

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Medida das Taxas de Variação Temporal de Períodos de Pulsação da Estrela DOV PG 1159-035 *

José Eduardo da Silveira Costa

Dissertação realizada sob orientação do Dr.
Kepler de Souza Oliveira Filho e apresen-
tada ao Instituto de Física da UFRGS em
preenchimento parcial dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
1996

* Trabalho financiado pelo Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES).

Dedico este trabalho aos meus pais,
Eduardo Costa e
Paulina Aline da Silveira Costa.

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Dr. Kepler de Souza Oliveira Filho, pela oportunidade e por tudo o que eu tenho aprendido com ele.
- Ao meu pai, Eduardo Costa e minha me, Paulina Aline da Silveira Costa, pelo esforo e pela dedicao ao longo de todos esses anos. Vocs so os melhores pais do mundo.
- minha “tia dinda”, Maria Silveira, que sempre esteve jundo da gente e sempre estar perto do meu corao. Obrigado por tudo.
- Aos colegas da Astronomia, pela valiosa troca de informaes e pelas bons momentos: Mrcio Ramos de Oliveira, Irapuan Rodrigues, Nelson Vera Viramizar, Henrique Aita Fraquelli (a pesar de ser gremista), Alberto Rodriguez Ardila, Carlos Dutra e Renan. Que tal um break pro caf?
- Aos colegas da sala M204, pela convivncia agradvel: Alaor, Ayala, Alberto, Valdemar e Fabricio (e tambm a um ex-M204, o Lus Gustavo, o Gugu, por ter me cedido a mesa!). Um agradecimento especial vai para o Alberto, pela amizade ao longo dos ltimos anos.
- Ao Odilon Giovaninni, por ter emprestado importante material de leitura; ao Alex Murillo, que me ajudou na reduo dos dados da Africa do Sul; ao Cludio Miguel Bevillaqua (Erexim), pelas dicas sobre o fotmetro; e ao Marcelo Emlio do IAG/USP, pelas informaes sobre o CLEAN.
- Ao Arthur Boss e ao Mauro Wyrzykowski, pelo esforo na administrao do sistema do IF e das *workstations* das quais somos totalmente dependentes, especialmente ao Mauro que sempre aparecia nos fins de semana e ligava o sistema aps as quedas de energia.

Resumo

Depois do Sol, a pré-anã branca PG 1159-035 é a estrela sismologicamente mais estudada. Em seus espectros de potência já foram identificados 101 modos de pulsação. Medidas da taxa de variação temporal do modo dominante de 516 s, \dot{P}_{516} , têm sido feitas e o melhor resultado obtido foi de $(-2.49 \pm 0.06) \times 10^{-11}$ s/s. Contudo, nos últimos 10 anos, este resultado negativo tem representado um desafio para a teoria de evolução estelar pois todos os modelos evolucionários mostram períodos que crescem com o tempo ($\dot{P}_{516} > 0$). Vários trabalhos foram publicados tentando explicar o problema da \dot{P}_{516} negativo, mas nenhum foi bem sucedido.

Neste trabalho, calculamos as taxas da variação temporal de quatro dos principais modos de pulsação da estrela PG 1159-035. Os resultados obtidos foram: $\dot{P}_{516} = (+13.02 \pm 1.04) \times 10^{-11}$ s/s para o modo de 516 s; $\dot{P}_{539} = (+1.70 \pm 4.78) \times 10^{-11}$ s/s para o modo de 539 s; $\dot{P}_{451} = (+3.46 \pm 2.12) \times 10^{-11}$ s/s para o modo de 451 s; e $\dot{P}_{493} = (+11.78 \pm 0.98) \times 10^{-11}$ s/s para o modo de 493 s. Em nossos cálculos, utilizamos um método mais direto de medida aplicado à um conjunto maior de dados, dando uma atenção especial à parte estatística do método. Um dos mais importantes resultados foi o valor *positivo* obtido para a taxa de variação temporal do modo dominante de 516 s, indicando que o período de pulsação *cresce* com o tempo, conforme previsto pelos modelos evolucionários. Outro resultado importante foi a medida da variação temporal do modo de baixa amplitude de 493 s; pela primeira vez se conseguiu medir em uma estrela pulsante, a taxa de variação temporal de um modo além do modo dominante.

Abstract

Besides the Sun, the pre-white dwarf PG 1159-035 is the most seismologically studied star. In its power spectra, 101 pulsation modes have been identified. Measurements of the secular rate of change the 516 s dominant mode, \dot{P}_{516} , has already been published and the best obtained result has been $(-2.49 \pm 0.06) \times 10^{-11}$ s/s. However, in the last 10 years, this value has been a challenge for the stellar evolution theory because evolutionary models show periods that *increase* with time ($\dot{P}_{516} > 0$). Several attempts to explain the negative-value \dot{P}_{516} problem, unsuccessfully, have been published.

In this work, we estimate the secular change rates of the four main pulsation modes of PG 1159-035. The results obtained are: $\dot{P}_{516} = (+13.02 \pm 1.04) \times 10^{-11}$ s/s for the 516 s mode; $\dot{P}_{539} = (+1.70 \pm 4.78) \times 10^{-11}$ s/s for the 539 s mode; $\dot{P}_{451} = (+3.46 \pm 2.12) \times 10^{-11}$ s/s for the 451 s mode; and $\dot{P}_{493} = (+11.78 \pm 0.98) \times 10^{-11}$ s/s for the 493 s mode. In our calculation, we have used a more direct measurement method applied to a bigger data set, giving special attention to the statistical part of method. One of the most important result is the *positive* value obtained for the secular change rate of the dominant mode of 516 s, indicating that the pulsation period *increase* with time according to evolutionary models. Another important result is the measurement, for the first time, of the secular change rate of a mode in addition to the dominant mode in a pulsating star, particularly, the 493 s mode in PG 1159-035.

ÍNDICE

1. <i>Introdução</i>	1
1.1 Estrelas Anãs Brancas	1
1.2 Estrelas Variáveis	6
1.3 Anãs Brancas Pulsantes	9
1.4 Teoria de Pulsações	9
1.5 Por Que Medir as Variações Temporais dos Períodos?	15
2. <i>PG 1159-035</i>	16
2.1 A Estrela DOV PG 1159-035	16
2.2 O Problema do dP/dt Negativo	25
2.3 Os Objetivos Deste Trabalho	26
3. <i>Fotometria da PG 1159-035</i>	28
3.1 Fotometria	28
3.1.1 O Fotômetro	28
3.1.2 Fotômetro de Um Canal	29
3.1.3 Fotômetro de Dois Canais	30
3.1.4 Fotômetro de Três Canais	31
3.1.5 Filtros	31
3.1.6 Tempo de Integração	31
3.1.7 Tempo de Observação	32
3.2 WET - The Whole Earth Telescope	32
3.3 Tratamento dos Dados	33
3.4 Base de Tempo	38
3.5 Unidades da Intensidade Fracional	39
3.6 Fotometria Rápida da PG 1159-035	39
3.7 Observações da PG 1159-035 em Raios-X	41
4. <i>Análise das Curvas de Luz da PG 1159-035</i>	55
4.1 Propósitos da Análise das Curvas de Luz	55
4.2 Séries de Tempo	56
4.3 Métodos de Análise: procurando periodicidades	56
4.3.1 Métodos Não-Paramétricos	57
4.3.2 Análise de Fourier	59
4.3.3 Considerações Finais	69
4.3.4 Estabilidade	70
4.4 Identificação de Picos nos Espectros de Fourier	70

4.5	Análise das Curvas de Luz da PG 1159-035	71
5.	<i>Métodos de Medida de dP/dt</i>	80
5.1	Métodos de Medida de dP/dt	80
5.1.1	Método Direto.	80
5.1.2	Método do Diagrama (O-C).	81
5.1.3	Método do Ajuste Não-Linear de Senóides.	86
5.2	Qual Método Usar?	87
5.3	A Questão das Precisões das Estimativas	87
5.3.1	A Precisão das Estimativas de Amplitude e Fase.	87
5.3.2	A Precisão da Estimativa de Frequência.	88
5.4	Algoritmo DEE	90
5.4.1	Conceitos Fundamentais	90
5.4.2	Distribuição Empírica de Erros (DEE)	94
5.4.3	Descrição do Algoritmo DEE	94
6.	<i>Medindo as Variações de Períodos da PG 1159-035.</i>	97
6.1	Aplicação do Algoritmo DEE à PG 1159-035.	97
6.2	O período de 516 s	99
6.3	Resolvendo o Problema do dP/dt Negativo.	105
6.4	O período de 539s.	107
6.5	O período de 451 s	110
6.6	O período de 493 s	113
7.	<i>Conclusões</i>	117
A.	Ajuste Linear de Senóides por Mínimos Quadrados	119
	<i>Referências Bibliográficas</i>	123

RELAÇÃO DE FIGURAS

1.1	Diagrama H-R teórico mostrando as posições das faixas de instabilidade das anãs brancas.	3
1.2	Pulsações: (a) radiais (modo fundamental); (b) radiais (2 ^o sobretom); (c) não-radiais.	11
1.3	Ilustração de esféricos harmônicos (Winget & Van Horn 1982).	13
2.1	Espectros das DOVs PG 1707+427 e PG 1159-035. As linhas de absorção mais fortes são devido ao C IV e He II (Bond <i>et al.</i> 1984).	18
2.2	Espectros IUE de três estrelas DOVs. O símbolo “X” indica que a linha não é uma linha de absorção real (Bond <i>et al.</i> 1984).	19
2.3	A posição da PG 1159-035 é mostrada no plano $T_e - \log g$ com as barras de erro, dentro dos limites evolucionários para anãs brancas de $0.6 M_\odot$ e $0.8 M_\odot$. As magnitudes aproximadas e o sinal da taxa de \dot{P}_{516s} estão indicados. (Winget, Hansen & Van Horn 1983).	20
2.4	Diagrama (O-C) para todos os dados da PG 1159-035. Os pontos mostram os <i>alias</i> de um ciclo para as quatro épocas envolvidas. A linha sólida corresponde ao melhor ajuste; as linhas pontilhadas correspondem aos ajustes alternativos (Winget <i>et al.</i> 1985).	22
2.5	Diagrama (O-C) para todos os dados disponíveis da PG 1159-035 até 1989, incluindo os dados de 1987. A linha sólida representa a efeméride de 1985 (Winget <i>et al.</i> 1991).	24
3.1	Esquematisação de um fotômetro fotoelétrico.	29
3.2	A abertura do <i>diafragma de campo</i> seleciona aquela pequena área que nos interessa do campo. Pode ser a estrela-alvo, a estrela-de-referência ou céu.	29
3.3	Logotipo do Whole Earth Telescope. O lema “ <i>todos os fótons, todo o tempo</i> ” sintetiza bem seu objetivo.	33
3.4	Observatórios participantes do WET. A composição específica do WET, isto é, que observatórios estarão operando ou não, depende da declinação do objeto em estudo.	34
3.5	O comprimento do caminho percorrido pela luz através da atmosfera varia com a distância zenital, z	37
3.6	O instante exato (data de observação) em que um determinado sinal vindo de uma estrela chega à Terra depende da posição orbital da Terra em relação à estrela.	39
3.7	Uma comparação entre as curva de luz obtida com o <i>EXOSAT</i> e a curva de luz ótica da PG 1159-035. Os dados do <i>EXOSAT</i> (no gráfico superior) mostram a porção da observação de 1985 que é simultânea com as observações óticas (gráfico inferior) . Note que a relação S/R do raio-X é baixíssima (Barstow <i>et al.</i> 1986).	43
3.8	Espectro de potência de uma série de tempo de 16 horas obtida com o <i>EXOSAT</i> mostrando as freqüências na vizinhança dos três períodos discutidos no texto. As linhas designadas por l , b , e c correspondem às localizações dos períodos óticos de 539, 524 e 516 s, respectivamente (Barstow <i>et al.</i> 1986).	44
3.9	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1979 e 1980.	46
3.10	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1981.	46
3.11	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1983.	47
3.12	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1984.	47
3.13	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1985.	48

3.14	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1989.	48
3.15	Diagrama de cobertura para as campanhas de 1993.	49
3.16	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1979. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	49
3.17	Curva de luz da PG1159-035 obtida na campanha de 1980. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	50
3.18	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1981. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	50
3.19	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1983. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	51
3.20	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1984. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	51
3.21	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1985. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	52
3.22	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1989. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	53
3.23	Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1993. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+) BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.	54
4.1	Transformadas discretas de Fourier (<i>dirty spectra</i>) das curvas de luz da PG 1159-035.	72
4.2	Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a <i>potência</i> (“power”) e no eixo horizontal os <i>períodos</i> (em segundos).	75
4.3	Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a <i>potência</i> (“power”) e no eixo horizontal os <i>períodos</i> (em segundos).	76
4.4	Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a <i>potência</i> (“power”) e no eixo horizontal os <i>períodos</i> (em segundos).	77
4.5	Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a <i>potência</i> (“power”) e no eixo horizontal os <i>períodos</i> (em segundos).	78
4.6	Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a <i>potência</i> (“power”) e no eixo horizontal os <i>períodos</i> (em segundos).	79
6.1	Os gráficos acima mostram a convergência de $\text{var}(P \simeq 516.s)$ à medida que o número de simulações aumenta. A variância $\text{var}(P)$ é dada em segundos.	98
6.2	Os gráficos acima mostram as distribuições empíricas de erros obtidas com o algoritmo DEE para as séries de tempo dos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. Nos eixos horizontais temos os erros (em segundos) nas estimativas do período e nos eixos verticais as probabilidades de ocorrência. Os histogramas foram construídos usando-se um intervalo de 0.002s por “bin”. Sobre as distribuições foram ajustadas curvas gaussianas.	100
6.3	Na figura acima temos um gráfico do período (em segundos) contra a data (em BJDDs). Os pontos representam os valores medidos para o período dominante de 516 s, nos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993; as barras representam os erros máximos e as duas retas tracejadas são as retas com a maior e a menor inclinações possíveis de serem fitadas e a reta sólida corresponde ao melhor ajuste. Os valores de dP/dt estão expressos em s^{-1}	101

6.4	Nos gráficos superiores temos a distribuição de erros nas estimativas do período, obtidas com o algoritmo DEE, para os dados normais de 1989 (lado esquerdo) e 1993 (lado direito). Nos gráficos inferiores podemos ver o que ocorre após a aplicação do processo de subtração de senóides.	102
6.5	O gráfico mostra a variação do período de 516s ao longo do tempo.	103
6.6	Distribuições empíricas de erros nas estimativas da fase da senóide com período de 516s. Nos eixos horizontais temos os erros (em segundos) e nos eixos verticais as probabilidades de ocorrência. Os histogramas foram construídos com valores de 5 s para os “bins”. Sobre as distribuições foram ajustadas curvas gaussianas.	104
6.7	Os gráficos mostram o que ocorre com as distribuições de erros nas estimativas das amplitudes (gráficos da direita) e das fases (gráficos da esquerda) para os dados de 1989. Os gráficos superiores mostram as distribuições obtidas com os dados normais e os gráficos inferiores mostram as distribuições obtidas após as subtrações.	105
6.8	Os gráficos mostram o que ocorre com as distribuições de erros nas estimativas das amplitudes (gráficos da direita) e das fases (gráficos da esquerda) para os dados de 1993. Os gráficos superiores mostram as distribuições obtidas com os dados normais e os gráficos inferiores mostram as distribuições obtidas após as subtrações.	106
6.9	Diagrama (O-C) para o período de 516 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).	107
6.10	Probabilidades de ocorrências de um determinado valor para $\epsilon_\phi/\sigma_\phi$, onde ϵ_ϕ é o erro (real) na estimativa da fase e $\sigma_{ phi}$ é o desvio padrão calculado pelo método LS. O valor máximo para um conjunto de 1000 eventos é de 3.48, quando se assume uma distribuição gaussiana.	108
6.11	Probabilidades de ocorrências de um determinado valor para ϵ_A/σ_A , onde ϵ é o erro na estimativa da amplitude e σ é o desvio padrão calculado pelo método LS. O valor máximo para um conjunto de 1000 eventos é de 3.48, quando se assume uma distribuição gaussiana.	109
6.12	Distribuições empíricas de erros para as estimativas do período da senóide de 539s.	110
6.13	O gráfico mostra as estimativas para o período de 539s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras verticais representam σ_P (em segundos).	111
6.14	Diagrama (O-C) para o período de 539 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).	112
6.15	O gráfico mostra as estimativas para o período de 451s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras representam o σ_P para cada ano.	113
6.16	Diagrama (O-C) para o período de 451 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).	114
6.17	O gráfico mostra as estimativas para o período de 493s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras representam o σ_P para cada ano.	115
6.18	Diagrama (O-C) para o período de 493 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).	116

RELAÇÃO DE TABELAS

1.1	Tipos espectrais e suas características.	4
1.2	Tipos de Variáveis Pulsantes	8
2.1	A tabela mostra o melhor ponto para cada uma das campanhas. Estes foram os pontos utilizados no diagrama (O-C) (Winget <i>et al.</i> 1985).	21
2.2	Dez combinações possíveis de pontos no diagrama (O-C) (Winget <i>et al.</i> 1985).	22
2.3	Este são os melhores valores para (O-C) encontrados por Winget <i>et al.</i> (1991) para os dados da PG1159-035.	24
3.1	Sítios participantes do WET.	34
3.2	Observações da PG 1159-035 entre 1979 e 1984 (Winget <i>et al.</i> 1985).	40
3.3	Fotometria Rápida da PG 1159-035.	41
3.4	Jornal de Observações da PG 1159-035 em 1989 (Winget <i>et al.</i> 1991).	42
3.5	Observações Óticas e com o <i>EXOSAT</i>	43
3.6	Modos de Pulsação Presentes no Ótico e em RX Moles	44
3.7	Dados fotométricos de 1993 (reduzidos).	45
4.1	Picos no Espectro de Potências dos Dados de 1989.	74
6.1	Medidas do período para cada ano.	99
6.2	Medidas do período após o processo de subtração de senóides.	102
6.3	Valores de (O-C) para cada ano.	104
6.4	Desvios-padrões para as fases usadas por Winget <i>et al.</i> (1985).	106
6.5	Período de ~ 539 s.	108
6.6	Valores de (O-C) para cada ano ($P = 516$ s).	110
6.7	Período de 451s.	111
6.8	Valores de (O-C) para cada ano ($P = 451$ s).	112
6.9	Período de 493s.	113
6.10	Valores de (O-C) para cada ano ($P = 493$ s).	114
7.1	Tabela com os resultados.	117

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Nosso objeto de estudo é uma estrela anã branca pulsante, a PG 1159-035. Neste capítulo introdutório, faremos apenas uma rápida revisão de alguns dos conceitos que serão utilizados neste trabalho. Iniciaremos falando brevemente sobre *estrelas anãs brancas* para em seguida falarmos sobre um tipo peculiar de estrelas: as *estrelas variáveis*. A intenção é localizar as *estrelas pulsantes* no contexto das estrelas variáveis, para depois definir o que são as *anãs brancas pulsantes* e como se classificam. Na seção seguinte abordaremos alguns conceitos da *teoria de pulsações* e encerraremos este capítulo falando sobre as razões para se medirem as variações temporais dos períodos de pulsação de uma estrela anã branca pulsante.

1.1 Estrelas Anãs Brancas

Anãs brancas são estrelas com massas próximas a $0.6 M_{\odot}$, com raios característicos em torno de $7\,000\text{ Km}$ e densidades médias da ordem de 10^6 g/cm^3 . A matéria nessas condições está em *estado degenerado*; a gravidade superficial é muito elevada ($\log g \simeq 8$) e o que impede que a estrela entre em colapso devido à força gravitacional é a *pressão de degenerescência eletrônica*, proveniente diretamente do fato de que dois férmions não podem ocupar o mesmo espaço, com a mesma energia e mesmo *spin* (princípio de Pauli).

A história do estudo de anãs brancas¹ começa em 1862, quando Alvan G. Clark descobre que as perturbações no movimento próprio de Sírius são causadas por uma estrela com a qual Sírius forma um sistema binário: *Sírius B*. Cerca de meio século mais tarde, em 1914, W. S. Adams descobriu que o espectro de Sírius B era o de uma estrela “branca”, não muito diferente do de sua companheira, Sírius. As medidas espectrais indicavam uma *temperatura efetiva*, T_{eff} , da ordem de $8\,000\text{ K}$ para Sírius B, e a *luminosidade*, L , foi estimada a partir do fluxo observado. Usando a equação de emissão de um corpo negro, $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$, Adams inferiu que o *raio* de Sírius B, R , seria de apenas $18\,000\text{ Km}$ (quatro vezes maior que o valor atualmente aceito,). Até 1917 três objetos semelhantes haviam sido descobertos e, por serem todos pequenos e apresentarem um espectro “branco”, essas estrelas foram chamadas de “*anãs brancas*”.

¹ Um breve resumo da história da teoria das anãs brancas pode ser encontrado em Shapiro & Teukolsky 1983.

Localização no Diagrama HR

No *diagrama HR*, as anãs brancas se espalham ao longo de uma faixa bem definida, como pode ser visto na Fig. 1.1. As estrelas no extremo superior desta faixa têm luminosidades de cerca de $\log L/L_{\odot} = 3$ e temperaturas superficiais efetivas de $T_{eff} = 150\,000\,K$, enquanto que no extremo inferior esses objetos chegam a ter luminosidades de $\log L/L_{\odot} = -4.5$ e atingem temperaturas da ordem de $3\,700\,K$. Apesar das primeiras estrelas descobertas dessa classe serem “brancas”, objetos com temperaturas entre $3\,700\,K$ e $150\,000\,K$ varrem praticamente todas as cores, enquanto as estrelas “brancas” estão numa faixa em torno de $11\,000\,K$. A estrela PG 1159-035, por exemplo, é um objeto “azul”. Talvez seja mais correto chamá-las de “*estrelas degeneradas*” (o que as colocaria na mesma classe das “*estrelas de nêutrons*”). De qualquer forma, a expressão “*anã branca*” se consagrou e é utilizada até hoje para designar essa classe de objetos.

Esquema de Classificação Espectral

O *sistema de classificação espectral* de anãs brancas que vem sendo utilizado atualmente foi proposto por Sion *et al.* (1983). Ele substituiu o sistema anterior elaborado por Greenstein (1960) a partir de um sistema proposto por Luyten (1952). O sistema de Sion *et al.* preservou a notação utilizada pelo sistema anterior mas introduziu uma melhor descrição sobre o espectro ótico e incorporou um índice numérico para a temperatura efetiva. A combinação de símbolos do atual sistema consiste em:

-
- (1) um **D** maiúsculo para “*degenerado*”;
 - (2) uma letra maiúscula para o tipo espectroscópico primário ou dominante no espectro ótico;
 - (3) uma letra maiúscula para alguma característica espectroscópica secundária, **se** presente em *qualquer parte do espectro eletromagnético*;
 - (4) um símbolo adicional: **P** para estrelas magnéticas polarizadas; **H** para estrelas magnéticas sem polarização detectável; **X** para espectros peculiares ou inclassificáveis e **V** para denotar qualquer estrela degenerada variável;
 - (5) um índice de temperatura de 0 a 9, definido por $10 \times \theta_{eff} (= 50\,400/T)$.
-

Os tipos espectrais estão mostrados na tabela Tab. 1.1.

Por exemplo, *DA1* indica uma anã branca com apenas linhas de H I em seu espectro e $T_{eff} \simeq 30\,000\,K$ enquanto *DBAP3* indica uma anã branca magnética, polarizada, com linhas de hélio e hidrogênio, mas com hélio dominante, e $T_{eff} \simeq 20\,000\,K$. O *índice de*

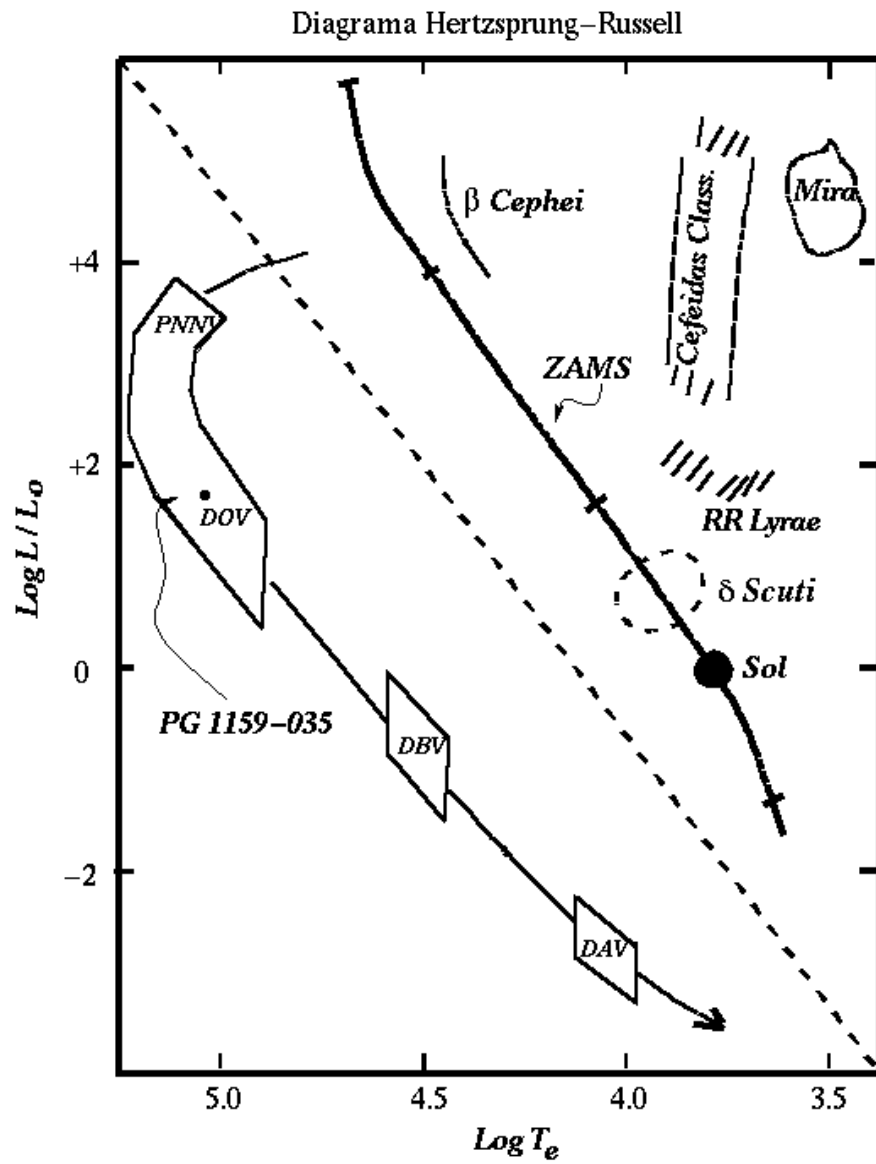


Fig. 1.1: Diagrama H-R teórico mostrando as posições das faixas de instabilidade das anãs brancas.

Tab. 1.1: Tipos espectrais e suas características.

Tipo Espectral	Características
DA	Somente linhas de Balmer; ausência de He I e metais;
DB	Linhas de He I; ausência de H e metais;
DC	Espectro contínuo, nenhuma linha mais funda que 5%; em qualquer parte do espectro eletromagnético;
DO	Linhas fortes de He II: presença de He I ou H;
DZ	Somente linhas de metais; nenhum He ou H;
DQ	Linhas características de carbono (atômico e/ou molecular) em qualquer parte do espectro eletromagnético;

temperatura, porém, tem sido omitido por muitos autores, principalmente pela imprecisão na determinação da temperatura: a estrela anã branca PG 1159-035, por exemplo, é mencionada como sendo uma *DOV*, uma estrela degenerada *D*, do tipo espectral *O*, variável (*V*).

Composição Química Superficial

As anãs brancas normalmente estão envoltas por um fina camada de hélio sobre a qual pode também existir uma camada ainda mais fina de hidrogênio. Esses elementos são remanescentes de estágios anteriores. As camadas possivelmente estão separadas e têm um alto teor de pureza devido à ação gradual do processo de “*afundamento gravitacional*” (*gravitational settling*) e suas espessuras variam de estrela para estrela dependendo de como se processou a evolução das camadas onde ocorreu a queima do combustível nuclear e também dos processos evolutivos subsequentes, principalmente se ocorreu ejeção de nebulosa planetária e em que fase dos pulsos do AGB, ou se houve um último pulso após a estrela chegar à fase de pré-anã branca.

No que diz respeito à *abundância química superficial*, podemos dividir as anãs brancas em dois grandes grupos: (1) as que possuem atmosferas formadas essencialmente por hidrogênio puro (DAs) e que constituem cerca de 80% de todas as anãs brancas; e (2) aquelas que possuem atmosferas formadas essencialmente por hélio puro (DOs e DBs), que representam os 20% restantes (Sion *et al.* 1983). Existe também uma pequena porcentagem de outros tipos:

- DBAs - atmosferas com predominância de He e traços de H;
- DABs - linhas fracas de He I em um espectro com linhas de Balmer;
- DCs - apenas espectro contínuo (frio);
- DQs - linhas frias de carbono; provável dominância de He;
- DZs - algumas linhas de metal, especialmente Ca.

Esfriamento

Apesar de possuírem temperaturas iniciais superiores a $200\,000\text{ K}$, a fonte de energia mais importante nas anãs brancas é o calor interno que gradualmente é dissipado para o exterior através do envelope que as envolve (pode haver queima nuclear na base da camada de H por alguns milhões de anos após a estrela chegar à fase de pré-anã branca, se a camada de H possuir massa de $\sim 10^{-4} M_{\odot}$). A taxa segundo a qual a energia é irradiada (*esfriamento*), $\frac{dE}{dt}$, será:

$$L(t) = -\frac{dE(t)}{dt}, \quad (1.1)$$

onde L é a *luminosidade*. Como a maior parte da estrela anã branca é isotérmica, podemos fazer a aproximação

$$L(t) = -\left(\frac{dE_{th}}{dT_c}\right)\left(\frac{dT_c}{dt}\right). \quad (1.2)$$

Quando a degenerescência é muito grande, a energia gravitacional liberada pela compressão é completamente absorvida para forçar os elétrons degenerados nos níveis de energia mais externos. Por isso, as pequenas variações da densidade interna podem ser desprezadas.

O *calor específico* de um gás degenerado com $T > 0$ é controlado pelos íons. Como a temperatura é constante no interior e o núcleo contém praticamente toda a massa da estrela, então a taxa com a qual os íons liberam calor no esfriamento obedece uma relação de baixa-potência entre a idade e a luminosidade da anã branca (Mestel 1952):

$$t_{cool} \propto L^{-5/7}. \quad (1.3)$$

Um resultado mais preciso para esfriamento de anãs brancas foi calculado por Iben & Tutukov (1984), que leva em conta a emissão de neutrinos (L_{ν}) (importante para $L > 10^{-1.5} L_{\odot}$), o calor latente de cristalização (importante para $L < 10^{-4} L_{\odot}$), a liberação nuclear de energia (L_{nuc}) (importante para $M_H > 10^{-4} M_{\star}$), e a liberação de energia gravitacional a partir de camadas não-degeneradas:

$$t_{cool} = 8.8 \times 10^6 \left(\frac{A}{12}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{5/7} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2/7} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{-5/7} \text{ anos}, \quad (1.4)$$

onde A é o *peso atômico médio* dos núcleos (em unidades de massa atômica) e μ é o *peso molecular total*. Isso sugere que estrelas mais quentes (mais brilhantes) esfriam mais rapidamente. Para as estrelas mais frias com $L \simeq 10^{-4.5} L_{\odot}$, obtém-se algo em torno de 10^{10} anos para o tempo de esfriamento, segundo a equação acima. Entretanto, uma série de novas considerações sobre a física do esfriamento de anãs brancas vem sendo feita, o que pode alterar radicalmente a equação de estado. Por exemplo, se o material da estrela se cristaliza, então o calor latente é liberado e isso pode reduzir o esfriamento da estrela, embora Lamb & Van Horn (1975) demonstram que somente 1/1 000 da energia é liberada em forma de luminosidade.

Como as anãs brancas esfriam, as zonas de convecção crescem e depois diminuem, afetando a taxa de esfriamento nas camadas mais externas. Como parte dos modelos dessas zonas de convecção, serão necessárias equações de estado adequadas e consistentes para o

envelope, as quais podem ser muito difíceis de se computar por causa dos efeitos não-ideais devido a gases com mais de um componente (veja o *review* de Kepler & Bradley 1995).

A mistura de elementos pela convecção é também possível e pode mudar as abundâncias na fotosfera da estrela e tornar confusa sua classificação espectral.

Cristalização

A cristalização do núcleo de uma anã branca deve ocorrer por interação coulombiana entre os íons não-degenerados quando a estrela esfria e portanto a densidade aumenta ($L \simeq 10^{-4} L_{\odot}$, onde o valor foi calculado para um modelo com núcleo de C puro). Em altas pressões, os íons eventualmente se arranjam em uma *rede cristalina* com uma estrutura do tipo *bcc* (*body-centered-cubic*) periódica, a qual minimiza a energia de interação eletrostática total.

1.2 Estrelas Variáveis

De um modo bastante simples, podemos definir *estrelas variáveis* como *estrelas que apresentam mudanças em seu brilho* em escalas de tempo menores que 100 anos (vida do observador). O gráfico do brilho versus o tempo é chamado de *curva de luz*.

Os *sistemas de classificação* de estrelas variáveis são baseados em suas curvas de luz e propriedades físicas. Vários sistemas de classificação têm sido propostos. O esquema que apresentamos aqui, é o adotado na 4ª edição do *General Catalogue of Variable Stars* (GCVS), possivelmente, o mais completo de todos os existentes na atualidade. Este sistema classifica as estrelas variáveis em *seis classes* distintas, de acordo com as razões causadoras da variabilidade observada em suas curvas de luz:

- (1) variáveis eruptivas;
- (2) variáveis pulsantes;
- (3) variáveis rotacionais;
- (4) variáveis cataclísmicas (explosivas e do tipo *nova*);
- (5) sistemas binários eclipsantes;
- (6) sistemas binários com fontes intensas de raios-X.

São chamadas de **variáveis eruptivas** as estrelas que variam seus brilhos devido a processos violentos e erupções que ocorrem em suas cromosferas e coronas. As mudanças de luz são frequentemente acompanhadas pela ejeção de matéria na forma de vento estelar de intensidade variável e/ou por interação com a matéria do meio interestelar circundante.

As **variáveis pulsantes** são estrelas que apresentam expansão e contração de suas camadas superficiais. As pulsações podem ser radiais ou não-radiais, conforme veremos com mais detalhes logo adiante.

As **variáveis rotacionais** são estrelas com uma distribuição superficial de brilho não-uniforme ou com formato elipsoidal. Sua variabilidade é então causada por sua rotação axial em relação ao observador. A distribuição não-uniforme de brilho pode ser causada pela

presença de manchas ou por qualquer desuniformidade térmica ou química da atmosfera da estrela produzida pelo campo magnético cujo eixo normalmente não coincide com o eixo de rotação da estrela.

São chamadas de **variáveis explosivas** as estrelas mostrando explosões causadas pelo surgimento de processos termonucleares em suas camadas superficiais (*Novas*) ou pelo colapso de seus núcleos (*Supernovas*). As variáveis desta classe mostram uma rápida liberação de energia para o espaço circundante, ou então, são objetos que não mostram explosões mas cujos espectros (ou outras características) lembram variáveis explosivas. A maioria das variáveis desta classe é composta de sistemas binários, onde cada componente exerce uma forte influência sobre a evolução da outra. É bastante comum se observar que uma das componentes é uma anã quente rodeada por um disco de acreção formado por matéria perdida pela companheira (uma estrela maior e mais fria).

A variabilidade dos **sistemas binários eclipsantes** é causada pela ocorrência de eclipses.

Existem sistemas binários que são fortes **fontes variáveis de raios-X**, as quais não podem ser bem descritas por qualquer um dos tipos de variáveis mencionados anteriormente. Uma das componentes do sistema é um objeto compacto, quente (uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou, possivelmente, um buraco negro) e recebe uma injeção de matéria vinda da outra componente ou de um disco de acreção. O fluxo de matéria é o que dá origem à emissão de raios-X. Essa emissão de raios-X atinge a atmosfera da companheira do objeto compacto que, sendo mais fria do que este, re-irradia na forma de radiação térmica de alta temperatura (efeito de reflexão). Este efeito é responsável pelas características complexas da variabilidade ótica desse tipo de sistema binário.

Tipos de Variáveis Pulsantes

Em cada uma das classes acima, as estrelas são subdivididas em vários tipos (GCVS). Nosso interesse nesse trabalho recai sobre as variáveis pulsantes que, esquematicamente, podemos dividir em *cinco* tipos principais (Percy 1995), mostrados na Tab. 1.2.

Os períodos de pulsação podem variar de algumas dezenas de segundos até alguns anos. Alguns períodos típicos (GCVS) são:

- DOV, DAV e DBV: 30 segundos a 25 minutos;
- β Cephei: 0.1 a 0.6 dias; 0.02 a 0.04 dias para as mais rápidas;
- Cefeidas clássicas: 1 a 135 dias;
- *W Vir*: 0.8 a 35 dias;
- *RV Tauri*: 30 a 150 dias;
- *SRd*: 30 a 1100 dias;
- *RR Lyrae*: 0.2 a 1.2 dias;
- *Mira*: 80 a 1000 dias.

Tab. 1.2: Tipos de Variáveis Pulsantes

-
-
- (1) Variáveis degeneradas:
 - DOV, DBV, DAV (variáveis degeneradas do tipo O, B e A)
 - Núcleos de nebulosas planetárias (PNN)

 - (2) Variáveis tipo OB:
 - Estrelas β Cephei (pulsações radiais)
 - Estrelas 53 Persei (pulsações não-radiais)
 - Estrelas Be (de curto período)
 - Supergigantes OB (pulsações não provadas)

 - (3) Variáveis Cefeidas e similares:
 - Cefeidas clássicas (população I)
 - Estrelas *W Virgins* (população II)
 - Estrelas *RV Tauri*
 - *SRd* (variáveis amarelas semi-regulares)
 - Estrelas δ Scuti e *SX Phoenicis*
 - *ROAp* (variáveis Ap rapidamente oscilantes)
 - Estrelas *RR Lyrae* e estrelas *BL Herculis*

 - (4) Estrelas Pulsantes Vermelhas:
 - Estrelas *Mira*
 - Estrelas gigantes e supergigantes semi-regulares e irregulares

 - (5) Outras:
 - Sol e estrelas pulsantes do tipo solar
 - Estrelas *F* levemente pulsantes
-
-

1.3 Anãs Brancas Pulsantes

As anãs brancas pulsantes (ou variáveis degeneradas) até poucos anos eram classificadas em quatro classes:

- **Estrelas PNNVs (ou K1-16):** são núcleos quentes de nebulosas planetárias. Espectroscopicamente, esses objetos são similares às estrelas PG1159, mas neles a nebulosa é visível e é possível detectar o vento. Como uma boa parte das PNNs são binárias, é possível que a variabilidade fotométrica seja causada por eclipses e efeitos de reflexão e não por pulsações. Os períodos de pulsação das PNNVs são maiores que os das DOVs: 800-2000 s (e talvez maiores), mas as PNNVs mostram mudanças dramáticas em seus espectros de pulsação uma escala de tempo da ordem de dias a anos. Outro fator que as diferencia das DOVs é uma gravidade superficial menor (Werner 1995).
- **Estrelas DOV (ou PG1159, ou GW Vir):** são estrelas quentes, com temperaturas que ultrapassam 120 000 K. PG 1159-035 é a estrela protótipo desta classe que atualmente conta com 11 objetos, mas apenas 5 são comprovadamente estrelas pulsantes. Seus espectros são muito parecidos com os de O VI PNN.
- **Estrelas DBV (ou V 477 Her):** a existência dessas estrelas foi predita por Don Winget a partir de modelos teóricos e posteriormente confirmada, em 1982 (Winget *et al.* 1982). Atualmente, este grupo possui 7 membros.
- **Estrelas DAV (ou ZZ Ceti):** foram as primeiras anãs brancas descobertas e as mais estudadas até agora. Atualmente, este grupo conta com 23 membros conhecidos.

Entretanto, estudos recentes sobre a *RXJ 2117* mostraram que essa estrela apresenta algumas das propriedades das PNNVs (alguns períodos superiores a 1000 s, mudanças dramáticas em seu espectro de pulsação em escalas de tempo da ordem de meses e uma nebulosa circundante) e das DOVs (alguns períodos menores que 1000 s) (Kawaler 1995). Essas propriedades espectrais juntamente com a presença de uma grande nebulosa, levaram Appleton *et al.* (1993) a sugerir que a *RXJ 2117* poderia ser considerada um objeto intermediário entre as PNNVs e as DOVs. Por isso, atualmente, as PNNVs e DOVs são consideradas como fazendo parte de uma mesma classe e as anãs brancas pulsantes passaram a ser classificadas em *três classes*: DOVs, DAs e DBs.

É interessante observar como essas três classes se posicionam no diagrama HR (veja Fig. 1.1): elas estão bem espaçadas tanto em relação às temperaturas efetivas, T_{eff} , quanto em relação às luminosidades, $\log L/L_{\odot}$. A única coisa que torna as anãs brancas pulsantes estrelas peculiares é sua variabilidade pois, fora isso, elas são iguais às anãs brancas normais.

1.4 Teoria de Pulsações

Apresentamos aqui alguns conceitos básicos da *Teoria de Pulsações*. Uma visão mais aprofundada pode ser encontrada em Hansen & Kawaler (1994), Cox (1980) e Unno *et al.* (1979 e 1989).

Existem três níveis de complexidade, baseados num número decrescente de hipóteses assumidas sobre a natureza das pulsações. Cada um deles pode ser aplicado tanto às pulsações não-radiais (mais difíceis!) quanto às radiais (mais fáceis!):

- **Pulsações Lineares Adiabáticas.** As pulsações são assumidas como sendo muito pequenas em amplitude. Além disso, assumimos que não existe nenhum fluxo de energia de uma parte da estrela para outra. Esse modelo nos leva à *Equação de Eddington* (Hansen & Kawaler 1994):

$$-\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} \left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\zeta}{dr} \right) - \frac{1}{r\rho} \left\{ \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} \zeta = \sigma^2 \zeta, \quad (1.5)$$

onde ρ é a densidade; r é a distância a partir do centro; Γ_1 é a constante do gás e P é a pressão. As soluções ζ desta equação (que satisfazem as condições de contorno) são chamadas *auto-soluções* da equação, e representam a dependência da amplitude de pulsação em relação à distância r do centro da estrela. As correspondentes frequências σ são os *autovalores* da equação, e são as frequências possíveis de pulsação.

- **Pulsações Lineares Não-Adiabáticas.** As pulsações são assumidas como sendo muito pequenas em amplitude, mas pode existir fluxo de energia de uma parte à outra da estrela. Assim, os chamados “*driving mechanisms*” das pulsações podem ser investigados.

- **Pulsações Não-Lineares (Hidrodinâmicas).** Neste caso, as variações de amplitude nas pulsações não precisam ser muito pequenas, podendo assumir valores maiores, permitindo que as amplitudes das pulsações sejam investigadas.

Pulsações Radiais

Quanto à orientação dos deslocamentos, as pulsações podem ser de dois tipos: *radiais* e *não-radiais*. Se os deslocamentos são independentes da posição angular e dependem apenas da distância r , mantendo a simetria esférica, teremos as pulsações radiais. Se o sentido do deslocamento é o mesmo para qualquer ponto da estrela, em qualquer instante de tempo, dizemos que as pulsações radiais ocorrem em seu *modo fundamental* (Fig.1.2-a). Porém, pode ocorrer que existam N camadas nodais na estrela de forma que a superfície externa de uma dada camada esteja se deslocando no sentido oposto ao de sua superfície interna. Neste caso, a estrela apresenta N pulsações simultâneas: o modo fundamental mais um 1° , um 2° , ..., um N° *sobretom* (“overtone”) (Fig.1.2-b).

Para pulsações radiais (modo fundamental), a teoria de pulsações prevê que o *período radial fundamental* é dado por (Percy 1992):

$$P_f = K_f r^{3/2} M^{-1/2}, \quad (1.6)$$

onde r é o raio, M é a massa e K_f é uma função fracamente dependente de r e M . Esta expressão nos leva à relação período-densidade média (Cox 1980):

$$Q = P \sqrt{\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot}, \quad (1.7)$$

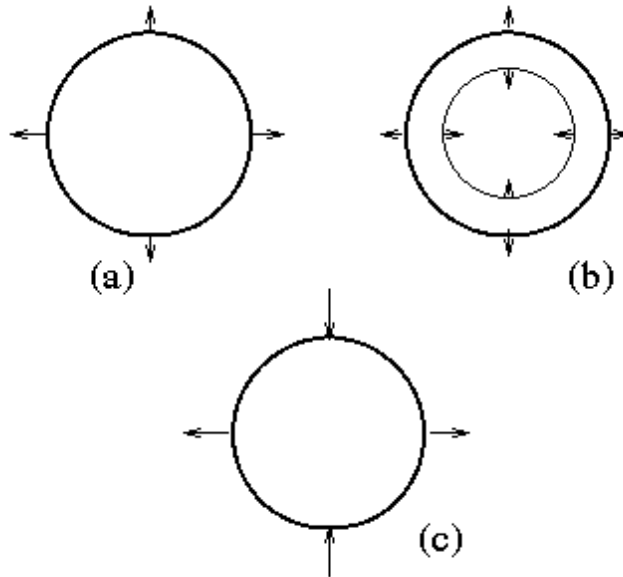


Fig. 1.2: Pulsações: (a) radiais (modo fundamental); (b) radiais (2º sobreton); (c) não-radiais.

onde Q é uma constante e P é o período. Os valores previstos desta forma para o período de pulsação, P_f , de anãs brancas pulsantes são todos pelo menos uma ordem de grandeza *menor* que os valores observados. Isto, juntamente com o fato de que todas as anãs brancas pulsantes são multiperiódicas, indica que essas pulsções têm natureza *não-radial*.

Pulsações Não-Radiais

Quando os deslocamentos não dependem apenas da distância r , mas também da posição angular, temos então, as pulsções *não-radiais* e, portanto, a simetria esférica global não é mantida (Fig. 1.2-c). Porém, se as variações de amplitude forem suficientemente pequenas, a simetria esférica é ainda válida. As pulsções não-radiais podem ser imaginadas como a propagação de ondas em porções adjacentes da estrela, tendo temperaturas opostas em fase.

Matematicamente, a solução das equações que usamos para descrever as pulsções não-radiais é expressa na forma:

$$f(r, \Theta, \Phi; t) = R(r)Y_m^\ell(\Theta, \Phi)e^{i\sigma t}, \quad (1.8)$$

onde $R(r)$ descreve a parte radial, e contém um número k de *sobretons* (“overtones”), que nos dá o número de nodos na direção radial; σ é a *freqüência* de pulsação (em Hz) e Y_ℓ^m são os esféricos harmônicos, dados em termos de polinômios de Legendre, $P_\ell^m(\cos \theta)$, e podem ser denotados por²:

$$Y_\ell^m(\Theta, \Phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m e^{im\Phi} P_\ell^m(\cos \theta). \quad (1.9)$$

² Expressões analíticas gerais para $R_{m'm}^\ell$ podem ser encontradas em Messiah (1962), pag. 1068, e expressões para $Y_\ell^m(\Theta, \Phi)$ podem ser encontradas em Merzbacher (1960), pag. 185.

