cálculo Diferencial e Integral para questões sobre Matemática básica. Tendo encontrado, na análise das soluções dos estudantes, dificuldades em relação a conteúdos de Álgebra da educação básica, voltou-se à teoria, buscando estudiosos do ensino de Álgebra e destacando, em especial, os conceitos de saliência visual, de Kirshner e Awtry (2004) – tendência a gerar padrões incorretos de expressões a partir de outras que se distinguem em regras de operações – e sentido da estrutura (HOCH; DREYFUS, 2004) – conjunto de habilidades que permite ao aluno reconhecer expressões algébricas previamente estudadas e manipuladas.

Testou-se, assim, a possibilidade de utilização de recursos tecnológicos no auxílio a estes estudantes, para superação de suas dificuldades. Tal ideia surgiu como uma alternativa de apoio aos alunos, sem a necessidade de utilização do tempo da aula regular, e também sem a necessidade de oferecimento de uma disciplina extra que acarretaria um custo adicional no curso.

Foram estudados, então, os pressupostos da construção de objetos de aprendizagem, o que levou a uma reflexão sobre qual seria o estilo de aprendizagem dos alunos e como elaborar um material adequado a esses estilos. Aplicou-se, na sequência, um Teste de Estilos de Aprendizagem aos estudantes envolvidos na pesquisa, tendo-se concluído que esses participantes são, preferencialmente, ativos, sensoriais, visuais e sequenciais.

O objeto de aprendizagem construído trata das propriedades das operações com números reais, especialmente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, e segue os pressupostos de construção de tais objetos.

Voltando à prática, então, na segunda etapa da pesquisa, o trabalho desenvolveu-se no ambiente de aprendizagem MOODLE, no qual foram disponibilizados um questionário para coletar informações dos alunos e um teste, denominado "Questões 1", composto por questões de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Nessa etapa, foram também disponibilizados no ambiente MOODLE os outros objetos de aprendizagem construídos com vistas a auxiliar os alunos na superação das dificuldades em conteúdos nos quais foram detectados os maiores números de erros nas respostas aos testes aplicados nas duas etapas.

Depois de responder ao teste, os alunos foram contatados, de acordo com os erros cometidos, e convidados a trabalhar com os objetos de aprendizagem, tanto o construído na primeira etapa da pesquisa como outros elaborados posteriormente ou selecionados na rede.

Houve ainda a criação de fóruns de discussão, no ambiente MOODLE, nos quais a professora-pesquisadora inseriu novas questões sobre os temas trabalhados e fomentou a discussão entre os participantes. No decorrer dessas discussões, ficou clara, novamente, a falta de alguns subsunçores necessários para a aprendizagem de Cálculo. Foi possível, também, o aprofundamento das explicações sobre os conteúdos que geraram maior número de erros, tendo-se, ainda, identificado e debatido com o grupo os pontos mais relevantes de cada tópico.

Para concluir esta etapa, foi aplicado aos alunos um novo teste, "Questões 2", com problemas semelhantes aos do teste "Questões 1". Voltou-se à teoria, para estudar procedimentos estatísticos que permitissem a comparação entre os resultados encontrados na aplicação dos dois testes; a partir desse estudo, foram comparados os resultados, concluindo-se que houve uma melhora substancial no rendimento dos alunos após todas as atividades da segunda etapa.

Em uma terceira etapa, já com vistas a obter *feedback* sobre o trabalho realizado e propor futuras pesquisas, foi entrevistada uma professora do Laboratório de Aprendizagem da Instituição que, após examinar os dados da pesquisa, destacou sua importância para a realização de novas atividades no Laboratório de Aprendizagem e de implementação dos objetos de aprendizagem construídos.

A partir dos dados analisados no capítulo 5, pôde-se chegar às conclusões da pesquisa. Primeiramente, de acordo com as teorias estudadas no desenvolvimento desta tese, entende-se que os alunos participantes não possuem os subsunçores necessários para a promoção de uma aprendizagem significativa dos conteúdos de Cálculo (AUSUBEL, 2003), ou ainda, que existem muitos conceitos "a-encontrar" que já deveriam estar na classe dos "já-encontrados", para que o aluno pudesse seguir adiante em seus estudos em disciplinas matemáticas (LIMA, 2007).

Também foi possível notar que os estudantes acreditam conhecer os conceitos ensinados na Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio), mas os testes aplicados, bem como as discussões nos fóruns, mostraram problemas que já deveriam ter sido superados no final desta etapa de ensino.

Os equívocos cometidos nos testes pelos estudantes com relação à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição destacaram-se tanto na primeira como na segunda etapa da pesquisa. Assim, a construção do objeto de aprendizagem que trata das operações com números reais (em especial a propriedade distributiva) baseou-se nos pressupostos da construção de um OA e nos estilos de aprendizagem preferenciais dos participantes. O objeto de aprendizagem foi inserido no ambiente MOODLE na segunda etapa da pesquisa realizada. Os resultados obtidos com os estudantes, a entrevista com a professora de matemática, bem como as afirmações dos monitores do Laboratório de Aprendizagem da Instituição, mencionadas pela entrevistada, tornam o OA sobre propriedade distributiva um dos maiores candidatos a compor o repositório de OAs da Instituição.

6.2 Limitações e Dificuldades da Pesquisa

Durante a realização deste trabalho, foram encontradas algumas dificuldades e limitações, em todas as etapas estabelecidas. Seguem-se alguns comentários sobre as consideradas mais relevantes.

Conforme mencionado no capítulo 2, em um primeiro momento, pensou-se em utilizar o sistema denominado Avalweb® para realização dos testes inicial e final, uma vez que este sistema poderia gerenciar estas aplicações, auxiliando na classificação das questões em fáceis, médias ou difíceis, apresentando resultados e outras vantagens (comentadas no capítulo 2). Além disso, tinha-se a ideia de utilizar também o sistema AdaptWeb®, que permite um ensino de forma adaptativa, isto é, com materiais personalizados de acordo com as características do aluno. A união dos dois sistemas, de forma integrada, serviria para auxiliar o professor na personalização do ensino e também da avaliação, auxiliando-o de maneira mais eficiente que outras plataformas na detecção das dificuldades de seus alunos e oferecendo formas de trabalhar com elas de modo adaptativo.

Porém, no decorrer do trabalho, percebeu-se que seria necessário um tempo excessivo para tornar o Avalweb® novamente funcional, uma vez que a versão que se tinha disponível estava bastante desatualizada. Também para utilização do Adaptweb® seriam necessários muitos ajustes, além de um contato permanente com a pesquisadora responsável pelo desenvolvimento do sistema, o que não foi possível. Como o foco desta pesquisa não era o desenvolvimento deste tipo de recurso, e sim sua utilização com fins educacionais, optou-se por utilizar as funcionalidades da plataforma MOODLE, que é a plataforma oficial utilizada pela Instituição e que dispõe de suporte sempre que necessário.

Sendo assim, algumas ideias originais tiveram que ser modificadas, tais como o uso de objetos de aprendizagem adaptativos. Ainda assim, houve um ensino personalizado, uma vez que os materiais construídos ou utilizados foram escolhidos pensando-se nos estudantes a que se destinavam e em suas características já elencadas, tanto em questões cognitivas quanto com relação aos estilos de aprendizagem predominantes.

Com relação aos materiais utilizados com os alunos, conforme mencionado ao longo do trabalho, alguns deles foram produzidos e outros selecionados na rede. Este fato também pode ser considerado uma limitação do trabalho, uma vez que, depois de toda a teoria estudada sobre produção de objetos, sabe-se que certamente se teriam materiais de maior qualidade se eles fossem produzidos especificamente para a pesquisa. De fato, observou-se que os melhores resultados obtidos são justamente relacionados aos conteúdos cujos materiais foram produzidos. Porém, conhece-se que a confecção de objetos de aprendizagem de qualidade satisfatória é um processo bastante lento, de modo que não seria possível, no tempo destinado para confecção desta tese, produzir um objeto de aprendizagem para cada erro encontrado nos testes aplicados.

Por fim, destaca-se também a dificuldade de participação dos alunos na proposta apresentada. Conforme comentado no capítulo 5, no primeiro semestre de 2014 foi feita uma primeira tentativa de aplicação das atividades que vinham sendo planejadas, com alunos de diferentes turmas de Cálculo I. Porém, esta aplicação sequer seguiu adiante, pois teve muito pouca adesão dos alunos. Acredita-se que isto ocorreu pelo fato de a professora-pesquisadora não ter, na época, contato direto com todos os estudantes, já que eram alunos de todas as turmas de Cálculo Diferencial e Integral da Instituição. No segundo semestre de 2014, sendo a pesquisadora a professora de duas turmas da disciplina, foi possível a realização de toda a sequência proposta, mostrando ainda que não há, por parte dos alunos, total confiabilidade em um trabalho somente a distância, isto é, torna-se necessária a figura presencial do professor, incentivando a participação e solicitando a realização das tarefas em determinados momentos.

6.3 Trabalhos Futuros

Com o final do período e das etapas estabelecidos para desenvolvimento do trabalho proposto nesta tese, restam alguns pontos que surgiram ao longo do processo e que não foram possíveis de serem trabalhados até o presente momento.

O primeiro deles refere-se a uma ampliação do banco de questões dos testes realizados. Esta é uma ideia que surgiu já na aplicação dos questionários “Questões 1” e “Questões 2” e que foi reforçado pela professora entrevistada ao final do trabalho. Com um maior número de questões, será possível, inclusive, se pensar na geração de questionários diferentes para os alunos, com o mesmo nível de dificuldade, simulando o que seria feito pelo sistema Avalweb®.

Também com relação ao Avalweb®, poderia-se pensar, em trabalhos futuros, na integração deste sistema com o Adaptweb®, trabalhando-se nas limitações colocadas na seção anterior e permitindo um novo ambiente virtual, que funcione de forma adaptativa.

Outra ideia de prosseguimento para esta pesquisa seria a criação de novos objetos de aprendizagem, relativos aos outros erros detectados na aplicação dos testes, e que venham ao encontro das teorias estudadas. Poderiam ser, também, criadas diferentes versões de um mesmo objeto, cada versão mais adequada a um tipo de aluno, de modo que, mesmo que em grupos, seria possível a utilização de um material mais personalizado (ou adaptativo), como era desejado inicialmente com a utilização do Adaptweb®.

Além disso, ressalta-se novamente que a proposta aqui apresentada foi aplicada no ambiente MOODLE, mas que esta não é a única possibilidade de realização, uma vez que em momento algum foram propostas atividades que só se adaptam a este ambiente. Sendo assim, é possível a aplicação do trabalho em diferentes plataformas, o que poderá também trazer alguns desdobramentos, de acordo com os recursos que cada uma oferece.

Sugere-se também um aprofundamento da Teoria dos Três mundos da Matemática na parte de análise dos fóruns de discussão, uma vez que neles apareceram indícios de que os alunos participantes da pesquisa encontram-se, predominantemente, nos mundos Conceitual-corporificado e Operacional-simbólico, não sendo notadas características do mundo Formal-axiomático, específico de muitas disciplinas matemáticas de cursos superiores. A aplicação desta teoria aliada à utilização de recursos tecnológicos é outra inovação proposta nesta Tese, mas que ainda necessita deste aprofundamento para melhor desenvolver-se.

Por fim, espera-se que tudo que foi realizado nesta pesquisa contribua para a melhoria do ensino de Cálculo nas mais variadas instituições, especialmente naquela em que o trabalho foi desenvolvido, na qual se propõe a continuidade do trabalho no Laboratório de Aprendizagem, conforme discutido na seção 5.8, o que contribuirá também para fomentar a utilização do Laboratório por um número maior de estudantes e até mesmo de professores.

Espera-se, também, que a discussão apresentada nesta tese sirva para motivar professores que lecionam disciplinas de Cálculo a utilizarem a Educação a Distância e os recursos tecnológicos disponíveis no auxílio às dificuldades de seus alunos, uma vez que ficou comprovado que esta prática pode trazer bons resultados.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Ed. Interamericana, 1980.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: putting a stake in the ground. **The Journal of the Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p. 1-14, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BARICHELLO, L. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

BELL, P., SANDOVAL, W. A. Design-Based Research Methods for Studying Learning in Context: Introduction. **Educational Psychologist**, v. 39, n.4, p. 199–201, 2004.

BORASI, R. et al. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.7, n.3, p.2-8, Nov. 1987.

BORTOLI, M. de F. **Análise de erros em Matemática**: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2001.

BROWN, A. Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. **The Journal of the Learning Sciences**, v. 2, n. 2, p. 141-178, 1992.

BURGELL, F. **¿Qué significados atribuyen al signo de *igual* los estudiantes de primer año del ciclo básico de enseñanza media?** Aportes para pensar los cimientos del álgebra. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Naturais) - Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Argentina, 2012.

CANTO, A. B. et al. Classificação de Objetos de Aprendizagem Segundo o Grau de Multimodalidade. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, vol. 11, p. 1-10, 2013.

CARDOSO, R. F. ***Avalweb* – Sistema Interativo de Gerência de Questões e Aplicação de Avaliações na *Web***. 2001. Dissertação (Mestrado em Computação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

CERULLI, M. **Introducing pupils to algebra as a theory**: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation. 2007. Tese (Scuola di Dottorato in Matematica) – Università degli Studi di Pisa, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. “Professora, eu só errei um sinal”!: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 111-138.

CURY, H. N. MORAES, J. F. D. de. Erros em questões de matemática; uma análise quantitativa. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMPÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 29., 2006, Campinas. Anais... Campinas: UNICAMP, 2006. 1 CD-ROM.

CURY, H. N.; RIBEIRO, A. J.; MÜLLER, T. J. Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática. **Unión**, n. 28, p. 143-157, dic. 2011.

DIAS, J. L. **A Propriedade distributiva da multiplicação**: uma visão diagnóstica do processo. 2004. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

FELDER, R. M. Matters of styles, **ASEE Prism**, vol. 6, n. 4, p. 18-23, 1996.

FELDER, R. M.; HENRIQUES, E. R. Learning and teaching styles in foreign and second language education, **Foreign Language Annals**, vol. 28, n. 1, p. 21-31, 1995.

