

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Contribuições para  
a teoria de equações parabólicas  
duplamente não lineares com termos advectivos

Tese de doutorado

JOCEMAR DE QUADROS CHAGAS

Porto Alegre, 2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Contribuições para  
a teoria de equações parabólicas  
duplamente não lineares com termos advectivos**

Tese submetida por Jocemar de Quadros Chagas<sup>1</sup>,  
como requisito parcial para a obtenção do grau  
de Doutor em Ciência Matemática pelo Programa  
de Pós-Graduação em Matemática do Instituto  
de Matemática da Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul.

Professor orientador:

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcio Violante Ferreira (UFSM)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum (UFSM)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Janaína Pires Zingano (UFRGS)

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo (UFRGS)

Prof. Dr. Pedro Henrique de Almeida Konzen (UFRGS)

Porto Alegre, 2015

---

<sup>1</sup>Bolsista CNPq

### CIP - Catalogação na Publicação

Chagas, Jocemar de Quadros  
Contribuições para a teoria de equações parabólicas  
duplamente não lineares com termos advectivos /  
Jocemar de Quadros Chagas. -- 2015.  
175 f.

Orientador: Paulo Ricardo de Àvila Zingano.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equações de  
Evolução. 3. Equações Parabólicas. 4. Estimativas para  
a norma do sup. 5. Soluções Globais. I. Zingano,  
Paulo Ricardo de Àvila, orient. II. Título.

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus. Pela vida e pelas constantes surpresas que proporciona.

Agradeço também:

... a meu orientador, Paulo Zingano. Por ter aberto as portas para a Pós-Graduação em Matemática na UFRGS. Por ter confiado em minha capacidade e pelos conhecimentos transmitidos. Pela enorme generosidade que carrega consigo;

... à banca examinadora, pela disponibilidade. Por aceitar o trabalho de ler, revisar e corrigir meu manuscrito. Pelas contribuições prestadas;

... aos professores Leonardo, Alexandre e José Afonso. Pelos conselhos e tempo de dedicação. Mas, principalmente, pelos conhecimentos transmitidos;

... à Rosane e à secretária do Programa, pela rotineira eficiência e pelo cuidado com as necessidades dos alunos;

... à UFRGS. Que tão bem me recebeu nesses quatro anos. Que tantos bons serviços presta ao Rio Grande do Sul;

... ao CNPq, pela concessão de suporte financeiro;

... à UEPG. A meus colegas do DEMAT. Por aceitar aumentar suas cargas horárias para permitir meu afastamento para capacitação. Pelo excelente ambiente de trabalho que proporcionam;

... aos colegas e amigos que conheci em Porto Alegre. Patrícia e Nicolau, especialmente, mas também aos demais. Pelas horas de estudo. Pelas horas de conversa. Pelos tantos cafés. Lembrarei de todos com carinho;

... a meus amigos, de hoje e de ontem. Que trazem à minha vida mais alegria. Que me permitem afastar quando preciso. Por existir;

... à minha família. Em especial a meus pais, desde criança os ouvia dizer: 'meu filho vai ser doutor'. A meus irmãos e irmã. À minha avó, que nesse período nos deixou;

... por fim, mas não com menos importância, à minha esposa, Carine. Por estar comigo, me amar e permitir que eu a ame. Nada seria da mesma forma sem sua presença.



## Resumo

Neste trabalho aplicaremos um procedimento de análise (recentemente introduzido por P. R. Zingano para implementar o argumento do tipo  $L^p - L^q$ , e que consiste na combinação de uma série de estimativas de energia, princípios de comparação e uma rebuscada interpretação da oscilação da solução do problema) para derivar várias estimativas importantes para as soluções  $u(\cdot, t)$  de equações parabólicas duplamente não lineares com termos advectivos com a forma

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

correspondentes a dados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

para  $1 \leq p_0 < \infty$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas, com  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\mu \in C^0([0, \infty))$  é uma função positiva, e a função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz a uma condição do tipo

$$|\mathbf{f}(x, t, u)| \leq B(t)|u|^{\kappa+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

onde  $\kappa \geq 0$  é constante.

Como resultado principal obtemos uma estimativa de limitação para  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ , que é controlada pelo máximo entre a norma do sup de  $u_0$  e uma expressão adequada envolvendo o supremo de uma norma  $L^p$  da solução em seu intervalo de existência, onde  $p$  deve satisfazer a  $p \geq p_0$  e  $p > \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}$ .

Para  $p_0 = 1$ , estabelecemos também alguns critérios que garantem a existência global de soluções.





# Abstract

In this work, we apply a procedure of analysis (recently introduced by P. R. Zin-gano to implement the  $L^p - L^q$  argument, and consisting of a combination of energy estimates, comparison principles and an elaborated interpretation of solution oscillation) to derive several important estimations for solutions  $u(\cdot, t)$  of double nonlinear parabolic equations containing advective terms in the form

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

corresponding to initial data

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

for  $1 \leq p_0 < \infty$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are given constants, such that  $\alpha, \beta \geq 0$  and  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\mu \in C^0([0, \infty))$  is a positive function, and  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfies

$$|\mathbf{f}(x, t, u)| \leq B(t)|u|^{\kappa+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

where  $\kappa \geq 0$  is constant.

Essentially, an estimation for the limitation of  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  was obtained, which is controlled by the maximum between the supnorm of  $u_0$  and a proper expression involving the supremum of a  $L^p$  norm of the solution within its existence interval, where  $p > \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}$  and  $p \geq p_0$ .

For  $p_0 = 1$ , some criteria were established to ensure existence of global solutions.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1 Resultados Básicos</b>	<b>21</b>
1.1 Hipóteses e Notações . . . . .	24
1.2 Decrescimento de $\ u(\cdot, t)\ _{L^1}$ . . . . .	29
1.3 Contração em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e Conservação da Massa . . . . .	36
1.4 Princípio da Comparação . . . . .	55
<b>2 Estimativas da norma do sup: Um caso de decrescimento</b>	<b>61</b>
2.1 Decrescimento de $\ u(\cdot, t)\ _{L^q}$ . . . . .	62
2.2 Desigualdades de energia . . . . .	78
2.3 Estimativas para a taxa de decrescimento da norma do sup . . . . .	81
2.4 Análise de escalas . . . . .	96
<b>3 Estimativa da norma do sup: Caso geral</b>	<b>105</b>
3.1 Desigualdade de energia . . . . .	106
3.2 Lema fundamental . . . . .	117
3.3 Estimativas para a norma do sup . . . . .	130
3.4 Análise de Escalas . . . . .	143
<b>4 Existência global de soluções</b>	<b>151</b>
4.1 Desigualdade de energia . . . . .	151
4.2 Condições para a existência global . . . . .	154
<b>Apêndice</b>	<b>161</b>
<b>Referências</b>	<b>173</b>



# Lista de Figuras

1	Solução com partes altas e finas . . . . .	17
1.1	Perfil inicial $u_0$ . . . . .	22
1.2	Perfis de evolução, tempo = 1s . . . . .	23
1.3	Perfis de evolução, tempo = 5s e tempo = 30s . . . . .	23
1.4	Decrescimento da norma L1, tempo = 5s e tempo = 30s . . . . .	35
1.5	Perfil inicial e evolução no tempo = 5s, contração . . . . .	51
1.6	Exemplo para ilustrar a contração . . . . .	51
1.7	Ilustração da conservação da massa . . . . .	55
1.8	Perfis iniciais e de evolução, tempo = 2s, comparação . . . . .	59
3.1	Controle da norma do sup . . . . .	142



# Introdução

Estamos interessados em obter várias propriedades fundamentais para as soluções  $u(\cdot, t)$  da equação diferencial parcial parabólica duplamente não linear

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

correspondentes a dados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

para  $1 \leq p_0 < \infty$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas, com  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\mu \in C^0([0, \infty))$  é uma função positiva, e a função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz, entre outras, uma condição do tipo

$$|\mathbf{f}(x, t, u)| \leq B(t)|u|^{\kappa+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

onde  $\kappa \geq 0$  é constante, e  $B(t)$  é constante para cada  $t > 0$  fixado. Tanto a função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  quanto a função  $B(t)$  serão melhor discutidas na Seção 1.1.

A técnica de análise empregada neste trabalho para implementar o argumento do tipo  $L^p - L^q$  foi introduzida por P. R. Zingano, sendo inicialmente aplicada a equações em uma dimensão espacial ( $n = 1$ ) (ver, por ex, [1] e [19]) e a sistemas de equações também em uma dimensão espacial (ver [2] e [18]), ambas no caso mais simples de velocidades advectivas limitadas (i.e.,  $\kappa = 0$ ). Recentemente, estes resultados foram estendidos a equações similares, mas com difusão não linear (ver [13] (caso  $n = 1$ ), [9], e [15] (caso  $n$  arbitrário)).

Abrimos o Capítulo 1 apresentando uma regularização para o problema (1)-(2). Tal regularização tem o objetivo de garantir a existência *local* de soluções clássicas, para as quais serão válidos os resultados que obteremos. Ou seja, o problema que realmente trataremos neste trabalho é o problema regularizado:

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) + \eta \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (4)$$

com  $\eta > 0$  fixado, munido de dados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (5)$$

para  $1 \leq p_0 < \infty$  dado. Na Seção 1.1 constam as hipóteses que serão consideradas em todo o trabalho, além das funções auxiliares que utilizaremos nas demonstrações dos resultados e algumas notações bastante específicas. Recomendamos a leitura dessa seção antes da leitura de qualquer outra parte na sequência do trabalho.

Ainda no Capítulo 1, para dados iniciais  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , obtemos o resultado básico de decrescimento da norma  $L^1$  da solução  $u(\cdot, t)$ ; apresentamos também as propriedades de contração em  $L^1$ , conservação da massa, e um resultado de comparação.

A questão que norteia este trabalho é a busca por condições que garantam a existência global de soluções, e nesse sentido é fundamental que se consiga controlar as normas altas da solução  $u(\cdot, t)$  no intervalo de existência de soluções, especialmente a norma do sup (ver, por ex, [17] e [22]).

No Capítulo 2, consideramos o problema regularizado (4)-(5) e a hipótese adicional sobre  $\mathbf{f}(x, t, u)$ , mais restritiva em relação às que serão apresentadas na seção 1.1:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial x_i}(x, t, u) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad u \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Nesta situação a solução  $u(\cdot, t)$  apresenta decrescimento na norma  $L^q$ , ou seja, satisfaz

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \forall p \leq q \leq \infty,$$

e usaremos tal decrescimento para provar que a norma do sup das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema (4)-(5) satisfaz a uma estimativa do tipo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}, \quad \forall t > 0,$$

além de estipular os valores de  $\rho > 0$  e  $\sigma > 0$  para os quais tal estimativa faz sentido.

Porém, quando não se exige a hipótese (6), ou seja, quando se considera apenas hipóteses tão gerais quanto as que serão exibidas na Seção 1.1, a tarefa de controlar



$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  pode se tornar *muito* difícil. Para ilustrar essa questão, intuitivamente, vamos considerar soluções positivas de uma equação bem mais simples que (1), como, por exemplo,

$$u_t + (b(x)u^2)_x = (u^\alpha |u_x|^\beta u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (7)$$

que reescrevemos como

$$u_t + 2b(x)uu_x = (u^\alpha |u_x|^\beta u_x)_x - u^2 \frac{d}{dx} b(x). \quad (8)$$

Em (8), o termo dissipativo tende a fazer com que a magnitude da solução diminua, *mas* o termo  $-u^2 \frac{d}{dx} b(x)$ , nas regiões onde  $\frac{d}{dx} b(x)$  for negativa, tende a fazer com que a magnitude da solução aumente. E o resultado dessa *competição* entre os termos não é fácil de prever: como a equação (7) conserva massa, nas regiões onde o termo  $-u^2 \frac{d}{dx} b(x)$  estimular  $u(\cdot, t)$  a crescer, o perfil de  $u(\cdot, t)$  irá se afinar, como pode ser visto na Figura 1. Mas perfis altos e finos como esse tendem a ser controlados com maior efetividade pelo termo dissipativo. Isso é um sinal de que, sob as hipóteses gerais que consideraremos, não será nada fácil estimar o comportamento final da solução resultante dessa competição entre os termos.

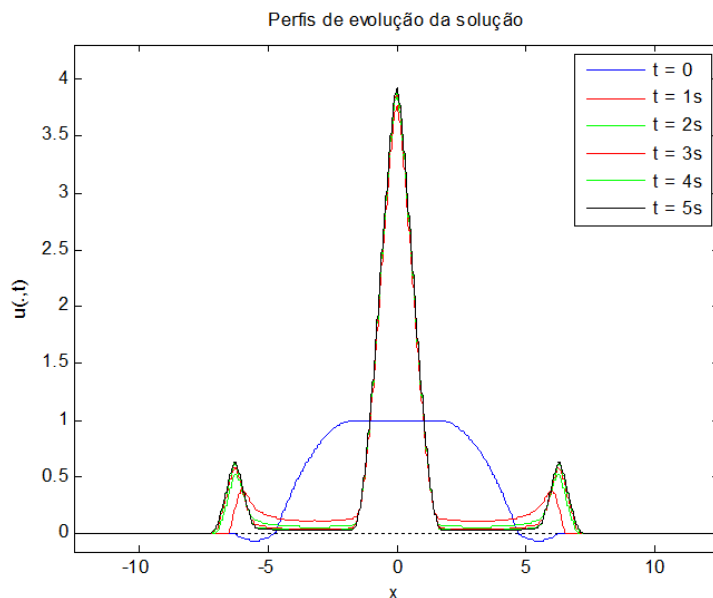


Figura 1: Solução com partes altas e finas

Para gerar a Figura 1 discretizamos o problema (4)-(5) utilizando diferenças finitas em uma dimensão ( $n = 1$ ), desenhamos um esquema numérico tipo Leapfrog semi-implícito (ver, por ex., [23] e [24]), e o implementamos utilizando o software Matlab, usando  $u_0$  dada em (1.3), valores  $\alpha = \beta = 1$  e  $\mathbf{f}(x, t, u) = -8\text{sen}(x)|u(x, t)|^2$  ( $\kappa = 1$ ).

Mais figuras serão apresentadas ao longo do Capítulo 1, com maior riqueza de detalhes.

No Capítulo 3 consideraremos o problema regularizado (4)-(5) e enfrentaremos a tarefa de, com as hipóteses gerais apresentadas na seção 1.1, tentar estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ . Inicialmente, derivaremos uma importante desigualdade de energia, que será apresentada em (3.13). A partir dessa desigualdade provaremos o que chamamos de *lema fundamental*, um resultado que relaciona as normas  $L^q$  e  $L^{q/\sigma}$  das soluções  $u(\cdot, t)$ , com  $\sigma \geq 1$  satisfazendo as condições que serão dadas em (3.23). A expressão que obteremos, nesta etapa, terá a forma

$$\mathbb{U}_q(0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\},$$

onde a constante  $K(q)$  e o valor do parâmetro  $a$  podem ser vistos respectivamente em (3.55) e (3.56), a grandeza  $\mathbb{U}_q(0; t)$  será definida em (1.19), e  $\mathbb{B}_\mu(0; t)$  em (1.18).

Na sequência, obteremos o resultado principal deste trabalho: uma estimativa para limitação da norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2). Mais propriamente,

$$\mathbb{U}_\infty(0; t) \leq \tilde{K} \max \left\{ \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(0; t))^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} (\mathbb{U}_p(0; t))^{\frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} \right\}, \quad (9)$$

para  $0 < t < T_* \leq \infty$ , onde  $p$  deve satisfazer a  $p \geq p_0$  e  $p > \frac{n[\kappa-(\alpha+\beta)]}{(\beta+1)}$ . Quando for conhecido que a norma  $L^p$  da solução  $u(\cdot, t)$  é limitada, então sua norma do sup também será. Isso ocorre para  $p = 1$  (a norma  $L^1$  da solução decresce, ver teorema 1.2.1). Ainda nos casos onde as restrições sobre  $p$  fazem  $p > 1$  esse resultado é válido, mas para ser aplicado é necessário que se saiba de alguma norma  $L^p$  da solução que seja limitada. Tal limitação deve ser obtida caso a caso, analisando-se a estrutura particular que a equação (4) assume quando se toma uma função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  de interesse.

Para fechar o Capítulo 3, utilizaremos argumentos de escala para verificar que os expoentes apresentados na estimativa (9) realmente fazem sentido.

Finalmente, no Capítulo 4, faremos uma aplicação de alguns resultados encontrados neste trabalho, visando obter condições que garantam a existência global para as soluções  $u(\cdot, t)$  do problema regularizado (4)-(5), para  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\kappa \geq 0$  qualquer.

Como continuação deste trabalho, pretende-se estender a análise de regularidade por escalas intrínsecas (ver [7], [25], [26]) às soluções limitadas da equação (1), buscando condições bastante gerais sobre o termo advectivo  $\mathbf{f}(x, t, u)$ . Em particular,

esperamos mostrar que, considerando  $\mathbf{f}$  satisfazendo a condição (3), as soluções positivas (fracas, limitadas) de (1) são localmente  $C^{1,\alpha}$ .

Outra questão ainda a tratar se refere às propriedades de estabilidade de soluções estacionárias (quando estas existirem). Experimentos numéricos indicam que tais soluções são estáveis com respeito a perturbações de porte arbitrário.

Várias outras questões de interesse na teoria são apresentados em [1], Seção 4.



# Capítulo 1

## Resultados Básicos

Consideraremos o problema regularizado

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) + \eta \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (1.1)$$

com  $\eta > 0$  fixado, munido de dados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.2)$$

para  $1 \leq p_0 < \infty$  dado, em vez do problema (1)-(2).

Na Seção 1.1 definimos as hipóteses gerais com as quais trataremos nesse trabalho, fixamos algumas notações que aparecerão no decorrer do texto, e estipulamos as funções auxiliares que serão utilizadas.

Nas demais seções deste capítulo, tomando  $p_0 = 1$ , mostramos algumas propriedades básicas das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2) como, por exemplo, o decréscimo da norma  $L^1$  e a conservação da massa.

Com o intuito de gerar figuras que pudessem ilustrar alguns resultados, discretizamos o problema (1.1)-(1.2) em uma dimensão ( $n = 1$ ) utilizando o método de diferenças finitas, desenhamos um esquema numérico tipo Leapfrog semi-implícito (ver, por ex., [23] e [24]), e o implementamos utilizando o software Matlab.

Para ilustrar os resultados fizemos algumas escolhas que potencializam a visualização dos eventos que ocorrem quando se deixa a solução do problema (1.1)-(1.2) evoluir.

Escolhemos, por exemplo, a condição inicial  $u_0$  dada por

$$u_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -2\pi; \\ \frac{(x^2 + \frac{7\pi}{2}x + 3\pi^2)}{\pi^2}, & \text{se } -2\pi \leq x < \frac{-3\pi}{2}; \\ \frac{-(x + \frac{\pi}{2})^2 + \pi^2}{\pi^2}, & \text{se } \frac{-3\pi}{2} \leq x < \frac{-\pi}{2}; \\ 1, & \text{se } \frac{-\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{-(x - \frac{\pi}{2})^2 + \pi^2}{\pi^2}, & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}; \\ \frac{(x^2 - \frac{7\pi}{2}x + 3\pi^2)}{\pi^2}, & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi; \\ 0, & \text{se } x \geq 2\pi, \end{cases} \quad (1.3)$$

que pode ser visualizada na Figura 1.1. Esta função  $u_0$ , dada por uma expressão à primeira vista um pouco estranha, foi escolhida após algumas considerações: queríamos uma função que trocasse de sinal, simétrica, com norma do sup igual a 1, topo achatado para facilitar a visualização dos efeitos de advecção e de difusão, e que depois de certo tempo de evolução a solução com origem na condição inicial  $u_0$  ficasse não negativa. Os valores das raízes extremas foram escolhidos como  $x_1 = -2\pi$  e  $x_4 = 2\pi$  em consonância com as funções  $f(x, t, u)$  usadas nos testes preliminares, que envolviam funções trigonométricas.

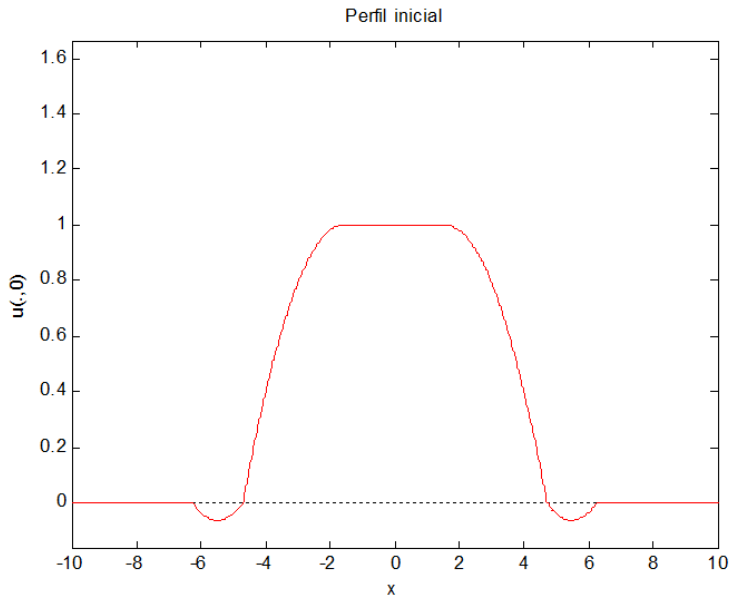


Figura 1.1: Perfil inicial  $u_0$

Os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\kappa$  escolhidos para todas as ilustrações que exibiremos são  $\alpha = \beta = \kappa = 1$ . Observamos que, além de esses valores serem escolhas naturais, permitiram uma boa visualização dos eventos que a evolução da solução proporciona; e que uma das principais alterações que ocorrem com a mudança desses

parâmetros é que a taxa de escoamento nas interfaces laterais é inversamente proporcional ao tamanho de  $\alpha$  e de  $\beta$ .

Na intenção de motivar o leitor, finalizamos a introdução deste capítulo exibindo alguns perfis de evolução da solução do problema (1.1)-(1.2), partindo de  $u_0$  dada em (1.3). As figuras a seguir foram geradas usando

$$f(x, t, u) = -\text{sen}(x)|u(x, t)|^{\kappa+1}, \quad (1.4)$$

escolhida respeitando as condições sobre  $f(x, t, u)$  que serão apresentadas na seção 1.1.

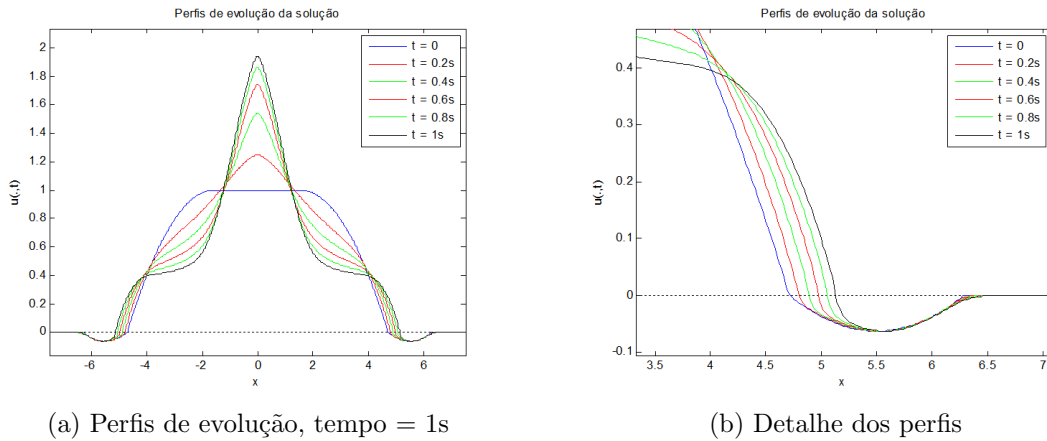


Figura 1.2: Perfis de evolução, tempo = 1s

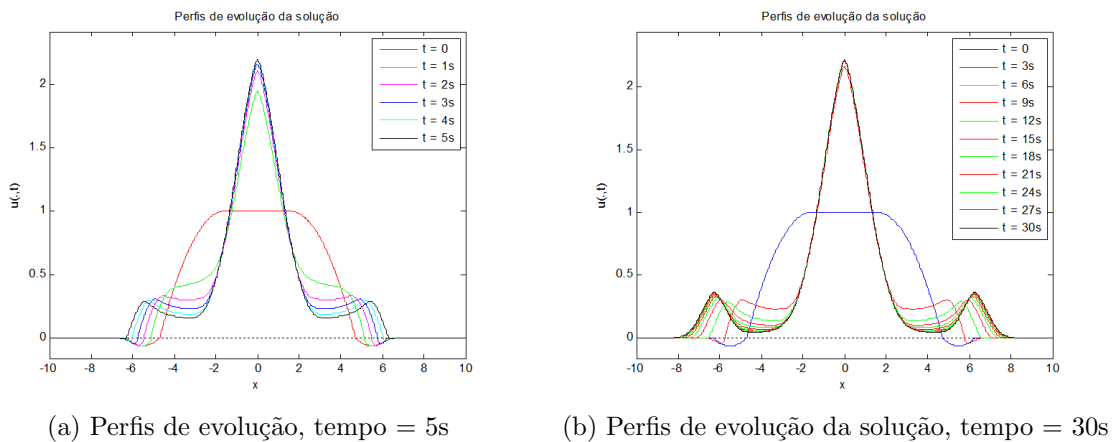


Figura 1.3: Perfis de evolução, tempo = 5s e tempo = 30s

## 1.1 Hipóteses e Notações

Por *solução* do problema regularizado (1.1)-(1.2) em um determinado intervalo  $[0, T]$ , para  $0 < T < T_* \leq \infty$ , consideramos uma função  $u(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ , suave, que resolve a equação (1.1) no sentido clássico para  $0 \leq t \leq T < T_*$ , e satisfaz a condição inicial (1.2) no sentido de  $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$  quando  $t \rightarrow 0$ , ou seja, satisfaz

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0.$$

O intervalo  $[0, T_*)$  é chamado de intervalo maximal de existência da solução, e a existência de tal  $T_*$  é garantida pela teoria geral de equações parabólicas (ver, por ex, [17] ou [22]), ou seja, a existência *local* de soluções para este problema está garantida. Além disso, a solução  $u(\cdot, t)$  é limitada na faixa espaço-tempo  $S_T := \mathbb{R}^n \times [0, T]$ , para cada  $0 < T < T_*$ .

Para cada  $\eta > 0$  dado, o problema regularizado (1.1)-(1.2) tem sua respectiva solução  $u^\eta(\cdot, t)$ , e deveríamos indexá-la desta forma, inclusive carregando a notação  $u^\eta$  a partir da própria equação (1.1). Por motivo de simplicidade de notação, deixaremos de lado essa indexação e usaremos apenas  $u(\cdot, t)$ .

Em (1.1),  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas, com

$$\alpha, \beta \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta > 0, \tag{1.5}$$

a função  $\mu \in C^0([0, \infty))$  satisfaz

$$\mu(t) > 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.6}$$

e a função  $\mathbf{f}(x, t, u) = (f_1(x, t, u), f_2(x, t, u), \dots, f_n(x, t, u))$  pode ser escrita de forma geral como

$$\mathbf{f}(x, t, u) = \mathbf{b}(x, t, u)u + \mathbf{g}(t, u).$$

Como a parte da função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  que pode ser escrita no termo  $\mathbf{g}(t, u)$  não apresenta dependência espacial direta, não irá ocasionar maiores problemas nos cálculos que serão feitos. Por esse motivo, e buscando simplificar um pouco os cálculos já extensos que iremos apresentar, iremos ignorá-la, e, em todo o texto que segue, quando for conveniente escrever  $\mathbf{f}(x, t, u)$  de tal forma, consideraremos apenas

$$\mathbf{f}(x, t, u) = \mathbf{b}(x, t, u)u. \tag{1.7}$$

Solicitaremos, nesses casos, que  $\mathbf{b}(x, t, u) = (b_1(x, t, u), \dots, b_n(x, t, u))$  seja uma



função suave, satisfazendo

$$|\mathbf{b}(x, t, u)| \leq B(t)|u|^\kappa, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

onde  $\kappa \geq 0$  é uma constante dada. Note que (1.7) e (1.8) dizem que

$$|\mathbf{f}(x, t, u)| \leq B(t)|u|^{\kappa+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Além disso, suporemos que  $\mathbf{f}$  é localmente de Lipschitz na terceira componente, isto é,

$$|\mathbf{f}(x, t, u) - \mathbf{f}(x, t, v)| \leq F_M(T)|u - v|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall 0 \leq t \leq T, \forall |u|, |v| \leq M. \quad (1.10)$$

Em (1.8) e (1.9),  $B \in C^0([0, \infty))$  denota a *variação* de  $\mathbf{b}(x, t, u)$  em  $\mathbb{R}^n$ , que desempenha um papel importante pois controla o tamanho das derivadas de  $\mathbf{b}$ . Podemos definir  $B(t)$  do seguinte modo: para cada  $1 \leq i \leq n$ , definimos  $B_i(t)$  por

$$B_i(t) := \frac{1}{2} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} b_i(x, t, u(x, t)) - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} b_i(x, t, u(x, t)) \right\}, \quad \forall 0 \leq t < T_*,$$

e por fim definimos

$$B(t) := \left| (B_1(t), \dots, B_n(t)) \right|_2 = \left\{ (B_1(t))^2 + \dots + (B_n(t))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

para cada  $0 \leq t < T_*$ .

Além disso, solicitamos que  $\mathbf{b}(x, t, u)$  satisfaça a

$$\mathbf{b}, \mathbf{b}_{x_1}, \dots, \mathbf{b}_{x_n}, \mathbf{b}_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times \mathbb{R}). \quad (1.12)$$

Como a solução  $u(\cdot, t)$  de (1.1)-(1.2) é limitada para cada  $0 \leq t \leq T$ , com  $T < T_*$ , podemos considerar a seguinte estimativa de limitação:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.13)$$

Também suporemos que a convergência da solução para o dado inicial  $u_0$ , quando  $t \rightarrow 0$ , se dá no sentido de  $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ , ou seja, que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

e, inicialmente, suporemos que quando  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , teremos  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  satisfazendo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_1(T), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.15)$$

Além disso, suporemos que, para cada  $0 < t_0 < T$ , vale

$$\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T]), \quad (1.16)$$

e, portanto, para cada  $t_0 \leq t \leq T$ , podemos contar com uma estimativa do tipo

$$|\nabla u(x, t)| \leq C(t_0), \quad \forall 0 < t_0 \leq T. \quad (1.17)$$

Precisaremos mais adiante, para bem descrever os resultados principais desta tese, de algumas grandezas que definiremos a seguir:

$$\mathbb{B}_\mu(t_0; t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \left( \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} \right), \quad \text{para } 0 \leq t_0 \leq t < T_*, \quad (1.18)$$

e se  $t_0 = 0$ , podemos escrever  $\mathbb{B}_\mu(0; t) \equiv \mathbb{B}_\mu(t)$ .

$$\mathbb{U}_p(t_0; t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \left( \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right), \quad \text{para } 1 \leq p_0 \leq p \leq \infty, \quad (1.19)$$

e se  $t_0 = 0$ , podemos escrever  $\mathbb{U}_p(0; t) \equiv \mathbb{U}_p(t)$ .

Introduziremos a seguir algumas funções suavizadoras e de corte que serão utilizadas no decorrer do texto. Mais sobre esse tipo de funções auxiliares pode ser visto em [16].

Considere uma função  $S \in C^1(\mathbb{R})$  tal que:

$$\begin{cases} S'(v) \geq 0, & \forall v; \\ S(0) = 0; \text{ e} \\ S(v) = \text{sgn}(v), & |v| \geq 1, \end{cases}$$

e para cada  $\delta > 0$ , construa a função regularizadora

$$S_\delta(v) := S\left(\frac{v}{\delta}\right)$$

e defina a seguinte função aproximação para  $|u|$ :

$$L_\delta(u) := \int_0^u S\left(\frac{v}{\delta}\right) dv. \quad (1.20)$$

Note que, quando  $\delta \rightarrow 0$ , temos que  $S\left(\frac{u}{\delta}\right) \rightarrow \text{sgn}(u)$  e  $L_\delta(u) \rightarrow |u|$ , uniformemente em  $u$ . Além disso,  $\forall u \in \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$  fixo, vale:

$$0 \leq L_\delta(u) \leq |u|; \quad (1.21)$$

$$L'_\delta(u) \leq C \cdot \frac{|u|}{\delta}; \quad \text{e} \quad (1.22)$$

$$0 \leq L''_\delta(u) \leq \frac{C}{\delta}. \quad (1.23)$$

Outra importante propriedade satisfeita por  $L_\delta(u)$  é:

$$L_\delta(u) \cdot L''_\delta(u) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0,$$

que será aplicada, no decorrer do texto, com a forma

$$|u| \cdot L''_\delta(u) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0, \quad (1.24)$$

pois  $L_\delta(u) \rightarrow |u|$  ao  $\delta \rightarrow 0$ .

Defina também a seguinte função auxiliar:

$$\Phi_\delta(u) := \begin{cases} u^2, & \text{se } q = 2 \\ (L_\delta(u))^q, & \text{se } q > 2, \end{cases} \quad (1.25)$$

onde  $q$  deve satisfazer a  $p_0 \leq q < \infty$ . Note que, para  $q > 2$ , temos:

$$\Phi'_\delta(u) = q(L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u); \quad \text{e} \quad (1.26)$$

$$\Phi''_\delta(u) = q(q-1)(L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 + q(L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \quad (1.27)$$

Considere uma função  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tal que

$$H'(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R};$$

$$H(v) := \begin{cases} 0, & \text{se } |v| \leq 0; \\ 1, & \text{se } |v| \geq 1, \end{cases}$$

e, para cada  $\delta > 0$ , construa a função regularizadora

$$H_\delta(v) := H\left(\frac{v}{\delta}\right)$$

e defina:

$$G_\delta(u) := \int_0^u H\left(\frac{v}{\delta}\right) dv. \quad (1.28)$$

Note que quando  $\delta \rightarrow 0$  vale a convergência  $H\left(\frac{u}{\delta}\right) \rightarrow (u)_+$ , uniformemente em  $u$ , onde  $(u)_+$  denota a parte positiva de  $u$ . Além disso, o comportamento de  $G_\delta(u)$  é semelhante ao comportamento de  $L_\delta(u)$ , e,  $\forall u \in \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$  fixo, valem:

$$\begin{aligned} 0 &\leq G_\delta(u) \leq (u)_+ \leq |u|; \\ G'_\delta(u) &\leq C \cdot \frac{|u|}{\delta}; \text{ e} \\ 0 &\leq G''_\delta(u) \leq \frac{C}{\delta}, \end{aligned}$$

e, quando  $\delta \rightarrow 0$ , é válida a convergência:

$$|u| \cdot G''_\delta(u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Finalmente, para  $R > 0$  e  $0 < \varepsilon \leq 1$ , considere a função de corte dada por:

$$\zeta_R(x) := \begin{cases} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}, & \text{se } |x| \leq R; \\ 0, & \text{se } |x| > R. \end{cases} \quad (1.29)$$

Note que a função  $\zeta_R(x)$  se anula em  $|x| = R$ , mas suas derivadas parciais primeira e segunda não. Quanto às derivadas parciais, para  $|x| \leq R$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_R(x)}{\partial x_i} &= -\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \frac{x_i}{\sqrt{1+|x|^2}}, \\ \nabla \zeta_R(x) &= -\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|x|^2}}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_R(x)}{(\partial x_i)^2} &= \frac{-\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} + \frac{\varepsilon (x_i)^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{(1+|x|^2)^3}} + \frac{\varepsilon^2 (x_i)^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{(1+|x|^2)}, \\ \Delta \zeta_R(x) &= \frac{-\varepsilon n e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} + \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \frac{|x|^2}{\sqrt{(1+|x|^2)^3}} + \varepsilon^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Consequentemente, valem as seguintes estimativas:

$$|\nabla \zeta_R(x)| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}; \text{ e} \quad (1.32)$$

$$|\Delta \zeta_R(x)| \leq \varepsilon (n+2) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}. \quad (1.33)$$

## 1.2 Decrescimento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^1}$

Nesta seção, consideraremos o problema (1.1)-(1.2) com  $p_0 = 1$ , onde  $\alpha, \beta$  satisfazem (1.5),  $\mu(t)$  satisfaz (1.6), e  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.7) e (1.9), com  $\kappa \geq 0$  dado, e mostraremos que sua solução  $u(\cdot, t)$ , suave, permanece em  $L^1(\mathbb{R}^n)$  para todo  $0 \leq t < T_*$  e, além disso, sua norma  $L^1$  decresce ao  $t$  crescer.