O índice ℓ é chamado de *índice esférico harmônico* ou de *grau do modo*. O índice m é a *ordem azimutal* e pode tomar os valores

$$m = -\ell, \dots, 0, \dots, +\ell, \quad (1.10)$$

ou seja, $(2\ell + 1)$ valores. Os valores dos índices ℓ e m se manifestam na superfície da estrela como zonas mais quentes alternadas com zonas mais frias. O número $(\ell - |m|)$ nos dá o número de diferentes zonas paralelas ao equador, enquanto que o valor $|m|$ nos dá o número de grandes círculos dividindo a superfície da estrela na direção azimutal (meridianos) (veja Fig. 1.3). Para $\ell \geq 3$, as contribuições dos segmentos mais brilhantes e mais escuros da superfície da estrela tendem a se cancelar, tornando difícil detectar modos mais altos na curva de luz da estrela.

Se a estrela inicialmente possui simetria esférica com raio R_0 e, se ela é perturbada por uma *pulsação de baixa amplitude*, seu raio torna-se (Robinson, Kepler & Nather 1982):

$$r = R_0(1 + \epsilon\zeta_r), \quad (1.11)$$

com $\epsilon \ll 1$. Se a estrela é pulsante e possui um *modo-g* simples (veja seção a seguir), então ζ_r fica:

$$\zeta_r = \text{Real}\{Y_m^\ell(\Theta, \Phi)e^{i\sigma t}\}. \quad (1.12)$$

Para anãs brancas pulsantes, os deslocamentos radiais são da ordem de poucos metros ($10^{-4} R_\star$).

Teoricamente, para modos-g e modos-p (veja a próxima seção), o índice ℓ pode tomar *todos* os valores ≥ 1 . O particular modo com $\ell = 0$ corresponde ao modo radial. Contudo, observa-se que em estrelas pulsantes não-radiais, nem todos os modos estão presentes e mais, que o espaçamento entre dois valores consecutivos de k nem sempre é igual a 1. Winget & Van Horn (1981) examinaram este problema e concluíram que só são excitados aqueles modos de mínima energia cinética de pulsação, definida por:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^{M_\star} |\delta r|^2 dM_r, \quad (1.13)$$

onde $\delta\vec{r}$ é o vetor de deslocamento lagrangeano e o deslocamento relativo radial é normalizado para $\delta r/r = 1$ na superfície. E_{kin} representa a energia necessária para que uma onda estacionária, de índice k , se propagando desde o núcleo até a superfície faça a estrela oscilar. Ocorre que a estratificação na composição da estrela produz efeitos de amortecimento nas regiões centrais diferentes para os distintos modos de pulsação, o que favorece a manifestação de determinados modos de pulsação em detrimento ao de outros.

Para as estrelas DOV, Kawaler *et al.* (1985) calcularam que o espaçamento em período para estrelas de mesmo ℓ é muito sensível à massa da estrela, sendo independente da composição das camadas superficiais e/ou da luminosidade da estrela. Esta sensibilidade permitiu que Winget *et al.* (1991) medissem a massa da PG 1159-035 com uma precisão melhor do que em sistemas binários: $M = (0.586 \pm 0.003) M_\odot$. Resultados semelhantes foram obtidos por Tassoul *et al.* (1990) para as DAV.

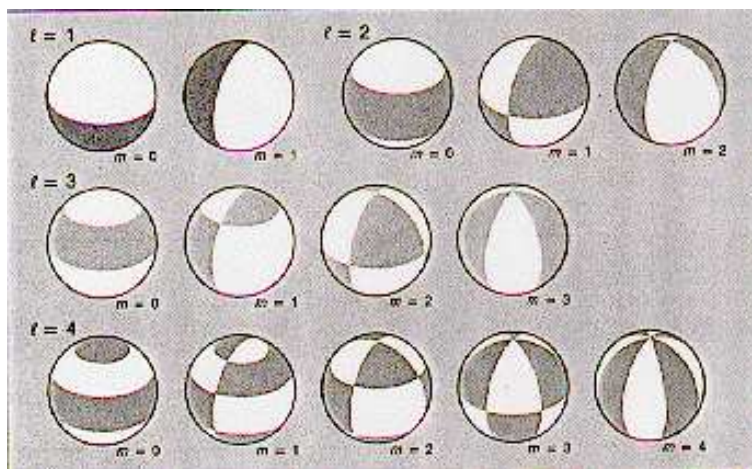


Fig. 1.3: Ilustração de esféricos harmônicos (Winget & Van Horn 1982).

Modos de Pulsação

Dependendo da *força restauradora* atuante, as pulsações podem ser divididas em duas categorias principais:

- **Modos-p** (ou *modos de pressão* ou ainda *modos acústicos*), onde a pressão é a força restauradora. Esses modos não são detectados em anãs brancas. Caso fossem, estariam associados a frequências altas.
- **Modos-g** (ou *modos de gravidade*) onde a gravidade atua como força restauradora. Esses são os modos observados em anãs brancas pulsantes, cujas frequências, tipicamente baixas para as anãs brancas, dependem da estrutura interna da estrela.

As pulsações radiais apresentam sempre modos-p. Desde que a variação na força gravitacional é para dentro na fase de compressão e para fora na fase de expansão, a gravidade não pode ser a força restauradora para pulsações radiais.

Para pulsações não-radiais, tanto os modos-p quanto os modos-g podem ser excitados. Por isso espera-se um maior número de estrelas pulsantes com pulsações não-radiais.

Efeitos Devidos à Rotação e ao Campo Magnético

Geralmente, para uma estrela sem rotação ou campo magnético, para a qual a simetria esférica é mantida, os modos são degenerados com respeito ao valor de m . Esta degenerescência é levantada pela presença de rotação ou campo magnético. Desta forma, para um modo $\ell = 1$ aparecerão *tripletes* para baixos valores de rotação, *doublets* para baixos valores de \vec{B} , para diferentes valores de k . O espaçamento entre as componentes dos triplets ou doublets, nos dão uma indicação da taxa de rotação e/ou do campo magnético.

Para rotação uniforme, o desdobramento de frequência é dado por (veja por exemplo, Kepler & Bradley 1995):

$$\Delta_{n\ell m} = -m\Omega \left\{ 1 - \frac{\int_0^M [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dM_r}{\int_0^M [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dM_r} \right\}. \quad (1.14)$$

As autofunções $\xi_r(r)$ e $\xi_t(r)$ vem de um modelo não-radial e dependem somente de n e ℓ .

Taxa de Variação Temporal do Período

À medida que a estrela evolui, mudanças em sua estrutura interna provocam variações em seus períodos de pulsação ao longo do tempo. Para modos de pulsação do tipo g podemos escrever (Cox 1980):

$$P_g^2 \simeq -\frac{k^2 r^2}{A g \ell(\ell+1)}, \quad (1.15)$$

com

$$A = \frac{\chi_T (\nabla - \nabla_{ad})}{\chi_\rho H_p}, \quad (1.16)$$

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad (1.17)$$

$$\chi_\rho = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T, \quad (1.18)$$

onde, k é o número radial de onda; ℓ é o índice esférico harmônico; g é a gravidade local na posição radial r ; ∇ é o gradiente de temperatura estelar real; ∇_{ad} é o gradiente adiabático de temperatura; e H_p é a altura da escala de pressão. Se assumirmos que o período é determinado na região onde a temperatura máxima ocorre, então podemos fazer $\nabla \simeq 0$ (Winget, Hansen & Van Horn 1983). Com esta aproximação podemos diferenciar a eq.(1.15) com respeito ao tempo, t , e encontrar (Kawaler *et al.* 1985):

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -a \frac{\dot{T}_m}{T_m} + b \frac{\dot{R}}{R}, \quad (1.19)$$

onde, T_m é a temperatura máxima; R é o raio estelar; e a e b são constantes *positivas*, próximas à unidade.

A eq.(1.19) relaciona três escalas de tempo: a escala de tempo P/\dot{P} , a escala de tempo de esfriamento T/\dot{T} e a escala de tempo de contração R/\dot{R} . Para estrelas anãs brancas evoluídas a taxa temporal de contração é muito pequena, de forma que o segundo termo do lado direito de (1.19) torna-se desprezível comparado com o primeiro:

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -a \frac{\dot{T}_m}{T_m}, \quad (1.20)$$

ou seja, a escala de tempo P/\dot{P} é da mesma ordem de grandeza da escala de tempo de esfriamento, T/\dot{T} . Como a estrela está esfriando, $\dot{T} < 0$, portanto, $\dot{P} > 0$, ou seja, o período *cresce* com o tempo.

Para estrelas pré-anãs brancas, a taxa temporal de contração *pode* não ser desprezível e o sinal de \dot{P} dependerá do balanço entre os dois termos, \dot{T}/T e \dot{R}/R . Assim, se o processo de contração for dominante em relação ao processo de esfriamento, \dot{P} será *negativo* e o período estará *diminuindo* com o tempo. Caso contrário, se o processo de esfriamento for dominante em relação ao processo de contração, \dot{P} será *positivo*.

1.5 Por Que Medir as Variações Temporais dos Períodos?

O objetivo principal deste trabalho é *medir a taxa de variação temporal dos períodos dominantes de pulsação da estrela DOV PG 1159-035*. Neste ponto cabe a pergunta: **“Para que serve medir a taxa de variação temporal de um período de pulsação de uma estrela anã branca pulsante?”**

Como vimos na seção anterior, para o caso de pulsações de modo-g, a *taxa de variação temporal de um período*, dP/dt , está relacionada com a escala de tempo de esfriamento de anãs brancas, $|T/\dot{T}|$, ou seja, medindo-se dP/dt podemos obter $|T/\dot{T}|$ e compará-lo com o valor previsto por modelos teóricos para o esfriamento de anãs brancas. Isso constitui um *teste direto* para a teoria de evolução estelar e para a teoria de pulsação de estrelas degeneradas quentes.

Com as medidas de dP/dt podemos “calibrar” os modelos evolucionários e determinar a idade de estrelas anãs brancas com maior precisão. As anãs brancas estão nos estágios finais da evolução de estrelas com massas menores que $\sim 7 M_{\odot}$. A função de luminosidades observadas para anãs brancas apresenta um corte agudo em $\log L/L_{\odot} = -4.5$ (mesmo excluindo os efeitos de seleção). Isto é atribuído à ausência de qualquer anã branca mais fria. Portanto, a partir da idade das estrelas mais velhas podemos estimar a idade do disco de nossa galáxia e, por extensão, a idade do Universo (Winget *et al.* 1987).

No Cap.2 será apresentado o nosso objeto de estudo: a estrela DOV PG 1159-035. De certo modo, esta estrela é especial: além de ser o protótipo de sua classe, ela é atualmente a estrela variável mais sismologicamente estudada depois do Sol e sobre a qual podemos extrair um maior número de informações. Já foram identificados mais de 100 modos de pulsação em suas curvas de luz. Embora esse número possa parecer pequeno comparado com os 10^6 modos conhecidos para o Sol, ele é considerável em termos de estrelas pulsantes (Winget *et al.* 1991).

No Cap.3 descreveremos os procedimentos usados na aquisição e redução dos dados fotométricos da PG 1159-035. No capítulo seguinte, discutiremos sobre as técnicas utilizadas na pesquisa de periodicidades em curvas de luz e mostraremos os resultados obtidos até agora para a PG 1159-035.

No Cap.5 descreveremos as técnicas utilizadas na determinação de dP/dt e no Cap.6 mostraremos a aplicação destas técnicas na medida das taxas de variação temporal de quatro dos principais modos de pulsação da PG 1159-035. Finalmente, no Cap.7 apresentaremos as conclusões que foram tiradas deste trabalho.

Capítulo 2

PG 1159-035

Na primeira seção deste capítulo apresentamos o objeto de estudo desse trabalho: a estrela DOV PG 1159-035. As informações seguem uma ordem *aproximadamente* cronológica. Na segunda seção discutiremos o *problema do dP/dt negativo* e na última seção, os objetivos deste trabalho.

2.1 A Estrela DOV PG 1159-035

Palomar-Green Survey

A estrela PG 1159-035 foi identificada pela primeira vez em 1977 numa busca de objetos com excesso de ultravioleta realizado por Richard F. Green (*PG Survey*). Esse *survey* serviu de base para o “*Palomar-Green Catalog of Ultraviolet-Excess Stellar Objects*” (Green *et al.* 1986) o qual contém 1874 objetos observados com o telescópio *Schmidt* de 46 cm do Monte Palomar em uma área de 10 714 graus quadrados subdividida em 266 setores. Todos os objetos deste catálogo possuem magnitudes mais brilhantes que 16.67.

A população dominante na amostra é formada por estrelas subanãs: 40% são subanãs quentes com atmosferas ricas em hidrogênio (sdB's) e 13% são subanãs ricas em hélio (sdO's). As anãs brancas mais quentes, do tipo DO, DB e DA correspondem respectivamente a 21%, 2.8% e 1.0%, enquanto as anãs brancas mais frias do tipo DC ou DZ a 1.2%. Variáveis cataclísmicas e estrelas com características espectrais de binárias constituem 5%; nebulosas planetárias, 0.5%; objetos extragaláticos, 9%; QSOs, 5%. Somente 0.3% (seis objetos) permaneceram com classificação indefinida. A presença de um grande número de anãs brancas quentes se explica pelo fato dessas estrelas, apesar de apresentarem baixa luminosidade, terem alta temperatura superficial.

O *Palomar-Green Catalog* fornece, para cada objeto, suas coordenadas celestes (para o equinócio de 1950), informações sobre a magnitude fotográfica do campo, a classe do objeto, medidas fotoelétricas disponíveis até então e medidas para os índices espectrofotométricos do objeto, realizadas pelo autor, já que todos os objetos foram observados espectroscopicamente. Para a PG 1159-035, no catálogo temos as seguintes informações:

- Coordenadas (equinócio de 1950):

$$\begin{aligned} R.A. &= 11^h 59^m 12^s .3 \\ \delta &= -03^{\circ} 28' 57'' \end{aligned}$$

As medidas de posição apresentam incertezas de 8.''7 e 7'' .6 para *R.A.* e δ , respectivamente.

- Índices espectrofotométricos:

$$\begin{aligned}v &= 14.84 \\u - v &= -0.78 \\g - v &= -0.25 \\g - r &= -0.71\end{aligned}$$

As bandas v , $u - v$, $g - v$ e $g - r$ são bandas “monocromáticas”, centradas para u , g , v e r em 2.80, 2.12, 1.85 e 1.44 μm^{-1} , respectivamente.

- Índices fotométricos (sistema Strömgren):

$$\begin{aligned}y &= 14.87 \\b - y &= -0.37 \\u - b &= -0.47\end{aligned}$$

O nome “PG 1159-035” segue a proposta do autor de designar os objetos do *PG survey* por $PG\ hhmm \pm ddd$, onde $hhmm$ é dado pela R.A. do objeto e $\pm ddd$ pela declinação (convertida para graus, multiplicada por dez e arredondada para o inteiro mais próximo). Desse modo, $R.A. = 15^h 59^m 12.^s 3$ fica 1159 e $\delta = -03^\circ 28' 55''$ fica -035.

Detecção da Variabilidade

A variabilidade da estrela PG 1159-035 foi descoberta por McGraw *et al.* (1979). Eles demonstraram que a PG 1159-035 era multiperódica com pelo menos dois períodos de pulsação: um de $\sim 540s$ e outro de $\sim 460s$ simultaneamente presentes na curva de luz da estrela. Mais tarde seriam identificadas outras estrelas com características espectrais muito parecidas com as da PG 1159-035, definindo a classe espectral das PG1159, como veremos adiante.

Temperatura Efetiva

A presença de linhas de absorção de He II em seu espectro sugeria uma temperatura superficial muito alta, o que localizava a estrela no extremo superior esquerdo da seqüência de anãs brancas no diagrama H-R. Isso levou McGraw *et al.* a sugerir que a PG 1159-035 estaria evoluindo rapidamente, fazendo com que os períodos de pulsação mudassem em resposta a mudanças na estrutura interna da estrela e, caso as pulsações fossem periódicas, as variações nos períodos de pulsação seriam mensuráveis em poucos anos (McGraw *et al.* 1979).

Uma análise da distribuição do fluxo ultravioleta longínquo a partir de observações utilizando o espectrofotômetro de ultravioleta da *Voyager 2*, cobrindo o intervalo de $\sim 1200\text{\AA}$ até o limite de Lyman de 912\AA , levantou fortes evidências de que a temperatura efetiva da PG 1159-035 é superior a $100\,000\text{ K}$, o que implica que esta estrela é uma subanã, provavelmente uma pré-anã branca (Wegner *et al.* 1982). Desde então, análises com o *IUE* e *HST* demonstraram que a PG 1159-035 é efetivamente a estrela com a maior temperatura efetiva já medida (Werner 1995).

Estrelas Similares à PG 1159-035

A PG 1159-035 permaneceu como um objeto único até que Grauer & Bond (1984) demonstraram que a estrela central da nebulosa planetária *Kohoutek 1-16*, a PG 0122+200 (O'Brien 1996), era uma variável pulsante com características espectrais e fotométricas similares às da PG 1159-035. Logo em seguida, Bond *et al.* (1984) anunciaram a descoberta de mais duas estrelas, também com características similares às da PG 1159-035: a PG 1707+427 (Fontaine *et al.* 1991, Werner 1994) e a PG 2131+066 (Kawaler 1995). Isso definia uma nova região de instabilidade no diagrama H-R.

A mais pronunciada característica espectral óptica observada nessas estrelas (Fig. 2.1 e Fig. 2.2) é a intensa linha de absorção de He II $\lambda 4686$, C IV $\lambda 4658$ e, possivelmente, outras contribuições de C e N, como mencionadas por Wesemael *et al.* (1985). Essa similaridade levou os astrônomos a agrupá-las em uma classe que tem a PG 1159-035 como protótipo e, por isso, são chamadas de estrelas PG 1159 ou DOs. Atualmente, essa classe contaria com cerca de 14 estrelas (Bradley 1995) das quais apenas as 4 mencionadas acima são conhecidamente variáveis. Mas a descoberta recente de que a estrela *RXJ 2117* possui características que a colocam num ponto intermediário entre as DOs e as PNNVs (veja Cap.1) sugere a fusão das duas classes em apenas uma. A “antiga” classe das PNNVs conta com cerca de 10 objetos (Bradley 1995).

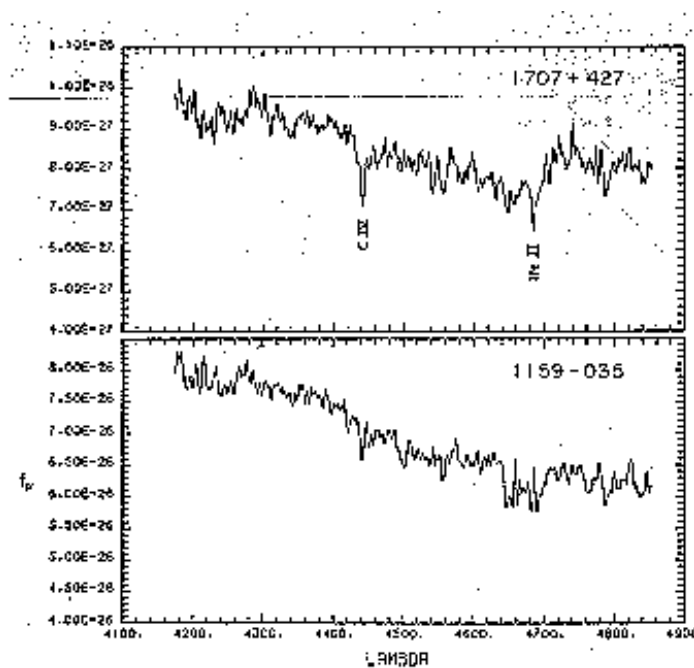


Fig. 2.1: Espectros das DOVs PG 1707+427 e PG 1159-035. As linhas de absorção mais fortes são devido ao C IV e He II (Bond *et al.* 1984).

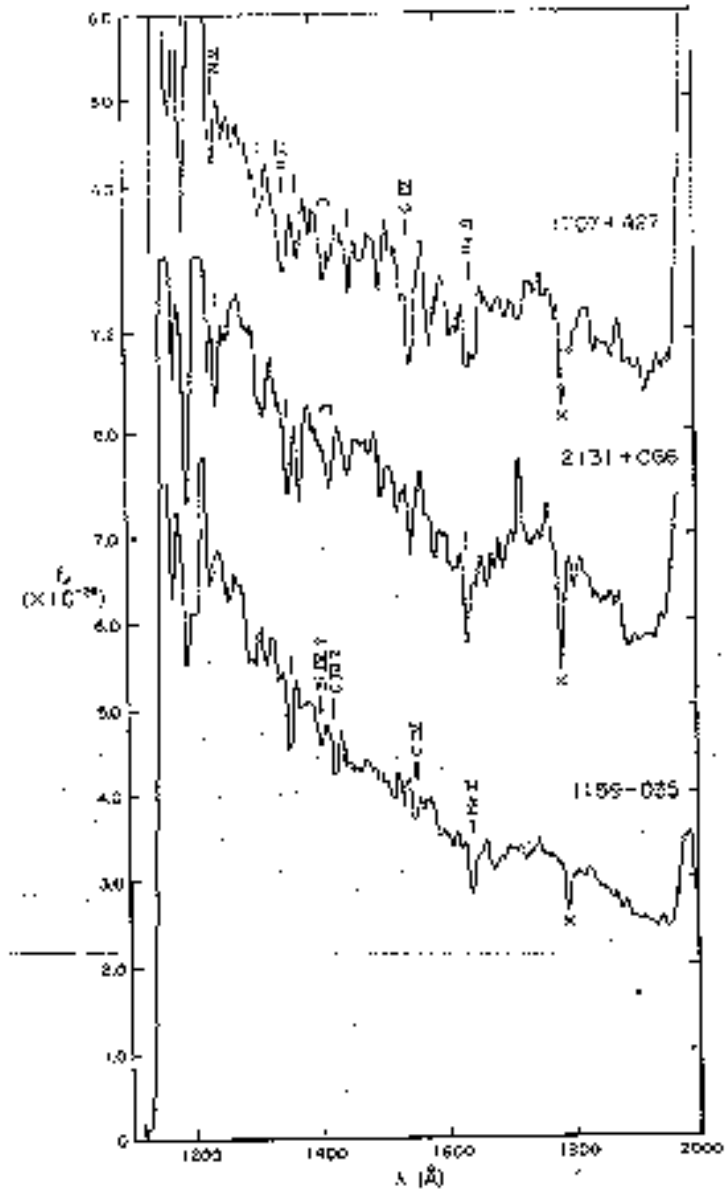


Fig. 2.2: Espectros IUE de três estrelas DOVs. O símbolo "X" indica que a linha não é uma linha de absorção real (Bond *et al.* 1984).

Primeira Estimativa Teórica Para dP/dt

Winget, Hansen & Van Horn (1983) apresentaram resultados preliminares para o cálculo teórico da escala de tempo da variação do período, $|P/\dot{P}|$, usando a eq.(1.19):

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{\dot{R}}{R}, \quad (2.1)$$

onde $\dot{P} = dP/dt$, $\dot{T}_m = dT_m/dt$ e $\dot{R} = dR/dt$. No caso de anãs brancas frias, $|\log(\dot{R}/R)|$ é pequeno comparado com $\dot{T}_m/T_m < 0$ pois as anãs brancas frias evoluem mantendo o raio praticamente constante e, portanto, o período *crece* no tempo, ou seja, \dot{P} é positivo. Contudo, eles consideram a possibilidade de que para estrelas quentes como a PG 1159-035, um \dot{P} negativo seria possível. Esta situação é mostrada na Fig. 2.3 onde as curvas dos modelos de $0.6 M_\odot$ e $0.8 M_\odot$ para proto-anãs brancas são mostrados no plano $T_{eff} - \log g$. A posição da PG 1159-035 está indicada com as barras de erro apropriadas. A linha sólida conectando as duas curvas marca onde ocorre a mudança de sinal para \dot{P} e as linhas tracejadas indicam onde \dot{P} tem valor constante (o número sobre essas linhas é $\log |P/\dot{P}|$ em anos). A mesma quantidade para o caso de nenhuma perda devido à emissão de neutrinos é dada entre parêntesis. Em seus cálculos, Winget *et al.* assumiram $T_{eff} \simeq 120\,000 (+50,000, -20\,000) K$ e $7 < \log g < 8$.

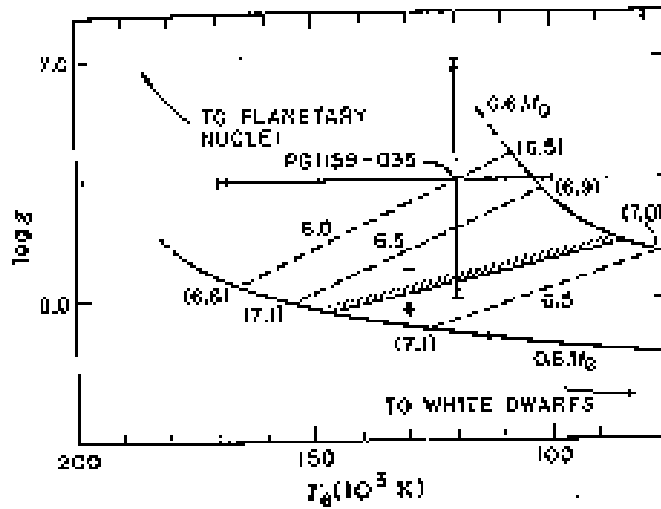


Fig. 2.3: A posição da PG 1159-035 é mostrada no plano $T_e - \log g$ com as barras de erro, dentro dos limites evolucionários para anãs brancas de $0.6 M_\odot$ e $0.8 M_\odot$. As magnitudes aproximadas e o sinal da taxa de \dot{P}_{516s} estão indicados. (Winget, Hansen & Van Horn 1983).

Esses resultados preliminares **previam um possível \dot{P} negativo** (mesmo levando em conta as grandes incertezas.) para a PG 1159-035 e, provavelmente, para outras estrelas de sua classe. Winget, Hansen & Van Horn também calcularam que a ordem de magnitude para a escala de tempo da variação do período, $|P/\dot{P}|$, era de 10^6 anos, o que implicava que a variação do período poderia ser medida com mais uma a três campanhas de observação, dependendo da complexidade da curva de luz, usando a *técnica do diagrama (O-C)* (veja

Cap.5), empregada por Kepler *et al.* (1982) para determinar a variação de períodos em variáveis ZZ Ceti.

Primeira Medida da Taxa de Variação do Período, \dot{P}

A observação de McGraw *et al.* (1979) de que o período poderia ser medido em poucos anos levou um grupo de astrônomos da Universidade do Texas e da Universidade de Cape Town a fazerem observações periódicas da PG 1159-035 durante os anos 1979-1984. A análise desses dados permitiu a identificação de *oito* grupos separados de períodos (ou bandas). Desses oito, somente para o período dominante de 516 s foi possível confirmar a estabilidade (Winget *et al.* 1985).

O método utilizado foi o *método do diagrama (O-C)* (veja Cap.5) que fornece múltiplas soluções, devido às incertezas da diferença de um ciclo de um ano para outro. O diagrama obtido é mostrado na Fig. 2.4 e as 9 soluções possíveis consideradas são mostradas na Tab. 2.2 e os pontos do melhor ajuste estão na tabela Tab. 2.1. O melhor ajuste foi obtido com:

$$\dot{P} = (-1.25 \pm 0.06) \times 10^{-11} \text{ s/s}, \quad (2.2)$$

e esse valor foi assumido para a taxa de variação temporal do período de 516 s. O *signal negativo* concordava, portanto, com as previsões teóricas de Winget, Hansen & Van Horn (1983). Mas note que uma segunda possibilidade para \dot{P} não foi totalmente descartada. Essa segunda possibilidade fornecia um valor *positivo* para \dot{P} de $\sim +0.5 \times 10^{-11} \text{ s/s}$, embora o ajuste obtido para esse valor ($\sigma \simeq 9 \text{ s}$) não fosse tão bom quanto o obtido com o valor negativo ($\sigma \simeq 5 \text{ s}$).

Ano	Campanha N ^o	Número de Ciclos	(O-C) (s)	σ (s)
1980	R2504	-176 992	-180	10
1981	R2611	-103 345	-75	10
1983	R2768	0	0	...
1984	R2886	74 300	-35	10

Tab. 2.1: A tabela mostra o melhor ponto para cada uma das campanhas. Estes foram os pontos utilizados no diagrama (O-C) (Winget *et al.* 1985).

Alguns anos mais tarde, Winget & Kepler (1988) refizeram os cálculos de \dot{P} para esse mesmo conjunto de dados, só que desta vez usando *uma nova definição* para \dot{P} , a qual diferia da anterior por um fator de 2. Assim, para comparar o resultado em (2.2) com os resultados obtidos mais recentemente, devemos multiplicá-lo por 2.

O cálculo de dP/dt para os dados de 1979-1984 foi feito usando dois métodos: o método do diagrama (O-C) e o método do ajuste não-linear por mínimos quadrados (veja Cap. 5). Os resultados obtidos foram:

$$\frac{dP}{dt}_{(O-C)} = (-2.36 \pm 0.40) \times 10^{-11} \text{ s/s}, \quad (2.3)$$

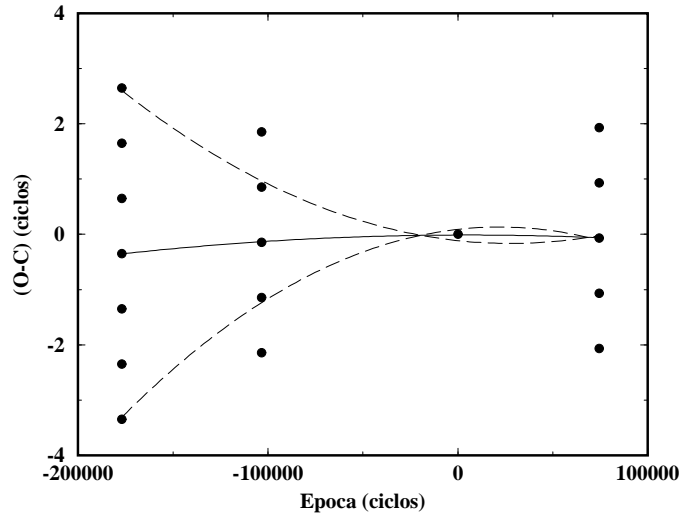


Fig. 2.4: Diagrama (O-C) para todos os dados da PG 1159-035. Os pontos mostram os *alias* de um ciclo para as quatro épocas envolvidas. A linha sólida corresponde ao melhor ajuste; as linhas pontilhadas correspondem aos ajustes alternativos (Winget *et al.* 1985).

Anos				Aceitável?	Por que não?
1980	1981	1983	1984		
...	-2	0	-1	não	\dot{P} muito grande
...	-1	0	-1	não	$\dot{P}_{81-83} \neq \dot{P}_{83-84}$
-1	0	0	-1	não	$\dot{P}_{81-83} \neq \dot{P}_{83-84}$
-3	-1	0	0	não	$\Delta(O - C)$ muito grande
0	0	0	0	sim	
+3	+1	0	0	não	$\Delta(O - C)$ muito grande
+1	0	0	+1	não	$\dot{P}_{81-83} \neq \dot{P}_{83-84}$
+3	+1	0	+1	talvez?	$\Delta(O - C)$ muito grande
...	+2	0	+1	não	\dot{P} muito grande

Tab. 2.2: Dez combinações possíveis de pontos no diagrama (O-C) (Winget *et al.* 1985).

$$\frac{dP}{dt}_{nls} = (-2.44 \pm 0.06) \times 10^{-11} \text{ s/s}, \quad (2.4)$$

onde o erro para o ajuste não-linear por mínimos quadrados (nls) possivelmente subestima o erro real (Winget & Kepler 1988). Esses resultados são completamente autoconsistentes e consistentes com (2.2). Ambos os métodos geram o mesmo período nominal, 516.025 s, e efemérides de tempo de zero, $T_0 = 244,5346.873583 \text{ HJDD} \pm 1.9 \text{ s}$.

Novos Modos de Pulsação Detectados na PG 1159-035

Barstow *et al.* (1986), usando o EXOSAT para observar a PG 1159-035, demonstraram que os períodos de maior amplitude estavam também presentes em raios-X moles, apesar de apresentarem uma amplitude com uma ordem de grandeza maior que a observada no ótico. Entretanto, eles descobriram a presença de um novo período de $\sim 524 \text{ s}$ que não

estava presente nos dados anteriores, apesar de haver alguma evidência de sua existência nos dados óticos de 1985.

Analisando curvas de luz da PG 1159-035 obtidas em 1987, constatou-se não somente a existência do novo período de ~ 525 s, mas também de pelo menos quatro modos de pulsação (ou conjunto de períodos) adicionais que não estavam presentes nos dados de 1979-1985 (mesmo em curvas de luz longas e quase-contínuas). Isso possibilita atribuir que o surgimento desses novos modos de pulsação se deve, provavelmente, a mudanças que ocorreram na própria estrela e não a um acidente de fases de batimento de diferentes frequências em novos modos. Além do mais, nenhuma mudança mensurável nas amplitudes dos modos previamente presentes foi observada, indicando que os novos modos não são o resultado de alguma transferência de potência entre os modos antigos (Winget & Kepler 1988).

Segunda Medida de \dot{P}

Acrescentando aos dados de 1979-1984 dados fotométricos de campanhas realizadas em 1987, Winget & Kepler (1988) calcularam dP/dt para o conjunto 1979-1987 e obtiveram:

$$\frac{dP}{dt}_{(O-C)} = (-2.32 \pm 0.08) \times 10^{-11} \text{ s/s}, \quad (2.5)$$

$$\frac{dP}{dt}_{nls} = (-2.35 \pm 0.02) \times 10^{-11} \text{ s/s} \quad (2.6)$$

e novamente, ambos os métodos pareciam ser autoconsistentes, e forneciam o mesmo período nominal de 516.025 s e efemérides de tempo de zero, $T_0 = 244, 5346.873583 \text{ HJDD} \pm 1.9 \text{ s}$. Apesar da presença de novas frequências de pulsação nas novas curvas de luz, os novos valores pareciam ser completamente consistentes com os valores obtidos anteriormente (Winget & Kepler 1988).

Note, entretanto, que o que o método *nls* utilizado faz na realidade, é procurar uma possível solução com o mesmo valor de \dot{P} que aquele obtido pelo método (O-C).

Terceira Medida de \dot{P}

Em 1989 foram obtidas 264.1 horas de observações fotométricas quase contínuas da PG 1159-035. Winget *et al.* (1991) usaram os dados de 1989 para derivar uma série de informações sobre a estrela e também para fazer uma terceira estimativa de dP/dt . O valor obtido para dP/dt com o método do diagrama (O-C), foi:

$$T_0 = (244\,5346.873562 \pm 0.000017) \text{ BJDD}, \quad (2.7)$$

$$P = (516.02531 \pm 0.00006) \text{ s}, \quad (2.8)$$

$$\frac{dP}{dt} = (-2.49 \pm 0.06) \times 10^{-11} \text{ s/s}, \quad (2.9)$$

consistente com os resultados anteriores. O diagrama (O-C) é mostrado na Fig. 2.5. Novamente, buscou-se somente a solução consistente com os valores anteriores e não todas as soluções possíveis.

Ano	E (ciclos)	(O-C) (s)	$\sigma(T_{max})$ (s)
1979	-187 009	-196	12
1981	-103 345	-76	12
1983	0	0.6	1
1984	74 300	-45	12
1987	248 290	-375	24
1989	374 992	-940	3

Tab. 2.3: Este são os melhores valores para (O-C) encontrados por Winget *et al.* (1991) para os dados da PG1159-035.

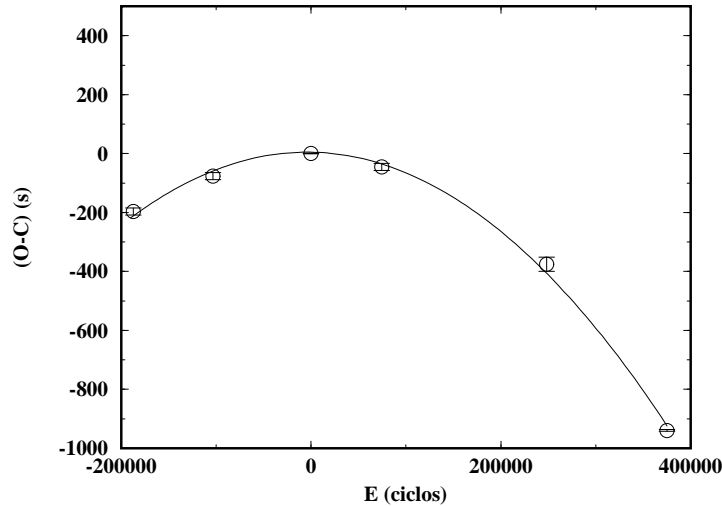


Fig. 2.5: Diagrama (O-C) para todos os dados disponíveis da PG 1159-035 até 1989, incluindo os dados de 1987. A linha sólida representa a efeméride de 1985 (Winget *et al.* 1991).

Período de Rotação

A curva de luz obtida em 1989 gerou um espectro com resolução suficientemente alta para que o período de rotação da PG 1159-035, P_{rot} , pudesse ser determinado a partir dos desdobramentos de frequências observados no espectro. Winget *et al.* (1991) chegaram ao seguinte resultado:

$$P_{rot} = 1.38 \pm 0.01 \text{ dias.} \quad (2.10)$$

Além disso, concluíram que o eixo de rotação da estrela e o eixo de simetria para as pulsações estão praticamente alinhados e, a partir das amplitudes dos componentes dos multipletes, estimaram que o ângulo de inclinação i do eixo de pulsação da estrela em relação à linha de visada deve ser da ordem de $\sim 60^\circ$, embora nenhuma estimativa possa ser feita em relação à incerteza desta medida.

Massa

Os dados de 1989 também permitiram derivar uma estimativa para a massa da PG 1159-035 (Winget *et al.* 1991). O valor obtido para a massa foi:

$$M = (0.586 \pm 0.003) M_{\odot}. \quad (2.11)$$

2.2 O Problema do dP/dt Negativo

Todas as medidas da taxa de variação temporal do período de 516 s, dP/dt , deram resultados negativos. Esses resultados estavam em excelente concordância com as primeiras estimativas teóricas feitas por Winget, Hansen & Van Horn (1983), conforme vimos anteriormente.

Winget, Hansen & Van Horn usaram modelos evolucionários com o melhor tratamento disponível na época para o interior, envelope, equação de estado e opacidades. Contudo, os modelos usados para começar a seqüência evolutiva eram politrópicos e não modelos que levavam em conta os estágios anteriores de queima nuclear. Eles atingiam a vizinhança da PG 1159-035 no diagrama H-R via contração gravitacional e aquecimento ao longo de uma curva com uma luminosidade grosseiramente constante, na posição das estrelas observadas do ramo horizontal estendido (EHB) (Winget *et al.* 1991).

Kawaler, Hansen & Winget (1985) e Kawaler (1986) repetiram os cálculos usando como modelos iniciais estrelas de azuis do ramo assintótico das gigantes. O envelope de massa foi eliminado artificialmente para simular a perda de massa observada e assim produzir modelos apropriados para um núcleo de nebulosa planetária (PNN). Eles encontraram que **dP/dt era sempre positivo** para uma PNN com $\log(L/L_{\odot}) \leq 3$. E esse resultado foi o mesmo para *qualquer* modelo construído deste modo; os resultados eram extremamente insensíveis quanto à massa total da estrela, massa da camada e composição, zona nuclear *de queima*, ou composição do núcleo. Portanto, **todos esses modelos discordavam das observações**.

Kawaler *et al.* (1985) tentaram solucionar este dilema: eles notaram que se a pulsação de 516 s fosse um modo de $\ell = 2$ ou 3, com $m = \ell$, então o sinal de dP/dt poderia ser determinado pelo *spin-up* associado com a contração evolutiva. Isso exige um período de rotação menor que 3000 s, de modo que seria possível uma inversão do sinal para seus modelos pós-PNN. Como o período de rotação derivado a partir dos dados de 1989 é $P_{rot} = 1.38$ dias e $\ell = 1$ (Winget *et al.* 1991), esta possibilidade precisou ser descartada.

Winget *et al.* (1991) chamaram a atenção de que uma *outra* alternativa lógica para o problema do dP/dt negativo era se o valor obtido para dP/dt não medisse a taxa de esfriamento real, uma boa concordância do valor obtido para dP/dt e o valor previsto pela teoria do esfriamento seria uma coincidência. Ou então, que a progenitora da PG 1159-035 é substancialmente diferente daquela usada nos modelos pós-planetários de Kawaler pois talvez ela evoluísse ao longo da EHB de forma similar ao modelo de Winget, Hansen & Van Horn (1983).

Pouco mais tarde, Kawaler & Bradley (1994) conseguiram desenvolver modelos evolucionários em que o \dot{P} negativo aparece devido a um efeito de *ressonância* entre o modo de pulsação e a camada (*mode trapping*), e provaram que, se este é o motivo real para o \dot{P} negativo, então os modos de pulsação “*não-ressonantes*”, como o de 495 s ou o de 451 s, não deveriam apresentar \dot{P} s negativos. Por outro lado, o “*modo ressonante*” de 539 s deveria apresentar um \dot{P} negativo.

Um ano mais tarde, Costa, Kepler & Winget (1995) utilizaram o algoritmo de O’Donoghue (veja Cap.5) para fazer uma primeira estimativa para a taxa de variação do período “*ressonante*” de 539 s. Os dados utilizados, agora incluíam as 345 horas de dados fotométricos obtidos nas campanhas da WET em 1993. O *melhor* resultado gerado pelo método foi:

$$\frac{dP}{dt}_{539s} = (-0.82 \pm 0.04) \times 10^{-11} s/s, \quad (2.12)$$

com $T_0 = (244\,7593.335825 \pm 0.000014) BJD$ (1989) e $P = (539.363577 \pm 0.000011) s$ e as outras duas melhores soluções também eram negativas, ambas com $\dot{P} \sim -8 \times 10^{-11} s/s$. Esse resultado confirmava parcialmente a hipótese da ressonância entre modo de pulsação e a camada, mas era preciso ainda provar que outros modos “*não-ressonantes*” tinham \dot{P} s positivos.

2.3 Os Objetivos Deste Trabalho

O objetivo do atual trabalho era o de medir \dot{P} para outros dois períodos de modos “*não-ressonantes*” e assim confirmar a hipótese da ressonância. Além disso, também queríamos refinar o resultado anteriormente obtido para o \dot{P} do período de 516 s. Nossa idéia inicial era utilizar o *método do diagrama (O-C)* (descrito no Cap.5) para calcular os valores dos \dot{P} s, mas havia problemas:

- (1) o método fornece múltiplas soluções matemáticas e supomos que a melhor delas seja a que mais se aproxima da solução física real. Mas pode ocorrer que as primeiras N soluções ofereçam ajustes comparáveis de forma que não podemos isolar com segurança uma delas como “a melhor”.
- (2) O método (O-C) utiliza as fases do sinal em estudo as quais devem ser suficientemente precisas. O único modo de se ter uma idéia da precisão de uma estimativa (quando não se conhece o valor real, claro) é através de seu desvio-padrão. Contudo, vários autores têm chamado a atenção que os métodos de ajuste com os quais se estimam as fases parecem calcular valores para os desvio padrão da fase, que *subestimam* os valores reais. E então, como saber se o valor é suficientemente preciso? Além do mais, os ajustes são ponderados e valores incorretos para os desvios-padrões podem alterar o valor dos pesos¹ relativos dos dados e por conseguinte alterar o resultado.
- (3) O método (O-C) utiliza uma expansão até segunda ordem em relação a E (número de ciclos) assumindo que termos de ordem superior podem ser desprezados por ser o valor da

¹ O *peso* ω de uma medida é proporcional à probabilidade de sua ocorrência, ou seja, $\omega \propto \frac{1}{\sigma^2}$.

derivada segunda do período, $\ddot{P} = d\dot{P}/dt = d^2P/dt^2$, muito pequeno. Ocorre que para conjuntos de dados que cobrem longos períodos de tempo, como é o caso dos dados com os quais estamos trabalhando (que se espalham por 14 anos), o número de ciclos atinge valores muito grandes ($10^5 - 10^6$ para a PG 1159-035) e o termo de ordem 3 poderá não ser desprezível.

Além disso, as dificuldades na determinação de \dot{P} aparecem em vários trabalhos publicados sobre o assunto, onde resultados obtidos para \dot{P} com uma técnica nem sempre coincidem com os resultados obtidos com outra técnica. Um exemplo disso, é o caso da estrela variável *AM Canum Venaticorum* (AM CVn), uma binária duplamente degenerada interagente. Essa estrela apresenta em seu espectro de potências uma série de períodos de pulsação entre 100 e 1100 s. Varias estimativas foram feitas para a taxa de variação temporal do período dominante ($\sim 951 \mu\text{Hz}$): Patterson, Nather & Robinson (1979) encontraram que o período estaria crescendo rapidamente ($\dot{P} = +3.8 \times 10^{-10} \text{ s/s}$); depois, Solheim *et al.* (1984) calcularam que o período estaria diminuindo lentamente ($\dot{P} = (-3.2 \pm 0.6) \times 10^{-12} \text{ s/s}$); anos depois, Patterson *et al.* (1992) sugerem que o período dominante seria instável e, portanto, não se poderia medir seu \dot{P} ; finalmente, Provençal *et al.* (1995), usando novos dados fotométricos da estrela, calcula que $\dot{P} = (+1.71 \pm 0.04) \times 10^{-11} \text{ s/s}$ (veja também Provençal 1995). Problemas similares ocorreram para a estrela *DQ Her* (Balachandram *et al.* 1983 e Zhang *et al.* 1995).

Por isso, a questão da técnica a ser utilizada mereceu aqui uma atenção especial. Utilizamos um *método direto* (descrito no Cap.5) que nos fornece uma solução única e, portanto, menos sujeito a erros de interpretação. **O resultado obtido com este método para \dot{P}_{516s} foi positivo!** Foi também positivo para um dos períodos “*não-ressonantes*”. Entretanto, a estimativa para \dot{P}_{539s} não foi suficientemente precisa para definir com segurança seu sinal.

Capítulo 3

FOTOMETRIA DA PG 1159-035

O presente capítulo trata da parte observacional: com que dados trabalhamos e como foram obtidos. Os dados utilizados neste trabalho são o resultado de um total de mais de 780 horas de observações fotométricas da estrela PG 1159-035 feitas ao longo de 14 anos desde sua descoberta em 1979. Iniciaremos este capítulo discutindo um pouco sobre fotometria e as técnicas fotométricas utilizadas na aquisição de nossos dados.

3.1 Fotometria

No capítulo de introdução foi visto que as estrelas variáveis recebem este nome justamente por apresentarem variabilidade intrínseca em seu brilho¹. A técnica observacional utilizada para a medida do brilho de um objeto astronômico é a *fotometria*, que consiste basicamente na contagem do número de fótons que atingem uma certa superfície durante um certo intervalo de tempo chamado *tempo de integração*.