FELDER, R. M.; SILVERMAN, L. K. Learning and teaching styles in engineering education. **Journal of Engineering Education**, vol. 78, n. 7, p. 674-681, 1988.

GASPARINI, I. **Interface Adaptativa no Ambiente Adaptweb:** navegação e apresentação adaptativa baseada no modelo de usuário. 2003. Dissertação (Mestrado em Computação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

GASPARINI, I et. al. Adaptweb – evolução e desafios. **Cadernos de Informática**, v. 4, n. 2, p. 47-56, 2009.

GELLER, M., TAROUCO, L. M. R., FRANCO, S. R. K Educação a Distância e Estilos Cognitivos: construindo a adaptação de ambientes virtuais. In: VII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 2004, Monterrey, México. **Anais**… Monterrey: RIBIE, 2004.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Uma breve revisão bibliográfica sobre o uso de tecnologia computacional no ensino de matemática avançada. In: CARVALHO, L. M. et al. (Orgs.). **História e tecnologia no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2. p. 153-206.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GRAY, E. M.; TALL, D. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

HARDY, N. A subtle interplay between ordinary, algebraic and analytic registers in college level Calculus courses as a source of students' difficulties. In: INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION (ICME 11), 11., 2008, Monterrey, Mexico. **Proceedings**…Disponível em: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/32>. Acesso em 20 dez. 2012.

HOCH, M., DREYFUS, T. Structure sense in high school algebra: the effects of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. v. 3, p. 49-56.

IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC)., **Draft Standard for Learning Object Metadata.** Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000.

KIRSHNER, D., AWTRY, T. Visual salience of algebraic transformations. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 35, n.4, p. 224-257, 2004.

KURI, M. A.; SILVA, N. P.; PEREIRA, A. N. Estilos de aprendizagem e recursos de hipermídia aplicados no ensino de planejamento de transportes. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 19, n. 2, p. 111-137, 2006.

KOLB, A. Y.; KOLB, D. A. Learning styles and learning spaces: enhancing experiential learning in high education. **Academy of Management Learning and Education**, v. 4, n. 2, p. 193-212, 2005.

LEITE, M. T. M. **O ambiente virtual de aprendizagem Moodle na prática docente**: conteúdos pedagógicos. 2008. Disponível em: <http://www.virtual.unifesp.br/cursos/oficinamoodle/textomoodlevvirtual.pdf>. Acesso em: 02 jul. 2011.

LIMA, R. N. de. **Equações Algébricas no Ensino Médio: u**ma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

LINDEMANN, V. **Estilos de aprendizagem:** buscando a sinergia. 2008. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

LUMSDAINE, E.; LUMSDAINE, M. Thinking preferences of engineering students: implications for curriculum restructuring. **Journal of Engineering Education**, v. 84, n. 2, p. 193-204, 1995.

LUZ, V. M. da. **Introdução ao Cálculo:** uma proposta associando pesquisa e intervenção. 2011. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MOLON, J. **Cálculo no Ensino Médio**: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2003. 3ed.

MORAES, R. Análise de conteúdo. **Revista Educação**, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MORAIS, C.; LIMA, J. V.; FRANCO, S. R. K. AVALWEB – Sistema interativo para gerência de questões e aplicação de avaliação na Web. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 3, n.1, p. 1-4, 2005.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: um conceito subjacente. 1997. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/>. Acesso em 15 dez. 2012.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011a.

MOREIRA, M. A. Meaningful learning: from the classical to the critical view. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2011b.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MORENO, R.; MAYER, R. Interactive multimodal learning environments. **Educational Psychology Review**, v. 19, n. 1, p. 309-326, 2007.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-56.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa-campus Alegrete**. 2014. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

OLIMPIO JR, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática** - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim Gepem**, n. 61, p. 125-137, jul-dez 2012.

PAIVIO, A. **Mental representations:** A dual coding approach. Oxford, England: Oxford University Press, 1986.

PAPERT, S. **LOGO**: computadores e educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

POCHULU, Marcel David. Analisis y categorización de errores en el aprendizaje de matemática en alumnos que ingresan en la Universidad. **Revista Iberoamericana de Educación,** v.35, n.4, p. 1-15, 2005.

RAMOS, P. **Ambiente virtual vivências**: análise do processo de desenvolvimento na perspectiva da pesquisa baseada em design. Rio de Janeiro, 2010. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Saúde) – Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

REIS, E. L., **O processo de construção de objetos de aprendizagem em cálculo diferencial e integral durante uma atividade de *design*.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SABBATINI, R. M. E. Ambiente de Ensino e Aprendizagem via Internet: a Plataforma Moodle. Campinas: Instituto Edumed, 2007. Disponível em: http://www.ead.edumed.org.br/file.php/1/PlataformaMoodle.pdf . Acesso em: 15 março 2015.

SANTOS, M. E. K. L. Estilos de aprendizagem dos alunos do curso de licenciatura em Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba, Brasil. **Anais…** Paraná: PUCPR, 2013. p. 1-15.

SANTOS, S. P.; MATOS, M. G. O. O ensino de cálculo I no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 458-473, ago-dez 2012.

SAUER, L. Z. **O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos**. 2004. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

SAUER, L. Z.; LIMA, I. G.; BOOTH, I. A. S. **Active Learning Strategy with potential interdisciplinary in Engineering Education**. In: ACTIVE LEARNING IN ENGINEERING EDUCATION WORKSHOP, 11., 2012, Copenhagen, Denmark. Disponível em: http://ale2012.com/FullPaper/ale2012_submission_28.pdf. Acesso em: 04/11/2013

SUNG, E.; MAYER, R. E. When graphics improve liking but not learning from online lessons. **Computers in Human Behavior**, v. 28, p. 1619-1625, 2012.

SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. **Cognitive Science**, v. 12, p. 257-285, 1988.

TALL, D. **Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive computer graphics**. 1986. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - University of Warwick, Coventry, UK, 1986.

TALL, D. **Thinking through three worlds of mathematics**. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28., 2004, Bergen, Norway. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf>. Acesso em: 20 março 2015.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically:** exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definitionin mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151–169, 1981.

TAROUCO, L. M. R. et al. Multimídia Interativa: Princípios e Ferramentas. **Renote - Revista Novas Tecnologias em Educação**, v. 7, n. 1, p. 1-9, 2009.

TORRES, D. O. **Sistema de Gerência de Questões e Respostas: Avalweb 2.0**. 2009. Trabalho de Conclusão (Curso de Ciência da Computação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

VAN DEN AKKER, J. Principles and methods of development research. In: VAN DEN AKKER, N. et al. (Eds.). **Design methodology and developmental research in education and training** The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1999. p. 1-14.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

WANG, F.; HANNAFIN, M. J. Design-based research and technology-enhanced learning environments. **Educational Technology Research and Development**, v. 53, n. 4, p. 5-23, 2005.

WILEY, D. A. **Learning object design and sequencing theory.** 2000. Tese (Doutorado em Filosofia) - Department of Instructional Psychology and Technology, Brigham Young University, Provo, UT, 2000.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática**: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

APÊNDICE A – PROVA DE CÁLCULO A

Cálculo A – Turma 178 – Prof[a]. Thaísa Müller

Prova P2 – G1	
Nome: ______________________________	**Data**: 01/11/2012

*** Não serão aceitas respostas sem desenvolvimentos ou justificativas!!!** **Boa Prova ☺**

1) Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$, determine:

a) **(0,5)** $\lim_{x \to 2} f(x)$

b) **(0,5)** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

c) **(1,0)** Se f é contínua em x = 2 (por quê?). Caso negativo, qual o valor que f(2) deveria assumir para que haja continuidade neste ponto?

2) Calcule as derivadas das funções abaixo:

d) **(1,0)** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3}$

e) **(0,5)** $g(x) = \cos x - x.e^x$

f) **(1,0)** $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$

3) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ e faça o que se pede:

a) **(1,0)** Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente

b) **(0,5)** Encontre os extremos relativos de f

c) **(1,0)** Determine os intervalos onde f é côncava para cima e os intervalos onde f é côncava para baixo

d) **(0,5)** Encontre os pontos de inflexão de f

e) **(1,0)** Faça um esboço do gráfico da função f, explicitando todos os itens anteriores.

4) (1,5) Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R\$ 3,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de R\$ 2,00 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R\$ 6000,00?

APÊNDICE B – TESTE DE SONDAGEM

Cálculo Diferencial e Integral I –2013/1
Sondagem

Caro aluno:

Na busca de um trabalho de monitoria mais direcionado para as dificuldades dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral, gostaríamos de contar com o teu empenho na resolução das questões que seguem. O desenvolvimento das questões é muito importante.

Obrigado pela sua colaboração.

1. Resolva, em IR, as seguintes equações:

a) $(x+1)(x+2)=(x+5)^2$

b) $\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$

2. Determine, em IR, o(s) valor(es) de “x” que satisfaz(em) as sentenças:

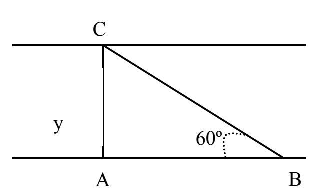
a) $9 - x^2 > 0$.

b) $| x - 2 | < 1$

3. Uma função polinomial do primeiro grau é tal que $f(0)=-3 \ \ e \ \ f(2)=0$. Qual é o valor de $f(10)$?

4. A trajetória de um projétil é descrita pela equação $y=-4x^2+24x$ onde y representa a altura, dada em metros e x, o tempo de deslocamento. Qual é a altura máxima atingida pelo projétil.

5. Um biólogo deseja saber a largura y de um rio. Do ponto A, o biólogo caminha 150 metros na direção da corrente para o ponto B e visualiza o ponto C, sob um ângulo de 60^0. Qual é a largura do rio?



APÊNDICE C – TESTE DE ESTILOS DE APRENDIZAGEM

ÍNDICE DE ESTILOS DE APRENDIZAGEM

Faça um círculo ao redor da letra “a” ou “b” para indicar sua resposta a cada uma das questões. Por favor, assinale apenas uma alternativa para cada questão. Se as duas alternativas “a” e “b” se aplicam a você, escolha aquela que é mais frequente.

1. Eu compreendo melhor alguma coisa depois de
(a) experimentar.
(b) Refletir sobre ela.

2. Eu me considero
(a) realista.
(b) inovador(a)

3. Quando penso sobre o que fiz ontem, é mais provável que aflorem
(a) figuras.
(b) palavras.

4. Eu tendo a
(a) compreender detalhes de um assunto mas ficar confuso sobre sua estrutura total
(b) compreender a estrutura total mas ficar confuso com os detalhes

5. Quando estou aprendendo algum assunto novo, me ajuda
(a) falar sobre ele.
(b) refletir sobre ele.

6. Se eu fosse um professor, eu preferiria ensinar uma disciplina
(a) que trate de fatos e situações reais.
(b) que trate de ideias e teorias.

7. Eu prefiro obter novas informações através de
(a) figuras, diagramas, gráficos ou mapas.
(b) instruções escritas ou informações verbais.

8. Quando eu compreendo
(a) todas as partes, consigo entender o todo.
(b) o todo, consigo ver como as partes se encaixam.

9. Em um grupo de estudo, trabalhando um material difícil, eu provavelmente
(a) tomo a iniciativa e contribuo com ideias.
(b) assumo uma posição discreta e escuto.

10. Acho mais fácil
(a) aprender fatos.
(b) aprender conceitos.

11. Em um livro com uma porção de figuras e desenhos, eu provavelmente
(a) observo as figuras e desenhos cuidadosamente.
(b) atento para o texto escrito.

12. Quando resolvo problemas de matemática, eu
(a) usualmente trabalho de maneira a resolver uma etapa de cada vez.
(b) frequentemente antevejo as soluções, mas tenho que me esforçar muito para conceber as etapas para chegar a elas.

13. Nas disciplinas que cursei eu
(a) em geral fiz amizade com muitos dos colegas.
(b) raramente fiz amizade com muitos dos colegas.

14. Em literatura de não ficção, eu prefiro
(a) algo que me ensine fatos novos ou me indique como fazer alguma coisa.
(b) algo que me apresente novas ideias para pensar.

15. Eu gosto de professores
(a) que colocam uma porção de diagramas nos quadros.
(b) que gastam bastante tempo explicando.

16. Quando estou analisando uma estória ou novela eu
(a) penso nos incidentes e tento colocá-los juntos para identificar os temas.
(b) tenho consciência dos temas quando termino a leitura e então tenho que voltar atrás para encontrar os incidentes que os confirmem.

17. Quando inicio a resolução de um problema para casa, normalmente eu
(a) começo a trabalhar imediatamente na solução.
(b) primeiro tento compreender completamente o problema.

18. Prefiro a ideia do
(a) certo.
(b) teórico.

19. Relembro melhor
(a) o que vejo.
(b) o que ouço.

20. É mais importante para mim que o professor
(a) apresente a matéria em etapas sequenciais claras.
(b) apresente um quadro geral e relacione a matéria com outros assuntos.

21. Eu prefiro estudar
(a) em grupo.
(b) sozinho.

22. Eu costumo ser considerado(a)
(a) cuidadoso(a) com os detalhes do meu trabalho.
(b) criativo(a) na maneira de realizar meu trabalho.

23. Quando busco orientação para chegar a um lugar desconhecido, eu prefiro
(a) um mapa.
(b) instruções por escrito.

24. Eu aprendo
(a) num ritmo bastante regular. Se estudar pesado, eu “chego lá”.
(b) em saltos. Fico totalmente confuso(a) por algum tempo, e então, repentinamente eu tenho um “estalo”.

25. Eu prefiro primeiro
(a) experimentar as coisas.
(b) pensar sobre como é que vou fazer.

26. Quando estou lendo como fazer, eu prefiro escritores que
(a) explicitem claramente o que querem dizer.
(b) dizem as coisas de maneira criativa, interessante.

27. Quando vejo um diagrama ou esquema em uma aula, relembro mais facilmente
(a) a figura.
(b) o que o professor disse a respeito dela.

