

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TRANSVERSAL COM TROCA DE  
CALOR EM BANCOS DE TUBOS**

**Jorge Rodolfo Silva ZabadaI**

**Dissertação para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia**

**Porto Alegre**

**1990**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TRANSVERSAL COM TROCA DE  
CALOR EM BANCOS DE TUBOS**

**Jorge Rodolfo Silva Zabadal**  
**Engenheiro Químico**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**Área de concentração: Fenômenos de Transporte**

**Aprovada por :**

**Prof. Dr. Vilson C. da S. Ferreira (Orientador)**

**Prof. Dr. Sérgio Viçosa Moller**

**Prof. Dr. Ademar Grohes**

**Coordenador do PROMEC :**

**Prof. Dr. Vilson C. da S. Ferreira**

**Porto Alegre, 29 de Agosto de 1990**

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Vilson Ferreira, pela colaboração e pelo estímulo durante o desenvolvimento do trabalho. Ao professor Sérgio Moller, pelos conselhos. A Jorge Villar Alé e Carlos Lange, pelo apoio.

# S U M A R I O

RESUMO .....	viii
ABSTRACT .....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES .....	x
1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - APRESENTAÇÃO .....	7
2.1 - Idéia básica .....	7
2.2 - Hipóteses simplificativas .....	9
3 - MODELO MATEMATICO .....	11
3.1 - Equações envolvidas .....	11
3.2 - Escolha do sistema de coordenadas .....	12
3.2.1 - Equações em coordenadas curvilíneas .....	14
3.2.2 - Condições de contorno .....	17
3.2.3 - Condição inicial .....	18
3.3 - Adimensionalização .....	19
3.4 - Inclusão dos termos relativos à turbulência ..	22
3.5 - Acoplamento das condições de contorno .....	25

4 - MÉTODO NUMÉRICO .....	27
4.1 - Notação .....	27
4.2 - Equações discretizadas .....	29
4.3 - Roteiro de cálculo .....	34
4.3.1 - Cálculo da distribuição de velocidades .....	37
4.3.1.1 - Cálculo da componente $\bar{u}$ .....	37
4.3.1.2 - Obtenção de $\bar{v}$ .....	38
4.3.1.3 - Cálculo de $\bar{p}$ .....	40
4.3.2 - Cálculo da distribuição de temperaturas .....	41
4.3.3 - Passagem dos valores para o tubo a jusante .....	41
4.4 - Características operacionais do programa .....	43
5 - RESULTADOS .....	45
5.1 - Resultados para baixos números de Reynolds ...	49
5.2 - Resultados para números de Reynolds moderados	50
5.3 - Resultados para números de Reynolds altos .....	54
6 - CONCLUSÕES .....	56
7 - RECOMENDAÇÕES .....	58
REFERÊNCIAS .....	62
APÊNDICES	
APÊNDICE A - DISSIPACÃO VISCOSA .....	66
APÊNDICE B - OPERADORES EM COORDENADAS GERAIS .....	70
APÊNDICE C - INVERSÃO DA TRANSFORMAÇÃO .....	74
APÊNDICE D - DISTRIBUIÇÕES INICIAIS DE VELOCIDADE E PRESSÃO .....	76

APÊNDICE E - ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES .....	78
E.1 - EQUAÇÃO ADIMENSIONAL DA CONTINUIDADE ...	78
E.2 - EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE QUANTIDADE DE	
MOVIMENTO .....	79
E.3 - EQUAÇÃO ADIMENSIONAL DA ENERGIA .....	80
APÊNDICE F - INCLUSÃO DAS PARCELAS FLUTUANTES .....	82
F.1 - TERMOS DAS EQUAÇÕES DE QUANTIDADE DE	
MOVIMENTO .....	82
F.2 - TERMOS DA EQUAÇÃO DA ENERGIA .....	86
F.2.1 - DISSIPACÃO VISCOSA .....	87
F.2.2 - DERIVADA CONVECTIVA .....	88
APÊNDICE G - MODELO DE TURBULÊNCIA .....	90
G.1 - COMPONENTES $u'$ E $v'$ .....	90
G.2 - PRODUTOS DE COMPONENTES FLUTUANTES .....	91
G.3 - CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE MISTURA .....	95
G.4 - CRITÉRIO DE TRANSIÇÃO .....	96
APÊNDICE H - INFORMAÇÕES SOBRE O MÉTODO NUMÉRICO .....	97
H.1 - TESTES DE CONVERGÊNCIA .....	97
H.1.1 - TESTE PARA $u$ .....	97
H.1.2 - TESTE PARA $T$ .....	97
H.2 - ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MÉTODO .....	98
H.2.1 - EQUAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM $x_1$	
.....	98
H.2.2 - EQUAÇÃO DA ENERGIA .....	109
H.3 - DADOS SOBRE A MALHA .....	117
H.4 - FORMA DISCRETIZADA DAS DERIVADAS .....	118
H.4.1 - DERIVADAS EM RELAÇÃO A $x_1$ .....	118

H.4.2	-	DERIVADAS EM RELAÇÃO A $y_1$	.....	120
H.4.3	-	DERIVADAS EM RELAÇÃO A $t$	.....	121
H.4.4	-	DERIVADA MISTA	.....	122
APÊNDICE I	-	RESULTADOS OBTIDOS	.....	123

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TRANSVERSAL COM TROCA DE CALOR EM BANCOS DE TUBOS

## RESUMO

A obtenção das características do escoamento transversal sobre bancos de tubos é feita através do cálculo das distribuições de velocidade e temperatura sobre tubos individuais com condições de contorno adaptadas de modo que tubos vizinhos compartilhem condições em suas fronteiras de entrada e saída. O modelo matemático é composto pelas equações de quantidade de movimento (em duas direções), da continuidade e da energia em coordenadas curvilíneas ortogonais. O esquema numérico empregado é o de diferenças finitas, com um algoritmo de resolução do tipo dependente do tempo (TDT). O método numérico apresentado é aplicável a escoamentos estacionários, bidimensionais, incompressíveis, laminares e turbulentos com troca térmica em regime de convecção forçada. Para o presente estágio de desenvolvimento do trabalho, os resultados obtidos são considerados satisfatórios para bancos de tubos com arranjo em linha e triangular para números de Reynolds até  $4 \cdot 10^5$  e  $1 \cdot 10^6$  respectivamente.

NUMERICAL SIMULATION OF CROSSFLOW WITH HEAT TRANSFER  
IN TUBE BANKS

ABSTRACT

Crossflow in banks of tubes is solved by evaluating the velocity and temperature distributions around cylinders with coupled boundary conditions, in such way that subsequent cylinders shares entrance and exit conditions . The mathematical formulation of this problem contains momentum, continuity and energy equations in orthogonal curvilinear coordinates. The numerical method employed is finite-difference based on the Time Dependent Technique (TDT). The numerical method is applicable to steady, bidimensional, incompressible, laminar and turbulent flows with forced convection. The results of this simulation showed good agreement comparing with experimental data, for Reynolds numbers up to  $4 \cdot 10^5$  for banks whith tubes in line, and up to  $1 \cdot 10^6$  for staggered banks.

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações

cos - cosseno

Cf - coeficiente de arrasto por fricção

Cp - calor específico a pressão constante (J/Kg<sup>o</sup>K)

D - diâmetro externo do tubo (m)

ds - elemento infinitesimal de arco

dx - infinitésimo medido na direção x

dx<sub>1</sub> - incremento da variável x<sub>1</sub>

dy - infinitésimo medido na direção y

dya - incremento variável ascendente

dyb - incremento variável descendente

dyp - produto entre os incrementos dya e dyb

dys - soma dos incrementos dya e dyp

dy<sub>1</sub> - infinitésimo medido na direção y<sub>1</sub>

e - taxa de deformação do volume de controle infinitesimal

Ec - número de Eckert

h<sub>1</sub> - primeiro coeficiente métrico

h<sub>2</sub> - segundo coeficiente métrico

h<sub>1x</sub> - derivada do primeiro coeficiente métrico em relação a x<sub>1</sub>

h<sub>1y</sub> - derivada do primeiro coeficiente métrico em relação a y<sub>1</sub>

h<sub>2x</sub> - derivada do segundo coeficiente métrico em relação a x<sub>1</sub>

h<sub>2y</sub> - derivada do segundo coeficiente métrico em relação a y<sub>1</sub>

i - índice da linha da malha, e unidade imaginária

Im - parte imaginária de um número complexo

j - índice da coluna da malha

k - condutividade térmica (W/m<sup>o</sup>K)

$k_t$  - condutividade térmica turbulenta  
 $\lambda$  - quociente entre os comprimentos de mistura  $l_1$  e  $l_2$   
 $l$  - comprimento de mistura  
 $l_1$  - comprimento de mistura na direção  $x_1$   
 $l_2$  - comprimento de mistura na direção  $y_1$   
 $p$  - pressão  
 $Pr$  - número de Prandtl  
 $Pr_t$  - número de Prandtl turbulento  
 $r$  - coordenada polar (radial)  
 $Re$  - número de Reynolds, e parte real de um número complexo  
 $sen$  - seno  
 $sgn$  - função sinal  
 $Sl$  - passo longitudinal do banco de tubos  
 $St$  - passo transversal do banco de tubos  
 $t$  - tempo (s)  
 $T$  - temperatura ( $^{\circ}K$ )  
 $T_s$  - temperatura da superfície do tubo ( $^{\circ}K$ )  
 $T_{\infty}$  - temperatura do fluido longe da superfície do tubo ( $^{\circ}K$ )  
 $u$  - componente do vetor velocidade na direção  $x_1$   
 $U_{\infty}$  - velocidade da corrente livre (m/s)  
 $v$  - componente do vetor velocidade na direção  $y_1$   
 $w$  - número complexo transformado  
 $x$  - coordenada cartesiana horizontal  
 $x_1$  - coordenada curvilínea tangencial  
 $y$  - coordenada cartesiana vertical  
 $y_1$  - coordenada curvilínea transversal  
 $z$  - número complexo original

## CARACTERES GREGOS

- $\alpha$  - autovalor empregado em análise de estabilidade
- $\beta$  - autovalor empregado em análise de estabilidade
- $\partial$  - derivada parcial de primeira ordem
- $\partial^2$  - derivada parcial de segunda ordem
- $\Delta t$  - incremento de tempo
- $\Delta x$  - incremento da coordenada x
- $\Delta y$  - incremento da coordenada y
- $\nabla$  - Gradiente
- $\nabla \cdot$  - Divergente
- $\nabla^2$  - Laplaciano
- $\theta$  - ângulo medido a partir do ponto de ataque, em um tubo
- $\lambda$  - segundo coeficiente de viscosidade
- $\mu$  - viscosidade dinâmica (Kg/m s)
- $\mu_t$  - viscosidade aparente ou turbulenta
- $\nu$  - viscosidade cinemática (m<sup>2</sup>/s)
- $\xi$  - parâmetro empregado em análise de estabilidade
- $\pi$  - constante = 3,14159265
- $\Phi$  - dissipação viscosa
- $\kappa$  - constante = 0,4
- $\psi$  - função corrente

## ÍNDICES

- \* - símbolo indicativo de grandeza adimensional
- - símbolo indicativo de média temporal
- ' - símbolo indicativo de grandeza flutuante

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de trocadores de calor é normalmente efetuado através do uso de correlações entre características de performance e dimensões do equipamento, as quais baseiam-se em dados empíricos ou experimentais muitas vezes disponíveis apenas a um restrito número de pessoas ligadas aos fabricantes e projetistas.

A pesquisa de métodos alternativos mais genéricos para o projeto e a otimização desses equipamentos é de grande interesse do ponto de vista científico. Métodos de projeto assim desenvolvidos podem proporcionar a redução do emprego de materiais nobres, minimizando o custo de fabricação, e uma maior confiabilidade nas características de operação, o que é bastante desejável sobretudo quando o equipamento é utilizado em processos industriais com automação.

Com o desenvolvimento de novas técnicas de simulação numérica para a solução de modelos matemáticos de grande complexidade, e com o surgimento de computadores de grande capacidade, torna-se possível projetar equipamentos industriais a partir de fundamentos essencialmente teóricos, reduzindo-se a necessidade de dados empíricos e experimentais.

O presente trabalho tem como meta a simulação do escoamento transversal com troca térmica através de bancos de tubos com arranjo em linha e triangular, a partir de um modelo matemático composto pelas equações de transporte que governam o problema. Este trabalho faz parte de um estudo mais amplo que visa avaliar o desempenho de trocadores de calor.

O modelo matemático descreve inicialmente o escoamento bidimensional incompressível sobre um tubo isolado, em regime laminar. Adaptações posteriores efetuadas sobre o modelo estendem sua aplicação ao escoamento turbulento sobre bancos de tubos de arranjo triangular e em linha, para quaisquer números de fileiras transversais e longitudinais ao fluxo. As equações governantes resolvidas nesse modelo são a da conservação da massa, as equações da quantidade de movimento e a equação da energia, escritas em coordenadas curvilíneas generalizadas. O sistema de coordenadas é determinado independentemente do equacionamento do problema por meio de funções de variável complexa que efetuam uma transformação na geometria do problema, de modo a simplificar a determinação das condições de contorno e a varredura da região de interesse. Essa técnica é comumente denominada "Transformação Conforme"<sup>1</sup> ou "Mapeamento conforme", e foi utilizada pela primeira vez em problemas de mecânica de fluidos por Nikolai E. Zhukowski, na obtenção de soluções analíticas para escoamentos potenciais em perfis aerodinâmicos<sup>2</sup>. Transformações conformes são empregadas atualmente para a obtenção de distribuições de velocidades e cálculo da função corrente para problemas de escoamento sobre corpos de diversas geometrias<sup>3</sup>, mas seu uso é restrito a escoamentos potenciais. No presente trabalho, contudo, esta técnica é utilizada apenas para obter o sistema de coordenadas do problema e para gerar a malha empregada no método numérico. Não é, portanto, utilizada diretamente para obter a solução do problema. Por esta razão, o emprego da técnica de transformação

conforme não restringe a aplicação do modelo matemático a escoamentos potenciais.

A principal característica do trabalho proposto reside na natureza teórica do modelo elaborado e na sua flexibilidade. O modelo matemático utilizado contém poucas equações empíricas e semi-empíricas. Além disto, como o equacionamento do problema foi formulado em coordenadas curvilíneas generalizadas, torna-se possível criar o sistema de coordenadas ortogonal no qual se deseja trabalhar, desde que se conheça previamente as equações que descrevem a transformação de coordenadas desejada. Este recurso torna o modelo flexível quanto às possibilidades de aplicação, uma vez que é possível, a princípio, utilizá-lo para simular escoamentos com troca térmica sobre corpos de qualquer geometria. Problemas envolvendo escoamento em torno de pás de turbomáquinas, aerofólios, cilindros elípticos e diversos outros corpos, podem ser solucionados desde que seja determinada a função complexa capaz de gerar o respectivo sistema de coordenadas. Muitas funções complexas de grande interesse prático se encontram tabeladas em literatura especializada<sup>4,5</sup>, e podem ser obtidas também através de métodos numéricos<sup>6,7</sup>.

A preocupação em construir um modelo flexível e relativamente independente de dados empíricos visa facilitar a implementação de futuras melhorias no modelo através da eliminação gradual das hipóteses simplificativas existentes, e possibilitar a ampliação de seu universo de aplicações. Algumas dessas melhorias já estão sendo planejadas para tornar mais

acessível a implementação de novos blocos ao programa. Os resultados dos estudos feitos nesse sentido até o presente momento são discutidos mais adiante neste trabalho, sendo apresentados na forma de recomendações. Dentre as modificações possíveis, comentadas na seção de recomendações, algumas foram parcialmente implementadas no programa.

O método utilizado para resolver o sistema de equações governantes, e assim obter a solução numérica do problema, é do tipo "Técnica Dependente do Tempo" (TDT), que consiste em empregar uma formulação transiente para o fenômeno estacionário em estudo, e buscar sua solução em regime permanente através de um esquema iterativo no qual a variável tempo é incrementada. Essa técnica tem sido aplicada com sucesso em escoamentos compressíveis no interior de dutos, trabalho realizado por J. Torres<sup>8</sup>, bem como em problemas mais complexos como escoamentos entre pás de turbomáquinas. Nessa linha de pesquisa o algoritmo TDT é utilizado com frequência. Na formulação tridimensional de Bosman e Higton<sup>9</sup>, aplicável a escoamentos compressíveis subsônicos não-viscosos entre pás de qualquer geometria, são resolvidas as equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia em coordenadas cartesianas, utilizando integração numérica sobre superfícies de controle finitas. O trabalho de Holmes e Tong<sup>10</sup>, para a simulação do escoamento tridimensional viscoso em turbomáquinas, emprega o algoritmo formulado por Jameson<sup>11</sup>, o qual consiste em aplicar o método de Runge-Kutta na variável tempo, e uma formulação integral, em volumes finitos, nas

variáveis espaciais. No trabalho de Delaney<sup>12</sup>, a equação de Euler é resolvida por diferenças finitas através de um esquema híbrido entre os métodos implícito e explícito, uma formulação TDT denominada método Hopscotch. Delaney empregou esse método na simulação de escoamentos bidimensionais transônicos em turbomáquinas.

Em todos os trabalhos mencionados, a concordância com dados experimentais e resultados obtidos por meio de outros métodos numéricos foi bastante satisfatória.

No presente trabalho, os resultados numéricos obtidos foram comparados com dados experimentais de Zukauskas<sup>13</sup>, Meel e Giedt (extraídos de Zukauskas<sup>13</sup>), com a solução numérica de Karniadakis<sup>14</sup> e valores experimentais de Schmidt e Wenner (extraídos de Karniadakis<sup>14</sup>) para tubos isolados, quanto aos valores do número de Nusselt local ( $Nu_x\theta$ ) para números de Reynolds baixos ( $Re < 200$ ), moderados ( $200 < Re < 1.10^5$ ) e altos ( $Re > 1.10^5$ ). O coeficiente de arrasto local para tubos isolados ( $Cf_x\theta$ ) obtido através do método numérico foi também comparado aos resultados fornecidos pelo método numérico de Dhaubadel, Reddy e Tellionis<sup>15</sup> para baixos Reynolds, e frente a dados experimentais de Fage e Folkner (extraídos de Zukauskas) e Zukauskas<sup>13</sup>, para Reynolds moderados e altos. O número de Nusselt médio para tubos, calculado pelo mesmo método numérico, foi testado frente aos resultados numéricos de Karniadakis<sup>14</sup> para baixos números de Reynolds, e aos dados experimentais de Meel e Giedt (extraídos de Zukauskas), para Reynolds moderados e altos. Médias globais para números de

Nusselt através de bancos de tubos foram postas frente aos dados experimentais de Zukauskas<sup>18</sup>, Yanez Moreno e Sparrow<sup>16</sup>.

## 2 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo são apresentados os princípios do algoritmo empregado para obter a solução do problema proposto. São expostas as aproximações e adaptações feitas sem haver preocupação com o equacionamento. Informações a respeito do modelo matemático serão fornecidas posteriormente.

### 2.1 IDEIA BÁSICA

O trabalho elaborado tem como objetivo obter os coeficientes locais e médios de troca térmica e arrasto em bancos de tubos com arranjo triangular e em linha, a partir do cálculo das distribuições de velocidade e temperatura sobre um único tubo.

Para calcular as distribuições de velocidade e temperatura no escoamento em um banco de tubos, é feita inicialmente a simulação do escoamento em torno de um único tubo. As distribuições obtidas a jusante do tubo são usadas como condições a montante para o tubo seguinte, a fim de levar em consideração as perturbações provocadas pelo primeiro tubo nas componentes normal e tangencial da velocidade sobre o segundo tubo. A situação é representada esquematicamente na figura 1. O tratamento é idêntico para cada tubo subsequente, havendo uma pequena adaptação em caso de bancos de tubos com arranjo triangular, como mostra a figura 2 .

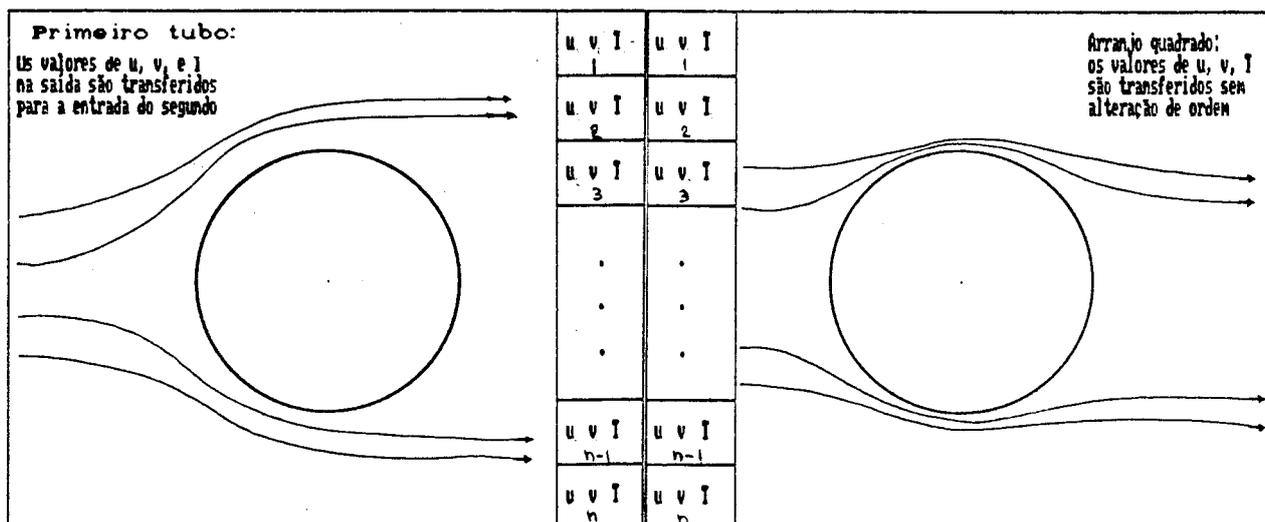


Figura 1 - Acoplamento entre tubos para arranjo em linha.