**Teorema 1.2.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2) com  $p_0 = 1$ , para  $0 < T < T_* \leq \infty$ , que satisfaz (1.13), (1.14) e (1.17). Então, vale:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t_0 \leq t \leq T.$$

Em particular, quando  $t_0 = 0$ , vale:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.34)$$

### Demonstração:

Considere  $p_0 = 1$ .

Para  $\delta > 0$ ,  $R > 0$ , e  $0 < \varepsilon < 1$  dados, vamos analisar a equação (1.1) multiplicada por  $L'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , onde  $L_\delta(u)$  é a função definida em (1.20), e  $\zeta_R(x)$  é a função de corte dada em (1.29). Ou seja, analisaremos:

$$\begin{aligned} L'_\delta(u) u_t \zeta_R(x) + L'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) \zeta_R(x) &= \\ &= L'_\delta(u) \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) + L'_\delta(u) \eta \Delta u \zeta_R(x). \end{aligned}$$

Integrando essa equação sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(u) u_\tau \zeta_R(x) dx d\tau}_I + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau}_{II} = \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(u) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{III} + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(u) \Delta u \zeta_R(x) dx d\tau}_{IV}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Faremos essa integração termo a termo.

Ao integrar o termo I, usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} \frac{d}{d\tau} (L_\delta(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{|x| < R} \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (L_\delta(u)) d\tau \zeta_R(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|x|<R} \left[ L_\delta(u(x,t)) - L_\delta(u(x,t_0)) \right] \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x|<R} L_\delta(u(x,t)) \zeta_R(x) dx - \int_{|x|<R} L_\delta(u(x,t_0)) \zeta_R(x) dx. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Para integrar o termo II, usamos a Identidade de Green e o fato que  $\zeta_R(x)|_{|x|=R} = 0$ , obtendo:

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \mathbf{f} \cdot \nabla (L'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(u) \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L'_\delta(u) \mathbf{f} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, ao integrar o termo III, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) L'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla (L'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \left( L''_\delta(u) \nabla u \zeta_R(x) + L'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta |\nabla u|^2 L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (L'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x)) dx d\tau. \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Analogamente, ao integrar o termo IV, encontramos:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \operatorname{div}(\nabla u) L'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u \cdot \nabla (L'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u \cdot \left( \nabla u L''_\delta(u) \zeta_R(x) + L'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
&= -\eta \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa}} - \eta \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L'_\delta(u) \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVb}}.
\end{aligned}$$

Novamente usando a Identidade de Green no termo IVb, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{IVb} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla(L_\delta(u)) \cdot \nabla\zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \left( \int_{|x|=R} L_\delta(u) \nabla\zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) - \int_{|x|<R} L_\delta(u) \Delta\zeta_R(x) \, dx \right) d\tau \\
&= -\underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) \nabla\zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau}_{\text{IVb.1}} + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) \Delta\zeta_R(x) \, dx \, d\tau}_{\text{IVb.2}}.
\end{aligned}$$

Ou seja, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 L_\delta''(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) \nabla\zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau \\
&\quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) \Delta\zeta_R(x) \, dx \, d\tau. \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Após iniciar a integração indicada em (1.35) (ver (1.36)-(1.39)) obtemos (após escrever os termos no lado adequado da igualdade):

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) \, dx \\
&+ \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u|^2 \zeta_R(x) \, dx \, d\tau = \\
&= \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) \, dx \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(u) \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta'(u) \mathbf{f} \cdot \nabla\zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&- \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta'(u) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla\zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&- \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) \nabla\zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) \Delta\zeta_R(x) \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Majorando o lado direito dessa igualdade, e substituindo  $\mathbf{f}(x, t, u)$  segundo (1.9), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \tag{1.40} \\
& \text{(e)} \quad + \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u| |u|^{\kappa+1} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} |L_\delta'(u)| |u|^{\kappa+1} |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |L_\delta'(u)| |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+1} |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) |\nabla \zeta_R(x)| d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) |\Delta \zeta_R(x)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young no termo (e), com  $p' = q' = 2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u| |u|^{\kappa+1} \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \leq \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) \left( \frac{\eta}{2B(\tau)} |\nabla u|^2 + \frac{B(\tau)}{2\eta} |u|^{2(\kappa+1)} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& = \underbrace{\frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(e.1)} \tag{1.41} \\
& \quad + \underbrace{\frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} \zeta_R(x) dx d\tau}_{(e.2)}.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas (1.32) e (1.33) nos termos (f), (g), (h) e (i) de (1.40), a estimativa (1.22) nos termos (f) e (g), e juntando os termos semelhantes (c) e (e.1), ficamos com:



$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \tag{1.42} \\
& \text{(e.2)} \quad + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\kappa+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+1} |\nabla u|^{\beta+1} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que os termos (b) e (c.1) de (1.42) são positivos e finitos, pois seus integrandos são positivos e limitados (ver (1.6), (1.13), (1.17), (1.23) e (1.29)) e as integrais são tomadas sobre domínios compactos. Podemos então descartar tais termos, sem prejuízo à desigualdade. Fazendo isso, ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx \leq \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \tag{1.43} \\
& \text{(e.2)} \quad + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} L_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\kappa+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+1} |\nabla u|^{\beta+1} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Por fim, usamos as hipóteses (1.13) e (1.17) nos termos (e.2), (f) e (g) de (1.43) para obter:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx \leq \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \tag{1.44} \\
& \text{(e.2)} \quad + \frac{1}{2\eta} (M(T))^{(2\kappa+1)} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_\delta(u) |u| \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^{(\kappa+1)} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Estamos prontos para iniciar as passagens ao limite.

Faremos primeiro  $R \rightarrow \infty$ . Note que o termo (h) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Usando o Teorema da Convergência Monótona, obteremos:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{1.45} \\
& \text{(e.2)} \quad + \frac{1}{2\eta} (M(T))^{(2\kappa+1)} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(u) |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^{(\kappa+1)} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

A próxima passagem ao limite será com  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Majorando o termo (i) de acordo com (1.21), podemos usar o Teorema da Convergência Monótona e a hipótese (1.15) para ver que as integrais nos termos (f), (g) e (i) de (1.45) são finitas. Portanto, como estão multiplicadas por  $\varepsilon$ , esses termos se anularão. Assim, ao fazermos  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

restará apenas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0)) dx + \frac{1}{2\eta} (M(T))^{(2\kappa+1)} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(u) |u| dx d\tau. \quad (1.46)$$

Agora fazemos  $\delta \rightarrow 0$ . Note que, graças a (1.24), o último termo de (1.46) se anulará. Chegamos então a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)| dx,$$

ou seja,

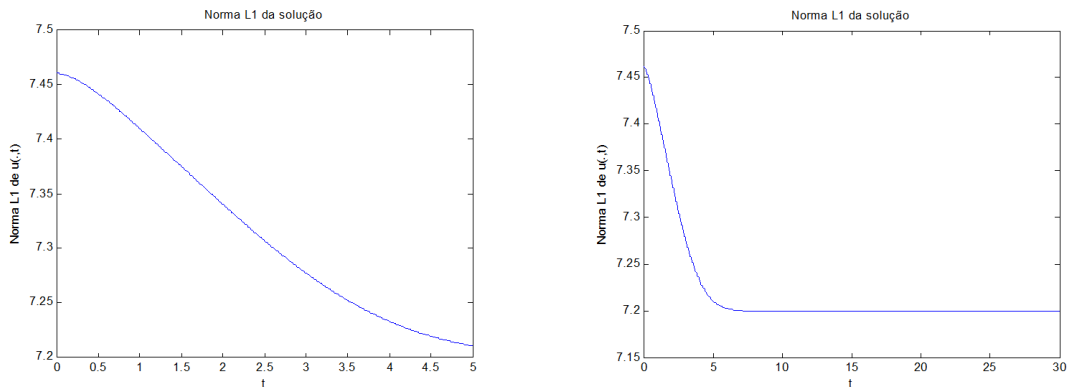
$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Para finalizar, usamos a hipótese (1.14) para, ao fazer  $t_0 \rightarrow 0$ , obtermos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

conforme desejado. □

Para ilustrar o teorema 1.2.1, vamos exibir na Figura 1.4 o comportamento da norma  $L^1$  da solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2), para os tempos  $t = 5s$  e  $t = 30s$ , cujas evoluções para os respectivos tempos  $t = 5s$  e  $t = 30s$  podem ser vistas na Figura 1.3.



(a) Decrescimento da norma L1, tempo = 5s      (b) Decrescimento da norma L1, tempo = 30s

Figura 1.4: Decrescimento da norma L1, tempo = 5s e tempo = 30s

A Figura 1.4a apresenta decrescimento estrito da solução  $u(\cdot, t)$  durante todo o

tempo de evolução considerado ( $t = 5s$ ), mas a Figura 1.4b mostra decréscimo estrito apenas até um pouco além do tempo  $t = 5s$ , com a magnitude da norma  $L^1$  da solução permanecendo estável até o tempo final de evolução para essa computação, em  $t = 30s$ . Ocorre que a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2), onde  $u_0$  é dada em (1.3), após evoluir certo tempo passa a ser não negativa e então sua norma  $L^1$  coincide com a descrição de sua massa. A Figura 1.4b nos apresenta um indicativo de que  $u(\cdot, t)$  conserva massa, fato que provaremos na próxima seção.

### 1.3 Contração em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e Conservação da Massa

Nesta seção, além do problema (1.1)-(1.2) com  $p_0 = 1$ , ou seja,

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) + \eta \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.47)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.48)$$

consideraremos também o problema

$$v_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, v)) = \mu(t) \operatorname{div}(|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) + \eta \Delta v, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.49)$$

$$v(\cdot, 0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.50)$$

Em ambos os problemas, (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50),  $\eta > 0$  é dado,  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem (1.5),  $\mu(t)$  satisfaz (1.6),  $\mathbf{f}$  satisfaz as condições (1.7), (1.9) e (1.10) com  $\kappa \geq 0$  dado, e suas respectivas soluções  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  satisfazem (1.13) e (1.17).

A diferença dos dados iniciais satisfaz

$$(u_0 - v_0) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (1.51)$$

e suporemos que, ao  $t$  crescer, a diferença entre as soluções permanece em  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , ou seja,

$$(u(\cdot, t) - v(\cdot, t)) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \text{com} \quad (1.52)$$

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_1(T). \quad (1.53)$$

Adicionalmente, suporemos que ao  $t \rightarrow 0$  vale a convergência

$$(u(\cdot, t) - v(\cdot, t)) \longrightarrow (u_0 - v_0) \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.54)$$

Além disso, para  $0 < \alpha < 1$ , tomaremos  $\hat{\eta} > 0$  e consideraremos uma nova

regularização nos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), a saber,

$$(u^{\hat{\eta}})_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u^{\hat{\eta}})) = \mu(t) \operatorname{div}\left(\left((u^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} |\nabla u^{\hat{\eta}}|^{\beta} \nabla u^{\hat{\eta}}\right) + \eta \Delta(u^{\hat{\eta}}), \quad (1.55)$$

$$u^{\hat{\eta}}(x, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.56)$$

e

$$(v^{\hat{\eta}})_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, v^{\hat{\eta}})) = \mu(t) \operatorname{div}\left(\left((v^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} |\nabla v^{\hat{\eta}}|^{\beta} \nabla v^{\hat{\eta}}\right) + \eta \Delta(v^{\hat{\eta}}), \quad (1.57)$$

$$v^{\hat{\eta}}(x, 0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.58)$$

e suporemos que, ao  $\hat{\eta} \rightarrow 0$ , as soluções dos problemas (1.55)-(1.56) e (1.57)-(1.58) convergem para as soluções de (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned} \|u^{\hat{\eta}} - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\rightarrow 0; & \text{e} \\ \|v^{\hat{\eta}} - v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\rightarrow 0, & \text{ao } \hat{\eta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Com isso, mostraremos que há contração de soluções, ou seja, que a diferença na norma  $L^1(\mathbb{R}^n)$  entre as soluções  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  decresce ao  $t$  crescer, para  $0 \leq t \leq T < T_*$ .

Ao final da seção, mostraremos que a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.47)-(1.48) conserva a massa.

**Teorema 1.3.1** *Sejam  $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  soluções dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), respectivamente, para algum  $0 < T < T_* \leq \infty$ , que satisfazem (1.13) e (1.17), e cujas diferenças  $u(\cdot, t) - v(\cdot, t)$  satisfazem (1.52) e (1.53), com  $u_0 - v_0$  satisfazendo (1.51). Então, temos*

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0) - v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 < t_0 \leq t \leq T. \quad (1.59)$$

Além disso, se  $u(\cdot, t), v(\cdot, t), u_0$  e  $v_0$  satisfazem (1.54), então vale

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.60)$$

### Demonstração:

Esta prova será dividida em dois casos:  $\alpha \geq 1$ , e  $0 < \alpha < 1$ .

#### Caso 1: $\alpha \geq 1$

Iniciamos definindo

$$\theta := u - v,$$

na faixa comum  $S_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$  de existência das respectivas soluções  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50).

Ao subtrairmos a equação (1.49) da equação (1.47), obtemos:

$$\theta_t + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta)) = \mu(t) \operatorname{div}\left(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u - |v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v\right) + \eta \Delta \theta, \quad (1.61)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta) = \mathbf{f}(x, t, u) - \mathbf{f}(x, t, v), \quad (1.62)$$

e, a exemplo do que foi feito na demonstração do Teorema 1.2.1, multiplicamos (1.61) por  $L'_\delta(\theta) \zeta_R(x)$  e integramos sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , para obter:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(\theta) \theta_\tau \zeta_R(x) dx d\tau}_I + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(\theta) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta)) \zeta_R(x) dx d\tau}_{II} = \\ & = \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(\theta) \operatorname{div}\left(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u - |v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v\right) \zeta_R(x) dx d\tau}_{III} \quad (1.63) \\ & \quad + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(\theta) \Delta \theta \zeta_R(x) dx d\tau}_{IV}. \end{aligned}$$

Analogamente ao feito na demonstração do Teorema 1.2.1, ao iniciarmos essa integração, encontraremos:

$$I = \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx - \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx; \quad (1.64)$$

$$II = - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta) \nabla \theta \cdot \tilde{\mathbf{f}} \zeta_R(x) dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L'_\delta(\theta) \tilde{\mathbf{f}} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau; \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} IV = & -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla \theta|^2 L''_\delta(\theta) \zeta_R(x) dx d\tau \\ & - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(\theta) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\ & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(\theta) \Delta \zeta_R(x) dx d\tau; \quad (1.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III} &= - \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) \nabla \theta \left( (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) - (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right) \zeta_R(x) dx d\tau}_{(III.1)} \\
&\quad - \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L'_{\delta}(\theta) \left( (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) - (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right) \nabla \zeta_R(x) dx d\tau.}_{(III.2)} \quad (1.67)
\end{aligned}$$

Para decompor adequadamente o termo (III.1), podemos fazer

$$\begin{aligned}
(|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) - (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) &= \\
&= |u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u - |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla u + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla \theta \\
&= |u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u - |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla u + \frac{1}{2} |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla \theta \\
&\quad - \frac{1}{2} |u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla \theta + \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) \nabla \theta \\
&= \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} - |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) (\nabla u + \nabla v) \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) \nabla \theta \\
&= \left( \frac{1}{2} |u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} - \frac{1}{2} |u|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} + \frac{1}{2} |u|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} - \frac{1}{2} |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \right) (\nabla u + \nabla v) \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) \nabla \theta \\
&= \frac{1}{2} |u|^{\alpha} (|\nabla u|^{\beta} - |\nabla v|^{\beta}) (\nabla u + \nabla v) \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}) |\nabla v|^{\beta} (\nabla u + \nabla v) \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) \nabla \theta
\end{aligned} \quad (1.68)$$

e, com isso, reescrevemos o termo (III.1) como:

$$\begin{aligned}
(III.1) &= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) \nabla \theta \left( (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) - (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |u|^{\alpha} (|\nabla u|^{\beta} - |\nabla v|^{\beta}) (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \zeta_R(x) dx d\tau}_{(III.1a)} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) (|u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}) |\nabla v|^{\beta} (\nabla u + \nabla v) \cdot \nabla \theta \zeta_R(x) dx d\tau}_{(III.1b)} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau.}_{(III.1c)} \quad (1.69)
\end{aligned}$$

Assim, após iniciar a integração indicada em (1.63) (ver (1.64) a (1.69)), e escrever os termos obtidos no lado adequado da igualdade, ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |u|^\alpha (|\nabla u|^\beta - |\nabla v|^\beta) (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) (|u|^\alpha |\nabla u|^\beta + |v|^\alpha |\nabla v|^\beta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau = \\
& \text{(e)} \quad = \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(f)} \quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) \nabla \theta \cdot \tilde{\mathbf{f}} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta'(\theta) \tilde{\mathbf{f}} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) (|u|^\alpha - |v|^\alpha) |\nabla v|^\beta (\nabla u + \nabla v) \cdot \nabla \theta \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta'(\theta) \left( (|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) - (|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) \right) \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(j)} \quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(\theta) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta(\theta) \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Ao majorar o lado direito dessa igualdade, e substituir  $\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta)$  segundo (1.62) e (1.10), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |u|^\alpha (|\nabla u|^\beta - |\nabla v|^\beta) (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) (|u|^\alpha |\nabla u|^\beta + |v|^\alpha |\nabla v|^\beta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{(f)} & + F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\nabla\theta| |\theta| \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} & + F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| |\theta| |\nabla\zeta_R(x)| dx d\tau \\
\text{(h)} & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) (|u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}) |\nabla v|^{\beta} |\nabla u + \nabla v| |\nabla\theta| \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} & + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| \left| (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) + (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right| |\nabla\zeta_R(x)| dx d\tau \\
\text{(j)} & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_{\delta}(\theta) |\nabla\zeta_R(x)| d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta) |\Delta\zeta_R(x)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young no termo (f), com  $p' = q' = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\text{(f)} \quad F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\nabla\theta| |\theta| \zeta_R(x) dx d\tau & \leq \\
& \leq \underbrace{\frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(f.1)} \\
& \quad + \underbrace{\frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(f.2)}
\end{aligned}$$

e, juntando os termos semelhantes (d) e (f.1), ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} & \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(b)} & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |u|^{\alpha} (|\nabla u|^{\beta} - |\nabla v|^{\beta}) (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(c)} & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} + |v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta}) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(d.1)} & + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
\text{(e)} & \leq \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(f.2)} & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} & + F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| |\theta| |\nabla\zeta_R(x)| dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(h)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) \left( |u|^{\alpha} - |v|^{\alpha} \right) |\nabla v|^{\beta} |\nabla u + \nabla v| |\nabla \theta| \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| \left| (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) + (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right| |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
& \text{(j)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_{\delta}(\theta) |\nabla \zeta_R(x)| d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta) |\Delta \zeta_R(x)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que o integrando do termo (c) é positivo e limitado (ver (1.6), (1.13), (1.17), (1.23) e (1.29)). Também o integrando do termo (b), além de limitado, é positivo, pois os coeficientes  $(|\nabla u|^{\beta} - |\nabla v|^{\beta})$  e  $(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2)$ , que podem ser negativos, tem sempre o mesmo sinal. Assim, as integrais nos termos (b) e (c) são positivas e finitas, e podemos então descartar tais termos sem prejuízo à desigualdade (a integral do termo (d.1) também é positiva e finita, mas é conveniente mantê-la mais um pouco). Fazendo isso, ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
& \text{(d.1)} \quad + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \tag{1.70} \\
& \text{(f.2)} \quad + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| |\theta| |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) \left( |u|^{\alpha} - |v|^{\alpha} \right) |\nabla v|^{\beta} |\nabla u + \nabla v| |\nabla \theta| \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |L'_{\delta}(\theta)| \left| (|u|^{\alpha} |\nabla u|^{\beta} \nabla u) + (|v|^{\alpha} |\nabla v|^{\beta} \nabla v) \right| |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
& \text{(j)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_{\delta}(\theta) |\nabla \zeta_R(x)| d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta) |\Delta \zeta_R(x)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Podemos majorar novamente o lado direito de (1.70), usando a estimativa (1.22) nos termos (g) e (i), (1.23) e a hipótese (1.53) no termo (g), as hipóteses (1.13) e (1.17) no termo (i), a estimativa (1.21) nos termos (e), (j) e (k), e as estimativas (1.32) e

(1.33) nos termos (g), (i) e (j) e (k), para obter:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(d.1)} \quad & + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} |\theta(x, t_0)| \zeta_R(x) dx \tag{1.71} \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} \quad & + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(h)} \quad & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) ||u|^\alpha - |v|^\alpha| |\nabla v|^\beta |\nabla u + \nabla v| |\nabla\theta| \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} \quad & + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(j)} \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young no termo (h), com  $p' = q' = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\text{(h)} \quad & \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) ||u|^\alpha - |v|^\alpha| |\nabla v|^\beta |\nabla u + \nabla v| |\nabla\theta| \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \leq \underbrace{\frac{\eta}{4} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(h.1)} \\
& + \underbrace{\frac{2}{\eta} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) ||u|^\alpha - |v|^\alpha|^2 |\nabla v|^{2\beta} |\nabla u + \nabla v|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(h.2)}
\end{aligned}$$

e, juntando os termos semelhantes (d.1) e (h.1), ficamos com

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(d.2)} \quad & + \frac{\eta}{4} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L_\delta''(\theta) |\nabla\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} |\theta(x, t_0)| \zeta_R(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} \quad & + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) ||u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}|^2 |\nabla v|^{2\beta} |\nabla u + \nabla v|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} \quad & + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^{\alpha} (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(j)} \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Como o termo (d.2) é positivo e finito, podemos descartá-lo agora. Podemos também usar a hipótese (1.17) para ver que  $|\nabla v|^{2\beta} |\nabla u + \nabla v|^2 \leq 4(C(t_0))^{(2\beta+2)}$ , e assim ficamos com

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \leq \\
\text{(e)} \quad & \leq \int_{|x|<R} |\theta(x, t_0)| \zeta_R(x) dx \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) |\theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} \quad & + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta) ||u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} \quad & + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^{\alpha} (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(j)} \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Podemos agora começar a efetuar as passagens ao limite.

Primeiro, fazemos  $R \rightarrow \infty$ . O termo (j) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Usando o Teorema da Convergência Monótona, ficaremos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x, t_0)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{1.72} \\
& \text{(f.2)} \quad + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) |\theta|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{8}{\eta} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) ||u|^\alpha - |v|^\alpha|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Como neste caso estamos supondo  $\alpha \geq 1$ , podemos usar o Teorema do Valor Médio para obter a estimativa

$$(|u|^\alpha - |v|^\alpha) \leq \alpha (M(T))^{(\alpha-1)} |u - v|$$

e, usando-a no termo (h.2) de (1.72), ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x, t_0)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(f.2)} \quad + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) |\theta|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{8}{\eta} \alpha^2 (M(T))^{(2\alpha-2)} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) |\theta|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

A seguir, fazemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$  e supomos válida a hipótese (1.53), podemos usar o Teorema da Convergência Monótona para ver que as integrais nos

termos (g), (i) e (k) são finitas. Como esses termos estão multiplicados por  $\varepsilon$ , irão se anular, e ficamos apenas com:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x, t)) \, dx \leq \\
\text{(e)} \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x, t_0)| \, dx \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) |\theta| |\theta| \, dx \, d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} \alpha^2 (M(T))^{(2\alpha-2)} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta) |\theta| |\theta| \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Ao fazermos  $\delta \rightarrow 0$ , graças à propriedade (1.24) e ao Teorema da Convergência Dominada, os termos (f.2) e (h.2) irão se anular, e restará apenas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x, t)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x, t_0)| \, dx,$$

ou seja,

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\theta(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

que é (1.59),  $\forall 0 < t_0 \leq t \leq T$ .

Por fim, caso  $u$ ,  $v$ ,  $u_0$  e  $v_0$  satisfaçam a hipótese (1.54), fazemos  $t_0 \rightarrow 0$  para obter finalmente

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

que é (1.60), conforme desejado, para  $\alpha \geq 1$ .

### **Caso 2:** $0 < \alpha < 1$

A dificuldade técnica desse caso é que não podemos usar o Teorema do Valor Médio para estimar  $(|u|^\alpha - |v|^\alpha)$ , conforme feito no caso  $\alpha \geq 1$ , pois tal estimativa pode se tornar ilimitada quando a derivada de  $f'(w) = |w|^\alpha$  necessite ser aplicada em algum  $\xi$  cada vez mais próximo de zero.

Para contornar essa situação, tomamos  $\hat{\eta} > 0$  e consideramos as novas regularizações dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50) dadas, respectivamente, em (1.55)-(1.56) e (1.57)-(1.58).

Lembramos que, por simplicidade de notação, para cada  $\eta > 0$  fixado, em vez da notação  $u^\eta$  e  $v^\eta$ , nos problemas regularizados (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50) estamos usando apenas a notação  $u$  e  $v$ . A notação correta a usar a partir de (1.55) seria  $u^{\eta, \hat{\eta}}$

e  $v^{\eta, \hat{\eta}}$ , mas vamos continuar deixando de lado a indexação de  $\eta$  e usar apenas a de  $\hat{\eta}$ .

Refazemos então todo o argumento feito para o caso  $\alpha \geq 1$ , usando  $\theta^{\hat{\eta}} = u^{\hat{\eta}} - v^{\hat{\eta}}$ , até chegarmos a (1.71), que aqui terá a forma:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta^{\hat{\eta}}(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(d.1)} \quad & + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) |\nabla \theta^{\hat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} |\theta^{\hat{\eta}}(x, t_0)| \zeta_R(x) dx \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} C_1(T, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) |\theta^{\hat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} C_2(T, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) \left| ((u^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} - ((v^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right| |\nabla v^{\hat{\eta}}|^\beta |\nabla u^{\hat{\eta}} + \nabla v^{\hat{\eta}}| |\nabla \theta^{\hat{\eta}}| \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} C_3(t_0, T, \alpha, \beta, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(j)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young no termo (h), com  $p' = q' = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) \left| ((u^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} - ((v^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right| |\nabla v^{\hat{\eta}}|^\beta |\nabla u^{\hat{\eta}} + \nabla v^{\hat{\eta}}| |\nabla \theta^{\hat{\eta}}| \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \leq \underbrace{\frac{\eta}{4} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) |\nabla \theta^{\hat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(h.1)} \\
& + \underbrace{\frac{2}{\eta} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) \left| ((u^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} - ((v^{\hat{\eta}})^2 + (\hat{\eta})^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right|^2 |\nabla v^{\hat{\eta}}|^{2\beta} |\nabla u^{\hat{\eta}} + \nabla v^{\hat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{(h.2)}
\end{aligned}$$

e, juntando os termos semelhantes (d.1) e (h.1), ficamos com

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} L_\delta(\theta^{\hat{\eta}}(x, t)) \zeta_R(x) dx \\
\text{(d.2)} \quad & + \frac{\eta}{4} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_\delta(\theta^{\hat{\eta}}) |\nabla \theta^{\hat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} &\leq \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}(x, t_0)| \zeta_R(x) dx \\
\text{(f.2)} &+ \frac{2}{\eta} C_1(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta^{\widehat{\eta}}) |\theta^{\widehat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} &+ \varepsilon \frac{C}{\delta} C_2(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(h.2)} &+ \frac{2}{\eta} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta^{\widehat{\eta}}) \left| ((u^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2)^{\frac{\alpha}{2}} - ((v^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right|^2 |\nabla v^{\widehat{\eta}}|^{2\beta} |\nabla v^{\widehat{\eta}} + \nabla v^{\widehat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} &+ 2\varepsilon \frac{C}{\delta} C_3(t_0, T, \alpha, \beta, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(j)} &+ \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} &+ \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Podemos agora descartar o termo (d.2), que é positivo e finito. Podemos também usar a hipótese (1.17) para ver que  $|\nabla v^{\widehat{\eta}}|^{2\beta} |\nabla u^{\widehat{\eta}} + \nabla v^{\widehat{\eta}}|^2 \leq 4(C(t_0, \widehat{\eta}))^{(2\beta+2)}$ . Assim ficamos com

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\int_{|x|<R} L_{\delta}(\theta^{\widehat{\eta}}(x, t)) \zeta_R(x) dx \leq \\
\text{(e)} &\leq \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}(x, t_0)| \zeta_R(x) dx \\
\text{(f.2)} &+ \frac{2}{\eta} C_1(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta^{\widehat{\eta}}) |\theta^{\widehat{\eta}}|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(g)} &+ \varepsilon \frac{C}{\delta} C_2(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(h.2)} &+ \frac{8}{\eta} C_4(t_0, \beta, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{|x|<R} L''_{\delta}(\theta^{\widehat{\eta}}) \left| ((u^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2)^{\frac{\alpha}{2}} - ((v^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
\text{(i)} &+ 2\varepsilon \frac{C}{\delta} C_3(t_0, T, \alpha, \beta, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(j)} &+ \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
\text{(k)} &+ \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Começaremos agora a efetuar as passagens ao limite.

Primeiro, fazemos  $R \rightarrow \infty$ . O termo (j) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ , e



ficaremos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta^{\widehat{\eta}}(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}(x, t_0)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{1.73} \\
& \text{(f.2)} \quad + \frac{2}{\eta} C_1(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta^{\widehat{\eta}}) |\theta^{\widehat{\eta}}|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} C_2(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{8}{\eta} C_4(t_0, \beta, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta^{\widehat{\eta}}) \left| \left( (u^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} - \left( (v^{\widehat{\eta}})^2 + \widehat{\eta}^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} C_3(t_0, T, \alpha, \beta, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \varepsilon(n+2)\eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Para o caso  $\alpha \geq 1$ , nessa altura do argumento utilizamos o Teorema do Valor Médio para  $f(w) = |w|^\alpha$ .

Estamos agora supondo  $0 < \alpha < 1$  e, para refazer a mesma tarefa, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio para

$$f(w) := \left( ((w)^2 + (\widehat{\eta})^2)^{\frac{1}{2}} \right)^\alpha$$

ou seja, vamos utilizar:

$$\left| \left( (u^{\widehat{\eta}})^2 + (\widehat{\eta})^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} - \left( (v^{\widehat{\eta}})^2 + (\widehat{\eta})^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right| \leq \alpha (C(\xi, \widehat{\eta}))^{(\alpha-1)} |u - v|. \tag{1.74}$$

Note que o expoente  $(\alpha - 1)$  é negativo. Mas, como  $\widehat{\eta} > 0$  está fixado, temos uma proteção que garante que, por mais próximo de zero que seja o  $\xi$ , a constante dada pelo Teorema do Valor Médio será finita. Dessa forma, podemos usar (1.74) no termo (h.2) de (1.73), para obter a estimativa

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta^{\widehat{\eta}}(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}(x, t_0)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(f.2)} \quad + \frac{2}{\eta} C_1(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta^{\widehat{\eta}}) |\theta^{\widehat{\eta}}|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} C_2(T, \widehat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\widehat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} \alpha^2 C_5(\xi, \alpha, \hat{\eta}) C_4(t_0, \beta, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L''_{\delta}(\theta^{\hat{\eta}}) |\theta^{\hat{\eta}}|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(i)} \quad & + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} C_3(t_0, T, \alpha, \beta, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \varepsilon(n+2)\eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\hat{\eta}}| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

A seguir, fazemos  $\varepsilon \rightarrow 0$  e, a exemplo do caso  $\alpha \geq 1$ , ficamos apenas com:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} L_{\delta}(\theta^{\hat{\eta}}(x, t)) dx \leq \\
\text{(e)} \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\hat{\eta}}(x, t_0)| dx \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} C_1(T, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_{\delta}(\theta^{\hat{\eta}}) |\theta^{\hat{\eta}}| |\theta^{\hat{\eta}}| d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} \alpha^2 C_5(\xi, \alpha, \hat{\eta}) C_4(t_0, \beta, \hat{\eta}) \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} L''_{\delta}(\theta^{\hat{\eta}}) |\theta^{\hat{\eta}}| |\theta^{\hat{\eta}}| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Ao fazermos  $\delta \rightarrow 0$ , graças à propriedade (1.24), os termos (f.2) e (h.2) irão se anular, e restará apenas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\hat{\eta}}(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\hat{\eta}}(x, t_0)| dx,$$

ou seja,

$$\|\theta^{\hat{\eta}}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\theta^{\hat{\eta}}(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

que é (1.59),  $\forall 0 < t_0 \leq t \leq T$ .

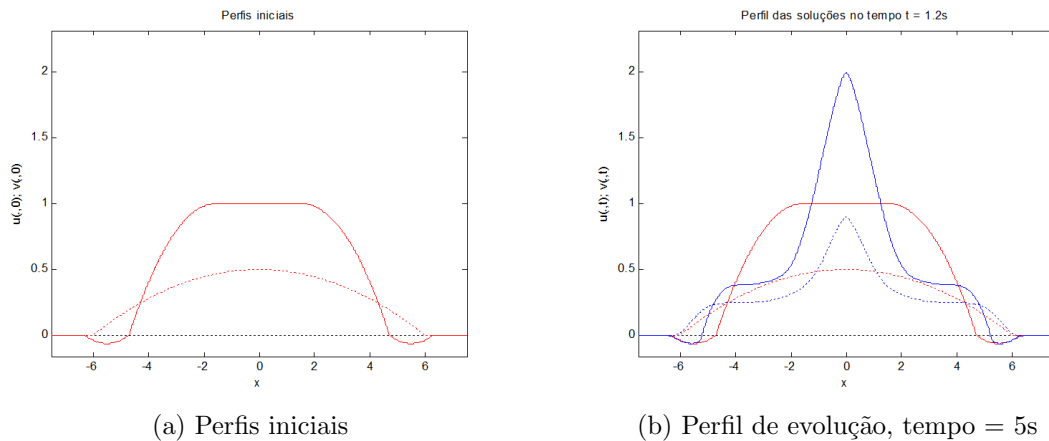
Por fim, caso  $u, v, u_0$  e  $v_0$  satisfaçam a hipótese (1.54), fazemos  $t_0 \rightarrow 0$  para obter finalmente

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

que é (1.60), conforme desejado, também para  $0 < \alpha < 1$ . □

Para ilustrar o Teorema 1.3.1, vamos exibir na Figura 1.6 o comportamento da evolução da norma  $L^1$  de  $u(\cdot, t) - v(\cdot, t)$ , para o tempo de  $t = 2s$ . onde  $u(\cdot, t)$  é a solução do problema (1.1)-(1.2) que iniciou em  $u_0$  dada em (1.3), e  $v(\cdot, t)$  é a solução do mesmo problema e que iniciou em  $v_0$  dada por

$$v_0 = \max \left\{ 0, \frac{36 - x^2}{72} \right\}.$$



(a) Perfis iniciais (b) Perfil de evolução, tempo = 5s

Figura 1.5: Perfil inicial e evolução no tempo = 5s, contração

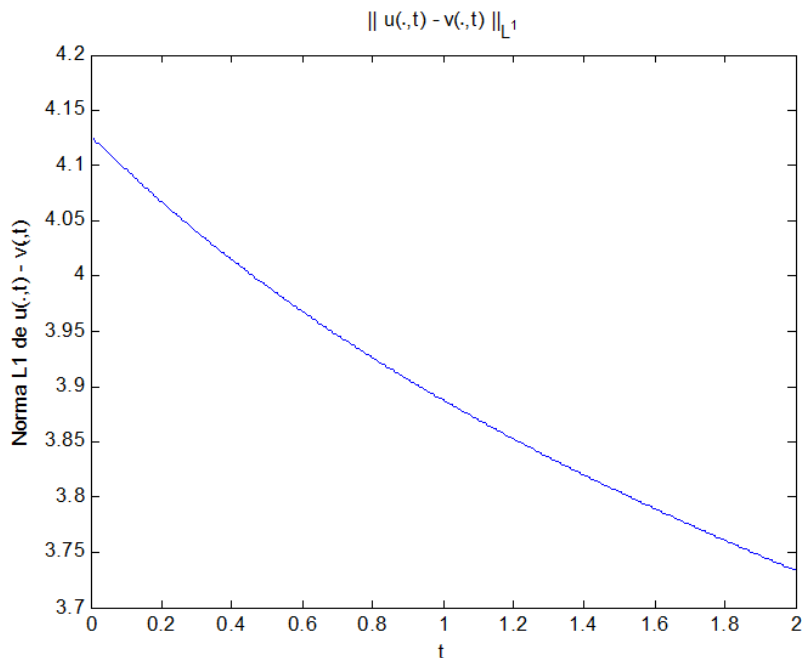


Figura 1.6: Exemplo para ilustrar a contração

Para finalizar a seção, usaremos o resultado do Teorema 1.3.1 para mostrar que, com as mesmas condições do Teorema 1.2.1, a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.47)-(1.48) conserva a massa.