28. Quando considero um conjunto de informações, provavelmente eu
(a) presto mais atenção nos detalhes e não percebo o quadro geral.
(b) procuro compreender o quadro geral antes de atentar para os detalhes.

29. Relembro mais facilmente
(a) algo que fiz.
(b) algo sobre o que pensei bastante.

30. Quando tenho uma tarefa para executar, eu prefiro
(a) dominar uma maneira para execução da tarefa.
(b) encontrar novas maneiras para a execução da tarefa.

31. Quando alguém está me mostrando dados, eu prefiro
(a) diagramas ou gráficos.
(b) texto sumarizando os resultados.

32. Quando escrevo um texto, eu prefiro trabalhar (pensar a respeito ou escrever)
(a) a parte inicial do texto e avançar ordenadamente.
(b) diferentes partes do texto e ordená-las depois.

33. Quando tenho que trabalhar em um projeto em grupo, eu prefiro que se faça primeiro
(a) um debate (brainstorming) em grupo, onde todos contribuem com ideias.
(b) um brainstorming individual, seguido de reunião do grupo para comparar as ideias.

34. Considero um elogio chamar alguém de
(a) sensível.
(b) imaginativo.

35. Das pessoas que conheço em uma festa, provavelmente eu me recordo melhor
(a) da sua aparência.
(b) do que elas disseram sobre si mesmas.

36. Quando estou aprendendo um assunto novo, eu prefiro
(a) concentrar-se no assunto, aprendendo o máximo possível.
(b) tentar estabelecer conexões entre o assunto e outros com ele relacionados.

37. Mais provavelmente sou considerado(a)
(a) expansivo(a)
(b) reservado(a)

38. Prefiro disciplinas que enfatizam
(a) material concreto (fatos, dados).
(b) material abstrato (conceitos, teorias).

39. Para entretenimento, eu prefiro
(a) assistir televisão.
(b) ler um livro.

40. Alguns professores iniciam suas preleções com um resumo do que irão cobrir. Tais resumos são
(a) de alguma utilidade para mim.
(b) muito úteis para mim.

41. A ideia de fazer o trabalho de casa em grupo, com a mesma nota para todos do grupo,
(a) me agrada.
(b) não me agrada.

42. Quando estou fazendo cálculos longos
(a) tendo a repetir todos os passos e conferir meu trabalho cuidadosamente.
(b) acho cansativo conferir o meu trabalho e tenho que me esforçar para fazê-lo.

43. Tendo a descrever os lugares onde estive
(a) com facilidade e bom detalhamento.
(b) com dificuldade e sem detalhamento.
44. Quando estou resolvendo problemas em grupo, mais provavelmente eu
(a) penso nas etapas do processo de solução.
(b) penso nas possíveis consequências, ou sobre as aplicações da solução para uma ampla faixa de áreas.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO INICIAL

Caro aluno,

estamos realizando uma pesquisa que tem como objetivo inicial identificar as necessidades dos alunos ingressantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, especialmente relacionadas a conteúdos de Matemática Básica, para que posteriormente sejam oferecidas atividades de apoio àqueles que desejarem. Para iniciarmos o trabalho, contamos com sua colaboração respondendo às questões a seguir:

1) Nome: ____

2) Curso: ____

3) Semestre:_________

4) Como você avalia o conhecimento matemático adquirido no Ensino Fundamental e Médio?

   a.( ) Ótimo

   b.( ) Muito bom

   c.( ) Bom

   d.( ) Regular

   e.( ) Péssimo

5) No Ensino Fundamental e Médio, qual era sua opinião sobre a disciplina de Matemática?

( ) Muito fácil

( ) Fácil

( ) Média

( ) Difícil

( ) Muito difícil

6) Dentre os conteúdos listados a seguir, assinale aqueles que você considera mais importantes para a resolução de problemas em Matemática:

( ) frações

( ) fatoração

( ) produtos notáveis

( ) polinômios

( ) operações e suas propriedades

( ) trigonometria

( ) geometria

( ) funções

7) Dentre os conteúdos listados a seguir, assinale aqueles em que você, usualmente, tem dificuldades:

( ) frações

( ) fatoração

( ) produtos notáveis

( ) polinômios

( ) operações e suas propriedades

( ) trigonometria

( ) geometria

( ) funções

8) Você gostaria de participar das demais etapas desta pesquisa?

( ) sim

( ) não

9) Em caso afirmativo, as respostas às questões a seguir indicam sua autorização para utilização das informações no relatório da pesquisa. Informamos que seus dados serão preservados. Solicitamos, então, que responda as questões contidas no link abaixo.

(No ambiente, neste momento o link direcionava o aluno para o teste “Questões 1”).

APÊNDICE E – TESTE “QUESTÕES 1”

1) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou 6/8 do caminho, Pedro 9/12; Ana, 3/8 e Maria 4/6. Os amigos que se encontraram no mesmo ponto do caminho são:
   a) João e Pedro
   b) João e Ana
   c) Ana e Maria
   d) Pedro e Ana
   e) João e Maria

2) Decompondo o polinômio $P(x) = 5x^2 + 5x - 30$em fatores do 1º grau, obtém-se:
a) 5(x-5)(x-3)
b) 5(x-2)(x+3)
c) 5(x+2)(x-3)
d) 5(x+5)(x+3)
e) 5(x-2)(x-3)

3) Qual(is) o(s) valor(es) de x que satisfaz(em) a sentença $|x - 2| < 1$?
   a) x < 3
   b) x < -1
   c) 1 < x < 3
   d) x = 2
   e) -1 < x < 1

4) O valor de x na equação $(x + 1)(x + 2) = (x + 5)^2$ é:
   a) 23
   b) -23/7
   c) 23/3
   d) -23/10
   e) 23/7

5) O valor de x na equação $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x+1}{4}$ é:
   a) 21/5
   b) 27/5
   c) 102/10
   d) 18/10

e) -27/5

6) Se x ≠ 2 e x ≠ 0 então a expressão $\frac{x^3+x^2-6x}{8x^2-16x}$ pode ser escrita como

a) x + 3

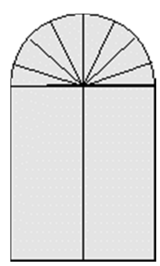
b) $\boldsymbol{\frac{x+3}{8}}$

c) 8x

d) $\frac{4}{x+3}$

e) 16

7) A figura a seguir mostra uma janela em que a parte superior é formada por um semi-círculo e a parte inferior por um retângulo, cuja altura h possui o dobro da medida da base b.



A medida da altura total da janela é

a) $\frac{3b}{2}$

b) $\boldsymbol{\frac{5b}{2}}$

c) $\frac{b}{2}$

d) $2b$

e) b

8) O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é

a) 5.000

b) 13.000

c) 18.000

d) 23.000

e) 41.000

9) Um produto foi revendido por R$ 1.035,00, com um lucro de 15% sobre o preço de compra. Esse produto foi adquirido por

a) R$ 1.020,00

b) R$ 1.000,00

c) R$ 935,00

d) R$ 900,00

e) R$ 835,00

APÊNDICE F – TESTE “QUESTÕES 2”

1) Para viajar de Porto Alegre ao Rio de Janeiro, Marcelo percorreu trechos da viagem com meios de transporte diferentes. Em 1/3 do trajeto ele andou de avião, 3/9 de carro, 2/10 de ônibus e 4/30 de trem. Com quais meios de transporte ele percorreu a mesma distância?

a) Avião e ônibus
b) Avião e carro
c) Carro e trem
d) Carro e ônibus
e) Trem e ônibus

2) Fatorando a expressão $3x^2 + 3x - 6$, obtém-se:

a) 3(x-1)(x+2)
b) 3(x+1)(x-2)
c) 3(x+3)(x-1)
d) 3(x-3)(x+2)
e) 3(x-1)(x-2)

3) Quais são os possíveis valores de x na inequação $|x + 1| > 3$?

a) x > 2
b) x > 4
c) **x > 2 ou x < -4**
d) x > 3 ou x < -3
e) x = -1

4) Quais são os possíveis valores de x na equação$2x - (x - 1) = (x + 1)^2$?

a) 0
b) 1
c) Não é um número real
d) 0 ou 1
e) 0 ou -1

5) O valor de x na equação $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = 2(x - 1)$ é:

a) 5/11
b) 19/11

c) 6
d) 1
e) 8

6) Simplificando a expressão $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ obtém-se:

a) $\boldsymbol{\frac{x+2}{x+1}}$

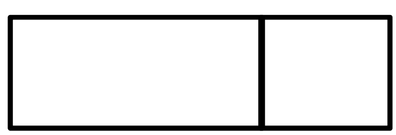
b) $\frac{-x-6}{-2x-3}$

c) 6/5

d) 2

e) $\frac{x-7}{x-6}$

7) Na figura abaixo, tem-se a representação simples da planta baixa de uma escola. A partir da entrada, segue-se com a parte das salas de aula, representada por um retângulo de base b, e cuja altura é a metade da base. A seguir, tem-se a parte do refeitório e banheiros, aqui representada por um quadrado cujos lados têm a mesma medida que a altura do retângulo. Qual o comprimento total da escola, da entrada até os fundos?

entrada  fundos

a) b

b) $\boldsymbol{\frac{3b}{2}}$

c) 3b

d) $\frac{b}{2}$

e) $\frac{5b}{2}$

8) Se (a, b) é a solução do sistema podemos afirmar que $a.b - 2$, vale:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

a) 32
b) 30
c) 12
d) 10
e) 8

9) Um relógio foi vendido pelo preço de R$ 500,00 com o lucro de 8% sobre o preço de custo. Qual o preço de custo do relógio?

a) R$ 460,00

b) R$ 277,78

c) R$ 492,00

d) R$ 462,96

e) R$ 400,00

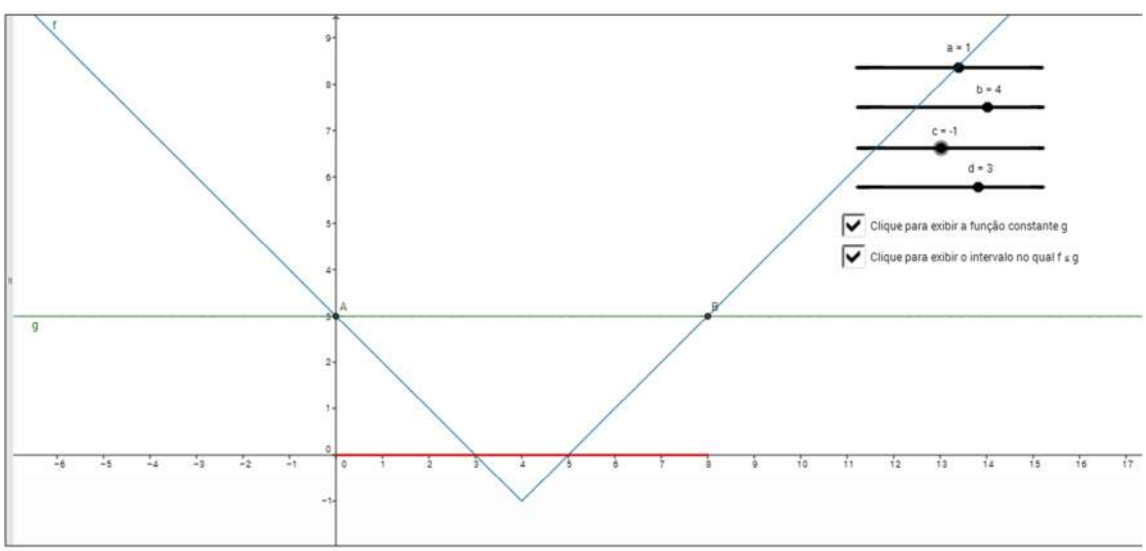
APÊNDICE G – MATERIAL SOBRE INEQUAÇÕES E MÓDULOS

O material criado mostra, utilizando o Geogebra em um navegador de internet, o gráfico de uma função do tipo f(x) = a | x - b | + c e de uma função g(x) = d, com parâmetros a, b, c, d variáveis. Dessa maneira, o aluno pode modificar esses parâmetros e observar, graficamente, os resultados das modificações. Assim, o material permite que o aluno visualize e resolva graficamente inequações envolvendo a função módulo. O material também conta com algumas instruções de uso, perguntas e respostas. Ele pode ser acessado em http://www.geogebratube.org/student/m116779. Abaixo está o material proposto, com as explicações, perguntas, respostas e uma imagem ilustrando o *applet*.

Inequações simples envolvendo a função módulo

a) Trabalhando com a função módulo:

Abaixo, está o gráfico da função f(x) = a |x - b| + c



Utilize os controles deslizantes no canto superior direito do applet para mudar os valores dos coeficientes a, b, c e verificar o que muda no gráfico da função. Ignore a caixa "Clique para exibir a função constante g" por enquanto.

Responda as seguintes perguntas:

1. O que acontece com a inclinação da função f quando o valor de a aumenta?

2. Mantendo b = 0, quais as semelhanças e diferenças do gráfico da função f para o gráfico de uma função $h(x) = ax + c$, ou seja, de uma reta? Isto é, em que intervalo temos $a|x| + c = ax + c$, em que intervalo esses valores são diferentes e qual a diferença?

3. Qual o ponto no qual a inclinação da função f muda, em relação aos coeficientes a, b, c? Isso também ocorre em uma reta?

Após responder às questões, algumas possíveis respostas podem ser verificadas no texto presente abaixo do applet.

b) Inequações com a função módulo:

Agora, marque a caixa ao lado do texto "Clique para exibir a função constante g". A função $g(x)=d$ aparecerá, juntamente com um controle para variar o valor de d e um novo botão que diz "Clique para exibir o intervalo no qual $f \leq g$". Ignore o botão por enquanto, e use o controle deslizante para verificar o que muda no gráfico de g quando d varia.

Responda as seguintes perguntas:

1. Qual a solução da inequação $|x - 3| < 1$? Analise o gráfico, com a = 1, b = 3, c = 0 e d = 1, e relacione-o com a inequação.

2. Faça o mesmo para a inequação $2|x + 1| < 4$, achando os valores de a, b, c, d adequados e analisando o gráfico no applet.