3.1.1 O Fotômetro

O equipamento utilizado para se fazer fotometria é o *fotômetro fotoelétrico* ou *fotômetro CCD*. Um fotômetro fotoelétrico tradicional está esquematizado na Fig. 3.1. Num primeiro estágio a luz passa por um *diafragma de campo*. Normalmente, o campo contém muitas estrelas, enquanto estamos interessados em apenas uma. O diafragma de campo seleciona aquela pequena área do campo que nos interessa (Fig. 3.2). O próximo elemento é uma *lente de Fabri* que torna mais paralelos entre si os raios de luz do feixe. Se estivermos interessados em fazer fotometria de apenas uma certa *banda* de comprimentos de onda e não de todo o espectro ótico que chega ao detector, utilizamos um *filtro*. Finalmente a luz chega à janela de uma *fotomultiplicadora*. A fotomultiplicadora ou *PMT* (do inglês, *PhotoMultiplier Tube*) é uma válvula eletrônica que transforma sinais luminosos em sinais elétricos os quais são em seguida amplificados pelo próprio PMT. Seu princípio é o efeito fotoelétrico. O *fotocátodo* é um sólido metálico onde os elétrons livres apresentam uma distribuição Maxwelliana de

¹ Em fotometria, também costuma-se empregar a expressão *intensidade específica*, para se definir a quantidade de energia radiante recebida por unidade de ângulo sólido por unidade de tempo e por unidade de área de um elemento ortogonal à direção de propagação da radiação. Neste trabalho usaremos a expressão *brilho* como sinônimo de intensidade específica.

velocidades. Quando o metal é exposto à radiação, os fótons incidentes transferem energia para os elétrons. Se a energia transferida pelo fóton for suficientemente alta (maior que a função trabalho do metal), haverá a emissão de um elétron por parte do metal. O elétron emitido é atraído pela diferença de potencial do primeiro *dinodo* da PMT. Ao se chocar com um dinodo, ele provoca a liberação de uma certa quantidade de elétrons que serão atraídos pelo dinodo seguinte, e cada um deles produzirá o mesmo efeito e assim por diante. Na saída teremos um ganho da ordem de 10^6 , isto é, para cada elétron que é liberado no fotocátodo, um milhão saem, na forma de um pulso de corrente que é amplificado na *etapa amplificadora/discriminadora*. Os pulsos acima do limite de discriminação são então contados por um *contador digital*. Pela contagem de pulsos, sabemos quantos elétrons foram liberados no fotocátodo e, conhecendo a relação [*Nº de fótons incidentes / elétron liberado pelo fotocátodo*] podemos calcular quantos fótons atingem a superfície do fotocátodo por unidade de tempo.

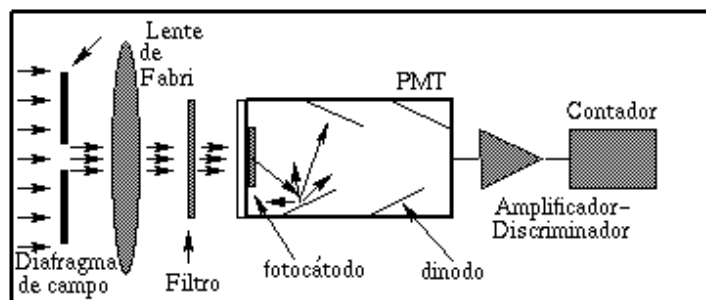


Fig. 3.1: Esquematização de um fotômetro fotoelétrico.

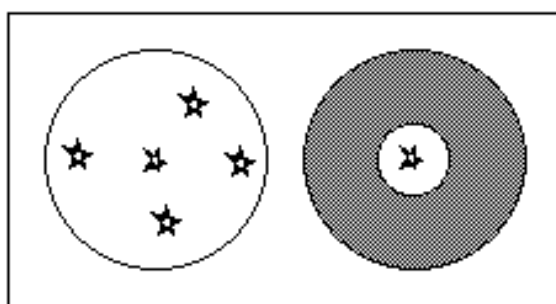


Fig. 3.2: A abertura do *diafragma de campo* seleciona aquela pequena área que nos interessa do campo. Pode ser a estrela-alvo, a estrela-de-referência ou céu.

3.1.2 Fotômetro de Um Canal

No começo da era da fotometria moderna, usavam-se fotômetros de um canal para medir o brilho de uma única estrela. Mas, quando centramos uma estrela na abertura de um

telescópio para medir o seu brilho, o que estamos medindo na verdade é o brilho da estrela somado ao brilho do céu dentro do diafragma, uma vez que o céu nunca é totalmente escuro. Assim, se quisermos ter uma medida mais realista do brilho de uma estrela precisamos subtrair de nossa medida o brilho do céu. A prática comum consiste em deslocar por alguns instantes (alguns segundos) o telescópio para uma região próxima à estrela-alvo e medir o brilho do céu. Então re-centralizamos a estrela-alvo na abertura do telescópio e continuamos a medir o brilho de (estrela + céu). Normalmente, uma segunda medida do brilho do céu é feita mais adiante e a média (ou interpolação) das duas medidas é subtraída da medida de (estrela + céu). Se a jornada de observação for muito longa (e normalmente é da ordem de várias horas), várias medidas do brilho do céu podem ser necessárias. Essa técnica é chamada *fotometria de uma estrela*.

O problema é que, procedendo desta forma, não estamos levando em consideração as variações que ocorrem com a *transparência* da atmosfera. A presença de nuvens, por exemplo, pode alterar as medidas do brilho de uma estrela e o olho humano só consegue perceber a presença de nuvens quando as variações já são da ordem de 20% (Kepler & Nelan 1993). A precisão das medidas de brilho será muito afetada se não subtrairmos o brilho do céu. E ter medidas precisas é particularmente importante no entendimento de como os modos de pulsação das estrelas variáveis estão mudando seus períodos e amplitudes ao longo do tempo. Precisamos saber se as mudanças observadas são reais, ou simplesmente decorrem de ruídos instrumentais.

Uma maneira de minimizar esse problema é alternando medidas do brilho da estrela-alvo com medidas do brilho de uma *estrela-de-referência* próxima e que sabemos ser uma estrela não-variável. Dessa forma, se observarmos variações no brilho da estrela-de-referência saberemos que são decorrentes de fatores atmosféricos. As variações observadas na estrela-de-referência são subtraídas do brilho da estrela-alvo. Essa técnica fotométrica recebe o nome de *fotometria diferencial* (Birney 1991).

Seria, por exemplo, mais ou menos assim para o caso de uma estrela com um período de pulsação de alguns minutos: faríamos uma integração de 10 segundos para a estrela-alvo, gastaríamos 10s para deslocar o telescópio da estrela-alvo para a estrela-de-referência; 10 segundos medindo o brilho da estrela-de-referência e mais 10 segundos para retornarmos à estrela-alvo e recomeçarmos o ciclo novamente. Ao todo 40 segundos. Nesse exemplo, passaríamos apenas 1/4 do tempo fazendo medidas do brilho da estrela-alvo, ou seja, perderíamos 3/4 dos pontos de sua curva de luz! Se a estrela-alvo for suficientemente brilhante e possuir um período de pulsação bem maior (umas dez vezes maior) que o tempo gasto em cada ciclo do processo de alternância então, não haverá problemas. Os problemas aparecem quando a estrela-alvo é fraca e então essa redução no número de pontos piorará muito a relação sinal/ruído (Kanaan 1990).

3.1.3 Fotômetro de Dois Canais

Para minimizar este problema Nather (1973) introduziu o uso do *fotômetro de duas estrelas* que consiste no uso de um fotômetro de dois canais onde um dos canais faz a fotometria da estrela-alvo enquanto o outro faz a fotometria da estrela-de-referência, simultaneamente.

Assim, não se perde tempo com o processo de alternância. Mas ainda é necessário se fazerem algumas medidas do brilho do céu ao longo da noite e para isso precisamos deslocar o telescópio tal como no fotômetro de uma estrela. Normalmente, o brilho do céu varia muito suavemente, de forma que poucas medidas são necessárias, mas em casos especiais, como quando temos a contaminação da atmosfera por poeira de vulcões, desertos ou poluição atmosférica, o brilho do céu pode variar muito.

3.1.4 Fotômetro de Três Canais

Na prática, entretanto, tem-se observado com frequência que o céu noturno varia em escalas de tempo similares à das variações de anãs brancas pulsantes, ou seja, da ordem de alguns minutos². Desde que as estrelas anãs brancas são intrinsecamente fracas, a precisão das medidas das amplitudes dos modos de pulsação pode ser afetada se não subtrairmos continuamente o brilho do céu (Kleinman *et al.* 1995). Esse tipo de problema levou à idealização do *fotômetro de três canais* que não somente monitora a estrela-alvo e a estrela-de-referência mas também o brilho do céu através de um terceiro canal. Assim, temos um canal que mede o brilho da estrela-alvo, um segundo canal que mede o brilho da estrela-de-referência e um terceiro que mede o brilho do céu, todos simultaneamente (Nather *et al.* 1990, Kleinman *et al.* 1995). No Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA) ainda não dispomos de um fotômetro de três canais, mas dispomos de um fotômetro de dois canais, o *Fotex*.

3.1.5 Filtros

Devido à baixa luminosidade das estrelas anãs brancas ($M_v \simeq 12$) e também devido ao fato de suas variações em diferentes cores estarem em fase (Robinson, Kepler & Nather 1982, Kepler 1984a), em geral, não são utilizados filtros. Para fotocátodos azuis (bi-alcalinos ou semelhantes), a banda passante é semelhante à do filtro B do sistema *Johnson*, visto que as estrelas também são azuis. Entretanto, podemos utilizar a fotometria multicor para uma análise de variações do contínuo e de algumas linhas espectrais, como foi feito com as estrelas *ZZ Ceti G29-38* (Kanaan 1990) e *R548* (Robinson, Kepler & Nather 1982).

3.1.6 Tempo de Integração

Os tempos adequados para integração dependem dos períodos de pulsação da estrela, pois precisamos ter vários pontos ao longo de um ciclo completo de pulsação. Como os períodos de pulsação das anãs brancas variáveis estão em geral entre 100 e 1000 segundos, um tempo de integração da ordem de 10 segundos é suficiente para nossos propósitos.

² Os períodos típicos variam de 100 a 1000 segundos (1.7 a 16.7 minutos). O período dominante na PG 1159-035, por exemplo, é de cerca de 9 minutos.

3.1.7 Tempo de Observação

Como dissemos antes e como veremos com maiores detalhes nos capítulos seguintes, a partir da curva de luz de uma estrela podemos obter seu espectro de frequências de pulsação. Contudo, é o *tempo de observação*, isto é, o tempo durante o qual a estrela foi observada que determina a resolução do espectro de frequências. Assim, quanto mais alta for a resolução que desejarmos, maior será o tempo de observação necessário.

Por exemplo, quando uma estrela está em rotação, as pulsações de mesmos índices k e ℓ , e diferentes índices m , têm frequências diferentes: $f_1 - f_2 \propto f_r$, onde f_r é a frequência angular de rotação da estrela. Como, em geral, elas têm longos períodos de rotação, da ordem de vários dias para as anãs brancas pulsantes (Kepler *et al.* 1983, Kepler 1984b), f_1 e f_2 terão valores muito próximos. Logo, precisaremos de um espectro com resolução suficientemente alta para resolver f_1 e f_2 e isso só é possível com um tempo de observação suficientemente longo, de vários dias.

Associado ao tempo de observação está o problema das interrupções (“*gaps*”) durante as quais não é possível observar a estrela. Se as observações são feitas de um único observatório, por exemplo, inevitavelmente elas terão de ser interrompidas durante o dia. São as *interrupções diurnas* e estas são regulares. Temos também interrupções devido à causas não regulares como a passagem de nuvens, por exemplo. Quando fazemos a transformada de Fourier das curvas de luz da estrela essas interrupções introduzem falsas frequências no espectro de frequências tornando extremamente complexa a sua análise e, às vezes, impossível.

3.2 WET - The Whole Earth Telescope

É possível reduzir a ocorrência de *interrupções*? Sim! Em 1986, R. E. Nather, astrônomo da Universidade do Texas, criou uma rede internacional interativa formada por vários observatórios localizados em diversos pontos do planeta. A idéia é observar um mesmo objeto durante o máximo tempo possível. A medida que a Terra gira e o objeto-alvo vai saindo do campo de visão de um telescópio ele vai entrando no campo de visão de outro localizado em uma longitude mais à oeste. Dessa forma, podemos eliminar as *interrupções diurnas*. Essa rede foi denominada “*Whole Earth Telescope*” (*WET*), que traduzido literalmente significa “Telescópio da Terra Inteira” (veja figura Fig. 3.3).

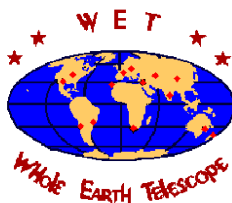
Na Tabela 3.1 temos a lista dos observatórios participantes do Whole Earth Telescope, sua localização, longitude, latitude e diâmetro do telescópio. Na Fig. 3.4 mostramos um mapa com a localização de cada observatório. A composição específica do WET varia de campanha para campanha dependendo da declinação da estrela-alvo; no caso da PG 1159-035, sua baixa declinação permite que observatórios em ambos os hemisférios participem das observações (Winget *et al.* 1991).

O *WET* funciona como se fosse um único instrumento controlado por vários operadores. As operações são coordenadas de um centro de controle através do correio eletrônico e por via telefônica. Os dados retornam por e-mail dos diversos sítios astronômicos e são reduzidos, combinados, e sujeitos a uma análise preliminar em tempo real, para maximizar o uso

efetivo do instrumento inteiro. Após a campanha, os cientistas principais reduzem todos os dados e redigem um manuscrito preliminar, o qual circula entre os colaboradores envolvidos nesse particular projeto. Quando todos eles aprovam, o resultado final é submetido para publicação³.

Inicialmente, fotômetros de dois canais foram adotados pelo WET para suas observações de anãs brancas variáveis. Como a uniformidade da instrumentação é uma exigência vital para o sucesso do WET, cada participante usa equipamentos, *software* e procedimentos observacionais similares, tanto quanto possível. Atualmente, vem sendo instalado um instrumento chamado “*dual-beam miniphot*”. Este instrumento permite adaptar facilmente um terceiro canal ao fotômetro de dois canais já existente no sítio de observação, transformando-o em um fotômetro de três canais. Este é o protótipo do fotômetro padrão do WET (veja Kleinman *et al.* 1995 para uma excelente discussão sobre o assunto).

Além de se obterem medidas mais precisas com o fotômetro de três canais, há outras vantagens em seu uso. Por exemplo, ganha-se uma hora e meia a mais de tempo de observação em cada noite pois podemos começar a observar um pouco antes e continuar um pouco depois do crepúsculo. O terceiro canal teoricamente também permitirá remover as *interrupções mensais* devido ao brilho da Lua. Outro ponto importante: um aumento na habilidade de medir e subtrair o brilho do céu, permite observar estrelas mais fracas (onde o céu tipicamente domina o sinal) com telescópios menores. Esta capacidade é crucial para estender “os olhos” do WET pois é muito difícil conseguir duas semanas simultâneas de observação nos grandes telescópios ao redor do mundo (Kleinman *et al.* 1995).



“All the Photons, all the time”

Fig. 3.3: Logotipo do Whole Earth Telescope. O lema “*todos os fótons, todo o tempo*” sintetiza bem seu objetivo.

3.3 Tratamento dos Dados

Após uma jornada de observações fotométricas, o que temos são arquivos contendo as contagens feitas pelo fotômetro para cada canal ao longo do tempo de observação. Mas antes dos dados serem analisados, eles devem passar por um tratamento especial: precisam ser reduzidos e as medidas convertidas para unidades adequadas. Chamamos de *redução* o processo de se retirar dos dados todos os efeitos decorrentes de causas identificáveis e não relacionadas com a própria estrela, como por exemplo as variações do brilho do céu e em sua

³ Veja a *homepage* do WET: <http://www.if.ufrgs.br/ast/wetpage.html>.



Fig. 3.4: Observatórios participantes do WET. A composição específica do WET, isto é, que observatórios estarão operando ou não, depende da declinação do objeto em estudo.

Tab. 3.1: Sítios participantes do WET.

N ^o	Observatório	Localização	Long. W.	Latitude	Telesc.
1	Mauna Kea Observatories	Hilo/Mauna Kea, Havai, EUA	-10 ^h 22 ^m	+19°49.6''	0.6m
2	CFHT ⁴	Mauna Kea, Havai, EUA	-10 ^h 22 ^m	+19°49.6''	3.6m
3	KPNO ⁵	Tucson/Kitt Peak, Arizona, EUA	-7 ^h 26 ^m	+31°57.8''	2.1 – 0.9m
4	The SARA Telesc./KPNO	"	"	"	"
5	Mc Donald	Fort Davis/Mt.Locke, Texas, EUA	-6 ^h 56 ^m	+30°40.3''	0.9 – 2.1m
6	CTIO ⁶	La Serena, Chile	-4 ^h 43 ^m	-29°15.4''	1.5m
7	ESO ⁷	La Silla, Chile	-4 ^h 43 ^m	-30°09.9''	1.5
8	Pico dos Dias (LNA ⁸)	Brasópolis, MG, Brasil	-3 ^h 02 ^m	-22°32.1''	1.6m
9	Isaac Newton Telesc.	La Palma Island/I.Canárias	-1 ^h 11 ^m	+28°45.6''	3.5m
10	Nordic Optical Telesc.	"	"	"	3.5m
11	Calar Alto Obs.	Gérgal/Calar Alto, Espanha	-0 ^h 10 ^m	+37°13.8''	1.2 – 2.2 – 3.5m
12	Obs. de Haute-Provence	Forcalquier/St.Michel, França	+0 ^h 23 ^m	+43°55.9''	1.9m
13	Mt. Suhora Observatory	Mt. Suhora/Cracow, Polónia	+1 ^h 19 ^m	+50°03.9''	0.5m
14	SAAO ⁹	Sutherland, Africa do Sul	+1 ^h 23 ^m	-32°22.7''	0.8m
15	Wise, Florence and George	Mitzpe Ramon/Mt.Zin, Israel	+2 ^h 19 ^m	+30°35.8''	1.0m
16	Maitanak Observatory	Uzbekistão	+4 ^h 28 ^m	+38°41.3''	1.0m
17	Vainu Bappu Obs.	Kavalur, Índia	+5 ^h 15 ^m	+12°34.6''	1.0m
18	Perth Obs.	Bickley, Austrália	+7 ^h 45 ^m	-32°00.5''	0.6m
19	Anglo-Australian Obs	Coonabarabran/Siding Spring, Austrália	+9 ^h 56 ^m	-31°16.4''	1.0m
20	Beijing Normal Univ. Obs.	Beijing/China	+7 ^h 45 ^m	+39°57.4''	2.2m
21	MJUU ¹⁰	Lake Tekapo/Nova Zelândia	+11 ^h 22 ^m	-43°59.2''	1.0m

4 Canada-France-Hawaii Telescope.

5 Kitt Peak National Observatory.

6 Cerro Tololo Inter-American Observatory.

7 European Southern Observatory.

8 Laboratório Nacional de Astrofísica.

9 South African Astrophysical Observatory.

10 Mount John University Observatory.

transparência; o tempo morto do sistema, etc. As causas não identificáveis fazem parte dos erros sistemáticos (Kanaan 1990). A redução dos dados obtidos com o *WET* é padronizada e é feita através do uso de um conjunto de programas específicos (*QED*).

Nessa seção descrevemos cada passo do procedimento que foi utilizado no tratamento dos dados fotométricos obtidos para a estrela PG 1159-035. Vamos denominar *canal A* o canal utilizado para a fotometria da estrela-alvo e de *canal B* o canal utilizado para a fotometria da estrela-de-referência. Se os dados foram obtidos através de um fotômetro de três canais, chamaremos de *canal C* ao terceiro canal.

Primeiro Passo: inspecionar os dados fotométricos.

Iniciamos inspecionando a curva de luz obtida através do canal A. Durante a inspeção devemos (1) identificar os *pontos de medida do céu* (para o caso de fotometria de duas estrelas); (2) identificar os *pontos espúrios* e (3) identificar os pontos da curva de luz que foram afetados pela presença de *nuvens*, quando isso for possível. Em suma, a idéia é identificar pontos *que não pertencem* à curva de luz.

A identificação de *pontos de medida de céu* (em fotometria de duas estrelas) é fácil pois esses pontos apresentam uma contagem *bem abaixo* das contagens típicas encontradas ao longo da curva de luz. Como as medidas de céu são feitas durante intervalos da ordem de 1 minuto, os pontos de medida de céu normalmente aparecem em pequenos grupos com valores próximos uns dos outros. Estes pontos, e os espúrios, normalmente constam de um registro (*log*) das observações.

Consideramos “*espúrios*” os pontos que, não sendo pontos de medida de céu, apresentam contagens muito diferentes das dos pontos vizinhos. Esses pontos devem ser eliminados. Uma regra prática que deve ser adotada é a seguinte: “se você tem dúvida se deve ou não eliminar um ponto, elimine!” Num conjunto de centenas ou milhares de pontos, alguns pontos a menos não farão uma diferença significativa.

Quando há a presença de *nuvens*, os pontos tendem a se dispersar em relação ao valor médio da curva, e isso ocorre em *ambos os canais*. Assim, para sabermos se distúrbios na distribuição de pontos de uma das curvas é devido à presença de *nuvens*, devemos compará-la com a outra curva. Se as duas apresentam o mesmo distúrbio, então há a presença de *nuvens*. Caso contrário, devemos considerá-los como pontos espúrios, eliminando-os.

Após inspecionarmos toda a curva do canal A, devemos *fazer a mesma coisa* com o canal B. No caso de fotometria de três canais, executaremos as etapas (2) e (3) acima.

Segundo Passo: fazer a correção devido ao *tempo morto* do sistema.

Quando um elétron é liberado do fotocátodo, o que temos na saída são pulsos que são contados por um contador digital. Existe um tempo mínimo entre os pulsos abaixo do qual o contador não consegue distinguir entre dois pulsos consecutivos. Esse tempo mínimo em que ele não consegue distinguir entre dois pulsos é chamado *tempo morto* do sistema. Durante esse intervalo de tempo, os fótons que atingirem o fotocátodo não serão contados! Isso faz com que o número de fótons contados, N_{obs} , seja na realidade, um pouco menor que

o número de fótons que realmente atingiram o fotocátodo, N_{real} . A fórmula para correção (Kanaan 1990) é:

$$N_{real} = N_{obs} e^{-(1-T/\tau)} \quad (3.1)$$

onde T é o tempo de integração, e τ é o tempo morto. O tempo morto é da ordem de nanosegundos e depende da fotomultiplicadora utilizada. O programa *QED* usa $\tau = 60ns$ como “*default*”¹¹.

Terceiro Passo: subtrair o brilho do céu.

Como dissemos no início desse capítulo, precisamos subtrair o brilho do céu de nossas medidas. Ao longo da jornada de observações fizemos algumas medidas do brilho do céu próximo ao campo da estrela em observação. Se as variações forem suaves, podemos fitar uma reta entre dois pontos sucessivos. Se as variações não forem tão suaves, talvez seja melhor um ajuste por “*spline*”. De qualquer forma, podemos agora calcular o valor do brilho do céu para qualquer ponto por interpolação e em seguida subtrair esse valor das medidas obtidas em ambos os canais. Se foi usado um fotômetro de três canais, não é necessário fazer o ajuste e a interpolação, pois já temos as medidas do brilho do céu ao longo de toda a jornada. Se I_A é a intensidade medida no canal A e I_{sky} é a intensidade medida para o céu, então o valor que usaremos para a intensidade da estrela, I_* é dado por:

$$I_* = I_A - I_{sky}. \quad (3.2)$$

Quarto Passo: fazer correção para a extinção atmosférica.

Mesmo no mais claro dos dias a atmosfera terrestre não é completamente transparente. Partículas de poeira, gotículas d’água e moléculas espalham e absorvem a luz à medida que ela passa através do ar e, quanto maior for o caminho, maior será o efeito. Um bom exemplo disso é o que acontece com o Sol: pouco antes do pôr-do-Sol, quando ele está próximo do horizonte, seu brilho é menor e o dia parece bem mais escurecido do que quando ele está mais próximo do zênite, por volta do meio-dia. Outra coisa: o Sol parece mais vermelho ao pôr-do-Sol, e esta é uma importante indicação de que a absorção e o espalhamento em nossa atmosfera dependem do comprimento de onda. Os comprimentos de ondas menores são mais afetados que os maiores, por isso a luz azul parece ter sido removida do feixe de luz solar, quando este está próximo do horizonte, deixando a luz mais avermelhada. Por outro lado, é o maior espalhamento da luz azul que torna o céu dessa cor. Do mesmo modo como a nossa atmosfera afeta a luz do Sol, ela afeta a luz das estrelas. Assim, a luz das estrelas também sofre um escurecimento e um avermelhamento quando atinge a superfície da terra. Esse efeito denominamos de “*extinção atmosférica*” (veja Fig. 3.5).

A magnitude de uma estrela pode ser corrigida para extinção por (Birney 1991):

$$I_{obs} = I_0 e^{-k \sec z}, \quad (3.3)$$

onde I_0 é a intensidade com que a estrela seria vista fora da atmosfera, k é o *coeficiente de extinção* e z é a distância ao zênite. Como dissemos, a extinção depende do *comprimento*

¹¹ Valor para um tubo “*HAMAMATSU*”, bi-alcalino, usado na maioria dos observatórios, mas que pode ser alterado durante a redução dos dados.

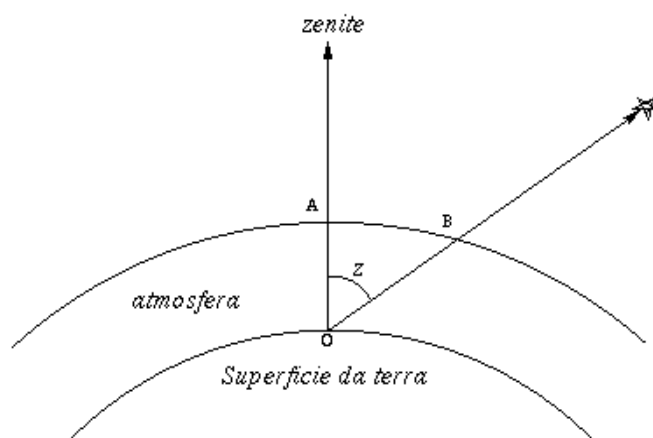


Fig. 3.5: O comprimento do caminho percorrido pela luz através da atmosfera varia com a distância zenital, z .

de onda λ , $k = k(\lambda)$, e é maior para a luz azul do que para a luz vermelha. Mas como todas as estrelas anãs brancas pulsantes são azuis ($T_{eff} > 10\,000K$), a banda passante efetiva que se observa é muito semelhante à do filtro *B de Johnson*, de forma que podemos usar para k , um coeficiente médio de extinção já determinado para o sítio de observação. Essa correção para a extinção deve ser aplicada a ambos os canais (A e B). O programa *QED* também permite que sejam usados outros valores para k , mas não faz um ajuste deste valor.

Quinto Passo: fitar um polinômio.

Nesse passo ainda estamos fazendo a correção para a extinção atmosférica. A escala de tempo do fenômeno de extinção atmosférica é da ordem de muitos minutos ou até horas. Já as variações no brilho da estrela ocorrem numa escala de tempo muito mais curta, da ordem de minutos. O que fazemos então é fitar uma curva (polinômio de baixa ordem) que acompanhe a variação de maior escala. Em geral, obtemos um bom ajuste usando um polinômio de grau dois, ou seja, uma parábola. A prática demonstra que raramente polinômios de ordem maior que dois (três ou quatro) geram melhores ajustes que justifiquem o seu uso. Para ângulos horários muito grandes, entretanto, pode ser conveniente usarmos um polinômio de grau três.

Sexto Passo: fazer o “*bridging*”.

No primeiro passo eliminamos pontos das curvas de luz dos canais A e B. Entretanto, se formos utilizar algum algoritmo que exija que os pontos estejam igualmente espaçados, como é o caso da transformada rápida de Fourier, FFT (veja no próximo capítulo), esses pontos ausentes poderão causar problemas. Para evitar isso, calculamos os valores dos pontos fazendo uma simples interpolação linear entre os pontos adjacentes. Um ajuste mais sofisticado (usando um polinômio de ordem maior que um) poderia ser utilizado mas isso não demonstra fazer alguma diferença notável nas transformadas de Fourier.

Sétimo Passo: fazer correção devido às variações da transparência do céu.

Para determinar as variações da transparência do céu, medimos o brilho de uma estrela-referência através do canal B. Sabemos que essa estrela não é variável, tendo um brilho

constante ($I_{ref} = constante$). Assim, após termos feito as devidas correções para e extinção atmosférica, qualquer variação detectada em seu brilho pode ser atribuída a variações na transparência da atmosfera:

$$\Delta I_{ref} = I_B / I_{ref}. \quad (3.4)$$

Para subtrairmos as variações na transparência da atmosfera das medidas do brilho da estrela-alvo, devemos fazer:

$$I_{alvo} = \frac{I_A}{\Delta I_{ref}} = C \left(\frac{Contagem_B}{Contagem_A} \right) \quad (3.5)$$

onde C é uma constante de proporcionalidade *não conhecida*. Neste sétimo passo, o que fazemos é dividir ponto-a-ponto:

$$y_i = (Contagem_B / Contagem_A). \quad (3.6)$$

Teremos então um arquivo com $\{t_i, y_i\}$.

Este passo, na verdade, só é usado raramente: se a variação da transparência não for da mesma escala temporal das variações da estrela variável, for pequena, e se a relação sinal-ruído do canal B for alto.

Oitavo Passo: calcular a intensidade fracional.

Para isso, calculamos a contagem média, $\bar{y} = \langle y_i \rangle$. A *intensidade fracional* é definida como:

$$\Delta I_i \equiv \frac{y_i - \bar{y}}{\bar{y}}. \quad (3.7)$$

Na próxima seção a questão das unidades de ΔI_i será discutida.

Nono Passo: converter o tempo para unidades de BJDD.

Para finalizar, é preciso converter as datas para BJDD's (Baricentric Julian Dynamical Date). No arquivo de dados, o tempo está expresso em segundos, contados a partir do instante em que se inicia a fotometria, T_0 . A conversão é simples:

$$t_i^{BJDD} = T_0^{BJDD} + \frac{t_i}{86400}. \quad (3.8)$$

3.4 Base de Tempo

Adotamos como base de tempo para cada observação o UTC (Universal Time Coordinate) que foi convertido para ET (Ephemeris Time), adicionando-se o “offset” de 32.184 segundos mais os “leap seconds”, que vêm sendo usados desde 1972.

Entretanto, a Terra está em movimento e o instante em que um determinado sinal vindo de uma estrela chegará à Terra (data de observação) depende de sua posição orbital (veja a Fig. 3.6). Isso tornaria os cálculos muito complicados. Um modo de simplificar o problema

é calcular o instante de tempo em que esse mesmo sinal chega ao centro (geométrico) do Sol, isso nos dá o “heliocentric ephemeris time” que, convertido para dias julianos, nos dá a data expressa em “Heliocentric Julian Ephemeris Date” (HJED). Para muitos estudos envolvendo estrelas variáveis esta base de tempo é bastante adequada. Porém, ocorre que o centro geométrico do Sol não coincide com o centro de massa do Sistema Solar. Devido principalmente à ação do planeta Júpiter, o centro geométrico do Sol pode se afastar até cerca de $1.5R_{\odot}$ do centro de massa do sistema. Isso significa que teremos um erro de até 3 segundos. Para evitar esses erros, convertemos as datas em HJED para BJDD, *Baricentric Julian Dynamical Date*. Essa conversão é feita utilizando-se algoritmos desenvolvidos por Stumpff (1980, 1978 e 1976).

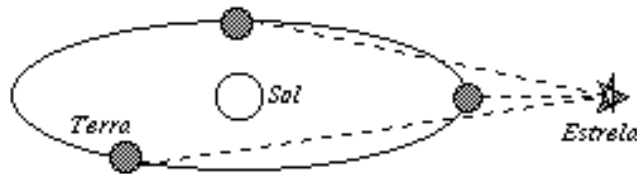


Fig. 3.6: O instante exato (data de observação) em que um determinado sinal vindo de uma estrela chega à Terra depende da posição orbital da Terra em relação à estrela.

3.5 Unidades da Intensidade Fracional

Afinal, em que unidades estão expressas as *intensidades fracionais* ΔI ? Costumava-se empregar a unidade “*mmag*” (milimagnitude) para descrever as amplitudes das variações medidas nas curvas de luz. O termo “magnitude” implica numa escala logarítmica, enquanto que as intensidades fracionais relativas são na verdade medidas lineares. Neste trabalho, nós usaremos as unidades introduzidas por Winget *et al.* (1994): “*modulação em intensidade*” (*mi*) que é uma representação linear da intensidade fracional de modulação. As modulações em intensidade observadas na curva de luz são mais convenientemente representadas em unidades de *mmi* ($1 \times 10^{-3}mi$), onde $1 mmi = 1.086 mmag$.

3.6 Fotometria Rápida da PG 1159-035

Desde as primeiras observações da estrela PG 1159-035 em 1979 já se tinha em 1983 um total de 96 horas de observações. As observações foram feitas no McDonald Observatory usando uma válvula fotomultiplicadora RCA 8850 sensível ao azul com um fotocátodo bi-alcalino e um fotômetro de alta velocidade de duas estrelas (Nather 1973) com telescópios de 2.7 m, 2.1 m, e 0.9 m. Outras observações feitas com o South African Astronomical Observatory (SAAO) utilizaram uma fotomultiplicadora com um fotocátodo S-20, e um fotômetro de um canal no telescópio de 0.75 m. Todas as observações foram feitas em luz branca com duas exceções: as duas campanhas de Janeiro de 1983 que foram feitas com

um telescópio de 2.1 m usando um tubo fotomultiplicador RCA C31034A com um filtro Johnson B. A Tabela 3.2 mostra o *Journal* das observações da PG 1159-035 feitas entre os anos de 1979 e 1984 (Winget *et al.* 1985). Nas figuras Fig. 3.9, Fig. 3.10, Fig. 3.11 e Fig. 3.12 temos os diagramas de cobertura para as campanhas feitas em 1979-80, 1981, 1983 e 1984, respectivamente. As curvas de luz (já reduzidas) são mostradas nas figuras Fig. 3.16, Fig. 3.17, Fig. 3.18, Fig. 3.19, Fig. 3.20.

Tab. 3.2: Observações da PG 1159-035 entre 1979 e 1984 (Winget *et al.* 1985).

Run Number	Start Time HJDE (2,440,000+)	Run Length (hr)	Integration Time (s)	Telescope (m)	Filter	Photomultiplier Tube
2496	4229.954707	1.7	10	2.1	...	8850
2502	4232.877143	2.9	10	2.1	...	8850
2504	4289.780339	5.6	10	2.1	...	8850
2611	4729.638179	2.0	10	0.9	...	8850
2613	4732.641679	1.8	10	0.9	...	8850
2615	4733.641609	1.9	10	0.9	...	8850
2617	4734.642463	1.5	10	0.9	...	8850
2768	5346.871017	3.6	5	2.1	B	C31034
2774	5348.868995	1.3	10	2.1	B	C31034
SA 3095	5403.503504	0.8	5	0.75	...	S-20
SA 3098	5405.362238	5.1	5	0.75	...	S-20
2775	5404.679144	7.3	5	0.9	...	8850
SA 3099	5405.512263	1.0	5	0.75	...	S-20
2777	5407.954899	0.8	5	0.9	...	8850
SA 3101	5408.400508	3.5	5	0.75	...	S-20
2779	5410.637575	8.6	5	0.9	...	8850
2780	5411.688280	7.1	5	0.9	...	8850
2784	5412.831114	2.0	5	0.9	...	8850
2785	5434.625271	3.1	10	2.7	...	8850
2794	5439.644827	5.9	5	0.9	...	8850
2797	5440.623956	2.1	5	0.9	...	8850
2800	5440.824643	1.6	5	0.9	...	8850
2802	5441.632481	5.9	5	0.9	...	8850
2805	5442.626190	6.0	5	0.9	...	8850
2886	5790.630657	7.3	10	0.9	...	8850
2887	5791.631579	7.7	10	0.9	...	8850

Em 1985 foram obtidas mais 49 horas de fotometria rápida da PG 1159-035, em um esforço coordenado envolvendo observatórios na África do Sul, Brasil, Texas e Arizona. As observações na África do Sul foram realizadas no *South African Astronomical Observatory* com um fotômetro de um canal, equipado com uma foto multiplicadora S-20; no Brasil, as observações foram feitas no LNA usando um fotômetro com um tubo fotomultiplicador bi-alcalino; as observações do Texas foram feitas no *McDonald Observatory*, com um fotômetro de duas estrelas e um tubo fotomultiplicador bi-alcalino; e as observações no Arizona foram realizadas no *Kitt Peak National Observatory* também usando um fotômetro de duas estrelas com um fototubo bi-alcalino. O diagrama de cobertura para as campanhas de 1985 é mostrado na Fig. 3.13 e a curva de luz (já reduzida) é mostrada na Fig. 3.21.

Em 1987 foram também obtidas mais 22 horas de fotometria rápida com o um fotômetro de duas estrelas adaptado ao telescópio de 2.1 m do McDonald Observatory.

Nas observações feitas no ano de 1989, com exceção do observatório Australiano, o qual tinha um fotômetro de três canais “Montreal”, e do telescópio de 1.9 m de Haute Provence,

que usou um fotômetro de três canais “Chevreton”, todos os outros estavam equipados com fotômetros de dois canais (entretanto, o segundo canal do sítio de Sutherland não estava operacional). Os tempos de integração foram de 10 s para todos os turnos individuais. A Tabela 3.4 mostra o *Jornal* de observações para a campanha de 1989 (Winget *et al.* 1991). Na Fig. 3.14 temos o diagrama de cobertura para as campanhas de 1989 e na Fig. 3.22 temos a curva de luz obtida para este ano.

Tab. 3.3: Fotometria Rápida da PG 1159-035.

Ano	Número de Pontos	T_i	T_f	$T = T_f - T_i$ (s)	Tempo de fotometria (h)
		244 0000+ (BJDD)	244 0000+ (BJDD)		
1979	523	4232.877259	4232.998092	10440	2.90
1980	998	4289.780455	4290.011241	19940	5.54
1981	1294	4729.638295	4734.705773	437830	7.17
1983	11758	5346.871133	5442.877695	234820	65.23
1984	2658	5790.630773	5791.948824	113890	14.76
1985	4380	6147.661369	6212.287978	176101	48.92
1989	82471	7586.508147	7598.612293	1045798	228.92
1993	248162	9065.369392	9082.275394	1243550	345.43

No ano de 1993 foram obtidas mais ~ 405 horas de fotometria rápida da PG 1159-035 durante duas semanas de observações. Tab. 3.7 nos dá algumas informações sobre os arquivos com os dados fotométricos já reduzidos. Em todas as observações usou-se um tempo de integração de 5 segundos. A Fig. 3.15 mostra o diagrama de cobertura para as campanhas de observação da PG1159-035 em 1993 e a Fig. 3.23 mostra a curva de luz obtida para este ano.

A tabela Tab. 3.3 mostra uma série de informações sobre os dados fotométricos obtidos entre 1979 e 1993: o número de pontos; tempo de tempo inicial, t_i (em BJDD); tempo final, t_f (em BJDD); intervalo de espalhamento, ou seja, o tempo (em segundos) entre o tempo inicial e o tempo final; e o número total de horas de fotometria.

3.7 Observações da PG 1159-035 em Raios-X

Antes de terminarmos este capítulo, vamos comentar um pouco sobre as observações da PG 1159-035 em Raios-X.

Observações iniciais em Raios-X de baixa energia (LE) foram feitas em 1984 com o detector de LE do *EXOSAT* (de Korte *et al.* 1981). Era uma primeira tentativa de se verificar se a variabilidade detectada anteriormente no ótico, era observada também em Raios-X de baixa energia. Mas devido ao complexo comportamento fotométrico da PG 1159-035, não foi possível observar nas breves observações iniciais do *EXOSAT* variações em Raios-X associadas às variações no ótico. Posteriormente, uma observação de maior duração foi feita em 1985 em conjunto com fotometria ótica de alta velocidade, simultaneamente. Durante os anos de 1984 e 1985 foram feitas observações da PG 1159-035; pulsações foram detectadas no filtro *Lexan* de 3000 Å (44-150 Å), mas não no filtro de alumínio-parylene

Tab. 3.4: Jornal de Observações da PG 1159-035 em 1989 (Winget *et al.* 1991).

Run Name	Telescope	Date (UT)	Start (s)	Length (s)
JCC-0072	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 1	12:14:00	18960
JCC-0074	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 2	12:13:00	23600
SN4527	SAAO 0.8 m	1989 Mar 2	18:52:00	29500
REN-0059	La Palma 2.5 m	1989 Mar 2	23:07:20	24070
MLF-0006	McDonald 2.1 m	1989 Mar 3	4:45:27	16490
S4528	SAAO 0.8 m	1989 Mar 3	20:28:00	7400
REN-0061	La Palma 2.5 m	1989 Mar 3	23:08:20	18470
TOL-0003	CTIO 1.5 m	1989 Mar 3	3:35:00	20520
JCC-0075	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 4	11:26:30	27020
S4531	SAAO 0.8 m	1989 Mar 4	18:35:00	30500
TOL-0005	CTIO 1.5 m	1989 Mar 4	2:29:00	24450
JCC-0076	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 5	11:10:00	28000
S4532	SAAO 0.8 m	1989 Mar 5	18:35:01	29200
K40-0042	Kawalur 1.0 m	1989 Mar 5	18:35:40	17470
TOL-0007	CTIO 1.5 m	1989 Mar 6	2:13:30	25410
REN-0065	La Palma 2.5 m	1989 Mar 6	2:42:00	10570
JCC-0077	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 6	12:44:10	15290
K40-0050	Kawalur 1.0 m	1989 Mar 6	15:50:35	4100
K40-0051	Kawalur 1.0 m	1989 Mar 6	17:00:00	20170
JCC-0078	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 6	17:01:20	6620
S4533	SAAO 0.8 m	1989 Mar 6	18:46:00	20540
REN-0068	La Palma 2.5 m	1989 Mar 7	0:42:37	6360
TOL-0009	CTIO 1.5 m	1989 Mar 7	2:21:00	25370
MLF-0013	McDonald 2.1 m	1989 Mar 7	8:59:39	10350
JCC-0080	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 7	11:21:30	25650
S4534	SAAO 0.8 m	1989 Mar 7	18:37:04	31320
TOL-0011	CTIO 1.5 m	1989 Mar 8	2:19:00	25050
MLF-0014	McDonald 2.1 m	1989 Mar 8	4:42:41	25180
A123	Mauna Kea 0.6 m	1989 Mar 8	8:02:10	19610
JCC-0081	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 8	11:42:20	19420
S4535	SAAO 0.8 m	1989 Mar 8	18:21:01	32410
TOL-0013	CTIO 1.5 m	1989 Mar 9	2:13:00	18300
MLF-0015	McDonald 2.1 m	1989 Mar 9	4:36:09	26320
JCC-0083	Siding Spring 1.0 m	1989 Mar 9	11:05:30	26620
GV-0055	OHP 1.9 m	1989 Mar 9	22:00:00	17250
S4536	SAAO 0.8 m	1989 Mar 9	20:13:40	25300
MLF-0016	McDonald 2.1 m	1989 Mar 10	4:32:05	16890
S4537	SAAO 0.8 m	1989 Mar 10	18:51:01	30010
GV-0059	OHP 1.9 m	1989 Mar 10	21:59:10	20190
RA108	Itajuba 1.6 m	1989 Mar 11	0:58:40	24470
S4538	SAAO 0.8 m	1989 Mar 11	18:30:03	29260
GV-0059	OHP 1.9 m	1989 Mar 11	22:10:10	21140
A124	Mauna Kea 0.6 m	1989 Mar 12	7:23:30	19290
A125	Mauna Kea 0.6 m	1989 Mar 12	12:59:30	5640
S4539	SAAO 0.8 m	1989 Mar 12	22:36:01	14230
A126	Mauna Kea 0.6 m	1989 Mar 13	7:36:00	3000
A127	Mauna Kea 0.6 m	1989 Mar 13	11:01:40	13830

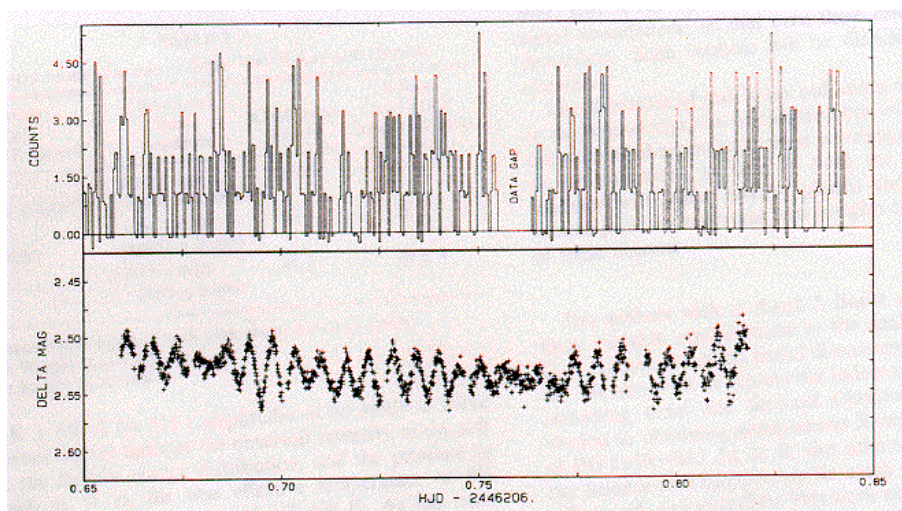


Fig. 3.7: Uma comparação entre as curva de luz obtida com o *EXOSAT* e a curva de luz ótica da PG 1159-035. Os dados do *EXOSAT* (no gráfico superior) mostram a porção da observação de 1985 que é simultânea com as observações óticas (gráfico inferior) . Note que a relação S/R do raio-X é baixíssima (Barstow *et al.* 1986).

Tab. 3.5: Observações Óticas e com o *EXOSAT*

Data	Tipo	Filtro	Época (HJED)	Duração (s)	Contagem (s^{-1})
15 Jun 1984	R-X	3000 Å Lex	2,445,867.10704	5600	0.041 ± 0.004
	R-X	Al-P	2,445,867.17185	8000	$< 0.0015(3\sigma)$
20 May 1985	R-X	3000 Å Lex	2,446,206.20908	60322	0.044 ± 0.001
21 May 1985	Opt.	-	2,446,206.65949	13720	-

(Al-P, 165-240 Å). Na Tab. 3.5 temos a data, a época, a duração, o filtro e a contagem média feita pelo *EXOSAT* para ambas observações (Barstow *et al.* 1986).

As observações simultâneas no ótico foram feitas com o telescópio de 1.5m do Steward Observatory usado um fotômetro de duas estrelas UALR. Nenhum filtro foi usado com o fotocátodo bi-alcalino sensível ao azul. A Fig.(3.7) mostra a porção dos dados do *EXOSAT* que coincidem com dados óticos simultâneos. Os dados em raios-X são mostrados na forma de um histograma com “bins” de 40 s para que se tenha uma contagem mínima de 1 evento por “bin”. Uma correção para o *background* médio, baseada no número total de contagens, foi aplicada. Comparada com a série de tempo ótica, os dados do *EXOSAT* tem uma baixa razão sinal-ruído.

Uma região do espectro de potência dos dados completos do *EXOSAT* obtidos em 1985 é mostrada na Fig.(3.8). Três fortes picos estão presentes, correspondendo á níveis de confiança superiores à 99%. Nenhum pico adicional com este nível de confiança foi encontrado no restante do espectro de potência (Barstow *et al.* 1986).