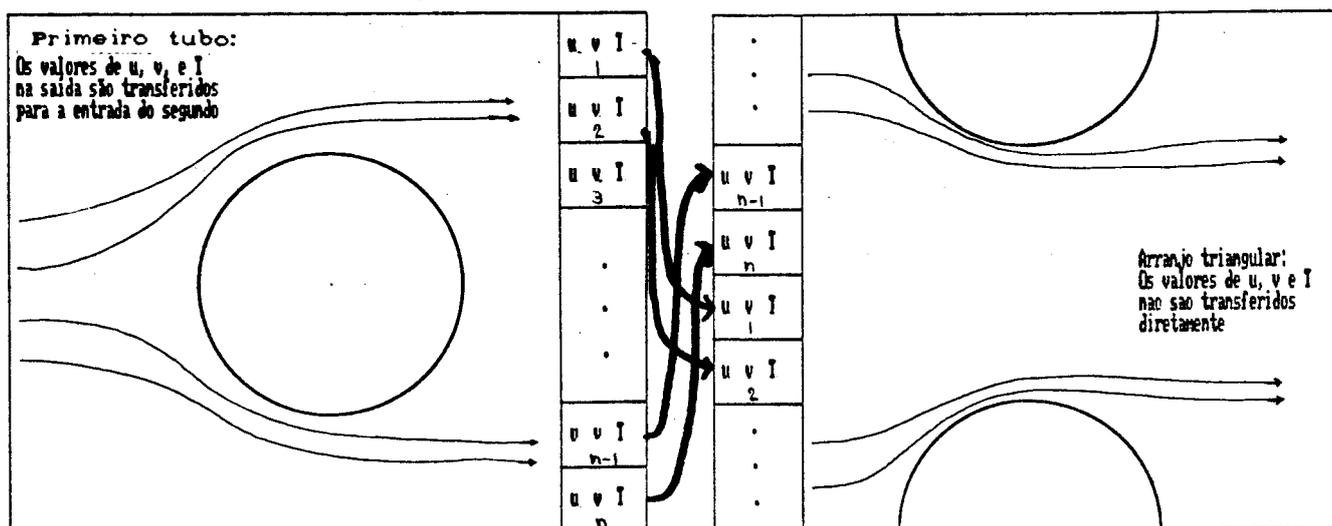


Figura 2 - Acoplamento entre tubos para arranjo triangular.

Assim, o modelo matemático que descreve o fluxo sobre um tubo isolado é adaptado para resolver o mesmo problema em uma fileira de tubos, uma vez que, para obter a solução do escoamento sobre uma fileira, basta realimentar o sistema com

suas condições de saída tantas vezes quantos forem os tubos no sentido longitudinal ao fluxo. Obtida a solução para a fileira de tubos, pode-se estendê-la para todo o banco, simplesmente assumindo que as condições de escoamento são iguais em todas as demais fileiras.

Além desta consideração, outras hipóteses simplificativas são envolvidas na elaboração do modelo matemático e do método numérico. Tais hipóteses são apresentadas a seguir.

## 2.2 HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

A aplicação do modelo matemático e do método numérico elaborados no presente trabalho está restrita às seguintes condições:

- problema bidimensional;
- regime estacionário;
- escoamento incompressível;
- propriedades físicas constantes (tomadas na temperatura média entre a parede dos dutos e o fluido);
- forças de campo desprezíveis;
- troca térmica em regime de convecção forçada;
- fluxo sem mudança de fase.
- efeitos da rugosidade dos dutos não considerados;
- ângulo nulo entre a direção principal de propagação da corrente livre e as fileiras longitudinais do banco;

As limitações aqui citadas são válidas para a versão atual do trabalho. Novos estudos estão sendo feitos com vistas a maior generalização do problema, com a eliminação de algumas dessas restrições. No capítulo 7 são discutidas algumas delas.

### 3 MODELO MATEMATICO

#### 3.1 EQUAÇÕES ENVOLVIDAS

O escoamento em torno de um corpo totalmente imerso, sujeito às condições restritivas apresentadas na seção 2.2, é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

Continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad [1]$$

Quantidade de movimento

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{V} = 0 \quad [2]$$

Energia:

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] - k \nabla^2 T - \mu \Phi = 0 \quad [3]$$

Nessas equações,  $\mathbf{V}$  é o vetor velocidade,  $\rho$  é a massa específica do fluido que escoar,  $\mu$  é sua viscosidade,  $k$  é sua condutividade térmica,  $C_p$  é seu calor específico a pressão constante, e  $\Phi$  é a dissipação viscosa<sup>17</sup>, termo que será desenvolvido no apêndice A. A equação vetorial [2] representa duas equações escalares, correspondentes às duas componentes  $u$  e  $v$  do vetor velocidade. As direções segundo as quais estão orientadas essas componentes escalares serão definidas adiante, na escolha do sistema de coordenadas.

O método numérico utilizado na simulação do escoamento através de um banco de tubos é elaborado a partir do modelo apresentado, após as seguintes etapas de adaptação:

- escolha de um sistema de coordenadas para tratar o escoamento transversal sobre um único tubo;
  - adimensionalização das equações;
  - inclusão de um modelo de turbulência para ampliar a aplicação do método quanto ao regime de escoamento;
  - acoplamento das condições de entrada e saída entre tubos vizinhos, para simular o fluxo através de uma fileira de tubos;
- Todas as etapas de adaptação mencionadas são descritas a seguir.

### 3.2 ESCOLHA DO SISTEMA DE COORDENADAS.

É conveniente utilizar coordenadas que se adaptem à forma do cilindro imerso. Esse procedimento simplifica as condições de contorno do problema, e possibilita tomar pontos apropriados para avaliar as grandezas desconhecidas. Aparentemente o sistema de coordenadas cilíndricas seria mais adequado para o tratamento do fenômeno, mas o exame das condições de contorno resultantes revela uma dificuldade; a condição de contorno  $u = U_\infty$ , longe do contorno do corpo, seria convertida em condições mais complexas nas componentes  $v_r$  e  $v_\theta$ , uma vez que o fluxo naquela região tem a orientação do eixo horizontal. Em vista disso, é desejável adotar um sistema que acompanhe a geometria do cilindro nas suas proximidades, porém conservando a condição  $u = U_\infty$  a grandes distâncias. Um arranjo de pontos que atende simultaneamente a ambas as exigências citadas é obtido através da seguinte transformação:

$$x_1 = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad [4]$$

$$y_1 = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad [5]$$

na qual a nova coordenada  $y_1$  segue as linhas de fluxo do escoamento potencial em torno do cilindro, e  $x_1$  suas linhas de potencial velocidade. A figura 3 mostra as linhas  $x_1 = \text{cte}$  e  $y_1 = \text{cte}$  nos sistemas de coordenadas  $x$ - $y$  e  $x_1$ - $y_1$ .

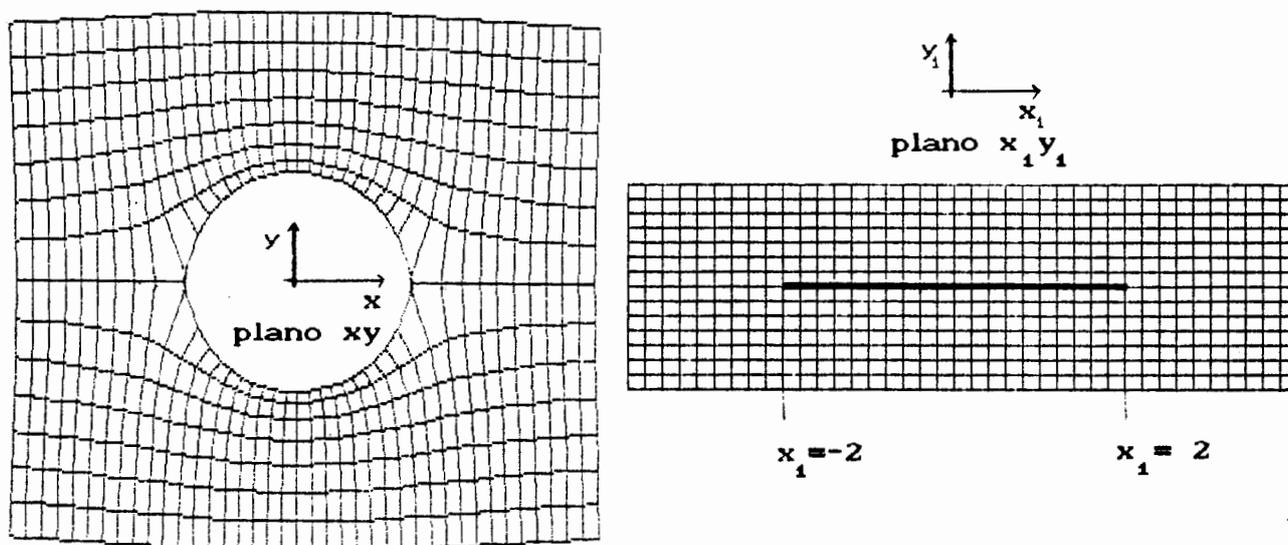


figura 3 - representação das novas coordenadas  $x_1$  e  $y_1$

A reta traçada entre os pontos  $(-2,0)$  e  $(2,0)$  no plano  $x_1$ - $y_1$  é transformada no círculo contido no plano  $x$ - $y$ , através da mudança de coordenadas; por essa razão, foi representada em destaque. Essa observação será muito útil para a compreensão das condições de contorno do problema, que serão estabelecidas posteriormente.

Convém esclarecer que a figura 3 não representa rigorosamente a malha utilizada no programa. Na construção da

malha, as linhas de  $y_1$  constante não são igualmente espaçadas; a distância entre as linhas varia em progressão geométrica, para que exista uma maior concentração de pontos na região da camada limite. O apêndice H contém informações sobre as características da malha.

Escolhido o novo sistema de coordenadas, devem ser obtidas expressões algébricas para as equações diferenciais do problema nas variáveis  $x_1$  e  $y_1$ .

### 3.2.1 EQUAÇÕES EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

As equações diferenciais mostradas na seção 3.1 se encontram na forma vetorial. Uma maneira mais prática de escrever tais equações consiste em convertê-las para a forma algébrica empregando os coeficientes métricos<sup>17</sup>  $h_1$  e  $h_2$ , definidos pelas expressões

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2} \quad [6]$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2} \quad [7]$$

Utilizando essa notação, as equações [1], [2] e [3] passam a ser escritas da seguinte maneira:

continuidade

$$u \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad [8]$$

quantidade de movimento em  $x_1$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right] - \frac{1}{h_1} \rho \frac{\partial p}{\partial x_1} +$$

$$\mu (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [9]$$

quantidade de movimento em  $y_1$

$$\rho \left[ \frac{u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y_1} \right] - \frac{1}{h_2} \rho \frac{\partial p}{\partial y_1} +$$

$$\mu (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [10]$$

energia

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} \right] -$$

$$k (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \right] -$$

$$4\mu \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} u \frac{\partial u}{\partial y_1} + \left( \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] = 0 \quad [11]$$

onde os termos  $H_1$  e  $H_2$  são dados por

$$H_1 = \frac{h_2 h_{1x} - h_1 h_{2x}}{h_1^2} \quad [12]$$

$$H_2 = \frac{h_1 h_{2y} - h_2 h_{1y}}{h_2^2} \quad [13]$$

onde  $h_{1x}$ ,  $h_{1y}$ ,  $h_{2x}$  e  $h_{2y}$  são dados pelas seguintes expressões:

$$h_{1x} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \quad [14]$$

$$h_{2x} = \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \quad [15]$$

$$h_{1y} = \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad [16]$$

$$h_{2y} = \frac{\partial h_2}{\partial y_1} \quad [17]$$

O último termo da equação da energia é a dissipação viscosa, cuja expressão em coordenadas curvilíneas é deduzida no apêndice A. O apêndice B contém as expressões algébricas dos operadores diferenciais utilizados, a partir dos quais foram obtidas as equações.

As equações expressas dessa forma não perdem a generalidade. Podem ser aplicadas a quaisquer sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, desde que se conheça a relação entre as coordenadas cartesianas  $(x,y)$  e as coordenadas genéricas  $(x_1,y_1)$ . No problema proposto, as variáveis  $x_1$  e  $y_1$  estão escritas em função de  $x$  e  $y$  (equações 5 e 6), de modo que é preciso inverter a transformação. As relações assim obtidas resultam

$$x = \frac{1}{2} x_1 + 2x_1 y_1 \pm \left[ \sqrt{-x_1^2 - y_1^2 + 4} \pm \sqrt{(x_1^2 - y_1^2 - 4)^2 + (2x_1 y_1)^2} \right]^{-1} \quad [18]$$

$$y = y_1 \pm \left[ \sqrt{-x_1^2 - y_1^2 + 4} \pm \sqrt{(x_1^2 - y_1^2 - 4)^2 + (2x_1 y_1)^2} \right]^{-1} \quad [19]$$

A inversão da transformação é deduzida no apêndice C .

Ao examinar com cuidado o modelo matemático, representado pelas equações 8, 9, 10 e 11, percebe-se que existem termos transientes nas equações de quantidade de movimento em  $x_1$  e energia, não se encontrando parcelas equivalentes nas demais equações. Esse arranjo se deve à natureza do método numérico empregado, e será explicado na seção 4.3, referente ao roteiro de cálculo.

### 3.2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são semelhantes às de um problema análogo em coordenadas cartesianas.

Longe do tubo:

$$T(x_1, \infty) = T_\infty \quad [20]$$

$$T(\infty, y_1) = T_\infty \quad [21]$$

$$u(x_1, \infty) = U_\infty \quad [22]$$

$$u(\infty, y_1) = U_\infty \quad [23]$$

$$v(x_1, \infty) = 0 \quad [24]$$

$$v(\infty, y_1) = 0 \quad [25]$$

Na superfície do tubo:

$$T = T_s \quad \text{em } y_1 = 0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad [26]$$

$$u = 0 \quad \text{em } y_1 = 0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad [27]$$

$$v = 0 \quad \text{em } y_1 = 0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad [28]$$

A restrição  $-2 < x_1 < 2$  nas condições referentes à parede se deve ao fato de que a superfície de um cilindro de raio unitário se transforma, através da mudança de coordenadas

citada, em uma placa plana de comprimento igual a 4 centrada na origem do plano  $x_1 - y_1$ . Essa transformação é mostrada na figura 3. Maiores informações sobre a mudança de coordenadas podem ser obtidas em Churchill<sup>1</sup> e Kober<sup>4</sup>.

### 3.2.3 CONDIÇÃO INICIAL

Foi mencionado que o problema é tratado como transiente a fim de que se possa empregar um algoritmo do tipo TDT para a sua resolução. Assim, o problema exige também distribuições iniciais de velocidades e pressões. Em princípio, tais distribuições podem ser completamente arbitrárias, uma vez que só interessa a solução estacionária do problema, obtida após algumas iterações. Apesar disto, é vantajoso estipular condições iniciais relativamente próximas do escoamento real, a fim de que a convergência do método seja rápida. As condições iniciais consistem em se estabelecer que a distribuição de velocidades e pressões sejam potenciais para o tempo  $t=0$ . O apêndice D apresenta a dedução das distribuições potenciais utilizadas.

No parágrafo anterior nada foi dito quanto às distribuições iniciais de  $v$  e  $T$ . No que diz respeito à componente  $v$  da velocidade, a justificativa é bastante simples. No escoamento potencial em torno de um tubo, as linhas de corrente representam as curvas onde  $y_1 = \text{cte}$ , no plano  $x-y$  mostrado na figura 3. Essas linhas têm a mesma direção da componente  $u$  do vetor velocidade, e portanto, o módulo da velocidade coincide com o módulo da própria componente  $u$ , para

o escoamento potencial. Conseqüentemente,  $v=0$  em todos os pontos da malha no tempo zero. Quanto à temperatura, a razão pela qual não se faz necessário estabelecer uma distribuição inicial é a de que as temperaturas só serão calculadas, através da equação da energia, após a determinação dos valores de  $u$  e  $v$  em todos os nós da malha. Assim, a equação da energia possuirá alguns termos não nulos já na primeira iteração do esquema TDT, não sendo preciso estipular uma distribuição inicial não nula de temperaturas para evitar que o esquema iterativo conduza a uma solução trivial. Esses termos são a derivada convectiva, cujo valor é não nulo nas proximidades da parede do tubo, devido à condição de contorno  $T=T_s$ , e ainda o termo de dissipação viscosa, caso o escoamento se processe a altas velocidades. Ambos os termos contém as componentes  $u$  e  $v$ , como será verificado em seções posteriores. Em resumo, não é necessário e nem ao menos vantajoso estabelecer uma distribuição inicial para a temperatura.

### 3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para simplificar a interpretação dos resultados numéricos obtidos, e para facilitar a comparação destes com os dados experimentais disponíveis, é conveniente empregar variáveis intensivas na formulação matemática do problema. A fim de adimensionalizar as equações do modelo, as variáveis presentes são redefinidas segundo as relações a seguir:

$$u^* = u/U_\infty \quad [29]$$

$$v^* = v/U_\infty \quad [30]$$

$$T^* = (T - T_\infty)/(T_s - T_\infty) \quad \text{para } T_s > T_\infty \quad [31]$$

$$= (T - T_s)/(T_\infty - T_s) \quad \text{para } T_s < T_\infty \quad [32]$$

$$p^* = p/\rho U_\infty^2 \quad [33]$$

$$x_1^* = x_1/D \quad [34]$$

$$y_1^* = y_1/D \quad [35]$$

$$t^* = tU_\infty/D \quad [36]$$

onde  $U_\infty$  é a velocidade da corrente livre,  $T_s$  é a temperatura da superfície do tubo,  $T_\infty$  é a temperatura da corrente livre e  $D$  é o diâmetro externo do tubo. Os dados correspondentes à corrente livre referem-se às condições do escoamento na entrada do primeiro tubo do banco.

Após a introdução desses novos termos, todas variáveis presentes nas equações diferenciais resultantes conterão o símbolo  $*$ . Para simplificar a notação, esse símbolo será omitido a partir de agora (ver apêndice E). Obtem-se, dessa forma, o novo sistema adimensionalizado :

continuidade

$$u \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad [37]$$

quantidade de movimento em  $x_1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} -$$

$$(h_1 h_2 \text{Re})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [38]$$

quantidade de movimento em  $y_1$

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial y_1} -$$

$$(h_1 h_2 \text{Re})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [39]$$

energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} - (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \right]$$

$$- \frac{8\text{Ec}}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} u \frac{\partial u}{\partial y_1} + \left( \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] = 0 \quad [40]$$

Nas novas equações,  $\text{Re}$  é o número de Reynolds baseado no diâmetro do tubo, definido como  $U_\infty D / \nu$ ,  $\text{Pr}$  é o número de Prandtl, dado por  $\nu / \alpha$ , e  $\text{Ec}$  é o número de Eckert, cuja expressão é  $U_\infty^2 / 2C_p(T_s - T_\infty)$ .

Além das equações diferenciais, também as condições de contorno são adimensionalizadas. Suas expressões são mostradas a seguir.

Longe do tubo:

$$T(x_1, \infty) = 1 \quad \text{para } T_s < T_\infty \quad [41]$$

$$T(x_1, \infty) = 0 \quad \text{para } T_s > T_\infty \quad [42]$$

$$T(\infty, y_1) = 1 \quad \text{para } T_s < T_\infty \quad [43]$$

$$T(\infty, y_1) = 0 \quad \text{para } T_s > T_\infty \quad [44]$$

$$u(x_1, \infty) = 1 \quad [45]$$

$$u(\infty, y_1) = 1 \quad [46]$$

$$v(x_1, \infty) = 0 \quad [47]$$

$$v(\infty, y_1) = 0 \quad [48]$$

Na superfície do tubo:

$$T = 1 \quad \text{em } y_1=0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad \text{para } T_s > T_\infty \quad [49]$$

$$T = 0 \quad \text{em } y_1=0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad \text{para } T_s < T_\infty \quad [50]$$

$$u = 0 \quad \text{para } y_1=0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad [51]$$

$$v = 0 \quad \text{para } y_1=0 \text{ e } -2 < x_1 < 2 \quad [52]$$

As equações diferenciais [37] a [40], juntamente com as condições de contorno, correspondentes às equações [41] a [52], constituem o modelo matemático escrito em termos de grandezas adimensionais. Esse modelo ainda não representa a forma final da descrição matemática do problema proposto, pois suas equações não podem ser utilizadas para descrever o escoamento turbulento médio. Ocorre que os termos  $u$ ,  $v$ ,  $T$  e  $p$ , contidos nessas equações, representam valores instantâneos de velocidade, temperatura e pressão. Para que o modelo inclua o escoamento turbulento, substitui-se os valores instantâneos de  $u$ ,  $v$ ,  $p$  e  $T$  pela soma de seus valores médios e flutuantes. Esse processo é descrito a seguir.

#### 3.4 INCLUSÃO DOS TERMOS RELATIVOS A TURBULÊNCIA.

Para que o modelo em estudo possa descrever o escoamento turbulento médio, é necessário reescrever as equações do sistema obtido, substituindo-se as velocidades, pressões e temperaturas instantâneas por suas parcelas médias e flutuantes<sup>18</sup>:

$$u = \bar{u} + u' \quad [53]$$

$$v = \bar{v} + v' \quad [54]$$

$$T = \bar{T} + T' \quad [55]$$

$$p = \bar{p} + p' \quad [56]$$

As equações diferenciais resultantes possuem agora quatro variáveis adicionais :  $u'$ ,  $v'$ ,  $T'$  e  $p'$ . Os termos das equações diferenciais do problema, após serem escritos em função das parcelas médias e flutuantes, são submetidos a um processo de avaliação de médias temporais<sup>18</sup>, no qual as médias de flutuações são eliminadas e as médias de produtos entre componentes flutuantes permanecem nas equações, gerando um sistema com maior número de incógnitas do que equações (ver apêndice F). A fim de eliminar esta dificuldade, é preciso buscar relações que expressem estes produtos em função das variáveis originais do problema. Para obter tais relações, são utilizados modelos de turbulência baseados na teoria do comprimento de mistura de Prandtl<sup>18</sup>, e nos modelos de viscosidade e condutividade aparentes de Jenkins<sup>19</sup>. Será apresentada nesta seção apenas a forma final das equações diferenciais do problema. Todas as deduções são demonstradas nos apêndices F e G.