3. Resolva $-|x - 3| < -1$ da mesma maneira.

Após responder às questões, algumas possíveis respostas podem ser verificadas no texto presente abaixo do *applet*.

a) Possíveis respostas para as perguntas:

1. Com o valor de a positivo, a "concavidade" da função f fica virada para cima, enquanto com o valor de a negativo a "concavidade" fica voltada para baixo. Com a = 0, a função se reduz a uma constante c, pois f(x) = a|x - b| + c = 0|x - b| + c = 0 + c = c. Além disso, com *a* positivo, quando a aumenta, a função fica mais "fechada" ou seja, a inclinação aumenta no intervalo em que a função cresce e diminui no intervalo que a função decresce. O mesmo ocorre quando, com *a* negativo, *a* diminui.

2. O intervalo no qual f(x) = a|x| + c é igual a h(x) = ax + c é o intervalo no qual:

a|x| + c = ax + c

a|x| = ax

|x| = x

isto é, quando x é não-negativo. Observe que isso corresponde à parte do gráfico na qual x é não-negativo, isto é, à parte do gráfico que está à direita do eixo y. Quando x é negativo, os valores de f são a reflexão da reta formada pelos valores positivos em torno do eixo y.

3. O ponto no qual a inclinação da função f muda é o ponto (b, c), como pode ser observado variando os valores de b e c e observando o gráfico. Uma reta não possui nenhum ponto no qual a inclinação muda, pois sua inclinação é constante.

b) Possíveis respostas para as perguntas:

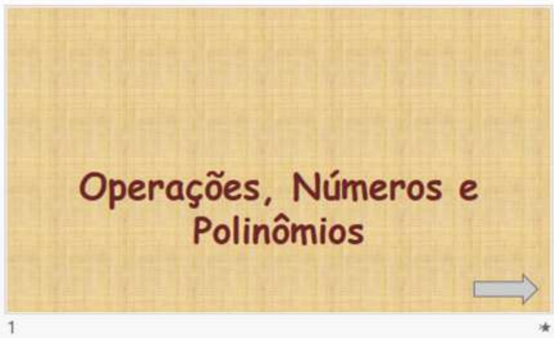
Primeiramente, observe que, nas inequações, queremos descobrir valores de x, logo as respostas estarão graficamente posicionadas sobre o eixo x. Para verificá-las, clique no botão ao lado do texto "Clique para exibir o intervalo no qual f ≤ g". As respostas são:

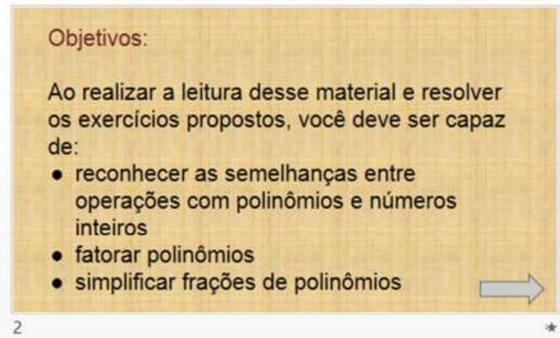
1. 2 < x < 4

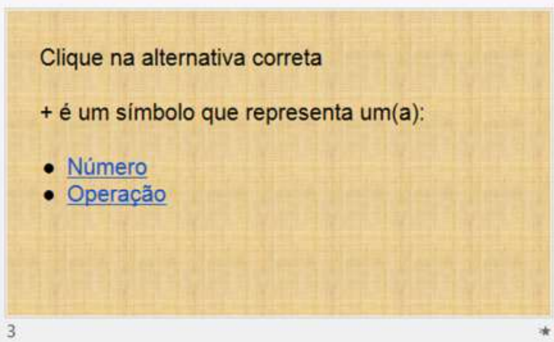
2. -3 < x < 1

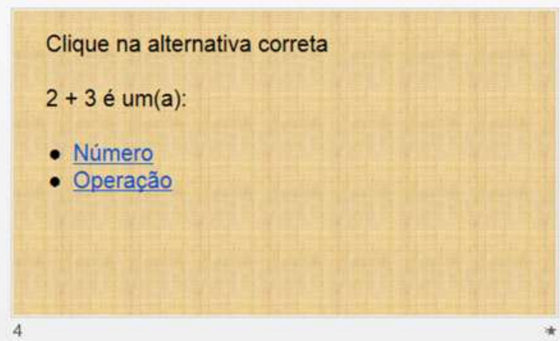
3. x < 2 ou x > 4

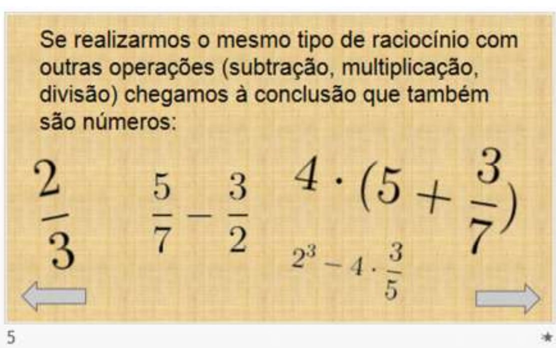
APÊNDICE H – MATERIAL SOBRE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

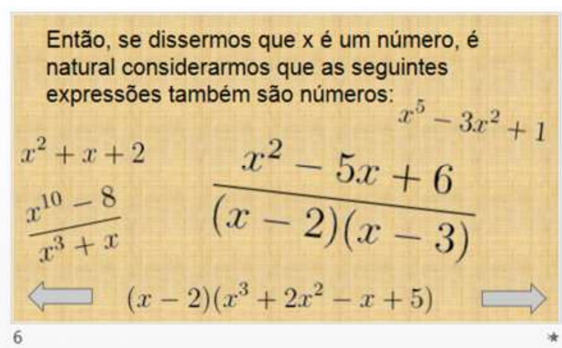


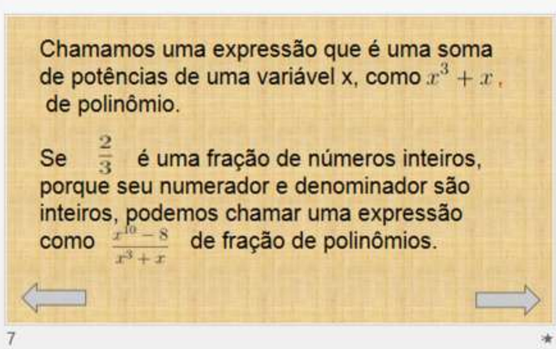


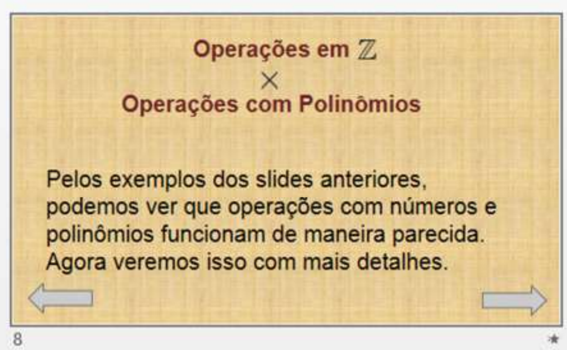












Adição

Em polinômios, como nos números inteiros, basta somar os termos semelhantes

$$1 + 3 = 4 \qquad x^2 + 3x^2 = 4x^2$$

$$2^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 = 4 \cdot 2^2 + 3 \qquad x^2 + 3x^2 + 3 = 4x^2 + 3$$

$$x^3 + 2x^3 + x + 3x + 1 = 3x^3 + 4x + 1$$

9

Subtração

Funciona como a adição: basta operar os termos semelhantes

$$2 - 3 = -1 \qquad x^5 - 2x^5 = -x^5$$

$$2 \cdot 3^5 - 3^5 + 4 = 3^5 + 4 \qquad 2x^5 - x^5 + 4 = x^5 + 4$$

10

Adição e Subtração: Operações Inversas

Somar e subtrair a mesma quantidade a um certo número é o mesmo que não somar nem subtrair essa quantidade. O mesmo vale para polinômios.

$$2 + 3 - 3 = 2 \qquad 2x^3 + 3x^2 - 3x^2 = 2x^3$$

$$x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + 1 = x^5 + 1$$

11

Adição e Subtração: Operações Inversas

Ou seja, se x é um número, ao subtrairmos x (ou somarmos -x), obtemos 0. Por isso, dizemos que -x é o oposto de x.

Exemplos:

$$\text{Oposto de } 2: -2$$
$$\text{Oposto de } -x : x$$
$$\text{Oposto de } x^3 - 2x + 1 : -x^3 + 2x - 1$$

Note que -x não é necessariamente negativo! Se x é negativo, então -x é positivo.

12

Simplificando ("Cortando") termos em equações

Em uma equação como $x^2 + x = x$

podemos entender o processo de "cortar x dos dois lados" como somar o seu oposto, -x, aos dois lados da equação, pois:

$$\begin{aligned} & x^2 + x = x \\ \implies & x^2 + x + (-x) = x + (-x) \\ \implies & x^2 + 0 = 0 \\ \implies & x^2 = 0 \end{aligned}$$

13

Multiplicação

Para multiplicar polinômios, temos que considerar que eles são somas de várias parcelas. Por isso, aplicamos a propriedade distributiva.

$$x \cdot (x^2 + 2x) = x^3 + 2x^2$$

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$$(x + 2) \cdot (x^3 + x) = x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x$$

Veja também o Objeto de Aprendizagem sobre a propriedade distributiva para uma explicação mais aprofundada!

14

Frações

Podemos interpretar frações de inteiros ou de polinômios como divisões. Contudo, pode ser mais útil mantê-las na forma de fração, por motivos que veremos adiante.

15

Multiplicação e Divisão: Operações Inversas

Multiplicar e dividir pelo mesmo número é o mesmo que multiplicar por 1. Assim:

$$\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Do mesmo modo:

$$\frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

16

Simplificando Frações

Essa relação entre multiplicação e divisão pode ser utilizada para simplificar frações, como nos exemplos dados.

Atenção: Isso só é possível porque multiplicação e divisão são operações inversas.
Uma simplificação como a seguinte não funciona (verifique realizando a divisão!)

$$\frac{2+3}{3+3} = \frac{2}{3}$$

17

Simplificando Frações (2)

Considere o polinômio

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

Queremos descobrir se é possível simplificá-lo ou não.
Para isso, precisamos de uma maneira de transformar as somas do numerador e do denominador em produtos, pois a operação inversa da divisão (presente na fração) é a multiplicação.

18

Raízes de um polinômio

As raízes de um polinômio são os valores de x que, quando substituídos no polinômio, resultam em 0. Por exemplo, 1 é raiz de

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$$
$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 3 \cdot 1 - 3 = 0$$

mas 2 não é raiz desse polinômio, já que

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = 7 \neq 0$$

19

Decompondo polinômios

Podemos decompor um polinômio em um produto como no exemplo

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$$

onde 2 e 3 são as raízes do polinômio (verifique). Um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ pode ser decomposto como $a(x-r_1)(x-r_2)$ sendo r_1 e r_2 suas raízes.

20

Simplificando Frações (3)

Voltando ao exemplo $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

Podemos decompor o numerador e o denominador de modo que obteremos $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

e poderemos simplificar ("cortar") os termos (x-2) do numerador e denominador, de modo que o resultado da simplificação do polinômio do exemplo é $\frac{x-3}{x+2}$

21

Exercícios

Clique na forma simplificada de cada um dos polinômios dados.

1. $\frac{x^2-4x+3}{x-3}$

a) $x-4$
b) $x-1$
c) x^2-4
d) $x-3$

22

2. $\frac{x^2-6x+8}{(x-4)^2}$

a) $\frac{x^2-6x}{x^2-16}$
b) $x-2$
c) $\frac{x-2}{x-4}$
d) $\frac{3x}{8}$

23

3. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-1}$

a) $\frac{-7x+10}{-1}$
b) $\frac{x-2}{x-1}$
c) $7x-10$
d) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-1}$

24

APÊNDICE I – LISTA DE MATERIAIS UTILIZADOS NO MOODLE

1. Simplificação de frações (frações equivalentes)

https://webapp6.pucrs.br/lapren//servlet/br.pucrs.lapren.controller.ObjetoAprendizagemAtividadeDinamicoControl?idObjetoAtividade_html=215

2. Encontrar raízes de equação do segundo grau
http://www.calculadoraonline.com.br/equacao-2-grau

Sequência de atividades:

Equação do 2° grau

Denomina-se equação do 2° grau, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde x é a incógnita e a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. a, b e c são coeficientes da equação.

Como definimos, temos obrigatoriamente que $a \neq 0$, no entanto podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$.

- Caso $b \neq 0$ e $c \neq 0$, temos uma equação do 2° grau completa. A sentença matemática $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ é um exemplo de equação do 2° grau completa, pois temos $b = 3$ e $c = -5$, que são diferentes de zero.

- $-x^2 + 7 = 0$ é um exemplo de equação do 2° grau incompleta, pois $b = 0$.

- Neste outro exemplo, $3x^2 - 4x = 0$ a equação é incompleta, pois $c = 0$.

- Veja este último exemplo de equação do 2° grau incompleta, $8x^2 = 0$, onde tanto b, quanto c são iguais à zero.

Para a resolução de uma equação do segundo grau completa ou incompleta, podemos recorrer à fórmula geral de resolução:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula também é conhecida como **fórmula de Bháskara**.

Para a resolução de equações do 2° grau, podemos recorrer ao uso de certos recursos, como por exemplo, a calculadora online: http://www.calculadoraonline.com.br/equacao-2-grau, que não apenas resolve equações completas e incompletas, mas explica passo a passo.