Dos três picos maiores (veja Tab.(3.6)), dois correspondem à modos de pulsação previamente identificados no espectro de potência dos dados óticos da PG 1159-035 (Winget *et al.* 1985): o pico de $516 \pm 1 s$ e o pico de $540 \pm 1 s$. Porém, *um novo pico* aparece em $524 \pm 1 s$, com uma amplitude comparável aos dois anteriores. Este pico não foi detectado

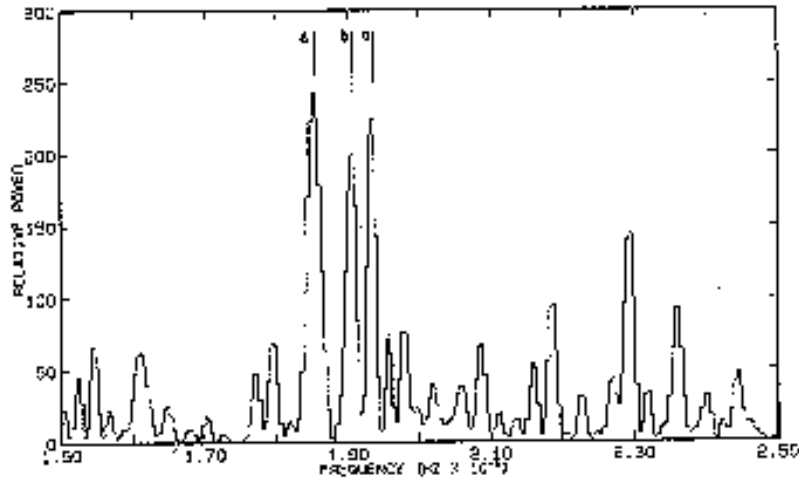


Fig. 3.8: Espectro de potência de uma série de tempo de 16 horas obtida com o EXOSAT mostrando as freqüências na vizinhança dos três períodos discutidos no texto. As linhas designadas por *a*, *b*, e *c* correspondem às localizações dos períodos óticos de 539, 524 e 516 s, respectivamente (Barstow *et al.* 1986).

Tab. 3.6: Modos de Pulsação Presentes no Ótico e em RX Moles

Período (s) EXOSAT; Ótico	Semi- amplitude fracional	Nível de Confiança	Razão das amplitudes RX / Ótico
516 ± 1; 516.0269 ± 0.0006	0.15 ± 0.03 0.0092 ± 0.0005	99.3%	16 ± 3
524 ± 1; 523.93 ± 0.04	0.16 ± 0.03 0.0052 ± 0.0003	99.4%	31 ± 6
540 ± 1; 539 ± 1	0.17 ± 0.03 0.0083 ± 0.0005	99.7	20 ± 4

nos dados óticos de 1979 à 1984 de Winget *et al.* (1985) mas *está presente* nos dados óticos obtidos em 1985 (Kepler *et al.* 1986). A grande diferença entre as pulsações detectadas em raios-X e no ótico está em suas amplitudes relativas. As amplitudes em raios-X são 20 a 30 vezes maiores que as amplitudes no ótico.

Tab. 3.7: Dados fotométricos de 1993 (reduzidos).

N°	Arquivo	T_0 (244 0000+) BJDD	N° pontos	ΔT (s)
1.	SA-es082.cc	9065.3209948	2828	5
2.	SA-es082.cd	9065.3209948	1165	5
3.	REN-0117.1c	9065.9113896	1022	5
4.	MAW-0119.1c	9065.8110422	5726	5
5.	GV-0301.1ca	9065.4245830	1003	5
6.	GV-0301.1cb	"	823	5
7.	GV-0301.1cc	"	474	5
8.	SJK-0242.1c	9065.9328016	1747	5
9.	SJK-0244.1c	9066.1484270	2598	5
10.	REN-0119.1c	9066.7166079	4353	5
11.	SA-es083.1c	9066.2884966	676	5
12.	SA-es083.1ca	"	546	5
13.	SA-es083.1cb	"	1045	5
14.	SA-es083.1cc	"	1814	5
15.	SA-es083.1cd	"	1072	5
16.	DJS-0020.1ca	9065.9161350	2700	5
17.	MAW-0121.1c	9066.9310633	1371	5
18.	GV-0307.1c	9066.4600013	2533	5
19.	SJK-0245.1c	9066.910233	4986	5
20.	MAW-0122.1c	9067.7777091	6054	5
21.	DJS-0021.1c	9068.069067	752	5
22.	SJK-0246.1c	9067.8890515	1250	5
23.	SJK-0246.1ca	9067.8890515	156	5
24.	SJK-0246.1cb	"	612	5
25.	SJK-0246.1cc	"	397	5
26.	SJK-0246.1cd	"	1477	5
27.	SJK-0246.1ce	"	2506	5
28.	SA-es084.1c	9068.2821063	1899	5
29.	SA-es084.1ca	"	1327	5
30.	SA-es084.1cb	"	1088	5
31.	SA-es084.1cc	"	761	5
32.	SJK-0247.1c	9068.8949517	2340	5
33.	SJK-0247.1ca	"	463	5
34.	SJK-0247.1cb	"	3302	5
35.	MAW-0123.1c			5
36.	GV-0316.1c	9069.4484217	913	5
37.	GV-0316.1ca	"	840	5
38.	GV-0316.1cb	"	307	5
39.	GV-0316.1cc	"	405	5
40.	MAW-0124.1c	9069.7609202	5991	5
41.	SA-es085.1c	9069.2786308	2117	5
42.	DJS-0024.1c	9069.8753872	5094	5
43.	SA-es086.1c	9070.2640425	4737	5
44.	SA-es086.1ca	"	755	5
45.	SA-es086.1cb	"	313	5
46.	SJK-0248.1c			5
47.	MAW-0125.1c	9070.7603357	5463	5
48.	MAW-0125.1ca	"	391	5
49.	MAW-0125.1cb	"	642	5
50.	JCC-0217.1c	9071.6279218	625	5
51.	JCC-0217.1ca	"	1806	5
52.	JCC-0217.1cb	"	1655	5
53.	MAW-0126.1c	9071.7616013	6152	5
54.	SA-es087.1c	9071.2607951	438	5
55.	SA-es087.1ca	"	1303	5
56.	SA-es087.1cb	"	342	5
57.	DJS-0025.1c	9071.8665572	295	5
58.	DJS-0025.1ca	"	2528	5
59.	DJS-0025.1cb	"	858	5
60.	DJS-0026.1c	9072.0839365	250	5
61.	DJS-0026.1ca	"	1914	5

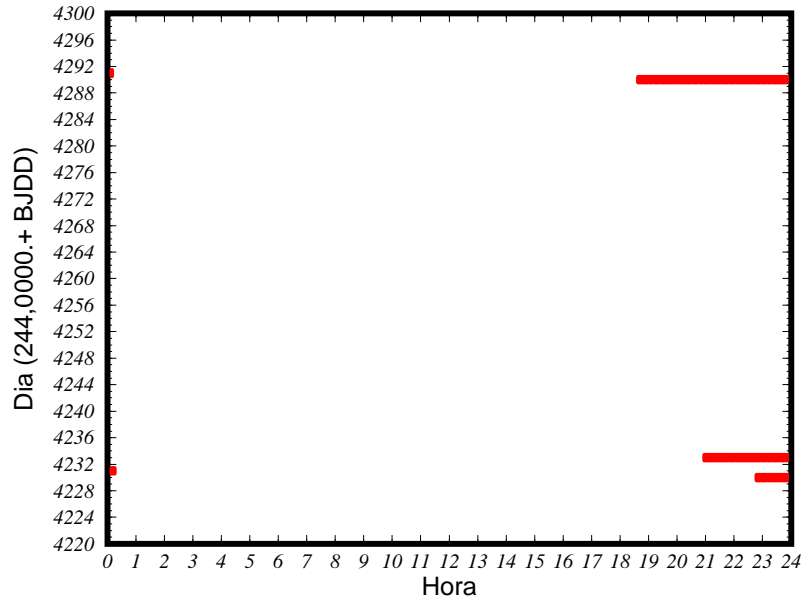


Fig. 3.9: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1979 e 1980.

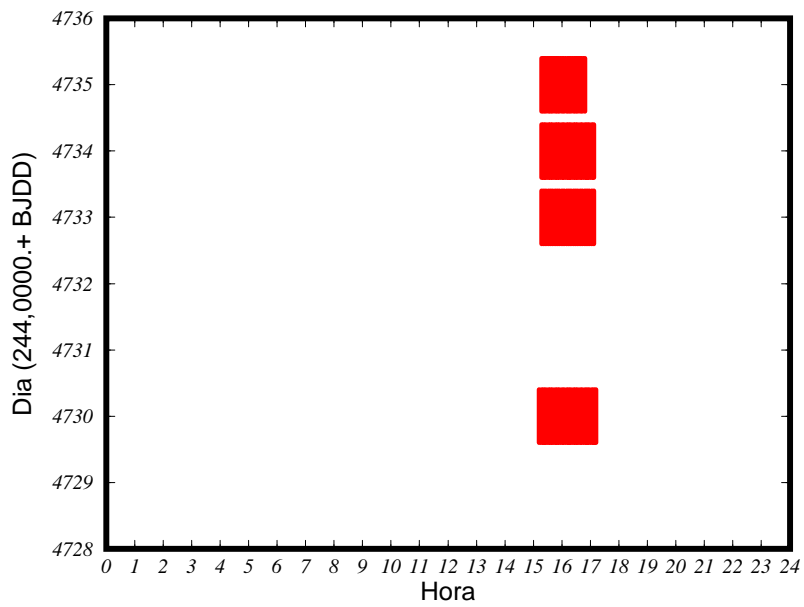


Fig. 3.10: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1981.

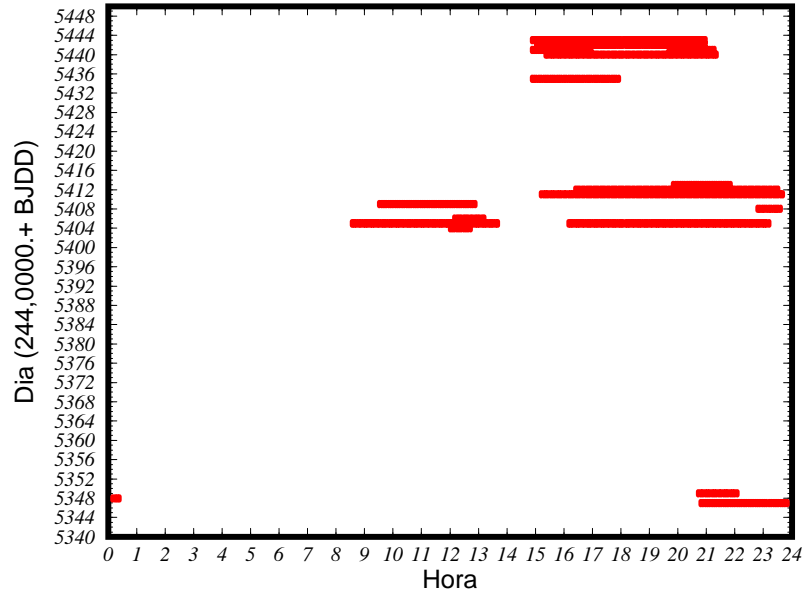


Fig. 3.11: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1983.

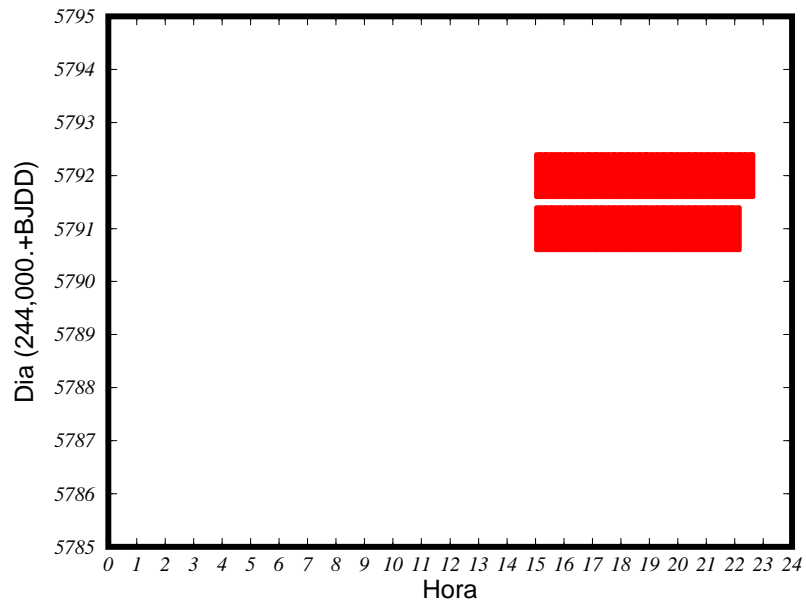


Fig. 3.12: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1984.

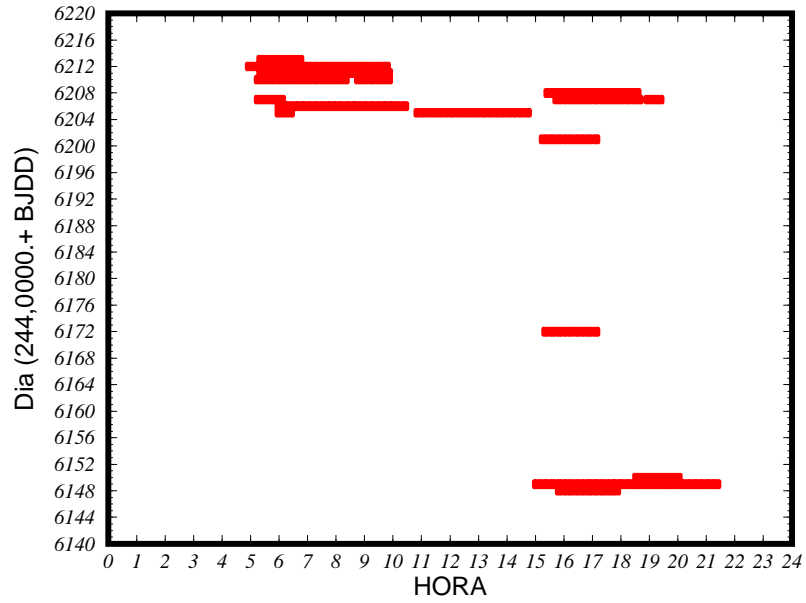


Fig. 3.13: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1985.

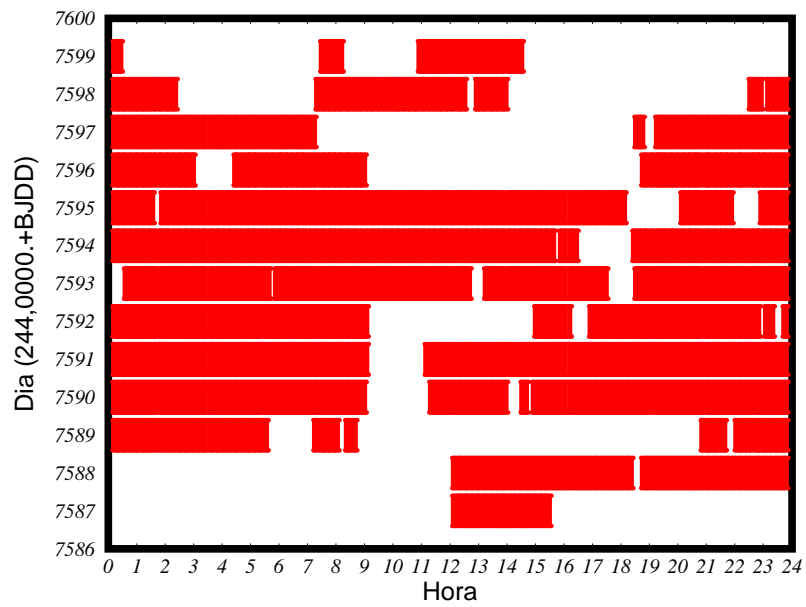


Fig. 3.14: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1989.

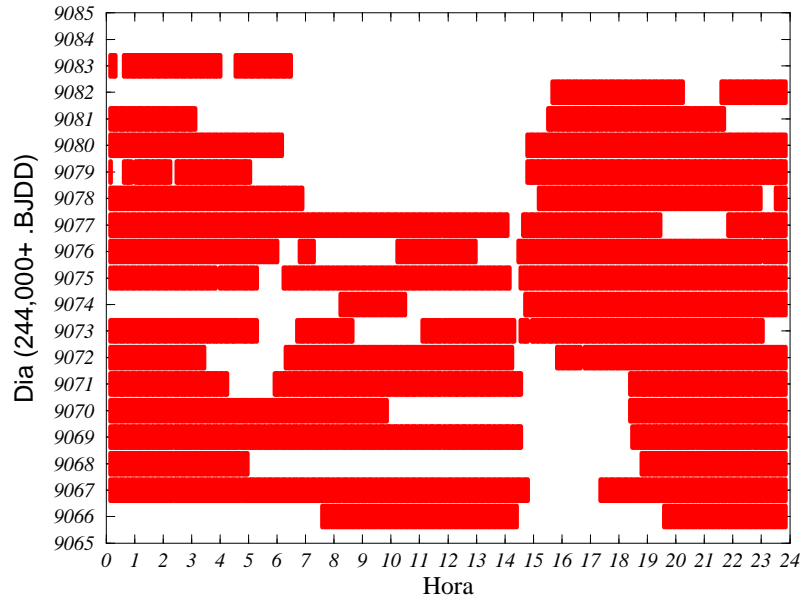


Fig. 3.15: Diagrama de cobertura para as campanhas de 1993.

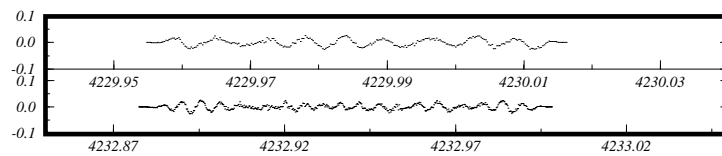


Fig. 3.16: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1979. O eixo horizontal mostra a data em (244,000+).BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

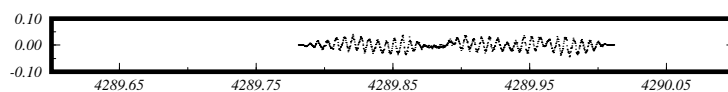


Fig. 3.17: Curva de luz da PG1159-035 obtida na campanha de 1980. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)-BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

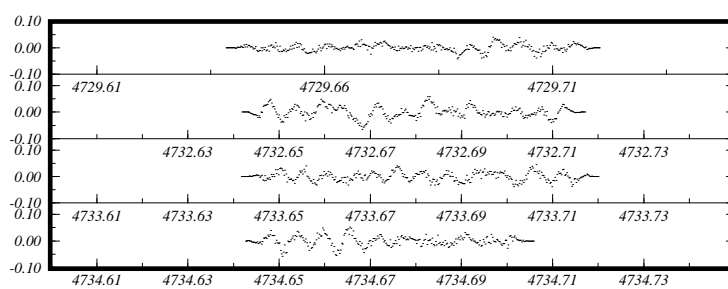


Fig. 3.18: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1981. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)-BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

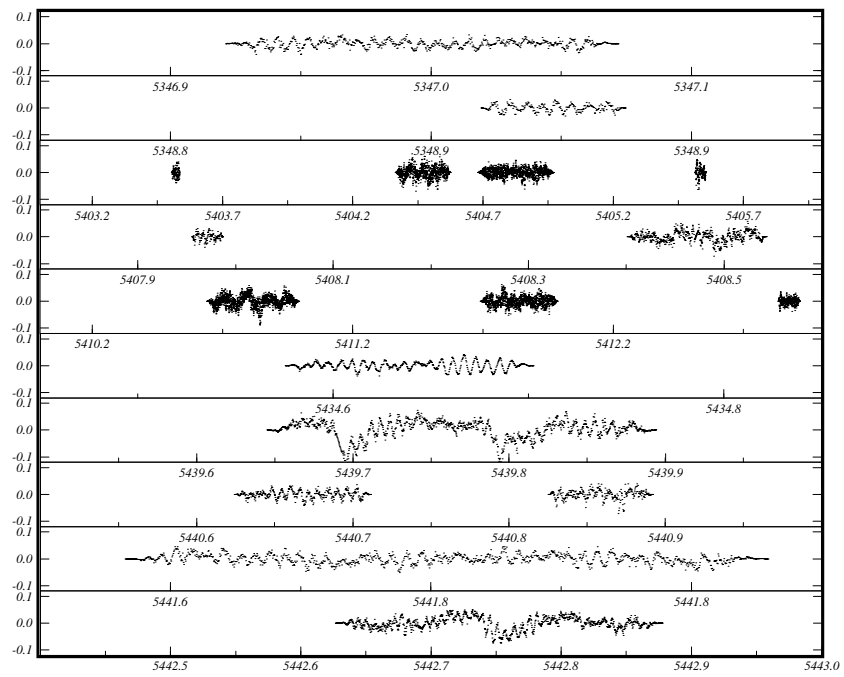


Fig. 3.19: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1983. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)
BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

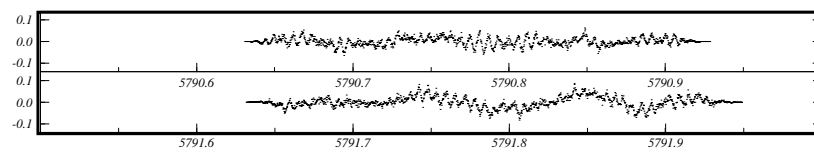


Fig. 3.20: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1984. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)
BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

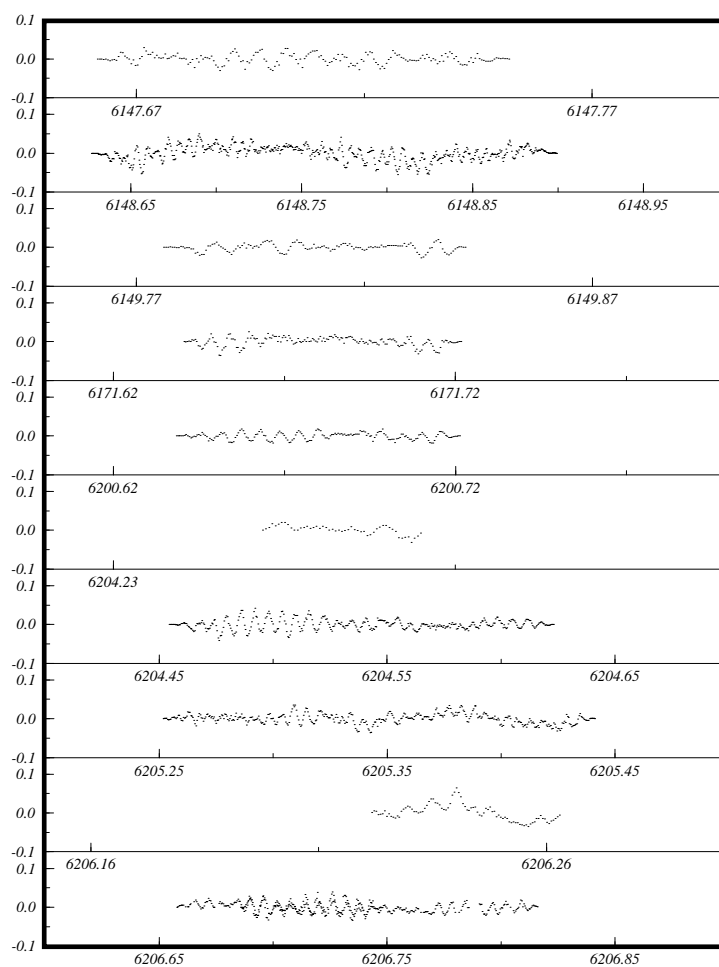
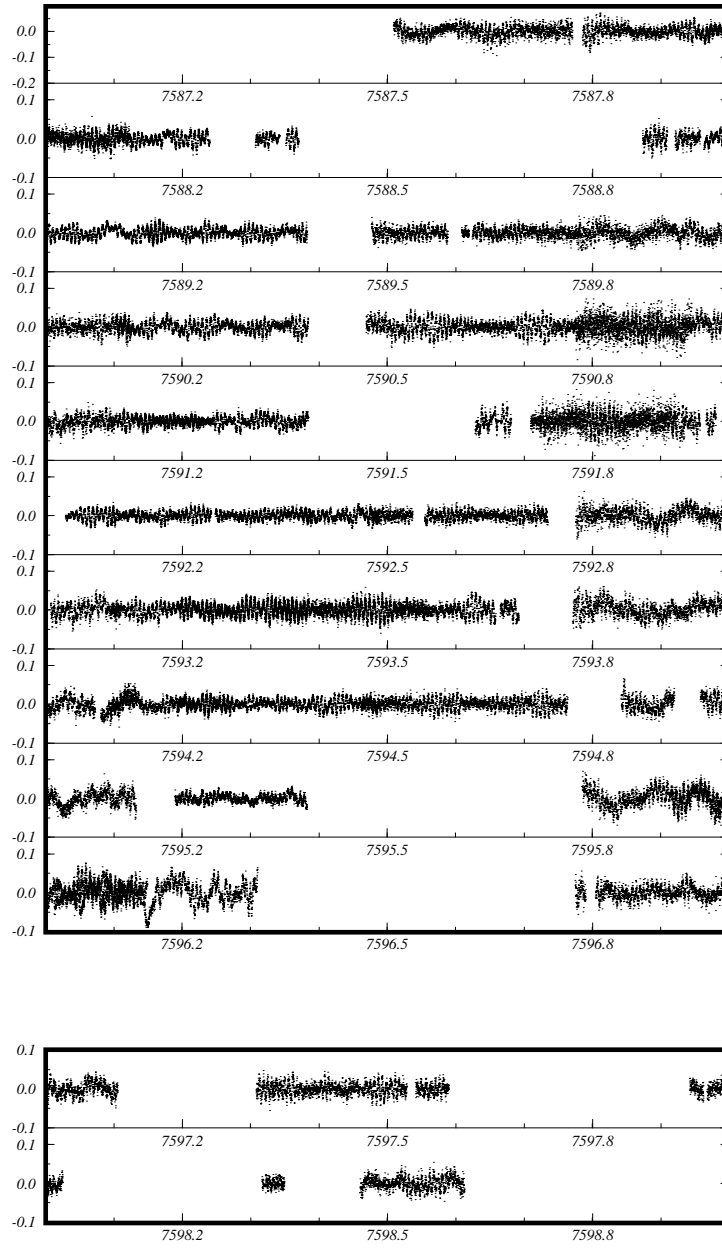


Fig. 3.21: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1985. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)-BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

Fig. 3.22: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1989. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)
BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.



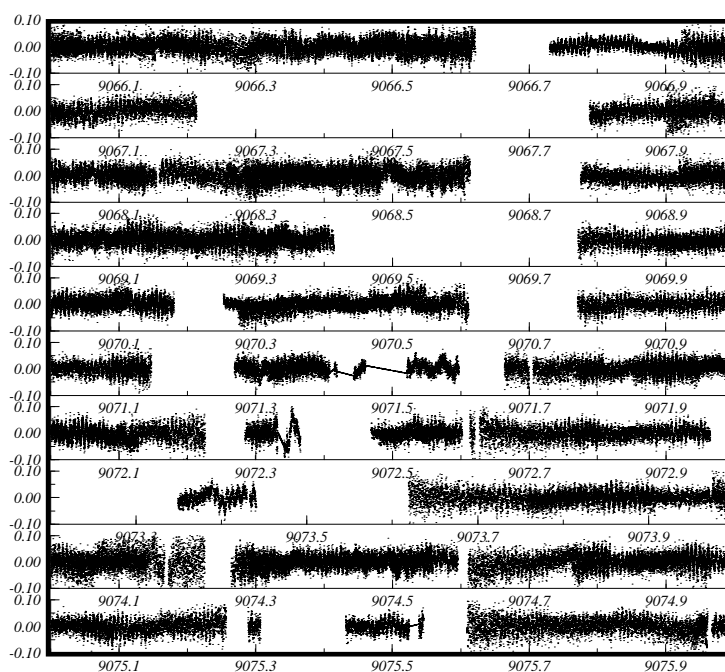


Fig. 3.23: Curva de luz da PG1159-035 obtida nas campanhas de 1993. O eixo horizontal mostra a data em (244,0000.+)
BJDD, e o eixo vertical mostra a intensidade fracional.

Capítulo 4

ANÁLISE DAS CURVAS DE LUZ DA PG 1159-035

Uma vez de posse dos dados fotométricos (devidamente reduzidos), o próximo passo é analisá-los. Os métodos utilizados na análise dos dados dependem do tipo de informação que desejamos obter, do conjunto de dados que dispomos e, eventualmente, das informações que já possuímos sobre a estrela.

4.1 Propósitos da Análise das Curvas de Luz

A análise das curvas de luz de uma estrela visa basicamente dois propósitos (Fullerton 1986): um deles é o da **detecção** de possíveis sinais periódicos, estatisticamente significativos, presentes nas curvas de luz da estrela. O outro é a **estimativa** das propriedades de cada sinal periódico detectado e das incertezas associadas a cada parâmetro que o caracteriza.

A distinção entre *detecção* e *estimativa* é fraca, mas as questões que caracterizam cada uma delas são bastante distintas. Os espaçamentos na amostragem que são mais adequados para *detectar* são bastante distintos daqueles apropriados para *estimar*. Conhecer esses detalhes é importante no planejamento de campanhas de observação. Se o nosso objetivo é detectar novas periodicidades nas curvas de luz de uma estrela é conveniente investir em campanhas de observações o mais contínuas possível. Por outro lado, se o nosso objetivo é simplesmente determinar com precisão o valor de um período de pulsação, é mais racional fazer um número menor de observações, mas com um espaçamento maior entre elas pois o erro na determinação do período é dado por: $\sigma_P \propto (NT^2)^{-1}$, onde N é o número de dados e T o tempo de espaçamento das observações. Isso ficou bem claro na análise das curvas de luz da PG 1159-035, onde as 96 horas de fotometria espalhadas ao longo de 96 dias de 1983 permitiram uma determinação direta mais precisa do período principal de 516s do que as 264 horas obtidas ao longo de 14 dias em 1989.

Iniciaremos este capítulo fazendo algumas considerações sobre a natureza dos dados fotométricos. Depois discutiremos em termos gerais os principais métodos existentes para a detecção e estimativa dos períodos de pulsação para em seguida, falarmos sobre os períodos de pulsação detectados até agora na PG 1159-035.

4.2 Séries de Tempo

Os dados fotométricos são um exemplo daquilo que chamamos de **séries de tempo**. Uma série de tempo, em sua forma mais simples, pode ser definida como uma coleção de N observações de uma dada variável arranjadas em uma ordem natural: $\{f_i\}$, com $i = 1, N$. No caso dos dados fotométricos a variável medida é a *intensidade* de um objeto e cada medida está associada a um particular instante de tempo t_i , ($I_i = I(t_i)$), e é isso que define o ordenamento. Os tempos $\{t_i\}$, na maior parte das aplicações astronômicas, não são igualmente espaçados.

4.3 Métodos de Análise: procurando periodicidades

Como é possível identificar sinais periódicos em uma série de tempo? Digamos que o sinal presente em uma dada série de tempo tenha uma forma senoidal,

$$I = A \sin \omega_0(t_i - t_0) \quad (4.1)$$

perfeitamente definido por uma **amplitude** A , um **período** $P_0 \equiv \frac{2\pi}{\omega_0}$, onde ω_0 é a **frequência angular** e por uma **fase** $\phi_0 \equiv \omega_0 t_0$.

Inicialmente, queremos *detectar* a presença de um sinal. Por **detecção** entendemos a *identificação de um sinal com determinada característica*. A “característica” do sinal que escolhermos para identificá-lo será seu período. Portanto, para detectar sinais, precisamos de algo que nos diga: “dentro de um determinado intervalo de valores de períodos, $[P_{inf}, P_{sup}]$, existe um sinal com período igual a P_0 ” ou, pelo menos, “existe um sinal com um período de *aproximadamente* P_0 ”, onde $P_{inf} \leq P_0 \leq P_{sup}$.

Para isso, o que praticamente todos os métodos fazem é usar uma função $f(P)$, “sensível” a sinais periódicos. Por “sensível a sinais periódicos” queremos dizer que a curva da função $f(P)$ apresentará um *extremo* (um máximo ou um mínimo, dependendo da função) em $P = P_0$ ou em $P \simeq P_0$, de forma que saberemos que ali foi identificado um *possível* sinal periódico. O gráfico de $f(P)$ contra P chamamos de “**periodograma generalizado**”¹.

O simples fato do periodograma indicar uma periodicidade não significa que ela seja real. Como veremos mais adiante, a interpretação de um periodograma está sujeita a uma variedade de dificuldades. Isso ocorre devido à imprecisão inerente às medidas observacionais; devido às características da amostragem dos dados e também devido ao “ruído” gerado pelo próprio algoritmo. Por isso, a significância estatística de cada “possível” período deve ser rigorosamente testada:

¹ Usamos o adjetivo “*generalizado*” para distingui-lo de uma determinada classe de funções que, por contingência histórica, são chamadas de “*periodogramas*” (veja Sec. 4.3.2). A escolha do período como “parâmetro caracterizador” é arbitrária. Poderíamos escolher a *frequência* $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ou mesmo a *frequência angular* ω_0 . Nesse caso a função “sensível” seria $f(\nu)$ [ou $f(\omega)$] e o gráfico de $f(\nu)$ contra ν [ou de $f(\omega)$ contra ω] seria chamado de **espectrograma** (Chatfield, 1975). Entretanto, alguns autores não fazem esta distinção e também chamam esses gráficos de periodogramas (Martinez & Koen 1994).

as propriedades estatísticas das técnicas de detecção de sinais periódicos oferecem a única proteção contra a detecção de períodos espúrios.

De um modo geral, os métodos de análise de periodicidades trabalham somente com sinais estritamente periódicos ou com sinais cujas mudanças no período ocorram numa escala de tempo muito grande comparada com a duração das observações. Entretanto, na prática, essas técnicas ainda demonstram ser úteis na pesquisa de sinais que variam suavemente no tempo (Fullerton, 1986).

Classificação

Uma variedade enorme de algoritmos foi desenvolvido para pesquisar por sinais periódicos e suas propriedades. Esses algoritmos podem ser classificados em duas grandes famílias (Heck *et al.* 1985):

- 1) Métodos Não-Paramétricos
- 2) Análise de Fourier

A seguir, discutiremos cada uma dessas duas classes em termos gerais. Uma atenção especial será dada para a transformada de Fourier e há uma boa razão para isso: é que a transformada de Fourier é a técnica mais utilizada na análise de periodicidades em séries de tempo, mas ela está sujeita a limitações e, para a correta interpretação do periodograma obtido através dela é fundamental termos um conhecimento profundo de seu conceito e propriedades. Foi essa técnica que utilizamos na análise das curvas de luz da PG 1159-035.

4.3.1 Métodos Não-Paramétricos

Os *métodos não-paramétricos* são algoritmos derivados do *critério- θ* (Lafler & Kinman 1965). Essa família de métodos se subdivide em duas classes principais:

- a) Métodos de Comprimentos de Cordas
- b) Métodos de Classificação de Fases (PDM)

a) Métodos de Comprimento de Cordas

Os *métodos de comprimento de cordas* (“*string length methods*”) têm uma base *intuitiva*: a de que o comprimento total de uma corda imaginária ligando pontos sucessivos em um diagrama de fase será minimizado quando o período testado for igual ao real. Essa idéia ficará mais clara a medida que for sendo explicado cada um de seus passos. Esses métodos empregam uma função “sensível” a sinais periódicos, $h(P)$, cujo gráfico $h(P)$ contra P é o periodograma de um conjunto de N medidas fotométricas.

Primeiro passo: calculamos a “fase”, ϕ_i :

$$\phi_i = \text{Frac} \left[\frac{t_i - t_0}{P} \right] \quad (4.2)$$

onde a função $Frac(x)$ devolve a parte fracionária de x , logo: $0 \leq Frac(x) < 1$. Teremos então um novo conjunto $\{\phi_i, f_i\}$, $i = 1, N$.

Segundo passo: reordenamos o conjunto $\{\phi_i, f_i\}$, $i = 1, N$, criando um novo conjunto $\{\phi_j, f_j\}$, $j = 1, N$, usando como critério de ordenamento:

$$\phi_{j-1} \leq \phi_j \leq \phi_{j+1} \quad (4.3)$$

Os pontos podem agora ser distribuídos em um espaço de f contra ϕ . Este espaço é chamado de “*espaço de fase*”. Note que o domínio de ϕ se estende de 0 a 1 e que para um mesmo valor de ϕ podemos ter mais de um valor de f !

Terceiro passo: calculamos o comprimento de cada segmento de reta que une dois pontos consecutivos no espaço de fase, l_j , e somamos todos para obter o *comprimento total da corda*²:

$$l_j^2 = (\phi_j - \phi_{j-1})^2 + (f_j - f_{j-1})^2 \quad (4.4)$$

$$l_j = \sqrt{(\phi_j - \phi_{j-1})^2 + (f_j - f_{j-1})^2} \quad (4.5)$$

$$l(P) = \left\{ \sum_{i=1}^N \sqrt{(\phi_i - \phi_{i-1})^2 + (f_i - f_{i-1})^2} \right\} + \sqrt{[1 - (\phi_N - \phi_1)]^2 + (f_N - f_1)^2} \quad (4.6)$$

O segundo termo do lado direito é o comprimento do segmento que liga o primeiro ao último ponto da série. A função $l(P)$ é calculada ao longo de um range completo de períodos-tentativos. Seu gráfico é o periodograma. Quando P se aproxima do valor verdadeiro, P_0 , temos os menores valores de $l(P)$ (um mínimo).

O algoritmo acima foi desenvolvido por Dworetzky (1983), mas existem pelo menos duas variantes desse método: numa delas, proposta por Lafler & Kinman (1964), usa-se apenas a componente vertical dos segmentos:

$$l(P) = \sum_{i=1}^N (f_i - f_{i-1}) + (f_N - f_1). \quad (4.7)$$

A negligência da contribuição das componentes horizontais previne contra a inclinação àquelas regiões onde ocorrem uma maior densidade de pontos, mas aumenta o aparecimento de ruído no periodograma generalizado (Fullerton 1986).

A grande vantagem do método é a sua simplicidade. A desvantagem é devida ao reordenamento em ordem crescente dos pontos no espaço de fase que ele precisa fazer para cada período-tentativo o torna o algoritmo demorado para grandes conjuntos de dados (e às vezes até inviável!). Um caso onde este método é particularmente útil é na análise da variação da amplitude de alguma pulsação quando esta é causada por batimentos entre frequências próximas (Kanaan 1990).

A questão da significância estatística dos períodos encontrados por meio de técnicas de minimização de dispersão de fases foi examinada por Nemeč & Nemeč (1985) usando um teste baseado no método de randomização de Fisher.

² Por definição geométrica, “**corda**” é um segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma curva.

b) Métodos de Classificação de Fases

As técnicas que fazem parte dessa classe, “dobram” os dados usando um período-tentativo e examinam o conteúdo de “caixas” no espaço de fase. Uma técnica particularmente popular é a *Minimização da Dispersão de Fases* proposta por Stellingwerf (1978; veja também Davis 1990 e Kepler *et al.* 1983).

Neste método, o espaço de fase, $[0, 1]$, é dividido em um número N_b de compartimentos (“caixas”), todos de igual extensão. Para cada dado de entrada, calcula-se a fase de acordo com a Eq. (4.2). Os dados são então distribuídos nas “caixas” correspondentes. É comum que um número N_c de “caixas” seja considerado. Assim, cada um dos dados cai em N_c caixas. Tipicamente, $N_c = 2$. A maioria dos períodos-tentativos produzirá uma distribuição randômica dos dados no espaço de fase. A razão da variança-total pela variança-global tenderá a se aproximar da unidade: $\sigma_k/\sigma_{global} \simeq 1$. Contudo, para um período-tentativo que corresponda ao período verdadeiro, o espalhamento ao longo das “caixas” será reduzido drasticamente e a razão σ_k/σ_{global} será um número bem menor que a unidade. O periodograma consistirá num diagrama da razão σ_k/σ_{global} contra P e o período real terá um mínimo (Fullerton 1986).

Em seu trabalho, Stellingwerf (1978) além de descrever o método de minimização da dispersão de fases, também estuda suas propriedades estatísticas e apresenta sua aplicação na determinação dos períodos múltiplos da Cefeida *BK Centauri*.

Esse tipo de método, tal como os métodos da classe anterior, não fazem nenhuma suposição quanto à forma do sinal em estudo. Entretanto, algoritmos como o de minimização da dispersão de fases são mais econômicos do ponto de vista computacional por não exigirem um reordenamento de fases.

A outra variante foi formulada por Renson (1978), e inclui uma *função-peso* no algoritmo de Lafler & Kinman a qual permite lidar com o problema de uma distribuição desigual de pontos no espaço de fase.

4.3.2 Análise de Fourier

Chamamos de *análise de Fourier* à vasta gama de técnicas de análise que tentam modelar uma série de tempo usando uma combinação linear de funções temporais trigonométricas (Bloomfield, 1976 e Foster, 1996). Os principais métodos que se enquadram nessa classe são:

- a) *Transformadas de Fourier: FFT, DFT e PDFT*
- b) DCDFT (Date-Compensated Discret Fourier Transform)
- c) CLEAN
- d) CLEANest
- e) *Periodograma*
- f) *Métodos de Mínimos-Quadrados*

Apesar de aparentemente distintos, todos esses métodos de pesquisa de períodos são conceitualmente similares (Fullerton, 1986). Os métodos de mínimos-quadrados são formalmente

equivalentes ao periodograma (veja a seguir), pelo menos em certas circunstâncias (Scargle 1982).

a) *Transformada de Fourier*

Vamos começar considerando uma função $f(t)$ conhecida para todo o tempo t . Sabemos que f pode ser construída pela superposição das contribuições de todas as frequências ν , tanto positivas quanto negativas,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{+2\pi i\nu t} d\nu, \quad -\infty \leq t \leq +\infty. \quad (4.8)$$

O *espectro de f* , o qual define como cada frequência ν contribui na construção de f , é dado pela *transformada de Fourier (FT) de f* ,

$$F(\nu) \equiv FT[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t} dt, \quad -\infty \leq \nu \leq +\infty. \quad (4.9)$$

Chamamos de *transformada* o processo pelo qual podemos construir uma função a partir de outra e vice-versa. A integral (4.8) é por vezes chamada de “*integral de Fourier*”. As eq. (4.8) e (4.9) constituem “*um par de transformadas de Fourier*”. É bom notar que não existe nenhuma convenção universalmente aceita quanto à definição da integral de Fourier e de sua transformada (Brigham 1974). De modo geral, o par de transformadas de Fourier é definido como,

$$f(t) = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.10)$$

$$F(\omega) = a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (4.11)$$

onde os coeficientes a_1 e a_2 devem satisfazer à condição (matemática) de normalização:

$$a_1 a_2 = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.12)$$

O modo como definimos a_1 e a_2 depende do problema em questão. No nosso caso, precisamos satisfazer a condição física de que a energia total computada ao longo do domínio do tempo deve ser igual à energia total computada no domínio de frequência. Sabemos que a *energia total* de uma onda de frequência ω é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude:

$$dE_T \propto A^2(t)dt. \quad (4.13)$$

Assim, a energia total, no domínio do tempo é dada por:

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.14)$$

Segundo o “*teorema de Parseval*”, se as eq. (??) e (??) formam um par de transformadas de Fourier, então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi a_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.15)$$

Logo, para que esta relação satisfaça a condição (4.14) de mesma energia total em ambos os domínios, o *fator de escala* a_2 deve ser igual a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, o que implicaria que $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Assim, teríamos o par de transformadas,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.16)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4.17)$$

Portanto, se quisermos trabalhar com freqüências angulares, ω , devemos usar o par de transformadas (4.16) e (4.17). Entretanto, é matematicamente mais conveniente trabalhar no domínio de freqüência linear do que de freqüência angular. Isso pode ser feito mediante uma mera mudança de variáveis:

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow d\omega = 2\pi d\nu. \quad (4.18)$$

A relação de Parseval (4.15) ficaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = (2\pi)^2 a_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu. \quad (4.19)$$

Mas para que a condição de equivalência de energia em ambos os domínios seja satisfeita, devemos agora definir $a_2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow a_1 = 1$, e teríamos então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu. \quad (4.20)$$

Porque é conveniente trabalharmos com ν ao invés de ω ? Que vantagens há nisso? Na verdade é por pura conveniência matemática: fazendo assim, fazemos com que a *transformada de Laplace de $f(t)$* , $L[f(t)]$, se reduza à transformada de Fourier: $L[f(t)] = TF[f(t)]$. A transformada de Laplace que é definida universalmente como,

$$L[f(t)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\alpha+i\omega)t} dt, \quad (4.21)$$

se reduz à TF, para $\alpha = 0$,

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (4.22)$$

ou seja, $L[f(t)] = TF[f(t)]$ se $a_1 = 1$.

Desta forma, se desejarmos, poderemos explorar as propriedades da transformada de Laplace, tendo em vista que a TF é um caso particular da mesma. Há uma terceira vantagem na mudança de variável: nos livramos do fator de escala $\frac{1}{2\pi}$!

* * *

Se assumirmos que $f(t)$ é real, então $F(\nu)$ deverá satisfazer,

$$F(-\nu) = F^*(+\nu) \quad (4.23)$$

onde $*$ representa o *complexo conjugado*. A eq.(4.20) nos leva a definir o “*espectro de potência*” (*power spectrum*) de f como,

$$P(\nu) = |F(\nu)|^2, \quad -\infty \leq \nu \leq +\infty. \quad (4.24)$$

Chamamos $P(\nu)$ de “potência” (*power*) por ser uma potência de dois (e não por estar relacionado com potência) (Roberts et al. 1987). Desde que $f(t)$ é real, metade da potência de uma dada frequência $|\nu|$ ocorre devido a uma frequência negativa!

Teorema de Convolução

Começamos definindo a “*integral de convolução*” como segue:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t). \quad (4.25)$$

A função $y(t)$ é dita como sendo a convolução das funções $x(t)$ e $h(t)$. Note que é extremamente difícil visualizar a operação matemática da eq.(4.25).