**Teorema 1.3.2** *Seja  $u(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.47)-(1.48) para algum  $0 < T < T_* \leq \infty$ , que satisfaz (1.13), (1.14), (1.15) e (1.17). Então,  $u(\cdot, t)$  tem a propriedade da conservação da massa, isto é, vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx, \quad \forall 0 < t \leq T. \quad (1.75)$$

### Demonstração:

Com o intuito de auxiliar a prova da conservação da massa para a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.47)-(1.48), vamos introduzir outro problema semelhante, nos moldes de (1.49)-(1.50), cuja solução  $v(\cdot, t)$  terá mais regularidade e mostrar inicialmente que tal solução  $v(\cdot, t)$  conserva a massa.

Como a condição inicial  $u_0$  do problema (1.47)-(1.48) é dada em  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , é possível tomar uma sequência  $v_0^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \geq 1$ , que converge para  $u_0$  na norma  $L^1$ . Portanto, fixado  $\widehat{\varepsilon} > 0$ , existe  $m_0$  tal que  $v_0 := v_0^{m_0}$  satisfaz

$$\|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \widehat{\varepsilon}. \quad (1.76)$$

Tomamos tal  $v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  como condição inicial para o problema (1.49)-(1.50). Note que a solução  $v(\cdot, t)$  deste problema, que parte de  $v_0$ , satisfaz:

$$v(\cdot, t) \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n)); \quad e \quad (1.77)$$

$$\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T]). \quad (1.78)$$

Além disso, (1.15) e (1.77) garantem que  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  satisfazem (1.53); e  $u, v, u_0$  e  $v_0$  satisfazem a convergência solicitada em (1.54). Portanto, podemos usar o Teorema 1.3.1 para garantir que há contração entre as respectivas soluções  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), ou seja, para garantir que vale

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 < t \leq T. \quad (1.79)$$

Vamos agora verificar que a solução  $v(\cdot, t)$  conserva massa.

Para isso, multiplicamos a equação (1.49) pela função de corte  $\zeta_R(x)$  dada em (1.29) e integramos sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , para obter:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} v_\tau \zeta_R(x) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, v)) \zeta_R(x) dx d\tau = \\ & = \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) \zeta_R(x) dx d\tau + \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta v \zeta_R(x) dx d\tau. \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito na demonstração dos teoremas anteriores, após iniciarmos essa integração e escrevermos cada termo no lado adequado da igualdade, encontraremos:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{|x|<R} v(x, t) \zeta_R(x) dx = \\
\text{(b)} \quad & = \int_{|x|<R} v(x, t_0) \zeta_R(x) dx \\
\text{(c)} \quad & + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \mathbf{f} \cdot \nabla(\zeta_R(x)) dx d\tau \\
\text{(d)} \quad & - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} (|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) \cdot \nabla(\zeta_R(x)) dx d\tau \\
\text{(e)} \quad & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} v \Delta(\zeta_R(x)) dx d\tau \\
\text{(f)} \quad & - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} v \nabla(\zeta_R(x)) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau.
\end{aligned}$$

Podemos substituir  $\nabla(\zeta_R(x))$  e  $\Delta(\zeta_R(x))$  segundo (1.30) e (1.31), e então fazer  $R \rightarrow \infty$ . Note que o termo (f) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Ficaremos com:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx = \\
\text{(b)} \quad & = \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t_0) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{1.80} \\
\text{(c)} \quad & - \varepsilon \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(d)} \quad & + \varepsilon \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} (|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
\text{(e)} \quad & - \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} v e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} M(x, \varepsilon) dx d\tau,
\end{aligned}$$

onde  $M(x, \varepsilon)$  pode ser visto em (1.31).

A seguir, faremos  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Como  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \rightarrow 1$  ao  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $\left\| \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|x|^2}} \right\| \leq 1$ , e  $M(x, \varepsilon)$  é limitado,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{f}$  satisfaz a hipótese (1.9) e a solução  $v$  satisfaz (1.77) e (1.78), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para verificar que as integrais dos termos (c) e (e) são finitas.

Se  $\alpha \geq 1$ , a integral do termo (d) também será finita, e, portanto, ao fazermos

$\varepsilon \rightarrow 0$  em (1.80), obteremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t_0) dx. \quad (1.81)$$

Se  $0 < \alpha < 1$ , necessitaremos da seguinte hipótese adicional sobre a solução  $v(\cdot, t)$ :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v| dx dt < \infty. \quad (1.82)$$

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $v$  satisfaz (1.82), então novamente a integral do termo (d) será finita, e ao fazermos  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (1.80), também nesse caso obteremos (1.81).

Por fim, fazemos  $t_0 \rightarrow 0$  em (1.81), para chegar a

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) dx, \quad (1.83)$$

que diz que a solução  $v(\cdot, t)$  do problema (1.49)-(1.50) conserva massa.

Finalmente, provaremos que a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.47)-(1.48) conserva massa. Para isso, faremos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u - v)(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u - v)(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} v_0 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u - v)(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (v_0 - u_0) dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx, \end{aligned}$$

onde a segunda passagem é possível graças à validade de (1.83). Podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u - v)(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (v_0 - u_0) dx$$

e, conseqüentemente, teremos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t) - v(x, t)| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0 - u_0| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v_0 - u_0| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0 - u_0| dx \\ &\leq 2 \|v_0 - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\hat{\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde a segunda passagem é possível graças à contração citada em (1.79), e a última passagem é justificada pela escolha de  $v_0$  satisfazendo (1.76).

Como  $\hat{\varepsilon}$  foi tomado arbitrário, podemos concluir a validade de (1.75). □

Para ilustrar o Teorema 1.3.2, vamos exibir na Figura 1.7 a conservação da massa de  $u(\cdot, t)$ , para o tempo de  $t = 30s$ , onde  $u(\cdot, t)$  é a solução do problema (1.1)-(1.2) que iniciou em  $u_0$  dada em (1.3), e  $f(x, t, u)$  é dada em (1.4).

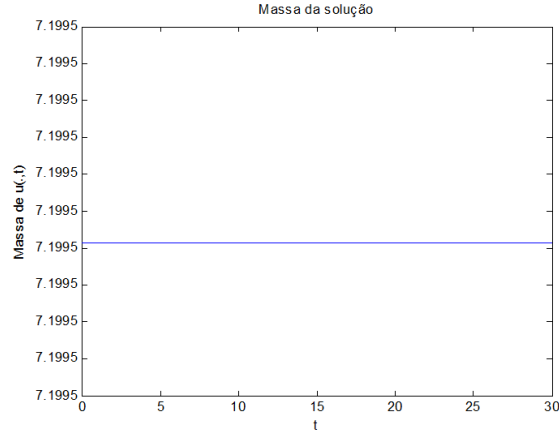


Figura 1.7: Ilustração da conservação da massa

## 1.4 Princípio da Comparação

Nesta seção consideraremos novamente os problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), onde as condições iniciais  $u_0$  e  $v_0$  satisfazem a

$$u_0 \leq v_0, \quad \text{q.s. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.84)$$

e, com as mesmas hipóteses da seção anterior, mostraremos que vale a propriedade da comparação.

**Teorema 1.4.1** *Sejam  $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  soluções dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50), respectivamente, para algum  $0 < T < T_* \leq \infty$ , que satisfazem (1.13) e (1.17), com  $u_0$  e  $v_0$  satisfazendo (1.51), (1.53) e (1.84). Então, vale a propriedade da comparação, ou seja,*

$$u(\cdot, t) \leq v(\cdot, t), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.85)$$

### Demonstração:

Esta prova também será dividida em dois casos:  $\alpha \geq 1$ , e  $0 < \alpha < 1$ .

**Caso 1:  $\alpha \geq 1$**

Iniciamos definindo

$$\theta := v - u$$

na faixa comum  $S_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$  de existência das respectivas soluções  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$  dos problemas (1.47)-(1.48) e (1.49)-(1.50).

Analogamente ao feito na demonstração do Teorema 1.3.1 (contração em  $L^1$ ), subtraímos a equação (1.47) da equação (1.49), obtendo a equação (1.61), multiplicamos por  $G'_\delta(\theta) \zeta_R(x)$ , onde  $G_\delta(\theta)$  é dado em (1.28) e  $\zeta_R(x)$  em (1.30), e integramos sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , para obter

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} G'_\delta(\theta) \theta_\tau \zeta_R(x) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} G'_\delta(\theta) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta)) \zeta_R(x) dx d\tau = \\ & = \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} G'_\delta(\theta) \operatorname{div}\left(|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v - |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u\right) \zeta_R(x) dx d\tau \quad (1.86) \\ & \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} G'_\delta(\theta) \Delta \theta \zeta_R(x) dx d\tau, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \theta) = \mathbf{f}(x, t, v) - \mathbf{f}(x, t, u)$ .

Após iniciar a integração indicada em (1.86), com os mesmos procedimentos usados na demonstração do Teorema 1.3.1, encontraremos:

$$\begin{aligned} (a) & \int_{|x|<R} G_\delta(\theta(x, t)) \zeta_R(x) dx \\ (b) & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} G''_\delta(\theta) |v|^\alpha (|\nabla v|^\beta - |\nabla u|^\beta) (|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\ (c) & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} G''_\delta(\theta) (|v|^\alpha |\nabla v|^\beta + |u|^\alpha |\nabla u|^\beta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\ (d) & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} G''_\delta(\theta) |\nabla \theta|^2 \zeta_R(x) dx d\tau = \\ (e) & = \int_{|x|<R} G_\delta(\theta(x, t_0)) \zeta_R(x) dx \\ (f) & + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} G''_\delta(\theta) \nabla \theta \cdot \tilde{\mathbf{f}} \zeta_R(x) dx d\tau \\ (g) & + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} G'_\delta(\theta) \tilde{\mathbf{f}} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\ (h) & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} G''_\delta(\theta) (|v|^\alpha - |u|^\alpha) |\nabla u|^\beta (\nabla v + \nabla u) \cdot \nabla \theta \zeta_R(x) dx d\tau \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} G'_\delta(\theta) \left( (|v|^\alpha |\nabla v|^\beta \nabla v) - (|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \right) \nabla \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(j)} \quad & - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} G_\delta(\theta) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} G_\delta(\theta) \Delta \zeta_R(x) \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Levando em conta as diferenças entre  $G_\delta(u)$  e  $L_\delta(u)$ , e realizando todas as melhorias e procedimentos indicados na demonstração do Teorema 1.3.1 até a passagem ao limite com  $R \rightarrow \infty$ , chegaremos a:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x, t)) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \leq \\
\text{(e)} \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t_0))_+ e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \tag{1.87} \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} G''_\delta(\theta) |\theta|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau \\
\text{(g)} \quad & + \varepsilon \frac{C}{\delta} M_1(T) F_M(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} G''_\delta(\theta) ||v|^\alpha - |u|^\alpha|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau \\
\text{(i)} \quad & + 2\varepsilon \frac{C}{\delta} (M(T))^\alpha (C(t_0))^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau \\
\text{(k)} \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Como neste caso estamos supondo  $\alpha \geq 1$ , podemos usar a estimativa

$$(|v|^\alpha - |u|^\alpha) \leq \alpha (M(T))^{\alpha-1} |v - u|$$

no termo (h.2) de (1.87), e, ao fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ficaremos apenas com:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x, t)) \, dx \leq \\
\text{(e)} \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t_0))_+ \, dx \\
\text{(f.2)} \quad & + \frac{2}{\eta} (F_M(T))^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} G''_\delta(\theta) |\theta| |\theta| \, dx \, d\tau \\
\text{(h.2)} \quad & + \frac{8}{\eta} \alpha^2 (M(T))^{(2\alpha-2)} (C(t_0))^{(2\beta+2)} \int_{t_0}^t (\mu(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} G''_\delta(\theta) |\theta| |\theta| \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Ao fazermos  $\delta \rightarrow 0$ , restará apenas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t))_+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t_0))_+ dx,$$

e, fazendo  $t_0 \rightarrow 0$ , obteremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t))_+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0 - v_0)_+ dx, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.88)$$

Agora, note que a hipótese (1.84) é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, 0))_+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_0 - v_0)_+ dx = 0, \quad \text{q.s. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.89)$$

e, portanto, usando (1.89) em (1.88), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t))_+ dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x, t) - v(x, t))_+ dx = 0, \quad \text{q.s. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.90)$$

de onde se conclui (1.85), conforme desejado, para  $\alpha \geq 1$ .

**Caso 2:**  $0 < \alpha < 1$

A dificuldade técnica desse caso é a mesma encontrada na demonstração do Teorema 1.3.1, e novamente, para contornar essa situação, tomamos  $\hat{\eta} > 0$  e consideramos os problemas regularizados (1.55)-(1.56) e (1.57)-(1.58).

Refazemos então todo o argumento feito para a demonstração do caso  $0 < \alpha < 1$  no Teorema 1.3.1, respeitando as diferenças entre  $G_\delta(u)$  e  $L_\delta(u)$ . Após refazer todas as majorações lá indicadas, e efetuar as passagens ao limite com  $R \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  e  $t_0 \rightarrow 0$ , nessa ordem, chegaremos a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t))_+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x, t_0))_+ dx = 0, \quad (1.91)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x, t) - v(x, t))_+ dx = 0, \quad \text{q.s. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.92)$$

que é (1.85), conforme desejado, também para  $0 < \alpha < 1$ .

□

Para finalizar este capítulo, vamos ilustrar esse resultado, exibindo na Figura 1.8 o comportamento da evolução das soluções de  $u(\cdot, t)$  e  $v(\cdot, t)$ , para o tempo de  $t = 2s$ . onde  $u(\cdot, t)$  é a solução do problema (1.1)-(1.2) que iniciou em  $u_0$  dada em (1.3), e  $v(\cdot, t)$  é a solução do mesmo problema e que iniciou em  $v_0$  dada por

$$v_0 = \max \left\{ 0, \frac{36 - x^2}{30} \right\},$$

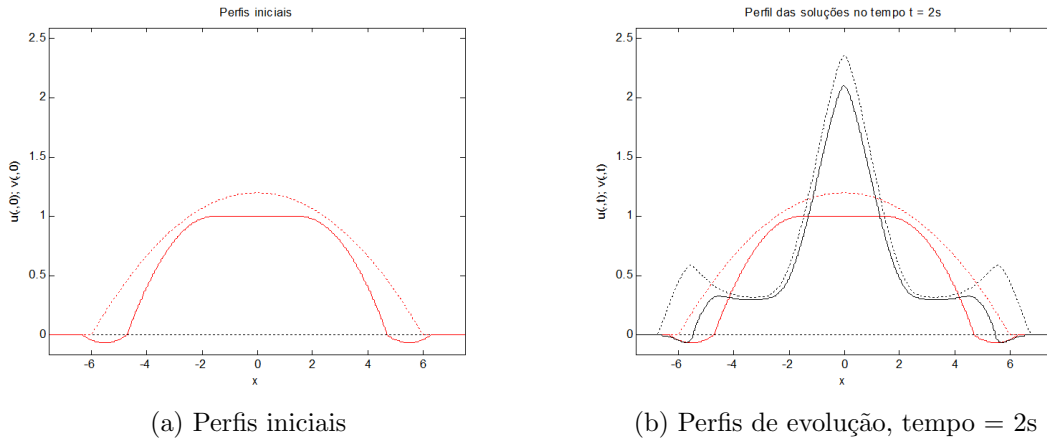


Figura 1.8: Perfis iniciais e de evolução, tempo = 2s, comparação

**Observação:** Como consequência da propriedade da comparação, provada no Teorema 1.4.1, decorre que para  $p_0 = 1$  a solução  $u(\cdot, t)$  do problema regularizado (1.47)-(1.48) é única.



## Capítulo 2

# Estimativas da norma do sup: Um caso de decrescimento

Neste capítulo consideraremos o problema regularizado

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) + \eta \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

munido de dados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

onde  $\eta > 0$  está fixo e  $1 \leq p_0 < \infty$  é dado;  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que satisfazem (1.5);  $\mu(t)$  satisfaz (1.6); e a função  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz (1.9), para  $\kappa \geq 0$  dado.

Além disso suporemos, exclusivamente neste capítulo, que  $\mathbf{b}(x, t, u)$  satisfaz a seguinte condição de estabilidade:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial x_i}(x, t, u) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Nestas condições, mostraremos que a norma do sup das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema (2.1)-(2.2) satisfaz a uma estimativa do tipo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}, \quad \forall t > 0,$$

onde  $p_0 \leq p < \infty$  e  $K(n, p) = K(n, p, \alpha, \beta)$  é uma constante pura, e estipularemos os valores de  $\rho$  e  $\sigma$  para os quais tal estimativa faz sentido. Os resultados que obteremos neste capítulo generalizam alguns resultados apresentados em [3], onde os procedimentos que utilizaremos aqui são aplicados a uma equação um pouco mais simples.

## 2.1 Decrescimento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^q}$

Nesta seção mostraremos que, se  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz a condição (2.3), então uma solução  $u(\cdot, t)$  do problema (2.1)-(2.2), que se suponha estar em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , permanece em  $L^q(\mathbb{R}^n) \forall t > 0$ , para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$  e  $p_0 \leq p \leq q \leq \infty$ , e sua norma  $L^q$  não pode aumentar com o passar do tempo.

**Teorema 2.1.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ ,  $\forall 0 < T < T_*$ , solução suave do problema (2.1)-(2.2), onde  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.9) e (2.3). Supondo que  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para algum  $p \geq p_0$ , então para qualquer  $q$  satisfazendo a  $p_0 \leq p \leq q \leq \infty$  vale:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

### Demonstração:

Considere  $p_0 \leq p \leq q < \infty$ .

Para  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  e  $0 < \varepsilon \leq 1$  dados, vamos analisar a equação (2.1) multiplicada por  $\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , onde  $\Phi_\delta(u)$  é a função auxiliar dada em (1.25), e  $\zeta_R(x)$  é a função de corte dada em (1.29). Ou seja, analisaremos:

$$\begin{aligned} \Phi'_\delta(u) u_t \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) \zeta_R(x) = \\ = \Phi'_\delta(u) \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \eta \Delta u \zeta_R(x). \end{aligned}$$

Integrando essa equação sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u_\tau \zeta_R(x) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau = \\ = \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) dx d\tau + \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \Delta u \zeta_R(x) dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por ora, separaremos a análise em dois casos:  $q = 2$ , e  $q > 2$ .

#### Caso 1: $q = 2$

Note que, como  $\Phi_\delta(u) = u^2$ , então  $\Phi'_\delta(u) = 2u$ , e a equação (2.5) se torna:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u u_\tau \zeta_R(x) dx d\tau}_I + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau}_{II} = \\ = \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} 2u \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{III} + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} 2u \Delta u \zeta_R(x) dx d\tau}_{IV}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Faremos essa integração termo a termo.

Integrando o termo I usando Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \frac{d}{d\tau}(u^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{|x|<R} \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}(u^2) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x|<R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx - \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^2 \zeta_R(x) dx; \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Para integrar o termo II, fazemos:

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f'_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \dots + \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + f'_n(u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right] \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) + \left( f'_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f'_n(u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right] \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIa}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2u \mathbf{f}'(u) \cdot \nabla u \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIb}};
\end{aligned}$$

Para a integração de IIb, vamos definir

$$F'_i := 2u f'_i(u),$$

e, conseqüentemente:

$$F'_i(u) = \int_0^u 2v f'_i(v) dv.$$

Assim, usando o Teorema da Divergência em IIb, segue que:

$$\begin{aligned}
\text{IIb} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \mathbf{F}'(u) \cdot \nabla u \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla \cdot (\mathbf{F}(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{t_0}^t \left( \mathbf{F}(u) \zeta_R(x) \Big|_{|x|=R} - \int_{|x|<R} \mathbf{F}(u) \cdot \nabla \zeta_R(x) dx \right) d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \mathbf{F}(u) \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( \left( \int_0^u 2v f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Ou seja, ao integrar II, ficamos com:

$$\begin{aligned}
II = & 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( \left( \int_0^u 2v f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau; \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Integrando o termo III, temos:

$$\begin{aligned}
III = & 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} \operatorname{div} \left( |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \right) u \zeta_R(x) dx d\tau \\
= & 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \left( u |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \zeta_R(x) \Big|_{|x|=R} - \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla (u \zeta_R(x)) dx \right) d\tau \\
= & -2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \left( \nabla u \zeta_R(x) + u \nabla \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
= & -2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} u |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau; \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Para integrar o termo IV usamos duas vezes o Teorema da Divergência, e encontramos:

$$\begin{aligned}
IV = & -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2|\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} u^2 \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
& + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} u^2 \Delta \zeta_R(x) dx d\tau. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Assim, após iniciar a integração indicada em (2.6) (ver (2.7)-(2.10)), e reescrever os termos, colocando-os no lado adequado da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{|x|<R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx \\
& + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& + 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& + 2 \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^2 \zeta_R(x) dx \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( \left( \int_0^u 2v f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
&- 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta u \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
&- \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} u^2 \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} u^2 \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Majorando o lado direito desta igualdade obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \int_{|x|<R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx \\
&(b) \quad + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&(c) \quad + 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
&(d) \quad + 2 \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
&(e) \quad \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^2 \zeta_R(x) dx \tag{2.11} \\
&(f) \quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( \left| \int_0^u 2v f'_i(v) dv \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right| \right) dx d\tau \\
&(g) \quad + 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta |u| |\nabla u| |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
&(h) \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^2 |\nabla \zeta_R(x)| d\sigma(x) d\tau \\
&(i) \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^2 |\Delta \zeta_R(x)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

É conveniente aplicar agora a desigualdade de Young no termo (g), com  $a = |\nabla u|^{\beta+1}$ ,  $b = |u|$ ,  $p' = \frac{\beta+2}{\beta+1}$  e  $q' = \beta + 2$ . Ficaremos com:

$$\begin{aligned}
&(g) = 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+1} |u| |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau \\
&\leq 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha \left( \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} |\nabla u|^{\beta+2} + \frac{1}{(\beta+2)} |u|^{\beta+2} \right) |\nabla \zeta_R(x)| dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \underbrace{2\varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau}_{(g.1)} \\
& \quad + \underbrace{\varepsilon \frac{2}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau}_{(g.2)}.
\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos a estimativa (1.32). Manteremos o termo (g.2) no lado direito da desigualdade, mas passaremos o termo (g.1) para o lado esquerdo.

Usando a hipótese (1.9) e as estimativas (1.13) e (1.32) no termo (f), as estimativas (1.13) e (1.32) no termo (g.2), a estimativa (1.32) no termo (h), e a estimativa (1.33) no termo (i), a desigualdade (2.11) se torna:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{|x|<R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx \\
(b) \quad & + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(c) \quad & + 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
(g.1) \quad & - 2\varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(d) \quad & + 2\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
(e) \quad & \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^2 \zeta_R(x) dx \\
(f) \quad & + \varepsilon B(T) (M(T))^{\kappa+1} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left| \int_0^u 2v dv \right| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(g.2) \quad & + \frac{2\varepsilon}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h) \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
(i) \quad & + (n+2)\varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

No termo (f) fazemos  $\int_0^u 2v dv = u^2$ , e ficamos com

$$(f) = \varepsilon n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.$$

Como são semelhantes, podemos juntar este termo com o termo (i), obtendo assim:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + 2 \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g.1)} \quad - 2\varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + 2\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^2 \zeta_R(x) dx \\
& \text{(f.1)} \quad + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g.2)} \quad + \frac{2\varepsilon}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau.
\end{aligned}$$

Vamos agora iniciar as passagens ao limite.

Faremos primeiro  $R \rightarrow \infty$ . Note que o termo (h) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Também, o termo (c) se tornará semelhante ao termo (g.1), e poderemos juntá-los. Ao fazer isso, ficaremos apenas com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{R^n} |u(x, t)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(b)} \quad + 2 \int_{t_0}^t \int_{R^n} \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + 2 \left( 1 - \varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \right) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{R^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + 2\eta \int_{t_0}^t \int_{R^n} |\nabla u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \tag{2.12} \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{R^n} |u(x, t_0)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(f.1)} \quad + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{2\varepsilon}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que, como  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$ , poderíamos majorar os três termos do lado direito da desigualdade, e concluir que todos são finitos. Como todos os termos do lado esquerdo da desigualdade tem sinal positivo, e suas respectivas integrais tem integrandos positivos (para o termo (b), ver a hipótese (2.3)), isso implica que todas as integrais do lado esquerdo da desigualdade são finitas. Podemos, portanto, descartar os termos (b), (c.1) e (d), sem prejuízo à desigualdade, ficando apenas com:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{R^n} |u(x, t)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
(e) \quad & \leq \int_{R^n} |u(x, t_0)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
(f.1) \quad & + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h.2) \quad & + \frac{2\varepsilon}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Nesse momento, fazemos  $t_0 \rightarrow 0$ , para obter:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{R^n} |u(x, t)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
(e) \quad & \leq \int_{R^n} |u(x, 0)|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{2.13} \\
(f.1) \quad & + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_0^t \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h.2) \quad & + \frac{2\varepsilon}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_0^t \mu(\tau) \int_{R^n} |u|^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Vamos, por ora, deixar de lado o caso  $q = 2$ , e analisar o caso  $q > 2$ .

### Caso 2: $q > 2$

Assim como no caso anterior, integraremos a equação (2.5) termo a termo.

Integrando o termo I de (2.5), usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{|x|<R} \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= \underbrace{\int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q \zeta_R(x) dx}_{I_a} - \underbrace{\int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t_0)) \right)^q \zeta_R(x) dx}_{I_b}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Para integrar o termo II, procedemos analogamente ao caso anterior, encontramos:

$$\begin{aligned} \text{II} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIa}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \mathbf{f}'(u) \cdot \nabla u \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIb}} \end{aligned}$$

e, para a integração de IIb, definimos  $F'_i(u) := \Phi'_\delta(u) f'_i(u)$ . Consequentemente, temos  $F_i(u) = \int_0^u \Phi'_\delta(v) f'_i(v) dv$ . Assim, usando o Teorema da Divergência, segue que:

$$\begin{aligned} \text{IIb} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \left( \sum_{i=1}^n f'_i(u) u_{x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n \Phi'_\delta(u) f'_i(u) u_{x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n F'_i(u) u_{x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla \cdot (\mathbf{F}(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \left( \mathbf{F}(u) \zeta_R(x) \Big|_{|x|=R} - \int_{|x|<R} \mathbf{F}(u) \cdot \nabla \zeta_R(x) dx \right) d\tau \\ &= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n F_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\ &= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^u \Phi'_\delta(v) f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\ &= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^u q(L_\delta(v))^{q-1} L'_\delta(v) f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Ou seja, a integração do termo II resulta em:

$$\begin{aligned} \text{II} &= \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} q(L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIa}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^u q(L_\delta(v))^{q-1} L'_\delta(v) f'_i(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau}_{\text{IIb}}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Integrando o termo III, temos:

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} \operatorname{div} \left( |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \right) \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{t_0}^t \mu(\tau) \left( \left. |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) \right|_{|x|=R} - \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla (\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx \right) d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \left( \nabla (\Phi'_\delta(u)) \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
&= - \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla u \Phi''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIa}} \\
&\quad - \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (\Phi'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x)) dx d\tau}_{\text{IIIb}}.
\end{aligned}$$

Em IIIa, substituindo  $\Phi''_\delta(u)$  de acordo com (1.27), obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{IIIa} &= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta |\nabla u|^2 \left( q(q-1) (L_\delta)^{q-2} (L'_\delta)^2 + q (L_\delta)^{q-1} L''_\delta(u) \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= -q(q-1) \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIa.1}} \\
&\quad -q \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIa.2}}
\end{aligned}$$

e, em IIIb, substituindo  $\Phi'_\delta(u)$  de acordo com (1.26), ficamos com:

$$\text{IIIb} = -q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) dx d\tau.$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{III} &= -q(q-1) \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIa.1}} \\
&\quad -q \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIa.2}} \quad (2.16) \\
&\quad -q \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IIIb}}.
\end{aligned}$$

Integrando o termo IV, usando o Teorema da Divergência, temos:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \text{div}(\nabla u) \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \eta \int_{t_0}^t \left( \Phi'_\delta(u) \nabla u \zeta_R(x) \Big|_{|x|=R} - \int_{|x|<R} \nabla u \cdot \nabla (\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx \right) d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u \cdot \left( \nabla u \Phi''_\delta(u) \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
&= \underbrace{-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa}} \underbrace{-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVb}}.
\end{aligned}$$

Em IVa, substituindo  $\Phi''_\delta(u)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{IVa} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \left[ q(q-1) (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 + q(L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \right] \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \underbrace{-\eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa.1}} \\
&\quad \underbrace{-\eta q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa.2}}
\end{aligned}$$

e em IVb, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{IVb} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla (\Phi_\delta(u)) \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \left( \int_{|x|=R} \Phi_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) - \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u) \Delta \zeta_R(x) dx \right) d\tau \\
&= \underbrace{-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau}_{\text{IVb.1}} \\
&\quad \underbrace{+ \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVb.2}}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever IV como:

$$\text{IV} = \underbrace{-\eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa.1}}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\eta q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-1} L_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa.2}} \\
& \underbrace{-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau}_{\text{IVb.1}} \\
& \underbrace{+\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVb.2}}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Portanto, após iniciar a integração indicada em (2.5) para  $q > 2$  (ver (2.14)-(2.17)), e reescrever os termos, colocando-os no lado adequado da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
& + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^{q-1} L_\delta'(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-2} (L_\delta'(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-2} (L_\delta'(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau = \\
& = \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t_0)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
& + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^u (L_\delta(v))^{q-1} L_\delta'(v) f_i'(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_R(x) \right) dx d\tau \\
& - q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-1} L_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (L_\delta(u))^{q-1} L_\delta'(u) \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - \eta q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-1} L_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
& + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Majorando o lado direito desta igualdade, e utilizando as estimativas (1.32) nos termos (f), (h) e (j) e (1.33) no termo (k), obtemos a seguinte desigualdade:



$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x, t_0)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(f)} \quad + \varepsilon q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left| \int_0^u (L_\delta(v))^{q-1} L'_\delta(v) f'_i(v) dv \right| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad + \varepsilon q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+1} (L_\delta(u))^{q-1} |L'_\delta(u)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \eta q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(j)} \quad + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(k)} \quad + \varepsilon(n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Faremos agora a primeira passagem ao limite, com  $\delta \rightarrow 0$ , usando os Teoremas da Convergência Monótona e da Convergência Dominada.

Devido à construção de  $L_\delta(u)$ , dada em (1.20), temos que  $L_\delta(u) \rightarrow |u|$  ao  $\delta \rightarrow 0$ ; e também  $L'_\delta(u) \rightarrow \text{sgn}(u)$ . Note que, como  $q > 2$ , a propriedade (1.24) faz com que os termos (g) e (i) se anulem ao  $\delta \rightarrow 0$ . Dessa maneira, ficaremos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-1} \text{sgn}(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} |u|^{q-2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} \zeta_R(x) dx d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad & \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx & (2.18) \\
(f) \quad & + \varepsilon q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left| \int_0^u |v|^{q-1} \operatorname{sgn}(v) f'_i(v) dv \right| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h) \quad & + \varepsilon q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+1} |u|^{q-1} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(j) \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
(k) \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

É conveniente aplicarmos a desigualdade de Young no termo (h), com  $a = |\nabla u|^{\beta+1}$ ,  $b = |u|$ ,  $p' = \frac{\beta+2}{\beta+1}$  e  $q' = \beta+2$ . Ficamos com:

$$\begin{aligned}
(h) &= \varepsilon q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+1} |u| |u|^{q-2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
&\leq \varepsilon q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha \left( \frac{\beta+1}{\beta+2} |\nabla u|^{\beta+2} + \frac{1}{\beta+2} |u|^{\beta+2} \right) |u|^{q-2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
&= \underbrace{\varepsilon q \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau}_{(h.1)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+\beta+q} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau}_{(h.2)}.
\end{aligned}$$

Manteremos o termo (h.2) no lado direito da desigualdade, mas passaremos o termo (h.1) para o lado esquerdo. Fazendo isso, usando a hipótese (1.9) e a estimativa (1.13) no termo (f), e a estimativa (1.13) no termo (h.2), a desigualdade (2.18) se torna:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{|x|<R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx \\
(b) \quad & + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-2} |u| \operatorname{sgn}(u) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(c) \quad & + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
(h.1) \quad & - \varepsilon q \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(d) \quad & + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} \zeta_R(x) dx d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e) & \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx \\
(f) & + \varepsilon q B(T) (M(T))^{\kappa+1} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \sum_{i=1}^n \left( \int_0^u |v|^{q-1} dv \right) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h.2) & + \frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(j) & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
(k) & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

No termo (f), fazemos  $q \int_0^u |v|^{q-1} dv = |u|^q$ , e ficamos com

$$(f) = \varepsilon n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.$$

Como são semelhantes, podemos juntar este termo com (k), obtendo assim:

$$\begin{aligned}
(a) & \int_{|x|<R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx \\
(b) & + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-2} u \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(c) & + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
(h.1) & - \varepsilon q \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(d) & + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
(e) & \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx \\
(f.1) & + \varepsilon \left( (n+2) \eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h.2) & + \frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(j) & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau.
\end{aligned}$$

Vamos efetuar agora uma nova passagem ao limite, desta vez com  $R \rightarrow \infty$ . Note que o termo (j) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Também, o termo (c) se

tornará semelhante ao termo (h.1), e poderemos juntá-los. Ao fazer isso, ficaremos apenas com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(b)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \left( \sum_{i=1}^n u \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + q \left( (q-1) - \varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \right) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad + \eta q (q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{2.19} \\
& \text{(f.1)} \quad + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que, como  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$ , poderíamos majorar os três termos do lado direito da desigualdade, e concluir que todos são finitos. Da mesma forma que no caso  $q = 2$ , (usando a hipótese (2.3) no termo (b)), verificamos que todas as integrais do lado esquerdo da desigualdade são positivas e finitas, e podemos portanto descartar os termos (b), (c.1) e (d) sem prejuízo à desigualdade, ficando apenas com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(f.1)} \quad + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(h.2)} \quad + \frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Nesse momento, fazemos  $t_0 \rightarrow 0$ , para obter:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \\
& \text{(e)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{2.20} \\
& \text{(f.1)} \quad + \varepsilon \left( (n+2)\eta + n B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau
\end{aligned}$$

$$(h.2) \quad + \frac{\varepsilon q}{(\beta + 2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.$$

Note que (2.20), obtido para  $q > 2$ , tem a mesma forma de (2.13), obtido para  $q = 2$ . Podemos agora juntar os casos  $q = 2$  e  $q > 2$ , e prosseguir a demonstração.