Resolva as equações abaixo e, depois, usando a calculadora, verifique suas respostas:

a. $5x^2 - 3x - 2 = 0$

b. $3x^2 + 55 = 0$

c. $x^2 - 6x = 0$

3. Fatoração de polinômio de grau 2
   Material do Apêndice H

4. Módulo
   Material Apêndice G

5. Resolução de inequações
   Material Apêndice G

6. Propriedade distributiva
   (Objeto de aprendizagem do capítulo 5)

7. Produto notável
   (Objeto de aprendizagem do Capítulo 5)

   http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/raquel_leonogildo_gustavo_tania/projeto2MX.html

8. Resolução de equações

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions&from=category_g_4_t_2.html

Sequência de atividades: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1951

9. Simplificação de frações algébricas

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/14805/launch.html?sequence=6

Material do Apêndice H

10. Soma de frações algébricas
Material do Apêndice H

11. Sobreposição de figuras
http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1220/

12. Resolução de sistemas

https://www.youtube.com/watch?v=lGdBtMgQIs0

13. Porcentagem e lucro

http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1236/atividade1_parte2.html

APÊNDICE J – FÓRUNS

PRODUTOS NOTÁVEIS

Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 11:37

É possível desenvolver as expressões **$(3x+1)^2$** e **(x-1).(x+1)** sem fazer uso da propriedade distributiva? Como seria?

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - quinta, 9 Out 2014, 18:10

$a^2 + 2.a.b + b^2$, que vai gerar uma função no padrão $a.x^2+b.x+c$

no caso

$(3x)^2 + 2.(3x)(+1) + (1)^2$

E com uso dessas propriedades fica fácil indicar as raízes apenas olhas para as funções
1: Raiz -1/3
2: Raízes -1,+1

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 21:51

Ok, mas repara que não foram pedidas as raízes. Concordo que na primeira podemos usar diretamente a regra do produto notável.

E como seria a segunda, sem fazer a distribuição dos termos?

Alguém pode ajudar?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] sábado, 11 Out 2014, 00:14

A segunda ficaria o quadrado de "a" menos o quadrado de "b"

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 14:10

$(X-1).(X+1) = X^2-1$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] segunda, 13 Out 2014, 14:55

1º termo ao quadrado mais duas vezes (1º termo + 2º termo) mais 2º termo ao quadrado

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 18:04

$(1º\ termo)^2+2*(1º termo+2º termo)+(2º termo)^2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAISA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 16:49

Armando,

esse seria o procedimento usado em qual das expressões?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 18:20

(x - 1) * (x +1)   usando baskara: a=1, b=0, c=-1

x*x=x²   resultado do x é= 1

x*+1=+1x

-1*x=-1x

-1*+1=-1

x²+1x-1x-1=0

x²-1=0

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAISA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 16:50

Ok, esse seria o procedimento usando a propriedade distributiva.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] domingo, 12 Out 2014, 19:37

Sim, a primeira e só usar a regra do produto notável, o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, e o quadrado do segundo, na segunda ficaria o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:40

A primeira " **(3x+1)²** " ficará uma função no padrão ax²+2*a*b+c

ou seja: (3x+1)² = (3x+1)*(3x+1)= 3x²+6x+1

A segunda " **(x-1).(x+1)** " ficará o primeiro termo ao quadrado + o primeiro vezes a soma do segundos (-1 e +1) + a multiplicação dos segundos, ficando assim: x²+0x-1 => x²-1

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 21:08

$3x^2+1$

$3x^2+1=0$

$3x^2=-1$

$x^2=-3-1$

$x^2=-4$

X=raiz 4

X = + - 4

(x-1).(x+1)

$x^2-1=0$

$x^2=1$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 16:54

Alguém poderia me ajudar a explicar para a colega o que tem de errado na primeira resolução dela?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 17:17

O 3 ta multiplicando o x^2, então quando passar pro outro lado tem que ser dividindo, e não subtraindo. Seria isso?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:34

Ok, isso sim... e o que mais?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] segunda, 13 Out 2014, 15:12

nao conseguir desenvolver.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:49

Felipe, $(3x+1)^2 = (3x+1)(3x+1)$, dessa maneira pode-se usar a regra $a^2 + 2.a.b + b^2$ para resolver sem ter que aplicar a propriedade distributiva.

(x-1)(x+1) para não aplicar a distributiva você pode fazer o quadrado do primeiro termo menos (fora) o quadrado do segundo termo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 16:53

Exatamente! Podemos usar a propriedade distributiva para comprovar estas regras citadas pelo Pedro.

Inclusive para um caso genérico. Quem poderia comprovar para mostrar a todos nós, usando a propriedade distributiva, as igualdades abaixo?

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 17:18

Na primeira expressão utiliza-se a fórmula ($a^2 + 2ab + b^2$), e na segunda, como tempos as mesmas propriedades, porém diferentes sinais, põe-se o x^2 e o -1, porque se utilizássemos a propriedades distributiva teríamos o +x e o -x, que cortaríamos e sobraria o x^2 -1.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:34

Mesmas propriedades ou mesmos termos?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - terça, 14 Out 2014, 23:18

termos

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 15 Out 2014, 17:46

Seguindo a discussão, repito minha última pergunta:

Quem poderia comprovar para mostrar a todos nós, usando a propriedade distributiva, as igualdades abaixo?

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - quarta, 15 Out 2014, 18:36

(a+b)^2 = a×a+a×b+b×a+b×b = a^2+2ab+b^2

(a+b)(a-b)=a×a-ab+ba-b×b=a^2-b^2

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 18:37

(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b).(a+b) e ao multiplicar "todos de um lado por todos do outro" ou também o "chuveirinho" encontramos: a.a + a.b + b.a + b.b que fazendo as devidas alterações resultamos em a^2 + 2.a.b + b^2

(a+b).(a-b) = a^2-b^2, pois ao multiplicarmos o primeiro lado da igualdade, isto é, fazer o "chuveirinho" de

(a+b).(a-b) encontramos: a^2 - a.b + b.a - b^2, nota-se que por termos -ab e +ab teríamos a^2+ 0ab - b^2 e portanto teríamos apenas a^2 - b^2

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 18:40

Sora, aquela igualdade (a+b)(a-b) = a^2 MENOS b^2 não? Pq na minha resposta acima acabei usando com o menos, comprovado pela explicação do cálculo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 21:44

Ok, desculpem, eu havia digitado errado.

As igualdades que pedi para vocês comprovarem deveriam ser:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Obrigada pela correção, Aleph!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 16:39

$(a+b)^2 = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2(a \times b) + b^2$

$(a+b)(a-b)= a \times a + a \times -b + b \times a + b \times -b = a^2 - b^2$

Seria isso que tu está pedindo, sora?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 21:43

Isso aí, Julio!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por [redacted] - terça, 21 Out 2014, 19:11

Na primeira faz o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo

Na segunda faz o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Produtos Notáveis
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 12:59

Encerrando a discussão:

Para resolver essa questão, basta usar as regras de produtos notáveis, que surgiram ao longo das postagens:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b)= a^2 - b^2$

É claro que seria possível também resolver usando a distributividade, apenas não era o objetivo no momento.

Questão resolvida então, quem ainda tiver dúvidas entre em contato. ☺

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

ADIÇÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 12:03

Explique como devemos proceder para somar as frações abaixo:

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x-1}{x}$$

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 18:40

Eu faria o mínimo múltiplo comum de: (x-2) e x, depois eu dividiria pelo denominador e multiplicaria pelo numerador.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:49

Faria o minimo, e depois resolveria normalmente.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 15:07

MMC, o resultado do mmc como denominador, somaria os numeradores e simplificaria o resultado

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:34

MMC

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 17:43

Ok... e quem seria o mínimo múltiplo comum dos denominadores?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 18:53

O minimo seria (x-2)(x).

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 12:26

MMC de x-2 e x q é (x)(x-2)=x^2-2x, dividiria pelos denominadores e multiplicaria pelos numeradores, isso daria (x^2+x^2-3x+2)/(x^-2x) e juntaria os iguais (2x^2-3x+2)/(x^2-2x)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 13:54

Observação importante: na soma de frações, sejam elas numéricas ou algébricas, é preciso deixá-las, inicialmente, com um mesmo denominador, correto?

Esse denominador comum precisa ser, necessariamente, o MMC?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 17:40

$(x) * (x) / (x-2)*(x) + (x-1) *(x-2) / (x)* (x-2) = (2x^2 - 3x + 2) / (x^2 -2x)$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] quinta, 16 Out 2014, 18:35

O mmc é x^2-2x, que é o denominador, portanto ficará assim, $x^2 + (x-1).(x-2)/x^2 - 2x = 2x^2 - 3x + 2/x^2\text{-}2x$. O mmc foi achado da multiplicação dos dois denominadores. E os numeradores são multiplicados pelos mesmos que foram multiplicados pelo seu denominador.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 18:46

Primeiro deve se fazer o MMC que nesse caso multiplica x -2 por x que resulta em x^2 - 2x. Depois o numerador de um é multiplicado pelo denominador do outro no caso (x).(x) e (x -1).(x-2) resultando em $x^2+x^2-2x-x+2/x^2-2x \longrightarrow 2x^2-3x+2/x^2-2x$

Re: Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 21:41

Ok, pessoal! Mas vamos prestar atenção no meu último comentário:

Observação importante: na soma de frações, sejam elas numéricas ou algébricas, é preciso deixá-las, inicialmente, com um mesmo denominador, correto?

Esse denominador comum precisa ser, necessariamente, o MMC?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 23:11

não precisa necessariamente ser o mínimo, mas deve ser um múltiplo comum para que se some as frações

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 13:14

Exatamente, Gabriel!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Soma de frações algébricas
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 13:17

Encerrando a discussão:

Conforme foi colocado, é preciso reduzir ambas as frações ao mesmo denominador, no caso x(x-2).

Depois, segue-se com:

$[x^2 + (x-2)(x-1)]/x(x-2) = (x^2+x^2-3x+2)/x^2-2x = (2x^2-3x+2)/x^2-2x$

Quem tiver alguma dúvida no procedimento apresentado, manifeste-se!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

FATORAÇÃO

Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 00:30

Como você faria para fatorar o polinômio $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$? Este mesmo procedimento poderia ser usado para fatorar o polinômio $y^2 - 8y + 15$?

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:00

O primeiro polinômio é de 4º grau, uma derivação implícita, teria que explicitar isolando o y.

O segundo polinômio é de 2º grau fazendo bhaskara saberemos quais são suas raízes.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 17:44

Por que derivação implícita, se não estamos derivando?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:46

No primeiro colocaria em evidencia os termos semelhantes, porem não se pode fazer a mesma coisa no segundo, pois o segundo no segundo pode-se usar a regra do produto e da soma.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 17:46

Certo, concordo que o primeiro polinômio possui fatores comuns, possíveis de serem colocados em evidência.

E no segundo, foram citados métodos para encontrar as raízes... o que fazer depois de encontrá-las?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 09:05

Depois de encontradas as raízes da segunda basta fazer a(y-y')(y-y'')

Ficaria 1(y-5)(y-3)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 12:54

No primeiro coloca-se em evidência o $2xy^2$ ficando $2xy^2(4x^3+3x^2y-y^2)$ e no segundo caso usa-se a propriedade distributiva (y-5)(y-3)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 13:44

Concordam com o que foi sugerido pelo Pedro?

E com o Leonardo, que falou em propriedade distributiva? Não estamos apenas fatorando?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por [redacted] - segunda, 20 Out 2014, 19:52

Concordo com o que o Pedro falou, e a respeito do Leonardo, é só fatorar a segunda equação.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 22 Out 2014, 13:49

E o que a fatoração tem a ver com a propriedade distributiva que ele citou?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Fatoração
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 13:13

Encerrando a discussão:

Conforme apresentado pelos colegas, a fatoração dos polinômios pode ser feita da seguinte forma:

1) Colocando $2xy^2$ em evidência, obtemos $2xy^2(4x^3+3x^2y-y^2)$

2) Encontrando as raízes do polinômio de grau 2, que são 5 e 3, temos $(y-5)(y-3)$

Observem que, conforme comentado no fórum correspondente à propriedade distributiva, o "colocar em evidência" é uma aplicação desta propriedade.

Em caso de dúvidas, entrem em contato!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

INEQUAÇÕES

Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 10 Out 2014, 16:40

O que você considera um bom raciocínio inicial para resolver a inequação $(x+3)(x-2) < 0$?

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inqeuações
por [redacted] - sexta, 10 Out 2014, 16:09

eu começaria com produto.

ps: o titulo tá errado "In*qe*uações"

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inqeuações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 10 Out 2014, 16:41

Alcides, estás dizendo que usarias a propriedade distributiva para obter um polinômio de grau 2?

E os demais, fariam da mesma forma?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inqeuações
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 14:58

Sim, usaria a propriedade distributiva para obter a equação de 2º grau, e em seguida aplicaria a bhaskara

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 18:30

Eu faria a distribuitiva que me daria um polinômio: $x^2-2x+3x-6<0$, logo eu faria a baskhara que me daria duas raízes: $3>0$ e $-1<0$.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:42

Um bom começo e notando q a inequação ja da o valor das raízes da raízes dela, depois seria so escrever a resposta.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 16:36

E como ficaria a resposta?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] domingo, 12 Out 2014, 20:57

Aplicaria o produto, tornando um polinômio de grau 2 e em seguida baskara.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:00

Eu faria da mesma forma, usaria a multiplicação e após bhaskara.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:37

Primeiro faria o produto ($x^2+1x-6<0$) e depois faria a bhaskara do mesmo, achando como resultado 2 e -3

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sábado, 18 Out 2014, 00:59

Para o pessoal que respondeu que usaria a propriedade distributiva e depois aplicariam a fórmula de Báskhara: após achar as raízes, qual o próximo passo para encontrar a resposta?

Agora, uma reflexão para todo o grupo: concordam que temos um produto que deverá ser negativo, e portanto, os fatores (que estão entre parênteses) devem ter sinais diferentes? Como poderíamos usar isso para resolver a questão?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - sábado, 18 Out 2014, 00:39

Eu faria de forma separada para resolver $(x + 3)(x - 2) < 0$

Primeiro passo:

$x + 3 < 0$

$x < -3$

Segundo passo:

$x - 2 < 0$

$x < 2$

Dessa forma, relacionando os dois passos, a solução da inequação é:

$\{x \in R \,/\, x < -3 \text{ e } x < 2\}$ ou também $\{x \in R \,/\, x < 2 \text{ e } x \neq -3\}$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sábado, 18 Out 2014, 01:00

Mas o produto de fatores negativos dá uma resposta negativa?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - segunda, 20 Out 2014, 19:56

Caso o numero de fatores for par, o produto será positivo e não negativo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 22 Out 2014, 13:50

Pois é, e como fica então o que foi feito pelo Aleph?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] terça, 21 Out 2014, 19:26

Como a inequação já esta em evidencia, quer dizer que as raízes são -3 e 2. Ou seja, x<-3 e x<2, como x<-3 é comum para os dois, a resposta seria x<-3.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 22 Out 2014, 13:52

Eu diria que a inequação está fatorada, não em evidência.