Uma das mais importantes e poderosas ferramentas da moderna análise científica é a relação entre a eq.(4.25) e sua transformada de Fourier. Esta relação é conhecida como o “*teorema de convolução*” e permite completa liberdade para convoluir matematicamente (ou visualmente) no domínio do tempo por simples multiplicação no domínio de frequência. O teorema da convolução nos diz que:

$$f(t) * g(t) \Leftrightarrow F(\nu)G(\nu). \quad (4.26)$$

Podemos equivalentemente ir da convolução no domínio da frequência à multiplicação no domínio do tempo:

$$f(t)g(t) \Leftrightarrow F(\nu) * G(\nu). \quad (4.27)$$

A Transformada de Fourier de Dados Fotométricos

Na maior parte dos conjuntos de dados experimentais ou observacionais, o que temos disponível são valores de f para um número finito de pontos-de-amostra $\{t_r\}$, isto é, um número finito, N , de pontos:

$$\{f_r, t_r\} \equiv \{f(t_r), t_r\}, r = 1, 2, \dots, N. \quad (4.28)$$

Podemos interpretar esses N pontos como sendo uma “*amostragem*” (*sampling*) de f pela multiplicação de uma *função-amostragem*, $s(t)$, consistindo de uma soma ponderada de N funções delta de Dirac, $\delta(x)$:

$$s(t) \equiv C \frac{\sum_{r=1}^N w_r \delta(t - t_r)}{\sum_{r=1}^N w_r}, \quad (4.29)$$

onde w_r é o *peso* do dado de índice r ; C é uma constante que define a normalização e o dimensionamento de $s(t)$. Nesse trabalho, vamos assumir que todos os dados possuem mesmo peso ($w_r = 1$) e tomaremos $C = 1$. Logo a “*função sinal-amostragem*” fica:

$$f_s(t) = f(t)s(t) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f(t)\delta(t - t_r) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f_r\delta(t - t_r) \quad (4.30)$$

Assim, na realidade, o que temos é $f_s(t)$ e não $f(t)$! O que ocorre quando fazemos a TF de f_s na tentativa de obter seu espectro de frequências? Bem, teremos:

$$D(\nu) \equiv TF[f(t)s(t)] \quad (4.31)$$

É a chamada “*discretização*” da transformada de Fourier devido à amostragem. Pelo teorema da convolução:

$$TF[f(t)s(t)] = F(\nu) * S(\nu) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu')W(\nu - \nu')d\nu' \quad (4.32)$$

onde as funções observáveis $D(\nu)$ e $W(\nu)$ são chamadas de *função “espectro sujo” (dirty spectrum)* e *função “janela espectral” (window spectrum)*, respectivamente. $D(\nu)$ e $W(\nu)$ são calculadas com:

$$D(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t)e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f_r e^{-2\pi i\nu t_r} \quad (4.33)$$

$$W(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{-2\pi i\nu t_r} \quad (4.34)$$

As simetrias de $D(\nu)$ e $W(\nu)$ são as mesmas de $F(\nu)$:

$$D(-\nu) = D^*(+\nu) \quad (4.35)$$

$$W(-\nu) = W^*(+\nu) \quad (4.36)$$

Como consequência de nossa escolha de normalização, a “*frequência-zero*” (componente DC) de D é dada por:

$$D(0) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f_r \quad (4.37)$$

ou seja, igual ao valor médio dos dados, e para a função janela é a unidade:

$$W(0) = 1 \quad (4.38)$$

Observe que o que gostaríamos de conhecer é $F(\nu)$ mas o que realmente podemos calcular é $D(\nu)$. Neste ponto, alguém poderia perguntar: “ora, se $f_s = f(t)s(t)$, não poderíamos calcular $F(\nu) = TF[f]$, fazendo $f = f_s/s$?” Afinal, não conhecemos $f(t)$, mas conhecemos $f_s(t)$ e $s(t)$:

$$F(\nu) = FT[f] = FT\left[\frac{f_s}{s}\right] = FT[f] * FT\left[\frac{1}{s}\right] \quad (4.39)$$

Resposta: não!!! Por que? Precisamente porque conhecemos $f(t)$ somente em tempos discretos e $s(t)$ é zero para outros valores, de forma que a eq. (4.39) não faria sentido! Assim, nenhum conjunto finito de dados é suficiente para especificar totalmente a função $f(t)$.

Conseqüências da Amostragem

A limitação a um número finito de pontos na amostragem tem duas importantes conseqüências. A primeira é que o comprimento total da amostragem, isto é, $T = t_N - t_1$, é finito. Um comprimento finito pode ser imaginado como sendo gerado por uma função³ do tipo:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1, & \text{se } t_1 \leq t \leq t_N; \\ h(t) &= 0 & \text{para os outros casos.} \end{aligned}$$

O comprimento finito da amostragem pode ser então criado pelo produto:

$$f_h(t) = f(t)h(t), \quad (4.40)$$

e o “espectro sujo” correspondente é a convolução do espectro pela “função espalhamento” (*smearing function*) H ,

$$TF[f_r] = F(\nu) * H(\nu) \quad (4.41)$$

onde

$$H(\nu) \equiv TF[h] = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} e^{-\pi i\nu(t_1+t_N)} \quad (4.42)$$

é a função janela para um conjunto contínuo de dados de comprimento finito. A convolução de F com H resulta no “espalhamento” (*smearing*), também chamado de “vazamento espectral” (*spectral leakage*) de um dado pico em F sobre a largura de H (o intervalo de freqüências, ao redor de ν ao qual H é aplicado). Este “smearing” ocorre em D desde que os dados amostrados são supostamente limitados a $t_1 \leq t \leq t_N$, isto é, finitos.

A “resolução espectral”, $\delta\nu$, que resulta de um conjunto discreto de dados é a largura do pico principal de W (em $t = 0$):

$$\delta\nu \simeq \frac{1}{T} \quad (4.43)$$

quanto maior for o valor de T e quanto menos desuniforme forem os dados, mais $\delta\nu$ se aproxima de $1/T$.

A segunda conseqüência ocorre porque os dados não são contínuos sobre (t_1, t_N) , mas ocorrem somente em $\{t_r\}$. A função janela espectral será W (e não H), e aparecerão picos em W devido à distribuição dos dados (amostragem). A convolução de F com W para produzir D resultará em “falsos picos” em D (devido à estrutura de W), os quais dificultarão a identificação dos verdadeiras picos em D .

³ Ao que parece, não existe uma denominação universalmente aceita para a função $h(t)$. Roberts *et al.* (1987) a chamam de “função lacuna” (*blanking function*), por ser usada para criar uma função $f_h(t) \equiv f(t)h(t) = 0$ fora do intervalo $[t_1, t_N]$. Talvez seja mais conveniente chamá-la de “função janela”. De qualquer forma, não se deve confundir a função $h(t)$ com a “função passo de Heaviside”.

Dados Igualmente Espaçados

Se a amostragem ocorre em $N = 2n$ pontos separados por intervalos de Δ , tal que conhecemos:

$$\{f_r, t_r\} = \{f_r, r\Delta\}, r = -n, \dots, n - 1, \quad (4.44)$$

a teoria da série de Fourier mostra que podemos reproduzir $\{f_r\}$ exatamente de uma série finita de Fourier de N termos,

$$\tilde{f}(t) = \sum_{s=-n}^{n-1} F_s e^{+ \frac{2\pi i s t}{\Delta N}}, -\infty \leq t \leq +\infty, \quad (4.45)$$

onde os *coeficientes de Fourier* exigidos por $\tilde{f}(t_r) = f_f$ são:

$$F_s = \frac{1}{N} \sum_{r=-n}^{n-1} f_r e^{-\frac{2\pi i t r}{N}}, s = -n, \dots, +n - 1, \quad (4.46)$$

e as N freqüências requeridas são:

$$\nu_s = \frac{s}{N\Delta}, s = -n, \dots, +n - 1. \quad (4.47)$$

Para dados e freqüências discretos e igualmente espaçados, o *teorema de Rayleigh* torna-se o *teorema de Parseval*:

$$\frac{1}{N} \sum_{s=-n}^{n-1} |f_r|^2 = \sum_{s=-n}^{n-1} |F_s|^2. \quad (4.48)$$

A contribuição $|F_s|^2$ à potência na freqüência ν_s é a chamada “*intensidade*” nesta freqüência, e o gráfico da intensidade contra o “*índice de freqüência*” s é a “*linha do espectro de Fourier*”,

$$P_s = |F_s|^2, s = -n, \dots, n - 1. \quad (4.49)$$

No caso de dados igualmente espaçados, a relação entre $\{t_r\}$ e f é dado pelo *teorema da amostragem*: “qualquer função cuja TF é zero para $|\nu| \geq \nu_N$ é totalmente especificada pelos valores espaçados em intervalos iguais não excedendo $(\frac{1}{2T})$ ”. Logo, a freqüência mais alta que pode ser descoberta a partir de amostras com intervalos Δ é:

$$\nu_N = \frac{1}{2T}, \quad (4.50)$$

e é a chamada “*freqüência de Nyquist*”. Dessa forma, é possível reconstruir, sobre o domínio contínuo da variável tempo, qualquer função cujo espectro é zero para $|\nu| \geq \nu_N = \frac{1}{2T}$. Entretanto, o conjunto das linhas do espectro de Fourier *não* constituem o espectro de f e sim o espectro de \tilde{f} :

$$FT[\tilde{f}] = \sum_{s=-n}^{n-1} F_s \delta(\nu_s - \nu), -\infty \leq \nu \leq +\infty. \quad (4.51)$$

A menos que f (como \tilde{f}) seja uma função com período igual ao espalhamento das amostras de dados ($N\Delta$), e a menos que f seja realmente limitada em banda, a eq. (4.51) não é seu espectro!

Uma consequência importante de dados igualmente espaçados é que os coeficientes F_s contém não somente a contribuição de ν_s , mas também de $\nu_s \pm \ell 2\nu_N$, onde ℓ é um inteiro. Esta *clonagem* dos picos no espectro (em inglês, “*aliasing*”) ocorre por que os F_s são funções periódicas de ν com período $\frac{1}{\Delta} = 2\nu_N$ e são conjugados simétricos sobre $\pm \ell \nu_N$. A *clonagem* ocorrerá a menos que não exista nenhum sinal em F além da frequência de Nyquist. Na ausência de uma informação *a priori* sobre o espectro de f pode ser difícil saber se esta exigência foi cumprida.

Dados Não-Igualmente Espaçados

Na astronomia, a rotação e revolução da Terra introduzem ciclos diurnos e anuais nas observações (feitas da Terra), criando grandes intervalos grosseiramente igualmente espaçados na seqüência de dados, o que pode gerar uma janela espectral W extremamente complexa. A “tentação” é calcular D com a eq. (4.33) e esperar obter uma razoável aproximação ao espectro F . A prática, entretanto, demonstra que este é um procedimento muito perigoso e enganador, porque a convolução na eq. (4.33) pode introduzir picos espúrios em D .

Esta dificuldade é bem conhecida (Meisel 1978 e 1979; Brigman 1974) e uma série de procedimentos para ajudar a reconhecer os picos espúrios foram desenvolvidos, como é o caso dos algoritmos DCDFFT, CLEAN e CLEANEST, como veremos a seguir.

FFT, DFT e PDFT

Até a década de 70, a aplicação da TF a conjuntos muito grandes de dados era algo muito difícil, pois o tempo de CPU necessário para os cálculos era excessivo para os recursos computacionais disponíveis na época. Foi quando surgiu o algoritmo **FFT** (*Fast Fourier Transform*) que, explorando certas propriedades de dados *igualmente espaçados* reduzia drasticamente o tempo de CPU necessário (Brigman 1974).

Com o avanço tecnológico, computadores mais potentes foram desenvolvidos e a aplicação da transformada de Fourier a conjuntos de dados não-igualmente espaçados se tornou possível. Em astronomia, o algoritmo que popularizou essa técnica foi o **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), desenvolvido por T. J. Deeming (1974). Deeming estudou a aplicação do DFT a dados “patologicamente” espaçados e examinou as propriedades das janelas espectrais. Quando a DFT é aplicada somente a séries de tempo igualmente espaçadas, alguns autores a denominam de **PDFT** (*Pure Discrete Fourier Transform*) (Foster 1996).

b) DCDFFT (Date-Compensated Discrete Fourier Transform)

Esse método, criado por Ferraz-Mello (1981), ajusta através de mínimos-quadrados, uma senóide de quatro parâmetros aos dados não igualmente espaçados, admitindo a possibilidade de que a média dos dados não seja necessariamente igual ao nível zero da senóide. Os

quatro parâmetros são: o ponto-zero, a amplitude a frequência (ou período) e a fase. A senóide pode ser então filtrada (subtraída da curva de luz), e podemos procurar por novas periodicidades na curva residual. O passo de filtragem também remove os “clones” (*aliases*) associados à senóide filtrada.

Variantes foram apresentadas por Delache & Scherrer (1983) e por Duvall & Harvey (1984). O DCDFIT foi analisado em termos de projeções por Foster (1995, 1996a e 1996b). Comentários adicionais sobre sua aplicação podem ser encontrados em Belserene (1986).

c) CLEAN

O algoritmo CLEAN foi (Roberts *et al.* 1987) desenvolvido para remover falsos picos do periodograma. Basicamente, o que o algoritmo faz é deconvoluir o espectro com seu pico mais forte por meio da *função janela*, $W(\omega)$, isto é, ele subtrai a função janela, apropriadamente escalada, do *espectro sujo* (no espaço complexo), $D(\omega)$, gerando um *espectro residual*. Note que, como o *espectro sujo* é um funcional linear, esse procedimento é equivalente a subtrair a função modelo dos dados e aplicar a TF ao resíduo! O processo é então repetido até que o mais forte pico residual esteja abaixo de um certo nível de corte. Finalmente o CLEAN recoloca as frequências removidas no espectro por meio de suas convoluções com o “feixe CLEAN” (*CLEAN beam*), o que produz um espectro contínuo.

A superposição de senóides na curva de luz pode deslocar significativamente os picos no espectro (Kovács 1981), o que pode causar erros na determinação da frequência a ser removida. Por isso, o algoritmo CLEAN remove apenas uma fração do pico em cada interação (a fração removida é chamada “*ganho*”). A remoção interativa das componentes do sinal minimiza o problema dos erros nas estimativas das amplitudes. Contudo, *pequenos erros persistem na determinação das frequências e amplitudes*, como mostram as simulações com séries artificiais (Roberts *et al.* 1987). Além disso, o algoritmo CLEAN é um procedimento matemático ambíguo, e o resultado final depende das escolhas feitas durante a deconvolução (Foster 1996). Outro problema é que o processo de subtração não leva em conta o ruído estatístico de cada componente, que é proporcional a \sqrt{N} , onde N é o número de contagens. Mas ainda assim, o CLEAN é muito útil na identificação de frequências reais em um espectro complexo.

d) CLEANEST

O algoritmo CLEANEST foi introduzido por Grant Foster (Foster 1995), consistindo basicamente numa técnica de regressão usando mínimos-quadrados e serve para remover falsos picos de um espectro de potências. Ele demonstra ser uma técnica efetiva para detecção e estimativa de sinais multiperiodicos e também pode ser útil no estudo da evolução temporal do período e da amplitude. Este método, e o SLICK, permitem que uma solução errada na base de soluções seja descartada durante a execução. Estes métodos também levam em conta a incerteza na frequência das soluções, devido a interrupções nos dados.

e) *Periodogramas*

O “*periodograma clássico*” nada mais é do que o periodograma

$$P_X(\omega) = \frac{1}{N_0} |DFT_X(\omega)|^2, \quad (4.52)$$

obtido com o algoritmo DFT de Deeming (1975). O *periodograma modificado* é uma reformulação para a *função periodograma*, $P_X(\omega)$ introduzida por Scargle (1982):

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2} [C^2(\omega) + S^2(\omega)] \quad (4.53)$$

onde:

$$C(\omega) = A(\omega) \sum X(t_i) \cos(\omega[t_j - \tau]) \quad (4.54)$$

$$S(\omega) = B(\omega) \sum X(t_i) \sin(\omega[t_j - \tau]) \quad (4.55)$$

$$A(\omega) = (\sum \cos^2(\omega[t_j - \tau]))^{-1/2} \quad (4.56)$$

$$B(\omega) = (\sum \sin^2(\omega[t_j - \tau]))^{-1/2} \quad (4.57)$$

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum \sin 2\omega t_i}{\sum \cos 2\omega t_i} \quad (4.58)$$

Esse algoritmo é um pouco mais complicado que o DFT (*discrete Fourier transform*) desenvolvido por Deeming (1975), mas ele possui propriedades estatísticas muito desejáveis que tornam o seu uso preferível.

Observe que quando a frequência-tentativa, ω , não está próxima da frequência-real, ω_0 , presente nos dados, $X(t_i)$ e os termos $\cos(\omega[t_j - \tau])$ e $\sin(\omega[t_j - \tau])$ em (4.54) e (4.55), estão fora de fase e os termos dos somatórios terão sinais randômicos uns com respeito aos outros, tendendo a se cancelarem entre si. Mas quando $\omega \rightarrow \omega_0$, $X(t_i)$ e os termos $\cos(\omega[t_j - \tau])$ e $\sin(\omega[t_j - \tau])$ estão aproximadamente em fase e os termos nos somatórios se somam coerentemente fazendo com que $P_X(\omega)$ apresente um máximo em $\omega \simeq \omega_0$. Dessa forma, o periodograma revela uma periodicidade oculta por estar “*ressonante*” com ela.

Uma interessante análise da significância estatística dos picos detectados pelo periodograma modificado é apresentada por Horne & Baliunas (1986) (veja também, Foster 1996 e Fullerton 1986).

f) *Técnicas de Mínimos-Quadrados*

Nessas técnicas, para cada frequência-tentativa, ω , uma função⁴ do tipo

$$y(t; \omega) = A \sin[\omega(t - t_0)], \quad (4.59)$$

⁴ No DCDFIT, uma função mais geral do tipo $y(t; \omega) = a_0 + a_1 t + A \sin(\omega(t - t_0))$ é usada, mas como em geral os parâmetros a_0 e a_1 são muito pequenos, ela praticamente se reduz à (4.59).

após ser linearizada, é ajustada aos dados $\{t_i, y(t_i)\}$ por meio da técnica de *mínimos-quadrados* (ou χ -quadrado). O ajuste nos fornece os valores de A e t_0 , bem como de seus desvios, σ_A e σ_ϕ . O periodograma consiste em um gráfico de ω contra A e os *máximos* neste gráfico indicam a presença de uma possível frequência de pulsação. Também é possível se plotar ω contra χ^2 . Neste caso, a presença de frequências seria indicada por *mínimos*.

O uso de técnicas de mínimos-quadrados é bem antigo e boas descrições destes métodos podem ser encontradas em vários livros (veja por exemplo, Press *et al.* 1986 e Bloomfield 1976). No Apêndice A a técnica de ajuste de senóides por mínimos quadrados é descrita detalhadamente. Vaníček (1971) estudou as propriedades das técnicas de mínimos-quadrados na análise de séries de tempo frente à presença de ruído e Lomb (1976) analisou as propriedades estatísticas dos métodos de mínimos-quadrados na análise de frequências em dados não igualmente espaçados. Também existem vários artigos relatando o emprego dessas técnicas como é o caso da análise da curva de luz da *12 Lacertae* (Barning 1962).

Essas técnicas são muito úteis na análise de curvas de luz onde mais de um período esteja presente e possivelmente o método mais comumente usado seja o “*MULTIPER*”, um algoritmo desenvolvido por Michael Breger⁵ (Breger 1983).

Técnicas que usam ajustes *não-lineares* por mínimos-quadrados também têm sido usadas para determinar interativamente a frequência e a amplitude das senóides que melhor se ajustam aos dados. Esses métodos requerem boas estimativas iniciais para o período (ou frequência) para evitar convergência a períodos espúrios locais. Um método de mínimos-quadrados não linear foi utilizado, por exemplo, na determinação dos períodos de pulsação de *44 Tauri* (HR 1287), uma variável pulsante do tipo δ *Scuti* (Wizinowich & Perci 1979), e por Stover *et al.* (1978) para a *ZZ Ceti R548*.

* * *

Embora as técnicas de análise de Fourier assumam que o sinal pesquisado tenha uma forma funcional sinusoidal, isto não as limita ao estudo de sinais não-sinusoidais, como é o caso das curvas de luz das Cefeidas. Métodos de *decomposição complexa* empregando mínimos-quadrados (ou outras técnicas de Fourier) permitem a pesquisa de períodos de oscilações não-sinusoidais. Uma excelente discussão sobre o assunto pode ser encontrada em Martinez & Koen (1994).

4.3.3 Considerações Finais

Os métodos descritos acima são apenas os mais usados. Além deles, existem vários outros métodos como a técnica de *análise Bayesiana* de sinais multiperiódicos, a qual é baseada na teoria de probabilidades (Wonnacott *et al.* 1994); variantes do *teste de Rayleigh* (de Jager *et al.* 1989) e muitas outras. Técnicas baseadas no teste de Rayleigh são particularmente úteis na pesquisa de sinais periódicos fracos e com forma funcional desconhecida

⁵ Um outro programa escrito por M. Breger em 1989 e modificado por A. Gapani (em 1991) é o “*SINFIT*”, disponível na rede, no endereço: <http://www.seds.org/pub/astro/gaspani/sinfit.for>.

em dados esparsos. O *método de autocorrelação* ou *método de máxima entropia* como os descritos por Percy *et al.* (1981) e Baliunas *et al.* (1983) são bastante úteis na análise de sinais aproximadamente periódicos, sendo que o método de Baliunas *et al.* é altamente recomendável.

Perez de la Blanca & Garrido (1980) e Heck *et al.* (1985) realizaram testes para comparar o desempenho dos métodos não paramétricos e métodos de Fourier: praticamente nenhuma diferença significativa foi percebida. Concluíram que todos os métodos (disponíveis na época) são praticamente iguais em eficiência computacional com exceção do PDM o qual é mais bem mais lento. Contudo, a equivalência entre as técnicas se anula quando o problema de *detecção* é considerado, especialmente no que diz respeito ao conhecimento de suas propriedades estatísticas.

4.3.4 Estabilidade

Dizemos que um espectro é *estável* quando existe uma concordância entre diferentes segmentos da série de tempo. Resolução e estabilidade são fatores conflitantes pois para termos um espectro com alta estabilidade precisamos fazer uma média de muitos periodogramas, obtidos da segmentação da série de tempo, e isso reduz a resolução do espectro resultante. O tratamento estatístico da estabilidade do espectro é descrito detalhadamente por Bloomfield (1976).

4.4 Identificação de Picos nos Espectros de Fourier

Vamos considerar apenas o caso da transformada discreta de Fourier, DFT. Uma vez obtido o *espectro de Fourier* o próximo passo é analisá-la. Em geral, para que um pico seja considerado estatisticamente significativo, sua “altura” deve estar 4 vezes acima do nível de ruído, isto é, para que a chance de ser devido ao ruído seja menor que 1/1000. Mas só isso não é suficiente: devemos verificar se o pico em questão é verdadeiro ou não.

Um modo de se saber se um determinado pico é real ou não, é gerar uma série de tempo para uma senóide com período, fase e amplitude próxima à da frequência em estudo. Em seguida, calcula-se a DFT desta série de tempo para se obter a chamada “*janela espectral*” (*spectral window*) do pico, que mostrará a localização dos *aliases* associados ao pico. Comparando a janela espectral do pico com o espectro de Fourier dos dados poderemos identificar os *aliases*.

Outro modo é *subtraindo* (ou *filtrando*) senóides da curva de luz e refazer o espectro de Fourier nas vizinhanças do período. Se o pico for real, então ele e seus *aliases* desaparecerão do espectro. Se for falso, ele não desaparecerá e sua altura poderá até aumentar (bem como a de seus *aliases*).

No espectro de Fourier, as amplitudes tanto do sinal quanto do ruído dependem do intervalo de frequências considerado. Por isso, é conveniente dividir o espectro estudado

em várias regiões e usar limites de detecção diferentes para cada região. Naturalmente, a identificação de picos nas regiões de baixa-amplitude é bastante difícil pois a razão sinal-ruído é baixa. Mesmo nas regiões de alta-amplitude, a identificação completa também é difícil porque os picos laterais (*sidelobes*) resultantes das interrupções (*gaps*), mesmo quando poucas, podem mascarar as pulsações de baixa-amplitude que existam nas proximidades. Esses *sidelobes* podem se combinar (sobrepor) uns com os outros, ou com picos reais, e isso exigirá muito mais que uma mera inspeção, ou comparações com janelas espectrais, no processo de identificação (Winget *et al.* 1991).

Algoritmos como o CLEAN e o CLEANest podem ser de grande utilidade na identificação de picos reais, mas o uso desses métodos deve ser cercado de cuidados. O CLEAN, por exemplo, eventualmente pode identificar um falso-pico como sendo verdadeiro. Infelizmente, ele não é perfeito. Mesmo assim, pode ser extremamente útil.

4.5 Análise das Curvas de Luz da PG 1159-035

Na análise das curvas de luz da PG 1159-035, foram empregadas técnicas de *análise de Fourier*. Os periodogramas que apresentaremos a seguir são *espectros de potência* (ou espectros de Fourier) obtidos com o DFT. A Fig. 4.1 mostra os *espectros de potência* (“dirty spectrum”) das curvas de luz da PG 1159-035 obtidas nos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993, obtidas através da transformada discreta de Fourier (DFT). Os picos representam frequências (ou períodos) reais ou falsos. O eixo vertical mostra a potência (*power*) e todos os gráficos estão na mesma escala. Os dados de 1989 e 1993 foram obtidos com o WET.

Todos os picos reais detectados são de períodos entre 300 e 1000 s ($1 - 3 \text{ mHz}$). Os picos que aparecem com frequências próximas de zero estão relacionados com os períodos de interrupção das observações (*gaps*).

Observe a *região de baixas frequências* (frequências menores $\sim 5 \mu\text{Hz}$). Nessa região, a relação sinal-ruído cresce de forma aproximadamente exponencial. Todas as variações nos dados, sejam elas da estrela ou não, em escalas de tempo maiores que a duração típica de cada campanha ($\sim 20\,000 \text{ s}$) aparecerá nesta região. Nesta região também aparecerão quaisquer variações na relação sinal-ruído devido à mudança de um telescópio para outro, embora este efeito seja muito pequeno para ser detectado (Winget *et al.* 1991).

A “clonagem” (*aliasing*) é particularmente notável nas transformadas de Fourier dos dados de 1981 e 1984, onde temos um número pequeno de dados, separados por grandes intervalos de tempo. Note que o periodograma dos dados de 1981 apenas nos informa a existência de pelo menos uma periodicidade em $\sim 0.0019 \text{ Hz}$ ($\sim 500 \text{ s}$), enquanto na TF dos dados de 1984 já podemos detectar a presença de outros períodos de pulsação.

As figuras Fig. 4.2, Fig. 4.3, Fig. 4.4, Fig.4.5 e Fig. 4.6 mostram as transformadas de Fourier das curvas de luz para períodos nos intervalos de 200-300 s, 300-500 s, 500-600 s, 600-700 s e 700-900 s respectivamente.

A identificação de um número significativo de frequências de pulsação além daquelas poucas com alta amplitude, só foi possível para os dados de 1989, onde temos um grande

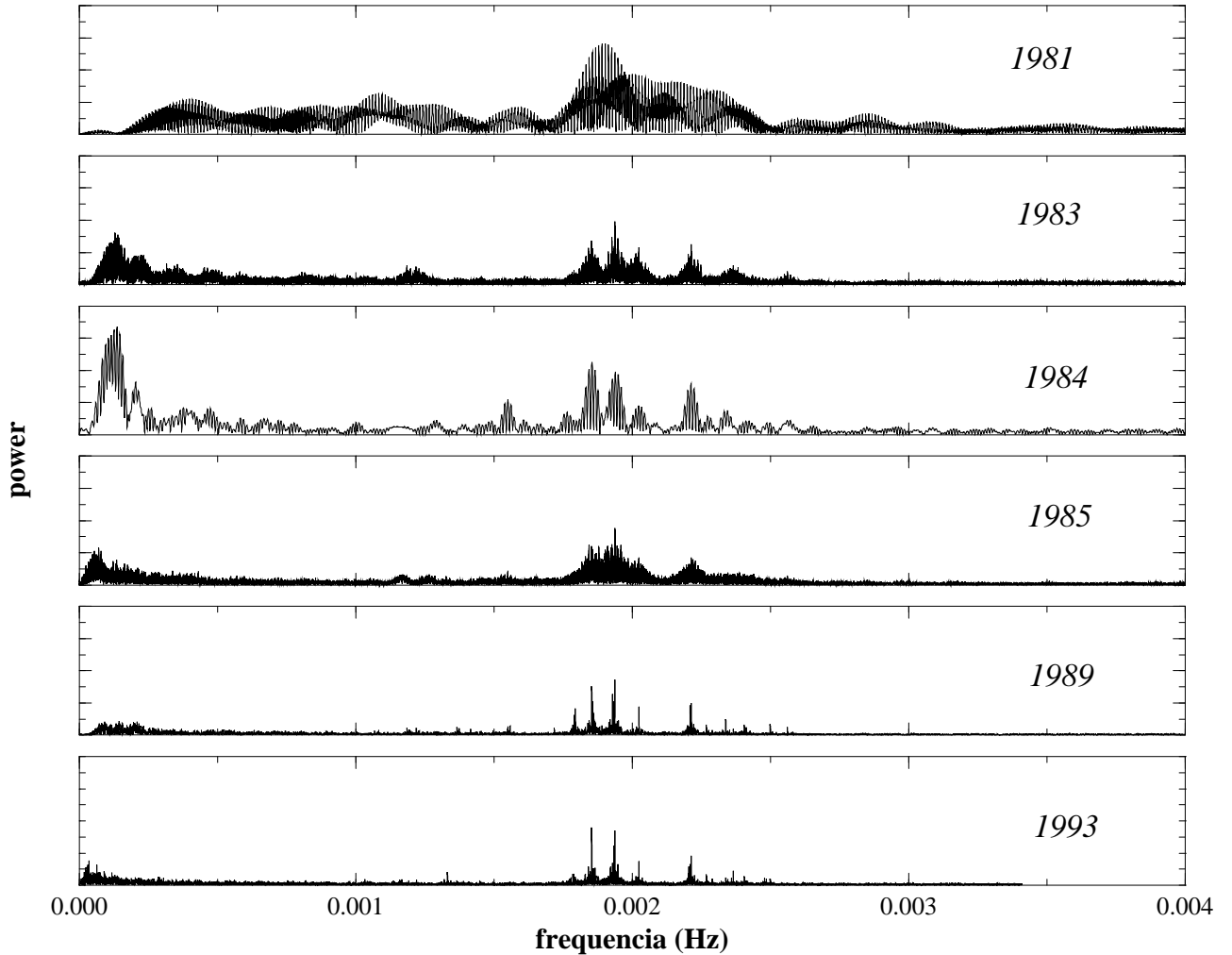


Fig. 4.1: Transformadas discretas de Fourier (*dirty spectra*) das curvas de luz da PG 1159-035.

número de pontos ao longo de ~ 14 dias, e poucas interrupções, obtidos com o WET. O espectro de potências dos dados de 1993 *ainda não foi totalmente analisado* com o propósito de se identificarem frequências ainda não conhecidas. Uma lista completa de todos os picos significativos entre $1 - 3 \text{ mHz}$, detectados no espectro de Fourier dos dados de 1989, é mostrada na Tab. 4.1 (Winget *et al.* 1991). A tabela também inclui picos com amplitudes abaixo dos níveis de detecção e são identificados na tabela pelo símbolo “:”.

A Tab. 4.1 também mostra a identificação dos *modos de pulsação*. Nos casos em que a identificação é incerta, a tabela mostra uma identificação alternativa para ℓ entre parêntesis e indica a incerteza com o símbolo “:” após o valor de m . Nas regiões de frequências mais baixas, pouco acima de 1 mHz , multipletes individuais para $\ell = 2$ se sobrepõem uns aos outros tornando a identificação incerta. Em outras regiões do espectro, modos com $\ell = 1$ sobrepõem modos com $\ell = 2$ e são difíceis de serem resolvidos. A presença de ruído, e picos laterais (*sidelobes*) devido a pulsações com grandes amplitudes, também colaboram com as incertezas na identificação. Apesar de todas essas incertezas a Tab. 4.1 mostra que todos

os picos identificados, são consistentes com modos correspondentes a $\ell = 1$ ou com modos correspondentes a $\ell = 2$. Não foi encontrada nenhuma evidência de que qualquer pulsação corresponda a $\ell = 3$.

Tab. 4.1: Picos no Espectro de Potências dos Dados de 1989.

Frequência (μHz)	Período (s)	Ampl.Frac. $\times 10^{-4}$	ℓ	m	Frequência (μHz)	Período (s)	Ampl.Frac. $\times 10^{-4}$	ℓ	m
1004.77	995.25	4.1	2,(1)	-2:	1749.68	571.53	4.4	(2)	
1001.81	988.33	2.2:	2,(1)	-1:					
1018.10	982.22	2.4:	2,(1)	0:	1786.24	559.84	12.9	1	-1
1026.23	974.44	2.0:	2,(1)	+1:	1790.70	558.44	24.6	1	0
1032.28	968.73	2.6:	2,(1)	+2:	1794.88	557.14	33.0	1	+1
1069.22	935.26	5.4	2,(1)		1854.04	539.36	61.0	1	-1
1083.07	923.30	6.1	2,(1)		1858.20	538.16	41.6	1	0
1178.10	848.82	4.2	2,(1)		1862.58	536.89	27.3	1	+1
1186.43	842.86	9.0	1	-1	1929.32	518.32	51.0	1	-1
1190.45	840.02	3.7:	1	0	1933.55	517.18	42.4	1	0
1194.73	837.01	7.2	1	+1	1937.83	516.04	68.9	1	+1
1200.04	833.31	4.5	2		2016.46	495.92	11.0	1	-1
1219.54	819.98	8.3	1	-1	2020.80	494.85	8.2	1	0
1223.81	817.12	3.1:	1	0	2025.13	493.80	35.6	1	+1
1227.94	814.37	5.1	1	+1					
1230.67	812.57	5.6	2		2124.24	470.76	3.5:	1	-1
1259.52	793.95	4.8	1	-1	2129.62	469.57	3.3:	1	0
1264.31	790.94	2.6:	1	0	2133.15	468.79	4.4:	1	+1
1267.99	788.65	2.9:	1	+1					
1282.91	779.48	4.4	2	-1	2201.27	452.28	12.5	(2),(1)	
1287.58	776.65	4.3	1	-1	2203.13	453.90	11.0	(2),(1)	
1292.38	773.77	4.6	1	0	2205.86	453.34	10.8	(2),(1)	
1296.43	771.35	4.9	1	+1	2210.31	452.43	37.3	(2),(1)	
1328.83	755.38	4.1:	1	-1	2214.28	451.59	40.1	1,(2)	-1:
1327.80	753.12	2.9:	1	0	2218.74	450.71	8.4	1,(2)	0:
1332.55	750.44	2.2:	1	+1	2223.20	449.80	13.8	1,(2)	+1:
1359.62	735.50	4.8	2,(1)		2269.14	440.70	12.7	2	-2:
1361.95	734.24	4.3	2,(1)		2276.69	439.23	6.2:	2	-1:
1367.11	731.47	10.0	1	-1:	2283.10	438.00	2.8	2	0:
1370.80	729.50	5.6	1	0:	2290.45	436.60	6.1	2	+1:
1375.43	727.05	8.1	1	+1:					
1407.87	710.29	3.3:	1	-1	2321.04	430.84	3.4:	1	-1
1412.59	707.92	2.5:	1	0	2325.35	430.04	4.0	1	0
1416.59	705.92	7.4	1	+1	2330.24	429.14	5.1:	1	+1
1439.10	694.88	4.2	2		2338.89	427.55	19.8	2	-2
1449.89	689.71	4.3	1	-1	2345.78	426.30	5.2	2	-1
1454.11	687.71	4.8	1	0	2352.76	425.03	6.6	2	0
1458.12	685.81	3.3	1	+1	2359.68	423.79	3.2	2	+1
1496.89	668.05	5.8	1	-1	2366.76	422.52	8.0	2	+2
1501.01	666.22	2.8:	1	0					
1505.24	664.34	3.8:	1	+1	2406.18	415.60	13.1	2	-2:
1533.95	651.91	4.1	2		2413.12	414.40	9.1	2	-1:
1539.24	649.67	4.1	2		2419.54	413.30	3.0:	2	0:
1547.47	646.22	4.0	2		2426.51	412.11	5.5	2	+1:
1550.39	645.00	10.7	1	-1					
1554.23	643.41	5.5	1	0	2499.61	400.96	13.4	2,(1)	
1558.87	641.49	11.8	1	+1	2503.29	399.47	3.4	2,(1)	
1572.53	635.92	5.0	2		2506.97	398.89	4.4	2,(1)	
1601.64	624.36	2.6:	1	-1	2508.14	398.70	4.6	2,(1)	
1606.17	622.60	3.0:	1	0	2521.97	396.52	3.2	2,(1)	
1609.07	621.48	2.1:	1	+1					
1653.66	604.72	2.5:	1	-1	2551.23	391.97	3.1	2,(1)	
1658.25	603.04	1.7:	1	0	2562.11	390.30	10.4	2	-2
1662.66	601.44	2.8:	1	+1	2568.93	389.27	2.1	2	-1
1716.37	582.62	3.3:	1	-1:	2576.83	388.07	1.8	2	0
1720.30	581.29	1.9:	1,(2)	0:	2589.72	386.14	2.6	2	+2
1724.24	579.97	1.5:	1,(2)	+1:					
1719.08	581.71	9.5	2,(1)	-2:	2750.92	363.51	2.4	2	-2
1726.59	579.18	3.0	2	-1:	2757.34	362.67	1.3	2	-1
1732.59	577.17	3.0	2	0:	2764.28	361.76	4.6	2	0
1738.74	575.13	3.8	2	+1:	2771.78	360.78	0.9	2	+1
1747.65	572.20	4.4	2	+2:					
					2834.96	352.74	2.4	2	-2
					2842.14	351.85	2.1	2	-1
					2848.89	351.01	1.3	2	0
					2856.25	350.11	1.6	2	+1
					2863.00	349.28	0.9	2	+2
					2933.28	340.91	2.4	2	-2
					2940.26	340.11	1.7	2	-1
					2947.80	339.24	1.2	2	0
					2953.88	338.54	1.5	2	+1
					2961.15	337.71	1.7	2	+2

DFT - Periodogramas
PG 1159-035

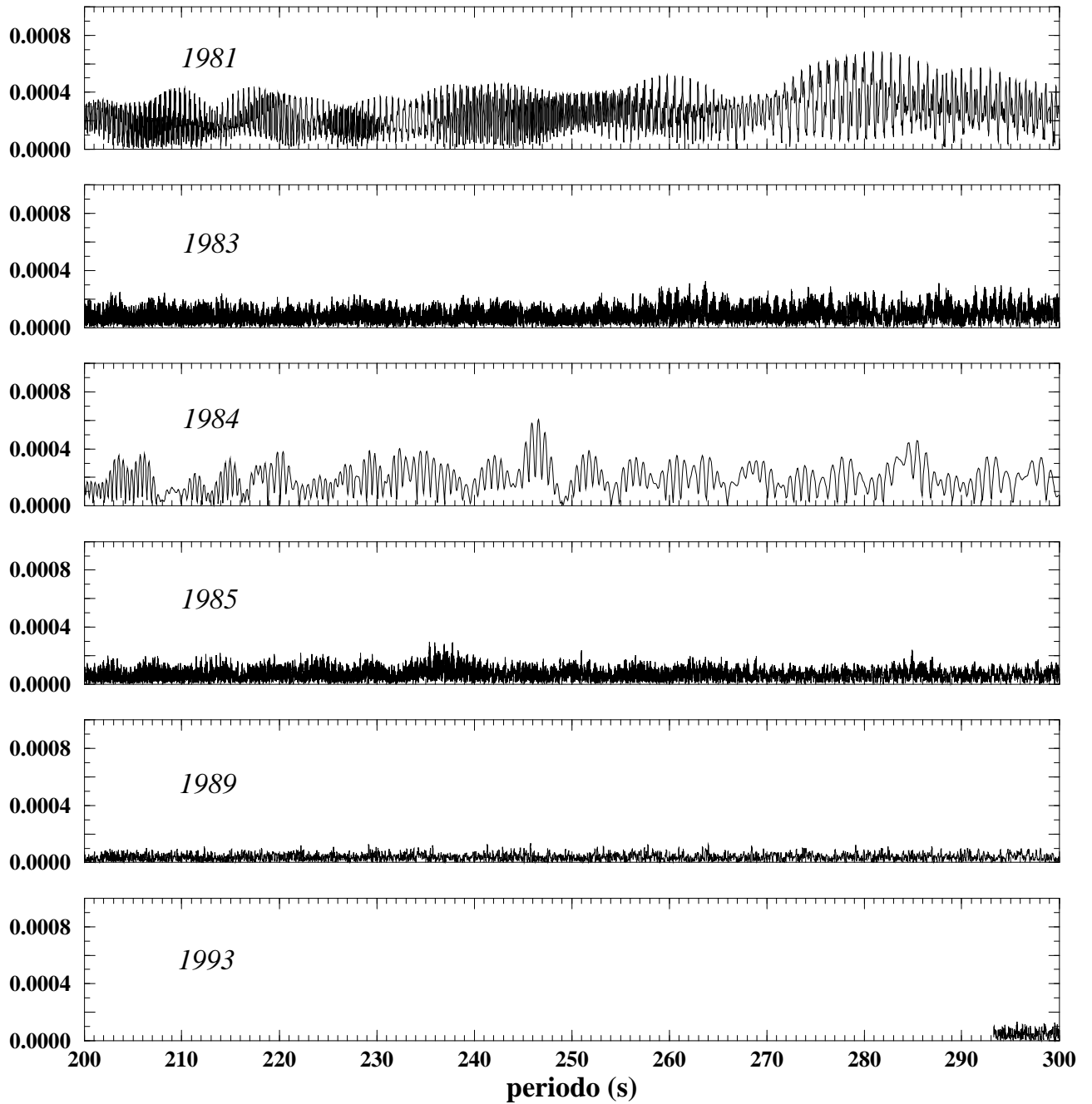


Fig. 4.2: Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a *potência* ("power") e no eixo horizontal os *períodos* (em segundos).

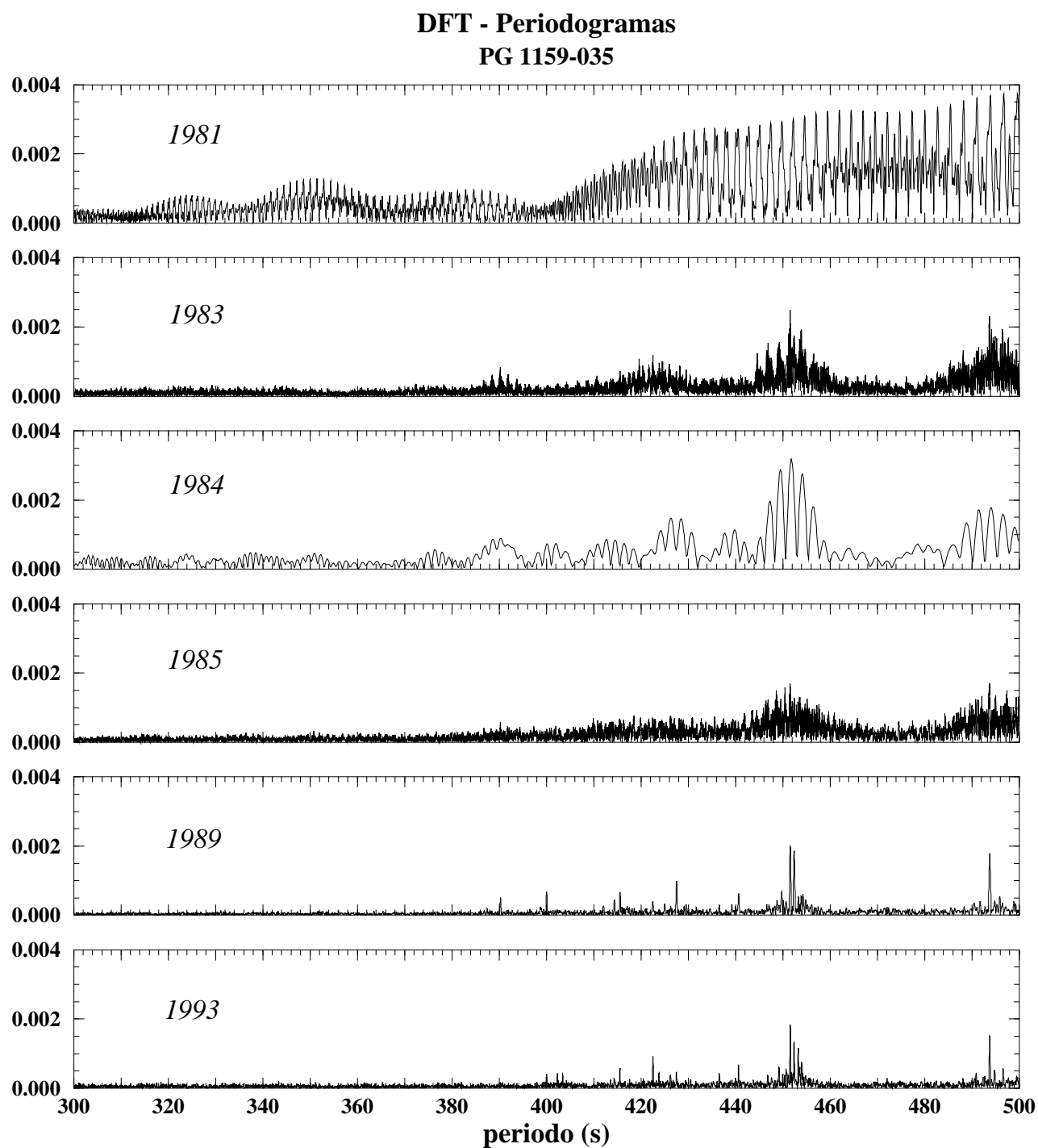


Fig. 4.3: Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a *potência* (“power”) e no eixo horizontal os *períodos* (em segundos).

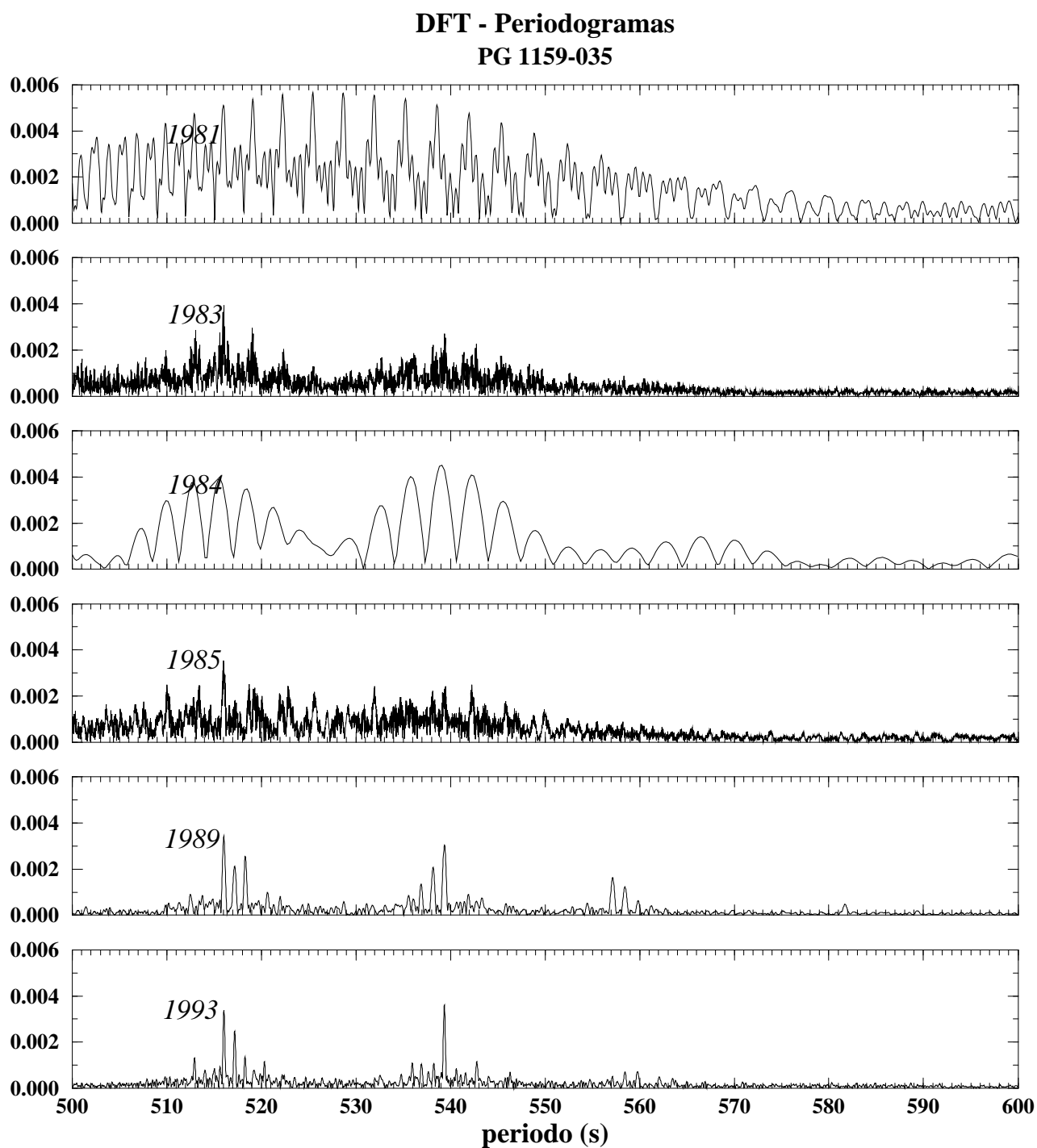


Fig. 4.4: Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a *potência* (“power”) e no eixo horizontal os *períodos* (em segundos).