Definimos, para  $q \geq 2$ :

$$U_\varepsilon(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx,$$

e escrevemos (2.13) e (2.20) como

$$U_\varepsilon(t) \leq U_\varepsilon(0) + \varepsilon C_1(T) \int_0^t U_\varepsilon(\tau) d\tau + \varepsilon C_2(T) \int_0^t \mu(\tau) U_\varepsilon(\tau) d\tau,$$

onde

$$C_1(T) = \left( (n+2)\eta + nB(T)(M(T))^{\kappa+1} \right) \text{ e } C_2(T) = \frac{q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta}, \quad q \geq 2. \quad (2.21)$$

Aplicando o Lema de Gronwall a (2.21), obtemos:

$$U_\varepsilon(t) \leq U_\varepsilon(0) e^{(\varepsilon C_1(T) t + \varepsilon C_2(T) \int_0^t \mu(\tau) d\tau)},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx e^{(\varepsilon C_1(T) t + \varepsilon C_2(T) \int_0^t \mu(\tau) d\tau)}, \quad (2.22)$$

onde  $C_1(T)$  e  $C_2(T)$  são dados em (2.21).

Note que, ao fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$ , todas as exponenciais que constam em (2.22) tendem a 1. Portanto, ao passar ao limite, com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , utilizando o Teorema da Convergência Monótona, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^q dx,$$

ou seja,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q$ , de onde segue

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (2.23)$$

para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$  e  $p_0 \leq p \leq q < \infty$ .

Por fim, simplesmente fazendo  $q \rightarrow \infty$  em (2.23), obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (2.24)$$

o que conclui a demonstração do Teorema 2.1.1.

**Observação:** A demonstração deste teorema no caso  $1 < q < 2$  segue os procedimentos usados para os casos  $q = 2$  e  $q > 2$ , porém, deve-se tomar o cuidado de fazer  $\delta \rightarrow 0$  como a última passagem ao limite. □

**Observação:** A desigualdade (2.24) diz que  $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall 0 \leq t \leq T < T_*$ . Podemos portanto concluir que, sob as hipóteses do Teorema 2.1.1, a solução  $u(\cdot, t)$  é global (isto é,  $T_* = \infty$ , e a solução  $u(\cdot, t)$  é definida para todo  $t > 0$ ).

## 2.2 Desigualdades de energia

Nesta seção obteremos uma desigualdade de energia que será fundamental para a derivar as estimativas de controle desejadas, para a solução do problema (2.1)-(2.2), sob a hipótese (2.3) considerada exclusivamente neste capítulo.

Iniciaremos demonstrando o seguinte Lema:

**Lema 2.2.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução suave do problema (2.1)-(2.2), onde  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.9) e (2.3). Dado  $p \geq p_0$ , para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$ ,  $p \leq q < \infty$ , e  $\forall 0 < t_0 < t$ , vale a desigualdade*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{\alpha+q-2} |\nabla u(x, \tau)|^{\beta+2} dx d\tau \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q. \quad (2.25)$$

### Demonstração:

Aproveitaremos boa parte do trabalho realizado na demonstração do Teorema 2.1.1, voltando às desigualdades (2.12), no caso  $q = 2$ , e (2.19), no caso  $q > 2$ . Mas, em vez de descartar os termos positivos e finitos (b), (c.1) e (d), descartamos apenas os termos (b) e (d) (ver (2.12) e (2.19)), ficando com a desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\ & + q \left( (q-1) - \varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \right) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{2.26} \\
&\quad + \varepsilon n \left( \eta + B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
&\quad + \frac{\varepsilon q}{(\beta + 2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau,
\end{aligned}$$

válida já para  $q \geq 2$ .

A seguir, efetuamos a passagem ao limite, com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , utilizando o Teorema da Convergência Monótona. Todas as exponenciais que constam em (2.26) tendem a 1 ao  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e como as integrais nos dois últimos termos são finitas, ficamos apenas com:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\
&\quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{\alpha+q-2} |\nabla u(x, \tau)|^{\beta+2} dx d\tau \leq \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q dx,
\end{aligned}$$

que é (2.25), conforme desejado. □

Na verdade, a desigualdade de energia que usaremos adiante não será a dada em (2.25), mas sim uma versão um pouco modificada. O Lema 2.2.1 foi incluído com o intuito de indicar o caminho a percorrer para a demonstração do próximo resultado.

**Lema 2.2.2** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução suave do problema (2.1)-(2.2), onde  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.9) e (2.3). Dado  $p \geq p_0$ , para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$ ,  $p \leq q < \infty$ ,  $\forall 0 < t_0 < t$  e  $\forall \gamma > 0$ , vale a desigualdade*

$$\begin{aligned}
&(t-t_0)^\gamma \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{\alpha+q-2} |\nabla u(x, \tau)|^{\beta+2} dx d\tau \leq \\
&\quad \leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q d\tau. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

### Demonstração:

Analogamente ao feito na demonstração do Lema 2.2.1 (que inicia na demonstração do Teorema 2.1.1), consideramos  $p_0 \leq p \leq q < \infty$ , tomamos  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  e  $\varepsilon > 0$  fixos, e, em vez de multiplicar apenas por  $\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , multiplicamos a equação (2.1) por  $(t-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , onde  $\gamma > 0$  será adequadamente escolhido mais tarde, e

integraremos sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , ficando com:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u_\tau \zeta_R(x) dx d\tau}_I \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau}_{II} = \\
& = \underbrace{\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{III} \\
& + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \Delta u \zeta_R(x) dx d\tau}_{IV}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

A principal mudança em relação à demonstração do Lema 2.2.1 se dará na integração do termo I. Se  $q = 2$ , temos  $\Phi_\delta(u) = u^2$ , e, ao integrar o termo I, usando o Teorema de Fubini, encontraremos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{|x| < R} \frac{d}{d\tau} (u^2) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{|x| < R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \frac{d}{d\tau} (u^2) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x| < R} \left( (\tau - t_0)^\gamma (u(x, \tau))^2 \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \gamma (\tau - t_0)^{\gamma-1} (u(x, \tau))^2 d\tau \right) \zeta_R(x) dx \\
&= (t - t_0)^\gamma \int_{|x| < R} |u(x, t)|^2 \zeta_R(x) dx - \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{|x| < R} |u(x, \tau)|^2 d\tau \zeta_R(x) dx,
\end{aligned}$$

e, se  $q > 2$ , encontraremos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{|x| < R} \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{|x| < R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x| < R} \left( (\tau - t_0)^\gamma \Phi_\delta(u(x, \tau)) \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \gamma (\tau - t_0)^{\gamma-1} \Phi_\delta(u(x, \tau)) d\tau \right) \zeta_R(x) dx \\
&= (t - t_0)^\gamma \int_{|x| < R} \Phi_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx - \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{|x| < R} \Phi_\delta(u(x, \tau)) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= (t - t_0)^\gamma \int_{|x| < R} (L_\delta(u(x, t)))^q \zeta_R(x) dx - \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{|x| < R} (L_\delta(u(x, \tau)))^q d\tau \zeta_R(x) dx.
\end{aligned}$$



Para a integração dos demais termos de (2.28), tanto no caso  $q = 2$  quanto no caso  $q > 2$ , como a integração é feita sobre a variável espacial, procede-se da mesma forma que na demonstração do Teorema 2.1.1, tomando-se o cuidado de manter a indicação de  $(\tau - t_0)^\gamma$  em todos os termos.

A seguir repete-se todos os passos realizados na demonstração do Teorema 2.1.1, até chegarmos às desigualdades (2.12), no caso  $q = 2$ , e (2.19), no caso  $q > 2$ .

Como na demonstração do Lema 2.2.1, descartamos então os termos positivos e finitos (b) e (d) (ver (2.12) e (2.19)), e ficamos com a desigualdade

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& + q \left( (q-1) - \varepsilon \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \right) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+q-2} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \\
& \leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{|x|<R} |u(x, \tau)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{2.29} \\
& + \varepsilon n \left( \eta + B(T) (M(T))^{\kappa+1} \right) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& + \frac{\varepsilon q}{(\beta+2)} (M(T))^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau,
\end{aligned}$$

válida já para  $q \geq 2$ .

A seguir, efetuamos a passagem ao limite, com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , utilizando o Teorema da Convergência Monótona. Todas as exponenciais que constam em (2.29) tendem a 1 ao  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e como as integrais nos dois últimos termos são finitas, ficamos apenas com:

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\
& + q(q-1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{\alpha+q-2} |\nabla u(x, \tau)|^{\beta+2} dx d\tau \leq \\
& \leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{|x|<R} |u(x, \tau)|^q dx,
\end{aligned}$$

que é (2.27), como desejado. □

## 2.3 Estimativas para a taxa de decrescimento da norma do sup

Nesta seção mostraremos como a desigualdade de energia (2.27) pode ser utilizada para obter uma estimativa fundamental para a norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  do

problema (2.1)-(2.2), sob a hipótese (2.3) considerada exclusivamente neste capítulo, com a forma

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}, \quad \forall t > 0,$$

onde os valores de  $\rho$  e de  $\sigma$  para os quais a estimativa é válida serão definidas ao longo desta seção.

O primeiro resultado que demonstraremos indica que a norma  $L^q$  da solução, em um determinado intervalo de tempo, pode ser controlada por uma norma mais baixa, computada na extremidade esquerda do intervalo. Além disso, mostra que a norma  $L^q$  da solução decresce à medida que  $t$  aumenta, e, como está definida globalmente, a solução vai a zero ao  $t \rightarrow \infty$ .

Em sua demonstração, será necessário utilizar a seguinte desigualdade de interpolação do tipo Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG):

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w(\cdot, t)\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\theta, \quad \forall w \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \quad (2.30)$$

onde  $0 \leq \theta \leq 1$ , e  $r$ ,  $s$  e  $p$  satisfazem a

$$0 < s \leq r \leq \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)\theta + \frac{(1-\theta)}{s}. \quad (2.31)$$

(Para maiores detalhes sobre esta desigualdade, ver, por ex., [14]).

**Teorema 2.3.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução suave do problema (2.1)-(2.2), onde  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.9) e (2.3). Dado  $p \geq p_0$ , para qualquer  $t_0 < t$  e  $2p \leq q < \infty$ , podemos obter a estimativa:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q(n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^\rho (t - t_0)^{-\sigma}, \quad (2.32)$$

onde  $\rho = \frac{q(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$  e  $\sigma = \frac{n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$ .

**Demonstração:**

Começamos definindo  $w(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$w(x, t) := |u(x, t)|^{\lambda_1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0,$$

onde  $\lambda_1 \geq 1$  e  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  é solução do problema (2.1)-(2.2), com  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfazendo a condição (2.3).

A primeira tarefa é determinar um valor adequado para  $\lambda_1$ . Para isso, calculamos

$$\begin{aligned}\nabla w(x, t) &= \lambda_1 |u(x, t)|^{\lambda_1 - 1} \operatorname{sgn}(u) \nabla u(x, t); \\ |\nabla w(x, t)| &= \lambda_1 |u(x, t)|^{\lambda_1 - 1} |\nabla u(x, t)|; \text{ e} \\ |\nabla w(x, t)|^{\beta + 2} &= \lambda_1^{\beta + 2} |u(x, t)|^{(\lambda_1 - 1)(\beta + 2)} |\nabla u(x, t)|^{\beta + 2}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Como queremos utilizar a desigualdade (2.27), será necessário escrever seu segundo termo em função de  $w$ . Portanto, fazemos  $(\lambda_1 - 1)(\beta + 2) = q - 2 + \alpha$  em (2.33), o que leva a

$$\lambda_1 = \frac{q + \alpha + \beta}{\beta + 2}.$$

Assim, a definição adequada para  $w(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  é:

$$w(x, t) := |u(x, t)|^{\frac{q + \alpha + \beta}{\beta + 2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0. \quad (2.34)$$

A seguir, buscamos reescrever (2.27) em termos de  $w$ . Para o primeiro e o terceiro termos, tomamos  $\lambda > 0$  tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda, \quad \forall t > 0. \quad (2.35)$$

Substituindo  $w$  em (2.35), conforme definido em (2.34), descobrimos que a igualdade em (2.35) é válida para

$$\lambda = \frac{q(\beta + 2)}{q + \alpha + \beta}. \quad (2.36)$$

Para escrever o segundo termo de (2.27) em função de  $w$ , usamos (2.33), de onde segue que

$$|u(x, t)|^{q - 2 + \alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta + 2} = \left( \frac{\beta + 2}{q + \alpha + \beta} \right)^{(\beta + 2)} |\nabla w(x, t)|^{\beta + 2}.$$

Portanto, ao reescrevermos a desigualdade (2.27) em termos de  $w$ , encontramos:

$$\begin{aligned}(t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda &+ \\ &+ q(q - 1) \left( \frac{\beta + 2}{q + \alpha + \beta} \right)^{(\beta + 2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \leq \\ &\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma - 1} \|w(\cdot, \tau)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda d\tau,\end{aligned}\quad (2.37)$$

onde  $\lambda = \frac{q(\beta+2)}{q+\alpha+\beta}$ .

A seguir, iremos usar em (2.37) a desigualdade do tipo SNG dada em (2.30), com

$$r = \lambda; \quad s = \frac{\lambda}{2}; \quad \text{e} \quad p = (\beta + 2).$$

Note que, para tais valores, a relação (2.31) nos leva a encontrar

$$\theta = \frac{n(q + \alpha + \beta)}{nq + q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}. \quad (2.38)$$

Facilmente pode-se ver que vale  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $\forall n, q \geq 2, \alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$ .

Com esses valores, a desigualdade dada em (2.30) fica

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda/2}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^\theta,$$

e, aplicando-a a (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + \\ & + q(q-1) \left( \frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta} \right)^{(\beta+2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta+2} d\tau \leq \\ & \leq \gamma C^\lambda \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|w(\cdot, \tau)\|_{L^{\lambda/2}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\lambda} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\theta\lambda} d\tau \\ & \leq \gamma C^\lambda \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q(1-\theta)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\theta\lambda} d\tau, \end{aligned} \quad (2.39)$$

com a última passagem sendo justificada por

$$\left( \|w(\cdot, \tau)\|_{L^{\lambda/2}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda/2} \right)^{2(1-\theta)} = \left( \|u(\cdot, \tau)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q/2} \right)^{2(1-\theta)} \leq \left( \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q/2} \right)^{2(1-\theta)},$$

onde podemos usar o Teorema 2.1.1 pois estamos supondo  $q \geq 2p$ .

A seguir, aplicaremos a desigualdade de Hölder no lado direito de (2.39), com

$$\begin{aligned} p' &= \frac{(\beta+2)}{(\beta+2) - \theta\lambda}; \quad q' = \frac{(\beta+2)}{\theta\lambda}; \\ a &= \left( \frac{1}{\mu(\tau)} \right)^{\frac{\theta\lambda}{(\beta+2)}}; \quad \text{e} \\ b &= (\tau - t_0)^{(\gamma-1)} (\mu(\tau))^{\frac{\theta\lambda}{(\beta+2)}} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\theta\lambda}. \end{aligned}$$

A partir de agora, assumiremos que  $\mu(t) \geq 1$ ,  $\forall t > 0$ . Dessa forma, após aplicar

Hölder, poderemos majorar o integrando que contém  $a$  por 1. Ao fazer isso, obtemos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + \\
& + q(q - 1) \left( \frac{(\beta + 2)}{q + \alpha + \beta} \right)^{(\beta + 2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \leq \\
& \leq \gamma C^\lambda \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q(1 - \theta)} (t - t_0)^{\frac{(\beta + 2) - \theta\lambda}{(\beta + 2)}} \left( \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\frac{(\gamma - 1)(\beta + 2)}{\theta\lambda}} \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \right)^{\frac{\theta\lambda}{(\beta + 2)}}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como desejamos comparar a integral restante no lado direito, de alguma forma, com a integral do segundo termo do lado esquerdo, precisamos que seus integrandos sejam iguais. Podemos obter isso igualando os expoentes que ainda estão diferentes nas duas integrais, fazendo

$$\frac{(\gamma - 1)(\beta + 2)}{\theta\lambda} = \gamma,$$

o que leva à seguinte escolha para  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{(\beta + 2)}{(\beta + 2) - \theta\lambda}. \tag{2.41}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + \\
& + q(q - 1) \left( \frac{(\beta + 2)}{q + \alpha + \beta} \right)^{(\beta + 2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \leq \\
& \leq \gamma C^\lambda \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q(1 - \theta)} (t - t_0)^{\frac{(\beta + 2) - \theta\lambda}{(\beta + 2)}} \left( \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \right)^{\frac{\theta\lambda}{(\beta + 2)}}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Agora, vamos aplicar a desigualdade de Young no lado direito de (2.42), com

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{(\beta + 2)}{(\beta + 2) - \theta\lambda}; \quad q' = \frac{(\beta + 2)}{\theta\lambda}; \\
a &= \gamma C^\lambda \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q(1 - \theta)} (t - t_0)^{\frac{(\beta + 2) - \theta\lambda}{(\beta + 2)}} \left( \frac{2\theta\lambda}{q(q - 1)(\beta + 2)} \right)^{\frac{\theta\lambda}{\beta + 2}} \left( \frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)} \right)^{\theta\lambda}; \quad e \\
b &= \left( \frac{(\beta + 2)}{q + \alpha + \beta} \right)^{\theta\lambda} \left( \frac{(\beta + 2)}{\theta\lambda} \frac{q}{2} (q - 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta + 2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta + 2} d\tau \right)^{\frac{\theta\lambda}{(\beta + 2)}}.
\end{aligned}$$

Os valores de  $a$  e  $b$  foram adequadamente escolhidos para ficarmos com

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + \\
& + q(q-1) \left( \frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta} \right)^{(\beta+2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta+2} d\tau \leq \\
& \leq K_1(q, n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}} (t-t_0) + \\
& + \frac{q}{2}(q-1) \left( \frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta} \right)^{(\beta+2)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta+2} d\tau, \quad (2.43)
\end{aligned}$$

onde

$$K_1(q, n, \alpha, \beta) = \gamma^{\frac{(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}} C^{\frac{(\beta+2)\lambda}{(\beta+2)-\theta\lambda}} \left( \frac{\theta\lambda}{(\beta+2)q(q-1)} \right)^{\frac{\theta\lambda}{(\beta+2)-\theta\lambda}} \left( \frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)} \right)^{\frac{(\beta+2)\theta\lambda}{(\beta+2)-\theta\lambda}}, \quad (2.44)$$

ou seja, deixamos o segundo termo do lado direito de (2.43) semelhante ao segundo termo do lado esquerdo. Podemos então juntá-los em um termo positivo à esquerda da desigualdade. Como o termo restante à direita em (2.43) é finito, para qualquer  $t_0 \leq t < \infty$ , podemos concluir que o segundo termo à esquerda é também finito e, dessa forma, podemos descartá-lo, sem prejuízo à desigualdade. Ao fazer isso, ficamos apenas com:

$$(t - t_0)^\gamma \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda \leq K_1(q, n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}} (t-t_0),$$

ou ainda

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda \leq K_1(q, n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}} (t-t_0)^{1-\gamma}. \quad (2.45)$$

Escrevendo o lado esquerdo de (2.45) em termos de  $u$ , de acordo com (2.35), ficamos com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \leq K_1(q, n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}} (t-t_0)^{1-\gamma},$$

e, finalmente, chegamos a

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q(n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^\rho (t-t_0)^{-\sigma},$$

que é a expressão desejada (2.32), onde  $K_q(n, \alpha, \beta) = (K_1(q, n, \alpha, \beta))^{1/q}$ ,  $\rho = \frac{(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}$  e  $\sigma = \frac{\gamma-1}{q}$ .

Substituindo os valores de  $\lambda$ , escolhido em (2.36), de  $\theta$ , calculado em (2.38), de  $\gamma$ ,

escolhido em (2.41), e de  $K_1(q, n, \alpha, \beta)$ , dado em (2.44), descobrimos que a estimativa (2.32) é satisfeita para

$$\begin{aligned}
K_q(n, \alpha, \beta) = & \left( \frac{nq + q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \right)^{\left( \frac{nq + q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{q[q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right)} \\
& \cdot C^{\left( \frac{(\beta + 2)[nq + q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]}{(q + \alpha + \beta)[q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right)} \\
& \cdot \left( \frac{2nq}{q(q - 1)[nq + q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right)^{\frac{n}{q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}} \\
& \cdot \left( \frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)} \right)^{\frac{n(q + \alpha + \beta)}{q[q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]}} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

e pelos valores dos expoentes  $\rho$  e  $\sigma$ :

$$\rho = \frac{q(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}{q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{n}{q(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)},$$

o que completa a demonstração do Teorema 2.3.1. □

No próximo resultado obteremos a estimativa para a norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  do problema (2.1)-(2.2), no caso onde vale a hipótese (2.3).

**Teorema 2.3.2** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução suave do problema (2.1)-(2.2), onde  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.9) e (2.3). Dado  $p \geq p_0$ , para qualquer  $t_0 < t$ , vale a estimativa*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho (t - t_0)^{-\sigma}, \quad (2.47)$$

onde  $\rho = \frac{p(\beta + 2)}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}$  e  $\sigma = \frac{n}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}$ .

Para provar (2.47), vamos usar um procedimento iterativo tipo *bootstrap*: buscaremos estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  num instante  $t$ , com  $0 \leq t_0 < t$ , em termos de um valor conhecido  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , onde  $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Para isso, tomaremos  $m > 1$  fixo e estimaremos inicialmente  $\|u(\cdot, t_m = t)\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$  em termos de um tempo anterior  $t_{m-1}$  na norma  $L^{2^{(m-1)}p}$ . Depois, estimaremos  $\|u(\cdot, t_{m-1})\|_{L^{2^{(m-1)}p}(\mathbb{R}^n)}$  em termos de um tempo anterior  $t_{m-2}$  na norma  $L^{2^{(m-2)}p}$ , e assim sucessivamente, até chegar ao instante de tempo inicial  $t_0$ . Procedendo dessa maneira, teremos estimado  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$  em termos do valor conhecido  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , e então obteremos o resultado desejado ao fazer  $m \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** (do Teorema 2.3.2)

Seja  $u(\cdot, t)$  solução suave do problema (2.1)-(2.2), com  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfazendo (2.3).

Pelo Teorema 2.3.1, para qualquer  $t_0 < t$  e  $2p \leq q < \infty$ , é válida a estimativa (2.32), ou seja,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q(n, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}} (t-t_0)^{\frac{-n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}}, \quad (2.48)$$

onde a constante  $K_q(n, \alpha, \beta)$  está descrita em (2.46).

Para  $m > 1$  fixo, vamos particionar o intervalo de tempo  $(t_0, t)$  em partes disjuntas e sequenciais, fazendo:

$$\begin{cases} t_0^{(m)} = t_0 + 2^{-m}(t - t_0); \\ t_i^{(m)} = t_0^{(m)} + (1 - 2^{-i})(t - t_0), \quad \forall 1 \leq i \leq m-1; \\ t_m^{(m)} = t_0^{(m)} + (1 - 2^{-m})(t - t_0) = t. \end{cases} \quad e$$

Note que, usando essa partição, teremos subintervalos  $h_i = (t_{i-1}^{(m)}, t_i^{(m)})$  com respectivos tamanhos dados por

$$\begin{cases} |h_m| = |t_m^{(m)} - t_{m-1}^{(m)}| = 2^{-m}(t - t_0); \\ |h_i| = 2^{-i}(t - t_0), \quad \forall 1 \leq i \leq m-1; \\ |h_1| = 2^{-1}(t - t_0). \end{cases} \quad e \quad (2.49)$$

Considere  $q = 2^m p$ . Usando (2.48) para estimar  $\|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$  em termos de  $\|u(\cdot, t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)} p}(\mathbb{R}^n)}$ , obtemos:

$$\|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_m \|u(\cdot, t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)} p}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^{(m-1)} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)} (t_m^{(m)} - t_{m-1}^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)}, \quad (2.50)$$

onde  $K_m$  é a constante descrita em (2.46), com  $q = 2^m p$ .

Agora, usamos (2.48) para estimar  $\|u(\cdot, t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)} p}(\mathbb{R}^n)}$  em termos do tempo anterior  $t_{m-2}^{(m)}$ , encontrando:

$$\|u(\cdot, t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)} p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_{(m-1)} \|u(\cdot, t_{m-2}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-2)} p}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^{(m-1)} p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^{(m-2)} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)} \cdot (t_{m-1}^{(m)} - t_{m-2}^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^{(m-1)} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)}, \quad (2.51)$$



e, substituindo (2.51) em (2.50), obtemos:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} &\leq K_m \cdot K_{(m-1)}^{\left(\frac{2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^{m-1} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)} \\ &\cdot \|u(\cdot, t_{m-2}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-2)p}(\mathbb{R}^n)}}^{\left(\frac{2^{(m-1)p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)} \cdot 2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^{(m-1)p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot 2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)} \\ &\cdot (t_{m-1}^{(m)} - t_{m-2}^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^{(m-1)p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot 2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}\right)} \cdot (t_m^{(m)} - t_{m-1}^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)}. \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento para cada  $1 \leq i \leq m$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} &\leq K_m^{A_0} \cdot K_{(m-1)}^{A_1} \cdot \dots \cdot K_1^{A_{m-1}} \cdot \|u(\cdot, t_0^{(m)} = t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{B_m} \\ &\cdot (t_1^{(m)} - t_0^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^1 p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-1}\right)} \cdot \dots \cdot (t_m^{(m)} - t_{m-1}^{(m)})^{\left(\frac{-n}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_0\right)}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $A_0 := 1$ ; e

$$A_i := \prod_{j=0}^{i-1} \left( \frac{2^{m-j} p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^{m-j} p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \right) \quad \forall 1 \leq i \leq m-1; \quad e \quad (2.53)$$

$$B_i := \prod_{j=m+1-i}^m \left( \frac{2^j p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^j p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \right) \quad \forall 1 \leq i \leq m. \quad (2.54)$$

Usando (2.49), podemos reescrever (2.52) como

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \\ &\leq K_m^{A_0} \cdot K_{(m-1)}^{A_1} \cdot \dots \cdot K_1^{A_{m-1}} \cdot \|u(\cdot, t_0^{(m)})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{B_m} \\ &\cdot (2^{-1}(t - t_0))^{\left(\frac{-n}{2^1 p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-1}\right)} \cdot \dots \cdot (2^{-m}(t - t_0))^{\left(\frac{-n}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_0\right)} \end{aligned}$$

ou, mais resumidamente:

$$\|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^m \left( K_i^{A_{m-i}} \cdot \|u(\cdot, t_0^{(m)})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{B_m} \cdot (2^{-i}(t - t_0))^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)} \right), \quad (2.55)$$

onde  $A_0 = 1$ , e  $A_i$  e  $B_i$  são dados em (2.53) e (2.54), respectivamente.

Vamos agora analisar os fatores que compõem (2.55), um por um.

Primeiro, analisaremos  $\prod_{i=1}^m (2^{-i}(t-t_0))^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)}$ . Note que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m (2^{-i}(t-t_0))^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)} &= \\ &= \underbrace{\prod_{i=1}^m (2^{-i})^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)}}_I \underbrace{\prod_{i=1}^m (t-t_0)^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)}}_{II} \end{aligned} \quad (2.56)$$

e que,  $\forall 1 \leq i \leq m$ , vale

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2^i} \prod_{j=0}^{i-1} \left( \frac{2^{m-j} p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^{m-j-1} p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)} \right) \\ &= \frac{1}{2^i} \left( \frac{2^m p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^{m-i} p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Assim, podemos fazer:

$$II = \prod_{i=1}^m (t-t_0)^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)} = (t-t_0)^{\left(\sum_{i=1}^m \frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i}\right)}$$

e, olhando só para o expoente de II, se trocarmos o índice  $i$  por  $m-i$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{-n}{2^{m-i} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot A_i = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{-n}{(2^{m-i} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta))} \cdot \frac{1}{2^i} \cdot \frac{(2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta))}{(2^{m-i} p(\beta+2)+n(\alpha+\beta))} \\ &= -2n(2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{-i}}{2^{m-i} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1}{2^{m-i+1} p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Multiplicando e dividindo (2.58) por  $[2n(\alpha+\beta)]^2$ , ficamos com:

$$\frac{-2n(2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta))}{[2n(\alpha+\beta)]^2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{-i}}{\frac{2^{m-i} p(\beta+2)}{2n(\alpha+\beta)} + \frac{2n(\alpha+\beta)}{2n(\alpha+\beta)}} \cdot \frac{1}{\frac{2^{m-i+1} p(\beta+2)}{2n(\alpha+\beta)} + \frac{2n(\alpha+\beta)}{2n(\alpha+\beta)}}, \quad (2.59)$$

e, definindo  $\lambda_2 = \frac{2^m p(\beta + 2)}{2n(\alpha + \beta)}$ , podemos reescrever (2.59) como

$$\frac{-2n(2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta))}{[2n(\alpha + \beta)]^2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{-i}}{(\lambda_2 2^{-i} + 1)} \cdot \frac{1}{(\lambda_2 2^{1-i} + 1)}. \quad (2.60)$$

Multiplicando e dividindo (2.60) por  $\lambda_2$  (que não depende de  $i$ ), ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{-2n(2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta))}{\lambda_2 [2n(\alpha + \beta)]^2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_2 2^{-i}}{(\lambda_2 2^{-i} + 1)} \cdot \frac{1}{(\lambda_2 2^{1-i} + 1)} = \\ & = \frac{-2n(2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta))}{(2^m p(\beta + 2))(2n(\alpha + \beta))} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(\lambda_2 2^{-i} + 1)} - \frac{1}{(\lambda_2 2^{1-i} + 1)} \\ & = \frac{-2n(2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta))}{(2^m p(\beta + 2))(2n(\alpha + \beta))} \left( \frac{1}{(\lambda_2 2^{-m+1} + 1)} - \frac{1}{(\lambda_2 2 + 1)} \right) \\ & = - \left( 2n + \frac{2n^2(\alpha + \beta)}{(2^m p(\beta + 2))} \right) \left( \frac{1}{2p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} - \frac{1}{2^{m+1}p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \right). \end{aligned}$$

Assim, ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , restará, no expoente de II, apenas:

$$\begin{aligned} - (2n + 0) \left( \frac{1}{2p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} - 0 \right) &= \frac{-2n}{2p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{-n}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

ou seja, obtivemos o valor esperado para  $\sigma$  em (2.47), que é  $\sigma = \frac{n}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}$ . Para verificar que a parte I do produtório em (2.56) permanecerá finita ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , note que, de (2.57), segue que  $\forall 1 \leq i \leq m$  vale

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2^i} \left( \frac{2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}{2^{m-i} p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^i} \left( \frac{2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}{2^{m-i} p(\beta + 2)} \right) \\ &= \frac{2^m p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}{2^m p(\beta + 2)} = 1 + \frac{n(\alpha + \beta)}{2^m p(\beta + 2)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Em I de (2.56) temos

$$\prod_{i=1}^m (2^{-i})^{\left( \frac{-n}{2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \cdot A_{m-i} \right)} = (2)^{\sum_{i=1}^m i \frac{n}{2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \cdot A_{m-i}},$$

e, no expoente, fazemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m i \frac{n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \cdot A_{m-i} &\leq \sum_{i=1}^m i \frac{n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \cdot \left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2^m p(\beta+2)}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^m \frac{i n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \cdot \left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \\
&\leq n \left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \sum_{i=1}^m \frac{i}{2^i p(\beta+2)} \\
&\leq \frac{n}{p(\beta+2)} \left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \sum_{i=1}^m \frac{i}{2^i}.
\end{aligned}$$

Portanto, ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , no expoente de I restará

$$\frac{n}{p(\beta+2)} \left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}, \quad (2.63)$$

que é finito, pois a série em (2.63) é convergente. Assim, após fazer  $m \rightarrow \infty$ , poderemos incluir I na constante  $K(n, p, \alpha, \beta)$ .

Agora, vamos efetuar a passagem ao limite com  $m \rightarrow \infty$  no expoente  $B_m$ , que aparece em (2.55) e é dado em (2.54).

A exemplo de (2.57),  $\forall 1 \leq i \leq m$ , calculamos

$$\begin{aligned}
B_m &= \prod_{j=1}^m \left( \frac{2^j p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^j p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)} \right) \\
&= \frac{1}{2^m} \prod_{j=1}^m \left( \frac{2^j p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{2^{j-1} p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)} \right) \\
&= \frac{1}{2^m} \left( \frac{2^m p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}{p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)} \right) \\
&= \frac{p(\beta+2) + \frac{n(\alpha+\beta)}{2^m}}{p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)},
\end{aligned}$$

e assim, ao fazer  $m \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \frac{p(\beta+2)}{p(\beta+2) + n(\alpha+\beta)}, \quad (2.64)$$

que é o valor esperado para  $\rho$  em (2.47).

Para finalizar a demonstração do Teorema 2.3.2, resta mostrar que o produtório  $\prod_{i=1}^m K_i^{A_{m-i}}$ , que aparece em (2.55), é finito.

Note que, de (2.62), podemos majorar  $A_{m-i}$ ,  $\forall 1 \leq i \leq m$ , fazendo

$$A_{m-i} \leq 1 + \frac{n(\alpha + \beta)}{2^m p(\beta + 2)} \leq 1 + \frac{n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2)}. \quad (2.65)$$

Também, de (2.46), escolhendo  $q = 2^i p$ , temos que

$$K_i = \underbrace{\left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \right)}_{I_i} \cdot \underbrace{\left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p[2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right)}_{C} \cdot \underbrace{\left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)} \right)}_{II_i} \cdot \underbrace{\left( \frac{2 \cdot 2^i p n}{2^i p(2^i p - 1)[2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right)}_{III_i}^{\frac{n}{2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}} \cdot \underbrace{\left( \frac{2^i p + \alpha + \beta}{\beta + 2} \right)}_{IV_i}^{\frac{n(2^i p + \alpha + \beta)}{2^i p[2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]}}. \quad (2.66)$$

Vamos agora nos dedicar a mostrar que o limite quando  $m \rightarrow \infty$  do produtório de cada um dos termos de (2.66), elevado ao expoente dado em (2.65), é finito.