Incluídas as parcelas flutuantes, chega-se à forma final das equações de transporte :

$$\begin{array}{c} \text{continuidade} \\ \bar{u} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \bar{v} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} = 0 \end{array} \quad [57]$$

quantidade de movimento em  $x_1$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} +$$

$$\frac{2}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right] - \frac{2}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] +$$

$$(h_1 h_2)^{-1} \left\{ l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \kappa l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} -$$

$$(h_1 h_2 \text{Re})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [58]$$

quantidade de movimento em  $y_1$

$$\frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} +$$

$$\frac{2}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right] - \frac{2}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] +$$

$$(h_1 h_2)^{-1} \left\{ \kappa l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \kappa^2 l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} -$$

$$(h_1 h_2 \text{Re})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [59]$$

energia

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_1} +$$

$$\frac{2l}{\text{Pr}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right) - \frac{\kappa}{h_2} \left( \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right) \right] - \frac{l}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 (1-\kappa)$$

$$\begin{aligned}
& - (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y_1^2} \right] - \\
& \frac{8\text{Ec}}{\text{Re}} \left\{ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \left( \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| + \ell \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right]^2 - \frac{2\ell}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] + \right. \\
& \left. \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 \right\} = 0 \tag{60}
\end{aligned}$$

Os termos que contém o comprimento de mistura  $\ell$  e suas derivadas são expressos em função de  $\bar{u}$  através de uma relação dada por Schlichting<sup>20</sup>

$$\ell = 0,4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \tag{61}$$

e a constante  $\lambda$ , cujo valor é 1, é deduzida no apêndice G.

Na forma em que se encontram, as equações já podem receber o tratamento numérico, sendo possível simular o escoamento em torno de um tubo.

### 3.5 ACOPLAMENTO DAS CONDIÇÕES DE ENTRADA E SAÍDA

Para que se possa considerar a influência dos tubos à montante no cálculo do escoamento em cada tubo de uma fileira, transfere-se as condições de saída de  $u$ ,  $v$  e  $T$  de um determinado tubo para a entrada de seu vizinho à jusante. A maneira pela qual se faz a transferência depende do arranjo dos tubos. Para o arranjo triangular, a condição de saída relativa

à metade superior da malha é transferida para a entrada da metade inferior, e a condição de saída da metade inferior é transferida para a entrada da metade superior. No arranjo em linha, a condição é passada diretamente na forma em que se encontra. As figuras 1 e 2 (pag. 8) ilustram o procedimento para arranjo em linha e triangular respectivamente.

## 4 METODO NUMERICO

Esta seção apresenta a forma discretizada das equações diferenciais e o roteiro de cálculo do programa. Detalhes sobre a estabilidade do método, critérios de convergência, construção da malha e outros tópicos importantes porém não essenciais à compreensão do algoritmo em si, encontram-se no apêndice H. Uma abordagem mais ampla do tratamento descrito no apêndice H pode ser obtida em Carnahan<sup>21</sup>.

### 4.1 NOTAÇÃO

Os termos que compõem as equações diferenciais discretizadas obedecem às seguintes convenções:

i - índice da posição em  $y_1$ :

$$y_1^{i+1} = qxy_1^i \quad [62]$$

j - índice da posição em  $x_1$ :

$$x_1^{j+1} = x_1^j + dx_1 \quad [63]$$

n - índice da posição em t:

$$t^{n+1} = t^n + dt \quad [64]$$

onde q é a razão da progressão geométrica segundo a qual  $y_1$  cresce a partir da superfície do cilindro. Para as derivadas em  $y_1$ , onde os incrementos variam, são usados os termos  $dy_a$  e  $dy_b$  para designar as medidas mostradas na figura 4.

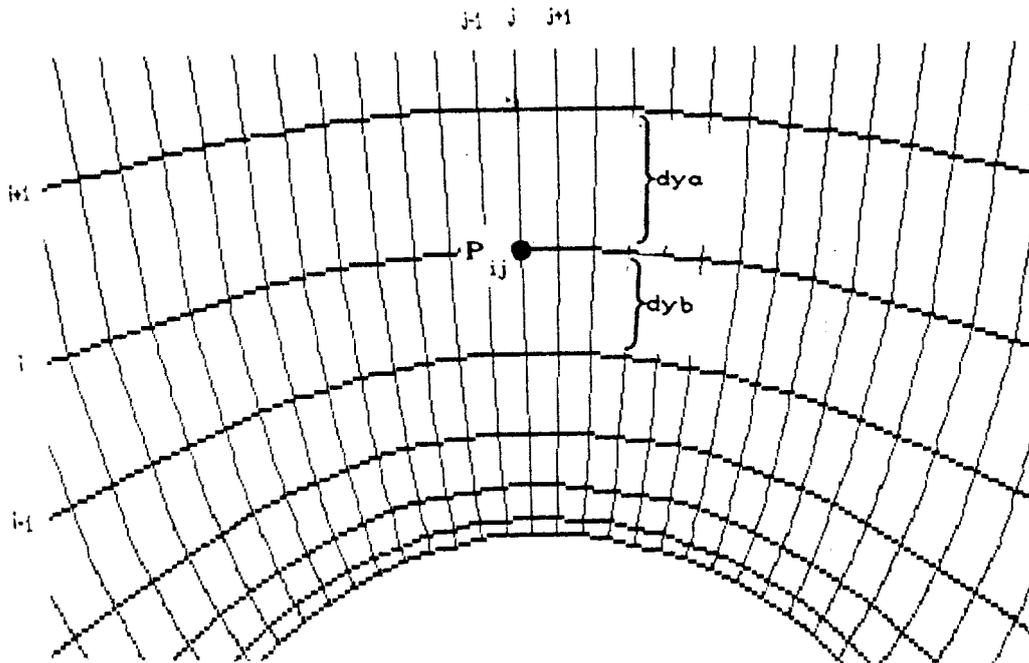


Figura 4 - Localização dos pontos e incrementos variáveis.

Como  $y_1$  varia em progressão geométrica, os valores desses incrementos são dados por

$$dya = y_1 q - y_1 = y_1 (q - 1) \quad [65]$$

$$dyb = y_1 - \frac{y_1}{q} = y_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad [66]$$

onde os índices superiores  $i$  foram omitidos por estarem presentes em todos os termos contendo  $y_1$ .

Define-se também a soma e o produto dos incrementos como

$$dys = dya + dyb \quad [67]$$

$$dyp = dya \times dyb \quad [68]$$

Alguns termos escritos na forma não discretizada surgem

nas equações. Suas definições são dadas a seguir.

- Derivadas dos coeficientes métricos:

$$h_{1y} = \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad [69]$$

$$h_{2x} = \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \quad [70]$$

$$H_1 = \frac{h_2 h_{1x} - h_1 h_{2x}}{h_1^2} \quad [71]$$

$$H_2 = \frac{h_1 h_{2y} - h_2 h_{1y}}{h_2^2} \quad [72]$$

- Derivadas do comprimento de mistura

$$l_x = \frac{\partial l}{\partial x_1} \quad [73]$$

$$l_y = \frac{\partial l}{\partial y_1} \quad [74]$$

Para compactar a expressão das equações discretizadas, é adotada a seguinte regra de notação para as variáveis  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{T}$  e  $\bar{p}$ : os índices incrementados ou decrementados figuram como subscritos, e os demais índices são omitidos. Ex.:  $\bar{u}_{i,j,n+1}$  é anotado simplesmente como  $\bar{u}_{n+1}$ .

#### 4.2 EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

As equações diferenciais discretizadas resultam nas seguintes expressões:

continuidade

$$uh_{2x} + h_2 \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2dx_1} + vh_{1y} + h_1 \frac{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i}{dy_a} = 0 \quad [75]$$

quantidade de movimento em  $x_1$ 

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}}{dt} + \frac{\bar{u} - \bar{u}_{j-1}}{h_1 dx_1} + \frac{v}{h_1} \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} + \\ & \frac{1}{h_1} \frac{\bar{p} - \bar{p}_{j-1}}{dx_1} + \\ & + \frac{2}{h_1} \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \left[ \ell_x \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} + \right. \\ & \left. \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] - \\ & \frac{2}{h_2} \ell \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \left[ \ell_y \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right. \\ & \left. + \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] + \\ & (h_1 h_2)^{-1} \left[ h_{2x} \left[ \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]^2 - \right. \\ & \left. Ah_{1y} \left[ \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]^2 \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (Ch_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \frac{\bar{u} - \bar{u}_{j-1}}{dx_1} + \frac{h_1^2}{h_1^2} \frac{\bar{u} - 2\bar{u}_{j-1} + \bar{u}_{j-2}}{(dx_1)^2} + \right. \\
 & \left. H_2 \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} + \frac{h_1}{h_2} \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \\
 & = 0 \qquad \qquad \qquad [76]
 \end{aligned}$$

quantidade de movimento em  $y_1$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u}{h_1} \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_{j-1}}{2dx_1} + \frac{v}{h_1} \frac{dy_b \bar{v}_{i+1} + (dy_a - dy_b)\bar{v} - dy_a \bar{v}_{i-1}}{2dy_p} - \\
 & \frac{1}{h_2} \frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}}{dy_a} + \\
 & \frac{2}{h_1} \ell \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \left[ \ell_y \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right. \\
 & \left. + \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] + \\
 & \frac{2}{h_2} \ell^2 \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \left[ \ell_y \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right. \\
 & \left. + \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (h_1 h_2)^{-1} \left[ \ell h_{2x} \left[ \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]^2 - \right. \\
& \quad \left. \ell^2 h_{1y} \left[ \ell \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]^2 \right] - \\
& (h_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \frac{\bar{v} - \bar{v}_{j-1}}{dx_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\bar{v}_{j+1} - 2\bar{v} + \bar{v}_{j-1}}{(dx_1)^2} + \right. \\
& \quad \left. H_2 \frac{dy_b \bar{v}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{v} - dy_a \bar{v}_{i-1}}{2dy_p} + \frac{h_1}{h_2} \frac{dy_a \bar{v}_{i+1} - dy_s \bar{v} + dy_b \bar{v}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \\
& = 0 \tag{77}
\end{aligned}$$

energia

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{T}_{n+1} - \bar{T}}{dt} &= \frac{u}{h_1} \frac{\bar{T} - \bar{T}_{j-1}}{dx_1} + \frac{v}{h_1} \frac{dy_b \bar{T}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{T} - dy_a \bar{T}_{i-1}}{2dy_p} + \\
& \frac{2\ell}{Pr_t} \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] \times \\
& \left\{ \frac{1}{h_1} \left[ \ell \times \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dy_a - dy_b) \bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \ell \left[ \frac{dy_b (\bar{u}_{i+1, j+1} - \bar{u}_{i+1, j+1}) + (dy_a - dy_b) (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}) - dy_a (\bar{u}_{i+1, j-1} - \bar{u}_{i+1, j-1})}{4dx_1 dy_p} \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda}{h_2} \left[ \ell_y \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] + \ell \left[ \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \right] \\
& - \frac{\ell}{h_1 h_2} \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] (1-\lambda) \\
& - (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} \left[ H_1 \frac{\bar{T} - \bar{T}_{j-1}}{dx_1} + \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\bar{T} - 2\bar{T}_{j-1} + \bar{T}_{j-2}}{(dx_1)^2} + \right. \\
& \left. H_2 \frac{dy_b \bar{T}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{T} - dy_a \bar{T}_{i-1}}{2dy_p} + \frac{h_1}{h_2} \frac{dy_a \bar{T}_{i+1} - dy_s \bar{T} + dy_b \bar{T}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \\
& - \frac{8Ec}{\text{Re}} \left\{ \left[ \frac{1}{h_2} \ell_y \left| \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. \ell \operatorname{sgn} \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] \left[ \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \right]^2 \right. \\
& \left. - \frac{2\ell}{h_1 h_2} h_{1y} \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] \times \right. \\
& \left[ \ell_y \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] + \ell \left[ \frac{dy_a \bar{u}_{i+1} - dy_s \bar{u} + dy_b \bar{u}_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \right] \\
& \left. + \frac{\ell}{h_1 h_2} h_{1y} \left[ \frac{dy_b \bar{u}_{i+1} + (dya - dyb)\bar{u} - dy_a \bar{u}_{i-1}}{2dy_p} \right] \right\} = 0 \quad [78]
\end{aligned}$$

Todas as derivadas presentes nestas equações discretizadas são mostradas no apêndice H. A partir dessas equações é estabelecida a seqüência de cálculo do método numérico.

### 4.3 ROTEIRO DE CÁLCULO

As hipóteses simplificativas de que as propriedades físicas do fluido circulante são constantes e de que a troca térmica se processa em regime de convecção forçada, permitem que as distribuições de velocidade sejam calculadas independentemente da distribuição de temperaturas. Isto é possível porque nessas condições, a distribuição de velocidades do escoamento principal não é afetada pelas forças de flutuação devidas a diferença de temperatura entre o fluido e a parede do tubo. Em termos da descrição analítica do problema, isto significa que o fator responsável pela força de empuxo nas equações de quantidade de movimento pode ser desprezado. Assim, apenas os termos viscosos das equações de quantidade de movimento poderiam ser afetados por mudanças na distribuição de temperatura, uma vez que contém o número de Reynolds, e conseqüentemente a viscosidade cinemática. Entretanto, uma vez que as propriedades do fluido são consideradas constantes, e calculadas na temperatura média entre a parede do tubo e a corrente livre, a viscosidade cinemática não sofre correções em função das mudanças ocorridas na distribuição de temperaturas. Por essa razão, o método numérico é executado em duas etapas: na primeira são determinados os valores de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , fazendo uso das equações de quantidade de movimento e da continuidade, e na segunda são utilizados esses valores para obter as temperaturas através da equação da energia. O fluxograma a seguir fornece uma noção geral do esquema numérico.

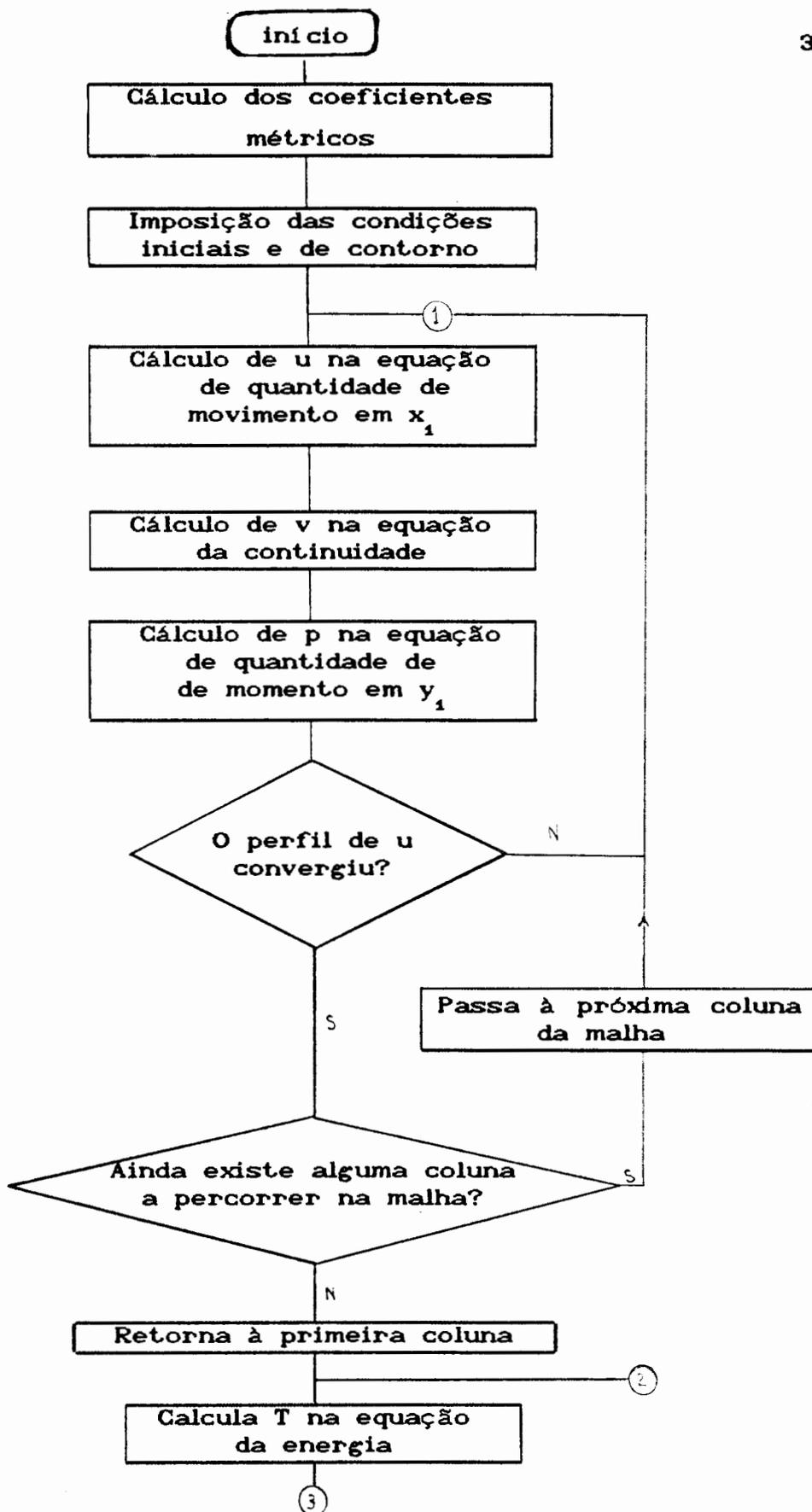


Figura 5a - Fluxograma do programa Bancol.bas

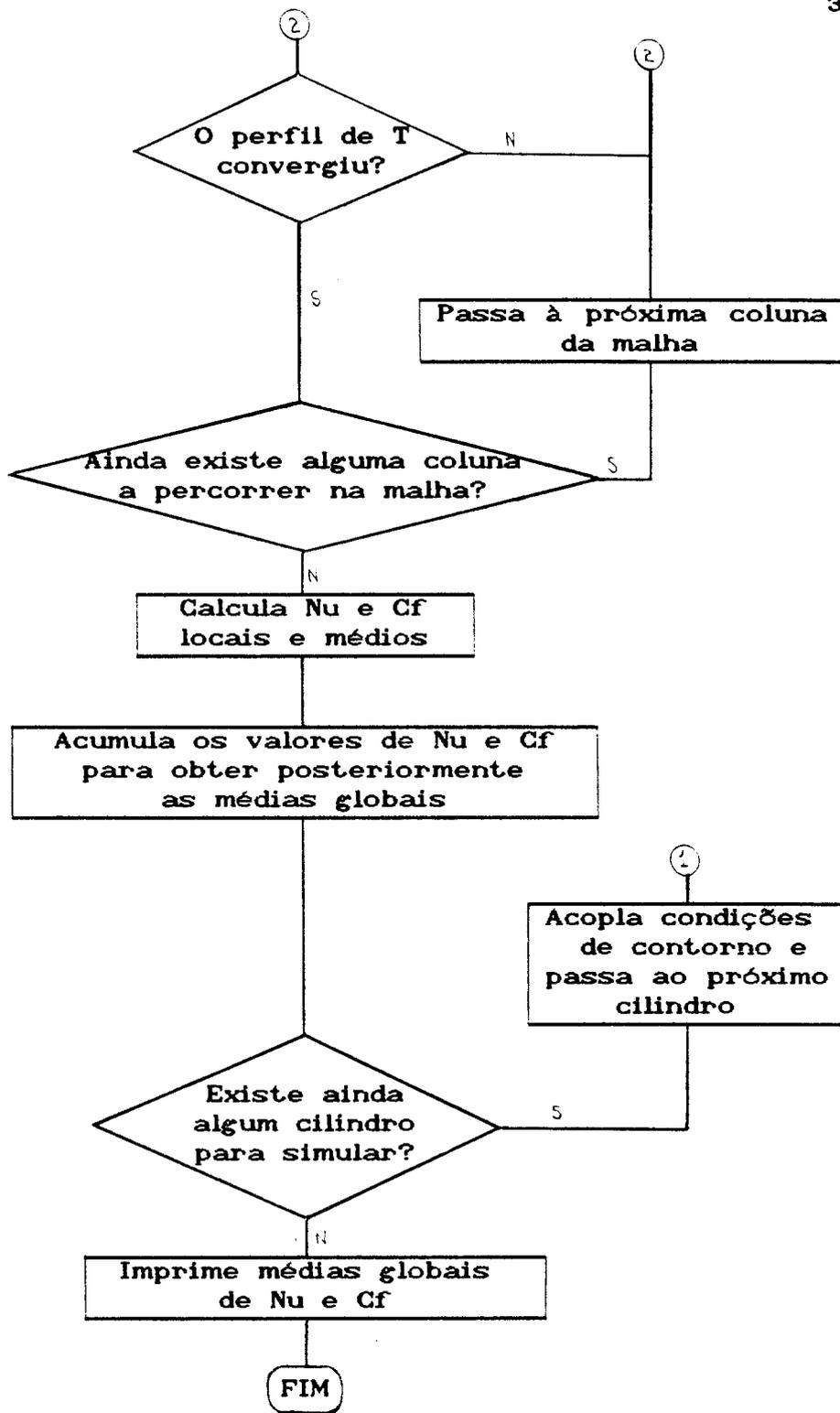


Figura 5b - Fluxograma do programa Banco1.bas - continuação

Segue agora um roteiro explicativo do fluxograma apresentado, onde são descritas as etapas de cálculo que compõem o programa.

#### 4.3.1 CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

Nesta etapa, as equações da continuidade e de quantidade de movimento são acopladas, e o cálculo das distribuições se dá em três sub-etapas:

- I - cálculo de  $\bar{u}$  na equação de quantidade de movimento em  $x_1$ ;
- II - obtenção de  $\bar{v}$  pela equação da continuidade;
- III - cálculo de  $\bar{p}$  na equação de quantidade de movimento em  $y_1$ .

##### 4.3.1.1 CÁLCULO DA COMPONENTE $\bar{u}$

Nesta sub-etapa são calculados os valores de  $\bar{u}$  no tempo  $t+\Delta t$ , isolando  $u_{n+1}$  do termo transiente da equação 76. Essa equação pode ser representada genericamente como

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + dt(\text{demais termos}) \quad [79]$$

Os valores de  $u$  são calculados para a primeira coluna da malha, a qual é percorrida no sentido mostrado na figura 6. Calculados os valores de  $u$  na primeira coluna, passa-se à segunda subetapa, onde são obtidos os valores de  $\bar{v}$ .