DFT - Periodogramas
PG 1159-035

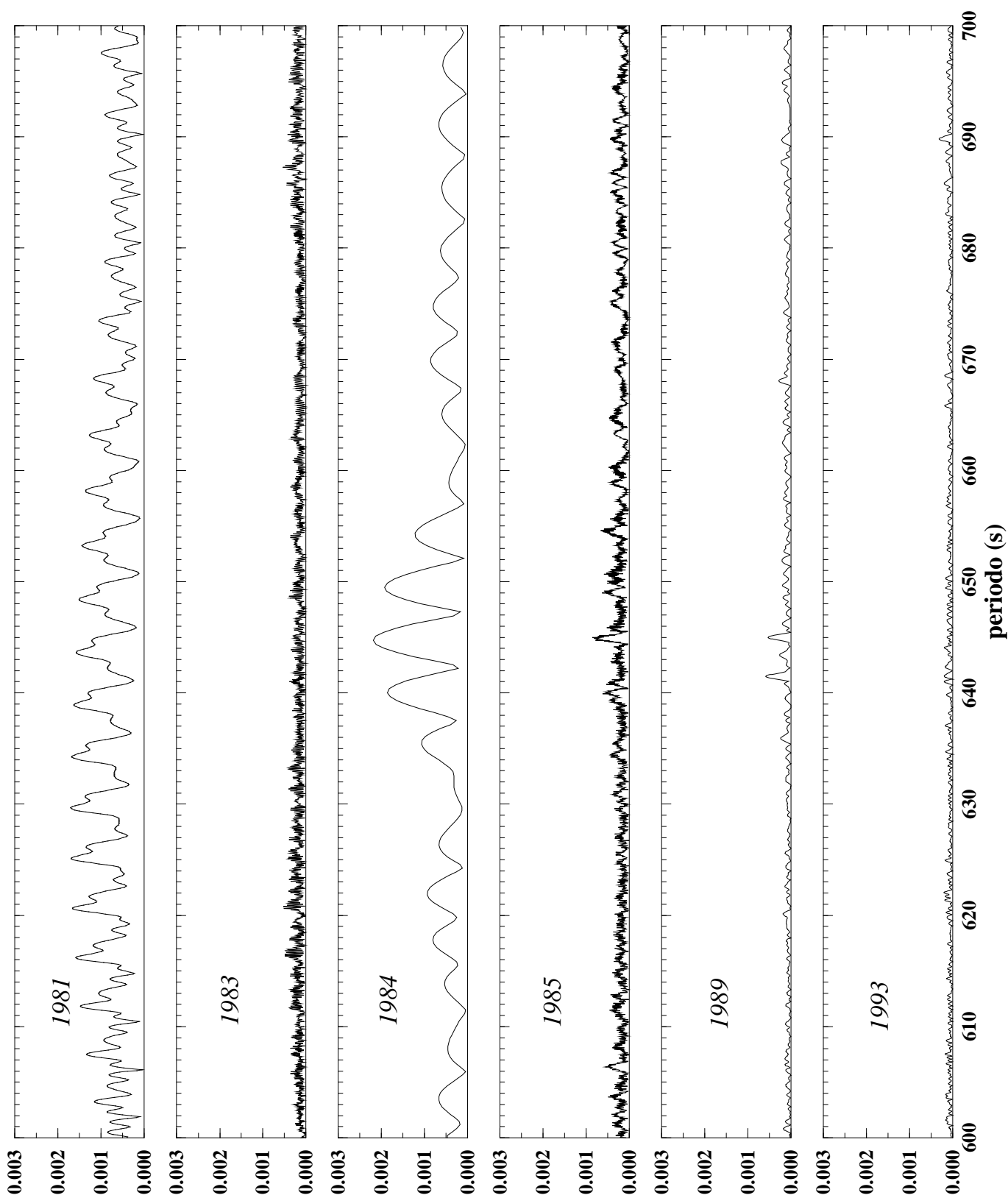


Fig. 4.5: Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a *potência* (“power”) e no eixo horizontal os *períodos* (em segundos).

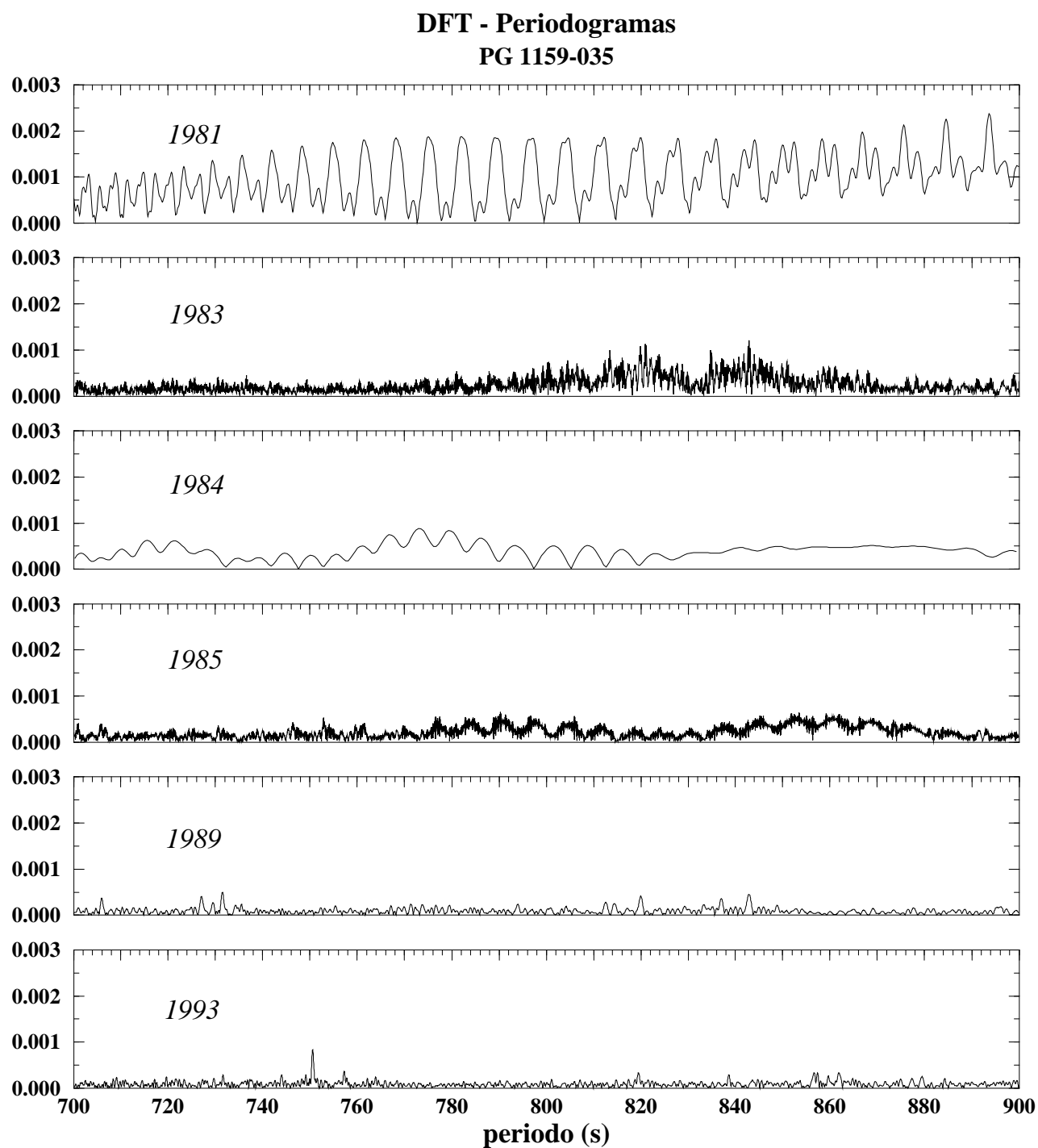


Fig. 4.6: Parte do periodograma da PG 1159-035 para as curvas de luz dos anos de 1981, 1983, 1984, 1985, 1989 e 1993. No eixo vertical temos a *potência* ("power") e no eixo horizontal os *períodos* (em segundos).

Capítulo 5

MÉTODOS DE MEDIDA DE DP/DT

Na parte introdutória vimos que os períodos de pulsação de uma estrela pulsante podem sofrer variações ao longo do tempo em decorrência da dinâmica interna da própria estrela. Apesar dessas variações ocorrerem em largas escalas de tempo, ainda assim são mensuráveis. No presente capítulo, descreveremos os métodos que podem ser utilizados na estimativa das variações temporais dos períodos de pulsação.

5.1 Métodos de Medida de dP/dt .

Descreveremos três métodos para estimativa da variação do período ao longo do tempo, \dot{P} :

- método direto;
- método do diagrama ($O - C$);
- método do ajuste não-linear de senóides.

5.1.1 Método Direto.

Este é o mais direto de todos os métodos: consiste simplesmente em *ajustar uma reta* (ou qualquer outro tipo de curva) à um conjunto de pontos, $\{t_i, P(t_i)\}$ com $i = 1, N$ e $N \geq 2$, onde $P(t_i)$ é o valor medido para o período no instante t_i . O método exige pelo menos duas medidas sucessivas para o valor do período de pulsação, $P_1 = P(t_1)$ e $P_2 = P(t_2)$, separadas por um intervalo de tempo, $\Delta T = t_2 - t_1$, suficientemente grande. As medidas devem ter precisão suficiente pra que a variação seja detectável. Se o período estiver variando lentamente, a taxa de variação temporal do período, $\frac{dP}{dt}$, será dada por:

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t_0} \simeq \frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}, \quad (5.1)$$

ou seja,

$$P(t) \approx P_0 + \frac{\Delta P}{\Delta T}(t - t_0), \quad (5.2)$$

onde $P_0 = P(t_0)$.

O “*quão grande*” deve ser o intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas depende, essencialmente, da precisão com que conseguimos medir os períodos de pulsação e da precisão

que desejamos ter para $\frac{dP}{dt}$. No caso de apenas duas medidas, se σ_{P_1} e σ_{P_2} são os desvios-padrões de P_1 e P_2 , respectivamente, então, para que a variação observada nas estimativas do período de pulsação, ΔP , possa ser considerada *estatisticamente significativa* ela deve satisfazer algum critério de significância estatística. Por exemplo, se considerarmos como estatisticamente significativo uma medida cuja probabilidade de ser real seja de 99.9%, então, nosso critério de significância será:

$$\Delta P > 3.48 (\sigma_{P_1} + \sigma_{P_2}). \quad (5.3)$$

Se o critério acima for satisfeito, podemos considerar o intervalo de tempo ΔT como sendo suficientemente grande. Naturalmente, quanto maior o número de pontos que dispomos para o ajuste, maior será a precisão da estimativa, já que

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i}{N - 1}. \quad (5.4)$$

5.1.2 Método do Diagrama (O-C).

Uma técnica bastante poderosa para calcular $\frac{dP}{dt}$, mesmo para valores extremamente pequenos de \dot{P} , é o *método do diagrama (O-C)*. Esta técnica foi utilizada¹ por Kepler *et al.* (1982) para uma primeira estimativa da taxa de variação temporal do período de maior amplitude da estrela anã branca pulsante $G117 - B15A$. Desde então, a técnica vem sendo amplamente empregada e já constitui um “método clássico”. O método do diagrama (O-C) utiliza o conceito de *fase angular generalizada*, como veremos a seguir (Kepler 1995).

Assumimos que *intensidade* I da luz varia da forma:

$$I = A \cos \theta, \quad (5.5)$$

usando a definição

$$\theta(t) \equiv \int_{t_0}^t \omega(t') dt', \quad (5.6)$$

onde $\theta(t)$ é a *fase angular generalizada*, e $\omega(t)$ é a *freqüência angular* de pulsação, relacionada com o *período* P por:

$$P = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.7)$$

Se ω variar lentamente em t , podemos expandí-la em série de Taylor até primeira ordem:

$$\omega(t) \simeq \omega_a + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} (t - t_a), \quad (5.8)$$

¹ Aplicações anteriores do método do diagrama (O-C) podem ser encontradas em Patterson & Steiner (1982); Warner, O’Donoghue & Fairall 1981; Radhakrishnan & Manchester (1969); e Horowitz *et al.* (1971).

onde $\omega_a = \omega(t_a)$. Podemos agora calcular $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \left[\omega_a + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} (t - t_a) \right] dt \quad (5.9)$$

$$= \omega_a(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} t dt - t_a \int_{t_0}^t \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} dt \quad (5.10)$$

$$= \omega_0(t - t_0) + \left. \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} (t^2 - t_0^2) + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_a} (t_0 - t)t_1. \quad (5.11)$$

Fazendo $t_a \equiv t_0$ (e $\omega_a = \omega_0$):

$$\theta(t) = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \dot{\omega}(t^2 - t_0^2). \quad (5.12)$$

A curva de luz atingirá um *máximo* no instante T_{max} , quando:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{T_{max}} = 0, \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow \theta \Big|_{T_{max}} = 2\pi E, \quad (5.14)$$

onde E é um *número inteiro de ciclos*. Portanto:

$$\theta \Big|_{T_{max}} = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \dot{\omega}(t^2 - t_0^2) = 2\pi E. \quad (5.15)$$

Como $\omega_0 = 2\pi/P_0$ e $\dot{\omega} = -(\frac{2\pi}{P_0^2}) \dot{P}$,

$$\frac{2\pi}{P_0}(T_{max} - t_0) - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{P_0^2} \dot{P}(T_{max}^2 - t_0^2) = 2\pi E. \quad (5.16)$$

Tirando o índice zero do período,

$$T_{max} = t_0 + P E + \frac{1}{2} \frac{\dot{P}}{P}(T_{max}^2 - t_0^2). \quad (5.17)$$

Para manter a derivação somente em primeira ordem em \dot{P} , introduzimos $T_{max} = t_0 + P E$ no lado direito da equação acima:

$$T_{max} = t_0 + P E + \frac{1}{2} \frac{\dot{P}}{P}(P^2 E^2 + 2t_0 P E). \quad (5.18)$$

Escolhendo t_0 tal que $2 t_0 \ll P E$, teremos:

$$T_{max} = t_0 + P \cdot E + \frac{1}{2} P \cdot \dot{P} \cdot E^2. \quad (5.19)$$

A eq.(5.19) é a *equação básica* do método do diagrama (O-C), em que calculamos a diferença em tempo de máximo observado e o tempo de máximo calculado. Se conhecêssemos

os valores *exatos* de t_0 , P e os números de ciclos $\{E_i\}$ para um conjunto de tempos de máximo $\{T_{max_i}\}$, poderíamos fazer:

$$(O - C)_i = (O_i - C_i) = \frac{1}{2}P\dot{P}E_i^2, \quad (5.20)$$

onde

$$O_i = T_{max_i} = t_0 + P.E_i + \frac{1}{2}P\dot{P}E_i^2, \quad (5.21)$$

e

$$C_i = t_0 + P.E_i. \quad (5.22)$$

A estimativa de $\{E_i\}$ é o ponto crítico do método porque depende *sensivelmente* de P e \dot{P} . Pode-se calcular E_i a partir da eq.(5.21), onde E_i é sua raiz *positiva*. Se os valores de \dot{P} são relativamente pequenos, então

$$E_i \simeq \text{int}\left\{\frac{(T_{max_i} - t_0)}{P}\right\}, \quad (5.23)$$

onde $\text{int}\{x\}$ é uma função que arredonda o número real x para o inteiro mais próximo. O valor real de E_i será n_i unidades acima ou abaixo do valor estimado por (5.23). Assim, se definirmos $\{E_i\}$ usando a eq.(5.23), teremos que corrigir a eq.(5.20):

$$(O - C)_i = \frac{1}{2}P\dot{P}E_i^2 + n_iP, \quad (5.24)$$

onde $(O - C)_i$ é calculado por:

$$(O - C)_i = T_{max_i} - (t_0 + PE_i), \quad (5.25)$$

e n_i é um número inteiro, positivo ou negativo ($n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e correspondem a um ciclo completo de diferença. Podemos assim, construir um diagrama de $(O - C)$ contra E . Esse é o chamado *diagrama (O-C)* e é ele que dá nome ao método. O próximo passo é ajustar uma parábola do tipo:

$$(O - C) = a_0 + a_1E + a_2E^2, \quad (5.26)$$

levando-se em conta que para cada valor de E_i teremos $(2m + 1)$ valores de $(O - C)_i$ no diagrama e, portanto, o ajuste deve ser feito para todas as combinações possíveis de pontos. Para cada ajuste é calculado o χ^2 e o ajuste com *menor* valor de χ^2 é considerado a solução do problema. Os parâmetros a_0 , a_1 e a_2 (do melhor ajuste) em (5.26) são usados para corrigir os valores de t_0 e P e para calcular o valor de \dot{P} , conforme segue:

se definirmos: $O \equiv T_{max}^{obs} = T_{max}$, e $C \equiv T_0^{obs} + P^{obs}E$, teremos:

$$(O - C) = (t_0 - T_{max}^{obs}) + (P - P^{obs})E + \frac{1}{2}P\dot{P}E^2, \text{ ou} \quad (5.27)$$

$$(O - C) = \Delta T_0 + \Delta P + \frac{1}{2}P\dot{P}E^2, \quad (5.28)$$

onde $\Delta E = (t_0 - T_{max}^{obs})$, e $\Delta P = (P - P^{obs})$. Fazendo,

$$a_0 = t_0^{real} - t_0 = \Delta T_0 \Rightarrow t_0^{real} = t_0 + a_0; \quad (5.29)$$

$$a_1 = P^{real} - P = \Delta P \Rightarrow P^{real} = P + a_1 \text{ e} \quad (5.30)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}P^{real}\dot{P} \Rightarrow \dot{P} = \frac{2a_2}{P^{real}}. \quad (5.31)$$

O Algoritmo de O'Donoghue.

O método do diagrama (O-C) deu origem a algumas variantes. Uma delas é o algoritmo proposto por D.O'Donoghue (O'Donoghue 1994), que foi usado no estudo da variação do período de rotação de $\sim 33s$ da anã branca em *AE Aquarii*, da ordem de $5.63 \times 10^{-14} s/s$ (de Jager, Meintjes, O'Donoghue & Robinson, 1994).

Este algoritmo utiliza como dados, os *tempos de máximo*, $\{T_{max_i}\}$, com $i = 1, N$, que podem ser calculados usando-se uma das técnicas descritas no capítulo anterior. O que ele faz, é encontrar os valores de P e \dot{P} , contidos nos intervalos I_P e $I_{\dot{P}}$, respectivamente, que melhor ajustem $\{T_{max}\}$ à eq.(5.19). Os valores de T_{max_i} dependem do período, $T_{max} = T_{max}(P)$, mas se $T_{max}(P)$ não variar significativamente ao longo do intervalo I_P , podemos considerá-lo como sendo praticamente constante para $P \in I_P$: **o algoritmo de O'Donoghue assume que $T_{max}(P) \simeq \text{cte}$ para $P \in I_P$** . Se essa hipótese não for satisfeita, não poderemos utilizá-lo diretamente.

Descrição do algoritmo:

1) Criar uma grade de P contra $\dot{P} : \{P_j, \dot{P}_k\}$;

Para cada ponto:

2) Calcular $\{T_{max_i}, (O - C)_i\}$, para $i = 1, N$, usando a equação:

$$(O - C)_i = P_0 \text{frac} \left[\frac{1}{P_j} (O_i - T_{max_j}) - \frac{1}{2} \frac{\dot{P}_k}{P_j^2} (O_i - T_{max_j})^2 \right]. \quad (5.32)$$

3) Ajustar uma parábola do tipo (5.26), calculando os valores de a_0, a_1 e a_2 ;

4) Fazer as correções para T_{max_j}, P_j e \dot{P}_k ;

5) Calcular o χ^2 para o ajuste;

Repetir isso para todos os pontos da grade:

6) Identificar o ajuste com *menor* χ^2 : esta é a melhor solução.

Este método permite plotar a variância, χ^2 , contra (P, \dot{P}) em um gráfico tri-dimensional.

O Algoritmo de O'Donoghue Modificado.

Quando os tempos de máximos variam de forma considerável ao longo do intervalo I_P , o algoritmo de O'Donoghue precisa sofrer algumas alterações. Para cada ponto (P_j, \dot{P}_k) da grade precisaremos gerar um novo conjunto $\{T_{max_i}\}_{jk}$, onde:

$$T_{max_i} = T_{max_i}(P_{ijk}), \quad (5.33)$$

com

$$P_{ijk} \simeq T_{max_0} + 2\dot{P}_k [T_{max_i}(P_j) - T_{max_0}(P_j)]. \quad (5.34)$$

Um *detalhe importante* é a escolha adequada dos intervalos que serão usados entre dois valores sucessivos de P ou de \dot{P} na grade. Diferenciando a eq.(5.19).

$$dT_{max} = \frac{\partial T_{max}}{\partial T_0} dT_0 + \frac{\partial T_{max}}{\partial P} dP + \frac{\partial T_{max}}{\partial \dot{P}} d\dot{P}, \quad (5.35)$$

$$= dT_0 + (E + \frac{1}{2}\dot{P}E^2) dP + \frac{1}{2}PE^2 d\dot{P}, \quad (5.36)$$

$$= dT_0 + E dP + \frac{1}{2}(\dot{P} dP + P d\dot{P})E^2. \quad (5.37)$$

Se $\dot{P}dP \ll Pd\dot{P}$, podemos escrever

$$\delta T_{max} = \delta T_0 + E \cdot \delta P + \frac{1}{2}P \cdot E^2 \cdot \delta \dot{P}, \quad (5.38)$$

onde agora usamos o símbolo “ δ ” para indicar o incremento.

Se σ_ϕ é o menor desvio-padrão que se obtém para as estimativas das fases, então, para que os erros δT_{max} sejam da ordem de σ_ϕ , ou menores,

$$\delta T_0 + E \cdot \delta P + \frac{1}{2}P \cdot E^2 \cdot \delta \dot{P} \leq \sigma_\phi. \quad (5.39)$$

Em geral, σ_ϕ e δT_0 são da ordem de segundos. Os intervalos δP e $\delta \dot{P}$ serão adequados se satisfizerem (5.39).

O Fator 2.

Uma *conseqüência importante* do modo como definimos $\dot{P}_{(O-C)}$ no método do diagrama (O-C) é que ele difere da definição de dP/dt_{MD} usada no método direto por um **fator 2**:

$$\frac{dP}{dt}_{MD} = 2\dot{P}_{(O-C)}. \quad (5.40)$$

Para demonstrar (5.40), seja

$$y(t') = A \sin\{(\omega_0 + \dot{\omega}_0(t' - t_0))(t' - t_{max}) + \frac{\pi}{2}\} \quad (5.41)$$

a função senoidal considerada. Os máximos de $y(t')$ ocorrem quando:

$$(\omega_0 + \dot{\omega}_0(t' - t_0))(t' - t_{max}) = E2\pi, \quad (5.42)$$

onde E é um número inteiro. Fazendo $t_0 = t_{max}$ e $t = t' - t_{max}$, podemos reescrever:

$$\omega_0 t + \dot{\omega}_0 t^2 = 2\pi E, \quad (5.43)$$

Introduzindo as definições

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P_0}, \quad (5.44)$$

e

$$\dot{\omega}_0 = -\frac{2\pi}{P_0^2}\dot{P}_0, \quad (5.45)$$

a eq.(5.43) fica:

$$\frac{2\pi}{P_0}t - \frac{2\pi}{P_0^2}\dot{P}_0t^2 = 2\pi E, \quad (5.46)$$

$$E = -\frac{\dot{P}}{P_0^2}t^2 + \frac{1}{P_0}t. \quad (5.47)$$

Usando a definição $P \equiv dt/dE$,

$$\frac{1}{P} = \frac{dE}{dt} = -2\frac{\dot{P}_0}{P_0^2}t + \frac{1}{P_0} \quad (5.48)$$

$$P = P_0(1 - 2\frac{\dot{P}_0}{P_0}t)^{-1}. \quad (5.49)$$

Expandindo o termo entre parêntesis até primeira ordem, teremos:

$$P = P_0(1 + 2\frac{\dot{P}_0}{P_0}t), \quad (5.50)$$

$$P = P_0 + 2\dot{P}_0t \quad (5.51)$$

e, portanto:

$$\frac{dP}{dt}_{MD} = 2\dot{P}_{(O-C)}. \quad (5.52)$$

5.1.3 Método do Ajuste Não-Linear de Senóides.

Este método ajusta uma senóide do tipo:

$$y(t; P, \dot{P}) = A \sin(\omega(t)t + \phi), \quad (5.53)$$

onde

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}_0 t, \quad (5.54)$$

ϕ é a fase e A é a amplitude. Constrói-se uma grade de P contra \dot{P} e, para cada ponto (P_j, \dot{P}_k) , ajustamos a eq.(5.53) à série de tempo, calculando o χ^2 para o ajuste. Os valores de (P_j, \dot{P}_k) que gerarem o melhor ajuste (menor χ^2), são adotados como solução. Esse método depende muito dos valores iniciais e, portanto, não varre as possíveis soluções. Em geral, o método de ajuste não-linear resulta em desvios-padrões muito menores que os do método (O-C), mas não bem compreendidos. Veja Kepler (1994) para uma discussão sobre a relação entre $\dot{\omega}$ e \dot{P} . Veja também Stover *et al.* (1980) e Tomaney (1987).

5.2 Qual Método Usar?

Cada método possui vantagens e desvantagens o que torna sua aplicação adequada para certos casos e inadequada para outros.

O método direto é o mais simples de todos. Ele nos fornece uma *solução única* e sua precisão depende da precisão com que conseguimos medir P e do intervalo entre as medidas. Por isso, ele é mais adequado para estrelas cujos períodos variam mais rapidamente, como é o caso da PG 1159-035. Para estrelas com períodos variando mais lentamente ($|\dot{P}|$ menores), o tempo necessário entre as medidas pode ser tão grande que torne o método inviável. Mesmo assim, ele é útil para definir limites para \dot{P} .

O método do diagrama (O-C) é um método extremamente sensível que permite medir, com excelente precisão, valores muito pequenos de $|\dot{P}|$, que não poderiam ser medidos com o método direto. O grande problema é que ele depende de estimativas confiáveis para os tempos de máximo (fases) e seus respectivos erros e, para algumas estrelas, isso nem sempre pode ser garantido. Em estrelas multiperíodicas, a presença de frequências de pulsação próximas à frequência estudada pode afetar sensivelmente as estimativas de T_{max} . Além disso, os valores calculados para o desvio-padrão da fase nem sempre são realistas: é comum que eles subestimem os valores reais, como será visto em seguida e tudo isso pode comprometer seriamente os cálculos.

O método de ajuste não-linear depende muito dos valores iniciais e, portanto, não varre todas as possíveis soluções. Em geral, a aplicação deste método resulta em desvios-padrões muito menores que os do método (O-C), mas não são bem compreendidos.

5.3 A Questão das Precisas das Estimativas

Diante do que foi exposto, uma coisa é certa: *é importante conhecermos as propriedades estatísticas do método que estamos usando, ou seja, saber “o quão precisas” são suas estimativas.* É sobre isso que discutiremos na presente seção.

5.3.1 A Precisão das Estimativas de Amplitude e Fase.

No ajuste linear de senóides, uma senóide do tipo:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (5.55)$$

é linearizada e em seguida ajustada à série de tempo através da técnica de χ^2 . A diagonal da *matriz covariante* do sistema das equações linearizadas, nos dá as *varianças* para os parâmetros livres do sistema e, a partir deles, podemos calcular os valores de σ_A e σ_ϕ . Esses valores, porém, **subestimam** (em muito!) os valores reais, como será demonstrado empiricamente mais adiante.

Bloomfield (1976) reescreveu a eq.(5.55) na forma:

$$y(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + a_t, \quad (5.56)$$

onde $a_1 = A \cos \phi$, $a_2 = A \sin \phi$ e a_t é uma incerteza randômica, simulando erros. Para as estimativas \tilde{a}_1 e \tilde{a}_2 de (5.56), obteve:

$$\text{var}(\tilde{a}_1) \simeq \frac{2\sigma}{N} \frac{a_1^2 + 4a_2^2}{R^2}, \quad (5.57)$$

$$\text{var}(\tilde{a}_2) \simeq \frac{2\sigma}{N} \frac{4a_1^2 + a_2^2}{R^2}, \quad (5.58)$$

onde R^2 vem de

$$\langle a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t \rangle^2 = \frac{R^2}{2}, \text{ e} \quad (5.59)$$

$$\sigma = \langle a_t \rangle^2. \quad (5.60)$$

A partir das equações (A.1) e (A.2) podemos calcular $\sigma_{\tilde{A}}$ e $\sigma_{\tilde{\phi}}$. Entretanto, Pisarenko (1972) demonstrou que quando uma série contém duas frequências muito próximas essas expressões *podem não ser válidas*. Mesmo para frequências relativamente distantes, os resultados do estudo de Pisarenko sugerem que precisamos ter *um certo cuidado* no cálculo dos desvios-padrões.

Mais recentemente, Foster (1996) derivou estatísticas exatas para a DFT, para o periodograma modificado de Lomb-Scargle e para a DCDF, utilizando projeções. Contudo, os métodos de Fourier possuem uma complicação extra: eles não são meramente projeções mas sim, *projeções paramétricas*. Como conseqüência, a estatística padrão dos métodos de análise de Fourier é incompleta. Nessas condições, o resultado obtido para a variança da semi-amplitude de uma componente senoidal A foi:

$$\text{var}(A) \simeq \frac{2\sigma}{N}. \quad (5.61)$$

5.3.2 A Precisão da Estimativa de Frequência.

A precisão da determinação da frequência supera em muito a precisão com que se consegue determinar outros parâmetros físicos (Kovács, 1981b). A despeito desta vantagem, tanto os métodos observacionais quanto os teóricos necessitam de alguns refinamentos. A questão que temos em mente é: **com que precisão podemos medir as frequências?**

Este assunto foi estudado pela primeira vez por Whittle (1952) e mais tarde por Walker (1971). O principal resultado para o valor estimado $\tilde{\omega}$ na eq.(5.56) foi:

$$\text{var}(\tilde{\omega}) = \frac{24\sigma}{N^3(a_1^2 + a_2^2)} + \text{termos menores}, \quad (5.62)$$

que também pode ser reescrita da forma (Bloomfield 1976):

$$\text{var}(\tilde{\omega}) \simeq \frac{12}{N^3 \text{snr}}, \quad (5.63)$$

onde snr é a *relação-sinal-ruído*, dada por:

$$snr = \frac{R^2/2}{\sigma}. \quad (5.64)$$

Loumos e Deeming (1978) chamaram a atenção para as ambiguidades que aparecem na determinação da frequência, quando se usa métodos de Fourier para analisar dados que contenham componentes senoidais com frequências muito próximas.

Um estudo mais completo com base em um tratamento matemático mais rigoroso foi realizado por Kovács (1981a). Ele concluiu que quando existem duas componentes senoidais com frequências ω_1 e ω_2 muito próximas, a forma que o espectro de frequências adquire resulta da *interferência* de três funções do tipo *sinc* centradas em ω_1 , $\sim (\omega_1 + \omega_2)/2$ e ω_2 e que o grau de influência da interação na forma do espectro é fortemente afetada pela diferença de fases, $\phi_1 - \phi_2$. Também ficou demonstrado que o erro máximo na determinação da frequência depende da relação entre as amplitudes das duas componentes A_2/A_1 e que, ao todo, são cinco parâmetros que determinam a forma do espectro: A_2/A_1 , ϕ_1 , ϕ_2 , $\omega_1 T$ e $\omega_2 T$.

Kovács (1981a) também realizou simulações aplicando o método DFT (Deeming, 1975) a uma série de tempo contendo dados equidistantes e que *não continha* frequências muito próximas. Concluiu que a função de distribuição de erros na determinação de frequências era do tipo Gaussiana e caracterizada por:

$$\sigma_\omega = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{NT}} \frac{\sigma}{A}. \quad (5.65)$$

Num segundo estudo, também utilizando simulações numéricas, com uma série que *não continha frequências próximas*, Kovács (1981b) analisou o problema da precisão na determinação da frequência quando se usa a técnica de *mínimos quadrados*. O resultado para σ_ω é idêntico à (5.65). Embora (5.65) tenha sido obtida para dados igualmente espaçados, Baliunas *et al.* (1985) demonstraram que continua sendo válida para dados não-igualmente espaçados. Foster (1994) obteve um resultado muito próximo ao de Kovács (também para dados não-igualmente espaçados), diferindo apenas pela constante de proporcionalidade:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{24}{NT^2} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^2. \quad (5.66)$$

Este resultado, no entanto, é exatamente igual ao resultado obtido por Lucy & Sweeney (1971).

A pesar de não coincidirem quanto à constante de proporcionalidade, todos os resultados sugerem que na determinação de frequências, **uma série longa é mais importante que um sinal forte!**

5.4 Algoritmo DEE

Estrelas pulsantes multiperíodicas como a PG 1159-035 apresentam vários modos de pulsação. Em suas curvas de luz aparecem frequências muito próximas associadas a um mesmo modo de pulsação, o que faz com que as expressões apresentadas na seção anterior para estimativas das variâncias tanto das frequências, quanto das amplitudes e fases, não sejam válidas.

A *falta* de estudos mais detalhados sobre esse problema e a *necessidade* de estimativas precisas especialmente para a frequência (período) de pulsação e sua fase, nos levou a estudar a questão da precisão das estimativas desses parâmetros mais detalhadamente. Para isso usamos um algoritmo que desenvolve *simulações numéricas com séries de tempo artificiais com a mesma amostragem das séries de tempo reais* da PG 1159-035. Como resultado final, temos as distribuições empíricas de erros (DEE) através das quais podemos estimar os desvios para os três parâmetros: σ_ω , σ_A e σ_ϕ . O algoritmo usado especificamente para este fim, denominamos de “algoritmo DEE” e consiste basicamente em um *método de simulações de Monte Carlo*.

Nesta seção apresentamos a descrição do método e os resultados de sua aplicação prática no estudo da estrela PG 1159-035.

5.4.1 Conceitos Fundamentais

A descrição do método é feita em termos de uma formulação vetorial. O método trabalha em dois espaços vetoriais distintos que serão descritos a seguir: o espaço Π e o espaço Σ .

As Senóides e o Espaço Π

Uma senóide do tipo:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad (5.67)$$

pode ser perfeitamente definida por seus três parâmetros: sua *frequência angular*², ω ; sua *amplitude*, A ; e sua *fase*, ϕ . Se definirmos um *espaço vetorial* Π_3 , de três dimensões³, onde uma dimensão corresponde às frequências, outra corresponde às amplitudes e uma terceira às fases, então, qualquer senóide pode ser representada por um vetor no espaço Π_3 :

$$|\omega, A, \phi\rangle \in \Pi_3, \text{ e} \quad (5.68)$$

$$|\omega, A, \phi\rangle \equiv (\omega, A, \phi). \quad (5.69)$$

Chamaremos o espaço Π_3 de “*espaço de senóides*” e o vetor $|\omega, A, \phi\rangle$ de “*vetor-senóide*”. Em geral, não estamos interessados em estudar propriedades de todo o espaço Π_3 , mas apenas de uma região limitada e finita dentro deste espaço, o *sub-espaço* Π_3^o :

$$\Pi_3^o \subset \Pi_3. \quad (5.70)$$

Note, que quando efetuamos a operação de adição no espaço Π_3 estamos operando sobre as *componentes* das senóides e *não* somando senóides.

² Daqui em diante usaremos o termo *frequência* quando nos referirmos à frequência angular.

³ O índice inferior direito refere-se ao número de dimensões do espaço Π que, como veremos mais adiante, pode ser generalizado e ter qualquer número de dimensões.

As Séries de Tempo e o Espaço Σ_τ

Seja τ o “conjunto amostragem” dos N instantes discretos de tempo: $\tau = \{t_n; n = 1, N\}$. Podemos construir uma série de tempo (livre de ruído) calculando os valores da senóide (5.67) para cada instante $t_i \in \tau$. O processo de construção da série de tempo pode ser representado por um operador de construção que chamaremos de “operador $\hat{\Lambda}_\tau$ ”:

$$\hat{\Lambda}_\tau |\omega_1, A_1, \phi_1\rangle = |y_{1\tau}^0\rangle, \quad (5.71)$$

onde

$$|y_{1\tau}^0\rangle \equiv (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)), \quad (5.72)$$

é o “vetor série de tempo” que pertence a um outro espaço vetorial de N dimensões: o “espaço vetorial Σ_τ ”:

$$|y_{1\tau}^0\rangle \in \Sigma_\tau. \quad (5.73)$$

Operador-Estimativa

De posse do vetor série de tempo $|y_{1\tau}^0\rangle$, podemos submetê-lo a qualquer método de nossa escolha para ver como o método se sai na tentativa de estimar as componentes da senóide que gerou a série. Vetorialmente, podemos representar o método de estimativa que estamos estudando por um “operador-estimativa” $\hat{\mathbf{E}}_{\Pi_3}$ que, aplicado ao vetor série de tempo $|y_{1\tau}^0\rangle$ gera o “vetor-senóide” $|\tilde{\omega}_{1\tau}, \tilde{A}_{1\tau}, \tilde{\phi}_{1\tau}\rangle$:

$$\hat{\mathbf{E}}|y_{1\tau}^0\rangle = |\tilde{\omega}_{1\tau}, \tilde{A}_{1\tau}, \tilde{\phi}_{1\tau}\rangle, \quad (5.74)$$

$$|\tilde{\omega}_{1\tau}, \tilde{A}_{1\tau}, \tilde{\phi}_{1\tau}\rangle \in \Pi_3. \quad (5.75)$$

Introduzindo (5.71) em (5.74) teremos:

$$|\tilde{\omega}_\tau, \tilde{A}_\tau, \tilde{\phi}_\tau\rangle = \hat{\mathbf{E}}\hat{\Lambda}_\tau |\omega, A, \phi\rangle. \quad (5.76)$$

Definindo um operador $\hat{\mathbf{T}}$, tal que:

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv \hat{\mathbf{E}}\hat{\Lambda}_\tau, \quad (5.77)$$

a eq. (5.76) fica:

$$|\tilde{\omega}_\tau, \tilde{A}_\tau, \tilde{\phi}_\tau\rangle = \hat{\mathbf{T}}|\omega, A, \phi\rangle. \quad (5.78)$$

Note que, se fosse possível definir o operador inverso, $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$, poderíamos estimar $|\omega, A, \phi\rangle$ a partir de $|\tilde{\omega}_\tau, \tilde{A}_\tau, \tilde{\phi}_\tau\rangle$:

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}|\tilde{\omega}_\tau, \tilde{A}_\tau, \tilde{\phi}_\tau\rangle = \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{T}}|\omega, A, \phi\rangle, \quad (5.79)$$

como

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{I}}, \quad (5.80)$$

é o “operador unitário”,

$$|\omega, A, \phi\rangle = \hat{\mathbf{T}}^{-1}|\tilde{\omega}_\tau, \tilde{A}_\tau, \tilde{\phi}_\tau\rangle. \quad (5.81)$$

Assim, se pudéssemos calcular o operador inverso $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$, poderíamos calcular o “vetor-senóide” real a partir de um “vetor-senóide” estimativa. Na prática, isso é extremamente difícil e até impossível, mesmo quando se conhecêssemos $\hat{\Lambda}_\tau$ e $\hat{\mathbf{E}}$ (na realidade, esses espaços são infinitos e, portanto, não os conhecemos).

Vetor-Erro

De um modo geral, o “vetor-senóide” *estimado* por qualquer método não será exatamente igual ao “vetor-senóide” *real*. A diferença entre o “vetor-senóide” estimado e o “vetor-senóide” real é o “vetor-erro”, $|\epsilon_{1\tau}\rangle$:

$$|\epsilon_{1\tau}\rangle \equiv |\tilde{\omega}_{1\tau}, \tilde{A}_{1\tau}, \tilde{\phi}_{1\tau}\rangle - |\omega_1, A_1, \phi_1\rangle, \quad (5.82)$$

com

$$|\epsilon_{1\tau}\rangle \in \mathbf{\Pi}_3. \quad (5.83)$$

Introduzindo (5.76) em (5.82) teremos:

$$|\epsilon_{1\tau}\rangle = (\hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_\tau - \hat{\mathbf{1}}) |\omega, A, \phi\rangle. \quad (5.84)$$

Se o vetor-erro pode ser estimado para qualquer ponto do sub-espaço $\mathbf{\Pi}_3^0$, podemos representá-lo como uma função contínua em todo o sub-espaço $\mathbf{\Pi}_3^0$:

$$|\epsilon_\tau\rangle = |\epsilon_\tau(\omega, A, \phi)\rangle = (\hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_\tau - \hat{\mathbf{1}}) |\omega, A, \phi\rangle. \quad (5.85)$$

Ruído

Para tornar uma série de tempo mais realista, devemos acrescentar uma certa incerteza randômica para simular o *ruído* que existe nas séries de tempo reais. Usualmente, essa variação randômica é assumida como sendo produzida por uma distribuição Gaussiana, caracterizada por um *valor médio* 0 (zero) e por um *desvio-padrão* σ_0 (Fullerton, 1986).

Quando um ruído apresenta variações em todas as escalas de tempo, isto é, na média, a mesma amplitude em todas as escalas, ele é chamado de “*ruído branco*”. Na verdade, ruído branco representa tanto uma singularidade matemática quanto física desde que para um sistema físico produzir um ruído branco puro, ele teria que mudar infinitamente rápido no sentido de ter potência nas menores escalas possíveis. Além disso, para variar em escalas de tempo extremamente longas, ele teria de ter algo como uma “memória infinita” (Deeming, 1975). Na prática, todas as fontes de ruído são limitadas em escalas de tempo características ou em frequências características. Esse tipo de ruído é chamado de “*ruído limitado em banda*”.

Vetorialmente, o ruído pode ser representado por um “*vetor-ruído*” pertencente ao *sub-espaço* $\Sigma_{\tau\sigma_0} \subset \Sigma_\tau$. Esse sub-espaço contém todos os (infinitos) “vetores-ruído” possíveis, caracterizados por um valor médio igual a 0 e por um desvio-padrão igual à σ_0 . O processo de acréscimo do ruído a uma série de tempo é representada pela soma vetorial:

$$|y^{1\tau}\rangle = |y_{1\tau}^0\rangle + |\eta_\tau\rangle, \quad (5.86)$$

onde $|y_{1\tau}^0\rangle$ é o vetor série de tempo livre de ruído; $|\eta_\tau\rangle$ é um vetor-ruído *arbitrário* pertencente ao sub-espaço $\Sigma_{\tau\sigma_0}$ e $|y_{1\tau}\rangle$ é a série de tempo ruidosa.

Processos Determinísticos e Processos Estocásticos

Um processo físico é dito “*determinístico*” quando podemos fazer previsões sobre seus estados futuros. Por exemplo, se conhecemos as equações de movimento de uma partícula e, se conhecemos as condições iniciais, poderemos prever onde exatamente a partícula estará num dado instante de tempo t . Entretanto, se o movimento da partícula sofrer perturbações aleatórias, já não poderemos mais prever *com certeza* onde exatamente ela estará, mas poderemos estimar a *probabilidade* de encontrá-la dentro de uma determinada região. Esse tipo de processo tem um caráter não-determinístico e é chamado de “*processo estocástico*”⁴.

Na eq. (5.86), quando somamos ao vetor $|y_{1\tau}^0\rangle$ um vetor-ruído arbitrário $|\eta_\tau\rangle$, nós *quebramos o determinismo do processo*, ou seja, tornamos o processo estocástico! Isso torna impossível a construção do operador $\hat{\mathbf{T}}$ em (5.78) e muito menos do operador inverso.

Generalizando o Espaço $\mathbf{\Pi}$

O espaço $\mathbf{\Pi}$ pode ser generalizado para lidar com o caso de mais de uma senóide estar presente no sinal a ser estudado. Para isto, basta redimensionar o espaço $\mathbf{\Pi}$: se o sinal contém M senóides, o espaço $\mathbf{\Pi}$ terá $3M$ dimensões e os “vetores-senóide” terão $3M$ componentes:

$$|\omega_1, A_1, \phi_1; \omega_2, A_2, \phi_2; \dots; \omega_M, A_M, \phi_M\rangle. \quad (5.87)$$

Variança

O vetor-erro pode ser representado por uma combinação linear de suas $3M$ componentes:

$$|\epsilon_\tau(X_1, X_2, \dots, X_{3M})\rangle = \sum_{i=1}^{3M} |\epsilon_{X_i}\rangle, \quad (5.88)$$

onde

$$|\epsilon_{X_i}\rangle \equiv |\epsilon_\tau(0, 0, 0, \dots, X_i, \dots 0)\rangle. \quad (5.89)$$

Definimos *variança de X_i* , como:

$$\text{var}(X_i) \equiv \langle \epsilon_{X_i} | \epsilon_{X_i} \rangle, \quad (5.90)$$

onde o produto interno é calculado com:

$$\langle \epsilon_{X_i} | \epsilon_{X_i} \rangle = \int_{\mathbf{\Pi}_{3M}^0} \epsilon_{X_i}^* \cdot \epsilon_{X_i} ds. \quad (5.91)$$

⁴ O termo *estocástico* é de origem grega e significa “ao acaso”. Alguns autores usam o termo estocástico como sinônimo de randômico.

Função de Distribuição de Erros

Seja $|\Omega\rangle_s$ um vetor-senóide pertencente ao espaço $\Pi_{\mathbf{3M}}$. Se $\Psi \equiv \{|\epsilon_{X_i}\rangle_s; s = 1, 2, \dots, S\}$ é um conjunto de S vetores-erro gerados sucessivamente pelo processo descrito por (5.4.1), então, a “função de distribuição de erros, $\wp_\infty(\epsilon_{X_i}) d\epsilon_{X_i}$, é definida como:

$$\wp_\infty(\epsilon_{X_i}) d\epsilon_{X_i} \equiv \lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{\aleph(\epsilon_{X_i})}{S} \right), \quad (5.92)$$

onde $\aleph(\epsilon_{X_i})$ é o número de vetores-erros no intervalo $[\epsilon_{X_i} - d\epsilon_{X_i}, \epsilon_{X_i} + d\epsilon_{X_i}]$. A função distribuição de erros nos dá a *probabilidade* de que um vetor-erro gerado por (5.4.1) caia no intervalo $[\epsilon_{X_i} - d\epsilon_{X_i}, \epsilon_{X_i} + d\epsilon_{X_i}]$.

5.4.2 Distribuição Empírica de Erros (DEE)

Se o número S em (5.92) for finito, mas suficientemente grande, então podemos definir a *função de distribuição empírica de erros*, $\wp(\epsilon_{X_i}) \Delta\epsilon_{X_i}$, que estima a probabilidade de que um vetor-erro gerado pelo processo descrito por (5.92) caia no intervalo $[\epsilon_{X_i} - \Delta\epsilon_{X_i}, \epsilon_{X_i} + \Delta\epsilon_{X_i}]$, tal que,

$$\wp(\epsilon_{X_i}) \Delta\epsilon_{X_i} \equiv \frac{\aleph(\epsilon_{X_i})}{S} \quad (5.93)$$

Para S suficientemente grande e para um intervalo $\Delta\epsilon_{X_i}$ suficientemente pequeno,

$$\wp(\epsilon_{X_i}) \Delta\epsilon_{X_i} \simeq \wp_\infty(\epsilon_{X_i}) d\epsilon_{X_i}. \quad (5.94)$$

A eq. (5.90), para a variância da componente X_i fica:

$$Var(X_i) \simeq \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \epsilon_{X_i s}^* \cdot \epsilon_{X_i s}. \quad (5.95)$$

5.4.3 Descrição do Algoritmo DEE

Primeiro Passo: definir o sub-espaço $\Pi_{\mathbf{3M}}^0$ e o sub-espaço $\Sigma_{\eta\sigma_0}$ e o conjunto τ .