Podemos majorar  $I_i$  de (2.65), majorando inicialmente sua base, fazendo

$$\begin{aligned} I_i &\leq \left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2)} \right) \left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p[2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right) \\ &= \left( \frac{n}{\beta + 2} + 1 + \frac{2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2)} \right) \left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p[2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)]} \right). \end{aligned}$$

Como a base é maior que um, podemos também majorar o expoente, fazendo

$$\begin{aligned} I_i &\leq \left( \frac{n}{\beta + 2} + 1 + \frac{2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2)} \right) \left( \frac{2^i p n + 2^i p(\beta + 2) + 2n(\alpha + \beta)}{2^i p[2^i p(\beta + 2)]} \right) \\ &= \left( \frac{n}{\beta + 2} + 1 + \frac{2n(\alpha + \beta)}{2^i p(\beta + 2)} \right) \left( \frac{n}{2^i p(\beta + 2)} + \frac{1}{2^i p} + \frac{2n(\alpha + \beta)}{(2^i p)^2(\beta + 2)} \right). \end{aligned}$$

Assim, quando consideramos o produtório, para  $1 \leq i \leq m$ , temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m I_i^{A_{m-i}} &\leq \left( \frac{n}{(\beta+2)} + 1 + \frac{2n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)} \right)^{\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{n}{p(\beta+2)} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}} \\ &\quad \cdot \left( \frac{n}{(\beta+2)} + 1 + \frac{2n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)} \right)^{\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}} \\ &\quad \cdot \left( \frac{n}{(\beta+2)} + 1 + \frac{2n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)} \right)^{\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{2n(\alpha+\beta)}{p^2(\beta+2)} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2^i}\right)^2}. \end{aligned}$$

Ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , como  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  é convergente, e  $n, p, \alpha$  e  $\beta$  estão fixos, concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m I_i^{A_{m-i}} < \infty. \quad (2.67)$$

Da mesma forma podemos majorar o expoente de  $II_i$ , e, ao considerar o produtório, para  $1 \leq i \leq m$ , encontramos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m II_i^{A_{m-i}} &\leq C^{\left(\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{n}{p} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}\right)} \\ &\quad \cdot C^{\left(\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{(\beta+2)}{p} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}\right)} \\ &\quad \cdot C^{\left(\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{2n(\alpha+\beta)}{p^2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2^i}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

e então, ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , também concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m II_i^{A_{m-i}} < \infty. \quad (2.68)$$

Majorando a base de  $III_i$ , obtemos

$$\begin{aligned} III_i &\leq \left( \frac{2n}{(2^i p - 1)[2^i p n + 2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)]} \right)^{\frac{n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)}} \\ &\leq (1)^{\frac{n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)}}, \end{aligned}$$

onde a última passagem é justificada por termos  $(2^i p - 1) > 1$  e  $[2^i p n + 2^i p(\beta+2)] > 0$ ,  $\forall 1 \leq i \leq m$ , e  $(\alpha + \beta) > 0$ . Agora, podemos também majorar o expoente, obtendo

$$III_i \leq (1)^{\frac{n}{2^i p(\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)}} \leq (1)^{\frac{n}{2^i p(\beta+2)}}.$$

Assim, considerando o limite do produtório, quando  $m \rightarrow \infty$ , também obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m III_i^{A_{m-i}} \leq (1)^{\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{n}{p(\beta+2)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}} < \infty. \quad (2.69)$$

Para majorar o termo  $IV_i$ , majoramos primeiro sua base, fazendo

$$\frac{2^i p + \alpha + \beta}{(\beta+2)} \leq \frac{2^i p + 2^i \alpha + 2^i \beta}{(\beta+2)} = \frac{2^i (p + \alpha + \beta)}{(\beta+2)}, \quad (2.70)$$

e assim ficamos com

$$IV_i \leq \left( \frac{2^i (p + \alpha + \beta)}{(\beta+2)} \right)^{\frac{n(2^i p + \alpha + \beta)}{2^i p [2^i p (\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)]}}. \quad (2.71)$$

Considerando que apenas a parte da base que varia com  $m$  influencia na limitação de  $IV_i$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , podemos considerar apenas

$$IV_i \leq (2)^{\frac{in(2^i p + \alpha + \beta)}{2^i p [2^i p (\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)]}}. \quad (2.72)$$

Agora, majoramos o expoente, ficando com

$$\begin{aligned} IV_i &\leq (2)^{\frac{in(2^i p + 2^i p \alpha + 2^i p \beta)}{2^i p [2^i p (\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)]}} \\ &\leq (2)^{\frac{in(p + \alpha + \beta)}{p [2^i p (\beta+2) + 2n(\alpha+\beta)]}} \\ &\leq (2)^{\frac{in(p + \alpha + \beta)}{2^i p^2 (\beta+2)}}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Assim, considerando o limite do produtório, quando  $m \rightarrow \infty$ , também obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m III_i^{A_{m-i}} \leq (2)^{\left(1 + \frac{n(\alpha+\beta)}{2p(\beta+2)}\right) \frac{n(p+\alpha+\beta)}{p^2(\beta+2)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}} < \infty. \quad (2.74)$$

Dessa forma, considerando (2.67), (2.68), (2.69) e (2.74), ao fazermos  $m \rightarrow \infty$ , concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m K_i^{A_{m-i}} < \infty. \quad (2.75)$$

E, baseados em (2.61), (2.63), (2.64) e (2.75), ao passarmos ao limite com  $m \rightarrow \infty$  em (2.55), obtemos finalmente

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p, \alpha, \beta) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho (t - t_0)^{-\sigma},$$

que é (2.47), onde

$$\rho = \frac{p(\beta + 2)}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)} \quad e \quad \sigma = \frac{n}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}, \quad (2.76)$$

completando a demonstração do teorema. □

## 2.4 Análise de escalas

Nesta seção verificaremos se os valores de  $\rho$  e de  $\sigma$  obtidos em (2.76) são, de fato, os valores corretos que validam a estimativa (2.47).

Para tal verificação, suporemos que uma solução  $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  da equação (2.1), em regiões ilimitadas, satisfaz a uma relação do tipo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p, \alpha, \beta) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}, \quad \forall t > 0, \quad (2.77)$$

onde  $\rho = \rho(n, p, \alpha, \beta)$  e  $\sigma = \sigma(n, p, \alpha, \beta)$  são números puros, e, usando argumentos de escala, descobriremos quais são os números  $\rho$  e  $\sigma$  que fazem sentido.

**Proposição 2.4.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução suave de (2.1), e suponhamos que tal solução satisfaz a desigualdade (2.77), para qualquer  $\mathbf{f}(x, t, u)$  atendendo a (1.9). Então, os valores de  $\rho$  e  $\sigma$  devem ser:*

$$\rho = \frac{p(\beta + 2)}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)} \quad e \quad \sigma = \frac{n}{p(\beta + 2) + n(\alpha + \beta)}. \quad (2.78)$$

### Demonstração:

Seja  $u(x, t)$  uma solução da equação (2.1) que satisfaz a desigualdade (2.77).

Vamos mudar a escala em  $x$ ,  $t$ , e  $u$ , isto é, vamos considerar uma função

$$\tilde{u}(x, t) := \lambda u(Lx, \theta t), \quad \text{com } \lambda \neq 0, L \neq 0 \text{ e } \theta > 0, \quad (2.79)$$

onde  $\lambda$ ,  $L$  e  $\theta$  são parâmetros inicialmente livres, e buscaremos a EDP da qual a função  $\tilde{u}(\cdot, t)$  é solução.

Para facilitar a comparação entre as EDPs, inicialmente vamos reescrever o lado direito da equação (2.1). Temos:

$$\operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) = \underbrace{|\nabla u|^\beta \nabla(|u|^\alpha) \cdot \nabla u}_I + \underbrace{|u|^\alpha \nabla(|\nabla u|^\beta) \cdot \nabla u}_{II} + \underbrace{|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \Delta u}_{III},$$



cujos termos serão reescritos a seguir:

$$\begin{aligned} I &= |\nabla u|^\beta \alpha |u|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(u) \nabla u \cdot \nabla u \\ &= \alpha \operatorname{sgn}(u) |u|^{\alpha-1} |\nabla u|^{\beta+2}; \end{aligned}$$

Para reescrever  $II$ , note que

$$\begin{aligned} |\nabla u|^\beta &= \left( \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^\beta; \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^\beta) &= \beta |\nabla u|^{\beta-1} \frac{1}{2} |\nabla u|^{-1} 2 (u_{x_i x_1} \cdot u_{x_i} + u_{x_i x_2} \cdot u_{x_i} + \cdots + u_{x_i x_n} \cdot u_{x_i}) \\ &= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j} \cdot u_{x_i}; \\ \Rightarrow \nabla (|\nabla u|^\beta) \cdot \nabla u &= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \left( \sum_{j=1}^n u_{x_1 x_j} \cdot u_{x_1}, \cdots, \sum_{j=1}^n u_{x_n x_j} \cdot u_{x_n} \right) \cdot (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) \\ &= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} \cdot (u_{x_i})^2). \end{aligned}$$

Temos, portanto:

$$II = \beta |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} (u_{x_i})^2);$$

e

$$III = |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Finalmente, escrevemos:

$$\eta \Delta u = \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Assim, a EDP (2.1), da qual  $u(x, t)$  é solução, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) &= \\ &= \mu(t) \alpha \operatorname{sgn}(u) |u|^{\alpha-1} |\nabla u|^{\beta+2} + \\ &+ \mu(t) \beta |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} (u_{x_i})^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu(t) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \\
& + \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Agora, usando a definição de  $\tilde{u}(x, t)$  dada em (2.79), vamos derivar a EDP da qual  $\tilde{u}$  é solução. Temos:

$$\tilde{u}(x, t) = \lambda u(Lx, \theta t) \Rightarrow u(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda} \tilde{u}(x, t); \tag{2.81}$$

$$\tilde{u}_{x_i}(x, t) = \lambda L u_{x_i}(Lx, \theta t) \Rightarrow u_{x_i}(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda L} \tilde{u}_{x_i}(x, t); \quad \text{e} \tag{2.82}$$

$$\tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) = \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \Rightarrow u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda L^2} \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t). \tag{2.83}$$

Calculamos, então:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\lambda u(Lx, \theta t)) \\
&= \lambda \theta u_t(Lx, \theta t) \\
&\stackrel{EDP(2.1)}{=} \lambda \theta \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \left( f_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \right)_{x_i} + f'_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) u_{x_i}(Lx, \theta t) \right) \right. \\
&\quad + \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha |u(Lx, \theta t)|^{\alpha-1} |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta+2} \\
&\quad + \mu(\theta t) \beta |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\
&\quad + \mu(\theta t) |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \\
&\quad \left. + \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \right]. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Vamos analisar primeiro os termos de (2.84) relativos a  $\operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u))$ , isto é:

$$\lambda \theta \sum_{i=1}^n \left( \left( f_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \right)_{x_i} + f'_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) u_{x_i}(Lx, \theta t) \right). \tag{2.85}$$

Ao definirmos

$$\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) := \frac{\lambda \theta}{L} \mathbf{f}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)), \tag{2.86}$$

teremos

$$\begin{aligned}
div\left(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))\right) &= div\left(\frac{\lambda\theta}{L} f(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t))\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda\theta}{L} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \cdot L + \frac{\lambda\theta}{L} \mathbf{f}'(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \cdot L u_{x_i}(Lx, \theta t) \right) \\
&= \lambda\theta \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) + \mathbf{f}'(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) u_{x_i}(Lx, \theta t) \right), \quad (2.87)
\end{aligned}$$

que é igual ao termo (2.85), originado ao abrir o termo  $div\left(f(x, t, u(x, t))\right)$  da EDP original. Como não estamos interessados em trabalhar com nenhuma  $\mathbf{f}$  particular, podemos, ao escrever a EDP que  $\tilde{u}$  satisfaz, considerar  $\tilde{\mathbf{f}}$  como definida em (2.86).

Ou seja, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x, t) + div\left(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))\right) &= \\
&= \mu(\theta t) \lambda\theta \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha |u(Lx, \theta t)|^{\alpha-1} |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta+2} \\
&\quad + \mu(\theta t) \lambda\theta \beta |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\
&\quad + \mu(\theta t) \lambda\theta |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \\
&\quad + \lambda\theta \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{u}_t(x, t) + div\left(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))\right) &= \\
&= \mu(\theta t) \lambda\theta \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^{\alpha-1} \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^{\beta+2} \\
&\quad + \mu(\theta t) \lambda\theta \beta \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^{\beta-2} \\
&\quad \quad \cdot \frac{1}{\lambda^2 L^2} \cdot \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \lambda L^2 u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (\lambda L u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\
&\quad + \mu(\theta t) \lambda\theta \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^\beta \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \\
&\quad + \lambda\theta \eta \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t)
\end{aligned}$$

e, usando as relações (2.81)-(2.83) entre  $u$  e  $\tilde{u}$  para reescrever o lado direito dessa

equação em termos de  $\tilde{u}$ , ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) = \\
& = \mu(\theta t) \lambda \theta \operatorname{sgn}(\tilde{u}(x, t)) \alpha \lambda^{1-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^{\alpha-1} (\lambda L)^{-\beta-2} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta+2} \\
& \quad + \mu(\theta t) \lambda \theta \beta \lambda^{-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^\alpha (\lambda L)^{2-\beta} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta-2} \\
& \quad \quad \cdot \lambda^{-3} L^{-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \tilde{u}_{x_i x_j}(x, t) (\tilde{u}_{x_i}(x, t))^2 \right) \\
& \quad + \mu(\theta t) \lambda \theta \lambda^{-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^\alpha (\lambda L)^{-\beta} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^\beta \lambda^{-1} L^{-2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) \\
& \quad + \eta \frac{\theta}{L^2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) & = \\
& = \mu(\theta t) \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \alpha |\tilde{u}(x, t)|^{\alpha-1} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta+2} \\
& \quad + \mu(\theta t) \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \beta |\tilde{u}(x, t)|^\alpha |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta-2} \\
& \quad \quad \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \tilde{u}_{x_i x_j}(x, t) (\tilde{u}_{x_i}(x, t))^2 \right) \\
& \quad + \mu(\theta t) \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} |\tilde{u}(x, t)|^\alpha |\nabla \tilde{u}(x, t)|^\beta \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) \\
& \quad + \eta \frac{\theta}{L^2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t).
\end{aligned}$$

Pela análise do lado direito da equação (2.1), usada para derivar (2.80), usando a função  $\tilde{\mathbf{f}}$  definida em (2.86), e definindo

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(t) & := \mu(\theta t); \quad \text{e} \\
\tilde{\eta} & := \frac{\theta}{L^2} \eta,
\end{aligned}$$

vemos que  $\tilde{u}(x, t)$  satisfaz a EDP:

$$\tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) = \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \tilde{\mu}(t) \operatorname{div} (|\tilde{u}|^\alpha |\nabla \tilde{u}|^\beta \nabla \tilde{u}) + \tilde{\eta} \Delta \tilde{u}. \quad (2.88)$$

A EDP em (2.88) é muito parecida com a EDP em (2.80). Como nos interessa que sejam iguais, isto é, que o coeficiente do primeiro termo do lado direito da EDP

(2.88) seja 1, impomos a condição:

$$\lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} = 1,$$

o que nos leva a:

$$\theta = \lambda^{\alpha+\beta} L^{\beta+2}. \quad (2.89)$$

Com essa escolha de  $\theta$ ,  $\tilde{u}(x, t)$  é solução da mesma EDP que  $u(x, t)$ , isto é,  $\tilde{u}(x, t)$  resolve

$$u_t + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u})) = \tilde{\mu}(t) \operatorname{div}(|\tilde{u}|^\alpha |\nabla \tilde{u}|^\beta \nabla \tilde{u}) + \tilde{\eta} \Delta \tilde{u},$$

e portanto, a hipótese (2.77) que assumimos como sendo válida para  $u(x, t)$  também é válida para  $\tilde{u}(x, t)$ , isto é, vale:

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}, \quad 0 < t < T. \quad (2.90)$$

Vamos agora tentar estimar  $\|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  por  $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Note que

$$\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}(x, 0) = \lambda u(Lx, 0) = \lambda u_0(Lx),$$

onde  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , logo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u_0(Lx)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(Lx)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{y=Lx}{=} \lambda L^{-\frac{n}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda L^{-\frac{n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Substituindo (2.91) em (2.90), vemos que  $\tilde{u}(x, t)$  deve satisfazer a:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K(n, p) (\lambda L^{-\frac{n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^\rho t^{-\sigma} \\ &= K(n, p) \lambda^\rho L^{-\frac{\rho n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Lembrando da definição de  $\tilde{u}$  (ver (2.79)), podemos escrever o primeiro termo de

(2.92) em termos de  $u$ , ficando com

$$\lambda \|u(\cdot, \theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \lambda^\rho L^{-\frac{\rho n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma},$$

ou, ainda:

$$\|u(\cdot, \theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \lambda^{\rho-1} L^{-\frac{\rho n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho t^{-\sigma}.$$

Por fim, precisamos ter o mesmo instante no tempo nos dois lados da desigualdade. Para obter isso, fazemos

$$\|u(\cdot, \theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \lambda^{\rho-1} L^{-\frac{\rho n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho \theta^\sigma (\theta t)^{-\sigma},$$

e assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K(n, p) \lambda^{\rho-1} L^{-\frac{\rho n}{p}} \theta^\sigma \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho \tau^{-\sigma} \\ &\stackrel{(2.89)}{=} K(n, p) \lambda^{\rho-1} L^{-\frac{\rho n}{p}} (\lambda^{\alpha+\beta} L^{\beta+2})^\sigma \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho \tau^{-\sigma}, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \lambda^{\rho-1+(\alpha+\beta)\sigma} L^{-\frac{\rho n}{p}+(\beta+2)\sigma} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\rho \tau^{-\sigma}, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall L > 0. \quad (2.93)$$

Como os parâmetros  $\lambda$  e  $L$  estão livres, note que se seus respectivos expoentes em (2.93) não forem nulos, podemos fazer  $\lambda, L \rightarrow 0$  ou  $\lambda, L \rightarrow \infty$  (de acordo com o sinal dos expoentes), e assim obter

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \infty,$$

o que, ou só é satisfeito pela solução trivial  $u(\cdot, t) \equiv 0$ , ou permite que a solução  $u(\cdot, t)$  seja ilimitada, casos que não nos interessam. Para evitar essas situações, precisamos que os expoentes de  $\lambda$  e de  $L$  sejam nulos, isto é, devemos fazer:

$$\rho - 1 + (\alpha + \beta)\sigma = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\rho n}{p} + (\beta + 2)\sigma = 0,$$

o que resulta no sistema:

$$\begin{cases} \rho + (\alpha + \beta)\sigma = 1 \\ -\frac{n}{p}\rho + (\beta + 2)\sigma = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é

$$\rho = \frac{p(\beta + 2)}{n(\alpha + \beta) + p(\beta + 2)} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{n}{n(\alpha + \beta) + p(\beta + 2)},$$

que são os valores desejados (ver (2.78)).

A conclusão é que, se a solução  $u(x, t)$  da EDP (2.1) satisfaz a uma propriedade do tipo (2.77), então os valores de  $\rho$  e  $\sigma$  devem ser os descritos acima.

□





## Capítulo 3

# Estimativa da norma do sup: Caso geral

Neste capítulo consideraremos novamente o problema regularizado (1.1)-(1.2), e inicialmente derivaremos (no Teorema 3.1.1) a importante desigualdade de energia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\ \leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t, u) dx, \end{aligned}$$

válida para as soluções de (1.1)-(1.2), para todo  $q$  satisfazendo  $q \geq p \geq p_0$  e  $q \geq 2$ , e para todo  $t \in (0, T_*) \setminus E_q$ , onde  $E_q \subset (0, \infty)$  é um conjunto de medida nula.

A partir dessa desigualdade provaremos, na Seção 3.2, o que chamamos de *Lema Fundamental* (Lema 3.2.2), um resultado que relaciona as normas  $L^q$  e  $L^{q/\sigma}$  das soluções  $u(\cdot, t)$ , onde  $\sigma \geq 1$  satisfaz as condições que serão dadas em (3.23). A expressão que obteremos, ao final desta etapa, é

$$\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)^{\frac{1}{(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\},$$

onde a constante  $K(q) = K(q; n, \alpha, \beta, \kappa)$  será dada em (3.55) e  $a = a(n, \alpha, \beta, \kappa)$  em (3.56).

Após mais algumas etapas, obteremos na Seção 3.3 o resultado principal deste trabalho, que será apresentado no Teorema 3.3.1: uma estimativa para limitação da norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2), para  $0 < t < T_* \leq \infty$ . Mais propriamente,

$$\mathbb{U}_\infty(0; t) \leq \tilde{K} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(0; t))^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} (\mathbb{U}_p(0; t))^{\frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} \right\}.$$

Finalmente, na Seção 3.4, utilizaremos argumentos de escala para verificar se os expoentes que constarão na estimativa apresentada pelo Teorema 3.3.1 são realmente os valores adequados.

### 3.1 Desigualdade de energia

Iniciaremos mostrando um resultado simples, porém importante, satisfeito pela solução suave  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2), onde  $\alpha, \beta$  satisfazem (1.5),  $\mu(t)$  satisfaz (1.6), e  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfaz as condições (1.7) e (1.9), com  $\kappa \geq 0$  dado.

**Lema 3.1.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Supondo que  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para algum  $p \geq p_0$ , então para qualquer  $q$  satisfazendo  $q \geq p$  e  $q \geq 2$ , vale:*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx dt < \infty; \quad e \quad (3.1)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u(x, t)|^2 dx dt < \infty. \quad (3.2)$$

#### Demonstração:

Para  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  e  $0 < \varepsilon < 1$  dados, vamos analisar a equação (1.1) multiplicada por  $\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , onde  $\Phi_\delta(u)$  é a função dada em (1.25) e  $\zeta_R(x)$  é a função de corte dada em (1.29). Ou seja, analisaremos:

$$\begin{aligned} \Phi'_\delta(u) u_t \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) \zeta_R(x) = \\ = \Phi'_\delta(u) \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u) \eta \Delta u \zeta_R(x). \end{aligned}$$

Integrando essa equação sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , com  $0 < t_0 < t \leq T$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) u_\tau \zeta_R(x) dx d\tau}_I + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau}_{II} = \\ \underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{III} + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \Delta u \zeta_R(x) dx d\tau}_{IV}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Faremos essa integração termo a termo.

Ao integrar o termo I, usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{|x|<R} \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (\Phi_\delta(u)) d\tau \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x|<R} \left[ \Phi_\delta(u(x, t)) - \Phi_\delta(u(x, t_0)) \right] \zeta_R(x) dx \\
&= \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) dx - \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) dx. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Para integrar o termo II, usamos a Identidade de Green e o fato que  $\zeta_R(x)|_{|x|=R} = 0$ , obtendo:

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, \tau, u)) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \mathbf{f} \cdot \nabla (\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi''_\delta(u) \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \mathbf{f} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, ao integrar o termo III, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla (\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta |\nabla u|^2 \Phi''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot (\Phi'_\delta(u) \nabla \zeta_R(x)) dx d\tau. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Analogamente, ao integrar o termo IV, encontramos:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \operatorname{div}(\nabla u) \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla u \cdot \nabla (\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)) dx d\tau \\
&= -\eta \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi''_\delta(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVa}} - \eta \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi'_\delta(u) \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau}_{\text{IVb}}.
\end{aligned}$$

Usando novamente a Identidade de Green no termo IVb, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{IVb} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \nabla(\Phi_\delta(u)) \cdot \nabla \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&= \underbrace{-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \Phi_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau}_{\text{IVb.1}} + \underbrace{\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u) \Delta \zeta_R(x) \, dx \, d\tau}_{\text{IVb.2}}.
\end{aligned}$$

Ou seja, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= -\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \Phi_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau \\
&\quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u) \Delta \zeta_R(x) \, dx \, d\tau. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Assim, após iniciar a integração indicada em (3.3) (ver (3.4)-(3.7)), e escrever os termos no lado adequado da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\quad \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x) \, dx \\
\text{(b)} &\quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(c)} &\quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(d)} &\quad = \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u(x, t_0)) \zeta_R(x) \, dx \quad (3.8) \\
\text{(e)} &\quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi_\delta''(u) \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(f)} &\quad + \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u) \mathbf{f} \cdot \nabla \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(g)} &\quad - \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \Phi_\delta'(u) \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
\text{(h)} &\quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \Phi_\delta(u) \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) \, d\sigma(x) \, d\tau \\
\text{(i)} &\quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Phi_\delta(u) \Delta \zeta_R(x) \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Majorando o lado direito desta igualdade, usando as hipóteses (1.9) e (1.17), e as estimativas (1.32) e (1.33), e, para  $q > 2$ , substituindo  $\Phi_\delta(u)$  e  $\Phi_\delta'$  segundo (1.25)

(mas mantendo ainda  $\Phi_\delta''$ ), ficamos com:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x,t)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
(b) \quad & + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(c) \quad & + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(d) \quad & \leq \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x,t_0)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
(e) \quad & + \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} \Phi_\delta''(u) |u|^{\kappa+1} |\nabla u| \zeta_R(x) dx d\tau \\
(f) \quad & + \varepsilon q \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) |u|^{\kappa+1} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(g) \quad & + \varepsilon q C(t_0)^{\beta+1} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h) \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
(i) \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} (L_\delta(u))^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando as estimativas (1.21) e (1.22) para majorar novamente o lado direito da desigualdade, e aplicando a desigualdade de Young no termo (e), com  $p' = q' = 2$ , isto é, fazendo

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} \Phi_\delta''(u) |u|^{\kappa+1} |\nabla u| \zeta_R(x) dx d\tau \leq \\
& \leq \underbrace{\frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} \Phi_\delta''(u) |u|^{2(\kappa+1)} \zeta_R(x) dx d\tau}_{(e.1)} \\
& \quad + \underbrace{\frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau}_{(e.2)},
\end{aligned}$$

e juntando os termos semelhantes (c) e (e.2), ficamos com

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{|x|<R} \left( L_\delta(u(x,t)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
(b) \quad & + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c.1) \quad & + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) \zeta_R(x) dx d\tau \\
(d) \quad & \leq \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx \tag{3.10} \\
(e.1) \quad & + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{|x|<R} \Phi_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
(f) \quad & + \varepsilon q \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{q-1} |u| |u|^{\kappa+1} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(g) \quad & + \varepsilon q C(t_0)^{(\beta+1)} \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^\alpha |u|^{q-1} |u| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(h) \quad & + \varepsilon \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} d\sigma(x) d\tau \\
(i) \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, usamos a hipótese (1.13) nos termos (f) e (g) de (3.10), e iniciamos as passagens ao limite, fazendo primeiro  $\mathbb{R} \rightarrow \infty$ . Note que o termo (h) se anulará, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Chegamos assim a

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \\
(b) \quad & + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \Phi_\delta''(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(c.1) \quad & + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(d) \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{3.11} \\
(e.1) \quad & + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(f) \quad & + \varepsilon q (M(T))^{(\kappa+1)} \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(g) \quad & + \varepsilon q C(t_0)^{(\beta+1)} (M(T))^\alpha \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
(i) \quad & + \varepsilon (n+2) \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que, como  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$ , as integrais nos termos (f), (g) e (i) de (3.11) são finitas, pois  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . Assim, ao passarmos ao limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , usando o Teorema

da Convergência Monótona, chegamos a:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q dx \\
& \text{(b)} \quad + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \Phi_\delta''(u) dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \Phi_\delta''(u) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q dx \\
& \text{(e.1)} \quad + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta''(u) |u|^{2\kappa+2} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Substituindo  $\Phi_\delta''$ , conforme (1.27), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q dx \\
& \text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 dx d\tau \\
& \text{(b.2)} \quad + q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) dx d\tau \\
& \text{(c.2)} \quad + \frac{\eta}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 dx d\tau \\
& \text{(c.3)} \quad + \frac{\eta}{2} q \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q dx \\
& \text{(e.2)} \quad + \frac{1}{2\eta} q(q-1) \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 |u|^{2\kappa+2} dx d\tau \\
& \text{(e.3)} \quad + \frac{1}{2\eta} q \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) |u|^{2\kappa+2} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Faremos agora  $\delta \rightarrow 0$ . Note que, graças a (1.24), os termos (b.2), (c.3) e (e.3) irão se anular. Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, chegamos a:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\
& \text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau \\
& \text{(c.2)} \quad + \frac{\eta}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(d)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q dx \\
\text{(e.2)} \quad & + \frac{1}{2\eta} q(q-1) \int_{t_0}^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+2\kappa} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Note que podemos usar novamente a hipótese (1.13) para majorar o termo (e.2). Por fim, fazendo  $t_0 \rightarrow 0$ , chegamos a:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\
\text{(b.1)} \quad & + q(q-1) \int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau \\
\text{(c.2)} \quad & + \frac{\eta}{2} q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^q dx \tag{3.12} \\
\text{(e.2)} \quad & + \frac{1}{2\eta} q(q-1) (M(T))^{(2\kappa)} \int_0^t (B(\tau))^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx d\tau,
\end{aligned}$$

válida para qualquer  $0 < t \leq T \leq T_*$ .

Como  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall p \leq q \leq \infty$ , o lado direito de (3.12) é finito. Assim, como os integrandos dos termos (b.1) e (c.2) são positivos, podemos concluir que as respectivas integrais também são finitas,  $\forall 0 < t \leq T$ , ou seja, vale:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx dt < \infty; \quad e \\
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u(x, t)|^2 dx dt < \infty,
\end{aligned}$$

que são os resultados desejados (3.1) e (3.2), respectivamente, para  $q > 2$ .

Para obter-se esse mesmo resultado para  $q = 2$ , pode-se proceder da mesma forma, substituindo-se  $\Phi_\delta(u)$  por  $u^2$  a partir de (3.9). Ou mais simplesmente, já no primeiro passo pode-se multiplicar a equação (1.1) diretamente por  $2u\zeta_R(x)$ , ao invés de multiplicar por  $\Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)$ , e então repetir todo o processo.

□

**Teorema 3.1.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Supondo que  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , para algum  $p \geq p_0$ , vale*

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\
& \leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t, u) dx. \tag{3.13}
\end{aligned}$$



para todo  $q$  satisfazendo  $q \geq p$  e  $q \geq 2$ , e para todo  $t \in (0, T_*) \setminus E_q$ , onde  $E_q \subset (0, \infty)$  é um conjunto de medida nula.

### Demonstração:

Considere  $q > 2$ .

Para  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  e  $0 < \varepsilon < 1$  dados, multiplicamos a equação (1.1) por  $\Phi'_\delta(u) \zeta_R(x)$ , e seguimos os mesmos passos da demonstração do Lema 3.1.1, até chegarmos à igualdade (3.8), que reescrevemos a seguir, substituindo  $\Phi_\delta(u)$ ,  $\Phi'_\delta(u)$  e  $\Phi''_\delta(u)$  segundo (1.25):

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x| < R} \left( L_\delta(u(x, t)) \right)^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(b.2)} \quad + q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c.2)} \quad + \eta q \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad = \int_{|x| < R} \left( L_\delta(u(x, t_0)) \right)^q \zeta_R(x) dx \tag{3.14} \\
& \text{(e.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-2} (L'_\delta(u))^2 \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(e.2)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u) \nabla u \cdot \mathbf{f} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \mathbf{f} \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad - q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} (L_\delta(u))^q \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} (L_\delta(u))^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Dessa vez, iniciaremos as passagens ao limite fazendo  $\delta \rightarrow 0$ . Note que devido a (1.24), os termos (b.2), (c.2) e (e.2) de (3.14) irão se anular. Usando o Teorema da

Convergência Dominada, e substituindo  $\mathbf{f}(x, \tau, u)$  de acordo com (1.7), ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{|x|<R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{q-2} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad = \int_{|x|<R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx \\
& \text{(e.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-2} \nabla u \cdot \mathbf{b}(x, \tau, u) u(x, \tau) \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad + q \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^{q-1} \operatorname{sgn}(u) u(x, \tau) \mathbf{b}(x, \tau, u) \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad - q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x|<R} |u|^{q-1} \operatorname{sgn}(u) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
& \text{(h)} \quad - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q \nabla \zeta_R(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |u|^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, fazemos  $R \rightarrow \infty$ . Note que o termo (h) irá se anular, pois é da ordem de  $O(e^{-R})$ . Usando o Teorema da Convergência Monótona, chegamos a:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx \\
& \text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(c.1)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(d)} \quad = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx \tag{3.15} \\
& \text{(e.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \nabla u \cdot \mathbf{b}(x, \tau, u) u(x, \tau) e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(f)} \quad - \varepsilon q \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} \operatorname{sgn}(u) u(x, \tau) \mathbf{b}(x, \tau, u) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|x|^2}} e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(g)} \quad + \varepsilon q \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} \operatorname{sgn}(u) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|x|^2}} e^{-\varepsilon \sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \\
& \text{(i)} \quad + \eta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Delta \zeta_R(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Por questão de espaço, no termo (i) acima deixamos indicado  $\Delta\zeta_R(x)$ , mas, ao olhar (1.31), verifica-se que este termo, assim como os termos anteriores (f) e (g), também está multiplicado por  $\varepsilon$ .

Na próxima etapa, faremos  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para os termos (a), (b.1), (c.1) e (d) de (3.15), usaremos o Teorema da Convergência Monótona, e para os termos restantes, o Teorema da Convergência Dominada. Note que os termos (f), (g) e (i) irão se anular, pois estão multiplicados por  $\varepsilon$  e as integrais restantes nesses termos são finitas. Isso é fácil de ver para os termos (f) e (i), pois  $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$ , e temos as hipóteses (1.8), (1.13) e (1.17). Para ver que o termo (g) será finito, fazemos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} \operatorname{sgn}(u) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u \cdot \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|x|^2}} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \\
& \leq \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1+\alpha} |\nabla u|^{\beta+1} 1 dx d\tau \\
& = \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |u| |\nabla u|^{\beta+1} dx d\tau \\
& \leq \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} \left( \frac{1}{\beta+2} |u|^{\beta+2} + \frac{\beta+1}{\beta+2} |\nabla u|^{\beta+2} \right) dx d\tau \\
& = \underbrace{\frac{1}{\beta+2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\alpha+\beta} dx d\tau}_I \\
& \quad + \underbrace{\frac{\beta+1}{\beta+2} \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau}_II,
\end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade de Young, com  $a = |u|$ ,  $b = |\nabla u|^{\beta+1}$ ,  $p' = \beta+2$  e  $q' = \frac{\beta+2}{\beta+1}$ . A integral em  $I$  é finita, pois  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . Já a integral em  $II$  é finita por (3.1), para  $q$  satisfazendo a  $q \geq p \geq p_0$  e  $q \geq 2$  (ver Lema 3.1.1).

Por fim, também a integral no termo (e.1) de (3.15) será convergente ao  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para ver isso, fazemos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \nabla u \cdot \mathbf{b}(x, \tau, u) u(x, \tau) e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau \leq \\
& \leq \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u| |u|^{\kappa+1} 1 dx d\tau \\
& \leq \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |u|^{2(\kappa+1)} \right) dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau}_{III} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+2\kappa} dx d\tau}_{IV}, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

onde a integral em *III* é finita por (3.2) (ver Lema 3.1.1).

Portanto, ao fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (3.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^q dx \\
&\text{(b.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau \\
&\text{(c.1)} \quad + \eta q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau \\
&\text{(d)} \quad = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^q dx \\
&\text{(e.1)} \quad + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \nabla u \cdot \mathbf{f}(x, \tau, u) dx d\tau,
\end{aligned}$$

e, finalmente, fazendo  $t_0 \rightarrow 0$ , chegamos a:

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau \\
&\quad + \eta q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau = \\
&= \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \nabla u \cdot \mathbf{f}(x, \tau, u) dx d\tau, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

para  $q$  satisfazendo  $q \geq p \geq p_0$  e  $q > 2$ .

Se  $q = 2$ , substituimos  $\Phi_\delta(u)$  por  $u^2$  em (3.8), e, ao refazer o procedimento descrito acima, chegaremos a:

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta+2} dx d\tau + 2\eta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx d\tau = \\
&= \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \mathbf{f}(x, \tau, u) dx d\tau. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Neste caso, devemos ter  $p_0 \leq 2$ .

Todos os termos em (3.17) e (3.18) apresentam integrais bem definidas e finitas, envolvendo funções integráveis (a Lebesgue) nas regiões indicadas. Podemos então aplicar o Teorema de Diferenciação de Lebesgue, para cada  $q \geq p \geq p_0$ , para obter a

igualdade

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \\
& \quad + \eta q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u(x, t)|^2 dx = \\
& \quad = q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t, u) dx, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

válida para todo  $q$  satisfazendo  $q \geq p \geq p_0$  e  $q \geq 2$ , e para todo  $t \in (0, T_*) \setminus E_q$ , onde  $E_q \subset (0, \infty)$  é um conjunto de medida nula.

Por fim, como

$$0 \leq \eta q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u(x, t)|^2 dx < \infty,$$

podemos descartar esse termo, para chegar finalmente à desigualdade:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\
& \quad \leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t, u) dx,
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado (3.13), para todo  $t \in (0, T_*) \setminus E_q$ , e para  $q$  satisfazendo a  $q \geq p \geq p_0$  e  $q \geq 2$ .

□

## 3.2 Lema fundamental

No caminho de obter o resultado principal deste capítulo, necessitamos controlar o tamanho de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ . Utilizaremos a desigualdade (2.32) para, ao menos localmente, estimar o comportamento da norma  $L^q$  de  $u(\cdot, t)$ .

Se, em um determinado  $\hat{t} \in (0, T_*)$ , ocorre  $\frac{d}{dt} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$ , então  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  está *decrecendo*, o que significa que, ao menos localmente, é finito. E, se tivermos  $\frac{d}{dt} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \geq 0$ , então  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  pode estar *crescendo*, mas mostraremos, no lema a seguir, que  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  pode ser estimado em função de  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}$ , para algum  $\sigma \geq 1$ . E se soubermos, ou se pudermos mostrar que  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}$  não está crescendo (ao menos em uma vizinhança de  $\hat{t}$ ), isso mostrará que  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  é finito, e assim teremos, ao menos pontualmente, o controle que necessitamos sobre  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  para continuar desenvolvendo o argumento.

Na demonstração do próximo lema, será necessário utilizar a seguinte desigualdade

de interpolação do tipo Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG):

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w(\cdot, t)\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)}^\theta, \quad \forall w \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \quad (3.20)$$

onde  $0 \leq \theta \leq 1$ , e  $r$ ,  $s$  e  $\tilde{p}$  satisfazem a

$$0 < s \leq r \leq \infty, \quad 1 \leq \tilde{p} \leq \infty, \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{n}\right)\theta + \frac{(1-\theta)}{s}. \quad (3.21)$$

(Para maiores detalhes sobre esta desigualdade, ver, por ex., [14]).