##### 4.3.1.2 OBTENÇÃO DE $\bar{v}$

Os valores de  $v$  são então calculados na mesma coluna, no mesmo tempo  $t+\Delta t$ , isolando o termo  $\bar{v}_{i+1}$  na equação da continuidade (equação 75). Essa equação é representada por

$$\bar{v}_{i+1,n+1} = \bar{v}_{i,n+1} - \frac{1}{h_1} dy_a (\text{demais termos}) \quad [80]$$

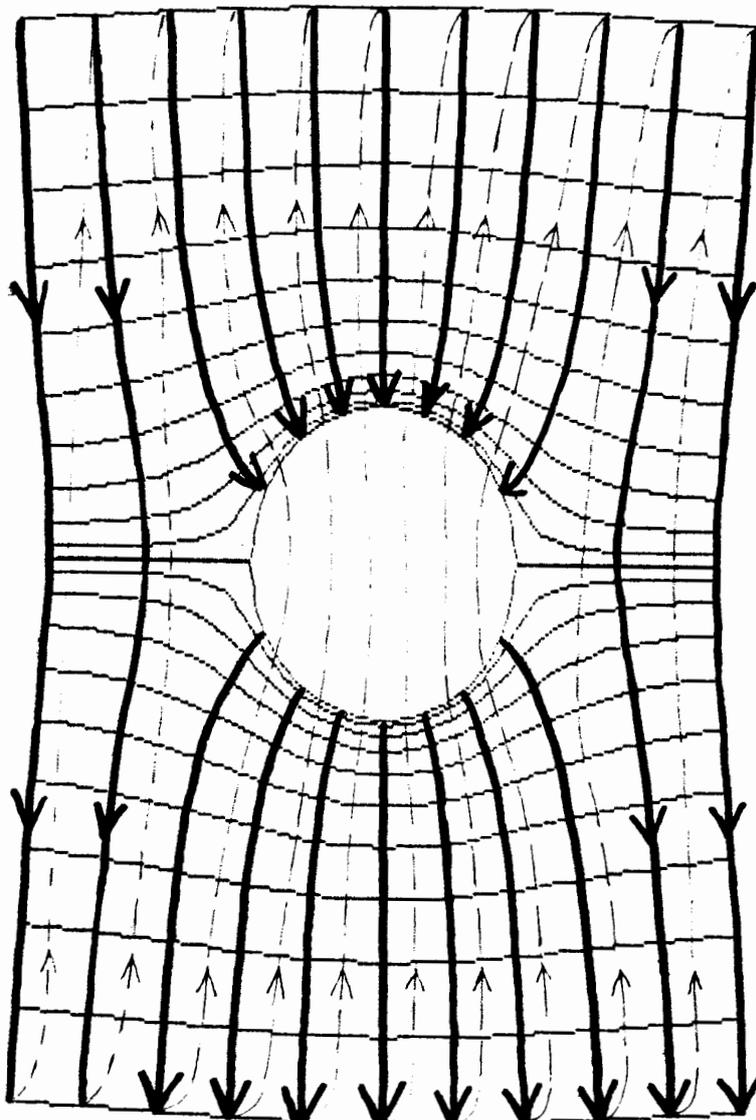


Figura 6 - Varredura da malha no cálculo de  $\bar{u}$ .

A coluna é percorrida no sentido indicado na figura 7, primeiramente na metade superior e em seguida na metade inferior da malha.

Terminada a varredura, passa-se à sub-etapa III, na qual são calculadas as pressões.

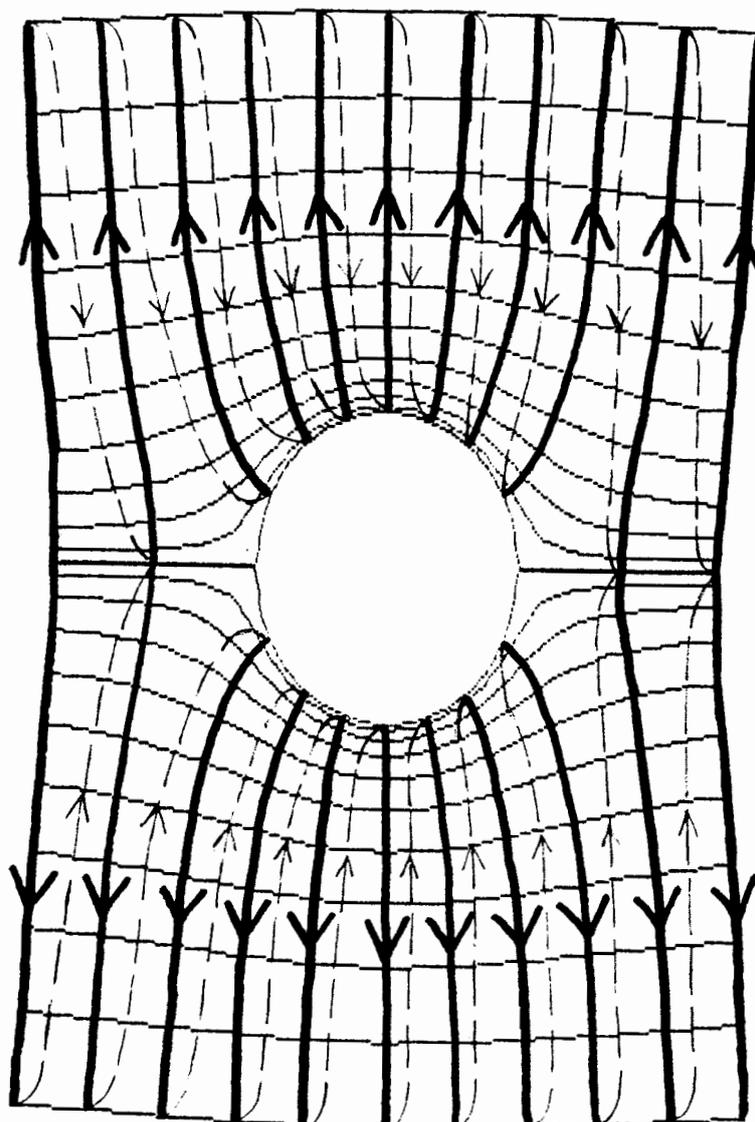


Figura 7 - Varredura da grade no cálculo de  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{T}$ .

#### 4.3.1.3 CALCULO DE $\bar{p}$

Atualizados os valores de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , obtém-se as pressões isolando o termo  $\bar{p}_{i+1}$  na equação de quantidade de movimento em  $y_1$  (equação 77), também na mesma coluna, e no mesmo tempo  $t+dt$ . A equação assume a seguinte forma genérica:

$$\bar{p}_{i+1,n+1} = \bar{p}_{i,n+1} + h_2 dy_a \text{ (demais termos)} \quad [81]$$

Terminada a sub-etapa III, é feito um teste que determina se o perfil de  $\bar{u}$  na primeira coluna da malha convergiu (ver apêndice H.1). Caso seja obtida a convergência, passa-se à segunda coluna da malha, como indicam as linhas tracejadas nas figuras 6 e 7. Repete-se então o processo para a segunda coluna, usando como condições iniciais os valores de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{T}$  obtidos na primeira coluna. O processo é idêntico ao realizado na primeira coluna da malha. Executam-se as sub-etapas I, II e III, aplica-se outra vez o teste de convergência, e assim sucessivamente para todas as colunas da malha, sempre utilizando como condição inicial para a coluna  $j+1$  os valores de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{T}$  obtidos na coluna  $j$ . A renovação da condição inicial tem como finalidade acelerar a convergência do método numérico.

Quando não é obtida a convergência, repete-se o processo na mesma coluna até que o perfil de  $\bar{u}$  convirja.

Esse procedimento é efetuado até que se atinja a última coluna da malha, encerrando-se assim a primeira etapa do método numérico, correspondente ao cálculo das distribuições de velocidade.

As observações feitas na segunda e na terceira sub-etapas quanto ao fato de  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$  serem avaliados no mesmo tempo  $t+\Delta t$  em que foi calculada a componente  $\bar{u}$  têm a finalidade de chamar atenção para o fato de que se faz necessário dispor de apenas uma equação transiente para um sistema de equações diferenciais acopladas, para que seja possível a resolução desse sistema através do esquema TDT apresentado. Como a

equação da energia não está acoplada às demais, pelas razões expostas na seção 4.3, esta é resolvida em um laço independente, necessitando portanto de um termo transiente. Esta é a razão pela qual existem duas equações transientes no modelo, questão levantada na seção 3.2.1 (pag. 17).

#### 4.3.2 CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS

Os valores de  $\bar{T}$  são calculados através da equação da energia (equação 78), de maneira semelhante ao cálculo de  $\bar{u}$ . A forma genérica da equação é dada por

$$\bar{T}_{n+1} = \bar{T}_n + dt(\text{demais termos}) \quad [82]$$

A malha é varrida em colunas, assim como no cálculo das velocidades e pressões (Fig 7). Terminada a varredura em cada coluna, as temperaturas calculadas são submetidas a um teste de convergência semelhante ao aplicado em  $\bar{u}$  na primeira etapa (ver apêndice H.3.2), que decide se é possível passar à próxima coluna da malha.

Obtida a distribuição de temperaturas, encerra-se o cálculo para o primeiro tubo. São calculados então os coeficientes de arrasto e de troca térmica, definidos no capítulo 5, e preparadas a entrada e as distribuições iniciais de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{T}$  e  $\bar{p}$  para o tubo seguinte.

### 4.3.3 PASSAGEM DOS VALORES PARA O TUBO A JUSANTE

Para iniciar a simulação do escoamento sobre o segundo tubo, devem ser determinadas, além das condições de entrada obtidas através do já mencionado acoplamento de entrada e saída, as novas distribuições iniciais de velocidade, temperatura e pressão para todos os pontos da malha. As novas condições iniciais são as próprias distribuições obtidas para o primeiro tubo, pois esta escolha acelera a convergência do esquema iterativo. A solução do escoamento sobre o primeiro tubo é uma aproximação mais precisa para a distribuição inicial sobre o segundo tubo do que a simples atribuição de um perfil potencial de velocidades e pressões.

Foi observado que se faz necessário estabelecer condições iniciais e condições de entrada para o escoamento, mas não é preciso estipular condições de saída. Isto se deve a uma característica própria do esquema TDT, que é um processo de marcha. Enquanto nos esquemas implícitos as variáveis do problema são calculadas simultaneamente em todos os pontos da malha, através da solução de um sistema de equações, no esquema TDT esas variáveis são calculadas durante uma marcha no sentido do escoamento principal, não sendo necessário o conhecimento prévio das condições de saída.

Determinadas as condições iniciais e de entrada para o segundo tubo, retorna-se à primeira etapa do método numérico. Repete-se esse processo até que se atinja o último tubo da fileira, encerrando assim a execução do método numérico.

#### 4.4 CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DO PROGRAMA

Nesta seção são fornecidos alguns dados referentes à construção do programa e sua performance quando em execução, sendo documentadas as condições de trabalho e o ambiente no qual o programa foi executado.

Equipamento empregado - PC XT, 10MHz, 640Kb, Coprocessador 8087-1 .

Linguagem usada - Quick Basic 4.0 (Microsoft).

Composição do programa - o programa Banco1.bas contém 34 blocos distribuídos da seguinte forma:

- 1 bloco de entrada de dados, dimensionamento e definição de variáveis globais;
- 1 bloco gerenciador (main), contendo o roteiro geral de execução;
- 1 bloco que define a transformação de coordenadas.
- 1 bloco contendo o cálculo dos coeficientes métricos da transformação de coordenadas;
- 1 bloco onde são estabelecidas as condições iniciais do problema;
- 1 bloco no qual são fixadas as condições de contorno;
- 22 blocos relativos ao tratamento das equações de transporte;
- 1 bloco gerenciador para rotinas de saída, contendo menu de opções;

- 5 rotinas de saída (sendo 3 gráficas), relativas às opções do menu.

Número médio de iterações do esquema TDT - 8

Tempo de execução do fonte - 15 minutos por fileira transversal do banco de tubos.

Número mínimo de pontos para a malha - 17 linhas x 30 colunas.

## 5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos para escoamentos em tubos e bancos de tubos. Foram analisados os seguintes casos :

- caso 1 - baixos números de Reynolds ( $Re \leq 200$ );
- caso 2 - números de Reynolds moderados ( $200 < Re < 1.10^4$ );
- caso 3 - números de Reynolds altos ( $Re \geq 1.10^4$ ).

As faixas de números de Reynolds correspondentes a cada um dos casos foram estabelecidas em função da análise de discrepâncias entre resultados da simulação e dados coletados. A análise das discrepâncias é baseada em mecanismos de escoamento e troca térmica característicos de cada faixa de números de Reynolds.

Em cada caso foram obtidas estimativas para o coeficiente de arrasto local, assim como valores locais, médios e globais para o número de Nusselt. A fim de simplificar a discussão dos resultados, serão adotadas algumas definições para os termos local, médio e global.

- Será denominado número de Nusselt local, o valor de Nusselt para um determinado ângulo ( $\theta$ ) sobre a superfície de um tubo isolado, definido por

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad [83]$$

Nesta expressão,  $h$  é o coeficiente local de troca térmica, dado em termos de  $\bar{T}$  e  $r$  adimensionais por

$$h = -k \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right|_{\text{parede do tubo } (r=r_0)} \quad [84]$$

- Será denominado coeficiente de arrasto local, o valor de  $C_f$  para um determinado ângulo ( $\theta$ ) sobre a superfície de um tubo isolado, definido também em termos de  $\bar{u}$  e  $r$  adimensionais pela seguinte expressão:

$$C_f = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right|_{\text{parede do tubo } (r=r_0)} \quad [85]$$

- será denominado número de Nusselt médio, a média entre os números de Nusselt locais sobre a superfície de um tubo. Esses valores são obtidos via integração numérica na variável angular  $\theta$ ;

$$\bar{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu d\theta \quad [86]$$

- Será denominado número de Nusselt global, a média aritmética entre os números de Nusselt médios para todos os tubos de uma fileira longitudinal do banco. Pela hipótese simplificativa de que o escoamento se processa da mesma forma em todas as fileiras longitudinais, esta grandeza representa o próprio Nusselt médio tomado sobre todo o banco.

Além das definições anteriores, outras observações devem ser feitas quanto à interpretação dos resultados.

- As definições para  $Nu$  e  $C_f$  são as mesmas estipuladas pelos autores cujos trabalhos foram utilizados para fins de comparação.

- O número de Reynolds é sempre calculado com base no diâmetro externo dos tubos, sendo portanto definido por  $U\omega D/\nu$ , seja para tubos isolados ou para bancos. Em dados coletados de outros autores onde o número de Reynolds não possui a mesma definição, os valores de  $Re$  são recalculados com base no diâmetro dos tubos.

- Os passos transversal e longitudinal do banco de tubos correspondem às dimensões mostradas nas figuras 8 e 9.

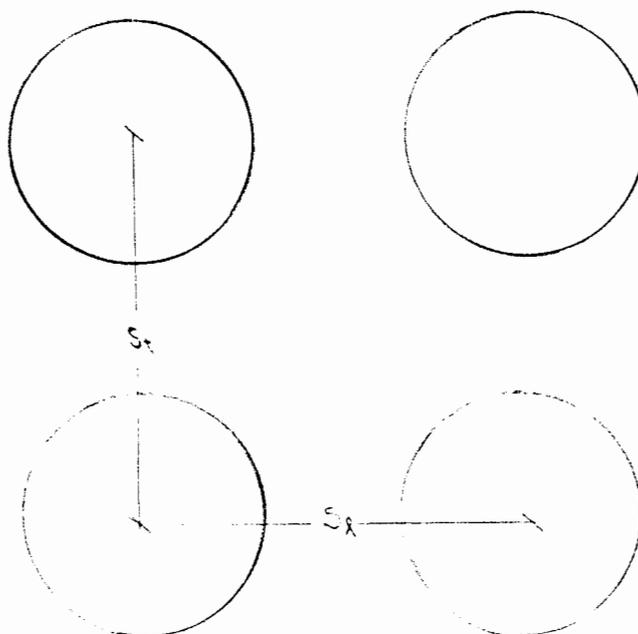


Figura 8 - Passos  $S_l$  e  $S_t$  para banco de arranjo em linha

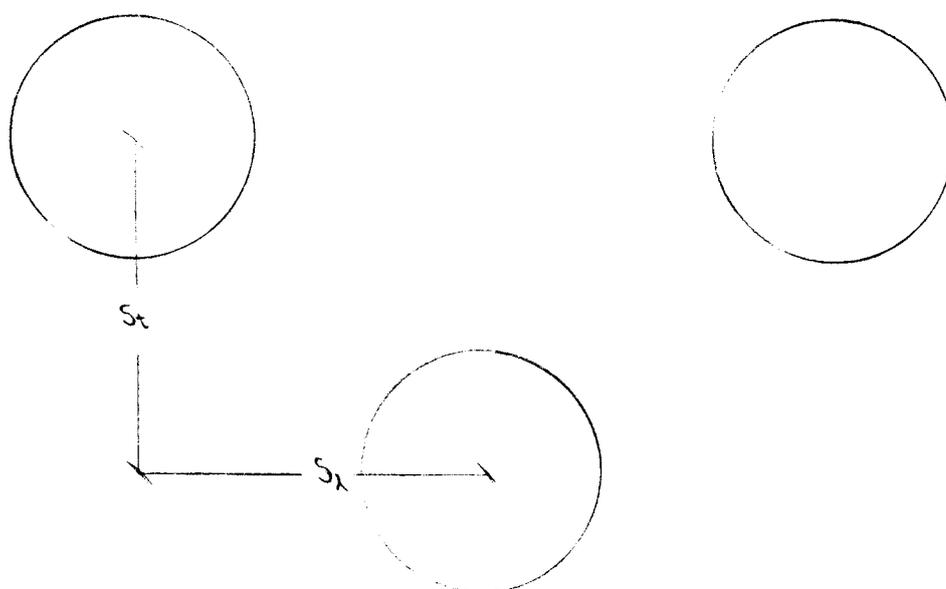


Figura 9 - Passos  $S_1$  e  $S_2$  para banco de arranjo triangular

Estabelecidas as convenções necessárias para a interpretação dos resultados, são confrontados os dados obtidos através do programa de simulação "Banco1.bas" com os dados experimentais e numéricos de alguns autores pesquisados. As figuras citadas a partir da próxima seção encontram-se no apêndice H.

## 5.1 RESULTADOS PARA BAIXOS NÚMEROS DE REYNOLDS

A figura 10 mostra o coeficiente de arrasto local obtido através da simulação do escoamento sobre um único tubo para  $Re=200$ , frente aos resultados numéricos de Dhaubadel, Reddy e Tellionis<sup>15</sup>. O pico obtido em torno de  $\theta=20^\circ$  se deve possivelmente à estimativa da viscosidade do fluido junto à parede. Como o programa opera com propriedades físicas uniformes avaliadas à temperatura média entre a parede e a corrente livre, a viscosidade estimada pelo programa é superior à real, uma vez que a parede é mais quente do que o fluido. Conseqüentemente, o atrito na entrada do tubo também é maior, afetando da mesma forma o valor do coeficiente  $C_f$ . Observa-se também que  $C_f$  calculado pelo programa entre  $130^\circ$  e  $70^\circ$  é inferior ao valor numérico de Dhaubadel. Isto se deve provavelmente a diferenças entre o modelo matemático de Dhaubadel, para escoamentos laminares, e o modelo matemático do presente trabalho, o qual inclui um modelo de turbulência. Essa diferença pode ocasionar discordâncias entre as distribuições de velocidade resultantes na zona de descolamento da camada limite.

A figura 11 confronta os valores dos números de  $Nu$  locais obtidos via simulação para  $Re=20$ , com os dados de Zukauskas<sup>19</sup> para  $Re=20$ , obtido a partir de uma equação empírica, e para  $Re=23$ , obtido experimentalmente. Os valores numéricos são ligeiramente inferiores aos dados coletados, entre  $60^\circ$  e  $120^\circ$ . Essa diferença pode também ser consequência do valor obtido para a viscosidade do fluido. Como tal valor é

superior ao da viscosidade real do fluido nas proximidades da parede, a troca de calor por convecção nessa região resulta maior para o caso real do que para a estimativa numérica. Essa diferença deve se tornar mais perceptível com o aumento do número de Reynolds, pois a taxa de calor transferido por convecção se torna significativamente maior do que a taxa de condução, representando assim uma parcela maior do calor total trocado. Na figura 12 é observado um aumento na diferença entre os valores de Nusselt local, que possivelmente se deve a esse efeito. Nessa figura são apresentados os resultados numéricos de Karniadakis<sup>14</sup> e os dados experimentais de Schmidt e Wenner (extraídos de Karniadakis<sup>14</sup>) e Zukauskas frente aos resultados da simulação. O aumento gradual da diferença com o número de Reynolds se reflete na avaliação do número de Nusselt médio para um tubo. A figura 13 compara resultados numéricos de Karniadakis com estimativas de Nusselt médio obtidas através do programa.

## 5.2 RESULTADOS PARA NÚMEROS DE REYNOLDS MODERADOS

A figura 14 apresenta os resultados numéricos de  $Cf$  local frente a dados experimentais de Zukauskas para  $Re=5,2 \cdot 10^4$ . O primeiro pico já não é tão pronunciado quanto o obtido para Reynolds baixos, o que pode ser explicado pela maior turbulência no escoamento, que possibilita a mistura, e portanto uma maior homogeneização do fluido, resultando em maior uniformidade na sua viscosidade. Além do primeiro pico a  $25^\circ$ , ocorre uma diferença na região entre  $80^\circ$  e  $100^\circ$ , e na zona

de descolamento, entre  $140^\circ$  e  $160^\circ$ . Na região entre  $80^\circ$  e  $100^\circ$  o escoamento pode não ser ainda plenamente turbulento, e uma vez que o programa não simula a transição de regime, mas passa diretamente de laminar a turbulento, podem ocorrer diferenças frente a dados experimentais, na avaliação de  $C_f$ . Isto pode afetar também o descolamento da camada limite, provocando discrepâncias entre os valores estimados e experimentais de  $C_f$  na zona entre  $140^\circ$  e  $160^\circ$ .