O algoritmo DEE trabalha em cima de um conhecimento prévio sobre os sinais presentes na curva de luz (série de tempo) da estrela, ou seja, devemos conhecer os valores *aproximados* para as componentes $\{\omega_m, A_m, \phi_m; m = 1, M\}$ dos M sinais periódicos detectados na curva da estrela. Além disso, devemos definir os intervalos dentro dos quais assumiremos que cada componente do sinal *real* deve estar. Isso define o sub-espaço $\Pi_{\mathbf{3M}}^0$ no qual trabalharemos.

Um modo de se definir o *sub-espaço* $\Sigma_{\tau\sigma_0}$ é estabelecendo um valor para a *amplitude máxima* que uma variação randômica pode ter no *espaço* Σ_τ . Esse valor máximo definirá os limites (inferior e superior) para os valores possíveis de cada componente do vetor-ruído.

O conjunto-amostragem $\tau = \{t_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ é tomado de uma série real e é usado como base para construir as *séries de tempo sintéticas*.

Segundo Passo: definir aleatoriamente um vetor-senóide $|\Omega\rangle_s$.

Nesse passo, um vetor-senóide $|\Omega\rangle_s$ é definido aleatoriamente dentro do sub-espaço Π_{3M}^0 , ou seja, devemos definir um valor aleatório para cada componente $\{\omega_m, A_m, \phi_m; m = 1, M\}$ dentro dos intervalos estabelecidos no primeiro passo. Depois de um número suficientemente grande de simulações, teremos uma distribuição homogênea de vetores-senóides dentro do sub-espaço Π_{3M}^0 .

Terceiro Passo: construir o vetor série de tempo (sem ruído) $|y_{1\tau}^0\rangle$.

O vetor série de tempo $|y_{1\tau}^0\rangle = (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N))$ é construído calculando-se os valores de $y(t)$ em cada instante t_i :

$$y_i^0 = \sum_{m=1}^M A_m \cdot \sin(\omega_m t_i + \phi_m). \quad (5.96)$$

Quarto Passo: acrescentar ruído à série de tempo.

Se A_{max} é a amplitude máxima que o ruído pode atingir, então cada componente do vetor ruído é definida aleatoriamente no intervalo $[-A_{max}, +A_{max}]$. O vetor-ruído é então somado ao vetor série de tempo (livre de ruído) para obtermos a série de tempo ruidosa:

$$y_i = y_i^0 + Rand[-A_{max}, +A_{max}]. \quad (5.97)$$

Quinto Passo: aplicar o método de estimativa escolhido e estimar $(\tilde{\omega}_m, \tilde{A}_m, \tilde{\phi}_m)$.

Nesse passo, construímos o *periodograma* em torno da frequência ω_m que estamos estudando, ou seja, no intervalo $[\omega_m - \ell \delta\omega, \omega_m + \ell \delta\omega]$, onde $\delta\omega$ é a frequência de resolução do periodograma e ℓ é um número inteiro maior ou igual à unidade ($\ell \geq 1$). O número ℓ define o número de picos secundários no periodograma que serão estudados além do principal ($\ell = 1$).

Dentre os picos presentes no intervalo $[\omega_m - \ell \delta\omega, \omega_m + \ell \delta\omega]$ escolhemos aquele que mais se aproxima dos valores reais (ω_m, A_m, ϕ_m) . Nesse ponto temos a *estimativa* $(\tilde{\omega}_m, \tilde{A}_m, \tilde{\phi}_m)$.

Sexto Passo: calcular os erros:

erro em frequência : $\epsilon_{\omega_m} = \tilde{\omega}_m - \omega_m$;

erro em amplitude : $\epsilon_{A_m} = \tilde{A}_m - A_m$; Os valores calculados para os erros devem ser

erro em fase : $\epsilon_{\phi_m} = \tilde{\phi}_m - \phi_m$.

armazenados para análise posterior.

Sétimo Passo: mais uma simulação (ou parar)?

Neste passo, decidimos se o número de simulações realizadas até aqui, S , já é suficiente ou não. Um critério que pode ser adotado para decidir se o número já é suficiente ou não é estudar o passo de convergência da variância, μ :

$$\mu = \frac{\text{var}_S(X_m) - \text{var}_{S-1}(X_m)}{\text{var}_S(X_m)}, \quad (5.98)$$

onde, $\text{var}_S(X_m)$ e $\text{var}_{S-1}(X_m)$ são as variâncias calculadas na simulação atual e na simulação anterior, respectivamente. Se μ for menor que um determinado valor previamente definido, podemos parar; se não devemos voltar ao *segundo passo* para realizar mais uma simulação.

Oitavo Passo: calculamos a distribuição empírica de erros.

A distribuição empírica de erros pode finalmente ser representada na forma de um histograma.

* * *

No próximo capítulo mostraremos a aplicação prática deste algoritmo no estudo da PG 1159-035.

Capítulo 6

MEDINDO AS VARIAÇÕES DE PERÍODOS DA PG 1159-035.

Os métodos apresentados no capítulo anterior serão agora utilizadas na determinação da taxa de variação temporal de quatro dos mais importantes períodos de pulsação da estrela PG 1159-035: o período de 516 s; o período de 539 s; o período de 451 s; e o período de 493 s. Iniciaremos explicando como o algoritmo DEE foi aplicado aos dados da PG1159-035 para estimar os desvios-padrões das medidas.

6.1 Aplicação do Algoritmo DEE à PG 1159-035.

O método que utilizamos para fazer as estimativas das frequências (ou períodos), suas amplitudes e fases foi o **método de mínimos quadrados** que daqui em diante chamaremos *método LS*. A descrição do método LS foi feita no Cap.3 (veja também o Apêndice A) e no Cap.4 fizemos algumas considerações sobre suas propriedades estatísticas. Este foi o método utilizado por Winget *et al.* (1985, 1988 e 1993) para estimar as fases dos pontos dos diagramas (O-C) do período de 516 s da PG 1159-035.

Para cada frequência testada, o método LS calcula qual deve ser a amplitude e a fase da senóide que melhor se ajustam à série de tempo e faz estimativas para suas respectivas *varianças*. Entretanto, conforme vimos no capítulo anterior, vários autores têm chamado a atenção para o fato de que os valores estimados por este método para as varianças da fase e da amplitude, em geral, *são menores* que os valores reais, o que pode alterar completamente a significância estatística dos resultados de um ajuste.

Como foi dito antes, o algoritmo DEE consiste basicamente em *simulações de Monte Carlo* e através dele podemos fazer estimativas bem mais realistas para a variância das fases calculadas pelo método LS. Além disso, ele também permite estimar o desvio-padrão para a medida do período, o que não é possível através do método LS. O algoritmo foi aplicado às séries de tempo dos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993, que possuem um maior volume de dados.

Na construção do subespaço Π_{3M}^0 utilizamos como base os 122 períodos de pulsação identificados na curva de luz da PG 1159-035 do ano de 1989 (Winget *et al.* 1991) e definimos os intervalos dentro dos quais os períodos reais poderiam estar como:

$$P_m^{1989} \pm 0.1 s, m = 1, 2, \dots, 122. \quad (6.1)$$

Esse intervalo é suficientemente abrangente para cobrir qualquer valor que o período poderia assumir nos demais anos (1983 ou 1993, por exemplo), *mesmo com taxas de variação*

temporal altas, da ordem de $10^{-10} s s^{-1}$. A própria distribuição empírica de erros obtida com o método DEE nos dá, *a posteriori*, uma indicação sobre se a escolha dos intervalos foi adequada ou não. Podemos considerar a escolha dos intervalos $(P_m \pm I_P)$ adequada se o erro máximo $|\epsilon_{Pmax}|$ for muito menor que I_P : $|\epsilon_{Pmax}| \ll I_P$.

Assumimos que os valores possíveis para as amplitudes caem dentro do intervalo: $A_m^{1989} \pm 10\%$, onde A_m^{1989} é o valor detectado em 1989. A adequação da definição dos intervalos $(A_m \pm I_A)$ também pode ser indicada *a posteriori*: se o erro máximo obtido na estimativa das amplitudes, $|\epsilon_{Amax}|$, for pequeno, comparado com I_A , $|\epsilon_{Amax}| \ll I_A$, então os intervalos são adequados. Para todas as séries testadas, esta condição foi satisfeita.

Para as fases, ϕ_m , não foi imposta nenhuma restrição: $0 \leq \phi_m \leq 2\pi$. O subintervalo Π_{366}^0 definido desta forma pode não coincidir exatamente com o subintervalo real, mas espera-se que seja suficientemente grande para contê-lo!

Quanto ao ruído, adotamos como σ_0 um valor igual a um quarto da amplitude da menor frequência detectada em 1989. Como vimos no Cap.3, um período só é considerado estatisticamente significativo se sua amplitude for superior a $4\sigma_0$. Na verdade a definição das características do ruído não é crítica; isso porque, o método LS considera todo o sinal que não seja o sinal pesquisado como sendo “ruído”. Assim, as incertezas que podem ser introduzidas pelo ruído real são pequenas comparadas com o “ruído” devido a outros sinais.

Foram realizadas mil (1000) simulações para cada série de tempo estudada. Para todos os casos, este número se mostrou adequado, sendo suficientemente alto para levar a função $var(P)$ à convergência, como podemos ver na Fig.(6.1) .

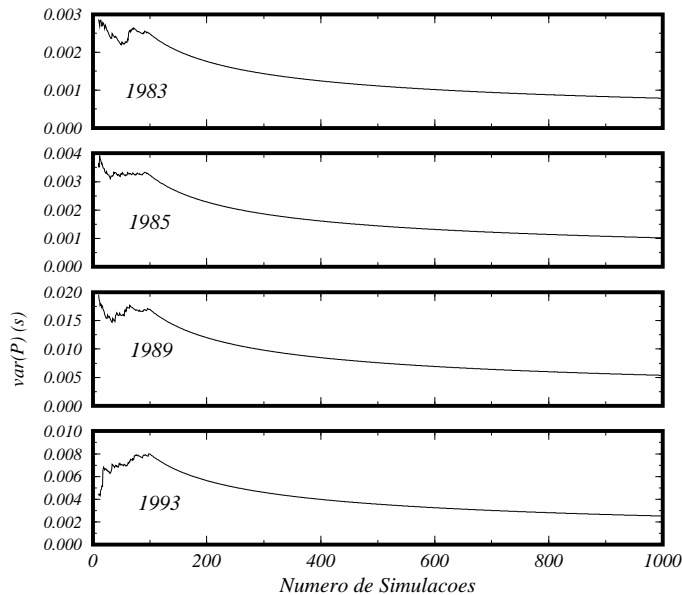


Fig. 6.1: Os gráficos acima mostram a convergência de $var(P \simeq 516.s)$ à medida que o número de simulações aumenta. A variância $var(P)$ é dada em segundos.

6.2 O período de 516 s.

Para determinar a taxa de variação temporal, dP/dt , do período de 516 s, aplicamos inicialmente o método direto, que exige um conjunto de N medidas de período em N datas distintas e com suficiente espaçamento: $\{t_i, P(t_i), \sigma_{P_i}\}$. A princípio, usamos para $\{P_i\}$ os valores obtidos diretamente dos espectros de potência das séries de tempo dos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993 (N=4) por terem um maior volume de dados. Os períodos medidos para cada ano são mostrados na terceira coluna da Tab.(6.1).

Tab. 6.1: Medidas do período para cada ano.

Ano	Data (T_{max}) (BJDD)	Período (s)	Incerteza (s)	σ (DEE) (s)	$ \epsilon_{max} $ (s)	$ \frac{\epsilon_{max}}{\sigma} $
1983	244 5394.869	516.0264	1.6×10^{-2}	0.3×10^{-3}	0.87×10^{-2}	3.01
1985	244 6179.974	516.0372	2.4×10^{-2}	3.9×10^{-3}	1.08×10^{-2}	2.81
1989	244 7592.559	516.0411	12.7×10^{-2}	16.1×10^{-3}	5.03×10^{-2}	3.12
1993	244 9073.820	516.0600	9.1×10^{-2}	7.9×10^{-3}	2.27×10^{-2}	2.86

A única informação que um espectro de potência nos dá sobre a precisão da medida do período vem da resolução do próprio espectro de potência, δP :

$$\delta P \simeq \frac{P^2}{2T}, \quad (6.2)$$

onde P é o período e T é o intervalo total de espalhamento dos dados. Essa medida corresponde à metade do espaçamento médio entre os picos no espectro de potência e nos dá um valor para o *desvio máximo* (incerteza) que a medida do período pode ter em relação ao seu valor real. Na quarta coluna da tabela Tab.(6.1) temos os valores da incerteza na medida do período para cada ano. Note que mesmo para os espectros com maior resolução, a incerteza na medida de P calculada desta forma, ainda é muito grande para ser usada no método direto. Através do *método de minimização da dispersão de fases*, explicado no Cap.2, também podemos medir P e calcular a variância de sua medida, mas este método exige boas medidas para as fases e seus desvios padrões, o que nos coloca novamente diante do problema: como saber se as medidas de fase são confiáveis se não podemos confiar nas estimativas que o método LS faz para seus desvios-padrões?

Usando o algoritmo DEE, geramos distribuições de erros para estimativas de período em cada ano feitas com o método LS. Na Fig.(6.2) podemos ver as distribuições representadas na forma de histogramas. Nos eixos horizontais, temos os erros (em segundos) nas estimativas do período e nos eixos verticais as probabilidades de ocorrências. Tentamos ajustar as distribuições obtidas a dois tipos de curvas: uma *gaussiana* e uma *lorentziana*. Para todas as distribuições geradas pelo algoritmo DEE, os melhores ajustes foram obtidos curvas gaussianas. As curvas ajustadas podem ser vistas na Fig.(6.2) e seus respectivos *desvios padrões*, σ , estão na quinta coluna da Tab.(6.1) . Na coluna seguinte temos o maior desvio obtido nas simulações de cada ano, $|\epsilon_{max}|$, e na última coluna temos a razão $\frac{|\epsilon_{max}|}{\sigma}$. Note que todos os valores de $\frac{|\epsilon_{max}|}{\sigma}$ são menores que 3.48 satisfazendo o *o critério de Chauvenet* para um número de 1000 eventos (Young, 1962).

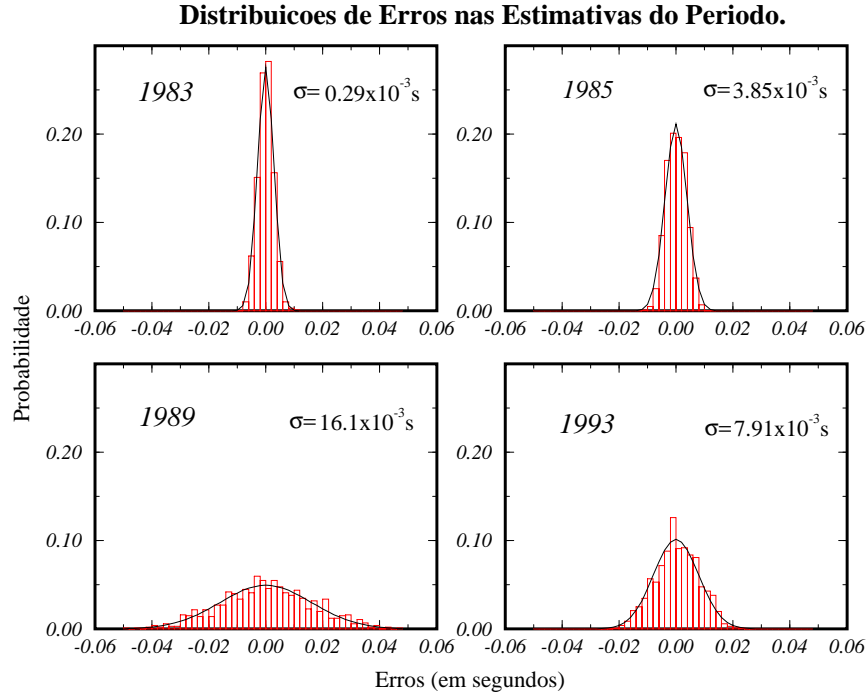


Fig. 6.2: Os gráficos acima mostram as distribuições empíricas de erros obtidas com o algoritmo DEE para as séries de tempo dos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. Nos eixos horizontais temos os erros (em segundos) nas estimativas do período e nos eixos verticais as probabilidades de ocorrência. Os histogramas foram construídos usando-se um intervalo de 0.002s por “bin”. Sobre as distribuições foram ajustadas curvas gaussianas.

Com os dados da Tab.(6.1), fizemos um gráfico de P contra a data que é mostrado na Fig.(6.3). Os pontos correspondem aos períodos obtidos diretamente dos espectros de potência e as barras verticais correspondem aos *erros máximos* encontrados pelo algoritmo DEE. Aos pontos ajustamos uma curva do tipo:

$$P(t) = P_0 + \frac{dP}{dt} (t - t_0), \quad (6.3)$$

onde $t_0 \equiv 244\,0000$. *BJDD* (por conveniência) e $P_0 = P(t_0)$. Os resultados obtidos foram:

$$P_0 = (515.982 \pm 0.022) s, \quad (6.4)$$

$$\frac{dP}{dt} = (+8.365 \pm 4.125) \times 10^{-11} s d^{-1} \quad (6.5)$$

$$= (+9.7 \pm 4.8) \times 10^{-11} s s^{-1}. \quad (6.6)$$

As duas retas tracejadas na Fig.(6.3) representam, respectivamente, as retas com a maior e a menor inclinações possíveis de serem ajustadas, ou seja, são limites extremos para os possíveis valores de dP/dt :

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta T}\right)_{min} = 0.74 \times 10^{-11} s s^{-1} \quad (6.7)$$

e

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta T}\right)_{max} = 108.99 \times 10^{-11} s s^{-1} \quad (6.8)$$

e portanto

$$0.7 \times 10^{-11} s s^{-1} \leq \frac{dP}{dt} \leq 109.0 \times 10^{-11} s s^{-1}. \quad (6.9)$$

Esses resultados praticamente eliminam a possibilidade de que dP/dt seja realmente negativo!

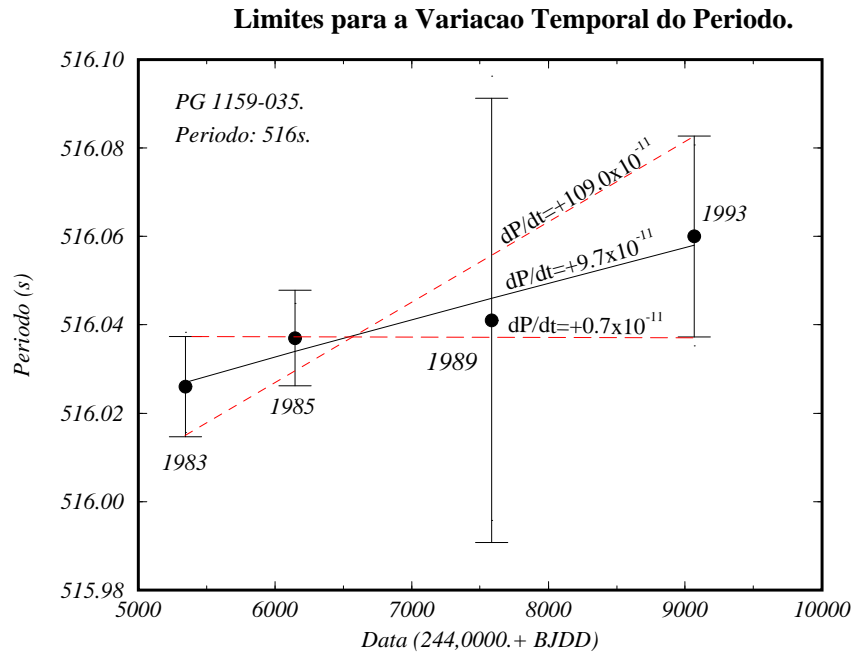


Fig. 6.3: Na figura acima temos um gráfico do período (em segundos) contra a data (em BJDDs). Os pontos representam os valores medidos para o período dominante de 516 s, nos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993; as barras representam os erros máximos e as duas retas tracejadas são as retas com a maior e a menor inclinações possíveis de serem fitadas e a reta sólida corresponde ao melhor ajuste. Os valores de dP/dt estão expressos em $s s^{-1}$.

Uma estimativa mais precisa para dP/dt foi feita a partir de melhores medidas dos valores do período para os anos de 1989 e 1993 conseguidas através da aplicação da *técnica de subtração de senóides* às séries de tempo desses anos. Como foi dito antes, quando o método LS ajusta uma senóide a uma série de tempo, todo os demais sinais periódicos presentes nos dados atuam como ruído. Quando subtraímos total ou parcialmente esses sinais, estamos reduzindo o ruído e, conseqüentemente, melhorando a relação sinal-ruído. Isso reduz os erros nas estimativas não só dos períodos, mas também das amplitudes e das fases, como será demonstrado mais adiante.

A subtração de senóides é *mais fácil* para séries de tempo *menos irregulares*, como é o caso das séries de 1989 e 1993 e é *mais difícil* (e as vezes, pode ser impraticável!) para séries de tempo *mais irregulares*. Isso ocorre devido às imprecisões nos valores dos períodos, amplitudes e principalmente das fases. Erros nas definições das amplitudes das senóides que serão subtraídas não são críticos. Na verdade, é até conveniente que os valores sejam um pouco menores que os valores reais. O que não deve ocorrer é o uso de valores maiores que os reais. Erros na determinação dos períodos não são tão críticos para séries mais curtas,

mas podem causar problemas para séries mais longas, pois neste caso teremos um maior número de ciclos presentes na série. Quanto à fase, este é o fator mais crítico; os erros na definição da fase são maiores para séries de tempo mais longas e pode não ser compensador fazer a subtração de senóides para estas séries.

Inicialmente, identificamos nas séries de tempo de cada ano as senóides que poderiam ser subtraídas: cada “senóide-candidata” era subtraída da série de tempo e então o espectro de potência da “série reduzida” era examinado para se verificar se o pico correspondente havia desaparecido ou diminuído sensivelmente; caso contrário, a “senóide-candidata” era descartada. Ao todo, conseguimos subtrair 121 senóides da série de 1989, 14 da série de 1993 e apenas 7 das séries de 1983 e 1985; mas para essas duas últimas, a subtração de senóides não se mostrou compensadora. As novas medidas para os períodos das “séries reduzidas” de 1989 e 1993 foram obtidas diretamente de seus espectros de potência e seus desvios-padrões foram estimados através do algoritmo DEE. Para simular a subtração de senóides, no processo de composição das séries tempo sintéticas reduzimos em 85 – 90% as amplitudes das senóides selecionadas para a subtração. Os efeitos da subtração de senóides sobre as distribuições de erros nas estimativas do período para os anos de 1989 e 1993 podem ser vistos na Fig.(6.2). Note como a dispersão das medidas é drasticamente reduzida.

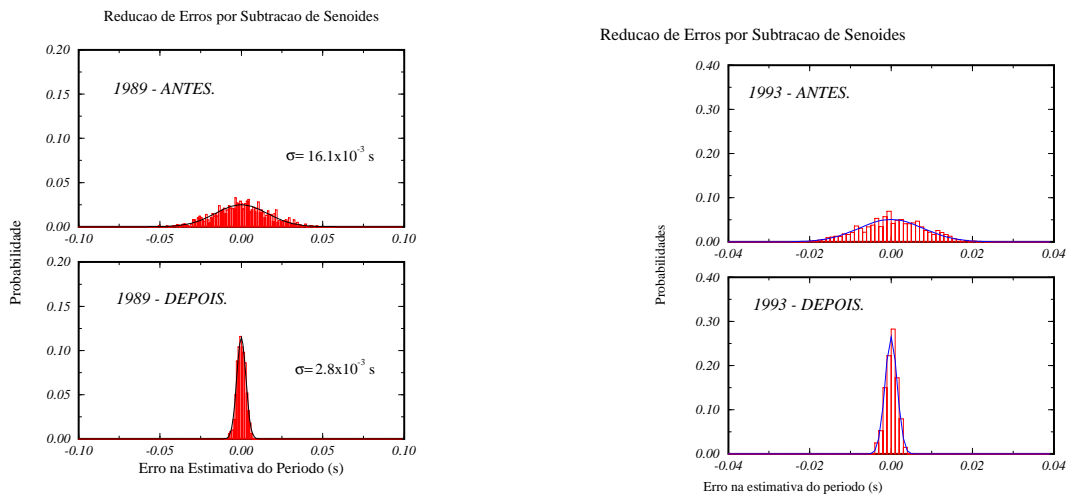


Fig. 6.4: Nos gráficos superiores temos as distribuição de erros nas estimativas do período, obtidas com o algoritmo DEE, para os dados normais de 1989 (lado esquerdo) e 1993 (lado direito). Nos gráficos inferiores podemos ver o que ocorre após a aplicação do processo de subtração de senóides.

Tab. 6.2: Medidas do período após o processo de subtração de senóides.

Ano	Data (T_{max}) (BJDD)	Período (s)	σ (DEE) (s)
1983	244 5394.86889	516.0264	0.3×10^{-3}
1985	244 6179.97375	516.0372	1.2×10^{-3}
1989	244 7592.55883	516.0514	2.8×10^{-3}
1993	244 9073.82019	516.0691	1.5×10^{-3}

As novas medidas podem estão na tabela Tab.(6.2) e aos pontos foi ajustada uma reta do tipo (6.3). O gráfico do período contra a data é mostrado na Fig.(6.5). Com o ajuste, conseguimos:

$$P_0 = 515.96681 \pm 0.00283 \text{ BJDD}, \quad (6.10)$$

$$\frac{dP}{dt} = (+13.02 \pm 1.04) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.11)$$

Variacao Temporal do Periodo de 516 s.

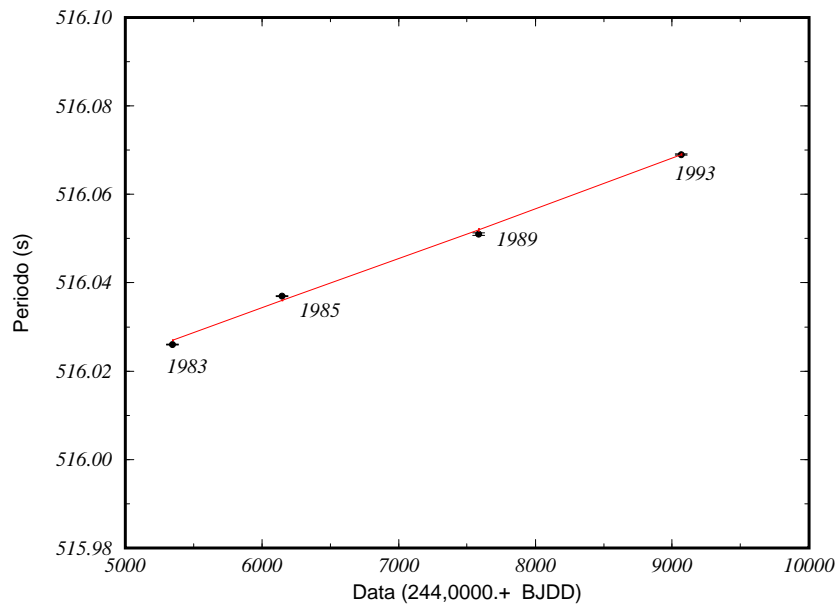


Fig. 6.5: O gráfico mostra a variação do período de 516s ao longo do tempo.

No passo seguinte, usamos o *método do diagrama (O-C)* para refinar ainda mais dP/dt . Os desvios-padrões das fase dps pontos utilizados nos cálculos do diagrama (O-C) foram obtidos através da aplicação do algoritmo DEE de forma análoga ao que foi feito para se calcular o σ_P de cada ano. A Fig.(6.6) mostra as distribuições de erros nas estimativas das fases, a partir das quais se calcula σ_ϕ e as figuras Fig.(6.7) e Fig.(6.8) mostram os efeitos do processo de subtração de senóides sobre as distribuições de erros tanto das medidas de amplitude quanto de fase.

A Fig.(6.9) mostra o diagrama (O-C) obtido e na tabela Tab.(6.3) temos os valores de (O-C) para cada ano (em segundos), seu desvio-padrão $\sigma_{T_{max}}$ (em segundos) e o número de ciclos correspondente, contados a partir de $T_0 = 244\,7593.341295 \text{ BJDD}$, instante aproximado em que ocorre um *máximo* na série de tempo de 1989. Para que os pontos das medidas de (O-C) dos demais anos (1979, 1980, 1981 e 1984) pudessem aparecer no diagrama, atribuímos a cada uma delas um desvio de $\sigma_{T_{max}} = 100 \text{ s}$ (por isso aparecem entre parêntesis), o que faz

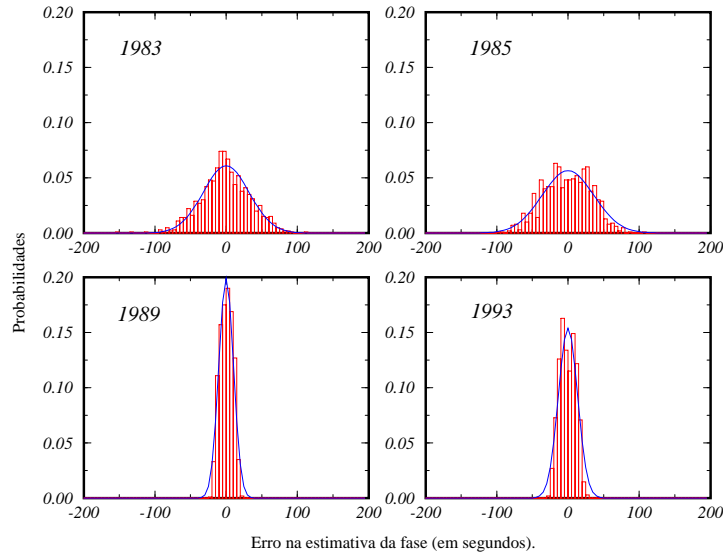


Fig. 6.6: Distribuições empíricas de erros nas estimativas da fase da senóide com período de 516s. Nos eixos horizontais temos os erros (em segundos) e nos eixos verticais as probabilidades de ocorrência. Os histogramas foram construídos com valores de 5 s para os “bins”. Sobre as distribuições foram ajustadas curvas gaussianas.

Tab. 6.3: Valores de (O-C) para cada ano.

Ano	T_{max} (BJDD) (244 0000.+)	E (ciclos)	(O-C) (s)	$\sigma_{T_{max}}$ (s)
1979	4229.603989	-563185	5834.9	(100.)
1981	4729.631208	-479465	4314.3	(100.)
1983	5346.621118	-376162	2524.2	32.
1984	5790.631324	-301822	1701.2	(100.)
1985	6147.517801	-242069	1038.5	36.
1989	7593.341339	0	3.8	10.
1993	9065.917904	246544	1098.0	13.

com que seus pesos relativos sejam desprezíveis frente aos pesos dos outros pontos (1983, 1985, 1989 e 1993) e portanto, praticamente não afetam o resultado do ajuste. Os novos resultados gerados pelo método (O-C), são:

$$T_{max0} = (244\,7593.341295 \pm 0.000020) \text{ BJDD}, \quad (6.12)$$

$$P = (516.051986 \pm 0.000019) \text{ s}, \quad (6.13)$$

$$\dot{P}_{516} = (+14.04 \pm 0.16) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.14)$$

A *escala de tempo* para a variação, τ_{516} , é:

$$\tau_{516} = \frac{P}{\dot{P}} \simeq (1.16 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ anos}. \quad (6.15)$$

Usamos os resultados obtidos com o método do diagrama (O-C) como *valores iniciais* em um programa que faz *ajustes não-lineares de senóides (nls)* e os resultados obtidos através deste terceiro método foram:

$$T_{max0} = (244\,7593.341310 \pm 0.000014) \text{ BJDD}, \quad (6.16)$$

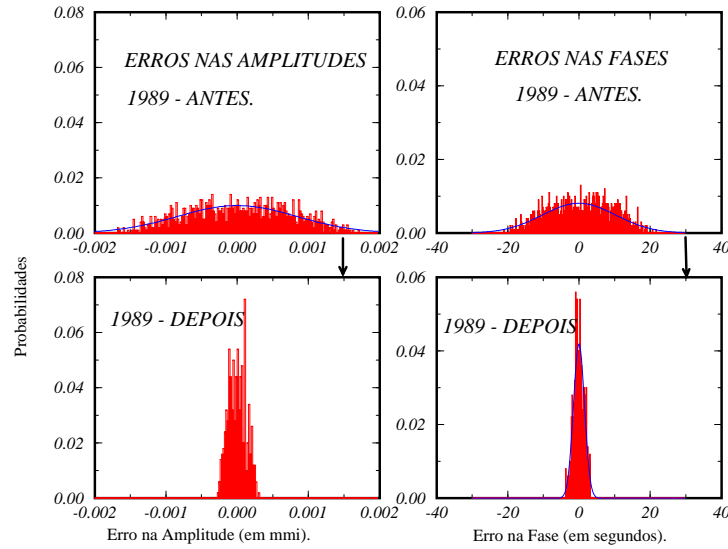


Fig. 6.7: Os gráficos mostram o que ocorre com as distribuições de erros nas estimativas das amplitudes (gráficos da direita) e das fases (gráficos da esquerda) para os dados de 1989. Os gráficos superiores mostram as distribuições obtidas com os dados normais e os gráficos inferiores mostram as distribuições obtidas após as subtrações.

$$P = (516.051986 \pm 0.000004) s, \quad (6.17)$$

$$\dot{P}_{516} = (+13.298 \pm 0.003) \times 10^{-11} s s^{-1}. \quad (6.18)$$

A escala de tempo para a variação, τ_{516} , é:

$$\tau_{516} = \frac{P}{\dot{P}} \simeq (1.2297 \pm 0.0002) \times 10^5 \text{ anos}. \quad (6.19)$$

Os resultados obtidos com o método *nls* mostram que o ajuste converge para *uma* solução, mas não necessariamente para a melhor solução. Note também que, como comentamos no capítulo anterior, o desvio-padrão obtido para dP/dt através do método *nls* é uma ordem de grandeza *menor* que o obtido pelo método do diagrama (O-C).

6.3 Resolvendo o Problema do dP/dt Negativo.

Os resultados obtidos neste trabalho são consistentes com as previsões feitas pelos modelos evolucionários de estrelas pré-anãs brancas com características similares às da PG 1159-035, calculados por Kawaler *et al.* (1985) e que previam uma taxa de variação temporal *positiva* (período *crescendo* no tempo) e uma escala de tempo para os períodos, da ordem de 10^6 anos *ou menor*.

Mas há algo que ainda precisa ser explicado: *por que Winget et al. (1985, 1988 e 1991) encontraram um valor negativo para dP/dt ?* Para responder a esta pergunta, precisamos “retroceder no tempo” e voltar ao ano de 1984 ou 1985 quando Winget *et al.* calcularam pela primeira vez dP/dt para o período de 516 s usando a técnica do diagrama (O-C), e

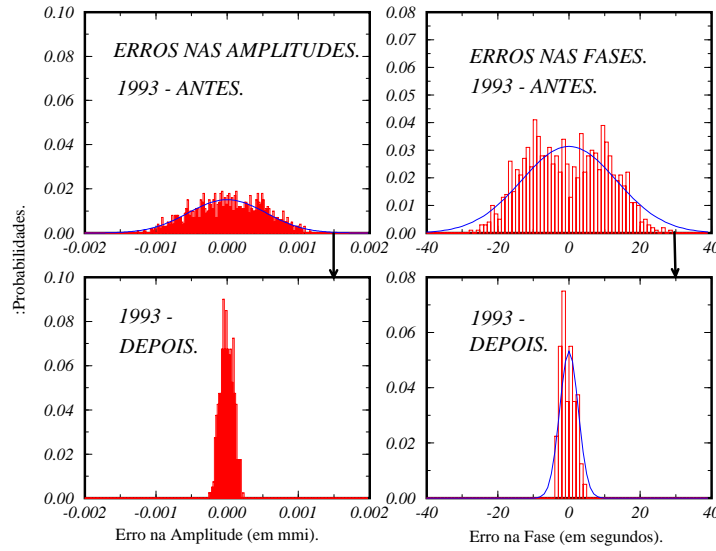


Fig. 6.8: Os gráficos mostram o que ocorre com as distribuições de erros nas estimativas das amplitudes (gráficos da direita) e das fases (gráficos da esquerda) para os dados de 1993. Os gráficos superiores mostram as distribuições obtidas com os dados normais e os gráficos inferiores mostram as distribuições obtidas após as subtrações.

encontraram um valor negativo para dP/dt . O que eles fizeram na época, foi calcular a fase (T_{max}) para os dados de cada campanha isoladamente, usando o método LS. Apesar das séries de tempo de cada campanha terem curta duração (1-7 horas), os desvios-padrões das fases, $\sigma_{T_{max}}$, calculados pelo método LS pareciam suficientemente pequenos (todos menores que 10 s) para que se pudesse usar as melhores medidas de fase de cada ano no diagrama (O-C), como se pode ver na terceira coluna da tabela Tab.(6.4).

Como na época já se sabia que os valores estimados pelo método LS geralmente são *menores* que os valores reais, Winget *et al.* aumentaram os valores encontrados através do método LS, fazendo $\sigma_{T_{max}} = 10\text{ s}$ para todas as medidas, assumindo que essa correção seria suficiente. Infelizmente, os valores assumidos por Winget *et al.* ainda estão muito aquém dos valores reais. Usando o algoritmo DEE estimamos os desvios para as medidas de fase para cada um dos casos e todos os valores encontrados são *maiores que 60 s*, como se pode ver na quinta coluna da tabela Tab.(6.4), o que muda completamente a significância estatística do resultado. Além disso, só podemos aplicar *com segurança* o método (O-C) em um conjunto de medidas de fase cujos desvios-padrões sejam menores do que $P/8$, $\sigma_{T_{max}} < 65\text{ s}$. Todas as medidas seguintes (Winget *et al.* 1988 e 1991) usaram como valores iniciais os resultados da primeira medida e por isso, convergiram para valores próximos aos valores iniciais.

Tab. 6.4: Desvios-padrões para as fases usadas por Winget *et al.* (1985).

Ano	Campanha Nº	Horas de Fotometria	$\sigma_{T_{max}}$ (s) (LS)	$\sigma_{T_{max}}$ (s) (Winget)	$\sigma_{T_{max}}$ (s) (DEE)
1980	R2504	5.6	3.3	10.	67.
1981	R2611	2.0	9.2	10.	105.
1983	R2768	3.6	6.0	10.	91.
1984	R2886	7.3	6.6	10.	63.

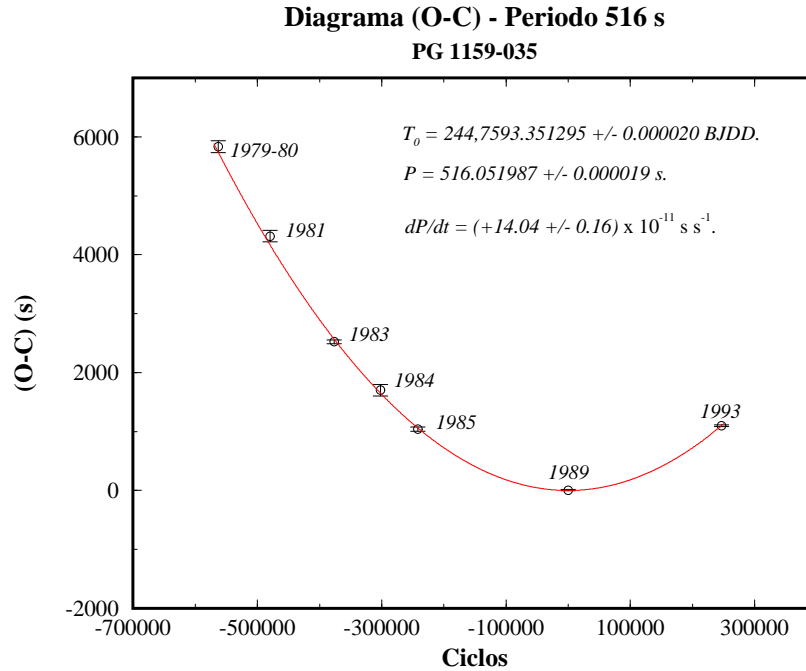


Fig. 6.9: Diagrama (O-C) para o período de 516 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).

Antes de terminarmos esta seção vamos comentar um pouco sobre o problema dos erros nas estimativas dos desvios-padrões das fases, ϵ_ϕ , feitas pelo método LS. Em nossas simulações numéricas usamos os resultados do algoritmo DEE para testar essas estimativas. Para isso, calculamos a razão $\epsilon_\phi/\sigma_\phi$ para cada simulação e verificamos se ela obedecia o critério de Chauvenet, que nos dá a probabilidade $P(\epsilon_\phi/\sigma_\phi)$ de se obter um valor igual a $\epsilon_\phi/\sigma_\phi$ em um conjunto de N eventos, segundo uma distribuição gaussiana. No nosso caso, para um total de 1000 simulações, a probabilidade de se obter $\epsilon_\phi/\sigma_\phi > 4$ é praticamente nula. No entanto, como podemos ver nos gráficos da Fig.(6.10) houve um alto índice de ocorrências de valores $x/\sigma > 4$!

O mesmo ocorre com os desvios-padrões estimados pelo método LS em relação à amplitude da senóide ajustada. Na Fig.(6.11) temos os histogramas que mostram a frequência de ocorrência de um determinado valor para ϵ_A/σ_A . Para um conjunto de 1000 simulações, o valor máximo esperado para ϵ_A/σ_A é 3.48. Entretanto, os valores de ϵ_A/σ_A superaram em muito esse limite, podendo chegar a 25 ou até mais! Isso significa que os valores calculados pelo método LS para os desvios padrões também são muito menores que os valores reais.

6.4 O período de 539s.

Os cálculos das taxas de variação temporal dos demais períodos seguem basicamente o mesmo procedimento que foi utilizado para o caso do período de 516 s, dispensando ex-

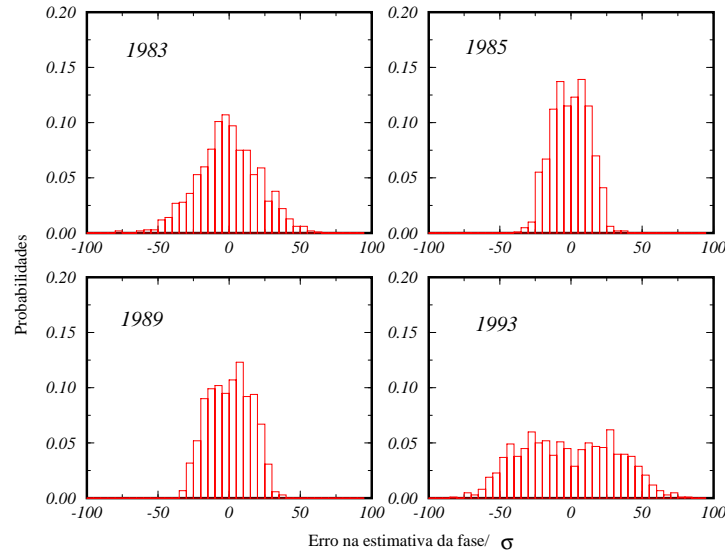


Fig. 6.10: Probabilidades de ocorrências de um determinado valor para $\epsilon_\phi/\sigma_\phi$, onde ϵ_ϕ é o erro (real) na estimativa da fase e $\sigma_{|phi}$ é o desvio padrão calculado pelo método LS. O valor máximo para um conjunto de 1000 eventos é de 3.48, quando se assume uma distribuição gaussiana.

plicações mais detalhadas.

Aplicamos o processo de subtração de senóides às séries de tempo dos anos de 1983, 1985, 1989 e 1993 e a partir dos espectros de potência das “séries reduzidas”, determinamos os períodos. As amplitudes e as fases foram obtidas através do método LS e suas respectivas variâncias através do algoritmo DEE. Os resultados são mostrados na Tab.(6.4) e a Fig.(6.12) mostra as distribuições de erros para as estimativas do período.

Ano	Período (s)	σ_P	Amplitude	σ_A	T_{max} (BJDD)	$\sigma_{T_{max}}$
	(s)	(s)	(mmi)	(mmi)	244 0000.+	(s)
1983	539.3581	3.21×10^{-3}	5.4×10^{-3}	8.01×10^{-4}	5394.876491	35.62
1985	539.3490	3.50×10^{-3}	2.6×10^{-3}	6.81×10^{-4}	6179.976650	30.49
1989	539.3642	12.51×10^{-3}	6.0×10^{-3}	5.54×10^{-4}	7592.560220	7.64
1993	539.3549	9.98×10^{-3}	7.2×10^{-3}	5.88×10^{-4}	9073.822393	16.33

Tab. 6.5: Período de ~ 539 s.

Aplicamos o método direto aos dados da Tab.(6.4) e na Fig.6.13 mostramos o gráfico de P contra a data. Como podemos ver, os erros nas estimativas são muito maiores do que os erros encontrados para o período dominante de 516s. Para

$$P(t) = P_0 + \frac{dP_{539}}{dt} (t - t_0), \quad (6.20)$$

onde $t_0 = 244\,0000$. BJDD, encontramos

$$P_0 = 539.3522 \pm 0.0250 \text{ s}, \quad (6.21)$$

$$\frac{dP_{539}}{dt} = (+0.70 \pm 4.78) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.22)$$

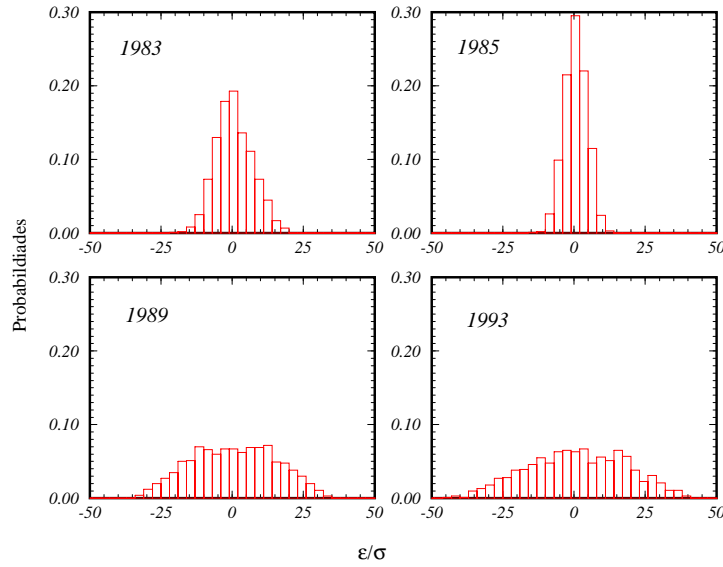


Fig. 6.11: Probabilidades de ocorrências de um determinado valor para ϵ_A/σ_A , onde ϵ é o erro na estimativa da amplitude e σ é o desvio padrão calculado pelo método LS. O valor máximo para um conjunto de 1000 eventos é de 3.48, quando se assume uma distribuição gaussiana.