Para facilitar o enunciado e a demonstração dos próximos resultados, introduziremos algumas hipóteses sobre  $q$ :

Continuaremos com a hipótese  $q \geq 2$ , e, supondo  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , com  $p \geq p_0$ , alteraremos a hipótese  $p_0 \leq p \leq q$  para

$$\sigma p \leq q < \infty, \quad (3.22)$$

com  $\sigma$  satisfazendo a

$$\sigma \geq 1; \quad \text{e} \quad \sigma \geq 1 + \frac{\gamma_-}{p}, \quad (3.23)$$

onde  $\gamma_-$  denota a parte negativa de  $\gamma$ , sendo  $\gamma$  dado por

$$\gamma = \frac{\kappa(\beta + 2) - (\alpha + \beta)}{(\beta + 1)}, \quad (3.24)$$

e  $p$  satisfaz, adicionalmente, a condição

$$p \geq \frac{n(\kappa - (\alpha + \beta))}{(\beta + 1)}. \quad (3.25)$$

As hipóteses (3.23), (3.24) e (3.25) surgem naturalmente na demonstração do próximo lema, para garantir as condições de utilização da desigualdade (3.20).

**Lema 3.2.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 < t < T_*$ . Suponha que  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , para algum  $p \geq p_0$ . Para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$  e  $\sigma p \leq q < \infty$ , com  $\sigma$  satisfazendo as hipóteses (3.23)-(3.25), se em algum  $\hat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$  ocorre*

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \Big|_{t=\hat{t}} \geq 0, \quad (3.26)$$

onde  $E_q \subset (0, \infty)$  é um conjunto de medida nula, então vale:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \left( \frac{(q + \alpha + \beta)}{(\beta + 2)} \right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)}} \\ &\cdot (C_1)^{\frac{n(\beta+2)(q+\gamma)(\sigma-1)}{(q+\alpha+\beta)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}} \cdot (C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}} \\ &\cdot \left( \frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{(\beta+1)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}} \cdot \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(\beta+2)+n[(\alpha+\beta)-\gamma]}{q(\beta+2)+n\sigma[(\alpha+\beta)-\gamma]}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### Demonstração:

Como supomos que em determinado  $\hat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$  vale a hipótese (3.26), podemos aplicar em  $\hat{t}$  a desigualdade (3.13), dada no Teorema 3.1.1, descartar seu primeiro termo, ficando apenas com

$$\mu(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2} \nabla u(x, \hat{t}) \cdot \mathbf{f}(x, \hat{t}, u) dx, \quad (3.28)$$

usar (1.9) para majorar o lado direito de (3.28), obtendo

$$\begin{aligned} \mu(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx &\leq \\ &\leq B(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2} |u(x, \hat{t})|^{\kappa+1} |\nabla u(x, \hat{t})| dx \\ &= B(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-1+\kappa} |\nabla u(x, \hat{t})| dx, \end{aligned}$$

e então usar a desigualdade de Hölder, com  $p' = \beta + 2$ ,  $q' = \frac{\beta+1}{\beta+2}$ ,

$$a = |u(x, \hat{t})|^{\frac{q-2+\alpha}{\beta+2}} |\nabla u(x, \hat{t})|, \quad \text{e} \quad b = |u(x, \hat{t})|^{(q-1+\kappa) - \frac{q-2+\alpha}{\beta+2}},$$

para obter

$$\begin{aligned} \mu(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx &\leq \\ &\leq B(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{\frac{q-2+\alpha}{\beta+2}} |\nabla u(x, \hat{t})| |u(x, \hat{t})|^{(q-1+\kappa) - \frac{q-2+\alpha}{\beta+2}} dx \\ &\leq B(\hat{t}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\ &\quad \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{\frac{(q-1+\kappa)(\beta+2) - (q-2+\alpha)}{(\beta+1)}} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \end{aligned}$$

$$= B(\hat{t}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q+\gamma} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}, \quad (3.29)$$

onde, para satisfazer a

$$q + \gamma = \frac{(q - 1 + \kappa)(\beta + 2) - (q - 2 + \alpha)}{(\beta + 1)}$$

escolhemos  $\gamma$  como dado em (3.24), ou seja,

$$\gamma = \frac{\kappa(\beta + 2) - (\alpha + \beta)}{(\beta + 1)}.$$

Note que para a última integral em (3.29) fazer sentido, temos que ter  $q + \gamma \geq \frac{q}{\sigma}$ . Mas, isso é garantido pela hipótese (3.23).

Dividindo a desigualdade (3.29) por  $\mu(\hat{t}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$ , obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \right)^{\left(1 - \frac{1}{\beta+2}\right)} \leq \frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q+\gamma} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}, \quad (3.30)$$

e, como  $1 - \frac{1}{\beta+2} = \frac{\beta+1}{\beta+2}$ , elevando os dois lados da desigualdade (3.30) a  $\frac{\beta+2}{\beta+1}$ , encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx \leq \left( \frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q+\gamma} dx \quad (3.31)$$

que, assim como a desigualdade (3.13), é válida para  $q \geq 2$ .

Definimos  $w(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$w(x, t) := |u(x, t)|^{\lambda_1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \quad (3.32)$$

onde  $\lambda_1$ , escolhido como na demonstração do Teorema 2.3.1 (ver (2.34)), é dado por

$$\lambda_1 = \frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)},$$

e buscaremos reescrever a desigualdade (3.31) em termos de  $w$ .

Para reescrever o lado esquerdo de (3.31) em função de  $w$ , procedemos como na



demonstração do Teorema 2.3.1 (ver (2.33)), obtendo

$$|u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} = \left( \frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta} \right)^{(\beta+2)} |\nabla w(x, t)|^{\beta+2},$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \hat{t})|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, \hat{t})|^{\beta+2} dx = \left( \frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta} \right)^{(\beta+2)} \|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta+2}. \quad (3.33)$$

Relacionamos as normas  $L^q$  e  $L^{q+\gamma}$  de  $u$  com as respectivas normas equivalentes de  $w$ , fazendo:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda, \quad \lambda = \frac{q(\beta+2)}{q+\alpha+\beta}; \quad (3.34)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{q+\gamma}(\mathbb{R}^n)}^{q+\gamma} = \|w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{\lambda}}(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{\lambda}}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{q+\gamma}{\lambda}, \quad (3.35)$$

onde  $\gamma$  é dado em (3.24).

Antes de reescrever a desigualdade (3.31) em termos de  $w$ , aproveitamos para introduzir a norma  $L^{q/\sigma}$  de  $u$ , que será utilizada mais tarde, e a relacionamos com a norma equivalente de  $w$ , definindo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{q/\sigma} := \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \frac{q(\beta+2)}{\sigma(q+\alpha+\beta)}, \quad (3.36)$$

onde  $\sigma$  deve satisfazer às condições descritas em (3.23), e que são naturalmente obtidas a seguir.

Para usarmos em  $w$  a desigualdade do tipo SNG dada em (3.20), com  $s = \lambda_0$  e  $r = \lambda$ , precisamos ter  $\lambda_0 \leq \lambda$  (ver (3.21)), ou seja,  $\frac{q(\beta+2)}{\sigma(q+\alpha+\beta)} \leq \frac{q(\beta+2)}{q+\alpha+\beta}$ , o que nos dá uma primeira condição sobre  $\sigma$ , descrita em (3.23):

$$\sigma \geq 1.$$

E, para aplicar a desigualdade (3.20) com  $s = \lambda_0$  e  $r = \tilde{\lambda}$ , precisamos ter  $\lambda_0 \leq \tilde{\lambda}$  (ver (3.21)), ou seja, deve valer  $\frac{q(\beta+2)}{\sigma(q+\alpha+\beta)} \leq \frac{q+\gamma}{\lambda_1}$ , o que leva à desigualdade

$$q \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) \geq -\gamma, \quad (3.37)$$

que se  $\gamma \geq 0$  é sempre satisfeita, e neste caso não há novas restrições para  $\sigma$ . Se  $\gamma < 0$ ,

usamos o fato que a desigualdade em (3.37) é válida para  $\forall q \geq \sigma p$ , e fazemos

$$\sigma p \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \geq \gamma_-$$

o que nos dá a segunda condição a ser satisfeita por  $\sigma$ , descrita em (3.23):

$$\sigma \geq 1 + \frac{\gamma_-}{p} \quad \text{ou, escrito de outra forma,} \quad (\sigma - 1)p \geq \gamma_-$$

Ao reescrevermos a desigualdade (3.31) em termos de  $w$ , usando (3.33) e (3.35), ficamos com:

$$\|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\beta+2} \leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{(\beta+2)} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\tilde{\lambda}}(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{\lambda}}. \quad (3.38)$$

Pretendemos usar no lado direito de (3.38) a desigualdade do tipo SNG dada em (3.20), com

$$s = \lambda_0; \quad r = \tilde{\lambda}; \quad \tilde{p} = (\beta + 2); \quad \text{e} \quad \theta = \theta_1, \quad (3.39)$$

mas, para isso, precisamos ter  $\lambda_0 \leq \tilde{\lambda}$  e  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ .

Substituindo em (3.21) os valores dados em (3.39), obtemos

$$\theta_1 = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{(\beta+2)}\right)}. \quad (3.40)$$

Para que tenhamos  $\theta_1 \geq 0$ , precisamos que numerador e denominador tenham o mesmo sinal. A hipótese (3.23) nos garante que  $\lambda_0 \leq \tilde{\lambda}$ , e, portanto, vale

$$\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\tilde{\lambda}} \geq 0,$$

e portanto também o denominador em (3.40) deve ser positivo. Além disso, precisamos também ter  $\theta_1 \leq 1$ . Isso será satisfeito se valer

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{(\beta+2)}\right) \geq \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right),$$

o que realmente ocorre, desde que p satisfaça

$$p \geq \frac{n(\gamma - (\alpha + \beta))}{(\beta + 2)},$$

ou, substituindo o valor de  $\gamma$ , dado em (3.24),

$$p \geq \frac{n(\kappa - (\alpha + \beta))}{(\beta + 1)},$$

que é a hipótese (3.25).

Portanto, desde que sejam satisfeitas as hipóteses (3.22)-(3.25), podemos usar no lado direito de (3.38) a desigualdade do tipo SNG dada em (3.20), com  $s = \lambda_0$ ,  $r = \tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{p} = (\beta + 2)$ ,

$$\theta = \theta_1 = \frac{n(q + \alpha + \beta)[(\sigma - 1)q + \sigma\gamma]}{(q + \gamma)[q(\beta + 2) + \sigma n(q + \alpha + \beta) - nq]}$$

e

$$(1 - \theta_1) = \frac{[(q + \gamma)((\beta + 2) - n) + n(q + \alpha + \beta)]}{[q(\beta + 2) + \sigma n(q + \alpha + \beta) - nq]} \cdot \frac{q}{(q + \gamma)}.$$

Com esses valores, a desigualdade SNG dada em (3.20) toma a forma

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{\lambda}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta_1)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{\theta_1},$$

e, aplicando-a a (3.38), obtemos

$$\|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2)} \leq \left(\frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)}\right)^{(\beta+2)} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} C_1^{\tilde{\lambda}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}} \|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{\theta_1\tilde{\lambda}}. \quad (3.41)$$

Gostaríamos agora de dividir a desigualdade em (3.41) por  $\|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{\theta_1\tilde{\lambda}}$ , mas precisamos ter  $\theta_1\tilde{\lambda} \leq (\beta + 2)$ , para que o expoente do lado esquerdo fique positivo. A condição para que essa exigência seja satisfeita é novamente a hipótese (3.25), que já estamos considerando. Efetuando tal divisão, ficamos com

$$\|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} \leq \left(\frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)}\right)^{(\beta+2)} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} C_1^{\tilde{\lambda}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}}$$

e, elevando ambos os lados dessa desigualdade a  $\frac{1}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}$ , obtemos

$$\|\nabla w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)}\right)^{\frac{(\beta+2)}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} C_1^{\frac{\tilde{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}}. \quad (3.42)$$

Vamos agora aplicar a desigualdade SNG dada em (3.20) do lado esquerdo de (3.42), usando

$$s = \lambda_0; \quad r = \lambda; \quad \tilde{p} = (\beta + 2); \quad \text{e} \quad \theta = \theta_2.$$

Substituindo esses valores em (3.21), obtemos

$$\theta_2 = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{(\beta+2)}\right)}.$$

Como supomos  $\sigma \geq 1$  (ver (3.23)), temos  $\lambda_0 \leq \lambda$ , e segue que  $\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) \geq 0$ . Precisamos ter  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ , o que será satisfeito se valer

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{(\beta+2)}\right) \geq \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.43)$$

Mas, é fácil verificar que (3.43) sempre ocorre. Podemos portanto usar a desigualdade SNG dada em (3.20), que com os parâmetros  $s = \lambda_0$ ,  $r = \lambda$ ,  $\tilde{p} = (\beta + 2)$ , e

$$\theta_2 = \frac{n(q + \alpha + \beta)(\sigma - 1)}{q(\beta + 2) + n\sigma(q + \alpha + \beta) - nq}$$

toma a forma

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta_2)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{\theta_2},$$

que, ao dividirmos por  $C_2 \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta_2)}$ , se torna

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)} C_2^{-1} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{-(1-\theta_2)} \leq \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{\theta_2}$$

e, ao elevarmos ambos os lados a  $\frac{1}{\theta_2}$ , resulta em

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\theta_2}} C_2^{-\frac{1}{\theta_2}} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{-(1-\theta_2)}{\theta_2}} \leq \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.44)$$

Ao aplicarmos (3.44) no lado esquerdo de (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} & \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\theta_2}} C_2^{-\frac{1}{\theta_2}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{-(1-\theta_2)}{\theta_2}} \leq \\ & \leq \left(\frac{q + \alpha + \beta}{(\beta + 2)}\right)^{\frac{(\beta+2)}{[(\beta+2)-\theta_1\bar{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\bar{\lambda}]}} C_1^{\frac{\bar{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\bar{\lambda}]}} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\theta_1)\bar{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\bar{\lambda}]}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Multiplicamos a desigualdade (3.45) por  $C_2^{\frac{1}{\theta_2}} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\theta_2)}{\theta_2}}$  para encontrarmos

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\theta_2}} &\leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{\frac{(\beta+2)}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \\ &\quad \cdot C_1^{\frac{\tilde{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \cdot C_2^{\frac{1}{\theta_2}} \cdot \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} + \frac{(1-\theta_2)}{\theta_2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e, ao elevar ambos os lados de (3.46) a  $\lambda\theta_2$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda &\leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \\ &\quad \cdot C_1^{\frac{\tilde{\lambda}\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \cdot C_2^\lambda \cdot \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda\left(\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} + (1-\theta_2)\right)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para facilitar a escrita em termos de  $u$ , fazemos

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda &\leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \\ &\quad \cdot C_1^{\frac{\tilde{\lambda}\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \cdot C_2^\lambda \cdot \|w(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda_0\frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} + (1-\theta_2)\right)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Agora, usando (3.34) e (3.36), reescrevemos (3.47) em termos de  $u$ , obtendo assim

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q &\leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \\ &\quad \cdot C_1^{\frac{\tilde{\lambda}\lambda\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \cdot C_2^\lambda \cdot \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q}{\sigma}\frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} + (1-\theta_2)\right)}. \end{aligned}$$

E, finalmente, chegamos a

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{q[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{(\beta+2)\lambda\theta_2}{q(\beta+1)[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \\ &\quad \cdot C_1^{\frac{\tilde{\lambda}\lambda\theta_2}{q[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]}} \cdot C_2^{\frac{\lambda}{q}} \cdot \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{(1-\theta_1)\tilde{\lambda}\theta_2}{[(\beta+2)-\theta_1\tilde{\lambda}]} + (1-\theta_2)\right)}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

já que  $\frac{\lambda}{\sigma\lambda_0} = 1$ .

Vamos agora escrever os expoentes que aparecem em (3.48) em termos de  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\kappa$  (em vez de usar os valores intermediários  $\lambda$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ ).

Para o expoente de  $\left(\frac{q + \alpha + \beta}{\beta + 2}\right)$ , encontramos

$$\frac{(\beta + 2)\lambda\theta_2}{q[(\beta + 2) - \theta_1\tilde{\lambda}]} = \frac{n(\beta + 2)(\sigma - 1)}{q(\beta + 2) + n\sigma((\alpha + \beta) - \gamma)}; \quad (3.49)$$

Para o expoente de  $\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)$ , encontramos

$$\frac{(\beta + 2)\lambda\theta_2}{q(\beta + 1)[(\beta + 2) - \theta_1\tilde{\lambda}]} = \frac{(\beta + 2)}{(\beta + 1)} \frac{n(\sigma - 1)}{[q(\beta + 2) + n\sigma((\alpha + \beta) - \gamma)]}; \quad (3.50)$$

Para o expoente de  $C_1$ , encontramos

$$\frac{\tilde{\lambda}\lambda\theta_2}{q[(\beta + 2) - \theta_1\tilde{\lambda}]} = \frac{(\beta + 2)}{(q + \alpha + \beta)} \frac{n(q + \gamma)(\sigma - 1)}{[q(\beta + 2) + n\sigma((\alpha + \beta) - \gamma)]}; \quad (3.51)$$

Para o expoente de  $C_2$ , encontramos

$$\frac{\lambda}{q} = \frac{(\beta + 2)}{(q + \alpha + \beta)}; \quad (3.52)$$

E, finalmente, para o expoente de  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\mathbb{R}^n)}$ , encontramos

$$\left(\frac{(1 - \theta_1)\tilde{\lambda}\theta_2}{[(\beta + 2) - \theta_1\tilde{\lambda}]} + (1 - \theta_2)\right) = \frac{q(\beta + 2) + n[(\alpha + \beta) - \gamma]}{q(\beta + 2) + n\sigma[(\alpha + \beta) - \gamma]}. \quad (3.53)$$

Substituindo na desigualdade (3.48) os valores para os expoentes obtidos em (3.49)-(3.53), chegamos a

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\frac{(q + \alpha + \beta)}{(\beta + 2)}\right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)}} \\ &\cdot (C_1)^{\frac{n(\beta+2)(q+\gamma)(\sigma-1)}{(q+\alpha+\beta)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}} \cdot (C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}} \\ &\cdot \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{(\beta+1)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}} \cdot \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(\beta+2)+n[(\alpha+\beta)-\gamma]}{q(\beta+2)+n\sigma[(\alpha+\beta)-\gamma]}}. \end{aligned}$$

que é (3.27), como desejado, para  $q \geq 2$ , completando a prova do Lema 3.2.1. □

O Lema 3.2.1 é um avanço na intenção de garantir a finitude da norma  $L^q$  de  $u(\cdot, t)$ ,  $\forall 0 \leq t \leq T_* \leq \infty$ , mas tem a desvantagem de ser um resultado pontual, isto

é, válido para valores  $\hat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$ . Além disso, ao variar  $q$ , os valores de  $\hat{t}$  para os quais vale o Lema 3.2.1 possivelmente mudam, mostrando um cenário desalentador. Porém, ainda há como utilizar as informações já conhecidas para obter um resultado melhor, onde não persista a dependência de  $\hat{t}$ . Faremos isso no próximo resultado, onde vamos considerar as grandezas  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  e  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , definidas respectivamente em (1.18) e (1.19).

**Lema 3.2.2 (Lema Fundamental)** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Se  $q$  satisfaz a  $q \geq 2$  e  $\sigma p \leq q < \infty$ , com  $\sigma$  atendendo às hipóteses (3.23)-(3.25), então, para cada  $0 \leq t_0 < T_*$ , vale*

$$\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\}, \quad (3.54)$$

onde

$$K(q) = \left( \frac{(q + \alpha + \beta)}{(\beta + 2)} \right)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-\sigma a}} \cdot (C_1)^{\frac{(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)} \frac{n(\sigma-1)}{(q-\sigma a)}} \cdot (C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}} \quad (3.55)$$

e

$$a = \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}. \quad (3.56)$$

### Demonstração:

Inicialmente, para cada  $q$  satisfazendo a  $q \geq 2$  e  $\sigma p \leq q < \infty$ , definimos

$$K(q) := \left( \frac{(q + \alpha + \beta)}{(\beta + 2)} \right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{q(\beta+2) - n\sigma(\gamma - (\alpha + \beta))}} \cdot (C_1)^{\frac{n(\beta+2)(q+\gamma)(\sigma-1)}{(q+\alpha+\beta)[q(\beta+2) - n\sigma(\gamma - (\alpha + \beta))]}} \cdot (C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}}$$

e, escolhendo  $a$  como dado em (3.56), podemos reescrever  $K(q)$  como consta em (3.55).

Além disso, para o mesmo  $a$  dado em (3.56), podemos escrever o expoente de  $\left( \frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \right)$ , na desigualdade (3.27), como

$$\frac{n(\beta + 2)(\sigma - 1)}{(\beta + 1)[q(\beta + 2) - n\sigma(\gamma - (\alpha + \beta))]} = \frac{n(\sigma - 1)}{(\beta + 1)(q - \sigma a)},$$

e o expoente de  $\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}$  como

$$\frac{q(\beta + 2) - n[\gamma - (\alpha + \beta)]}{q(\beta + 2) - n\sigma(\gamma - (\alpha + \beta))} = \frac{q - a}{q - \sigma a}.$$

Dessa forma, a desigualdade (3.27), dada pelo Lema 3.2.1, pode ser reescrita como

$$\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(q) \left( \frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \right)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q-a}{q-\sigma a}}, \quad (3.57)$$

onde  $K(q)$  pode ser visto em (3.55), e  $a$  em (3.56).

Usando as definições de  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  e  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , dadas respectivamente em (1.18) e (1.19), vamos agora mostrar que, para qualquer  $0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$  fixado, vale

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\}. \quad (3.58)$$

Definimos  $\Lambda(q) \geq 0$  por

$$\Lambda(q) := K(q) \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}}, \quad (3.59)$$

e dividiremos a prova de (3.58) em três casos:

**Caso 1:**  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$ ; e  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$ ,  $\forall t_0 \leq \tau \leq t$ .

Neste caso, teremos que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  é (estritamente) decrescente de  $t_0$  até  $t$ , ou seja,

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q < 0, \quad \forall \tau \in (t_0, t) \setminus E_q.$$

Por contradição, se tivéssemos

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \geq 0,$$

para algum  $\tau \in (t_0, t) \setminus E_q$ , pelo Lema 3.2.1, para esse  $\tau$  valeria que

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \stackrel{\text{lema 3.2.1}}{\leq} K(q) \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \stackrel{(3.59)}{=} \Lambda(q),$$

o que contradiz a hipótese do Caso 1.

Logo, no Caso 1,  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  é (estritamente) decrescente em  $(t_0, t)$ , e, portanto, vale (3.58).

**Caso 2:**  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$ ; mas existe  $t_1 \in (t_0, t)$  tal que  $\|u(\cdot, t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Lambda(q)$ .

Note que não é exigido que  $t_1$  seja o menor valor em  $(t_0, t)$  para o qual se tem



$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Lambda(q)$ . Para contornar isso, tomamos

$$t_2 := \inf \left\{ \tau \in (t_0, t); \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Lambda(q) \right\}.$$

Neste caso, teremos

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda(q), \quad \forall \tau \in (t_2, t). \quad (3.60)$$

Mais uma vez, provaremos por contradição.

Suponha que existe  $t_3$ , com  $t_3 > t_2$ , tal que

$$\|u(\cdot, t_3)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q > \Lambda(q). \quad (3.61)$$

Então, existe  $t_4 < t_3$ , dado por

$$t_4 := \inf \left\{ \tau \in (t_2, t_3); \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q) \right\}.$$

Pela definição de  $t_4$ , temos

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q), \quad \forall \tau \in (t_4, t_3],$$

então, pelo argumento usado no Caso 1, devemos ter que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$  é (estritamente) decrescente em  $(t_4, t_3]$ , o que contradiz a hipótese (3.61).

Portanto, (3.60) é verdadeira. E assim, também no Caso 2 vale (3.58).

**Caso 3:**  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda(q)$ .

Aplicando o argumento usado no Caso 2, teremos que

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda(q), \quad \forall \tau \in (t_0, t),$$

e também nesse caso vale (3.58).

Agora, como (3.58) é sempre válida,  $\forall 0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$  fixado, então deve ser válida também para  $\mathbb{U}_p = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ .

Chegamos assim a

$$\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\},$$

que é (3.54), como desejado, com  $K(q)$  dado em (3.55) e  $a$  em (3.56).

□

**Corolário 3.2.1** *Nas condições do Lema 3.2.2, para cada  $0 \leq t_0 < T_*$ , vale*

$$\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(q) \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)^{\frac{1}{(q-\sigma a)}} \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0; t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\}, \quad (3.62)$$

onde  $K(q)$  é dado em (3.55) e  $a$  em (3.56).

**Demonstração:** Basta redefinir, em (3.54),

$$\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) := \mathbb{B}_\mu(t_0; t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)}}, \quad (3.63)$$

para  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  dado em (1.18). □

### 3.3 Estimativas para a norma do sup

Vamos agora trabalhar no caminho de estabelecer o resultado principal deste capítulo.

O primeiro passo é usar um argumento iterativo, baseado na desigualdade (3.62), que permitirá estimar normas  $L^q$  da solução  $u(\cdot, t)$  para valores altos de  $q$ , em todo o intervalo  $(t_0, t)$ , com  $0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$ , em função de normas mais baixas de  $u$ .

**Lema 3.3.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Dado  $p \geq p_0$ , para cada  $0 \leq t_0 < t < T_*$  vale*

$$\mathbb{U}_{\sigma p}(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma p) \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma p - \sigma a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma p - a)}{(\sigma p - \sigma a)}} \right\}, \quad (3.64)$$

onde  $K$  é dado em (3.55),  $\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)$  é definido em (3.63),  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$  em (1.19) e  $a$  em (3.56).

Além disso, para cada  $m \geq 2$ , vale:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq & \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & \left( \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) \cdot \left( \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) \right)^{\sum_{i=l}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1} (\sigma^i p - a) (\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1} p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-l+1} a}}; \\ & \left. \left( \prod_{i=1}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) \cdot \left( \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) \right)^{\sum_{i=1}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1} (\sigma^i p - a) (\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot \left( \mathbb{U}_p(t_0; t) \right)^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^m a}} \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

com  $2 \leq l \leq m$ .

**Demonstração:**

Simplemente tomando  $q = \sigma p$  em (3.62), obtemos

$$\mathbb{U}_{\sigma p}(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma p - \sigma a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma p - a)}{(\sigma p - \sigma a)}} \right\},$$

que é (3.64).

Faremos a demonstração de (3.65) por indução. Tomamos primeiro  $q = \sigma^2 p$  em (3.62), obtendo

$$\mathbb{U}_{\sigma^2 p}(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma^2 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \mathbb{U}_{\sigma p}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \right\}, \quad (3.66)$$

e, substituindo (3.64) em (3.66), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^2 p}(t_0; t) &\leq \\ &\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ &K(\sigma^2 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \left( \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma p - \sigma a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma p - a)}{(\sigma p - \sigma a)}} \right)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \left. \right\} \\ &= \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ &K(\sigma^2 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}}; \\ &K(\sigma^2 p) K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^2 p - \sigma a)} + \frac{1}{(\sigma p - \sigma a)} \frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma p - a)}{(\sigma p - \sigma a)} \frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \left. \right\}. \quad (3.67) \end{aligned}$$

Vamos manipular os expoentes de  $\tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)$  e de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , que constam em (3.67), visando facilitar a escrita do produtório dos termos, no caso de  $\tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)$ , e simplificar a notação, no caso de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ .

Para os expoentes de  $\tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)$ , fazemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sigma^2 p - \sigma a)} &= \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}; \quad \text{e} \\ \frac{1}{(\sigma p - \sigma a)} \frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} &= \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma^2(\sigma p - a)(p - a)}, \end{aligned}$$

e, para o expoente de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , fazemos:

$$\frac{(\sigma p - a)}{(\sigma p - \sigma a)} \frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma^2 a)}.$$

Assim, podemos reescrever (3.67) como

$$\begin{aligned}
& \mathbb{U}_{\sigma^2 p}(t_0; t) \leq \\
& \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\
& K(\sigma^2 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}}; \\
& \left. K(\sigma^2 p) K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} + \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma^2(\sigma p - a)(p - a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma^2 a)}} \right\}. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Agora, tomamos  $q = \sigma^3 p$  em (3.62), obtendo:

$$\mathbb{U}_{\sigma^3 p}(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma^3 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \mathbb{U}_{\sigma^2 p}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \right\}, \quad (3.69)$$

e, substituindo (3.68) em (3.69), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{U}_{\sigma^3 p}(t_0; t) \leq \\
& \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\
& K(\sigma^3 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \cdot \left( \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\
& K(\sigma^2 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}}; \\
& \left. K(\sigma^2 p) K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} + \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma^2(\sigma p - a)(p - a)}} \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma^2 a)}} \right)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \left. \right\}, \\
& = \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\
& K(\sigma^3 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}}; \\
& K(\sigma^3 p) K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}}; \\
& K(\sigma^3 p) K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \cdot \left. \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma^2(\sigma p - a)(p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma^2 a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)}} \right\}, \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Como antes, vamos manipular alguns expoentes de (3.70).

Para os expoentes de  $\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)$ , nos termos intermediários, fazemos:

$$\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)}; \quad \text{e}$$

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}.$$

Para o expoente de  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}$ , no segundo termo intermediário, fazemos:

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)}.$$

Para o expoente de  $K(\sigma p)$ , no último termo, fazemos:

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)}.$$

Para os expoentes de  $\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)$ , no último termo, fazemos:

$$\frac{1}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)};$$

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}; \quad \text{e}$$

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{\sigma^2(\sigma p - a)(p - a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^3(\sigma p - a)(p - a)}.$$

E, para o expoentes de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , no último termo, fazemos:

$$\frac{(\sigma^2 p - a)}{(\sigma^2 p - \sigma^2 a)} \cdot \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} = \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^3 a)}.$$

Assim, podemos reescrever (3.70) na forma

$$\begin{aligned} & \mathbb{U}_{\sigma^3 p}(t_0; t) \leq \\ & = \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & K(\sigma^3 p) \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & K(\sigma^3 p) K(\sigma^2 p) \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & K(\sigma^3 p) K(\sigma^2 p) \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} K(\sigma p) \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)} \\ & \left. \cdot \tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t) \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^3(\sigma p - a)(p - a)} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t) \frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^3 a)} \right\}, \quad (3.71) \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento mais uma vez, usando  $q = \sigma^4 p$  em (3.62), obtemos:

$$\mathbb{U}_{\sigma^4 p}(t_0; t) \leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^4 p}(\mathbb{R}^n)}; K(\sigma^4 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \mathbb{U}_{\sigma^3 p}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \right\}. \quad (3.72)$$

Substituindo (3.71) em (3.72), encontramos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^4 p}(t_0; t) &\leq \\ &\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^4 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ &K(\sigma^4 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^2 a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{1}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^2(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)} + \frac{(\sigma^3 p - a)}{\sigma^3(\sigma p - a)(p - a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \\ &\quad \left. \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma^3 p - a)}{(\sigma^3 p - \sigma^3 a)} \cdot \frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \right\}, \quad (3.73) \end{aligned}$$

e, manipulando os expoentes de (3.73), para deixá-los semelhantes aos expoentes em (3.68) e em (3.71), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^4 p}(t_0; t) &\leq \\ &= \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^4 p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ &K(\sigma^4 p) \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma(\sigma^4 p - a)(\sigma^3 p - a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^3 p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma(\sigma^4 p - a)(\sigma^3 p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^2(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^2 p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^2 a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^2 a)}} \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma(\sigma^4 p - a)(\sigma^3 p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^2(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^3(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^3 a)}}; \\ &K(\sigma^4 p) K(\sigma^3 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma a)}} K(\sigma^2 p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^2 a)}} K(\sigma p)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^3 a)}} \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{\mu}(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma(\sigma^4 p - a)(\sigma^3 p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^2(\sigma^3 p - a)(\sigma^2 p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^3(\sigma^2 p - a)(\sigma p - a)} + \frac{(\sigma^4 p - a)}{\sigma^4(\sigma p - a)(p - a)}} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(\sigma^4 p - a)}{(\sigma^4 p - \sigma^4 a)}} \left. \right\}, \end{aligned}$$

Assim, por indução sobre  $m$ , encontramos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq & \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & \left( \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) \cdot (\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t))^{\sum_{i=l}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1} p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-l+1} a}}, \\ & \left. \left( \prod_{i=1}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) \cdot (\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t))^{\sum_{i=1}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^m a}} \right\}, \end{aligned}$$

que é (3.65), como desejado, onde cada valor de  $l$ , com  $2 \leq l \leq m$ , gera um termo intermediário.  $\square$

O próximo lema mostra um pequeno avanço em relação ao Lema 3.3.1, apresentando expoentes mais compactos, além de considerar novamente a grandeza  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  em vez de  $\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)$ , como está em (3.65).

**Lema 3.3.2** *Nas condições do Lema 3.3.1, para cada  $0 \leq t_0 < t < T_*$ , vale*

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq & \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & \left( \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{(p - \sigma^{-m} a)}{(p - \sigma^{-i} a)}} \right) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1} - \sigma^{-m})}{(p - \sigma^{-l+1} a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1} p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p - \sigma^{-m} a)}{(p - \sigma^{-l+1} a)}}; \\ & \left. \left( \prod_{i=1}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{(p - \sigma^{-m} a)}{(p - \sigma^{-i} a)}} \right) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1 - \sigma^{-m})}{(p - a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p - \sigma^{-m} p)}{(p - a)}} \right\}, \quad (3.74) \end{aligned}$$

para  $2 \leq l \leq m$ .

**Demonstração:**

Reescrevemos (3.65), substituindo  $\tilde{\mathbb{B}}_\mu(t_0; t)$  de acordo com (3.63), na forma

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq & \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & \left( \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)} \sum_{i=l}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1} p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-l+1} a}}; \\ & \left. \left( \prod_{i=1}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i} a}} \right) (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)} \sum_{i=1}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1} p - a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^m a}} \right\}, \quad (3.75) \end{aligned}$$

e então nos dedicamos à manipulação dos expoentes que constam em (3.75).

Inicialmente, vamos olhar os expoentes de  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$ .