Mas esse procedimento é o que foi explicado pelo Aleph, certo? Então seguimos a discussão: o produto de fatores negativos será menor que zero? Pois isso é o que foi usado...

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por [redacted] - quarta, 22 Out 2014, 15:08

O produto de fatores negativos será maior que zero.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Inequações
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 13:05

Ok, vamos então encerrar a discussão:

Partindo da desigualdade (x+3)(x-2) < 0, devemos observar que há um produto de dois fatores, x+3 e x-2, e que esse produto deve ser negativo. Sendo assim, os fatores devem possuir sinais contrários, isto é:

(x+3<0 e x-2>0) ou (x+3>0 e x-2<0)

(x<-3 e x>2) ou (x>-3 e x<2)

No primeiro caso, não há nenhum valor de x que satisfaça simultaneamente as condições exigidas. Fiquemos então com o segundo, isto é, -3<x<2.

Qualquer dúvida, sigam se manifestando!

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 00:19

Observe a situação abaixo:

Marcos, Pablo e Jamile são garçons. Eles juntam suas gorjetas, colocando-as em uma jarra grande e, no final do dia de trabalho, cada um deles leva 1/3 do dinheiro. Um dia ao ir embora Marcos levou 1/3 do dinheiro do pote. Pablo, não sabendo que Marcos já tinha tomado a sua parte, levou 1/3 do dinheiro do pote. Jamile, não sabendo que os colegas já haviam pegado suas partes, levou 1/3 do dinheiro do pote. Restaram R$ 16,00 no pote. Quanto dinheiro tinha no pote antes deles retirarem suas partes?

Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:19

Eu somaria: 1/3+1/3+1/3+16,00 e dá o resultado do total. Acho que é R$ 17,00

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 17:51

Armando, mas 1/3 "de alguma coisa" não dá pra somar com 16 reais, pois não é 1/3 de real, no caso.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 17:04

Dividiria os 16 reais por três e somaria o resultado, achando 21,3. Faria a mesma coisa com o resultado, achando 28,4 e depois os 37,8 reais, que é o dinheiro que tinha antes de retirarem suas partes.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:10

José Pedro,

poderias explicar por que dividir 16 por 3 e assim sucessivamente?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - terça, 14 Out 2014, 11:13

Pensei da mesma forma, dividindo o 16 por 3, tu vai achar 1/3 do 16, dai tu soma pra ver o valor que tinha antes, e assim sucessivamente até achar o valor que tinha antes do primeiro garçon pegar

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - terça, 14 Out 2014, 14:59

E será que o que tinha antes era 16 mais um terço de 16? Afinal, 16 foi o que ficou **após** todas as retiradas.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 23 Out 2014, 11:18

Porque o dinheiro seria dividido em 3 partes. Como uma das pessoas já havia retirado, dividiria por 3 e somaria o resultado final com o 16, que foi o dinheiro informado no problema.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 11:56

Pega-se o 16 divide-se por 2(devido ser o valor q Jamile acha q seus colegar devem pegar) e multiplica-se por 3 para saber quanto q havia no pote quando Jamile não havia pego seu dinheiro. Logo pega-se o 24 e refaz o processo para saber quanto de dinheiro havia no pote quando apenas o Marcos havia retirado seu dinheiro. Depois repete-se mais uma vez para ver quanto de dinheiro havia no pote antes de cada um retirar a sua parte(54).

16.3/2= 24.3/2=36.3/2=54

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 12:19

Eu usaria os R$ 16,00 como base para os cálculos, pois, se após retirar 1/3 sobraram R$ 16,00, o valor retirado por Jamine foi de R$ 8,00, deixando assim partes iguais para Marcos e Pablo 16/2=8R$. R$ 16,00 que sobraram + R$ 8,00 retirados por Jamine, fechariam R$ 24,00, valor deixado por Marcos após a sua retirada. 24/2=12R$ sendo assim Marcos retirou R$ 12,00 da caixa em sua vez. R$ 24,00 que sobraram + R$ 12,00 retirados por Marcos, fechariam R$ 36,00, valor deixado por Pablo após a sua retirada. 36/2=18R$ sendo assim Pablo retirou R$ 18,00 da caixa em sua vez. R$ 36,00 que sobraram + R$ 18,00 retirados por Pablo, fechando assim o valor total INICIAL da caixa= **R$ 54,00**

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 14:02

Ok, estamos nos encaminhando para a solução. A resposta correta é, de fato, 54 reais, mas vamos agora analisar as resoluções possíveis.

Observem que as duas últimas respostas foram pensadas em desfazer o que é narrado no problema, analisando de trás para frente, ou seja, a partir da informação que se tem, volta-se sempre um passo atrás até chegar ao valor inicial.

Mais uma proposta agora: quem poderia resolver isso equacionando a situação?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:23

Vamos lá então, encerrando a discussão:

Considerando as retiradas sucessivas e chamando de x a quantidade inicial de dinheiro que havia no pote, temos

$x - 1/3\,x - 2/9\,x - 4/27\,x = 16$

$(27x - 9x - 6x - 4x)/27 = 16$

$8x = 432$

$x = 54$

Logo, havia inicialmente 54 reais.

Em caso de dúvidas, sigam se manifestando. 🙂

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 12:04

Observe a situação abaixo:

Noemi tem certa quantia em um banco. Sua irmã Alice tem R$500,00 a mais. Juntas, elas têm, R$3.000,00. Quanto tem Noemi? Quanto tem Alice?

Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:27

Eu acho que o sistema fica assim: x + 500y=0

x+y= 3000

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:59

Montaria um sistema, com as incógnitas x e y, dai obteria os valores de tais incógnitas.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:30

x+y=3000

y=500

x+500=3000

x=2500

y=500

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:12

Ok, concordo com os que se manifestaram que devemos montar um sistema.

Vocês concordam com os dois sistemas apresentados pelos colegas?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 19:00

Não porque o sistema ficaria assim:

x+500=y

x+y=3000

x-y=-500

x+y=3000

Dai depois resolvendo isso, ficaria:

x=1250

y=1750

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 00:31

Eu concordo com o Eduardo e com a Daniela. Pois se fizermos a verificação o resultado dará resposta do sistema.

x+500=y ------------- x-y=-500 corta os "y" pois tem sinais opostos e obtêm-se 2x=2500----- x=1250

x+y=3000------------ x+y=3000

Agora é só substituir o valor encontrado para "x" em um dos sistemas:

1250+500=y-------y=1750

E a verificação pode ser feita unindo os dois valores:

1750+1250=3000.

Como o enunciado falou, Alice tem R$500,00 a mais que Noemi, ou seja Alice tem R$1750,00 e Noemi tem R$1250,00, e juntas elas tem R$3000,00

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - terça, 14 Out 2014, 11:10

x+y=3000

x+500=y

ou seja, x+(x+500)=3000

2x=3000-500

x=2500/2

x=1250 -> y=1250+500=1750

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 16:31

Alice e Noemi possuem a mesma quantidade de dinheiro (x), porém Alice possui mais 500 reais. Eu acredito que a equação fique:

2x + 500 = 3000

x = 1250

Noemi possui 1250.

Contudo Alice, 1750.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 18:21

x+y=3000, sendo x=500

então:

500+y=3000

logo

y=3000-500

y=2500

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAISA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 21:49

Rafael,

o que significam x e y nessa tua resolução? Qual a quantia de cada uma?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 23 Out 2014, 10:39

acho que se y fosse 2500, no caso, o valor de uma das irmãs, a outra teria 2000 (500 a menos)

e na soma, 2500+2000 daria 4500 e nao 3000

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] sábado, 18 Out 2014, 00:21

Método por sistema x e y

Quantia de Noemi = x

Quantia de Alice = y

x + y = 3000

-x + y = 500

Dessa forma podemos fazer uma "soma" das linhas horizontais, ou seja, (x + (-x) = 0), (y + y = 2y) e (3000 + 500) encontrando entao, 0 + 2y = 3500 que portanto tem-se y=1750. Assim substitui-se esse valor de y em qualquer umas das linhas do sistema, para se encontrar o valor de x:

-x + 1750 = 500 sendo portanto o valor de x=1250.

Método por equação simples

Quantia de Noemi (x)

Quantia de Alice (x+500)

Dessa forma: x + x + 500 = 3000, sendo 2x = 2500 e por conseguinte o valor de x = 1250

Como Alice tem 500 a mais que Noemi, simplesmente se adiciona 500 ao valor de x, descobrindo-se então que Alice tem 1750 reais.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 23 Out 2014, 15:18

- "x" representa a quantia que Noemi tem no banco e "y" representa a quantia que Alice tem no banco.

- A questão diz que Alice tem R$500,00 a mais que Noemi, logo y = x + 500

- Somando a quantia de Noemi e Alice resulta em R$3000,00, logo x + y = 3000, substituindo "y" por "x +500", temos x + x + 500 = 3000 dai é apenas resolver para descobrir a quantia que Noemi tem no banco.

x + x + 500 = 3000

2x = 3000 - 500

2x = 2500

x = 2500 / 2

x = 1250

Se Alice tem R$500,00 a mais que Noemi, basta somar este valor a quantia de Noemi.

y = 1250 + 500

y = 1750

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAISA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:28

Encerrando a discussão:

A resposta correta é, de fato, que Alice tem R$ 1750,00 e Noemi R$ 1250,00.

Além das respostas apresentadas, observo apenas que o sistema poderia ser resolvido também pelo método da adição, o que levaria ao mesmo resultado quando manipulássemos as equações x + y = 3000 e y = x + 500.

Caso ainda tenham restado dúvidas sobre esta questão, entrem em contato.

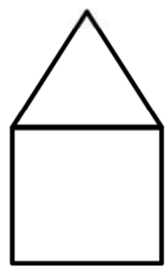
Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

SOBREPOSIÇÃO DE FIGURAS

Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 12:09

Explique como você resolveria o problema abaixo:

Calcule a área e o perímetro da figura abaixo, sabendo que a mesma é formada por um quadrado de lado 5 cm e um triângulo equilátero.



Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 9 Out 2014, 15:50

Dividir em duas partes: Triângulo equilátero e quadrado.

Triângulo equilátero:

Perímetro = 5 + 5 = **10 cm** (sem contar parte inferior do triângulo)

Área = (b x h) ÷ 2

Pitágoras para descobrir altura do triângulo:

$5^2 = (2,5)^2 + h^2$

$25 = 6,25 + h^2$

$h^2 = 25 - 6,25$

$h = \sqrt{18,75}$

h = 4,33

Aplicando à fórmula da área:

(5 x 4,33) ÷ 2

21,65 ÷ 2

Área = **10, 82 cm²**

Quadrado:

Perímetro = 5 + 5 + 5 = **15 cm** (sem contar parte superior do quadrado)

Área = b x h = 5 x 5 = **25 cm²**

Perímetro total = 10 + 15 = 25 cm

Área total = 10,82 + 25 = 35,82 cm²

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 21:54

Quem sabe me dizer por que a colega usou apenas dois lados do triângulo para encontrar o perímetro?

E a resolução dela, concordam?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:29

Porque o triângulo é equilátero, os três lados são iguais.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 12:20

Concordo com a resolução dela, muito bem explicada por sinal. e em relação dela ter usado apenas 2 lados do triangulo no perimetro e 3 no quadrado, e porque a figura, mesmo q sendo separada para fins de calculos de area, ela e uma so! Logo, aquela divisão entre elas nao deve constar no calculo do perimetro. Inclusive, podemos pensar na figura como um poligono de 5 lados.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 20 Out 2014, 15:35

Concordo com a resolução

Ela usou só duas partes do triangulo para calcular o perimetro porque a parte inferior dele não conta como perimetro da figura total

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 20 Out 2014, 17:40

Exatamente... o perímetro é a soma dos lados "externos" da figura, digamos assim.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 14:34

Diferente de ti,eu só faria a área do triangulo usando a formula do $(l^2/4)\sqrt{3}$, resultando em $(5^2/4)\sqrt{3} = 10{,}82$ cm²

Depois faria a área do quadrado l^2, resultando em $5^2 = 25$ cm²

Área total $25 + 10{,}82 = 35{,}82$ cm²

O perimetro faria o mesmo que você.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 20 Out 2014, 17:41

E essa fórmula que o Julio mencionou, não é o mesmo que a Victoria fez?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:03

Eu separaria a figura em duas um triângulo e um quadrado, calcularia a área de cada um e depois somaria, quanto ao perímetro somaria os valores dos lados, porem não somaria os lados q estão dentro da figura total.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:29

Para encerrarmos a discussão:

De fato, a primeira resposta, apresentada pela Victoria, está correta, bem como os comentários relacionados.

Caso alguém ainda tenha dúvidas sobre o assunto, podemos seguir debatendo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

PORCENTAGEM E LUCRO

Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 12:06

Observe a situação abaixo:

Mike acabou de comprar uma bicicleta nova. Incluindo 6% de imposto sobre a venda, Mike pagou R$296,80 pela bicicleta. A loja acrescentou R$20,00 ao custo para cobrir o trabalho de montagem, o que deu margem de um lucro de 40%. Quanto custou a bicicleta para a loja?

Como você faria para começar a resolver este problema? Expresse, em palavras, o seu raciocínio.