Na estimativa do número de Nusselt local para  $Re=1,4 \cdot 10^4$  (figura 15) verifica-se com maior clareza a transição brusca de regime a  $90^\circ$ , executada pelo programa. Na região laminar ( $\theta < 90^\circ$ ), os números de Nusselt calculados são inferiores aos dados experimentais de Zukauskas, possivelmente porque ainda se manifestam os efeitos da diferença de viscosidade real e estimada nessa faixa de números de Reynolds. A figura 16 mostra dados de Zukauskas confrontados com resultados numéricos de  $Nu_{local}/Nu_{medio}$  para  $Re=7 \cdot 10^4$ , onde as diferenças devidas à viscosidade já não existem, mas surgem diferenças entre os resultados numérico e experimental na entrada e na saída ( $\theta \cong 0^\circ$  e  $\theta \cong 180^\circ$  respectivamente). As diferenças registrados na entrada se devem provavelmente à condição de contorno nessa região, que supõe escoamento uniforme. A condição de escoamento uniforme na entrada deve ser de difícil obtenção na prática, para números de Reynolds relativamente altos. Assim, se a corrente livre apresenta turbulência, os valores de  $Nu$  obtidos através do programa resultam inferiores aos valores experimentais na entrada do tubo. As diferenças verificadas na saída podem ser

ser atribuídas a possíveis simplificações no modelo de turbulência utilizado.

As estimativas para Nusselt médio são apresentadas na figura 17, junto aos dados experimentais de Meel<sup>13</sup> e Giedt<sup>13</sup>. Observa-se que nesta faixa de números de Reynolds, as pequenas diferenças devidas possivelmente ao efeito da viscosidade não afetam sensivelmente o valor médio de Nusselt, o mesmo ocorrendo com as diferenças verificadas na entrada e na saída. Essa concordância ocorre também para altos Reynolds, persistindo até o valor aproximado de  $2.10^5$ .

Os valores de Nusselt global para bancos de tubos são mostrados nas figuras 18 e 19 para arranjo em linha e triangular respectivamente, frente a dados experimentais de Moreno e Sparrow<sup>16</sup>, e aos limites superior e inferior estimados através de dados experimentais de Zukauskas<sup>13</sup> para várias combinações de passos transversal e longitudinal semelhantes àquela utilizada na simulação ( $Sl=2,5$  e  $St=2,3$ ). Observa-se que os valores calculados numericamente são ligeiramente inferiores à média dos dados experimentais apresentados. Isto se deve provavelmente à forma através da qual é efetuado o acoplamento entrada/saída (ver figuras 1 e 2). Quando o arranjo é em linha, a estrutura simulada é simplesmente uma fileira longitudinal do banco, enquanto que para arranjo triangular, a estrutura é formada por dois módulos que se alternam : ora tubo, ora as metades superior e inferior dos tubos a jusante em suas fileiras longitudinais vizinhas. Assim, os efeitos produzidos no escoamento pelas fileiras que se encontram imediatamente

acima e abaixo da fileira simulada são negligenciados quando o arranjo é em linha, e são parcialmente considerados quando o arranjo é triangular. Tais efeitos são o aumento do gradiente de pressão na superfície dos tubos e o aumento da turbulência, ambos provocando aumento no número de Nusselt real, o qual não é devidamente estimado pelo programa.

Seria natural buscar uma justificativa com base no valor estimado para a viscosidade do fluido, para explicar a diferença verificada no cálculo do número de Nusselt global. Entretanto, existem motivos razoáveis para se supor que a causa de erro preponderante se deve ao fato de que não são corretamente avaliados os efeitos provocados pelas fileiras vizinhas sobre o escoamento. Uma observação mais atenta das figuras 18 e 19 revela que o erro na estimativa de Nusselt global é maior para arranjo em linha do que para arranjo triangular. Além disto, tal erro tende a aumentar acentuadamente com o número de Reynolds quando o arranjo é em linha (ver figura 23), enquanto que esse aumento é significativamente menor quando o arranjo é triangular (figura 24). Esse fato se choca com a hipótese referente à viscosidade do fluido, pois na faixa de Reynolds moderados o efeito da viscosidade tenderia a diminuir com o crescimento de Reynolds. O aumento do número de Reynolds, propiciando o crescimento da turbulência, resultaria em maior homogeneização da corrente de fluido, e portanto em maior uniformidade das propriedades físicas, diminuindo as discrepâncias provocadas pela estimativa da viscosidade à temperatura média entre a parede e a corrente

livre.

### 5.3 RESULTADOS PARA NÚMEROS DE REYNOLDS ALTOS

As mesmas grandezas estimadas para baixos e moderados números de Reynolds são postas frente a dados experimentais para altos Reynolds, com excessão dos números de Nusselt médios, já apresentados na seção anterior (figura 17) para alguns valores altos de Reynolds .

A figura 20 mostra o coeficiente de arrasto  $C_f$  local para  $Re=1,2 \cdot 10^5$ , obtido por simulação, com os dados de Fage e Folkner (extraídos de Zukauskas<sup>19</sup>), para  $Re=1,1 \cdot 10^5$ , e de Zukauskas, para  $Re=1,3 \cdot 10^5$ . O pico detectado em  $25^\circ$  é agora bastante atenuado, mas os valores de  $C_f$  obtidos pelo programa são inferiores aos dados experimentais entre  $40^\circ$  e  $80^\circ$ , o que pode ter origem no fato de não serem considerados os efeitos das fileiras superior e inferior sobre o escoamento, ou em possíveis deficiências do modelo de turbulência.

A figura 21 mostra os valores de  $Nu$  local para  $Re=1 \cdot 10^5$  frente a dados experimentais de Giedt (extraídos de Zukauskas<sup>19</sup>). Nessa figura são observadas algumas discrepâncias entre os resultados numéricos e experimentais na região à jusante do ponto de transição laminar-turbulento. As causas prováveis para tais discrepâncias devem ter origem no modelo de turbulência.

O número de Nusselt global (figuras 22 e 23) é afetado por todos os fatores citados para justificar as diferenças registradas em  $C_f$  e Nusselt local. Porém, o efeito predominante

parece ser ainda o da influência das fileiras superior e inferior sobre o comportamento do fluxo.

Há também uma causa de erro que afeta ambos os valores estimados  $C_f$  e  $Nu$ . Da maneira como foi formulado o roteiro global do método, existe a hipótese implícita de que somente o tubo a montante do tubo no qual se trabalha influi sobre as condições do escoamento. Isto significa que para um dado tubo do banco só são considerados os efeitos produzidos pelos tubos anteriores sobre o escoamento, não importando o que esteja a jusante. Essa simplificação tem influência direta sobre a distribuição de velocidades, e portanto, afeta também a distribuição de temperaturas.

## 6 CONCLUSÕES

A validade do modelo numérico adotado abrange uma faixa apreciável de números de Reynolds e Prandtl. Os valores globais obtidos para Nu em bancos de tubos médias globais para todo o banco são válidos até  $Re=4.10^5$  para arranjo em linha e  $Re=10^6$  para arranjo triangular. O método é portanto aplicável a um intervalo de Reynolds desde 20 até valores da ordem de  $10^5$  para bancos de tubos. O intervalo de validade para números de Prandtl é de 0,7 a 257, correspondentes a ensaios com ar e óleo mineral, respectivamente.

A precisão do método é da mesma ordem de grandeza da atingida nos métodos empíricos usuais empregados para avaliar troca térmica e perda de carga em bancos de tubos. O desvio quadrático médio entre as estimativas de Cf local foi de aproximadamente 30%, e em torno de 17% para os valores de Nusselt local e médio. O desvio quadrático médio na avaliação de Nu global, estimado em relação à média entre os limites calculados a partir de dados de Zukauskas, foi de 30% para arranjo em linha e de 20% para arranjo triangular, sendo que o intervalo de maior precisão quanto ao número de Reynolds corresponde aos valores moderados ( $200 < Re < 1.10^5$ ), no qual o erro médio foi de 20% para arranjo em linha, e de 13% para arranjo triangular.

Foi constatado durante a execução do programa, que o método não é aplicável a bancos com passos Sl e St demasiadamente pequenos. O programa fornece resultados aceitáveis quando Sl e St são ambos maiores do que 1,2 vezes o

valor do diâmetro dos dutos. Esse valor parece limitar a validade da hipótese de que as fileiras vizinhas e os tubos a jusante não perturbam o escoamento sobre o tubo onde é simulado o fluxo.

É importante esclarecer, entretanto, que as causas de erro discutidas podem ser eliminadas mediante adaptações sobre o método original. Como já foi comentado anteriormente, os principais objetivos que orientaram a elaboração do método foram a obtenção de um algoritmo flexível e essencialmente teórico, para que o nível de rigor no tratamento dos problemas futuros pudesse ser incrementado sem dificuldades sempre que fosse preciso, e que, à medida que tais implementações fossem efetuadas, pudesse ser ampliado também o horizonte de aplicações do método. Sob esse aspecto, a meta estabelecida foi cumprida. A partir do sistema elaborado poderão ser construídos diversos aplicativos nas áreas de Mecânica de Fluidos e Transmissão de Calor.

## 7 RECOMENDAÇÕES

Esta seção contém recomendações quanto à forma de suprimir algumas limitações do programa. As restrições básicas são enumeradas a seguir, juntamente com algumas providências a tomar em cada caso.

- O programa opera com valores médios das propriedades físicas. Caso se queira resultados precisos para escoamentos de fluidos cujas propriedades não variem acentuadamente com a temperatura, basta substituí-las por funções de T. Contudo, se a variação dessas grandezas for pronunciada, é preciso redefinir os operadores diferenciais envolvidos. Se, por exemplo, for necessário considerar a variação da condutividade térmica com a temperatura, não se pode simplesmente substituir k por k(T) no termo  $k\nabla^2 T$ : deve-se utilizar a forma original do operador, que é  $\nabla \cdot (k\nabla T)$ , substituir a função obtendo  $\nabla \cdot (k(T)\nabla T)$  e então derivar o produto  $k(T)\nabla T$  empregando a regra da cadeia. Procedimento semelhante deve ser efetuado para as demais propriedades. Caso o fluido circulante seja um gás, é interessante obter equações de estado para que possa ser considerado o efeito da pressão. Para obter tais expressões, há dois caminhos fundamentais:

- montagem de um banco de dados<sup>22,23,24</sup> e elaboração de seu respectivo gerenciador;
- construção de um bloco que estime as propriedades físicas através de sistemas de contribuição de grupos<sup>25</sup>.

A fim de manter a estrutura lógica independente de dados

empíricos isolados, é aconselhável optar pelo segundo caminho. Essa escolha ocasionará um aumento no tempo de execução do programa, mas oferecerá a vantagem de tornar o método capaz de operar com qualquer tipo de fluido, mesmo que não existam dados experimentais disponíveis para suas propriedades. É importante observar que as estimativas feitas para propriedades físicas através desse método apresentam, via de regra, excelente concordância com os dados experimentais.

- O método não é aplicável a problemas de convecção natural.

Para eliminar essa dificuldade, duas medidas devem ser tomadas: deve-se acrescentar o termo de empuxo na equação de quantidade de movimento e incluir a equação da energia no mesmo laço de cálculo da distribuição de velocidades. Pode-se testar, por exemplo, o seguinte roteiro:

- isolar  $u$  na equação transiente de quantidade de movimento em  $x_1$ ;

- isolar  $v$  na equação da continuidade;

- isolar  $p$  na equação estacionária de quantidade de movimento em  $y_1$ ;

- isolar  $T$  na equação estacionária da energia.

- O método se aplica à geometria do cilindro.

Caso se queira usar o programa para corpos de outros formatos, basta modificar a definição das variáveis  $x$  e  $y$  na subrotina "Transformação". Existem muitas transformações já tabeladas<sup>4</sup>, além de alguns métodos numéricos disponíveis para obtê-las<sup>6,7</sup>.

- Não são considerados os efeitos da rugosidade dos tubos -  
Está sendo elaborado um bloco destinado a tratar o problema da rugosidade, que modifica a condição de contorno relativa à velocidade junto ao tubo. É atribuído o valor  $u = 0$  a alguns pontos cuja distância da parede tem o valor aproximado da rugosidade do tubo, criando assim uma condição de contorno que leva em consideração a existência de pequenas saliências na superfície do tubo.

- O método se aplica somente a escoamentos incompressíveis -  
Para estender o uso do modelo a escoamentos compressíveis, é preciso reescrever as equações diferenciais sem retirar  $\rho$  das derivadas que definem os operadores vetoriais, e incluir equações de estado no modelo. O procedimento é basicamente o mesmo exemplificado para a condutividade térmica  $k$  no parágrafo correspondente à variação das propriedades físicas. É importante esclarecer que esta adaptação não altera significativamente o roteiro de cálculo do esquema numérico.

- O modelo matemático descreve apenas escoamentos bidimensionais - esta é a principal limitação do método. Se for preciso reformular as equações acrescentando termos correspondentes a uma terceira variável espacial, deve-se abrir mão da versatilidade que o sistema de transformação de coordenadas oferece. O programa fica limitado a geometrias específicas em três dimensões. Felizmente, uma das geometrias onde é possível simular o escoamento tridimensional, é a do

próprio cilindro, de modo que também é possível simular o escoamento composto (transversal + longitudinal) através do banco de tubos. Entretanto, as aplicações adicionais citadas anteriormente, não são possíveis em 3 dimensões.

- Só é possível simular escoamentos para os quais a corrente livre é paralela às fileiras longitudinais.

- O programa não opera ainda com bancos nos quais os passos transversal ou longitudinal sejam menores do que 1,2 vezes o valor do diâmetro dos tubos.

Até o presente momento só foi possível propor uma solução para esses dois problemas. Esta consiste em abandonar o sistema TDT em favor de uma formulação variacional, preferencialmente Galerkin ou Mínimos Quadrados, e produzir um espaço gerador de soluções para o "sistema" banco de tubos. É evidente que essa adaptação não goza da simplicidade das demais. Contudo, é uma solução perfeitamente factível e preserva integralmente o modelo matemático, que representa uma parcela substancial do método elaborado. Além disso, diminuí sensivelmente o tempo de execução do programa, porque dispensa a discretização e simula em um só estágio o escoamento em todo o banco de tubos.

## REFERÊNCIAS

- [1] CHURCHILL, R. V. - Variáveis Complexas e Suas Aplicações - Mcgraw-Hill, São Paulo (1975).
- [2] MARKUSHEVIC, A. I. - Lecciones populares de matemáticas - Ed MIR, Moscow (1977).
- [3] VALLENTINE, H.R. - Applied Hydrodynamics - Butterworth & Co. Ltd, London (1969).
- [4] KOBER, H. - Dictionary of conformal representations - Dover Publications, N. York (1957).
- [5] SPIEGEL, M. R. - Theory and Problems of Complex Variables - McGraw-Hill, N. York (1964).
- [6] HAUSER, J., PAAP, H. G., EPPEL, D. - Boundary conformed coordinate systems for fluid flow problems - Computational techniques for fluid flow - Pineridge Press Ltd, London (1986).
- [7] TZABIRAS, G., DIMAS, A., LOUKAKIS, T. - A numerical method for calculation of incompressible, steady, separated flow around aerofoils - International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 6, 789-809 (1986).

[8] TORRES, J. - Time-marching solution of transonic duct flows - Tese de Doutorado, University of London (1980).

[9] BOSMAN, G., HIGHTON, J. - A calculation procedure for three-dimensional, time-dependent, inviscid, compressible flow through turbomachine blades of any geometry - Journal Mechanical Engineering Science, vol 21, pg 39-49 (1979).

[10] HOLMES, D. G., TONG, S. S. - A three-dimensional Euler solver for turbomachinery blade rows - Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol 107, pg 258-264 (1985).

[11] JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E. - Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes - AIAA 14<sup>th</sup> Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California (1981).

[12] DELANEY, R. A. - Time-Marching Analysis of Steady Transonic Flow in Turbomachinery Cascades Using the Hopscotch Method - Journal of Engineering for Power - vol 105, pg 272-279 (1983).

[13] ZUKAUSKAS, A. - Heat transfer from tubes in crossflow - Advances in heat transfer - Academic Press (1972).

[14] KARNIADAKIS, G. - Numerical simulation of forced convection heat transfer from a cylinder in crossflow -

International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 31, pg 107-118 (1988).

[15] DHAUBADEL, M. N., REDDY, J. N., TELIONIS, D. P. - Finite-element analysis of fluid flow and heat transfer for staggered bundles of cylinders in cross flow - International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 7, pg 1325-1342 (1987).

[16] MORENO, A. Y., SPARROW, E. M. - Heat transfer, pressure drop, and fluid flow pattern in yawed tube banks - International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 30, pag. 1979-1995 (1987).

[17] HUGHES, W., GAYLORD, E. - Basic equations of engineering science - Schaum Publishing Co., N. York (1964).

[18] SISSON, L., PITTS, D. - Fenômenos de Transporte - Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1979).

[19] WHITE, F. - Viscous Fluid Flow - McGraw-Hill, N.York (1974).

[20] SCHLICHTING, H.- Boundary Layer Theory - McGraw-Hill, N.York (1960).

[21] CARNAHAN, J. - Applied Numerical Methods - McGraw-Hill, N. York (1972).

[22] BORRESON, R, GORIN, C., HOOD, L., MILLER, J., SCHORR, THAKORE, B., YAWS, C. - Correlation constants for chemical compounds - Chemical Engineering, pg 79-87 (8/1976).

[23] MCGINLEY, J., SHAH, P. - Correlation constants for liquids - Chemical Engineering, pg 127-135 (10/1976).

[24] MILLER, J., SHAH, P., SHORR, G., PATEL, P., YAWS, C. - Correlation constants for chemical compounds - Chemical Engineering, pg 153-162 (11/1976).

[25] REID, R., PRAUSNITZ, R. - The properties of gases and liquids - McGraw-Hill, N York (1986).

## APENDICE A

### DISSIPACÃO VISCOSA

O termo de dissipação é definido para fluidos newtonianos, em duas dimensões, como<sup>17</sup>

$$\mu\Phi = \mu[2(e_{11}^2 + e_{22}^2) + (2e_{12})^2] + \lambda(e_{11} + e_{22})^2 \quad [\text{A.1}]$$

onde  $\lambda$  é o segundo coeficiente de viscosidade, que vale  $-2\mu/3$  pela hipótese de Stokes, e os termos  $e_{11}$ ,  $e_{12}$  e  $e_{22}$  são as deformações sofridas pelo elemento de fluido, dadas em coordenadas curvilíneas generalizadas pelas seguintes expressões<sup>17</sup>:

$$e_{11} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad [\text{A.2}]$$

$$e_{22} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \quad [\text{A.3}]$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{u}{h_1} \right) \right] \quad [\text{A.4}]$$

No trabalho proposto, aplicável a escoamentos incompressíveis, o termo  $\lambda(e_{11} + e_{22})^2$  é nulo, pela equação da continuidade, pois  $e_{11} + e_{22}$  representa o operador divergente em coordenadas curvilíneas generalizadas. Uma análise da ordem de grandeza dos termos restantes revela que  $2(e_{11}^2 + e_{22}^2)$  é negligenciável frente a  $(2e_{12})^2$ . Atribuindo ordem de grandeza = 1 à componente  $u$  da velocidade, deve ser atribuída ordem de grandeza =  $\delta$  à componente  $v$ , com  $\delta \ll 1$ , uma vez que a componente da velocidade

na direção do escoamento principal é  $u$ . A exemplo da análise de ordem de grandeza para as equações da camada limite sobre uma placa plana<sup>18</sup>, pode-se atribuir ordem de grandeza = 1 a  $x_1$  e ordem de grandeza  $\delta$  a  $y_1$ . Assim, a ordem de grandeza das derivadas que compõem a dissipação viscosa resultam

$$O \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \right] = 1 \quad [\text{A.5}]$$

$$O \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} \right] = \delta \quad [\text{A.6}]$$

$$O \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right] = \frac{1}{\delta} \quad [\text{A.7}]$$

$$O \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} \right] = 1 \quad [\text{A.8}]$$

A ordem de grandeza das derivadas dos coeficientes métricos não é relevante quando se avalia os termos da dissipação viscosa. Isto ocorre porque ambos os termos contêm produtos de coeficientes métricos e suas derivadas, sendo que tais produtos possuem a mesma ordem de grandeza. Foi verificado durante a execução do programa, que as ordens de grandeza de  $h_1$  e  $h_2$  são iguais, e inferiores à ordem de grandeza de  $\bar{u}$ . Denomine-se  $h$  essa ordem de grandeza. Pelo exame das equações A.2, A.3 e A.4, constata-se que todos os seus termos se acham multiplicados por fatores da ordem de  $1/h$ . Desta forma, não é preciso levar em consideração a presença dos produtos envolvendo coeficientes métricos.

Percebe-se assim que o termo  $(2e_{12})^2$  predomina sobre o termo  $2(e_{11}^2 + e_{22}^2)$ , pois  $\mathcal{O}(e_{11}) = 1$ ,  $\mathcal{O}(e_{22}) = 1$  e  $\mathcal{O}(e_{12}) = 1/\delta$ . Então a expressão para a dissipação viscosa pode ser simplificada, obtendo-se

$$\mu\Phi \cong \mu(2e_{12})^2 \quad [\text{A.9}]$$

Além disto, observa-se que a ordem de grandeza da primeira parcela de  $e_{12}$  é de  $\delta$ , enquanto que a da segunda, responsável pela ordem de grandeza de  $e_{12}$ , é de  $1/\delta$ . Assim,  $e_{12}$  também pode ser simplificado, obtendo-se desta forma

$$e_{12} \cong \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{u}{h_1} \right) \quad [\text{A.10}]$$

Desenvolvendo a derivada de produto no termo  $e_{12}$ , obtem-se

$$e_{12} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad [\text{A.11}]$$

Substituindo na equação A.9, resulta

$$\mu\Phi = 4\mu \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right]^2 \quad [\text{A.12}]$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença, tem-se

$$\mu\Phi = 4\mu \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \left( \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] \quad [\text{A.13}]$$

A partir dessa expressão são deduzidas as parcelas média e flutuante da dissipação viscosa, na seção referente aos termos flutuantes (apêndice F).