Note que,  $\forall 2 \leq l \leq m$ , vale

$$\left( \frac{1}{(\sigma^{i-1}p - a)} - \frac{1}{(\sigma^i p - a)} \right) = \frac{\sigma^i}{(\sigma^{i-1}p - a)(\sigma^i p - a)} \cdot \frac{(\sigma - 1)p}{\sigma},$$

ou seja,

$$\frac{\sigma^i}{(\sigma^{i-1}p - a)(\sigma^i p - a)} = \left( \frac{1}{(\sigma^{i-1}p - a)} - \frac{1}{(\sigma^i p - a)} \right) \cdot \frac{\sigma}{(\sigma - 1)p}.$$

Assim, para o expoente de  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  nos termos intermediários de (3.75), fazemos:

$$\begin{aligned} \frac{n(\sigma - 1)}{(\beta + 1)} \sum_{i=l}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1}p - a)} &= \\ &= \frac{n(\sigma - 1)}{(\beta + 1)} \cdot \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m+1}} \sum_{i=l}^m \left( \frac{1}{(\sigma^{i-1}p - a)} - \frac{1}{(\sigma^i p - a)} \right) \cdot \frac{\sigma}{(\sigma - 1)p} \\ &= \frac{n}{(\beta + 1)} \cdot \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^m p} \cdot \frac{(\sigma^m p - \sigma^{l-1}p)}{(\sigma^{l-1}p - a)(\sigma^m p - a)} \\ &= \frac{n}{(\beta + 1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1} - \sigma^{-m})}{(p - \sigma^{-l+1}a)}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

e, conseqüentemente, para o expoente de  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  no último termo de (3.75), quando  $l = 1$ , temos:

$$\frac{n(\sigma - 1)}{(\beta + 1)} \sum_{i=1}^m \frac{(\sigma^m p - a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p - a)(\sigma^{i-1}p - a)} = \frac{n}{(\beta + 1)} \cdot \frac{(1 - \sigma^{-m})}{(p - a)}. \quad (3.77)$$

Para o expoente de  $K(\sigma^i p)$  em (3.75), para  $2 \leq l \leq m$ , encontramos

$$\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-i}a} = \frac{(p - \sigma^{-m}a)}{(p - \sigma^{-i}a)}. \quad (3.78)$$

Para o expoente de  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}$  em (3.75), para  $2 \leq l \leq m$ ,

$$\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^{m-l+1}a} = \frac{(p - \sigma^{-m}a)}{(p - \sigma^{-l+1}a)}. \quad (3.79)$$

E, finalmente, para o expoente de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$  em (3.75),

$$\frac{\sigma^m p - a}{\sigma^m p - \sigma^m a} = \frac{(p - \sigma^{-m}a)}{(p - a)}. \quad (3.80)$$



Assim, usando (3.76)-(3.80), reescrevemos (3.75) como

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \max & \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & \left( \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}} \right) (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}; \\ & \left. \left( \prod_{i=1}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}} \right) (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-a)}} \right\}. \end{aligned}$$

que é (3.74), como desejado.  $\square$

**Corolário 3.3.1** *Nas condições do Lema 3.3.2, para cada  $0 \leq t_0 < t < T_*$ , vale*

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \max & \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ & (C(l, m)) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}, \quad \forall 2 \leq l \leq m; \\ & \left. (C(1, m)) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde

$$C(l, m) = \prod_{i=l}^m (K(\sigma^i p))^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}}. \quad (3.82)$$

**Demonstração:**

Para obter (3.81), basta definir  $C(l, m)$  como em (3.82),  $\forall 2 \leq l \leq m$ , onde  $K(\sigma^i p)$  é definida em (3.55) e  $a$  em (3.56), e substituir  $C(l, m)$  em (3.74).  $\square$

No próximo lema obteremos uma estimativa mais simples para  $\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t)$ , ao estimar adequadamente os termos intermediários de (3.81), e juntá-los com o primeiro e o último termos.

Para isso, usaremos a desigualdade de interpolação de normas

$$\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)} \|u\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)}^\theta, \quad (3.83)$$

onde  $r < s < \tilde{p}$  e  $0 \leq \theta \leq 1$  satisfazem a

$$\frac{1}{s} = \frac{(1-\theta)}{r} + \frac{\theta}{\tilde{p}}. \quad (3.84)$$

Este será o último passo antes de estabelecermos o resultado principal deste capítulo.

**Lema 3.3.3** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Dado  $p \geq p_0$ , para cada  $0 \leq t_0 < t < T_*$  vale*

$$\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \tilde{K}(m) \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)}} \right\} \quad (3.85)$$

onde, para  $C(l, m)$  como dado em (3.82), tem-se

$$\tilde{K}(m; n, p, \alpha, \beta, \kappa) = \max \left\{ 1; \max_{1 \leq l \leq m} C(l, m) \right\}, \quad (3.86)$$

e  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  é como definido em (1.18),  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$  em (1.19) e  $a$  em (3.56).

**Demonstração:**

Para cada  $2 \leq l \leq m$ , definimos

$$J_l := C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}, \quad (3.87)$$

onde  $C(l, m)$  é dado em (3.82),  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  é definido em (1.18) e  $a$  em (3.56).

Para cada  $2 \leq l \leq m$ , em (3.81) vamos usar a desigualdade de interpolação de normas (3.83), com  $r = p$ ,  $s = \sigma^{l-1}p$  e  $\tilde{p} = \sigma^m p$ . Para esses valores, por (3.84), encontramos

$$\theta = \frac{(1 - \sigma^{-l+1})}{(1 - \sigma^{-m})} \quad \text{e} \quad (1 - \theta) = \frac{(\sigma^{-l+1} - \sigma^{-m})}{(1 - \sigma^{-m})}.$$

Usaremos, portanto,

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(1-\sigma^{-m})}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\sigma^{-l+1})}{(1-\sigma^{-m})}}, \quad (3.88)$$

e, para cada  $2 \leq l \leq m$ , ao substituir (3.88) em (3.87), encontramos

$$J_l \leq C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\sigma^{-l+1})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}. \quad (3.89)$$

Aplicaremos a desigualdade de Young em (3.89), usando

$$p' = \frac{(1 - \sigma^{-m})}{(1 - \sigma^{-l+1})} \cdot \frac{(p - \sigma^{-l+1}a)}{(p - \sigma^{-m}a)}$$

(note que  $p' > 1$ ) e, como devemos ter  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ ,

$$q' = \frac{(1 - \sigma^{-m})}{(\sigma^{-l+1} - \sigma^{-m})} \cdot \frac{(p - \sigma^{-l+1}a)}{(p - a)}.$$

Os fatores que usaremos para aplicar a desigualdade de Young serão

$$\begin{aligned} a' &= C(l, m)^{\frac{1}{p'}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\sigma^{-l+1})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-l+1}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}; \quad \text{e} \\ b' &= C(l, m)^{\frac{1}{q'}} \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}. \end{aligned}$$

Assim, em (3.89) obteremos, para cada  $2 \leq l \leq m$ ,

$$\begin{aligned} J_l &\leq C(l, m)^{\frac{1}{p'}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\sigma^{-l+1})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \\ &\quad \cdot C(l, m)^{\frac{1}{q'}} \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \\ &\stackrel{Young}{\leq} \frac{1}{p'} \left( C(l, m)^{\frac{1}{p'}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1-\sigma^{-l+1})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \right)^{p'} + \\ &\quad + \frac{1}{q'} \left( C(l, m)^{\frac{1}{q'}} \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(1-\sigma^{-m})} \cdot \frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}} \right)^{q'} \\ &= \frac{1}{p'} \cdot C(l, m) \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{q'} \cdot C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-a)}} \end{aligned}$$

e, usando a definição de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , dada em (1.19), encontraremos

$$J_l \leq \frac{1}{p'} \cdot C(l, m) \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{q'} \cdot C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-a)}}. \quad (3.90)$$

Note que, como  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ , podemos obter a partir de (3.90) que, para cada  $2 \leq l \leq m$ , vale

$$J_l \leq \max \left\{ C(l, m) \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-a)}} \right\}, \quad (3.91)$$

e, assim, substituindo (3.91) em (3.81), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \max \left\{ & \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & C(l, m) \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}, \quad 2 \leq l \leq m; \\ & C(l, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t)^{\frac{(p-\sigma^{-m} a)}{(p-a)}}, \quad 2 \leq l \leq m; \\ & C(1, m) \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m} p)}{(p-a)}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ao definirmos

$$K_1(m) := \max \left\{ 1; \max_{2 \leq l \leq m} (C(l, m)) \right\} \quad \text{e} \quad K_2(m) := \max_{1 \leq l \leq m} (C(l, m)),$$

podemos reescrever (3.92) como

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \max \left\{ & K_1 \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & K_2 \cdot (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} \cdot (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m} p)}{(p-a)}} \right\}. \end{aligned}$$

E finalmente, fazendo

$$\tilde{K}(m) := \max \{ K_1(m); K_2(m) \},$$

concluimos que  $\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t)$  satisfaz a

$$\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) \leq \tilde{K}(m) \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}} (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{(p-\sigma^{-m} p)}{(p-a)}} \right\}$$

que é (3.85), como desejado.  $\square$

**Observação:** Para o próximo resultado, será necessário que a constante  $\tilde{K}(m)$ , no Lema 3.3.3, seja uniformemente limitada em  $m$ . Isso de fato acontece, e é possível verificar usando argumentos semelhantes aos que foram usados na demonstração do Teorema 2.3.2, com a diferença que neste caso a tarefa será mais trabalhosa.

O próximo teorema apresenta o resultado principal deste capítulo, uma estimativa para limitação da norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  do problema (1.1)-(1.2).

**Teorema 3.3.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$  solução do problema (1.1)-(1.2), para  $0 \leq t < T_*$ . Dado  $p \geq p_0$ , para cada  $0 \leq t_0 < t < T_*$  vale*

$$\mathbb{U}_\infty(t_0; t) \leq \tilde{K}(n, p, \alpha, \beta, \kappa) \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ \left. (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} \right\}, \quad (3.93)$$

onde  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$  é como definido em (1.18) e  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$  em (1.19).

**Demonstração:**

A demonstração segue simplesmente fazendo  $m \rightarrow \infty$  em (3.85).

Ao fazer  $m \rightarrow \infty$  em (3.85), do lado esquerdo da desigualdade obteremos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0; t) = \mathbb{U}_\infty(t_0; t) \quad (3.94)$$

e, do lado direito,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{K}(m) = \tilde{K}, \quad (3.95)$$

que é uma constante uniformemente limitada em  $m$ ;

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)} = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \quad (3.96)$$

para o expoente de  $\mathbb{B}_\mu(t_0; t)$ , usando a definição de  $a$ , dada em (3.56), ao fazermos  $m \rightarrow \infty$  encontraremos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{(\beta+1)} \cdot \frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)} = \frac{n}{(\beta+1)(p-a)} \\ = \frac{n}{p(\beta+1) + n(\alpha+\beta-\kappa)}; \quad (3.97)$$

e, para o expoente de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)} = \frac{p}{(p-a)} = \frac{p(\beta+1)}{p(\beta+1) + n(\alpha+\beta-\kappa)}. \quad (3.98)$$

Assim, levando em conta (3.94)-(3.98), ao fazer  $m \rightarrow \infty$  em (3.85), obteremos

$$\mathbb{U}_\infty(t_0; t) \leq \tilde{K} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \right. \\ \left. (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}} \right\},$$

que é (3.93), como desejado. □

**Corolário 3.3.2** *Nas condições do Teorema 3.3.1, vale*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}(n, p, \alpha, \beta, \kappa) \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\delta_1} (\mathbb{U}_p(t_0; t))^{\delta_2} \right\}. \quad (3.99)$$

onde

$$\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha + \beta - \kappa) + p(\beta + 1)}; \quad e \quad (3.100)$$

$$\delta_2 = \frac{p(\beta + 1)}{n(\alpha + \beta - \kappa) + p(\beta + 1)}. \quad (3.101)$$

**Demonstração:**

Basta relembrar a definição de  $\mathbb{U}_p(t_0; t)$ , dada em (1.19), e definir  $\delta_1$  e  $\delta_2$  como em (3.100) e (3.101), respectivamente. □

Para ilustrar esse resultado, vamos exibir na Figura 3.1 o comportamento da evolução norma do sup de  $u(\cdot, t)$ , para o tempo de  $t = 30s$ . onde  $u(\cdot, t)$  é a solução do problema (1.1)-(1.2) que iniciou em  $u_0$  dada em (1.3), e  $\mathbf{f}(x, t, u)$  é dada em (1.4).

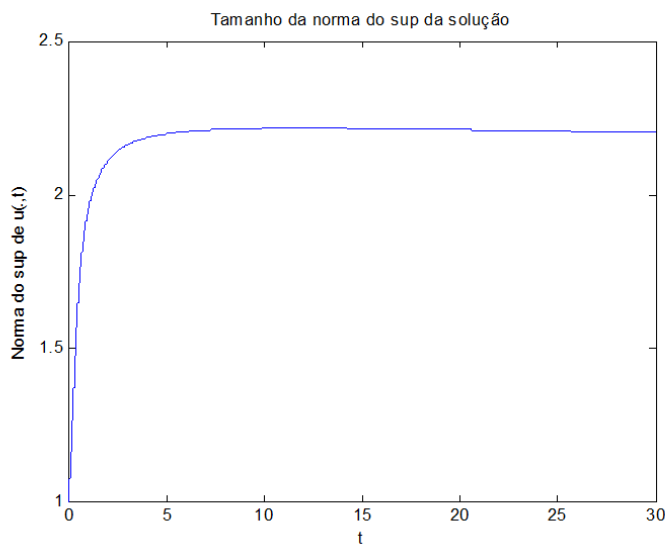


Figura 3.1: Controle da norma do sup

### 3.4 Análise de Escalas

Nesta seção utilizaremos argumentos de mudança de escala para verificar, principalmente, se os valores de  $\delta_1$  e de  $\delta_2$  obtidos no final da Seção 3.3 são os valores adequados.

Adicionalmente, na análise a ser feita nessa seção encontraremos novamente a condição sobre  $p$  exigida em (3.25), para a demonstração do Lema Fundamental, indicando que ela realmente é uma condição *natural*, e não uma limitação imposta pelo método de análise usado neste capítulo.

**Proposição 3.4.1** *Seja  $u(\cdot, t) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  solução (suave) da equação (1.1),  $\forall 0 < T < T_*$ , e suponhamos que tal solução satisfaz a desigualdade*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p, \alpha, \beta, \kappa) \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0, t)^{\delta_1} \cup_p(0, t)^{\delta_2} \right\}. \quad (3.102)$$

para qualquer  $\mathbf{f}(x, t, u)$  satisfazendo a (1.9). Então, os valores de  $\delta_1$  e  $\delta_2$  devem ser:

$$\delta_1 = \frac{n}{p(\beta + 1) + n(\alpha + \beta - \kappa)} \quad e \quad \delta_2 = \frac{p(\beta + 1)}{p(\beta + 1) + n(\alpha + \beta - \kappa)}, \quad (3.103)$$

com  $p$  satisfazendo a

$$p > \max \left\{ 1; \frac{n(\kappa - (\alpha + \beta))}{(\beta - 1)} \right\}. \quad (3.104)$$

#### Demonstração:

Seja  $u(x, t)$  uma solução da equação (1.1), que satisfaça a desigualdade (3.102).

Vamos mudar a escala em  $x$ , em  $t$ , e em  $u$ , isto é, consideraremos uma função

$$\tilde{u}(x, t) := \lambda u(Lx, \theta t); \quad \lambda \neq 0; L \neq 0; \theta > 0, \quad (3.105)$$

onde  $\lambda$ ,  $L$  e  $\theta$  são parâmetros inicialmente livres, e buscaremos a EDP da qual a função  $\tilde{u}(\cdot, t)$  é solução.

Para facilitar a comparação entre as EDPs, vamos reescrever a equação (1.1). Para o lado direito, fazemos

$$\operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) = \underbrace{|\nabla u|^\beta \nabla(|u|^\alpha) \cdot \nabla u}_I + \underbrace{|u|^\alpha \nabla(|\nabla u|^\beta) \cdot \nabla u}_II + \underbrace{|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \Delta u}_III,$$

onde I, II e III serão reescritos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
I &= |\nabla u|^\beta \alpha |u|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(u) \nabla u \cdot \nabla u \\
&= \alpha |u|^{\alpha-1} |\nabla u|^\beta \operatorname{sgn}(u) \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 \\
&= \alpha \operatorname{sgn}(u) |u|^{\alpha-1} |\nabla u|^{\beta+2}.
\end{aligned}$$

Antes de reescrever II, note que

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^\beta &= \left( \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^\beta \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^\beta) &= \beta |\nabla u|^{\beta-1} \frac{1}{2} |\nabla u|^{-1} 2 (u_{x_i x_1} \cdot u_{x_i} + u_{x_i x_2} \cdot u_{x_i} + \cdots + u_{x_i x_n} \cdot u_{x_i}) \\
&= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j} \cdot u_{x_i} \\
\Rightarrow \nabla (|\nabla u|^\beta) \cdot \nabla u &= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \left( \sum_{j=1}^n u_{x_1 x_j} \cdot u_{x_1}, \cdots, \sum_{j=1}^n u_{x_n x_j} \cdot u_{x_n} \right) \cdot (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) \\
&= \beta |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} \cdot (u_{x_i})^2)
\end{aligned}$$

e, portanto:

$$II = \beta |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} (u_{x_i})^2);$$

e também

$$III = |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Finalmente, escrevemos:

$$\eta \Delta u = \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Assim, a EDP (1.1), da qual  $u(x, t)$  é solução, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) &= \mu(t) \alpha \operatorname{sgn}(u) |u|^{\alpha-1} |\nabla u|^{\beta+2} \\
&\quad + \mu(t) \beta |u|^\alpha |\nabla u|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{x_i x_j} (u_{x_i})^2)
\end{aligned} \tag{3.106}$$



$$\begin{aligned}
& + \mu(t) |u|^\alpha |\nabla u|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \\
& + \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.
\end{aligned}$$

Agora, usando a definição de  $\tilde{u}(x, t)$  dada em (3.105), vamos derivar a EDP da qual  $\tilde{u}$  é solução. Temos:

$$\tilde{u}(x, t) = \lambda u(Lx, \theta t) \Rightarrow u(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda} \tilde{u}(x, t); \quad (3.107)$$

$$\tilde{u}_{x_i}(x, t) = \lambda L u_{x_i}(Lx, \theta t) \Rightarrow u_{x_i}(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda L} \tilde{u}_{x_i}(x, t); \quad (3.108)$$

e

$$\tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) = \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \Rightarrow u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) = \frac{1}{\lambda L^2} \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t), \quad (3.109)$$

e calculamos:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\lambda u(Lx, \theta t)) \\
&= \lambda \theta u_t(Lx, \theta t) \\
&\stackrel{EDP(1.1)}{=} \lambda \theta \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \left( f_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \right)_{x_i} + f'_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) u_{x_i}(Lx, \theta t) \right) \right. \\
&\quad + \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha |u(Lx, \theta t)|^{\alpha-1} |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta+2} \\
&\quad + \mu(\theta t) \beta |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\
&\quad + \mu(\theta t) |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \\
&\quad \left. + \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \right]. \quad (3.110)
\end{aligned}$$

Vamos analisar primeiro os termos de (3.110) relativos a  $\operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u))$ , isto é:

$$\lambda \theta \sum_{i=1}^n \left( \left( f_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \right)_{x_i} + f'_i(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) u_{x_i}(Lx, \theta t) \right). \quad (3.111)$$

Ao definirmos

$$\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) := \frac{\lambda\theta}{L} \mathbf{f}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)), \quad (3.112)$$

teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))) &= \operatorname{div}\left(\frac{\lambda\theta}{L} \mathbf{f}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t))\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda\theta}{L} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \cdot L + \frac{\lambda\theta}{L} \mathbf{f}'(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \cdot L \cdot u_{x_i}(Lx, \theta t) \right) \\ &= \lambda\theta \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) + \mathbf{f}'(Lx, \theta t, u(Lx, \theta t)) \cdot u_{x_i}(Lx, \theta t) \right), \end{aligned}$$

que é exatamente igual ao termo (3.111), originado ao abrir o termo  $\operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u(x, t)))$  da EDP original. Dessa forma, como não estamos interessados em trabalhar com nenhuma  $\mathbf{f}$  particular, podemos, ao escrever a EDP que  $\tilde{u}$  satisfaz, considerar a função  $\tilde{\mathbf{f}}$  como definida em (3.112).

Ou seja, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))) &= \\ &= \lambda\theta \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha |u(Lx, \theta t)|^{\alpha-1} |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta+2} \\ &+ \lambda\theta \mu(\theta t) \beta |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\ &+ \lambda\theta \mu(\theta t) |u(Lx, \theta t)|^\alpha |\nabla u(Lx, \theta t)|^\beta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \\ &+ \lambda\theta \eta \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t))) &= \\ &= \lambda\theta \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(u(Lx, \theta t)) \alpha \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^{\alpha-1} \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^{\beta+2} \\ &+ \lambda\theta \mu(\theta t) \beta \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^{\beta-2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\lambda^2 L^2} \cdot \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \lambda L^2 u_{x_i x_j}(Lx, \theta t) (\lambda L u_{x_i}(Lx, \theta t))^2 \right) \\ &+ \lambda\theta \mu(\theta t) \left| \frac{1}{\lambda} \lambda u(Lx, \theta t) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\lambda L} \nabla(\lambda L u(Lx, \theta t)) \right|^\beta \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \end{aligned}$$

$$+ \lambda \theta \eta \frac{1}{\lambda L^2} \sum_{i=1}^n \lambda L^2 u_{x_i x_i}(Lx, \theta t) \quad (3.113)$$

e, usando as relações (3.107)-(3.109) entre  $u$  e  $\tilde{u}$  para reescrever o lado direito de (3.113) em termos de  $\tilde{u}$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) &= \\ &= \lambda \theta \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(\tilde{u}(x, t)) \alpha \lambda^{1-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^{\alpha-1} (\lambda L)^{-\beta-2} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta+2} \\ &+ \lambda \theta \mu(\theta t) \beta \lambda^{-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^\alpha (\lambda L)^{2-\beta} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta-2} \\ &\quad \cdot \lambda^{-3} L^{-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \tilde{u}_{x_i x_j}(x, t) (\tilde{u}_{x_i}(x, t))^2 \right) \\ &+ \lambda \theta \mu(\theta t) \lambda^{-\alpha} |\tilde{u}(x, t)|^\alpha (\lambda L)^{-\beta} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^\beta \lambda^{-1} L^{-2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) \\ &+ \eta \frac{\theta}{L^2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) &= \\ &= \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \mu(\theta t) \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \alpha |\tilde{u}(x, t)|^{\alpha-1} |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta+2} \\ &+ \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \mu(\theta t) \beta |\tilde{u}(x, t)|^\alpha |\nabla \tilde{u}(x, t)|^{\beta-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \tilde{u}_{x_i x_j}(x, t) (\tilde{u}_{x_i}(x, t))^2 \right) \\ &+ \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \mu(\theta t) |\tilde{u}(x, t)|^\alpha |\nabla \tilde{u}(x, t)|^\beta \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t) \\ &+ \eta \frac{\theta}{L^2} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{x_i x_i}(x, t). \end{aligned}$$

Pela análise do lado direito da equação (1.1), usada para derivar (3.106), usando a função  $\tilde{\mathbf{f}}$  definida em (3.112), e definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &:= \mu(\theta t), \quad \text{e} \\ \tilde{\eta} &:= \frac{\theta}{L^2} \eta, \end{aligned} \quad (3.114)$$

vemos que  $\tilde{u}(x, t)$  satisfaz a EDP:

$$\tilde{u}_t(x, t) + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) = \lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} \tilde{\mu}(t) \operatorname{div} (|\tilde{u}|^\alpha |\nabla \tilde{u}|^\beta \nabla \tilde{u}) + \tilde{\eta} \Delta \tilde{u}. \quad (3.115)$$

Note que a EDP em (3.115) é muito parecida com a EDP em (3.106). Como nos interessa que sejam iguais, isto é, que o coeficiente do primeiro termo do lado direito da EDP (3.115) seja 1, impomos a condição

$$\lambda^{-\alpha-\beta} \theta L^{-\beta-2} = 1,$$

o que implica que:

$$\theta = \lambda^{\alpha+\beta} L^{\beta+2}. \quad (3.116)$$

Com essa escolha de  $\theta$ ,  $\tilde{u}(x, t)$  é solução da mesma EDP que  $u(x, t)$ , isto é,  $\tilde{u}(x, t)$  resolve

$$u_t + \operatorname{div} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x, t, \tilde{u}(x, t)) \right) = \tilde{\mu}(t) \operatorname{div} (|\tilde{u}|^\alpha |\nabla \tilde{u}|^\beta \nabla \tilde{u}) + \tilde{\eta} \Delta \tilde{u},$$

e portanto, a desigualdade (3.102) que assumimos como sendo válida para  $u(x, t)$  também é válida para  $\tilde{u}(x, t)$ , isto é, vale:

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \max \left\{ \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}; \tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(0, t)^{\delta_1} \tilde{\mathbb{U}}_p(0, t)^{\delta_2} \right\}, \quad 0 < t < T. \quad (3.117)$$

Precisamos agora tentar estimar  $\tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(0, t)$  e  $\tilde{\mathbb{U}}_p(0, t)$ , respectivamente, por  $\mathbb{B}_\mu(0, t)$  e  $\mathbb{U}_p(0, t)$ . Fazemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u(Lx, \theta t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(Lx, \theta t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{y=Lx}{=} \lambda L^{-\frac{n}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(y, \theta t)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{\lambda}{L^{\frac{n}{q}}} \|u(\cdot, \theta t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

e, usando a definição de  $\mathbb{U}(t)$  dada em (1.19), obtemos

$$\tilde{\mathbb{U}}_p(t) = \frac{\lambda}{L^{\frac{n}{p}}} \mathbb{U}_p(\theta t). \quad (3.118)$$

E, levando em conta as definições de  $\mathbb{B}_\mu(t)$ , dada em (1.18), de  $\tilde{\mu}(\tau)$ , dada em (3.114),

de  $\tilde{\mathbf{f}}$ , dada em (3.112), de  $\theta$ , dada em (3.116), e supondo que em (1.9) vale a igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(t) &= \sup_{0 < \tau < t} \frac{\tilde{B}(\tau)}{\tilde{\mu}(\tau)} \\
&= \sup_{0 < \tau < t} \frac{\tilde{\mathbf{f}}(x, \tau, \tilde{u})}{|\tilde{u}(x, \tau)|^{\kappa+1}} \frac{1}{\tilde{\mu}(\tau)} \\
&= \frac{\lambda \theta}{L} \frac{1}{\lambda^{\kappa+1}} \sup_{0 < \theta \tau < \theta t} \frac{\mathbf{f}(Lx, \theta \tau, \lambda u(Lx, \theta \tau))}{|u(Lx, \theta \tau)|^{\kappa+1}} \frac{1}{\mu(\theta \tau)} \\
&= \frac{\lambda^{-\kappa} \theta}{L} \sup_{0 < \theta \tau < \theta t} \frac{B(\theta \tau)}{\mu(\theta \tau)} \\
&= \lambda^{\alpha+\beta-\kappa} L^{\beta+1} \mathbb{B}_{\mu}(\theta t).
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Portanto, usando (3.117), (3.118), (3.119) e (3.105), teremos:

$$\begin{aligned}
\lambda \|u(\cdot, \theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K \cdot \max \left\{ \lambda \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \left( \lambda^{\alpha+\beta-\kappa} L^{\beta+1} \mathbb{B}_{\mu}(\theta t) \right)^{\delta_1} \left( \lambda L^{-\frac{n}{p}} \mathbb{U}_p(\theta t) \right)^{\delta_2} \right\} \\
&= K \cdot \max \left\{ \lambda \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \lambda^{(\alpha+\beta-\kappa)\delta_1+\delta_2} L^{(\beta+1)\delta_1-\frac{n}{p}\delta_2} \mathbb{B}_{\mu}^{\delta_1}(\theta t) \mathbb{U}_p^{\delta_2}(\theta t) \right\}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(\cdot, \theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \lambda^{(\alpha+\beta-\kappa)\delta_1+\delta_2-1} L^{(\beta+1)\delta_1-\frac{n}{p}\delta_2} \mathbb{B}_{\mu}^{\delta_1}(\theta t) \mathbb{U}_p^{\delta_2}(\theta t) \right\}. \tag{3.120}$$

Como os parâmetros  $\lambda$  e  $L$  estão livres, note que se seus respectivos expoentes não forem nulos, podemos fazer  $\lambda, L \rightarrow 0$  ou  $\lambda, L \rightarrow \infty$  em (3.120) (de acordo com o sinal dos expoentes), e assim obter:

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \infty,$$

o que, ou só é satisfeito pela solução trivial  $u(\cdot, t) \equiv 0$ , ou permite que a solução  $u(\cdot, t)$  seja ilimitada, casos que não nos interessam. Para evitar essas situações, precisamos que os expoentes de  $\lambda$  e de  $L$  sejam nulos, isto é, devemos fazer:

$$(\alpha + \beta - \kappa)\delta_1 + \delta_2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad (\beta + 1)\delta_1 - \frac{n}{p}\delta_2 = 0,$$

o que resulta no sistema:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta - \kappa)\delta_1 + \delta_2 = 1 \\ (\beta + 1)\delta_1 - \frac{n}{p}\delta_2 = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é

$$\delta_1 = \frac{n}{p(\beta + 1) + n(\alpha + \beta - \kappa)} \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{p(\beta + 1)}{p(\beta + 1) + n(\alpha + \beta - \kappa)},$$

que são os valores desejados para  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (ver (3.103)).

Além disso, como desejamos que os expoentes  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sejam positivos, seus denominadores devem ser positivos, ou seja, devemos ter

$$p(\beta + 1) - n(\kappa - (\alpha + \beta)) > 0,$$

o que leva à seguinte restrição sobre  $p$ :

$$p > \frac{n(\kappa - (\alpha + \beta))}{(\beta + 1)}.$$

□

# Capítulo 4

## Existência global de soluções

Neste capítulo vamos fazer uma aplicação de alguns resultados obtidos anteriormente nesta tese, incluindo o resultado principal (Teorema 3.3.1), visando obter condições de existência global (ou seja, condições que garantam que se tenha  $T_* = \infty$ ) das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema regularizado (1.1)-(1.2), com  $p_0 = 1$ , ou seja,

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, t, u)) = \mu(t) \operatorname{div}(|u|^\alpha |\nabla u|^\beta \nabla u) + \eta \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.2)$$

### 4.1 Desigualdade de energia

A partir da desigualdade de energia (3.13) obteremos uma outra desigualdade, que será apresentada em uma forma adequada para a utilização na próxima seção.

O ponto de partida é a desigualdade de energia dada em (3.13), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx &\leq \\ &\leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t, u) dx, \end{aligned}$$

válida para qualquer  $q \geq p \geq p_0$ ,  $q \geq 2$ , e  $\forall t \in (0, T_*) \setminus E_q$ . A exemplo do que foi feito na demonstração do lema 3.2.1, majoramos o lado direito, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx &\leq \\ &\leq q(q-1) B(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-1+\kappa} |\nabla u(x, t)| dx \\ &= q(q-1) B(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{\frac{q-2+\alpha}{\beta+2}} |\nabla u(x, t)| |u(x, t)|^{(q-1+\kappa) - \frac{q-2+\alpha}{\beta+2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} q(q-1)B(t) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x,t)|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\
&\quad \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\frac{(q-1+\kappa)(\beta+2)-(q-2+\alpha)}{(\beta+1)}} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \\
&= q(q-1)B(t) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x,t)|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{q+\gamma} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

onde  $\gamma = \frac{\kappa(\beta+2) - (\alpha + \beta)}{(\beta+1)}$  é dado em (3.24).

Definimos  $w(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  como em (3.32), e, usando as relações entre normas envolvendo  $u$  e  $w$  dadas em (3.33)-(3.36), podemos reescrever (4.3) como

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + q(q-1)\mu(t) \left( \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \right)^{(\beta+2)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2)} \leq \\
&= q(q-1)B(t) \left( \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \right) \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{\lambda}(\frac{\beta+1}{\beta+2})}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

onde  $\lambda, \tilde{\lambda}$  (e  $\lambda_0$ ), dados em (3.34)-(3.36), valem

$$\lambda = \frac{q(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}; \quad \tilde{\lambda} = \frac{(q+\gamma)(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}; \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{q(\beta+2)}{\sigma(q+\alpha+\beta)},$$

com  $\sigma$  atendendo às condições descritas em (3.23), ou seja,  $\sigma \geq 1$  e  $\sigma \geq (1 + \frac{\gamma_-}{p})$ .

Vamos utilizar a desigualdade do tipo SNG que consta em (3.20), com  $r = \tilde{\lambda}$ ,  $s = \lambda_0$  e  $\tilde{p} = \beta + 2$ . Para esses valores, a desigualdade (3.20) toma a forma

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{\lambda}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^\theta, \tag{4.5}$$

onde  $\theta$  e  $(1-\theta)$  são dados por

$$\theta = \frac{n(q+\alpha+\beta)[(\sigma-1)q+\sigma\gamma]}{(q+\gamma)[q(\beta+2)+\sigma n(q+\alpha+\beta)-nq]}; \quad \text{e} \tag{4.6}$$

$$(1-\theta) = \frac{[(q+\gamma)(\beta+2)-n\gamma+n(\alpha+\beta)]}{[q(\beta+2)+\sigma n(q+\alpha+\beta)-nq]} \cdot \frac{q}{(q+\gamma)}. \tag{4.7}$$

Usando (4.5) em (4.4), obtemos



$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + q(q-1)\mu(t) \left( \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \right)^{(\beta+2)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2)} \leq \\
& \leq q(q-1)B(t) \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \cdot \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)} \\
& \quad \cdot \left( C \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^\theta \right)_{L^{\tilde{\lambda}}(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{\lambda} \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)}} \\
& = q(q-1)B(t) \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \cdot C^{\frac{(\beta+1)(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta) \frac{(\beta+1)(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{1+\theta \frac{(q+\gamma)(\beta+1)}{(q+\alpha+\beta)}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

substituindo  $\theta$  e  $(1-\theta)$  em (4.8), segundo (4.6) e (4.7), encontramos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + q(q-1)\mu(t) \left( \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \right)^{(\beta+2)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2)} \leq \\
& \leq q(q-1)B(t) \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \cdot C^{\frac{(\beta+1)(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\beta+1)q}{(q+\alpha+\beta)} \cdot \frac{[(q+\gamma)(\beta+2)-n\gamma+n(\alpha+\beta)]}{[q(\beta+2)+n\sigma(q+\alpha+\beta)-nq]}} \\
& \quad \cdot \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{1+(\beta+1) \cdot \frac{n[(\sigma-1)q+\sigma\gamma]}{[q(\beta+2)+n\sigma(q+\alpha+\beta)-nq]}},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e substituindo  $\gamma$  nos dois últimos expoentes de (4.9) (nesse momento, não é necessário substituir  $\gamma$  no expoente de  $C$ ):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|w(\cdot, t)\|_{L^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\lambda + q(q-1)\mu(t) \left( \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \right)^{(\beta+2)} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2)} \leq \\
& \leq q(q-1)B(t) \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \cdot C^{\frac{(\beta+1)(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}} \|w(\cdot, t)\|_{L^{\lambda_0}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{[(q+\kappa)(\beta+1)+(n-1)(\alpha+\beta-\kappa)]}{[(\sigma-1+\frac{\beta+2}{n})q+\sigma(\alpha+\beta)]}} \\
& \quad \cdot \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{(\beta+2)}(\mathbb{R}^n)}^{(\beta+2) \cdot \frac{[(\sigma-1+\frac{1}{n})q+\sigma\kappa]}{[(\sigma-1+\frac{\beta+2}{n})q+\sigma(\alpha+\beta)]}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ao reescrever (4.10) em termos de  $u$ , de acordo com as relações dadas em (3.33)-(3.36), ficamos com

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\
& \leq q(q-1)B(t) \frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)} \cdot C^{(\beta+1) \frac{(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{q \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{[(q+\kappa)(\beta+1)+(n-1)(\alpha+\beta-\kappa)]}{[(\sigma-1+\frac{\beta+2}{n})q+\sigma(\alpha+\beta)]}} \\
& \quad \cdot \left( \left( \frac{(q+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+2)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{[(\sigma-1+\frac{1}{n})q+\sigma\kappa]}{[(\sigma-1+\frac{\beta+2}{n})q+\sigma(\alpha+\beta)]}}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

A derivação de (4.11), feita a partir da desigualdade de energia (3.13), é válida  $\forall t \in (0, T) \setminus E_q$  e para qualquer  $q$  satisfazendo a  $q \geq \sigma p$ ,  $q \geq 2$ , e será útil para a demonstração dos casos (ii) e (iii) do próximo teorema.

## 4.2 Condições para a existência global

**Teorema 4.2.1** *Sobre as soluções do problema (4.1)-(4.2), sob as hipóteses dos Teoremas 1.2.1 e 3.3.1, garante-se que:*

(i) *Se  $0 \leq \kappa < (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ , então  $u(\cdot, t)$  será definida para todo  $0 < t < \infty$  (para qualquer dado inicial  $u_0$ ).*

(ii) *Se  $\kappa = (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ , as soluções serão globais sempre que*

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbb{B}_\mu(0, \infty)^{\frac{-n}{(\beta+1)}} C^{-n \cdot \frac{2+(\alpha+\beta)+\frac{(\beta+2)}{n}}{(2+\alpha+\beta)}} \left( \frac{\beta + 2}{2 + \alpha + \beta} \right)^n, \quad (4.12)$$

onde  $C$  é a constante da desigualdade SNG usada na obtenção de (4.11).