Embora o valor de $\sigma_{\dot{P}} > \dot{P}$, podemos usar (6.22) para estabelecer limites para o valor de dP/dt . Assumindo que o *desvio máximo* que o valor real de dP/dt pode ter em relação ao valor encontrado acima é de $4\sigma_{\dot{P}}$, então:

$$\dot{P}_{539} - 4\sigma_{\dot{P}} \leq \frac{dP_{539}}{dt} \leq \dot{P}_{539} + 4\sigma_{\dot{P}}, \quad (6.23)$$

$$-18.4 \times 10^{-11} s/s \leq \frac{dP_{539}}{dt} \leq +19.8 \times 10^{-11} s/s. \quad (6.24)$$

Em seguida aplicamos o *algoritmo modificado de O'Donoghue* e os melhores valores encontrados foram:

$$T_{max0} = (244\,7592.567981 \pm 0.0000016) \text{ BJDD}; \quad (6.25)$$

$$P = (539.364516 \pm 0.000028) \text{ s}; \quad (6.26)$$

$$\dot{P} = (+16.77 \pm 0.24) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.27)$$

A *escala de tempo*, τ_{539} , é:

$$\tau_{539} = (1.02 \pm 0.02) \times 10^5 \text{ anos}. \quad (6.28)$$

O diagrama (O-C) para o período de 539 s pode ser visto na Fig.(6.14) e os valores de (O - C) para a medida de fase de cada ano podem ser vistos na Tab.(6.6). Como fizemos anteriormente, para o período de 516 s, para que as medidas de 1979, 1980, 1981 e 1984 aparecessem no diagrama usamos $\sigma_{T_{max}} = 100 \text{ s}$.

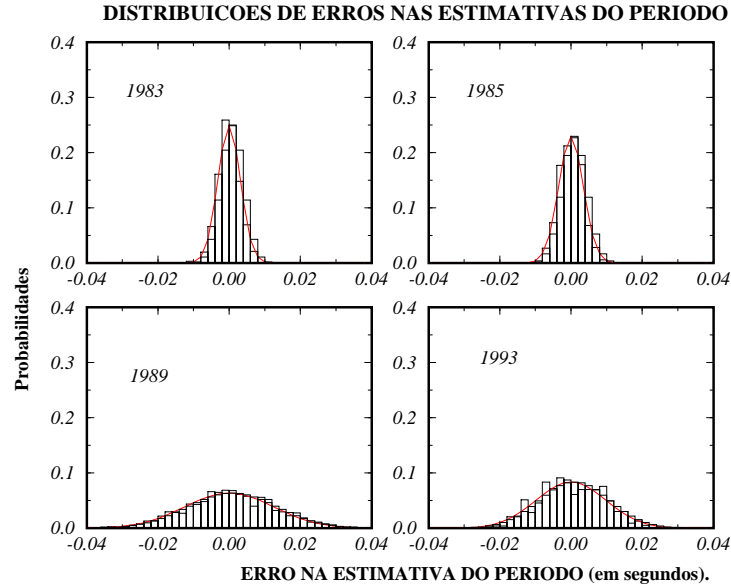


Fig. 6.12: Distribuições empíricas de erros para as estimativas do período da senóide de 539s.

Tab. 6.6: Valores de (O-C) para cada ano ($P = 516$ s).

Ano	T_{max} (BJDD) (244 0000.+)	E (ciclos)	(O - C) (s)	$\sigma_{T_{max}}$ (s)
1979	4232.939661	-538186	6544.8	(100.)
1980	4289.901068	-529061	6309.1	(100.)
1981	4732.175921	-458211	4880.4	(100.)
1983	5394.870877	-352051	2787.6	36.
1984	5791.291465	-288547	1722.1	(100.)
1985	6179.977109	-226283	1169.5	30.
1989	7592.567985	0	0.4	8.
1993	9073.824993	237278	1272.2	16.

O terceiro passo foi usar os valores conseguidos com o método do diagrama (O-C) como valores iniciais para o *ajuste não-linear de senóides*, cujos resultados foram:

$$T_{max0} = (244\,7593.342115 \pm 0.000019) \text{ BJDD}, \quad (6.29)$$

$$P = (539.364516 \pm 0.000005) \text{ s}, \quad (6.30)$$

$$\dot{P}_{539} = (+16.679 \pm 0.005) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.31)$$

A *escala de tempo* para a variação, τ_{539} , é:

$$\tau_{539} = \frac{P}{\dot{P}} \simeq (1.0247 \pm 0.0003) \times 10^5 \text{ anos}. \quad (6.32)$$

6.5 O período de 451 s.

Os valores encontrados para os períodos estão na tabela Tab.(6.7) e a figura Fig.(6.15) mostra o gráfico de P contra a data. O resultado encontrado foi:

$$\frac{dP}{dt} = (+3.46 \pm 2.12) \times 10^{-11} \text{ s/s}. \quad (6.33)$$

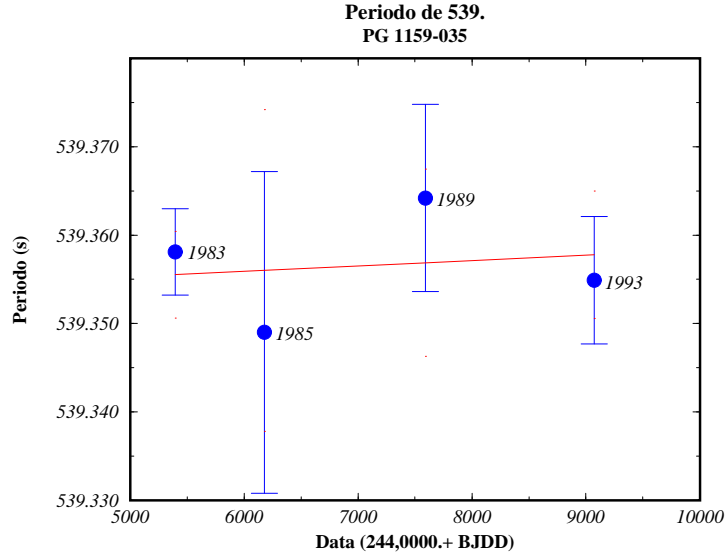


Fig. 6.13: O gráfico mostra as estimativas para o período de 539s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras verticais representam σ_P (em segundos).

Construímos, então, o diagrama (O-C) usando o algoritmo modificado de O'Donoghue. Os resultados foram:

$$T_{max0} = 244\,7592.561815 \pm 0.000023 \text{ BJDD}, \quad (6.34)$$

$$P = 451.595867 \pm 0.000014 \text{ s}, \quad (6.35)$$

$$\dot{P}_{451} = (+11.11 \pm 0.11) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.36)$$

com uma escala evolucionária de tempo, τ_{451} ,

$$\tau_{451} = (1.29 \pm 0.02) \times 10^5 \text{ anos}. \quad (6.37)$$

O diagrama (O-C) pode ser visto na Fig.(6.16) e os dados utilizados em sua construção estão na Tab.(6.8).

Tab. 6.7: Período de 451s.

Ano	P (s)	σ_P (s)	T_{max} (BJDD)	$\sigma_{T_{max}}$
1983	451.5924	0.91×10^{-2}	5394.872628	29.6
1985	451.5843	12.22×10^{-2}	6179.970339	31.5
1989	451.5960	2.47×10^{-2}	7592.556729	11.2
1993	451.5996	1.88×10^{-2}	9073.818295	13.1

Os valores calculados pelo método *nls* para P , \dot{P}_{451} e τ_{451} foram:

$$T_{max0} = (244\,7593.340746 \pm 0.000025) \text{ BJDD}, \quad (6.38)$$

$$P = (451.595867 \pm 0.000006) \text{ s}, \quad (6.39)$$

$$\dot{P}_{451} = (+10.470 \pm 0.005) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.40)$$

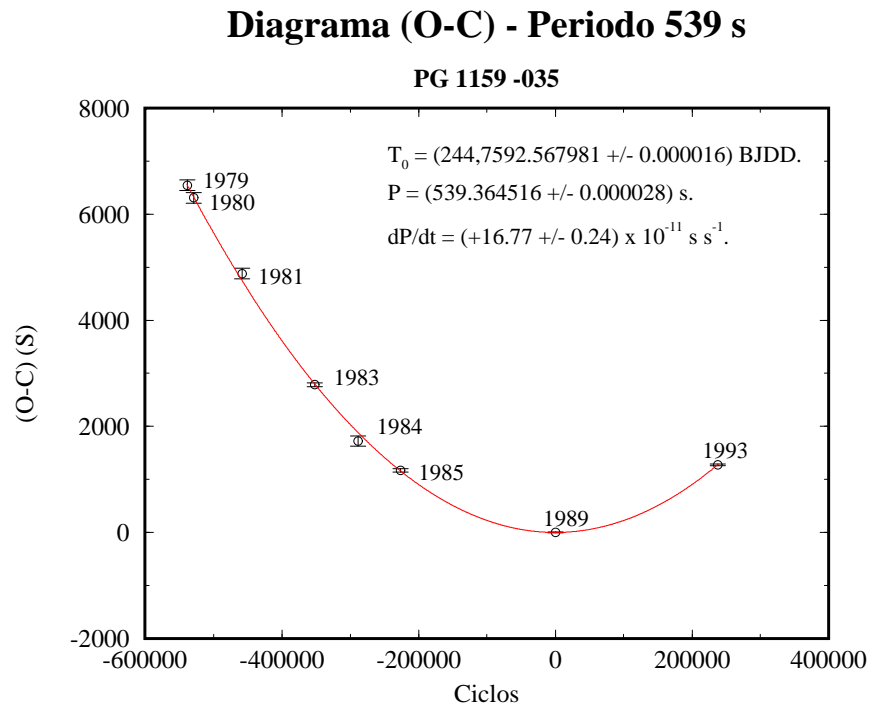


Fig. 6.14: Diagrama (O-C) para o período de 539 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).

Tab. 6.8: Valores de (O-C) para cada ano ($P = 451 \text{ s}$).

Ano	$T_{max} \text{ (BJDD)}$ (244 0000.+)	E (ciclos)	$(O - C)$ (s)	$\sigma_{T_{max}}$ (s)
1979	4232.942067	-642779.	5193.3	(100.)
1980	4289.898204	-631882.	5163.4	(100.)
1981	4732.175974	-547262.	3920.5	(100.)
1983	5394.878216	-420469.	2199.4	29.
1984	5791.292683	-344625.	1572.5	(100.)
1985	6179.975389	-270260.	831.7	31.
1989	7592.561956	0.	12.2	11.
1993	9073.828755	283396.	1001.5	13.

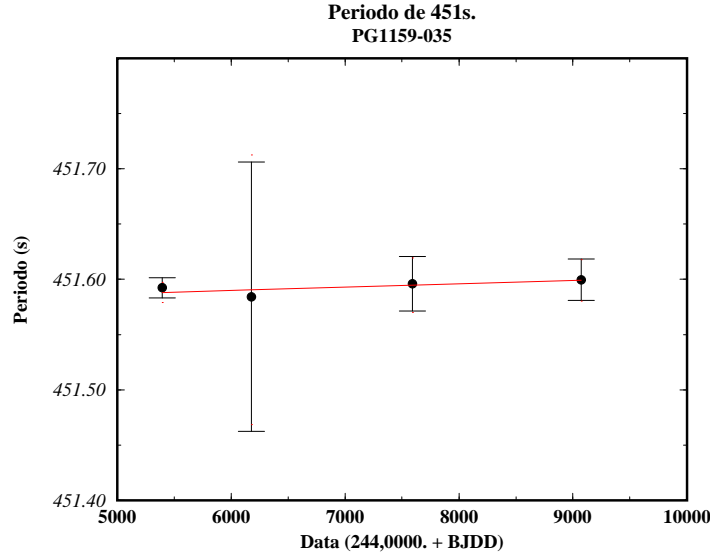


Fig. 6.15: O gráfico mostra as estimativas para o período de 451s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras representam o σ_P para cada ano.

A escala de tempo para a variação, τ_{451} , é:

$$\tau_{451} = \frac{P}{\dot{P}} \simeq (1.3667 \pm 0.0005) \times 10^5 \text{ anos.} \quad (6.41)$$

6.6 O período de 493 s .

Os valores encontrados para os períodos estão na tabela Tab.(6.9) e a figura Fig.(6.17) mostra o gráfico de P contra a data. O resultado do ajuste foi:

$$\frac{dP}{dt} = (+11.78 \pm 0.98) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \quad (6.42)$$

Tab. 6.9: Período de 493s.

Ano	P (s)	σ_P (s)	T_{max} (BJDD)	$\sigma_{T_{max}}$
1983	493.7691	1.33×10^{-2}	5394.872140	31.7
1985	493.7526	1.10×10^{-2}	6179.969650	26.8
1989	493.7983	2.45×10^{-2}	7592.560164	12.8
1993	493.7941	2.31×10^{-2}	9073.817425	13.0

Usando a técnica do diagrama (O-C) (algoritmo modificado de O'Donoghue) foram obtidos os seguintes resultados:

$$T_{max0} = 7592.565701 \pm 0.000026 \text{ BJDD}, \quad (6.43)$$

$$P = 493.798575 \pm 0.000014 \text{ s}, \quad (6.44)$$

$$\dot{P}_{493} = (+10.85 \pm 0.20) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}, \quad (6.45)$$

Diagrama (O-C) - Período 451 s

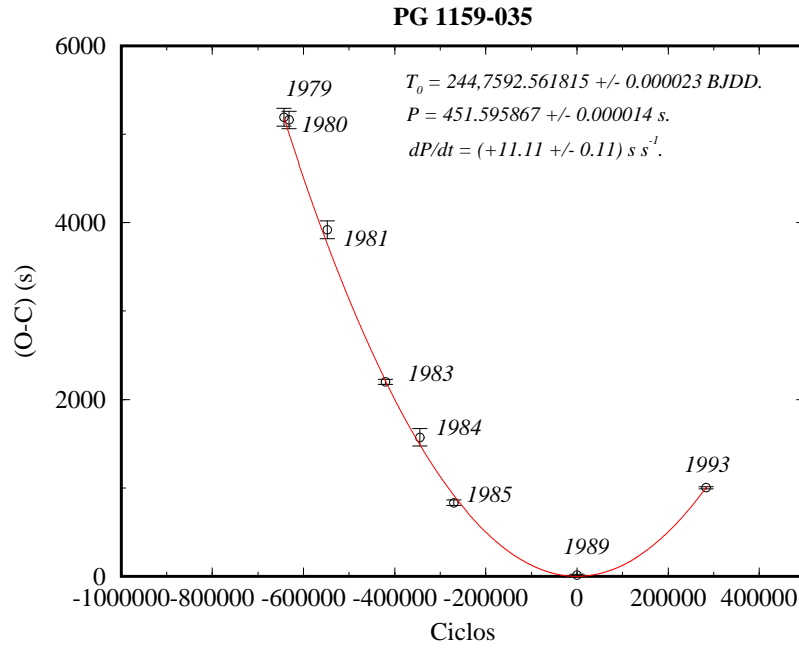


Fig. 6.16: Diagrama (O-C) para o período de 451 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).

Tab. 6.10: Valores de (O-C) para cada ano ($P = 493$ s).

Ano	T_{max} (BJDD) (244 0000.+)	E (ciclos)	$(O - C)$ (s)	$\sigma_{T_{max}}$ (s)
1979	4232.942064	-587843.	4553.3	(100.)
1980	4289.901708	-577877.	4669.9	(100.)
1981	4732.173692	-500490.	3379.0	(100.)
1983	5394.871032	-384535.	2015.5	32.
1984	5791.295968	-315171.	1285.7	(100.)
1985	6179.967396	-247164.	737.3	27.
1989	7592.565880	0.	15.4	13.
1993	9073.828892	259175.	894.0	13.

com uma escala de tempo de:

$$\tau_{493} = (1.44 \pm 0.03) \times 10^5 \text{ anos.} \tag{6.46}$$

O diagrama (O-C) é mostrado na Fig.(6.18) e os dados utilizados na construção do diagrama estão na Tab.(6.10).

Os valores calculados pelo *método nls* para P , \dot{P}_{493} e τ_{493} foram:

$$T_{max0} = (244\,7593.337428 \pm 0.000030) \text{ BJDD}, \tag{6.47}$$

$$P = (493.798575 \pm 0.000008) \text{ s}, \tag{6.48}$$

$$\dot{P}_{493} = (+11.279 \pm 0.007) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}. \tag{6.49}$$

A *escala de tempo* para a variação, τ_{493} , é:

$$\tau_{493} = \frac{P}{\dot{P}} \simeq (1.3873 \pm 0.0006) \times 10^5 \text{ anos.} \tag{6.50}$$

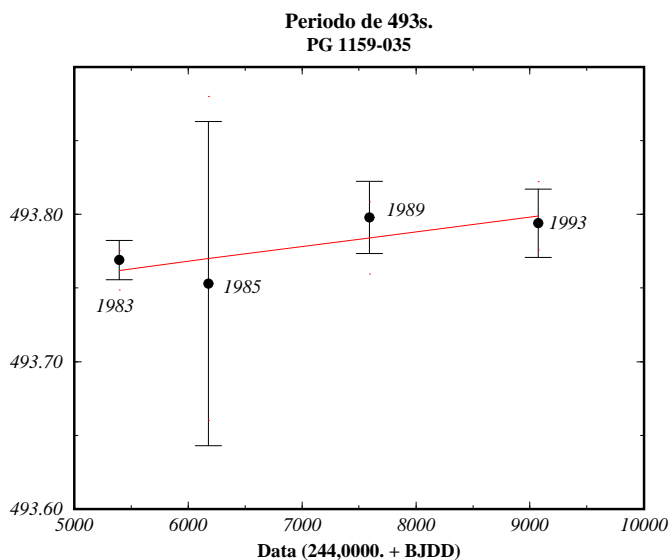


Fig. 6.17: O gráfico mostra as estimativas para o período de 493s para os anos de 1983, 1985, 1989 e 1993. As barras representam o σ_P para cada ano.

Diagrama (O-C) - Período 493 s

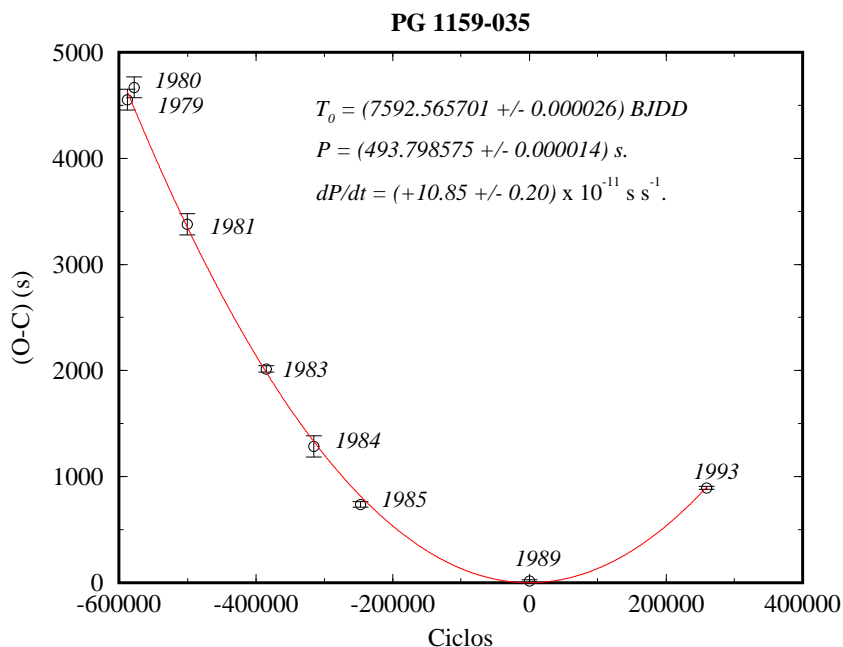


Fig. 6.18: Diagrama (O-C) para o período de 493 s. No eixo vertical temos a diferença (em segundos) entre a fase observada (O) e a fase calculada quando se assume que o período não varia no tempo (C). A diferença (O-C) é plotada como uma função do número de ciclos (E).

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos para as taxas de variação temporal dos períodos de pulsação de 516 s, 539 s, 451 s e 493 s da estrela DOV PG 1159-035, foram:

Período	dP/dt	τ	Método
516 s	$(+13.02 \pm 1.04) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+14.04 \pm 0.16) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+13.298 \pm 0.003) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$	$(1.26 \pm 0.10) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.16 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.2297 \pm 0.0002\text{s}) \times 10^5 \text{ anos}$	Método Direto (O-C) nls
539 s	$(+1.70 \pm 4.78) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+16.77 \pm 0.24) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+16.679 \pm 0.005) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$	$(10. \pm 28.) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.02 \pm 0.02) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.0247 \pm 0.0003) \times 10^5 \text{ anos}$	Método Direto (O-C) nls
451 s	$(+3.46 \pm 2.12) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+11.11 \pm 0.11) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+10.470 \pm 0.005) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$	$(4.14 \pm 2.54) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.29 \pm 0.02) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.3667 \pm 0.0005) \times 10^5 \text{ anos}$	Método Direto (O-C) nls
493 s	$(+11.78 \pm 0.98) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+10.85 \pm 0.20) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ $(+11.279 \pm 0.007) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$	$(1.33 \pm 0.11) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.44 \pm 0.03) \times 10^5 \text{ anos}$ $(1.3873 \pm 0.0006) \times 10^5 \text{ anos}$	Método Direto (O-C) nls

Tab. 7.1: Tabela com os resultados.

Como foi explicado no Cap.2, Kawaler, Hansen & Winget (1985) e Kawaler (1986) desenvolveram modelos para um núcleo de nebulosa planetária (PNN), usando estrelas de cores muito azuis do ramo assintótico das gigantes como modelos iniciais e simulando a perda de massa observada, através da eliminação artificial do envelope da estrela. Para PNNs com $\log(L/L_{\odot}) \leq 3$, eles encontraram que dP/dt **era sempre positivo** e que a escala de tempo para os períodos deveria ser da ordem de 10^6 ou menos. Portanto, os valores que encontramos para a taxa de variação temporal do período de 516 s e para sua escala de tempo são consistentes com essas previsões.

Os modelos de Kawaler & Bradley (1995) que tentam explicar \dot{P} s negativos através de “*mode trapping*” são bastante incertos, pois não sabemos exatamente quão estratificada é a estrutura da estrela, já que ela ainda está na fase de pré-anã branca, e a incerteza na sua temperatura e gravidade superficiais, bem como a incerteza no seu exato canal de formação, é grande. Estes modelos só foram gerados como uma tentativa de explicar a taxa negativa de variação temporal do período, que estava errada.

Por outro lado, conseguimos explicar que o sinal negativo para o valor de dP/dt do período de 516 encontrado anteriormente por Winget *et al.* (1985, 1988 e 1991) se deve às ambigüidades na determinação das fases usadas no diagrama (O-C) por Winget *et al.* (1985). Os valores obtidos foram então usados como valores iniciais nas medidas posteriores de dP/dt (Winget *et al.* 1988 e 1991) o que explica a concordância dessas medidas com a primeira.

Este problema sugere a necessidade de se tomarem excessivos cuidados quanto à precisão das medidas de fase de um sinal periódico. As medidas de fase devem ser suficientemente precisas ($\sigma_\phi < \frac{P}{8}$) para evitar ambigüidades no diagrama (O-C). Estimativas para σ_ϕ feitas pelo método de mínimos quadrados são, em geral, muitas vezes menores que os valores reais, por isso, não é aconselhável o uso dessas estimativas. Os desvios-padrões devem ser calculados de outro modo, como por exemplo, através de *simulações de Monte Carlo* como as utilizadas neste trabalho. Também demonstramos que é possível se reduzirem os erros nas medidas de período, de fase e também de amplitude através da *técnica de subtração de senóides*.

Finalmente, chamamos a atenção para a conveniência de se empregar o *método direto* na medida de dP/dt , pelo menos para o caso de estrelas pulsantes cujos períodos estejam variando suficientemente rápido, como é o caso da PG 1159-035.

Sugestão para Trabalhos Futuros

As informações que ainda podem ser extraídas das curvas de luz da estrela PG 1159-035 ainda não se esgotaram. Os dados fotométricos obtidos em 1993 só foram parcialmente analisados. Uma análise mais detalhada desses dados, sobretudo com a aplicação de novas técnicas de análise pode nos levar à identificação de novos modos de pulsação e a uma melhor determinação dos períodos de pulsação já identificados nesses dados.

As técnicas de medida de período e fase também podem ser melhoradas e assim poderemos obter medidas mais precisas para as taxas de variação temporal dos quatro períodos estudados neste trabalho, bem como de outros períodos de pulsação presentes nas curvas de luz da estrela. Se as medidas de fase forem suficientemente precisas, poderemos então calcular a variação temporal em segunda ordem de alguns modos de pulsação, d^2P/dt^2 .

Apêndice A

AJUSTE LINEAR DE SENÓIDES POR MÍNIMOS QUADRADOS

No ajuste linear de senóides por mínimos quadrados o que fazemos é ajustar uma senóide do tipo:

$$Y = A + B \cdot x + C \cdot \sin \{ \omega \cdot (x - \phi) \} \quad (\text{A.1})$$

a um conjunto de pontos $\{x_i, y_i\}$. Ou seja, calculamos os valores dos parâmetros A , B , C e ϕ que melhor ajustam os pontos $\{x_i, y_i\}$ à função (A.1). Para fazer isso, utilizamos o *método de mínimos quadrados (least-square)* cujo algoritmo é descrito neste apêndice.

Seja y_i o valor real e Y_i o valor calculado através da equação:

$$Y_i = A + B \cdot x_i + C \cdot \sin \{ \omega \cdot (x_i - \phi) \}. \quad (\text{A.2})$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b, \quad (\text{A.3})$$

podemos reescrever (A.2) como segue:

$$Y_i = A + B \cdot x_i + C \cdot \{ \sin(\omega \cdot x_i) \cdot \cos(\omega \cdot \phi) + \cos(\omega \cdot x_i) \cdot \sin(\omega \cdot \phi) \} \quad (\text{A.4})$$

ou

$$Y_i = A + B \cdot x_i + \{ C \cdot \cos(\omega \cdot \phi) \} \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + \{ -C \cdot \sin(\omega \cdot \phi) \} \cdot \cos(\omega \cdot x_i). \quad (\text{A.5})$$

Neste ponto, usaremos as seguintes definições:

$$a_0 \equiv A; \quad (\text{A.6})$$

$$a_1 \equiv B; \quad (\text{A.7})$$

$$a_2 \equiv C \cdot \cos(\omega \cdot \phi); \quad (\text{A.8})$$

$$a_3 \equiv -C \cdot \sin(\omega \cdot \phi). \quad (\text{A.9})$$

Assim, podemos escrever a eq.(A.5) da seguinte forma:

$$Y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i) \quad (\text{A.10})$$

O que queremos fazer é calcular os valores de a_0 , a_1 , a_2 e a_3 que melhor ajustem a eq.(A.10) ao conjunto de pontos $\{x_i, y_i\}$. Para isso, introduziremos uma função F , definida da seguinte forma:

$$F \equiv \sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)^2. \quad (\text{A.11})$$

F é o somatório das diferenças quadráticas entre os valores reais, y_i , e os valores calculados pela eq.(A.10), Y_i . Assim, o *melhor ajuste* ocorre para aqueles valores de a_0, a_1, a_2 e a_3 que *minimizam* a função F . Ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0. \quad (\text{A.12})$$

com $j = 0, 1, 2, 3$. Este é o chamado *Crítério dos Mínimos Quadrados*.

Aplicando a equação (A.10) á definição (A.9), temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial a_j} (Y_i - y_i)^2 \right\} = \sum_{i=1}^N \{ 2 \cdot (Y_i - y_i) \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial a_j} \} = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou

$$\sum_{i=1}^N \{ (Y_i - y_i) \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial a_j} \} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Derivando ambos os termos da eq.(A.8) em relação a cada um dos parâmetros a_j , encontramos:

$$\frac{\partial Y_i}{a_0} = 1; \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial Y_i}{a_1} = x_i; \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial Y_i}{a_2} = \sin(\omega \cdot x_i); \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial Y_i}{a_3} = \cos(\omega \cdot x_i). \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

Usando as equações acima juntamente com a eq.(A.11), podemos reescrever a eq.(A.14) na forma do seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i)] - y_i \} \cdot 1 = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i)] - y_i \} \cdot x_i = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i)] - y_i \} \cdot \sin(\omega \cdot x_i) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i)] - y_i \} \cdot \cos(\omega \cdot x_i) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Executando o produto dos termos do lado esquerdo:

$$\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(\omega \cdot x_i)] - y_i \} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \{ [a_0 \cdot x_i + a_1 \cdot x_i^2 + a_2 \cdot x_i \cdot \sin(w \cdot x_i) + a_3 \cdot x_i \cdot \cos(w \cdot x_i)] \\
 & - y_i \cdot x_i \} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^N \{ [a_0 \cdot \sin(w \cdot x_i) + a_1 \cdot x_i \cdot \sin(w \cdot x_i) + a_2 \cdot \sin^2(w \cdot x_i) + \\
 & a_3 \cdot \cos(w \cdot x_i) \cdot \sin(w \cdot x_i)] - y_i \cdot \sin(w \cdot x_i) \} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^N \{ [a_0 \cdot \cos(w \cdot x_i) + a_1 \cdot x_i \cdot \cos(w \cdot x_i) + a_2 \cdot \cos(w \cdot x_i) \cdot \sin(w \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos^2(w \cdot x_i)] \\
 & - y_i \cdot \cos(w \cdot x_i) \} = 0
 \end{aligned}$$

Agora reescrevemos o sistema de equações na forma:

$$\begin{aligned}
 a_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N 1 \right) + a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \sin(\omega \cdot x_i) \right) + a_3 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \cos(\omega \cdot x_i) \right) &= \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \\
 a_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) + a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot \sin(\omega \cdot x_i) \right) + a_3 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot \cos(\omega \cdot x_i) \right) &= \left(\sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i \right) \\
 a_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \sin(\omega \cdot x_i) \right) + a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot \sin(\omega \cdot x_i) \right) + a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \sin^2(\omega \cdot x_i) \right) + \\
 a_3 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \cos \omega x \cdot \sin \omega x \right) &= \left(\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sin \omega x \right) \\
 a_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \cos \omega x \right) + a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot \cos \omega x \right) + a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \sin \omega x \cdot \cos \omega x \right) + \\
 a_3 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \cos^2(\omega \cdot x_i) \right) &= \left(\sum_{i=1}^N y_i \cdot \cos \omega x \right)
 \end{aligned}$$

O sistema de equações acima pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

onde os elementos $\{A_{ij}\}$ da matriz [A] e os elementos $\{B_i\}$ da matriz [B] são definidos da seguinte forma:

$$A_{11} \equiv \left(\sum 1 \right) = N \quad (\text{A.24})$$

$$A_{12} = A_{21} \equiv \left(\sum x_i \right) \quad (\text{A.25})$$

$$A_{13} = A_{31} \equiv \left(\sum \sin \omega x \right) \quad (\text{A.26})$$

$$A_{14} = A_{41} \equiv \left(\sum \cos \omega x \right) \quad (\text{A.27})$$

$$A_{22} \equiv \left(\sum x_i^2 \right) \quad (\text{A.28})$$

$$A_{23} = A_{32} \equiv \left(\sum x_i \cdot \sin wx \right) \quad (\text{A.29})$$

$$A_{24} = A_{42} \equiv \left(\sum x_i \cdot \cos wx \right) \quad (\text{A.30})$$

$$A_{33} \equiv \left(\sum \sin^2(\omega \cdot x_i) \right) \quad (\text{A.31})$$

$$A_{34} = A_{43} \equiv \left(\sum \cos wx \cdot \sin wx \right) \quad (\text{A.32})$$

$$A_{44} \equiv \left(\sum \cos^2(\omega \cdot x_i) \right) \quad (\text{A.33})$$

$$B_1 \equiv \left(\sum y_i \right) \quad (\text{A.34})$$

$$B_2 \equiv \left(\sum y_i \cdot x_i \right) \quad (\text{A.35})$$

$$B_3 \equiv \left(\sum y_i \cdot \sin wx \right) \quad (\text{A.36})$$

$$B_4 \equiv \left(\sum y_i \cdot \cos wx \right) \quad (\text{A.37})$$

$$(\text{A.38})$$

Existem diversos métodos numéricos que podem ser usados para a resolução do sistema de equações acima. Neste trabalho, nós utilizamos o “*Método da Eliminação de Gauss*” com pivotamento total. A descrição desse método pode ser encontrada em livros sobre Cálculo Numérico. Uma vez resolvido o sistema, podemos finalmente calcular os parâmetros A , B , C e ϕ :

$$A = a_0 \quad (\text{A.39})$$

$$B = a_1 \quad (\text{A.40})$$

$$a_2 \equiv C \cdot \cos wx \quad (\text{A.41})$$

$$a_3 \equiv C \cdot \sin wx \quad (\text{A.42})$$

$$\Rightarrow \tan(w \cdot \phi) = -\frac{a_3}{a_2} \quad (\text{A.43})$$

$$\Rightarrow w \cdot \phi = \arctan\left(-\frac{a_3}{a_2}\right) \quad (\text{A.44})$$

$$C = \frac{1}{a_2} \arctan\left(-\frac{a_3}{a_2}\right) \quad (\text{A.45})$$

$$\phi = \frac{1}{w} \cdot \arctan\left(-\frac{a_3}{a_2}\right) \quad (\text{A.46})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Appleton, P., Kawaler, S., and Eitter, J., 1993. *AJ*, **106**, 1973.
- [2] Balachandram, S., Robinson, E.L., Kepler, S.O., 1983. *PASP*, **95**, 653.
- [3] Baliunas, S.L., *et al.*, 1983. *ApJ*, **275**, 752.
- [4] Baliunas, S.L., Noyes, R.W., Porter, A., Duncan, O.K., 1985. *ApJ*, **294**, 310.
- [5] Barning, E.J.M., 1962. *BAN*, **17**, 22.
- [6] Barstow, M.A., Holberg, J.B., Grauer, A.D., Winget, D.E., 1986. *ApJ*, **306**, L25.
- [7] Belserene, E.P., 1986. in *The Study of Variable Stars Using Small Telescopes*, eds. J.R.Percy, Cambridge University Press, p. 229.
- [8] Birney, D.S., 1991. *Observational Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Bloomfield, P., 1976. *Fourier Analysis of Time Series: an Introduction*, John Wiley & Sons.
- [10] Bond, H.E., Grauer, A.D., Green, R.F., Liebert, J.W., 1984. *ApJ*, **279**, 751.
- [11] Bradley, P.A., 1995. in *Baltic Astronomy, vol.4*, eds. E. G. Meišt̄as and J.-E. Solheim, Ames, p. 536.
- [12] Breger, M., 1980. *ApJ*, **237**, 850.
- [13] Brigham, E.O., 1974. *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [14] Chatifield, C., 1975. *The Analysis of Time Series: an Introduction*, Chapman and Hall.
- [15] Costa, J.E.S., Kepler, S.O., Winget, D.E., 1995. in *Baltic Astronomy, vol.4*, eds. E. G. Meišt̄as and J.-E. Solheim, Ames, p. 334.
- [16] Cox, J.P., 1980. *Theory of Stellar Pulsation*, Princeton University Press.
- [17] Davis, S.R., 1990. *MNRAS*, **244**, 93.
- [18] de Korte, P.A., *et al.*, 1981. *Space Sci. Rev.*, **80**, 495.
- [19] de Jager, O.C., Swanepoel, J.W.H., Raubenheimer, B.C., 1989. *A&A*, **221**, 180.

-
- [20] de Jager, O.C., Meintjes, P.J., O'Donoghue, D., 1994. *MNRAS*, **267**, 577.
- [21] Deeming, T.J., 1975. *36*, **ApJ**, 137.
- [22] Delache, P., Sherrer, P.H., 1983. *Nature*, **306**, 651.
- [23] Durvall, T.L., Harvey, J.W., 1984. *Nature*, **310**, 19.
- [24] Dworetzky, M.M., 1983. *ApJ*, **203**, 917.
- [25] Ferraz-Mello, S., 1981. *ApJ*, **86**, 619.
- [26] Fontaine, G., Wewemael, F., 1991. in *Proceedings of the IAU Symposium No. 145, The Photospheric Abundance Connection*, eds. Michaud, G., Tutukov, A., (Dordrecht:Reidel), p. 421.
- [27] Foster, G., 1995. *ApJ*, **109**, 188.
- [28] Foster, G., 1996a. *ApJ*, **111**, 541.
- [29] Foster, G., 1996b. *ApJ*, **111**, 555.
- [30] Fullerton, A.W., 1986. in *In The Study of Variable Stars Using Small Telescopes*, eds. J.R. Percy, (Cambridge University Press), p. 201.
- [31] Grauer, A.D., Bond, H.E., 1984. *ApJ*, **277**, 211.
- [32] Green, R.F., Schmidt, M., Liebert, J., 1986. *ApJ*, **61**, 305.
- [33] Greenstein, J.L., 1960. in *Star and Stellar Systems, Vol. 6, Stellar Atmospheres*, eds. Greenstein, J.L., Inc., p. 676.
- [34] Hansen, C.J., Kawaler, S.D., 1994. *Stellar Interiors*, Springer-Verlag.
- [35] Heck, A., Manfroid, J., Mersch, G., 1985. *A&ASS*, **59**, 65.
- [36] Horne, J., Baliunas, S., 1986. *ApJ*, **302**, 757.
- [37] Horowitz, P., Papaliolios, C., Carleton, N.P., 1971a. *ApJ*, **163**, 5.
- [38] Horowitz, P. *et al.*, 1971b. *ApJ*, **166**, 91.
- [39] Iben, I., Jr., Tutukov, A.V., 1984. *ApJ*, **282**, 615.
- [40] Kanaan, A.N., 1990. *Dissertação de Mestrado*, IF-UFRGS.
- [41] Kawaler, S.D., Hansen, C.J., Winget, D.E., 1985. *ApJ*, **295**, 547.
- [42] Kawaler, S.D., 1986. *Ph.D. Dissertation*, University of Texas, Austin.
- [43] Kawaler, S.D., Bradley, P.A., 1994. *ApJ*, **427**, 415.

-
- [44] Kawaler, S.D., 1995. in *Baltic Astronomy, v ol.4*, eds. E. G. Meištas and J.-E. Solheim, Ames, p. 329.
- [45] Kepler, S.O., Robinson, E.L., Nather, R.E., McGraw, J.T., 1982. *ApJ*, **254**, 100.
- [46] Kepler, S.O., *et a.*, 1983. *ApJ*, **271**, 744.
- [47] Kepler, S.O., 1984a. *ApJ*, **278**, 754.
- [48] Kepler, S.O., 1984b. *ApJ*, **286**, 314.
- [49] Kepler, S.O. *et al.*, 1991. *ApSS*, **378**, L45.
- [50] Kepler, S.O., Nelan, E.P., 1993. *AJ*, **105**, 608.
- [51] Kepler, S.O., Bradley, P.A., 1995. in *Baltic Astronomy, Vol.4*, eds. E. G. Meištas and J.-E. Solheim, Ames, p. 166.
- [52] Kleinman, S.J., *et al.*, 1994. in *1995*, eds. Baltic Astronomy, Vol.4, E. G. Meištas and J.-E. Solheim, p. Ames. 482
- [53] Kovács, G., 1980. *A&SS*, **69**, 485.
- [54] Kovács, G., 1981. *ApSS*, **78**, 175.
- [55] Lafler, J., Kinman, T.D., 1965. *ApJS*, **11**, 216.
- [56] Lamb, D.Q., Van Horn, H.M., 1975. *ApJ*, **200**, 306.
- [57] Lomb, N.R., 1976. *ASS*, **39**, 447.
- [58] Loumos, G., Deeming, T.J., 1978. *ApSS*, **56**, 285.
- [59] Lucy, L.B., Sweeney, M.A., 1971. *AJ*, **76**, 544.
- [60] Luyten, W.J., 1952. *ApJ*, **116**, 363.
- [61] Martinez, P., Koen, C., 1994. *ApJ*, **267**, 1039.
- [62] McGraw, J.T., Starrfield, S.G., Liebert, J., Green, R.F., 1979. in *White Dwarfs and Variable Degenerate Stars*, eds. Van Horn, H.M., Weidemann, V., Rochester, New York, p. 100.
- [63] Meisel, D.D., 1978. *ApJ*, **83**, 538.
- [64] Meisel, D.D., 1979. *ApJ*, **84**, 116.
- [65] Merzbacher, E., 1970. *Quantum Mechanics*, 2nd.ed.; New York: John Wiley and Sons.
- [66] Messiah, A., 1962. *Quantum Mechanics*, (Amsterdam: North-Holland).

-
- [67] Mestel, L., 1952. *MNRAS*, **112**, 583.
- [68] Nather, R.E., 1973. *Vistas in Astronomy*, **15**, 91.
- [69] Nather, R.E., Winget, D.E., Clemens, J.C., Hansen, C.J., Hine, B.P., 1990. *ApJ*, **361**, 309.
- [70] Nemeč, A.F.L., Nemeč, J.M., 1985. *ApJ*, **90**, 2317.
- [71] O'Brien, M.S. *et al.*, 1996. *ApJ*, **467**, 397.
- [72] O'Donoghue, D., 1994. *MNRAS*, **270**, 222.
- [73] Patterson, J., Nather, R.E., Robinson, E.L., 1979. *ApJ*, **232**, 819.
- [74] Patterson, J., Steiner, J.E., 1983. *ApJ*, (*Letters*), **264**, 61.
- [75] Patterson, J., Sterner, E., Halpern, J.P., Raymond, J.C., 1992. *ApJ*, **384**, 234.
- [76] Percy, J., *et al.*, 1981. *AJ*, **86**, 53.
- [77] Percy, J., 1992. in *Variable Star Research: An International Perspective*, eds. Percy, J.R., Mattel, J.A., Sterken, C, Cambridge University Press, p. 100.
- [78] Percy, J., 1995. *Variable Stars*, ISYA.
- [79] Pisarenko, V.F., 1973. *Theory Probab. Appl.*, **18**, 826.
- [80] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1986. *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press.
- [81] Provencal, J.L., 1995. in *Baltic Astronomy, vol.4*, eds. E. G. Meistas and J.-E. Solheim, Ames, p. 395.
- [82] Provencal, J.L., Winget, D.E., Nather, R.E., Robinson, E.L., Solheim, J.E., Clemens, J.C., Bradley, P.A., Kleinman, S.J., Kanaan, A., Claver, C.F., Hansen, C.J., Marar, T.M.K., Sheetha, S., Ashoka, B.N., Leibowitz, E.M., Meistas, E.G., Bruvold, A., Vauclair, G., Dolez, N., Chevreton, M., Barstow, M.A., Sansom, A.E., Tweedy, R.W., Fontaine, G, Bergeron, P., Kepler, S.O., Wood, M.A., Grauer, A.D., 1995. *ApJ*, **445**, 927.
- [83] Radhakrishnan, V., Manchester, R.N., 1969. *Nature*, **222**, 228.
- [84] Renson, P., 1978. *A&A*, **63**, 125.
- [85] Roberts, D.H., Lehar, J., Dreher, J.W., 1987. *AJ*, **93**, 968.
- [86] Robinson, E.L., Kepler, S.O., Nather, R.E., 1982. *ApJ*, **259**, 219.
- [87] Scargle, J.D., 1982. *ApJ*, **263**, 835.

-
- [88] Shapiro, S.L., Teukolsky, S.A., 1983. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley & Sons.
- [89] Sion, E.M., Greenstein, J.L., Landstreet, J.D., Liebert, J., Shipman, H.L., Wegner, G.A., 1983. *ApJ*, **269**, 253.
- [90] Solheim, J.-E., Robinson, E.L., Nather, R.E., Kepler, S.O., 1984. *A&A*, **135**, 1.
- [91] Stellingwerf, R.F., 1978. *ApJ*, **224**, 953.
- [92] Stover, R.J., James, E.H., Lasker, B.M., Nather, R.E., Robinson, E.L., 1980. *ApJ*, **240**, 865.
- [93] Stumpff, P., 1977. *A&A*, **56**, 13.
- [94] Stumpff, P., 1979. *A&A*, **78**, 229.
- [95] Stumpff, P., 1980. *A&A*, **41**, 1.
- [96] Tassoul, M., Fontaine, G., Winget, D.E., 1990. *ApJS*, **72**, 335.
- [97] Tomaney, A.B., 1987. in *The Second Conference on Faint Blue Stars*, eds. Philip, A.G.D., Hayes, D.S., Liebert, J.W., L. Davis Press, p. 673.
- [98] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Shibahashi, H., 1979. *Nonradial Oscillations of Stars*, Tokyo: University of Tokyo Press.
- [99] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Shibahashi, H., 1989. *Nonradial Oscillations of Stars*, 2nd.ed.; Tokyo: University of Tokyo Press.
- [100] Walker, A.M., 1971. *Biometrika*, **58**, 21.
- [101] Warner, B., O'Donoghue, D., Fairall, A.P., 1981. *MNRAS*, **196**, 705.
- [102] Wegner, G.B., Berry, D.C., Holberg, J.B., Forrester, W.T., 1982. *BullAAS*, **14**, 914.
- [103] Werner, K., 1994. *A&A*, **286**, 543.
- [104] Werner, K., 1995. in *Baltic Astronomy, Vol.4*, eds. E. G. Meišt̄as and J.-E. Solheim, Ames, p. 340.
- [105] Wesemael, F., Green, R., Liebert, L., 1985. *ApJ*, **58**, 379.
- [106] Whittle, P., 1952. *Trab.Estad.*, **3**, 43.
- [107] Winget, D.E., Van Horn, H.M., 1981. *ApJ*, **245**, L33.
- [108] Winget, D.E., Van Horn, H.M., 1982. *Sky and Tel.*, **Sep**, 216.
- [109] Winget, D.E., Fontaine, G., 1982. in *Pulsations in Classical and Cataclysmic Variable Stars*, eds. J.P. Cox, C.J. Hansen, Boulder:University of Colorado Press, p. 46.

-
- [110] Winget, D.E., Robinson, E.L., Nather, R.E., Fontaine, G., 1982. *ApJ*, **262**, L11.
- [111] Winget, D.E., Hansen, C.J., Van Horn, H.M., 1983. *Nature*, **303**, 781.
- [112] Winget, D.E., Kepler, S.O., Robinson, E.L., Nather, R.E., 1985. *ApJ*, **292**, 606.
- [113] Winget, D.E., Hansen, C.J., Liebert, J., Van Horn, H.M., Fontaine, G., Nather, R.E., Kepler, S.O., Lamb, D.Q., 1987. *ApJS*, **166**, L77.
- [114] Winget, D.E., Kepler, S.O., 1988. in *Workshop Proceedings Multimode Stellar Pulsations*, eds. a, Budapest: Konkdy Observatory, p. 205.
- [115] Winget, D.E., Nather, R.E., Clemens, J.C., Provencal, J.L., Kleinman, S.J., Bradley, P.A., Wood, M.A., Claver, C.F., Frueh, M.L., Grauer, A.D., Hine, B.P., Hansen, C.J., Fontaine, G., Achilleos, N., Wickramasinghe, D.T., Marar, T.M.K., Seetha, S., Ashoka, B.N., O'Donoghue, D., Warner, B., Kurtz, D.W., Buckley, D.A., Brickhill, J., Vauclair, G., Dolez, N., Chevreton, M., Barstow, M.A., Solheim, J.E., Kanaan, A., Kepler, S.O., Henry, G.W., Kawaler, S.D., 1991. *ApJ*, **378**, 326.
- [116] Wizinowich, P., Percy, J.R., 1979. *PASP*, **91**, 53.
- [117] Wonnacott, D., Kellet, B.J., Smalley, B., Lloyd, C., 1994. *NMRAS*, **267**, 1045.
- [118] Young, H.D., 1962. *Statistical Treatment of Experimental Data*, McGraw-Hill.
- [119] Zhang et al., 1995. *A&A*, **19**, 34.