## APÊNDICE B

### OPERADORES EM COORDENADAS GERAIS

Os operadores diferenciais presentes nas equações de transporte sofrem as transformações correspondentes à mudança de coordenadas  $(x,y) \longrightarrow (x_1,y_1)$ . Para realizar tais transformações, é interessante recordar algumas regras para a obtenção de coeficientes métricos empregados em conversões de coordenadas. Quando se passa do sistema cartesiano para outro sistema qualquer de coordenadas ortogonais, as novas coordenadas são relacionadas com  $x$  e  $y$  através do comprimento de arco  $ds$ , definido em duas dimensões como

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad [B.1]$$

em coordenadas cartesianas, e como

$$(ds)^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dy_1)^2 \quad [B.2]$$

em outro sistema qualquer de coordenadas ortogonais. Nessas equações os fatores de conversão  $h$ , chamados coeficientes métricos, representam a variação do comprimento  $ds$  sobre duas direções ortogonais  $x_1$  e  $y_1$ , e são obtidos igualando-se as expressões de  $ds$ :

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2} \quad \text{e} \quad h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2} \quad [B.3]$$

Com os coeficientes métricos, pode-se redefinir os operadores diferenciais a fim de obter equações de transporte válidas para

qualquer sistema ortogonal, a partir das mesmas em coordenadas retangulares. Os operadores em coordenadas gerais são definidos como:

Gradiente:

$$\nabla A = \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial A}{\partial y_1} \right] \quad [B.4]$$

Divergente:

$$\nabla \cdot A = (h_1 h_2)^{-1} \left[ \frac{\partial (h_2 A_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 A_2)}{\partial y_1} \right] \quad [B.5]$$

Rotacional:

$$\nabla \times A = \left[ 0, 0, (h_1 h_2)^{-1} \left[ \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial y_1} \right] \right] \quad [B.6]$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 A = (h_1 h_2)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial A}{\partial y_1} \right] \right\} \quad [B.7]$$

Derivada convectiva:

$$(V \cdot \nabla) A = (h_1 h_2)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 u A) + \frac{\partial}{\partial y_1} (h_1 v A) \right] \quad [B.8]$$

Nessas expressões, A representa u, v ou T. Convem lembrar que u e v são as componentes da velocidade em  $x_1$  e  $y_1$  respectivamente; não representam as componentes cartesianas.

É necessário ainda desenvolver algumas derivadas de

produto, simplificar os termos resultantes, e substituir a função A pelas variáveis de interesse no problema (u, v e T) Procedendo dessa maneira, obtem-se a expressão dos operadores diferenciais:

## Divergente

$$\nabla \cdot V = (h_1 h_2)^{-1} \left[ u \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} \right] \quad [B.9]$$

## Rotacional

$$\nabla \times V = \left( 0, 0, (h_1 h_2)^{-1} \left[ v \frac{\partial h_2}{\partial y_1} + h_2 \frac{\partial v}{\partial y_1} + u \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} \right] \right) \quad [B.10]$$

## Laplaciano

$$\nabla^2 u = (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right] \quad [B.11]$$

$$\nabla^2 v = (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \right] \quad [B.12]$$

$$\nabla^2 T = (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \right] \quad [B.13]$$

## Derivada convectiva e termos inerciais

$$(V \cdot \nabla) T = \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} \quad [B.14]$$

$$(V \cdot \nabla) u = \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \quad [B.15]$$

$$(V \cdot \nabla) v = \frac{u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad [B.16]$$

Os termos  $H_1$  e  $H_2$ , presentes no operador laplaciano, são dados por

$$H_1 = \frac{1}{h_1^2} \left( h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{1}{h_2^2} \left( h_1 \frac{\partial h_2}{\partial y_1} + h_2 \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right) \quad [\text{B.17}]$$

A partir daí, basta reescrever as equações de transporte envolvidas no problema, substituindo os operadores presentes por suas respectivas expressões no sistema de coordenadas escolhido, para então obter os coeficientes métricos específicos para a transformação de coordenadas dada anteriormente (os coeficientes métricos são calculados numericamente no programa).

## APÊNDICE C

### INVERSÃO DA TRANSFORMAÇÃO

Para obter as coordenadas curvilíneas  $x_1$  e  $y_1$ , foi empregada uma técnica de mapeamento conforme<sup>11</sup> que consiste em inverter analiticamente uma transformação no plano complexo. Muitas outras transformações para geometrias específicas podem ser encontradas em tabelas especializadas<sup>12</sup>. A mudança de coordenadas apresentada equivale à transformação  $w = z + 1/z$ , onde  $z = x + iy$  e  $w = x_1 + iy_1$ . Uma vez que as novas equações serão escritas exclusivamente em função de  $x_1$  e  $y_1$ , deve ser encontrada a transformação inversa para determinar  $h_1$  e  $h_2$ :

$$w = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} \quad \text{[C.1]}$$

$$z^2 - wz + 1 = 0 \quad \text{[C.2]}$$

$$z = \frac{1}{2} \left[ w \pm \sqrt{w^2 - 4} \right] \quad \text{[C.3]}$$

$$x + iy = \frac{1}{2} \left[ x_1 + y_1 \pm \sqrt{x_1^2 - y_1^2 + 2ix_1y_1 - 4} \right] \quad \text{[C.4]}$$

Para avaliar o termo  $\sqrt{x_1^2 + 2ix_1y_1 - y_1^2 - 4}$ , é necessário encontrar as partes real e imaginária da função complexa  $f(z) = z^{1/2}$ , ou seja, é preciso inverter a transformação  $f^{-1}(z) = z^2$ :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \quad \text{[C.5]}$$

Separando-se as partes real e imaginária da função, resulta o seguinte sistema:

$$\operatorname{Re} = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \quad [\text{C.6}]$$

$$\operatorname{Im} = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy \quad [\text{C.7}]$$

Resolvendo o sistema para  $x$  e  $y$ , obtêm-se

$$y = \pm \sqrt{\frac{-\operatorname{Re} \pm \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2}}{2}} \quad [\text{C.8}]$$

$$x = \frac{\operatorname{Im}}{2y} \quad [\text{C.9}]$$

Assim, para calcular o termo em questão, basta substituir  $\operatorname{Re}$  por  $x_1^2 - y_1^2 - 4$  e  $\operatorname{Im}$  por  $2x_1y_1$  nas expressões de  $x$  e  $y$ . Então a transformação inversa (isto é,  $x$  e  $y$  expressos em função das coordenadas  $x_1$  e  $y_1$ ) resulta

$$x = \frac{x_1}{2} + 2x_1y_1 \pm \left[ \sqrt{-x_1^2 - y_1^2 + 4 \pm \sqrt{(x_1^2 - y_1^2 - 4)^2 + (2x_1y_1)^2}} \right]^{-1} \quad [\text{C.10}]$$

$$y = y_1 \pm \left[ \sqrt{-x_1^2 - y_1^2 + 4 \pm \sqrt{(x_1^2 - y_1^2 - 4)^2 + (2x_1y_1)^2}} \right]^{-1} \quad [\text{C.11}]$$

Determina-se então  $h_1$  e  $h_2$ , através de suas definições:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2} \quad [\text{C.12}]$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2} \quad [\text{C.13}]$$

O resultado desta operação não será apresentado, pois as derivadas que definem  $h_1$  e  $h_2$  são calculadas numericamente.

## APENDICE D

### DISTRIBUIÇÕES INICIAIS DE VELOCIDADE E PRESSÃO

Para que seja possível obter convergência razoavelmente rápida para o método numérico, é preciso estipular uma distribuição de velocidade e pressão relativamente próxima àquela que ocorre no escoamento real. O perfil inicial escolhido é o de escoamento potencial, obtido a partir da função corrente descrita nas coordenadas  $x_1 - y_1$ :

$$\psi = U_{\infty} y_1 \quad [D.1]$$

Em coordenadas curvilíneas, a relação entre  $\psi$  e  $y_1$  é dada por

$$u = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \quad [D.2]$$

Efetuada a derivação, obtem-se a distribuição potencial de velocidades no sistema  $x_1 - y_1$ :

$$u = \frac{1}{h_2} U_{\infty} \quad [D.3]$$

O resultado é análogo ao obtido para o escoamento potencial uniforme. No próximo apêndice, que trata da adimensionalização das equações do modelo, será obtida a componente adimensional  $u^*$ , dada por  $u/U_{\infty}$ . Escrita agora em termos de  $u^*$ , a distribuição inicial de velocidades sofre ainda uma simplificação adicional. Omitindo o símbolo \* para uniformizar a notação em relação aos resultados que surgirão no apêndice E, a condição inicial torna-se

$$u = \frac{1}{h_2} \quad [D.4]$$

O último resultado pode sugerir, a princípio, que a velocidade é a mesma em cada ponto da malha. É importante salientar, entretanto, que o coeficiente métrico  $h_2$  varia com  $x_1$  e  $y_1$ .

Foi deduzida a distribuição inicial de velocidades. Resta agora apresentar a distribuição inicial de pressões. Neste caso é mais simples utilizar a equação polar que define a distribuição potencial de pressões sobre um cilindro de raio unitário<sup>7</sup>, dada por

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}(1 - 4\text{sen}^2\theta) \quad [D.5]$$

e redefini-la em termos das coordenadas  $x_1$  e  $y_1$  através das relações de conversão polar-retangular

$$x = r\cos\theta \quad [D.6]$$

$$y = r\text{sen}\theta \quad [D.7]$$

e das equações 21 e 22. Essa passagem é efetuada numericamente, de modo que o equivalente analítico de D.5 em termos das coordenadas do problema não será apresentado. Quanto a  $p_\infty$ , é atribuído o valor zero para essa grandeza, uma vez que os termos de interesse nas equações de quantidade de movimento são as derivadas de  $p$ , especialmente  $\partial p/\partial x_1$ , e a constante  $p_\infty$  é eliminada na derivação. Assim, a equação D.5 assume sua forma final:

$$p = \frac{1}{2}(1 - 4\text{sen}^2\theta) \quad [D.8]$$

## APENDICE E

### ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

#### E.1 EQUAÇÃO ADIMENSIONAL DA CONTINUIDADE

As grandezas adimensionais empregadas nessa operação são as seguintes:

$$u^* = u/U_{\infty} \quad [E.1]$$

$$v^* = v/U_{\infty} \quad [E.2]$$

$$x_1^* = x_1/D \quad [E.3]$$

$$y_1^* = y_1/D \quad [E.4]$$

A equação da continuidade em coordenadas curvilíneas

$$u \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad [E.5]$$

escrita em termos das grandezas adimensionais, possui a seguinte expressão:

$$u^* U_{\infty} \frac{\partial h_2}{\partial x_1^* D} + h_2 \frac{\partial u^* U_{\infty}}{\partial x_1^* D} + v^* U_{\infty} \frac{\partial h_1}{\partial y_1^* D} + h_1 \frac{\partial v^* U_{\infty}}{\partial y_1^* D} = 0 \quad [E.6]$$

Multiplicando-se a última equação por  $D/U_{\infty}$ , obtém-se

$$u^* \frac{\partial h_2}{\partial x_1^*} + h_2 \frac{\partial u^*}{\partial x_1^*} + v^* \frac{\partial h_1}{\partial y_1^*} + h_1 \frac{\partial v^*}{\partial y_1^*} = 0 \quad [E.7]$$

Uma vez que todas as grandezas envolvidas possuem o índice \*, este pode ser omitido. Dessa forma, a equação adimensional resulta

$$u \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + h_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad [\text{E.8}]$$

## E.2 EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Nesta equação são usadas todas as grandezas definidas na seção anterior, além do tempo adimensional, dado por

$$t^* = tU\omega/D \quad [\text{E.9}]$$

A equação de quantidade de movimento em  $x_1$  é expressa em coordenadas curvilíneas como

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right] + \frac{1}{h_1} \rho \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu (h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad [\text{E.10}]$$

Sua expressão em termos das grandezas adimensionais, quando multiplicada por  $D/\rho U\omega^2$ , fornece a equação adimensionalizada.

Após a simplificação dos termos, resulta

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^*}{h_1} \frac{\partial u^*}{\partial x_1^*} + \frac{v^*}{h_2} \frac{\partial u^*}{\partial y_1^*} + \frac{1}{h_1} \rho \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} - (h_1 h_2)^{-1} \frac{\mu}{\rho D U \omega} \left[ H_1 \frac{\partial u^*}{\partial x_1^*} + \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^{*2}} + H_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_1^*} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y_1^{*2}} \right] = 0 \quad [\text{E.11}]$$

onde o grupo  $\mu/\rho D U \omega$  é o inverso do número de Reynolds baseado no diâmetro do tubo. Omitindo os índices, tal como na equação da continuidade, obtém-se

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\underline{u}}{h_1} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1} + \frac{\underline{v}}{h_2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \rho \frac{\partial p}{\partial x_1} -$$

$$(h_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad \text{[E.12]}$$

A mesma operação é feita para adimensionalizar a equação de quantidade de movimento em  $y_1$ , obtendo-se um resultado análogo:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\underline{u}}{h_1} \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1} + \frac{\underline{v}}{h_2} \frac{\partial \underline{v}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_2} \rho \frac{\partial p}{\partial y_1} -$$

$$(h_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial y_1^2} \right] = 0 \quad \text{[E.13]}$$

### E.3 EQUAÇÃO ADIMENSIONAL DA ENERGIA

Nesse caso são utilizados todos os termos adimensionais já definidos, além da temperatura adimensional, cuja expressão depende dos valores das temperaturas da corrente livre e da parede dos dutos:

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad \text{quando } T_s > T_\infty \quad \text{[E.14]}$$

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \quad \text{quando } T_s < T_\infty \quad \text{[E.15]}$$

A equação da energia, cuja expressão é dada por

$$\begin{aligned} & \rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} \right] - \\ & k(h_1 h_2)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \right] - \\ & 4\mu \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \left( \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad [E.16]$$

assume sua expressão adimensional ao ser multiplicada por  $D/\rho C_p U \alpha (T_s - T_\infty)$ , segundo o mesmo procedimento empregado nas equações anteriores:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{u^*}{h_1} \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + \frac{v^*}{h_2} \frac{\partial T^*}{\partial y_1^*} - \\ & (h_1 h_2)^{-1} \frac{k}{\rho C_p U \alpha D} \left[ H_1 \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + H_2 \frac{\partial T^*}{\partial y_1^*} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y_1^{*2}} \right] - \\ & \frac{4\mu U \alpha}{D \rho C_p (T_s - T_\infty)} \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^*}{\partial y_1^*} \right)^2 - \frac{2u^*}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1^*} \frac{\partial u^*}{\partial y_1^*} + \left( \frac{u^*}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1^*} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad [E.17]$$

onde o grupo  $k/\rho C_p U \alpha D$  é o inverso do produto  $RePr$ , e o termo  $\mu/D\rho C_p(T_s - T_\infty)$  equivale ao quociente  $2Ec/Re$ . Suprimindo os índices e reescrevendo os grupos adimensionais na forma compacta, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} - \\ & (h_1 h_2 RePr)^{-1} \left[ H_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \right] - \\ & \frac{8Ec}{Re} \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \left( \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad [E.18]$$

## APÊNDICE F

### INCLUSÃO DAS PARCELAS FLUTUANTES

Foi mencionado em seções anteriores, que o método utilizado busca a solução estacionária do escoamento em estudo. Para que possam ser considerados os efeitos da turbulência no modelo matemático, é preciso que este descreva o escoamento turbulento médio, sem levar em consideração as flutuações instantâneas de velocidade e temperatura ocorridas no fluxo turbulento real. Para tanto, se faz necessário decompor as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $T$  em componentes médias e flutuantes, a fim de reavaliar os termos das equações diferenciais que compõem o modelo. Uma vez que a equação da continuidade não é afetada por esse tratamento, devem ser reformuladas as equações de quantidade de movimento e da energia.

### F.1 TERMOS DAS EQUAÇÕES DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

As parcelas inerciais das equações de quantidade de movimento são definidas em coordenadas curvilíneas pelas seguintes expressões:

$$(V.\nabla)u = \frac{1}{h_1} u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} v \frac{\partial u}{\partial y_1} \quad [F.1]$$

$$(V.\nabla)v = \frac{1}{h_1} u \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} v \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad [F.2]$$

As velocidades  $u$  e  $v$  são decompostas em suas parcelas média e flutuante, da seguinte forma

$$u = \bar{u} + u' \quad [F.3]$$

$$v = \bar{v} + v' \quad [F.4]$$

Substituindo as expressões de  $u$  e  $v$  nos termos inerciais, e aplicando as regras relativas a médias temporais, resulta

$$(\nabla \cdot \nabla)u = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.5}]$$

$$(\nabla \cdot \nabla)v = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.6}]$$

Os produtos de parcelas médias por derivadas de parcelas flutuantes e os produtos de parcelas flutuantes por derivadas de parcelas médias são eliminados, pois suas médias temporais são nulas. A fim de facilitar a compreensão das próximas operações, serão adotadas as seguintes definições para os termos médios e flutuantes desses operadores:

$$(\nabla \cdot \nabla) \bar{u} = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \quad [\text{F.7}]$$

$$(\nabla \cdot \nabla) u' = \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.8}]$$

$$(\nabla \cdot \nabla) \bar{v} = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} \quad [\text{F.9}]$$

$$(\nabla \cdot \nabla) v' = \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.10}]$$

A partir de agora serão desenvolvidos os termos flutuantes  $(\nabla \cdot \nabla)u'$  e  $(\nabla \cdot \nabla)v'$ , fazendo uso da equação da continuidade em coordenadas curvilíneas. Aplicando a regra do produto de derivadas, obtem-se a seguinte equação:

$$\langle \nabla \cdot \nabla \rangle u' = \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' u'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial u' v'}{\partial y_1}} - \left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] \quad [\text{F.11}]$$

$$\langle \nabla \cdot \nabla \rangle v' = \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' v'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial v' v'}{\partial y_1}} - \left[ \frac{1}{h_1} \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] \quad [\text{F.12}]$$

Os termos entre colchetes podem ser reescritos como

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \frac{u'}{h_1 h_2} \overline{\left\{ h_2 \frac{\partial u'}{\partial x_1} + h_1 \frac{\partial v'}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.13}]$$

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \frac{v'}{h_1 h_2} \overline{\left\{ h_2 \frac{\partial u'}{\partial x_1} + h_1 \frac{\partial v'}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.14}]$$

Por sua vez, os termos entre chaves podem ser escritos em função do operador divergente em coordenadas curvilíneas. As equações acima tornam-se então

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \frac{u'}{h_1 h_2} \overline{\left\{ \frac{\partial(h_2 u')}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 v')}{\partial y_1} - u' \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.15}]$$

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \frac{v'}{h_1 h_2} \overline{\left\{ \frac{\partial(h_2 u')}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 v')}{\partial y_1} - u' \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.16}]$$

A equação da continuidade, escrita em termos das parcelas flutuantes da velocidade, é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{V}' = (h_1 h_2)^{-1} \left[ \frac{\partial (h_2 u')}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 v')}{\partial y_1} \right] = 0 \quad [\text{F.17}]$$

e portanto as duas primeiras parcelas dos termos entre chaves se anulam em ambas as equações, obtendo-se

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \overline{\frac{-u'}{h_1 h_2} \left\{ u' \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.18}]$$

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = \overline{\frac{-v'}{h_1 h_2} \left\{ u' \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\}} \quad [\text{F.19}]$$

As expressões entre chaves devem ser escritas novamente em termos dos produtos de componentes flutuantes:

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = -(h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u' u' \frac{\partial h_2}{\partial x_1}} + \overline{u' v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1}} \right\} \quad [\text{F.20}]$$

$$\left[ \frac{1}{h_1} \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x_1}} - \frac{1}{h_2} \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y_1}} \right] = -(h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u' v' \frac{\partial h_2}{\partial x_1}} + \overline{v' v' \frac{\partial h_1}{\partial y_1}} \right\} \quad [\text{F.21}]$$

Substituindo o conteúdo dos colchetes nas expressões que definem as parcelas flutuantes dos termos inerciais, obtém-se a seguinte equação:

$$(V.\nabla)u' = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y_1} + (h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u'u'} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \overline{u'v'} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} \quad [F.22]$$

$$(V.\nabla)v' = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y_1} + (h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u'v'} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \overline{v'v'} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} \quad [F.23]$$

Para obter os termos inerciais completos, faz-se as somas

$$(V.\nabla)u = (V.\nabla)\bar{u} + (V.\nabla)u' \quad [F.24]$$

$$(V.\nabla)v = (V.\nabla)\bar{v} + (V.\nabla)v' \quad [F.25]$$

a qual resulta nas expressões

$$(V.\nabla)u = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y_1} + (h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u'u'} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \overline{u'v'} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} \quad [F.26]$$

$$(V.\nabla)v = \frac{1}{h_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y_1} + (h_1 h_2)^{-1} \left\{ \overline{u'v'} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \overline{v'v'} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right\} \quad [F.27]$$

## F.2 TERMOS DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

A dissipação viscosa,  $\mu \bar{\epsilon}$ , e a derivada convectiva,  $(V.\nabla)T$ , devem ser reformulados quando se avalia o escoamento turbulento médio.

### F.2.1 DISSIPACÃO VISCOSA

No apêndice A foi obtida a seguinte expressão para a dissipação viscosa:

$$\mu\Phi = 4\mu \left[ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \underline{u} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} + \left( \frac{\underline{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] \quad [\text{F.28}]$$

É necessário agora reescrever  $\underline{u}$  em termos de seus valores médio e flutuante, e avaliar cada um dos tres termos presentes em  $\mu\Phi$ .