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 9 Out 2014, 20:12

Se os 20 reais terem sido acrescentados antes dos 6% deve-se seguir esse raciocínio: 296,80 é o preço total. Como foi adcionado 6%, 296,80 é igual à 106% do preco da bike montada. Com regra de 3 acha-se 280! Porem esse é o valor da bike montada e como o serviço de montagem custa 20 reais, subtrai-se os 20 e se encontra o preço puro da bike para a loja 260 reais?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 22:12

Ok, vamos supor que os 20 reais foram acrescentados antes dos 6%... mas e onde entram os 40% de lucro?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - sexta, 10 Out 2014, 01:17

Se 296,80 for o preco total ja com os 6%,somaria os 20 reais do custo da montagem,e ficaria 316,80.

Fazendo um regra de 3 entre 100% ----316,80

40%------X, teriamos 126,72.

Fazendoa subtração dos valores temos o valor pago pela loja na bike.

316,80 - 126,72 = 190,08

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 10 Out 2014, 16:47

Vejam que a Alessandra e o Jorge interpretaram diferente o problema, pois ela considerou que os 20 reais da montagem deveriam ainda ser acrescentados ao valor final. Até aí, tudo bem.

Mas de novo sobre os 40%: será que dá no mesmo acrescentar 40% do valor inicial ou retirar 40% do valor final? (retirar do valor final foi a conta apresentada pela Alessandra)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:15

Eu descontaria o valor de 20,00 do valor que Mike pagou, e depois faria regra de três descobrindo quanto q e 40% do valor q Mike pagou menos os vinte, dai depois pegaria o valor q deu e retiraria do valor total dai teria o valor q Mike pagou pela bicicleta.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:28

Para mim a loja queria 278,992 pela bicicleta (296,80 - 6%).

Mike pagou 316,80 da bicicleta + montagem.

Loja lucrou 40% de 278,992+20= 119,5968.

A bicicleta teria custado quase 180 reais para a loja.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAISA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:21

Pessoal,

observem que todos, com excessão do Pedro, quando calcularam os 40%, o fizeram em cima do valor final e não consideraram que são 40% do valor inicial, que será somado a ele para chegar no valor final.

Vamos seguir da resposta do Pedro, ok? Alguma coisa a ser mudada nela ou está tudo correto?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - terça, 14 Out 2014, 11:40

O valor da bicicleta sem os 6% de imposto, fica 278,992

278,992 --- 100%

20+x ------ 40%

fazendo a regra de 3, fica:

278,992*40=100(20+x)

11159,68=2000+100x

11159,68-2000=100x

9159,68/100=x

91,5968=x

ou seja, a loja lucrou 91,5968+20=*111,5968*

logo, o valor de custo da bicicleta foi 278,992 - 111,5968 = **167,3962**

é isso?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAISA JACINTHO MÜLLER - terça, 14 Out 2014, 15:01

Por que 40% corresponderia a 20+x?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quarta, 15 Out 2014, 20:59

por que 40% foi a margem de lucro que a loja ganhou, e acrescentou 20 reais ao custo pra cobrir o trabalho de montagem, ou seja, os R$20 ja estão dentro dos 40%, só não sabemos o restante do valor para completar os 40%, que seria o X

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 14:17

Ok, entendi... mas de acordo com o enunciado, os 20 reais não estão dentro dos 40%.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 13:07

Bom, lendo as respostas dos colegas, tiro a minha conclusão de que os 40% podem ser aplicados apenas sobre os R$ 296,80. Na pergunta em questão a frase é "custo para cobrir o trabalho de montagem". acredito que os R$ 20,00 cobrados sejam apenas para custeio de mão de obra e equipamentos utilizados para a montagem de cada bike.

sendo assim:

Dos R$296,80 cobrados pela bicicleta, R$ 17,80 são de impostos. Ou seja, o valor da Bike com os 40% de lucro

é de R$ 279,00.

Considerando que o valor pago pela Bike comprada pela loja seja apenas 60% desses (R$ 279,00), isso daria R$ 167,40, dentro disso podemos considerar os mesmo 6% de impotos, por se tratar de uma compra, igual a primeira.

Valor da Bike: ***R$ 157,35***

(+ 6% de impostos de compra)

Valor Pago pela loja: ***R$ 167,40***

(+ R$ 111,60 de lucro)

(+6% de impostos de compra)

Valor pago pelo cliente: ***R$ 279,00***

ufaa 😊

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 14:09

Após colocar tudo no papel, acho uma solução um pouco diferenciada:

Informações Iniciais

296,80 = Preço pago por Mike

316,80 = Preço pago + Montagem (296,80 + 20,00)

Após retirar 6% do valor do produto, sem a montagem (onde imaginei que o imposto não entra), obtemos:

296,80 - 6%= 278,922 -> **Preço da bicicleta com o lucro da loja e sem o imposto**

Depois, a loja obteve um lucro de 40% sobre o valor total da venda:

316,80 - 40% = 190,08

Sendo que 12,00 desse valor é o valor da montagem (20,00 - 40% = 8,00 de lucro, logo preço de montagem é de 12,00).

190,08 - 12,00 = 178,08

Logo, obtemos que o valor original da bicicleta é: 178,08

Pode até estar errado, mas faz sentido haha

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 14:22

Jonathan e Leonardo: De acordo com o enunciado, os 20 reais foram acrescentados na hora da venda, e com o preço que já se tinha mais esses vinte reais é que foi acrescentado os 6% de imposto. E esses 6% foram acrescentados apenas desta vez, correto?

Mas achei o raciocínio de ambos interessante...

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 23:03

Considerei que:

Custo: 296,80. Destes, 17,80 (6%) são impostos.

296,80-17,80 = 279,00. Menos os 20 reais de mão de obra: 279,00 - 20,00 = 259,00

259 - 100%

x - 60%

x = 155,40 (custo da bicicleta para a loja)

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 12:19

E aí, pessoal!

Dado tudo que foi discutido, que tal a resposta do Gabriel?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 20 Out 2014, 16:23

Correto, pois 6% de 296,80 representa o lucro e já estavam somados os 20 reais da montagem.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - quarta, 22 Out 2014, 11:40

acho que o Gabriel resolveu de forma correta, pois tirando os 6% de impostos menos os R$20,00 da mão de obra. O valor de custo para a loja foi de R%155,40.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por [redacted] - segunda, 20 Out 2014, 15:31

Acho que é isso ai mesmo, meu erro foi por os 20 reais dentro dos 40% haha

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo um problema
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:45

Encerrando a discussão:

Concluímos então que devemos começar retirando os 6% de 296,80, obtendop 278,99. A partir daí, subtraímos os 20 reais da montagem, chegando a 258,99. Mas o preço da bicicleta é, na verdade, 60% desse valor, visto que a loja obteve um lucro de 40%. Sendo assim, o preço inicial da bicicleta era R$ 155,39.

Caso ainda tenham alguma dúvida sobre a resolução, seguiremos conversando.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

RAÍZES DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 00:24

Como você faria para encontrar as raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$?

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - quinta, 9 Out 2014, 15:16

Aplicando Bhaskara:

(- (-6) ± √ (-6)² - 4.1.9) ÷ 2 x 1

(6 ± √ 36 - 36) ÷ 2

(6 ± √ 0) ÷ 2

6 ÷ 2

x' = 3

x" = 3

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 21:57

Alguma outra sugestão diferente?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 14:25

números que somados resultam em -B e multiplicados resultam em C

no caso

-B= 6 -----> 3+3
C= 9 -----> 3.3

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 12:38

Usar BriotRuffini, para mim, é a maneira mais simples para achar raízes de polinômios.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 16 Out 2014, 13:56

Ok, pode ser... mas esse processo não é necessário para um polinômio de grau 2, concordas?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 19:42

Faria bhàskara.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:08

Outra forma: $x^2 -6x +9=0$, eu pegaria apenas o $x^2- 9= 0$

$x^2=9 \Rightarrow x=$raiz de 9

que dá : -3 e +3

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:17

Eu faria soma e produto nesse caso ja que são números fáceis, seria (x-3)(x-3).

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 17:39

Bhaskara. Resultando em uma raiz só, x'=3.

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:25

Alguém poderia responder ao Armando se ele pode desconsiderar o termo -6x?

Outra questão: sem pensar em achar raízes, como podemos usar produtos notáveis e fatoração para chegar ao (x-3(x-3) apresentado nas respostas, ou equivalentemente, $(x-3)^2$?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 00:07

Acho que o Armando não poderia desconsiderar o -6x, pois se ele desconsiderar e tentar realizar a fórmula de bhaskara verá que o resultado encontrado não seria correto, ou talvez nem encontrasse um valor, pois se trataria de uma raiz negativa. 0+V0-4.1.9/2 , o valor dentro da raiz seria V-27.

V=raiz quadrada.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 12:21

Ótimo, Felipe!

Observem que a minha segunda questão continua em aberto.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 13:39

Colocaríamos o "x" em evidência , faríamos a fatoração dele, que no caso daria (x-3)(x-3) ou (x-3)^2, e se aplicarmos produtos notáveis, voltaríamos para x^2-6x+9=0.

E para fazer a verificação se está certo ou não , é só usar os valores que encontrou no bhaskara e substituir pelo x,

no caso ficaria (3-3)(3-3)=0 ou (3-3)^2=0 ou 3^2-(6*3)+9=0.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 13:53

Mas para colocar x em evidência ele precisa aparecer em todas as parcelas, o que não acontece, pois temos um -9 como termo independente do polinômio...

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - sábado, 18 Out 2014, 00:01

Quanto a essa segunda questão em aberto: para encontrarmos o (x-3)(x-3) ou o próprio $(x-3)^2$ equivalente, simplesmente se usa a regra de produtos notáveis fazendo $x^2 + 2.x.-3 + 3^2$ sendo isso $x^2 - 6x + 9$, ou seja, um trinômio quadrado perfeito.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sábado, 18 Out 2014, 01:02

Quem mais conhece a expressão "trinômio quadrado perfeito"? A que se refere?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 22:52

nesse caso soma e produto, sem necessidade de fazer bhaskara

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 17:40

Se fizermos soma e produto , o resultado seria:

x^2-6x+9=0

SOMA:x'+x''=-b/a ------------ x'+x''=6/1=6

PRODUTO:x'*x''=c/a --------x'*x''=9/1=9

S=x'+x'=6

P=x'*x''=9

O único valor se colocado tanto na soma quanto no produto é 3 e 3.

S=3+3=6

P=3*3=9

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 18:14

usando a bhaskara :

Ficaria a=1 b=-6 e c=9

Logo:

(-(-6) ± √-6²-4x1x9)/2x1

(6 ± √36-36)/2x1

(6 ± √0)/2

(6± 0)/2

R= 3

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - domingo, 26 Out 2014, 21:40

Minha primeira opção seria bhaskara.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por [redacted] - segunda, 27 Out 2014, 15:26

Resolveria pela maneira mais facil que eu acho, pela Braskara

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Questão sobre o assunto
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:50

Para encerrarmos a discussão:

Realmente, encontrar as raízes da equação pela fórmula de Báskhara é o mais usual. Poderíamos também pensar em soma e produto, isto é, procuramos dois números cuja soma seja 6 e o produto 9. Logo, estes números só podem ser 3 e 3 (raízes repetidas).

Porém, quando citei o caso de fatoração "trinômio quadrado perfeito", minha intenção era que vocês enxergassem que $x^2-6x+9 = (x-3)^2$. Assim, resolver $x^2-6x+9 = 0$ é o mesmo que resolver $(x-3)^2=0$. E para que um número ao quadrado seja zero, é preciso que o número seja o próprio zero, isto é, $x-3 = 0$. Daí também podemos concluir que $x=3$.

Caso ainda tenham restado dúvidas, entrem em contato que seguimos discutindo, ok?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quinta, 9 Out 2014, 11:48

Como se inicia a resolução da equação abaixo?

$$x-1=\sqrt{x^2+4}$$

Editar | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] sexta, 10 Out 2014, 16:10

eu colocaria ambos os lados ao quadrado

$(x-1)^2=(\sqrt{x^2+4})^2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 10 Out 2014, 16:44

Ok, parece um bom começo.

Uma pergunta para o grupo: não seria possível começar apenas "tirando a raiz quadrada" do lado direito, obtendo x+2? Isso evitaria o uso do produto notável do lado esquerdo, certo?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 20:23

Não, porque não se pode tirar a raiz nesse caso, deve-se elevar os dois lados ao quadrado, e dai depois resolver.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - segunda, 13 Out 2014, 16:54

Teria que antes fazer a soma para achar a raiz, por isso não é possível, mas como envolve o "x" eu elevaria ao quadrado ambos os lados.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] domingo, 12 Out 2014, 20:14

Eu colocaria ambos os lados ao quadrado e tiraria a raiz, faria a distribuitiva de $(x - 1)*(x - 1)= x^2 +4$ e depois faria os termos semelhantes e resolviria o cálculo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - domingo, 12 Out 2014, 21:34

Poderia começar elevando os dois lados ao quadrado para podre cortar a raiz e ficar somente com $(x-1)^2=x^2+4$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 13 Out 2014, 18:28

Ótimo!

Não podemos tirar a raiz com uma soma dentro dela. Portanto precisamos, sim, elevar os dois lados ao quadrado.

E os próximos passos?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - quarta, 15 Out 2014, 00:20

Proximo passo é isolar o X pra poder descobrir seu valor

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 15 Out 2014, 17:44

Certo... mas me referi aos próximos passos para isolar o x. Quem ajuda?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - quinta, 16 Out 2014, 09:18

$(x-1)^2=x^2+4$

$x^2-2x+1-x^2-4=0$

$2x=-3$

$x=-3/2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - sexta, 17 Out 2014, 18:17

$(x-1)^2=x^2+4$

$x^2-2x+1-x^2-4=$

cortando os x^2 com $-x^2$

Logo:

$-2x-3=$

$-2x=3$

$-x=3/2$

$x=-3/2$

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - sexta, 17 Out 2014, 21:46

Rafael,

o que queres dizer com as etapas

$x^2-2x+1-x^2-4=$

e

$-2x-3=$

?

Não está faltando alguma coisa?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - domingo, 19 Out 2014, 22:34

Concordo com os colegas, e acho que ele só esqueceu de igualar a zero, não?