(iii) *Se  $\kappa > (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ , as soluções serão globais sempre que o dado inicial  $u_0$  satisfizer a*

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)] - (\beta + 1)}{(\beta + 1)}} \leq \left\{ \tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta + 1)}} \right\}^{-n}, \quad (4.13)$$

onde

$$\tilde{C} = \frac{\{2n[\kappa - (\alpha + \beta)] + (\beta + 1)(\alpha + \beta)\}}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \cdot C^{\frac{[(2 + \frac{1}{n})n[\kappa - (\alpha + \beta)] + (\beta + 1)\kappa]}{2n[\kappa - (\alpha + \beta)] + (\beta + 1)(\alpha + \beta)}}. \quad (4.14)$$

**Demonstração:**

**Caso (i):**  $0 \leq \kappa < (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ .

Pelo Teorema 3.3.1 (resultado principal), tomando  $p = 1$ , temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \left( \mathbb{B}_\mu(t_0; t) \right)^{\frac{n}{n(\alpha + \beta - \kappa) + (\beta + 1)}} \left( \mathbb{U}_1(t_0; t) \right)^{\frac{(\beta + 1)}{n(\alpha + \beta - \kappa) + (\beta + 1)}} \right\}$$

e, pelo Teorema 1.2.1 (decrescimento  $L^1$ ), temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Segue então que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; (\mathbb{B}_\mu(t_0; t))^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+(\beta+1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+(\beta+1)}} \right\},$$

$\forall t \in (0, T_*)$ . Assim, a solução  $u(\cdot, t)$  pode ser sempre estendida além de  $T_*$ , e podemos concluir que as soluções  $u(\cdot, t)$  são limitadas para todo  $0 < t < \infty$ , ou seja, a solução é global. O Caso (i) está concluído.

**Caso (ii):**  $\kappa = (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ .

Neste caso, temos

$$\frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)} = 1$$

e, portanto, a restrição  $p > \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}$ , dada em (3.25), nos diz que não podemos aplicar o Teorema 3.3.1 com  $p = 1$ , não nos permitindo usar diretamente o decrescimento da norma  $L^1$  da solução, como feito no Caso (i). Usaremos  $\hat{p} = 1$ , mas o caminho será um pouco mais longo.

Note que, para o valor de  $\kappa$  deste caso, temos

$$\gamma = \frac{\left[ (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n} \right] (\beta + 2) - (\alpha + \beta)}{(\beta + 1)} = (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 2)}{n} \geq 0$$

e, assim,  $\gamma_- = 0$ , de forma que as condições sobre  $\sigma$  dadas em (3.23) são satisfeitas para qualquer  $\sigma \geq 1$ .

Escolhemos

$$\hat{p} = 1$$

e, conseqüentemente, a restrição  $q \geq 2$  nos diz que, para que a condição  $q \geq \sigma \hat{p}$  seja satisfeita, devemos ter  $\sigma \geq 2$ . Por simplicidade, vamos usar

$$\sigma = 2.$$

Com essas escolhas, vamos usar (4.11) para estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \stackrel{q=\sigma\hat{p}=2}{=} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .

Esta será a norma que iremos usar no Teorema 3.3.1 para controlar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ , neste caso.

Ao reescrever (4.11), usando  $p = 1$  e  $\sigma = 2$ , encontramos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^\alpha |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\
& \leq 2B(t) \frac{(\beta+2)}{(2+\alpha+\beta)} \cdot C^{(\beta+1) \frac{(2+\gamma)}{(2+\alpha+\beta)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{[(2+\kappa)(\beta+1)+(n-1)(\alpha+\beta-\kappa)]}{[2(1+\frac{\beta+2}{n})+2(\alpha+\beta)]}} \cdot \\
& \cdot \left( \left( \frac{(2+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+2)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^\alpha |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{[2(1+\frac{1}{n})+2\kappa]}{[2(1+\frac{\beta+2}{n})+2(\alpha+\beta)]}}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Substituindo  $\kappa = (\alpha + \beta) + \frac{(\beta+1)}{n}$ , inserindo e majorando  $\frac{B(t)}{\mu(t)}$  sobre  $(0, t)$  no lado direito em (4.15), chegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^\alpha |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\
& \leq \left( \frac{(2+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+1)} \cdot C^{\frac{(\beta+1)(2+\gamma)}{(2+\alpha+\beta)}} \frac{B(t)}{\mu(t)} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\beta+1)}{n}} \cdot \\
& \quad \cdot 2\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^\alpha |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \\
& \leq \left( \frac{(2+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+1)} \cdot C^{\frac{(\beta+1)(2+\gamma)}{(2+\alpha+\beta)}} \mathbb{B}_\mu(0, t) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\beta+1)}{n}} \cdot \\
& \quad \cdot 2\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^\alpha |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Note que (4.16) informa que

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 0, \quad \forall t \in (0, T) \setminus E_q, \tag{4.17}$$

desde que tenhamos

$$\left( \frac{(2+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+1)} C^{(\beta+1) \cdot \frac{2+(\alpha+\beta)+\frac{(\beta+2)}{n}}{(2+\alpha+\beta)}} \mathbb{B}_\mu(0, t) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\beta+1)}{n}} \leq 1,$$

ou seja,

$$\mathbb{B}_\mu(0, t)^{\frac{n}{(\beta+1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C^{-n \cdot \frac{2+(\alpha+\beta)+\frac{(\beta+2)}{n}}{(2+\alpha+\beta)}} \left( \frac{\beta+2}{2+\alpha+\beta} \right)^n,$$

para algum  $t > 0$ . Se esse for o caso, então (4.17) indica que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  é decrescente em  $(0, t)$ , e portanto a solução do problema (4.1)-(4.2) é definida em  $(0, t)$ .

Em particular, se valer (4.12), isto é,

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbb{B}_\mu(0, \infty)^{\frac{-n}{(\beta+1)}} C^{-n \cdot \frac{2+(\alpha+\beta)+\frac{(\beta+2)}{n}}{(2+\alpha+\beta)}} \left( \frac{\beta+2}{2+\alpha+\beta} \right)^n,$$

então a solução de (4.1)-(4.2) é globalmente definida (isto é, tem-se  $T_* = \infty$ ). Isto conclui o Caso (ii).

**Caso (iii):**  $\kappa > (\alpha + \beta) + \frac{(\beta + 1)}{n}$ .

Para este caso, vamos escolher

$$\widehat{p} = \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}. \quad (4.18)$$

Note que não podemos aplicar diretamente o Teorema 3.3.1 para tal  $\widehat{p}$ , pois ele não atende a condição (3.25). Além disso, com os valores de  $\kappa$  deste caso temos  $\widehat{p} > 1$ , o que diz que também não poderemos usar diretamente o decrescimento  $L^1$  da solução, como foi feito no caso (i).

Como no Caso (ii), os valores de  $\kappa$  deste caso fazem com que sempre tenhamos  $\gamma_- \geq 0$ , logo, as condições sobre  $\sigma$  dadas em (3.23) são satisfeitas por qualquer  $\sigma \geq 1$ . Por simplicidade, usaremos novamente  $\sigma = 2$ .

Com essas escolhas para  $\widehat{p}$  e  $\sigma$ , tentaremos usar o Teorema 3.3.1 para controlar a norma do sup da solução  $u(\cdot, t)$  por sua norma  $L^q$ , com  $q = \sigma\widehat{p} = 2\widehat{p}$ .

Ao reescrever a desigualdade (4.11), usando  $\widehat{p} = \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}$  e  $\sigma = 2$ , e inserindo  $\frac{Bt}{\mu(t)}$ , encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2\widehat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\widehat{p}} + 2\widehat{p}(2\widehat{p}-1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2\widehat{p}-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\ & \leq 2\widehat{p}(2\widehat{p}-1) B(t) \frac{(\beta+2)}{(2\widehat{p}+\alpha+\beta)} \cdot C^{(\beta+1) \frac{(2\widehat{p}+\gamma)}{(2\widehat{p}+\alpha+\beta)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\widehat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\widehat{p} \frac{(\beta+1)}{n}} \\ & \quad \cdot \left( \frac{(2\widehat{p}+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+2)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2\widehat{p}-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \\ & = \left( \frac{(2\widehat{p}+\alpha+\beta)}{(\beta+2)} \right)^{(\beta+1)} \cdot C^{(\beta+1) \frac{(2\widehat{p}+\gamma)}{(2\widehat{p}+\alpha+\beta)}} \frac{B(t)}{\mu(t)} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\widehat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\widehat{p} \frac{(\beta+1)}{n}} \\ & \quad \cdot 2\widehat{p}(2\widehat{p}-1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2\widehat{p}-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substituindo  $\gamma$  em (4.19), e majorando  $\frac{B(t)}{\mu(t)}$  por seu sup sobre  $(0, t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\hat{p}} + 2\hat{p}(2\hat{p}-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2\hat{p}-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx \leq \\ & \leq \left(\frac{2\hat{p} + \alpha + \beta}{\beta + 2}\right)^{(\beta+1)} \cdot C^{(\beta+1)} \frac{\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)\kappa\right]}{2n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)(\alpha+\beta)} \mathbb{B}_\mu(0; t) \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}(\beta+1)}{n}} \\ & \quad \cdot 2\hat{p}(2\hat{p}-1)\mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2\hat{p}-2+\alpha} |\nabla u(x, t)|^{\beta+2} dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como no caso (ii), (4.20) nos diria que

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{2\hat{p}} \leq 0, \quad \forall t \in (0, T) \setminus E_q,$$

desde que tivéssemos

$$\left(\frac{2\hat{p} + \alpha + \beta}{\beta + 2}\right)^{(\beta+1)} \cdot C^{(\beta+1)} \frac{\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)\kappa\right]}{2n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)(\alpha+\beta)} \mathbb{B}_\mu(0; t) \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}(\beta+1)}{n}} \leq 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{2\hat{p} + \alpha + \beta}{\beta + 2}\right) \cdot C \frac{\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)\kappa\right]}{2n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)(\alpha+\beta)} \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}}{n}} \leq 1,$$

ou ainda,

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}}{n}} \leq 1, \quad (4.21)$$

onde  $\tilde{C}$ , dado em (4.14), vale

$$\tilde{C} = \frac{\{2n[\kappa - (\alpha + \beta)] + (\beta + 1)(\alpha + \beta)\}}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \cdot C \frac{\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)\kappa\right]}{2n[\kappa-(\alpha+\beta)]+(\beta+1)(\alpha+\beta)}.$$

a condição (4.21) é suficiente para garantir que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}$  é decrescente (e se for, pelo Teorema 3.3.1, controla a norma do sup). O problema é que, até este momento, não temos controle sobre  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}$ .

Para tentar descobrir o que é necessário para que a condição (4.21) seja satisfeita, podemos proceder da seguinte forma:

Inicialmente usamos a desigualdade de interpolação de normas para obter

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2\hat{p}-1}} \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2(\hat{p}-1)}{2\hat{p}-1}}. \quad (4.22)$$

Elevando ambos os lados de (4.22) a  $\frac{\hat{p}}{n}$ , e multiplicando por  $\tilde{C} \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}}$ , com  $\tilde{C}$  dado

em (4.14), obtemos uma desigualdade cujo lado esquerdo é igual ao lado esquerdo da desigualdade em (4.21), ou seja, obtemos

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}}{n}} \leq \tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}}{n(2\hat{p}-1)}} \cdot \|u\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\hat{p}(\hat{p}-1)}{n(2\hat{p}-1)}}. \quad (4.23)$$

A seguir, usamos novamente a desigualdade de interpolação de normas, para estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}}$ , ou seja, fazemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2\hat{p}}} \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\hat{p}-1}{2\hat{p}}}, \quad (4.24)$$

e assim, substituindo (4.24) em (4.23), obtemos

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\hat{p}}{n}} \leq \tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\hat{p}-1)}{n}}. \quad (4.25)$$

Afirmamos que, se exigirmos de  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  que satisfaça a condição (4.13), reescrita aqui como

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\hat{p}-1)}{n}} \leq 1,$$

onde  $\tilde{C}$  é dado em (4.14) e  $\hat{p}$  em (4.18), teremos

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\hat{p}-1)}{n}} \leq 1, \quad (4.26)$$

pelo menos para  $t \in (0, T_*)$  próximo de zero. E isso é suficiente para garantir também que (4.26) é válido para qualquer  $t \in (0, T_*)$ .

Note que, se (4.26) não fosse verdadeiro para qualquer  $t \in (0, T_*)$ , então existiria algum  $T_1$ , com  $0 < T_1 < T_*$ , para o qual se teria

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\hat{p}-1)}{n}} \leq 1, \quad \forall t \in (0, T_1), \quad \text{e} \quad (4.27)$$

$$\tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(\hat{p}-1)}{n}} > 1. \quad (4.28)$$

Mas se vale (4.27), por (4.25) segue que a desigualdade em (4.21) é válida, para qualquer  $t \in (0, T_1)$ , e, portanto, (4.20) implica que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}$  é decrescente,  $\forall t \in (0, T_1) \setminus E_q$ . Então, pelo teorema 3.3.1,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}$  controla a norma do sup,  $\forall t \in (0, T_1)$ .

Como estamos exigindo que  $u_0$  atenda a (4.13), e tanto a norma  $L^1$  quanto a norma  $L^\infty$  decrescem em  $(0, T_1)$  (o decrescimento da norma  $L^\infty$  no intervalo  $(0, T_1)$  decorre de (4.27) e do decrescimento da norma  $L^1$ ), pela continuidade da solução não

é possível que se tenha (4.28).

Logo, a desigualdade (4.26) é válida para todo  $t \in (0, T_*)$ , e assim (4.21) é também satisfeita para todo  $t \in (0, T_*)$ , e, portanto, (4.20) nos diz que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2\hat{p}}(\mathbb{R}^n)}$  decresce monotonicamente.

Podemos concluir, pelo Teorema 3.3.1, que a solução existe para todo  $t \in (0, \infty)$ , desde que seja satisfeita a condição (4.13), ou seja,

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(\hat{p}-1)} \leq \left\{ \tilde{C} \cdot \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \right\}^{-n},$$

onde  $\hat{p} = \frac{n[\kappa - (\alpha + \beta)]}{(\beta + 1)}$ ,  $\mathbb{B}_\mu(0, T)$  é definido em (1.18) e  $\tilde{C}$  em (4.14).

Isso completa a prova do teorema 4.2.1.

□



# Apêndice

## Um exemplo de implementação numérica

Com o intuito de obtermos aproximações numéricas para a solução da equação unidimensional

$$u_t + (\mathbf{b}(x, t, u)u)_x = (|u|^\alpha |u_x|^\beta u_x)_x + \eta u_{xx} \quad (\text{A.1})$$

que ilustrassem alguns dos resultados obtidos neste trabalho, discretizamos a equação (A.1) utilizando diferenças finitas, e elaboramos um esquema numérico do tipo Leap-Frog semi-implícito, seguindo os passos descritos a seguir.

Consideramos uma malha de discretização do espaço-tempo  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  com espaçamento espacial de tamanho  $h$  e espaçamento temporal de tamanho  $k$ , e tomamos

$$t = nk \quad \text{e} \quad x = jh,$$

sendo  $n$  e  $j$  números naturais.

Lembramos, inicialmente, que as aproximações padrão para as derivadas que constam na equação (A.1) são:

- Para a derivada em  $t$ :

- Passo simples no tempo:  $u_t \approx \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{k};$

- Passo duplo no tempo (LeapFrog):  $u_t \approx \frac{v_j^n - v_j^{n-2}}{2k}.$

- Para a derivada primeira em  $x$ :

- Diferença para trás ( $\mathbb{D}_-$ ):  $u_x \approx \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h};$

- Diferença central ( $\mathbb{D}_0$ ):  $u_x \approx \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h};$

- Diferença para a frente ( $\mathbb{D}_+$ ):  $u_x \approx \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}$ .

- Para a derivada segunda em  $x$ :

$$u_{xx} \approx \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} \quad (\text{ou } \mathbb{D}_+\mathbb{D}_-(v)).$$

Esta aproximação, por sua vez, vem de

$$u_{xx} \approx \frac{\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h}}{h} \quad \left( \text{ou } \frac{(\mathbb{D}_+ - \mathbb{D}_-)(v)}{h} \right).$$

Para o desenho do esquema numérico, utilizamos efetivamente as seguintes aproximações para cada termo da equação (A.1):

Para a *derivada temporal*, aproximamos  $u_t$  usando LeapFrog:

$$u_t \approx \frac{v_j^n - v_j^{n-2}}{2k}.$$

Para o *termo advectivo*, avaliamos o valor de  $\mathbf{b}$  um passo de tempo atrás, em

$$\mathbf{b}(x, t, u) \approx \mathbf{b}(x_j, t^{n-1}, v_j^{n-1}),$$

e aproximamos a derivada primeira em  $x$  usando diferença central, também um passo de tempo atrás. O termo advectivo, portanto, foi aproximado da seguinte forma:

$$(\mathbf{b}(x, t, u)u)_x \approx \frac{\mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1})v_{j-1}^{n-1}}{2h}.$$

Para escrever o *termo difusivo*, lembramos que a aproximação de  $u_{xx}$  por  $\mathbb{D}_+\mathbb{D}_-(v)$ , isto é,  $u_{xx} \approx \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2}$ , vem de

$$(u_x)_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_x(x+h, t) - u_x(x, t)}{h}$$

onde, ao usarmos a diferença para trás ( $\mathbb{D}_-$ ) para aproximar  $u_x$ , obtemos

$$(u_x)_x \approx \frac{\mathbb{D}_+\mathbb{D}_-v - \mathbb{D}_-v}{h} = \frac{\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h}}{h}.$$

Como a derivada  $u_x$  tem como coeficientes  $|u|^\alpha |u_x|^\beta$ , eles devem ser tomados nos mesmos pontos  $(x, t)$  que  $u_x$ . Para isso, vamos encarar as derivadas de 1ª ordem

$$\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} \quad \text{e} \quad \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h}$$

não como diferenças para a frente ( $\mathbb{D}_+$ ) e para trás ( $\mathbb{D}_-$ ), respectivamente, no ponto  $(x_j, t^n)$ , mas sim como *diferenças centrais* ( $\mathbb{D}_0$ ) nos pontos  $x_{j+\frac{1}{2}}$  e  $x_{j-\frac{1}{2}}$ , com grade  $\frac{h}{2}$ , ou seja:

$$\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{2 \cdot (\frac{h}{2})} = \mathbb{D}_0 v_{j+\frac{1}{2}}^n$$

e

$$\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} = \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{2 \cdot (\frac{h}{2})} = \mathbb{D}_0 v_{j-\frac{1}{2}}^n.$$

Assim, considerando os pontos  $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$  e  $(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ , usaremos

$$|u(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)|^\alpha = |v_{j+\frac{1}{2}}^n|^\alpha = \left| \frac{v_{j+1}^n + v_j^n}{2} \right|^\alpha$$

e

$$|u(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)|^\alpha = |v_{j-\frac{1}{2}}^n|^\alpha = \left| \frac{v_j^n + v_{j-1}^n}{2} \right|^\alpha$$

e, para o coeficiente com a derivada ( $u_x$ ),

$$|u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)|^\beta = |\mathbb{D}_0 v_{j+\frac{1}{2}}^n|^\beta = \left| \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{2 \cdot \frac{h}{2}} \right|^\beta = \left| \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} \right|^\beta$$

e

$$|u_x(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)|^\beta = |\mathbb{D}_0 v_{j-\frac{1}{2}}^n|^\beta = \left| \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{2 \cdot \frac{h}{2}} \right|^\beta = \left| \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} \right|^\beta.$$

Com isso, vamos aproximar o termo difusivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & (|u|^\alpha |u_x|^\beta u_x)_x \approx \\ & \approx \frac{|u(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)|^\alpha |u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)|^\beta u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n) - |u(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)|^\alpha |u_x(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)|^\beta u_x(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)}{h} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(|u|^\alpha |u_x|^\beta u_x\right)_x \approx \frac{\left|\frac{v_{j+1}^n + v_j^n}{2}\right|^\alpha \left|\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}\right|^\beta \frac{(v_{j+1}^n - v_j^n)}{h} - \left|\frac{v_j^n + v_{j-1}^n}{2}\right|^\alpha \left|\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h}\right|^\beta \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{h}}{h}.$$

Por fim, aproximamos o termo difusivo de proteção,  $\eta u_{xx}$ , por

$$\eta u_{xx} \approx \frac{\eta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)}{h^2}.$$

Montamos então o esquema completo (já com os *passos de tempo adequados*):

$$\begin{aligned} & \frac{v_j^n - v_j^{n-2}}{2k} + \frac{\mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1})v_{j-1}^{n-1}}{2h} = \\ & = \frac{\left|\frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2}\right|^\alpha \left|\frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h}\right|^\beta \frac{(v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1})}{h} - \left|\frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2}\right|^\alpha \left|\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h}\right|^\beta \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{h}}{h} + \\ & + \frac{\eta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)}{h^2}. \end{aligned}$$

Para ser implementado é necessário que os termos com o mesmo passo de tempo sejam agrupados. Para fazer isso, calculamos

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{2k} (v_j^n - v_j^{n-2}) + \frac{h}{2} \left( \mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1})v_{j-1}^{n-1} \right) = \\ & = \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_{j+1}^n - v_j^n) - \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_j^n - v_{j-1}^n) + \\ & + \eta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (v_j^n - v_j^{n-2}) + \frac{k}{h} \left( \mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1})v_{j-1}^{n-1} \right) = \\ & = \frac{2k}{h^2} \left( \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_{j+1}^n - v_j^n) - \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_j^n - v_{j-1}^n) \right) \\ & + \frac{2k}{h^2} \eta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Fazendo  $\lambda = \frac{2k}{h^2}$  e  $\lambda_1 = \frac{-k}{h}$ , ficamos com

$$(v_j^n - v_j^{n-2}) + \lambda_1 \left( \mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1})v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1})v_{j-1}^{n-1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_{j+1}^n - v_j^n) - \lambda \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta (v_j^n - v_{j-1}^n) \\
&\quad + \lambda \eta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

e, agrupando os termos com o mesmo nível de tempo, chegamos ao esquema a ser implementado, que é:

$$\begin{aligned}
&- \lambda \left( \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta + \eta \right) v_{j+1}^n \\
&+ \left[ 1 + \lambda \left( \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta + \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta + 2\eta \right) \right] v_j^n \\
&- \lambda \left( \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta + \eta \right) v_{j-1}^n = \\
&= \lambda_1 \left( \mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1}) v_{j+1}^{n-1} - \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1}) v_{j-1}^{n-1} \right) = \\
&+ v_j^{n-2}.
\end{aligned}$$

Note que temos a resolver um sistema do tipo  $A \vec{v} = \vec{w}$ , onde:

$$\vec{v} = v^n;$$

$$\vec{w} = \lambda_1 \mathbf{b}(x_{j+1}, t^{n-1}, v_{j+1}^{n-1}) v_{j+1}^{n-1} - \lambda_1 \mathbf{b}(x_{j-1}, t^{n-1}, v_{j-1}^{n-1}) v_{j-1}^{n-1} + v_j^{n-2};$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \lambda(A_s + A_i) & -\lambda(A_s) & & 0 \\ -\lambda(A_i) & 1 + \lambda(A_s + A_i) & -\lambda(A_s) & \\ & & \dots & \\ & & -\lambda(A_i) & 1 + \lambda(A_s + A_i) & -\lambda(A_s) \\ 0 & & & -\lambda(A_i) & 1 + \lambda(A_s + A_i) \end{bmatrix}$$

onde, por simplicidade de notação, escrevemos

$$A_s = \left( \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} + v_j^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{h} \right|^\beta + \eta \right) \quad \text{e} \quad A_i = \left( \left| \frac{v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{2} \right|^\alpha \left| \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h} \right|^\beta + \eta \right).$$

A solução do sistema é obtida ao fazermos

$$\vec{v} = A^{-1}\vec{w}.$$

A seguir, como exemplo de implementação de um método numérico no software Matlab, apresentamos a implementação do esquema numérico que desenhamos, implementamos vetorialmente, e utilizamos para gerar as figuras 1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7 e 3.1.

```
%% Inserção dos valores dos parâmetros alpha, beta, kappa e eta:
```

```
alpha = 1.00;
```

```
beta = 1.00;
```

```
kappa = 1.00;
```

```
eta = 0.01;
```

```
%% Inserção da função b(x):
```

```
b = inline('-sin(x)', 'x');
```

```
%% Definição do intervalo de tempo [t0, tF]:
```

```
t0 = 0;
```

```
tF = 5.00;
```

```
%% Definição da região espacial a ser usada, ao redor de x = 0:
```

```
x0 = -15.00;
```

```
xF = 15.00;
```

```
%% Definição do número N de pontos da malha de discretização espacial:
```

```
N = 1500;
```

```
cfl = 2; % (Condição CFL: inserir um valor não muito maior que 1.)
```

```
h = (xF-x0)/N;
```

```
dt = cfl*h*h;
```

```
%% Criação da malha de discretização espacial:
```

```
x = linspace(x0+h, xF, N);
```

```
format long
```

```
%% Determinação do perfil inicial  $u_0$ :
```

```
u0 = zeros(1,N);
```

```
I = find( x >= - 2*pi & x < - (3/2)*pi );
```

```
u0(I) = ((x(I).^2)+((7/2)*(pi)*x(I))+3*((pi).^2))/(pi).^2;
```

```
I = find( x >= - (3/2)*pi & x < - pi/2 );
```

```
u0(I) = -(x(I)+(pi/2)).^2+(pi).^2/(pi).^2;
```

```
I = find( x >= - pi/2 & x < pi/2 );
```

```
u0(I) = 1;
```

```
I = find( x >= pi/2 & x < (3/2)*pi );
```

```
u0(I) = -(x(I)-(pi/2)).^2+(pi).^2/(pi).^2;
```

```
I = find( x >= (3/2)*pi & x < 2*pi );
```

```
u0(I) = ((x(I).^2)-((7/2)*(pi)*x(I))+3*((pi).^2))/(pi).^2;
```

```
%% Determinação de grandezas necessárias:
```

```
u0_supnorm = max(abs(u0));
```

```
u0_mass = h*sum(u0(2:N-1))+h*(u0(1)+u0(N))/2;
```

```
u0_L1norm = h*sum(abs(u0(2:N-1)))+h*(abs(u0(1))+abs(u0(N)))/2;
```

```
max_iter_no = round( (tF-t0)/dt );
```

```
no_cycles = 5;
```

```
no_iterations_per_cycle = round( max_iter_no/no_cycles );
```

```
t = linspace(t0,tF,no_cycles*no_iterations_per_cycle + 1);
```

```
u_mass = zeros(1,no_cycles*no_iterations_per_cycle + 1);
```

```
u_L1norm = zeros(1,no_cycles*no_iterations_per_cycle + 1);
```

```
u_supnorm = zeros(1,no_cycles*no_iterations_per_cycle + 1);
```

```
u_mass(1) = u0_mass;
```

```
u_L1norm(1) = u0_L1norm;
```

```
u_supnorm(1) = u0_supnorm;
```

```
%% Construção da matriz A:
```

```
A = eye(N,N);
```

```
I_diagonal = find( A == 1 );
```

```
for j = 2:N
```

```

A(j-1,j) = 5;
A(j,j-1) = 3;
end
I_superdiag = find( A == 5 );
I_subdiag = find( A == 3 );
A = zeros(N,N);

disp('*****')
%% Início das computações:
U = zeros(no_cycles,N);
v1_alpha = zeros(N-1,1);
Dv1_beta = zeros(N-1,1);
Dv1 = zeros(N-1,1);
v1_1pkappa = zeros(N,1);
c0 = 2*cfl;
c1 = - dt/h;
bb = b(x)';
bb0 = b(x0);
bbNp1 = b(xF+h);
f = zeros(N,1);
count = 1;
v0 = u0';
v1 = u0';

for cycle = 1:no_cycles
tic
cycle
for iter = 1:no_iterations_per_cycle
v1_alpha = ( abs(v1(2:N) + v1(1:N-1))/2 ).^alpha;
Dv1 = ( v1(2:N) - v1(1:N-1) )/h;
Dv1_beta = abs(Dv1).^beta;
v1_1pkappa = abs(v1).^kappa .* v1;

A(I_diagonal) = 1 + c0*[v1_alpha(1)*Dv1_beta(1) + eta;...
v1_alpha(1:N-2).*Dv1_beta(1:N-2)+...
v1_alpha(2:N-1).*Dv1_beta(2:N-1)+2*eta;...
v1_alpha(N-1)*Dv1_beta(N-1) + eta];

```



```

A(I_superdiag) = - c0*(v1_alpha(1:N-1).*Dv1_beta(1:N-1) + eta);
A(I_subdiag)   = - c0*(v1_alpha(1:N-1).*Dv1_beta(1:N-1) + eta);

f(1) = v0(1) + c1*(bb(2)*v1_1pkappa(2) - bb0*v1_1pkappa(1));
f(2:N-1) = v0(2:N-1) + c1*( bb(3:N).*v1_1pkappa(3:N) - ...
    bb(1:N-2).*v1_1pkappa(1:N-2) );
f(N) = v0(N) + c1*(bbNp1*v1_1pkappa(N) - bb(N-1)*v1_1pkappa(N-1));

v = A \ f;

count = count+1;
u_mass(count) = h*sum(v(2:N-1)) + h*(v(1)+v(N))/2;
v0 = v1;
v1 = v;
end

U(cycle,:) = v1';
toc
end

Magnitude_u = max( u_supnorm )
Fator_de_crescimento_para_u = Magnitude_u/u0_supnorm
disp('*****')

%% Construção dos parâmetros para a plotagem dos gráficos:
y1 = max(U(1,:));
y2 = max(U(2,:));
y3 = max(U(3,:));
y4 = max(U(4,:));
y5 = max(U(5,:));

yy1 = min(U(1,:));
yy2 = min(U(2,:));
yy3 = min(U(3,:));
yy4 = min(U(4,:));
yy5 = min(U(5,:));

```

```

x_min = -10.000;
x_max = 10.000;
y_min = -0.10 + min([yy1,yy2,yy3,yy4,yy5,min(u0)]);
y_max = max([y1,y2,y3,y4,y5,max(u0)])*1.10;

%% Plotagem dos gráficos:

%% Plotagem do perfil inicial  $u_0$ :
figure(01)
hold off
plot([x_min x_max],[0 0],':k')
hold on
plot(x,u0,'-r')
xlabel('x')
ylabel('u(\cdot,0)')
title('Perfil inicial')
axis([x_min x_max y_min y_max])

%% Plotagem dos perfis de evolução em todos os ciclos:
figure(10)
hold off
plot(x,u0,'-b')
hold on
plot(x,U(1,:),'-r')
plot(x,U(2,:),'-g')
plot(x,U(3,:),'-r')
plot(x,U(4,:),'-g')
plot(x,U(5,:),'-k')
xlabel('x')
ylabel('u(\cdot,t)')
title('Perfis de evolução da solução')
legend('t = 0','t = 1s','t = 2s','t = 3s','t = 4s','t = 5s')
hold on
plot([x_min x_max],[0 0],':k')
plot(x,u0,'b')
plot(x,U(1,:),'-r')
plot(x,U(2,:),'-g')

```

```

plot(x,U(3,:),'-r')
plot(x,U(4,:),'-g')
plot(x,U(5,:),'-k')
axis([x_min x_max y_min y_max])
hold off

%% Plotagem do perfil de evolução no tempo  $t = 1s$  (como exemplo):
figure(11)
hold off
plot(x,u0,'-b')
hold on
plot(x,U(1,:),'-k')
xlabel('x')
ylabel('u(\cdot,t)')
title('Perfil de evolução da solução em t=1s')
hold on
plot([x_min x_max],[0 0],':k')
plot(x,u0,'b')
plot(x,U(1,:),'-k')
axis([x_min x_max y_min y_max])
hold off

%% Plotagem da norma do sup de  $u(\cdot, t)$ :
figure(20)
hold off
plot(x,u_L1norm,'-b')
hold on
xlabel('t')
ylabel('Norma L1 de u(\cdot,t)')
title('Norma L1 da solução')

%% Plotagem da massa da solução:
figure(30)
hold off
plot(x,u_mass,'-b')
hold on
xlabel('t')

```

```
ylabel('Massa de  $u(\cdot,t)$ ')
title('Massa da solução')

%% Plotagem da norma do sup da solução:
figure(40)
hold off
plot(x,u_supnorm,'-b')
hold on
xlabel('t')
ylabel('Norma do sup de  $u(\cdot,t)$ ')
title('Tamanho da norma do sup da solução')
```

# Referências Bibliográficas

- [1] Barrionuevo, J. A.; Oliveira, L. S.; Zingano, P.R. - *General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media*, Intern. J. Partial Diff. Equations (2014), 1-8.
- [2] Braz e Silva, P.; Melo, W. G.; Zingano, P. R. - *An asymptotic supnorm estimate for solutions of 1-D systems of convection-diffusion equations*, J. Diff. Eqs. 258 (2015), 2806-2822.
- [3] Braz e Silva, P.; Schütz, L.; Zingano, P. R. - *On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in  $\mathbb{R}^n$* , Nonl. Anal., 93 (2013), 90-96.
- [4] Brum, V. F. M. C. - *Estimativas para soluções fracas limitadas de uma classe geral de equações parabólicas degeneradas não conservativas*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2011).
- [5] Cazenave, T.; Haraux, A. - *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford University Press, Oxford (1998).
- [6] Chagas, J. Q.; Diehl, N. M. L.; Guidolin, P. L. - *Some properties of Steklov averages* (in portuguese), unpublished notes, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, (2015).
- [7] DiBenedetto, E. - *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlang, (1993).
- [8] DiBenedetto, E. - *Partial Differential Equations*, Birkhauser, (2000).
- [9] Diehl, N. M. L. - *Contribuições para a teoria de equações dos meios porosos com termos advectivos*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2015).
- [10] Escobedo, M.; Zuazua, E. - *Large time behavior for convection-diffusion equations in  $\mathbb{R}^n$* , J. Funct. Anal., 100 (1991).

- [11] Escobedo, M; Vazquez, J. L.; Zuazua, E. - *Asymptotic behavior and source-type solutions for a diffusion-convection equation*. Arch. Rat. Mech. Anal., 124 (1993), 43-65.
- [12] Evans, L. C. - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, (2010).
- [13] Fabris, L. - *Sobre a existência global e limitação uniforme de soluções da equação dos meios porosos com termos advectivos arbitrários*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2013).
- [14] Friedman, A. - *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969).
- [15] Guidolin, P. L. - *Contribuições para a teoria de equações do  $p$ -Laplaciano evolutivo com termos advectivos*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2015).
- [16] Kreiss, H. O.; Lorenz, J. - *Initial-Boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Academic Press, Boston, (1989).
- [17] Ladyzhenskaya, O. A.; Solonnikov, V. A.; Uralceva, N. N. - *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, (1968).
- [18] Melo, W. G. - *Estimativas a priori para sistemas de advecção-difusão*, Tese, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, (2011).
- [19] Oliveira, L. S. - *Dois resultados em análise clássica*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2013).
- [20] Porzio, M. M. - *On decay estimates*, J. Evol. Equations, 9, (2009), 561-591.
- [21] Schütz, L. - *Equações de Advecção-Difusão com Aplicações às Equações de Navier-Stokes*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2008).
- [22] Serre, D. - *Systems of Conservation Laws*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [23] Sod, G. - *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and Initial Boundary-Value Problems*, Cambridge University Press, São Paulo, (2009).

- [24] Stricwerda, J. C. - *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Siam, Philadelphia, (2004).
- [25] Urbano, J. M. - *Regularity for partial differential equations - from De Giorgi-Nash-Moser theory to intrinsic scaling*, CIM Bull, 12, (2002), 8-14.
- [26] Urbano, J. M. - *The Method of Intrinsic Scaling: A systematic approach to regularity for degenerate and singular PDEs*, Springer, (2008).
- [27] Vázquez, J. L. - *The porous medium equation: mathematical theory*, Clarendon Press, Oxford, (2007).
- [28] Wu, Z.; Zhao, J.; Yin, J.; Li, H. - *Nonlinear Diffusion Equations*, World Scientific, Singapore, (2001).