Substituindo  $\underline{u} = \bar{\underline{u}} + \underline{u}'$  no primeiro termo, e aplicando as regras para a obtenção de médias temporais, resulta

$$\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} \right)^2 = \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial y_1} \right)^2 + \overline{\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y_1} \right)^2} \quad [\text{F.29}]$$

Para o segundo e terceiro termos o procedimento é o mesmo, e as expressões obtidas são

$$\frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \underline{u} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y_1} = \frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{\underline{u}} \frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial y_1} + \frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \overline{\underline{u}' \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.30}]$$

$$\left( \frac{\underline{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 = \left( \frac{\bar{\underline{u}}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 + \overline{\left( \frac{\underline{u}'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2} \quad [\text{F.31}]$$

Uma vez que

$$\overline{\underline{u}' \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y_1}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \underline{u}'^2}{\partial y_1}} \quad [\text{F.32}]$$

a equação [F.31] pode ser reescrita, obtendo-se

$$\frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} u \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{2}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \overline{\frac{\partial u' u'}{\partial y_1}} \quad [\text{F.33}]$$

### F.2.2 DERIVADA CONVECTIVA

A parcela convectiva  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)T$  da equação da energia, é descrita em coordenadas curvilíneas como

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)T = \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial T}{\partial y_1} \quad [\text{F.34}]$$

Substituindo  $u = \bar{u} + u'$  e  $T = \bar{T} + T'$  e calculando as médias temporais resultantes, obtém-se

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)T = \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_1} + \frac{\overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x_1}}}{h_1} + \frac{\overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y_1}}}{h_2} \quad [\text{F.35}]$$

As parcelas flutuantes podem ser trabalhadas em função da equação da continuidade em coordenadas curvilíneas. Utilizando a definição de derivada de produto para reformular o terceiro e o quarto termos, tem-se

$$\frac{\overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x_1}}}{h_1} + \frac{\overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y_1}}}{h_2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u' T'}}{\partial x_1} - \frac{\overline{T' \frac{\partial u'}{\partial x_1}}}{h_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v' T'}}{\partial y_1} - \frac{\overline{T' \frac{\partial v'}{\partial y_1}}}{h_2} \quad [\text{F.36}]$$

reagrupando os termos, resulta

$$\frac{\overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x_1}}}{h_1} + \frac{\overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y_1}}}{h_2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u' T'}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v' T'}}{\partial y_1} - \overline{T' \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial v'}{\partial y_1} \right]} \quad [\text{F.37}]$$

Somando e subtraindo  $T' \left[ \frac{u'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{v'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right]$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u' \partial T'}}{h_1 \partial x_1} + \frac{\overline{v' \partial T'}}{h_2 \partial y_1} &= \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' T'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial v' T'}{\partial y_1}} - \\ T' \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x_1} + \frac{u'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y_1} + \frac{v'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right] &- \\ T' \left[ \frac{u'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{v'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right] & \end{aligned} \quad \text{[F.38]}$$

Como as componentes flutuantes satisfazem a equação da continuidade, o penúltimo termo é nulo, pois o conteúdo do colchete representa o operador divergente em coordenadas curvilíneas. Assim, a equação [F.37] reduz-se a

$$\frac{\overline{u' \partial T'}}{h_1 \partial x_1} + \frac{\overline{v' \partial T'}}{h_2 \partial y_1} = \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' T'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial v' T'}{\partial y_1}} - T' \left[ \frac{u'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{v'}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right] \quad \text{[F.39]}$$

Para uniformizar a equação, pode-se ainda reescrever o último termo:

$$\frac{\overline{u' \partial T'}}{h_1 \partial x_1} + \frac{\overline{v' \partial T'}}{h_2 \partial y_1} = \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' T'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial v' T'}{\partial y_1}} - \frac{\overline{u' T' \partial h_2}}{h_1 h_2 \partial x_1} - \frac{\overline{v' T' \partial h_1}}{h_1 h_2 \partial y_1} \quad \text{[F.40]}$$

Substituindo as parcelas flutuantes na expressão da derivada convectiva, resulta

$$(\overline{v \cdot \nabla}) T = \frac{\overline{u}}{h_1} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_1} + \frac{\overline{v}}{h_2} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1} \overline{\frac{\partial u' T'}{\partial x_1}} + \frac{1}{h_2} \overline{\frac{\partial v' T'}{\partial y_1}} - \frac{\overline{u' T' \partial h_2}}{h_1 h_2 \partial x_1} - \frac{\overline{v' T' \partial h_1}}{h_1 h_2 \partial y_1} \quad \text{[F.41]}$$

que é a forma final do operador. Serão agora desenvolvidas expressões para os termos flutuantes das equações de quantidade de movimento e energia em função das grandezas médias do modelo

## APÊNDICE G

### MODELO DE TURBULÊNCIA

O tratamento dado às equações de quantidade de movimento e energia no apêndice F gerou os produtos flutuantes  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{v'v'}$ ,  $\overline{u'T'}$  e  $\overline{v'T'}$ , tornando o problema indeterminado, uma vez que se dispõe de um modelo composto por quatro equações diferenciais e nove incógnitas. Para obter o fechamento do sistema, é preciso encontrar relações entre as novas incógnitas e as variáveis originais do problema. O modelo utilizado para avaliar essas grandezas é fundamentado em teorias de comprimento de mistura e grandezas aparentes, cujas referências serão fornecidas ao longo das deduções.

#### G.1 COMPONENTES $u'$ E $v'$

De acordo com a teoria do comprimento de mistura de Prandtl,

$$|u'| = \ell_1 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| \quad [G.1]$$

Prandtl também supôs que a ordem de grandeza da componente  $v'$  fosse a mesma de  $u'$ , de modo que

$$|v'| = \ell_2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| \quad [G.2]$$

Como os comprimentos de mistura  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são proporcionais, pode-se escrever  $\ell_2 = k\ell_1 = k\ell$ . Foi escolhido o valor  $k=1$  para o modelo, mas a constante permanece explicitamente nas equações até que surjam valores mais adequados.

A partir das equações obtidas são deduzidas as

expressões para os produtos entre termos flutuantes presentes nas equações de quantidade de movimento e energia.

## G.2 PRODUTOS DE COMPONENTES FLUTUANTES

Os termos  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{v'v'}$ ,  $\overline{u'T'}$ ,  $\overline{v'T'}$  e suas derivadas podem agora ser postos em função de  $\partial\bar{u}/\partial y_1$  fazendo uso dos resultados obtidos na seção anterior:

$$\overline{u'u'} = \ell^2 \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \quad [G.3]$$

$$\overline{u'v'} = -k\ell^2 \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \quad [G.4]$$

$$\overline{v'v'} = k^2\ell^2 \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \quad [G.5]$$

Calculados esses valores, obtem-se as derivadas contidas no modelo:

$$\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x_1} = 2\ell\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial\ell}{\partial x_1} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right] \quad [G.6]$$

$$\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y_1} = -2k\ell\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial\ell}{\partial y_1} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_1^2} \right] \quad [G.7]$$

$$\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x_1} = -2k\ell\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial\ell}{\partial x_1} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right] \quad [G.8]$$

$$\frac{\partial\overline{v'v'}}{\partial y_1} = 2k^2\ell\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial\ell}{\partial y_1} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_1^2} \right] \quad [G.9]$$

Os termos  $\overline{\left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial y_1} \right)^2}$ ,  $\overline{u'T'}$  e  $\overline{v'T'}$  precisam ser trabalhados. O

primeiro deles, contido no fator de dissipação viscosa, se obtem pela definição de  $u'$  na teoria de comprimento de mistura:

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y_1}\right)^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial y_1} \left( l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| \right) \right]^2 \quad [G.10]$$

Desenvolvendo a derivada de produto, obtem-se

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y_1}\right)^2} = \left[ \frac{\partial l}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| + l \frac{\partial}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| \right]^2 \quad [G.11]$$

Para avaliar o termo que contem a derivada do módulo, deve-se recordar que

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| = \frac{\partial}{\partial y_1} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1}\right)^2} \quad [G.12]$$

Aplicando a regra da cadeia, obtem-se

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| = \frac{1}{2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1}\right)^2}} 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \quad [G.13]$$

Simplificando a expressão, resulta

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| = \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1}}{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right|} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \quad [G.14]$$

Mas o quociente entre valor de uma variável e seu módulo é igual ao sinal da variável, e portanto

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| = \text{sgn} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \quad [G.15]$$

onde  $\text{sgn}$  é a função sinal (derivada da função módulo), que assume os valores 1 para argumento positivo, -1 para argumento negativo, e 0 para argumento nulo. Substituindo o resultado obtido na equação [F.53], obtém-se

$$\overline{\left( \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y_1} \right)^2} = \left[ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| + \ell \text{sgn} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right]^2 \quad [G.16]$$

Resta agora calcular as parcelas  $\overline{u'T'}$  e  $\overline{v'T'}$ .

Os termos  $\overline{u'T'}$  e  $\overline{v'T'}$  são obtidos com o auxílio dos modelos para viscosidade e condutividade aparentes<sup>10</sup>:

$$\mu_t = -\rho \overline{u'v'} \quad [G.17]$$

$$k_t = -\rho C_p \overline{v'T'} \quad [G.18]$$

Empregando essas grandezas, define-se o número de Prandtl turbulento:

$$\text{Pr}_t = \frac{C_p \mu_t}{k_t} \quad [G.19]$$

o qual é relacionado com o número de Prandtl do fluido através da teoria de Jenkins, adaptada por Rohsenow e Cohen<sup>10</sup>:

$$\text{Pr}_t^{-1} = 416\text{Pr} \left[ \frac{1}{15} + \frac{6}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{\left( \frac{-0,0024n^2\pi^2}{\text{Pr}} \right)} \right] \quad [G.20]$$

Assim, as parcelas turbulentas da derivada convectiva serão dadas por

$$\overline{v'T'} = \overline{u'v'}\text{Pr}_t^{-1} \quad [G.21]$$

$$\overline{u'T'} = \overline{u'u'}\text{Pr}_t^{-1} \quad [G.22]$$

A segunda relação se obtém dividindo-se ambos os lados da primeira por  $k = \ell_2/\ell_1$ . Substituindo as expressões de  $\overline{u'v'}$  e  $\text{Pr}_t$ , obtém-se

$$\overline{v'T'} = -416\text{Pr}k\ell^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \left[ \frac{1}{15} + \frac{6}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{\left( \frac{-0,0024n^2\pi^2}{\text{Pr}} \right)} \right] \quad [G.23]$$

$$\overline{u'T'} = 416\text{Pr}\ell^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 \left[ \frac{1}{15} + \frac{6}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{\left( \frac{-0,0024n^2\pi^2}{\text{Pr}} \right)} \right] \quad [G.24]$$

Uma vez estimados todos os produtos flutuantes, resta apenas determinar uma expressão para o comprimento de mistura  $\ell$  e suas derivadas, e o problema de fechamento estará solucionado.

### G.3 CALCULO DO COMPRIMENTO DE MISTURA

Para estimar o valor de  $l$  foi adotada a hipótese de von Kármán, obtida em Schlichting<sup>20</sup>, segundo a qual o comprimento de mistura depende da inclinação e da concavidade do perfil da componente  $\bar{u}$  da velocidade:

$$l = \kappa \left| \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1}}{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2}} \right| \quad [G.25]$$

onde  $\kappa \cong 0,4$ , valor obtido experimentalmente segundo Schlichting<sup>20</sup>.

Obtida a expressão para o comprimento de mistura  $l$ , restaria então avaliar as derivadas de  $l$  em relação a  $x_1$  e  $y_1$ , também presentes nos produtos entre termos flutuantes, para eliminar a indeterminação do sistema. Como o cálculo das derivadas  $\partial l / \partial x_1$  e  $\partial l / \partial y_1$  é executado numericamente no programa, a partir da equação [F.66], foi eliminado o problema de fechamento do modelo matemático. As equações diferenciais podem agora descrever adequadamente o escoamento turbulento médio. Entretanto, o programa de simulação necessita ainda de um critério de transição de regime que informe a posição a partir da qual se deve considerar as parcelas flutuantes do escoamento.

#### G.4 CRITÉRIO DE TRANSIÇÃO

O critério de transição de regime baseia-se em dados de Zukauskas<sup>13</sup> para valores do número de Nusselt local em escoamentos transversais laminares e turbulentos sobre cilindros isolados. Foram coletados os pontos de transição em diversos gráficos  $N_{ux\theta}$ , sendo obtida a seguinte expressão para o ponto de transição em função do número de Reynolds, através de um ajuste de curvas :

$$x_{1\text{transição}} = -0,10019e^{-6,5462 \cdot 10^{-6} Re + 0,57341} \quad [G.26]$$

O ponto de transição corresponde ao ângulo onde ocorre primeiro ponto de mínimo da curva  $N_{ux\theta}$ . O ajuste da equação G.26 foi efetuado após a conversão de coordenadas de  $\theta$  para  $x_1$ .

## APENDICE H

### INFORMAÇÕES SOBRE O METODO NUMERICO

#### H.1 TESTES DE CONVERGÊNCIA

De acordo com os esquemas de varredura mostrados anteriormente, a malha é percorrida externamente na direção horizontal e internamente na vertical. Cada coluna é percorrida até que os perfis calculados atinjam o regime estacionário, e só então a coluna seguinte é percorrida. Como o método numérico é executado em duas etapas, existem dois testes de convergência independentes: o teste da componente  $u$  e o da temperatura.

##### H.1.1 TESTE PARA $u$

Para verificar se o perfil de  $u$  atingiu o regime permanente, procede-se da seguinte maneira:

- percorre-se toda a coluna  $j$  da malha, e calcula-se  $|u_{n+1} - u_n|$  em cada ponto;
- se em mais de 90% dos pontos verifica-se que

$$|u_{n+1} - u_n| < 10\% \text{ de } |u|$$

considera-se que o perfil convergiu, e pode-se passar à coluna  $j+1$  desde que já tenha sido efetuado um mínimo de 3 iterações.

##### H.1.2 TESTE PARA $T$

O teste é análogo ao de  $u$ , exceto pelos parâmetros envolvidos: a proporção de pontos é de 85%, a tolerância é de 15% e o número mínimo de iterações é de 5.

## H.2 ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MÉTODO

A fim de estimar o maior valor possível de  $\Delta t$ , foi empregado o critério de Von Neumann<sup>21</sup> sobre as equações de quantidade de movimento em  $x_1$  e energia em regime turbulento. Para regime laminar já existem expressões que relacionam  $\Delta t$  máximo com as grandezas do escoamento e dimensões da malha. Foi verificado na execução do sistema, que a relação<sup>10</sup>

$$\Delta t = \left[ \frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} + \frac{2}{Re} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1} \quad [H.1]$$

com  $\Delta x = h_1 \Delta x_1$  e  $\Delta y = h_2 \Delta y_1$ , é válida até  $Re \cong 1100$ . Acima desse valor é usada a expressão obtida por análise de estabilidade. Por simplicidade, as variáveis  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\Delta x_1$  e  $\Delta y_1$  serão chamadas  $x$ ,  $y$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta y$  nas equações das seções H.1 e H.2.

### H.2.1 EQUAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM $x_1$

Fazendo

$$u_{i,j,n} = \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} \quad [H.2]$$

e substituindo nas equação discretizada do quantidade de movimento  $x_1$ , (exceto nos termos não-lineares) obtém-se:

$$\frac{\xi^{n+1} e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y}}{\Delta t} + \frac{u}{h_1} \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{\Delta x} \right] +$$

$$\frac{v}{h_2} \left[ \frac{dyb \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dya)} + (dya-dyb) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dya \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dyb)}}{2dyp} \right]$$

$$- \frac{1}{h_1} \frac{\Delta p}{\Delta x} + (h_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{\Delta x} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - 2\xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y} + \xi^n e^{i\alpha(x-2\Delta x)} e^{i\beta y}}{(\Delta x)^2} \right] + \right.$$

$$H_2 \left[ \frac{dyb \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dya)} + (dya-dyb) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dya \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dyb)}}{2dyp} \right]$$

$$\left. + \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{dya \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dya)} - dya \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dya \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dyb)}}{\frac{1}{2} dyp dya} \right] \right] +$$

$$\frac{2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} x$$

$$\left[ \ell_x \left[ \frac{dyb \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dya)} + (dya-dyb) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + dyb \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dyb)}}{2dyp} \right] \right.$$

$$+ \ell \left[ \frac{dyb \xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta(y+dya)} + (dya-dyb) \xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta y} - \right.$$

$$\left. \frac{dya \xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta(y-dyb)} - dyb \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta(y+dya)} - \right.$$

$$\left. \frac{(dya-dyb) \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y} + dya \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta(y-dyb)}}{4\Delta x dyp} \right] \right]$$

$$- \frac{2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} x$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_y \left[ \frac{dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} + (dy_a - dy_b) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dy_a \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{2dy_p} \right] \right. \\
& + \left. \int \left[ \frac{dy_a \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} - dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{\frac{1}{2}dy_p dy_s} \right] \right] \\
& + (h_1 h_1)^{-1} \left[ \right. \\
& h_{2x} \left[ \int \frac{dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} + (dy_a - dy_b) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dy_a \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{2dy_p} \right]^2 - \\
& kh_{1y} \left[ \int \frac{dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} + (dy_a - dy_b) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - dy_a \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{2dy_p} \right]^2 \\
& \left. \right] = 0 \tag{H.3}
\end{aligned}$$

Antes de passar à próxima etapa, deve-se substituir o gradiente de pressão em termos da velocidade  $u$ . Ao invés de calcular  $p$  a partir da equação de quantidade de movimento em  $y$ , pode-se recorrer à seguinte aproximação pelo uso da equação de Bernoulli:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{h_1} \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{\Delta x} \right] \tag{H.4}$$

Substituindo o gradiente de pressão e dividindo-se os termos por  $\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y}$ , obtem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi-1}{\Delta t} + \frac{v}{h_2} \left[ \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] + \\
& (h_1 h_2 Re)^{-1} \left[ H_1 \left[ \frac{1 - e^{-i\alpha \Delta x}}{\Delta x} \right] + \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{1 - 2e^{-i\alpha \Delta x} + e^{-2i\alpha \Delta x}}{(\Delta x_1)^2} \right] \right] + \\
& H_2 \left[ \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] + \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{dyae^{i\beta dy_a} - dy_s + dybe^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2}dy_p dy_s} \right] \\
& + \frac{2}{h_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} x \\
& \left[ \ell_x \left[ \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] + \right. \\
& \left. \ell \left[ \frac{dybe^{i\alpha \Delta x} e^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} e^{i\alpha \Delta x} - dyae^{i\alpha \Delta x} e^{-i\beta dy_b} - dybe^{-i\alpha \Delta x} e^{i\beta dy_a} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (dy_a - dy_b) e^{-i\alpha \Delta x} + dyae^{-i\alpha \Delta x} e^{-i\beta dy_b} \right]}{4\Delta x dy_p} \right] \\
& - \frac{2}{h_2} k \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} x \\
& \left[ \ell_y \left[ \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] + \ell \left[ \frac{dyae^{i\beta dy_a} - dy_s + dybe^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2}dy_p dy_s} \right] \right] \\
& + (h_1 h_2)^{-1} \left[ h_{2x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \ell \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] - \right. \\
& \left. k h_{1y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \ell \frac{dybe^{i\beta dy_a + (dy_a - dy_b)} - dyae^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] \right] = 0 \quad [H.5]
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\xi-1}{\Delta t} + (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \left[ \frac{1 - e^{-i\alpha\Delta x}}{\Delta x_1} \right] + \\ & (h_1^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{1 - 2e^{-i\alpha\Delta x} + e^{-2i\alpha\Delta x}}{(\Delta x_1)^2} \right] + \\ & \left\{ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 + \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{2}{h_1} \ell_x - \frac{2k}{h_2} \ell_y + (h_1 h_2)^{-1} (h_{2x} - kh_{1y}) \ell \right] \right\} \times \\ & \left[ \frac{dy_b (e^{i\beta dy_a} - 1) + dy_a (1 - e^{-i\beta dy_b})}{2dy_p} \right] + \\ & \left[ (h_2^2 \text{Re})^{-1} - \frac{2}{h_1} \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right] \left[ \frac{dy_a e^{i\beta dy_a} - dy_s + dy_b e^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2} dy_p ds} \right] + \\ & \frac{2}{h_1} \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{[dy_b (e^{i\beta dy_a} - 1) + (1 - e^{-i\beta dy_b})] (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x})}{4\Delta x dy_p} \right] = 0 \quad [H.6] \end{aligned}$$

Substituindo as exponenciais por suas respectivas expressões em senos e cossenos,

$$\begin{aligned} & \frac{\xi-1}{\Delta t} + (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \left[ \frac{1 - \cos\alpha\Delta x + i\sin\alpha\Delta x}{\Delta x_1} \right] + \\ & (h_1^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{1 - 2\cos\alpha\Delta x + 2i\sin\alpha\Delta x + \cos 2\alpha\Delta x + i\sin 2\alpha\Delta x}{(\Delta x_1)^2} \right] + \end{aligned}$$

$$\left\{ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 + \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{2}{h_1} \ell_x - \frac{2\ell}{h_2} \ell_y + (h_1 h_2)^{-1} (h_{2x} - \ell h_{1y}) \ell \right] \right\} \times$$

$$\left[ \frac{dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (1 - \cos \beta dy_b + i \sin \beta dy_b)}{2 dy_p} \right] +$$

$$\left[ (h_2^2 \text{Re})^{-1} - \frac{2}{h_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right] \left[ \frac{dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (\cos \beta dy_b - i \sin \beta dy_b - 1)}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]$$

$$+ \frac{2}{h_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{[dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (1 - \cos \beta dy_b + i \sin \beta dy_b)] 2 i \sin \alpha \Delta x}{4 \Delta x dy_p} \right]$$

$$= 0 \quad \text{[H.7]}$$

Empregando as relações trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{[H.8]}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{[H.9]}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{[H.10]}$$

e rearranjando o terceiro termo da equação, tem-se

$$\frac{\xi - 1}{\Delta t} + (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \left[ \frac{1 - \cos \alpha \Delta x + i \sin \alpha \Delta x}{\Delta x_1} \right] +$$

$$2 (h_1^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{-\sin^2 \alpha \Delta x + i \sin \alpha \Delta x (1 + \cos \alpha \Delta x)}{(\Delta x_1)^2} \right] +$$

$$\left\{ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 + \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{2}{h_1} \ell_x - \frac{2k}{h_2} \ell_y + (h_1 h_2)^{-1} (h_{2x} - kh_{1y}) \ell \right] \right\} \times$$

$$\left[ \frac{dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (1 - \cos \beta dy_b + i \sin \beta dy_b)}{2 dy_p} \right] +$$

$$\left[ (h_2^2 \text{Re})^{-1} - \frac{2}{h_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right] \left[ \frac{dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (\cos \beta dy_b - i \sin \beta dy_b - 1)}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right]$$

$$+ \frac{2}{h_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{[dy_b (\cos \beta dy_a + i \sin \beta dy_a - 1) + dy_a (1 - \cos \beta dy_b + i \sin \beta dy_b)] 2 i \sin \alpha \Delta x}{4 \Delta x dy_p} \right]$$

$$= 0 \quad \text{[H.11]}$$

Como o incremento em  $y_1$  é variável, deve-se estudar a estabilidade na região onde seu valor é o menor possível. Isto se verifica na zona próxima ao cilindro, onde os incrementos  $dy_a$  e  $dy_b$  são praticamente iguais. Assim, fazendo  $dy_a \cong dy_b = \Delta y$ , segue o resultado

$$\frac{\xi - 1}{\Delta t} + (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \left[ \frac{1 - \cos \alpha \Delta x + i \sin \alpha \Delta x}{\Delta x_1} \right] +$$

$$2 (h_1^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{-\sin^2 \alpha \Delta x + i \sin \alpha \Delta x (1 + \cos \alpha \Delta x)}{(\Delta x_1)^2} \right] +$$

$$\left\{ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 + \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{2}{h_1} \ell_x - \frac{2k}{h_2} \ell_y + (h_1 h_2)^{-1} (h_{2x} - kh_{1y}) \ell \right] \right\} \left[ \frac{i \sin \beta \Delta y}{\Delta y} \right] +$$

$$\left[ (h_2^2 \text{Re})^{-1} - \frac{2}{h_1} \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right] \left[ \frac{2(\cos \beta \Delta y - 1)}{(\Delta y)^2} \right] + \frac{2}{h_1} \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{-\text{sen} \alpha \Delta x \text{sen} \beta \Delta y}{\Delta x} \right] = 0 \quad \text{[H.12]}$$