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - terça, 21 Out 2014, 20:18

Isso mesmo isolar o x, igualando a zero

-2x-3=O

-2x=3

X=-3/2

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por [redacted] - quarta, 22 Out 2014, 11:11

Concordo com o Andrei e com o Eduardo, igualando a zero temos o valor de x= -3/2

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - quarta, 22 Out 2014, 13:56

Ok, é isso aí... só quis chamar a atenção para que cuidem na escrita, de modo a ficar tudo coerente.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

Re: Resolvendo uma equação
por THAÍSA JACINTHO MÜLLER - segunda, 27 Out 2014, 15:57

Encerrando a discussão então:

Para iniciar a resolução da equação, é necessário elevar ambos os lados ao quadrado, resultando em $(x - 1)^2 = x^2+4$. Depois, seguimos resolvendo o produto notável e a equação resultante:

$x^2-2x+1= x^2+4$

$-2x = 3$

$x = -3/2$

Caso ainda tenham dúvidas na resolução ou em algum tópico da discussão, podemos seguir discutindo.

Mostrar principal | Editar | Interromper | Excluir | Responder | Exportar para portfólio

APÊNDICE K - CÁLCULO DO *P-VALUE*

O *p-value* indica a probabilidade de cometermos o erro do tipo I, i.e., a chance de errar ao rejeitar uma hipótese, quando esta é verdadeira. Abaixo estão apresentados exemplos do cálculo desta medida com a distribuição normal e a distribuição *t* para um parâmetro genérico θ.

Distribuição normal

Suponha as hipóteses $H_0: \theta = \theta_0$ *vs* $H_1: \theta \neq \theta_0$ (teste bilateral) e $Z_0 = 1{,}37$. Assim,

$$p - value = Pr(|Z| > 1{,}37) = 2Pr(Z > 1{,}37).$$

Pela tabela de normal padrão, $Pr(Z > 1{,}37) = 0{,}0853$. Logo,

$$p - value = 2 \times 0{,}0853 = 0{,}1706.$$

Neste caso, para $\alpha = 0{,}05$, não rejeita-se H_0 pois $0{,}1706 > 0{,}05$.

Distribuição *t*

Suponha as hipóteses $H_0: \theta = \theta_0$ *vs* $H_1: \theta \neq \theta_0$ (teste bilateral), $T_0 = 2{,}85$ e $v = 25$ graus de liberdade. Assim,

$$p - value = Pr(|T| > 2{,}85) = 2Pr(T > 2{,}85).$$

Pela tabela de t_{25}, $Pr(T > 2{,}85) = 0{,}0043$. Logo,

$$p - value = 2 \times 0{,}0043 = 0{,}0086.$$

Neste caso, para $\alpha = 0{,}05$, rejeita-se H_0 pois $0{,}0086 < 0{,}05$.

APÊNDICE L – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ________________abaixo assinada, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar da pesquisa supra citada, sob a responsabilidade da pesquisadora Thaísa Jacintho Müller, aluna do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientada pelo prof. Dr. José Valdeni de Lima e coorientada pela profª Dra. Helena Noronha Cury.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

1) O objetivo da pesquisa é analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e Integral e testar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos;

2) meus dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada;

3) poderei entrar em contato com os pesquisadores sempre que julgar necessário. Com a pesquisadora Thaísa Müller, pelo e-mail: thaisamuller@gmail.com, com o orientador, pelo email: valdeni@inf.ufrgs.br e com a coorientadora, pelo e-mail: curyhn@gmail.com;

4) obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa;

5) este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

Porto Alegre, ____ de _____ de 2015.

Assinatura do participante   Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE M – ENTREVISTA

Thaísa – A partir do que mostrei, sobre os resultados da minha pesquisa, eu gostaria de saber a tua opinião sobre o trabalho, se consideras a proposta viável para ser implementada no Laboratório de Aprendizagem.

Entrevistada - Então, acho que o forte foi que tu tiveste uma comprovação de que o trabalho a distância pode dar certo. Se bem que é uma distância com pessoas que tu conhecias. Então, também tem isso, tu estavas por trás das perguntas, mesmo que a tua figura não estivesse ali, porque no ensino a distância eles dizem "ah, o aluno tem que vir no primeiro dia, depois tem que vir fazer as provas", algo assim...Bom, eu acho que ele tem que sentir que tem uma figura por trás, é melhor do que se inscrever num curso a distância, num lugar onde não sabe nem onde é, e fazer aquele curso se as pessoas que estão por trás, fornecendo um material, não dão essa ideia de que tem alguém acompanhando. Eu acho que a tua figura por trás, sendo uma pessoa a quem eles davam uma certa importância, teve influência nos teus resultados.

Thaísa - Sim... e tu achas que a parte dos objetos em si é forte nesse ponto, teve bastante influência também?

Entrevistada - Mas com certeza, não e? Se tu não fizesses uma coisa endereçada... não daria tão certo. Tu queres ver uma coisa? Há uma Instituição que tem um curso de Administração totalmente a distância. O aluno começa o curso e o material já está todo lá. Certo? Inclusive, de Matemática, tem uma parte que diz assim: "não existe matemática no curso, mas existe ali se você necessitar, uma apostila para consulta". Então aquilo ali funciona como nós quando fazemos os nossos cronogramas sem conhecer os nossos alunos. Nós colocamos uma listagem de exercícios, uma atrás da outra, e está pronto. Então acho que uma influência boa do teu trabalho é exatamente o fato de que tu endereçastes para alguém, fizestes pensando em alguém... eu acho que isso é o forte, que pode se dizer que é um trabalho confiável.

Thaísa - Sim, porque foi baseado nas dificuldades que eles tiveram... E no que o pessoal dos semestres anteriores demonstrou, não é? Por exemplo, essa dificuldade da propriedade distributiva, ela já tinha aparecido nos testes que foram feitos com outras turmas...

Entrevistada – Isso, que eles apresentaram! E não nas minhas e nem nas tuas dificuldades... E aparecem até aqui no Laboratório. Nós fizemos aqui no semestre passado, o [nome de aluno], na disciplina de estágio, tinha que ter mais horas, porque não veio à aula, algo assim...e eu o coloquei aqui no Laboratório, acompanhando os bolsistas, e ele fez um relatório sobre as dificuldades apresentadas. E entre elas, estava a propriedade distributiva. Então é uma coisa que já se tem... entende?

Thaísa - Sim, que já se tem conhecimento de que iria acontecer...

Entrevistada – E que é problema! Agora, a causa de ser problema, é difícil... Tu sabes bem que as coisas são vistas compartimentadas por eles... elas não são vistas como uma única coisa. Por exemplo: distributiva, fatoração, produto notável... tinha que ter uma hora que o professor lá do Ensino Fundamental não se preocupasse com o aprofundamento dos tópicos, entende? Porque aí o aluno perde a noção do conteúdo que está vendo. Então, por exemplo, tu vais apresentar uma fatoração lá no Ensino Fundamental, e tu usas x, y, z, m, t e solicita que eles ponham em evidência o fator comum... eles nem enxergam o que é aquilo ali. E eles nem enxergam que têm dificuldade, porque noutro semestre, noutro ano... no quinto ano (não sei se é sexto ano agora)... a distributividade e a fatoração são apresentadas e eles não veem ligação com a fatoração do número inteiro, entende? Então é tudo muito separado, eu não sei se as pessoas todas veem que é junto.

Thaísa - Não, acho que não.

Entrevistada – E se tu fores trabalhar no Cálculo I com problemas de taxas de variação e começares a fazer aqueles problemas muito complicados, eles perdem a noção de derivada. É preferível tu fazeres uma coisa mais simples para eles terem aquela noção que eles precisam. E aí com o tempo eles vão entendendo... mas os nossos aqui chegam sem saber a distributiva porque eles não sabem o que é distributiva. Ontem um aluno meu de Cálculo IV foi pôr em evidência lá um termo, $3x^2 + 3x$, certo? E aí ele colocou o 3 em evidência, por conta dele, e começou a chutar os números que iam lá dentro do parênteses para descobrir quais os que iam. E aí, sabe o que ele fez depois para ver se estava certo? Multiplicou para ver ... então, parece que ele tem noção de distributividade, mas ele não tem. Porque ele começou a chutar os números lá de dentro, quer dizer, ele não sabe que a divisão vai te dar uma ideia inversa, então ele não sabe a distributiva.

Thaísa - E tu achas que isso que foi feito ao longo do ano de 2014, em minha pesquisa, poderia ser aproveitado para enriquecer o trabalho que já é feito aqui no Laboratório? E quais seriam as adaptações que teria que se fazer, se é que tu achas que tem...

Entrevistada – Mas claro, eu acho que tem... o problema é que o aluno sinta que ele tem essa dificuldade. E sinta que essa dificuldade está prejudicando o trabalho dele no Cálculo, entende? Porque na verdade ele entra aqui pensando que ele sabe tudo. E ele não vai achar um tempo para dizer assim: eu vou lá no Laboratório fazer um trabalho com a propriedade distributiva, porque eu não sei isso... então isso aí tem que ser através do professor. E os professores... há uns que sonegam até o endereço do Laboratório! Então... eu já acho que a gente tinha que mudar um pouco a aparência do Laboratório. Em duas partes: tinha que ter aqueles que vêm pra fazer o que sempre estão fazendo...

Thaísa - Tirar dúvidas, tu dizes?

Entrevistada – Tirar dúvidas. E tinha que ter um grupo específico, que a gente detectasse coisas para que eles continuassem desenvolvendo. Mas aí nós tínhamos que ter assim: se o aluno foi mal na primeira prova de Cálculo I, acho que isso aí a gente pode fazer... foi mal, aí ele vem, mas eu acho que, para começo, não podiam ser todos, podia ser aquele que o professor que corrigisse notasse - vamos falar especificamente dessa propriedade distributiva – que o professor que corrigisse notasse esse problema, e que ele tivesse esse tempo para vir aqui. Aí a gente ia passar pelo problema, porque eu acho que esse deveria ser o objetivo do Laboratório: melhorar MESMO o desempenho do aluno, e não ajudá-lo só em dúvidas que ele tenha.

Thaísa - Sim... Mas e a possibilidade de tentar fazer mais a distância?

Entrevistada – Mas eu acho que isso pode ser feito a distância. Isso que eu falei não precisa ser feito aqui.

Thaísa - Mas é que tu dependes da primeira prova, não é?

Entrevistada – Sim. Eu dependo da primeira prova porque ... vai ter que depender do professor da sala de aula dele. Certo? Porque se o professor da sala de aula dele não acreditar, não adianta. A gente podia até fazer assim... pegar uma sala de aula para cada semestre, vamos dizer assim. Porque tu estás perguntando se existe a possibilidade de usar no Laboratório, não é uma coisa passageira... e sim organizar um trabalho em que desse para fazer esse tipo de coisa.

Thaísa - É, no sentido de que esse esforço pudesse servir para alguma coisa, entende?

Entrevistada – Mas é óbvio! É óbvio que nós também não iríamos fazer o teu trabalho de novo, porque ninguém consegue... esse monte de testes, esse monte de coisas. Mas já se viu que ele dá certo. Está comprovado que ele dá certo. Entende? Então o aluno seria... vamos dizer assim... conversando com o professor, o aluno viria aqui no Laboratório, receber essas instruções de como é que o trabalho vai ser feito, para ele melhorar, e isso aí podia ser feito também em outra parte de matéria, não? Não é só na distributiva.

Thaísa - Não, claro que não. Muito pelo contrário, a ideia era justamente fazer mais, só que em tempo hábil para terminar uma tese, a gente não consegue fazer tantos objetos quanto precisa, mas...

Entrevistada – Claro! Por exemplo: integral definida, integral indefinida de tabela, o nosso aluno não sabe fazer. Hoje estará acontecendo às 18 horas, aqui, uma oficina para os alunos de Cálculo IV, para poder fazer a integral definida. A integral! Eles não sabem! Eles não sabem usar a tabela! Tu entende? E usar uma tabela... eu já tentei fazer um objeto desse jeito. Eu já tentei. Mas ele teria que ser assim: um objeto, dividido em diversas partes, e aí eu vejo um pouco essa parte tua aí, que tu poderias... em cada parte, um tipo de integral indefinida de tabela. Então nós precisaríamos ter um objeto dividido em 13 partes, tu entende? Porque aí é assim... mas eu não sei fazer isso. Eu comecei a fazer, eu já tenho feito para uma parte. Mas eu desanimei, porque aí tem que fazer assim: se é isso então tenta aquilo... se é aquilo, tu achas que é isso? Então, é por ali... e aí tu tens que fazer um monte de...if, if, if... e o bolsista enlouqueceu quando eu falei para ele [risos]..

Thaísa - Sim... e isso entra um pouco no que o meu orientador fala muito, que é fazer o objeto adaptativo, não?

Entrevistada – Sim!

Thaísa - Ele tem que se adaptar para a pessoa que está usando e aí a gente pode fazer isso de duas formas: ou com o perfil da pessoa ou com o que ela está apresentando no momento em que ela está usando: que seria isso, se a pessoa responder tal coisa eu tenho que direcionar para tal lugar, e isso é muito difícil de fazer realmente...

Entrevistada – Pois é... pois é... entende? Mas eu acho que isso seria um... um achado... e com essa propriedade aqui nós não precisamos mais nos preocupar... ela está pronta, não é? Essa tua pesquisa, de ver se é a distributiva, ver onde é que está o erro...está pronto.

Thaísa - Usar esse resultado tu dizes?

Entrevistada – Usar o resultado! E usar o resultado e inicialmente até... nós poderíamos com o tempo aumentar o banco de questões, certo? Para que o aluno tivesse... até sorteasse para ser diferente para um, diferente para outro, entende?

Thaísa - Sim... é, isso dá para fazer.

Entrevistada – Agora, eu acho importante... porque tu pensaste no aluno iniciante na Faculdade. E esse aluno não está acostumado a trabalhar a distância. Então, o que ele precisa? Ele precisa é ter o professor por trás! Por exemplo, se eu pegar uma turma minha e indicar alunos para fazer isso, ele vai sentir que há minha orientação por trás, embora alguém no Laboratório possa dar uma orientada... quando ele estiver perdido, vem aqui e a gente dá uma orientação...