Nas proximidades da parede, verifica-se também que o valor do comprimento de mistura é muito pequeno, assim como o de suas derivadas  $\ell_x$  e  $\ell_y$ , de modo que os termos contendo produtos  $u_x$ ,  $u_y$  e  $\ell^2$  são sempre desprezíveis frente ao termo  $2\bar{u}/h_1$ , independente das condições de escoamento. Desse modo, a equação é novamente simplificada:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi - 1}{\Delta t} + (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \left[ \frac{1 - \cos \alpha \Delta x + i \text{sen} \alpha \Delta x}{\Delta x_1} \right] + \\ & 2(h_1^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{-\text{sen}^2 \alpha \Delta x + i \text{sen} \alpha \Delta x (1 + \cos \alpha \Delta x)}{(\Delta x_1)^2} \right] + \\ & (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \left[ \frac{i \text{sen} \beta \Delta y}{\Delta y} \right] + (h_2^2 \text{Re})^{-1} \left[ \frac{2(\cos \beta \Delta y - 1)}{(\Delta y)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad \text{[H.13]}$$

A condição de estabilidade será satisfeita desde que  $|\xi| \leq 1$ . Isolando  $\xi$  da equação, e aplicando a condição de estabilidade, tem-se

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \right] (1 - \cos \alpha \Delta x + i \text{sen} \alpha \Delta x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_1^2 \text{Re})^{-1} [-\text{sen}^2 \alpha \Delta x + i \text{sen} \alpha \Delta x (1 + \cos \alpha \Delta x)] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{1}{\Delta y} (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \text{isen}\beta\Delta y + \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\cos\beta\Delta y - 1] \right\} \leq 1 \quad [\text{H.14}]$$

o que conduz imediatamente a

$$0 \leq \left| \Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \right] (1 - \cos\alpha\Delta x + \text{isen}\alpha\Delta x) + \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_1^2 \text{Re})^{-1} [\text{sen}^2\alpha\Delta x + \text{isen}\alpha\Delta x(1 + \cos\alpha\Delta x)] + \frac{1}{\Delta y} (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \text{isen}\beta\Delta y + \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\cos\beta\Delta y - 1] \right\} \right| \leq 2 \quad [\text{H.15}]$$

Como  $\Delta t$  é positivo, pode ser isolado diretamente, e uma vez que se procura o seu valor máximo, efetua-se o cálculo em função do limite superior do intervalo. Assim,

$$\Delta t = 2 \left| \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \right] (1 - \cos\alpha\Delta x + \text{isen}\alpha\Delta x) + \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_1^2 \text{Re})^{-1} [\text{sen}^2\alpha\Delta x + \text{isen}\alpha\Delta x(1 + \cos\alpha\Delta x)] + \frac{1}{\Delta y} (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \text{isen}\beta\Delta y + \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\cos\beta\Delta y - 1] \right\} \right|^{-1} \quad [\text{H.16}]$$

é o valor máximo para  $\Delta t$  que preserva a estabilidade do método.

Resta agora avaliar o módulo do número complexo em [H.12]. Suas partes real e imaginária são

$$\begin{aligned} & \text{Real} \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \right] (1 - \cos\alpha\Delta x) + \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_1^2 \text{Re})^{-1} \text{sen}^2\alpha\Delta x + \\ & \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\cos\beta\Delta y - 1] \end{aligned} \quad [\text{H.17}]$$

Imaginária

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_1 \right] \text{sen} \alpha \Delta x + \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_1^2 \text{Re})^{-1} \text{sen} \alpha \Delta x (1 + \text{cos} \alpha \Delta x) +$$

$$\frac{1}{\Delta y} (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \text{sen} \beta \Delta y \quad [\text{H.18}]$$

É possível ainda simplificar essas expressões. Como o valor de  $\Delta y$  é significativamente menor do que  $\Delta x$ , e mesmo do que  $(\Delta x)^2$ , os termos que contém  $\Delta y$  e  $(\Delta y)^2$  no denominador são predominantes sobre os demais. Assumindo essa simplificação, resulta

$$\text{Real} = \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\text{cos} \beta \Delta y - 1] \quad [\text{H.19}]$$

$$\text{Imaginária} = \frac{1}{\Delta y} (h_1 h_2 \text{Re})^{-1} H_2 \text{sen} \beta \Delta y \quad [\text{H.20}]$$

Calculando agora  $\Delta t$  pela definição de módulo de um número complexo, dada por

$$\Delta t = 2 \times \text{Módulo} = 2 \sqrt{(\text{Parte real})^2 + (\text{Parte imaginária})^2} \quad [\text{H.21}]$$

obtém-se

$$\Delta t = 2 \left[ \frac{4}{(\Delta y)^4} (h_2^2 \text{Re})^{-2} [\text{cos} \beta \Delta y - 1]^2 + \frac{1}{(\Delta y)^2} (h_1 h_2 \text{Re})^{-2} H_2^2 \text{sen}^2 \beta \Delta y \right]^{-1/2} \quad [\text{H.22}]$$

Uma vez que  $(\Delta y)^2 \gg (\Delta y)^4$ , o segundo termo do colchete pode ser desprezado, simplificando novamente a expressão:

$$\Delta t = \pm \left[ \frac{4}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [\cos \beta \Delta y - 1] \right]^{-1} \quad \text{[H.23]}$$

Como o valor de  $\Delta t$  é positivo, vale o sinal - à frente da expressão, pois  $\cos(\beta \Delta y)$  varia de -2 a 0. Dessa forma,

$$\Delta t = \left[ \frac{4}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} [1 - \cos \beta \Delta y] \right]^{-1} \quad \text{[H.24]}$$

O termo  $\cos \beta \Delta y$  assume valores de -1 a 1. Tomando o valor médio para  $\beta \Delta y$ , correspondente a  $\cos \beta \Delta y = 0$ , a expressão H.24 resulta

$$\Delta t \cong \left[ \frac{4}{(\Delta y)^2} (h_2^2 \text{Re})^{-1} \right]^{-1} \quad \text{[H.25]}$$

Rearranjando a expressão, obtem-se

$$\Delta t \cong 4h_2^2 \text{Re} (\Delta y)^2 \quad \text{[H.26]}$$

como o valor de  $h_2$  na região de interesse é de aproximadamente 1/2, a expressão pode ser mais uma vez simplificada :

$$\Delta t \cong \text{Re} (\Delta y)^2 \quad \text{[H.27]}$$

## G.2.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA

Fazendo

$$T_{i,j,n} = \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} \quad \text{[H.28]}$$

e levando na equação da energia, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^{n+1} e^{i\alpha x} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y}}{\Delta t} + \\ & \frac{\bar{u}}{h_1} \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{2\Delta x} \right] + \\ & \frac{\bar{v}}{h_2} \left[ \frac{dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} + (dy_a - dy_b) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{2dy_p} \right] \\ & - \frac{2l}{Pr} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right) - \frac{k}{h_2} \left( \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right) - \frac{l}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 (1-k) \right] \\ & + (h_1 h_2 RePr)^{-1} \left[ H_1 \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta y} - \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{2\Delta x_1} \right] + \right. \\ & \left. \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{\xi^n e^{i\alpha(x+\Delta x)} e^{i\beta y} - 2\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + \xi^n e^{i\alpha(x-\Delta x)} e^{i\beta y}}{(\Delta x_1)^2} \right] + \right. \\ & \left. H_2 \left[ \frac{dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} + (dy_a - dy_b) \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{2dy_p} \right] \right. \\ & \left. \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{dy_a \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y+dy_a)} - dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y} + dy_b \xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta(y-dy_b)}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \right] - \\ & \frac{8Ec}{Re} \left\{ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \left( \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right\} + \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| + \ell \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right]^2 - \frac{2\ell}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] + \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 = 0 \quad [\text{H.29}]$$

Dividindo-se os termos por  $\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y}$ :

$$\frac{\xi^{-1}}{\Delta t} + \frac{1}{h_1} \bar{u} \left( \frac{e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}}{2\Delta x_1} \right) + \frac{\bar{v}}{h_2} \left( \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right) -$$

$$\frac{2\ell}{\operatorname{Pr}_t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} (\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1}_x$$

$$\left[ \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial \ell}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} \right] - \frac{k}{h_2} \left[ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] - \frac{\ell}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 (1-k) \right] + (h_1 h_2 \operatorname{RePr})^{-1} \left[ H_1 \left( \frac{e^{i\alpha \Delta x_1} - e^{-i\alpha \Delta x_1}}{2\Delta x_1} \right) + \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{e^{i\alpha \Delta x_1} + e^{-i\alpha \Delta x_1}}{(\Delta x_1)^2} \right) + H_2 \left( \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right) + \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{dy_a e^{i\beta dy_a} - dy_a + dy_b e^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right) \right] - \frac{8\operatorname{Ec}}{\operatorname{Re}} (\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1} \left\{ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \left( \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 + \right.$$

$$\left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right| + \ell \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right]^2 - \frac{2\ell}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \ell \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} \right] + \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 = 0 \quad [\text{H.30}]$$

A exemplo da equação de quantidade de movimento em  $x_1$ , é possível eliminar as parcelas onde existe o termo  $\xi^2$  ou os produtos  $u_x$  e  $u_y$ . Desse modo, a equação torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{\xi-1}{\Delta t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}}{2\Delta x} \right] + \frac{\bar{v}}{h_2} \left[ \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] - \\ & + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} \left[ H_1 \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}}{2\Delta x} \right] + \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\ & \left. H_2 \left[ \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] + \frac{h_2}{h_1} \left[ \frac{dy_a e^{i\beta dy_a} - dy_s + dy_b e^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] \right] \\ & - \frac{8Ec}{\text{Re}} (\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1} \left\{ \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \left[ \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right]^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

(H.31)

Reagrupando os termos, resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\xi-1}{\Delta t} + \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}}{2\Delta x} \right] + \\ & (h_2^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}}{(\Delta x)^2} \right] + \\ & \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_2 \right] \left[ \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] \\ & + (h_1^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{dy_a e^{i\beta dy_a} - dy_s + dy_b e^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{8Ec}{Re}(\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1} \left\{ \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \left( \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \right)^2 \right\} = 0$$

[H.32]

Nas proximidades da parede, zona de maior interesse na avaliação da estabilidade, o termo  $\partial h_1 / \partial y_1$  é muito pequeno, de modo que a última parcela da equação pode ser simplificada:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi-1}{\Delta t} + \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \left[ \frac{e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}}{2\Delta x} \right] + \\ & (h_2^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{e^{i\alpha \Delta x} - 2 + e^{-i\alpha \Delta x}}{(\Delta x)^2} \right] + \\ & \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_2 \right] \left[ \frac{dy_b e^{i\beta dy_a} + (dy_a - dy_b) - dy_a e^{-i\beta dy_b}}{2dy_p} \right] \\ & + (h_1^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{dy_a e^{i\beta dy_a} - dy_s + dy_b e^{-i\beta dy_b}}{\frac{1}{2} dy_p ds} \right] - \\ & \frac{8Ec}{Re} (\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

[H.33]

Recordando que nessa região de interesse  $dy_a \cong dy_b \cong \Delta y$ , a equação se torna

$$\frac{\xi-1}{\Delta t} + \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \left[ \frac{e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}}{2\Delta x} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& (h_2^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}}{(\Delta x)^2} \right] + \\
& \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_2 \right] \left[ \frac{e^{i\beta dy a} - e^{-i\beta dy b}}{2\Delta y} \right] \\
& + (h_1^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{e^{i\beta dy a} + e^{-i\beta dy b} - 2}{(\Delta y)^2} \right] -
\end{aligned}$$

$$\frac{8Ec}{\text{Re}} (\xi^n e^{i\alpha x} e^{i\beta y})^{-1} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 = 0 \quad [\text{H.34}]$$

Reescrevendo as exponenciais em termos de senos e cossenos, vem

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi^{-1}}{\Delta t} + \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \left[ \frac{i \text{sen} \alpha \Delta x}{\Delta x} \right] + (h_2^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{2 \text{cos} \alpha \Delta x}{(\Delta x)^2} \right] + \\
& \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_2 \right] \left[ \frac{i \text{sen} \beta \Delta y}{\Delta y} \right] + \\
& (h_1^2 \text{RePr})^{-1} \left[ \frac{2 (\text{cos} \beta \Delta y - 1)}{(\Delta y)^2} \right] -
\end{aligned}$$

$$\frac{8Ec}{\text{Re}} \xi^n [\text{cos}(\alpha x + \beta y) - i \text{sen}(\alpha x + \beta y)] \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right]^2 = 0 \quad [\text{H.35}]$$

Como  $|\xi| \leq 1$ , o último termo se anula quando  $n$  tende a  $\infty$ .  
 Suprimindo o último termo e aplicando a condição de estabilidade, encontra-se a expressão de  $\Delta t$ :

$$\Delta t = 2 \left| \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \text{isen} \alpha \Delta x + \right. \\ \left. \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (\text{RePr})^{-1} (h_1 h_2)^{-1} H_2 \right] \text{isen} \beta \Delta y + \right. \\ \left. \frac{2}{(\Delta x)^2} (h_2^2 \text{RePr})^{-1} \cos \alpha \Delta x + \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_1^2 \text{RePr})^{-1} [\cos \beta \Delta y - 1] \right|^{-1} \quad \text{[H.36]}$$

Calculando o valor do módulo, e lembrando que  $|x| = \sqrt{x^2}$ , resulta

$$\Delta t = 2 \left\{ -\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right]^2 \text{sen}^2 \alpha \Delta x + \right. \\ \left. \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[ -\frac{\bar{v}}{h_2} - (\text{RePr})^{-1} (h_1 h_2)^{-1} H_2 \right]^2 \text{sen}^2 \beta \Delta y - \right. \\ \left. \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right] \left[ \frac{\bar{v}}{h_2} + (\text{RePr})^{-1} \left\{ (h_1 h_2)^{-1} H_2 + h_2^{-2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right\} \right] \text{sen} \alpha \Delta x \text{sen} \beta \Delta y \right. \\ \left. \frac{4}{(\Delta x)^4} (h_2^2 \text{RePr})^{-2} \cos^2 \alpha \Delta x + \frac{4}{(\Delta y)^4} (h_1^2 \text{RePr})^{-2} [\cos \beta \Delta y - 1]^2 + \right. \\ \left. \frac{2}{(\Delta x)^2} \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_1 h_2 \text{RePr})^{-2} \cos \alpha \Delta x [\cos \beta \Delta y - 1] \right\}^{-1/2} \quad \text{[H.37]}$$

Verificando a ordem de grandeza dos produtos entre incrementos, que formam os denominadores, conclui-se que o segundo, terceiro e quarto termos podem ser desconsiderados frente aos demais, como ocorreu na equação de quantidade de movimento em  $x_1$ . A expressão para  $\Delta t$  torna-se então

$$\Delta t = 2 \left\{ -\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right]^2 \text{sen}^2 \alpha \Delta x + \right. \\ \left. \frac{4}{(\Delta y)^4} (h_1^2 \text{RePr})^{-2} [\cos \beta \Delta y - 1]^2 + \right. \\ \left. \frac{2}{(\Delta x)^2} \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_1 h_2 \text{RePr})^{-2} \cos \alpha \Delta x [\cos \beta \Delta y - 1] \right\}^{-1/2} \quad [\text{H.38}]$$

Substituindo o termo em seno por sua expressão equivalente em cosseno, tem-se

$$\Delta t = 2 \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{\bar{u}}{h_1} + (h_1 h_2 \text{RePr})^{-1} H_1 \right]^2 (\cos^2 \alpha \Delta x - 1) + \right. \\ \left. \frac{4}{(\Delta y)^4} (h_1^2 \text{RePr})^{-2} [\cos \beta \Delta y - 1]^2 + \right. \\ \left. \frac{2}{(\Delta x)^2} \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_1 h_2 \text{RePr})^{-2} \cos \alpha \Delta x [\cos \beta \Delta y - 1] \right\}^{-1/2} \quad [\text{H.39}]$$

Uma vez que os valores extremos -1 e 1 para os cossenos envolvidos geram os valores extremos de  $\Delta t$ , a combinação correspondente ao pior dos casos (que fornece o menor valor para  $\Delta t$ ) é  $\cos \alpha \Delta x = \cos \beta \Delta y = -1$ , da qual resulta

$$\Delta t = 2 \left\{ \frac{16}{(\Delta y)^4} (h_1^2 \text{RePr})^{-2} + \frac{2}{(\Delta x)^2} \frac{2}{(\Delta y)^2} (h_1 h_2 \text{RePr})^{-2} \times 2 \right\}^{-1/2} \quad [\text{H.40}]$$

como o incremento  $\Delta y$  é bem menor do que o incremento  $\Delta x$  nas proximidades da parede, o primeiro termo predomina sobre o segundo, de modo que a expressão para  $\Delta t$  pode ser simplificada:

$$\Delta t = 8(h_1^2 \Delta y \text{RePr})^{-1} \quad [\text{H.41}]$$

Esta equação possui limitações quanto ao intervalo do produto  $\text{RePr}$ , possivelmente devido às simplificações efetuadas. Na prática, é utilizada uma equação que relaciona o incremento  $\Delta t$  da equação da energia com o incremento  $\Delta t$  da equação de quantidade de movimento em  $x_1$ , obtido a partir da equação H.27. Tal relação, obtida através de ajuste a partir de testes realizados com o programa, é dada por

$$\Delta t_e = \Delta t_m \left[ 0,15 + 1,8e^{-19,5-10,7\text{Re}^{0,05}} \right] \quad [\text{H.42}]$$

onde os índices  $e$  e  $m$  referem-se às equações de quantidade de movimento e energia respectivamente. Nesta equação não está presente o número de Prandtl. Foi atribuído o limite mínimo de 0,1 para o valor dessa grandeza, a fim de simplificar a obtenção da equação H.40. É possível que esta aproximação provoque instabilidade no método quando o fluido circulante for um metal líquido ( $\text{Pr} \ll 1$ ). A análise da equação da energia foi apresentada, apesar de seu resultado não ser utilizado, com o objetivo de orientar a obtenção de uma relação de estabilidade mais abrangente, caso o problema mencionado se verifique.

### H.3 DADOS SOBRE A MALHA

São fornecidas a seguir algumas informações sobre a construção e o dimensionamento da grade utilizada.

Formato - como mostrado na figura 7, contorna um semicírculo, de modo que são utilizadas duas unidades para simular o escoamento sobre um único cilindro.

Número de nós - de 17 a 25 na vertical (coordenada  $y_1$ ) e de 30 a 40 na horizontal ( $x_1$ ), segundo a necessidade do usuário. A malha default é de 20x35.

Limites - são determinados pelos valores dos passos transversal e longitudinal do banco de tubos:

$$y_{\text{minimo}} \cong 10^{-4} \quad [\text{H.43}]$$

$$y_{\text{maximo}} = \frac{St}{2} \quad [\text{H.44}]$$

$$x_{\text{maximo}} = \frac{Sl}{2} \quad [\text{H.45}]$$

Razão da progressão geométrica - depende de  $y_{\text{maximo}}$  e do número de pontos sobre  $y_1$ :

$$y_{\text{maximo}} = y_{\text{minimo}} \times q^{mi-1} \quad [\text{H.46}]$$

onde  $mi$  é o número de pontos na direção  $y_1$ . Isolando  $q$ , obtem-se

$$q = \left[ \frac{y_{\text{maximo}}}{y_{\text{minimo}}} \right]^{1/(mi-1)} \quad [\text{H.47}]$$

que é a razão da progressão geométrica segundo a qual varia  $y_1$ .

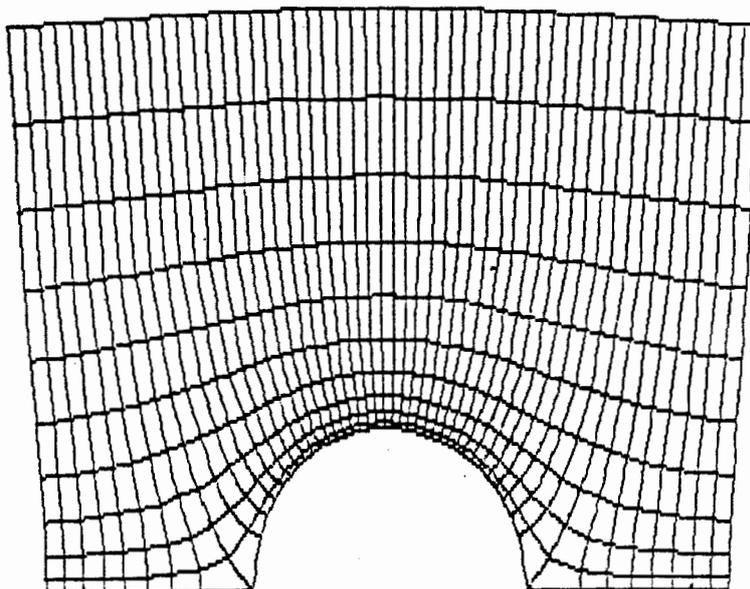


Figura 9 - Malha utilizada

#### H.4 FORMA DISCRETIZADA DAS DERIVADAS

São apresentadas nesta seção as derivadas discretizadas contidas nas equações do modelo numérico. A descrição é bastante sucinta, tendo como finalidade a fixação das equações discretizadas mostradas na seção 4.2 ; é aconselhada a leitura da seção 4.3, que descreve o roteiro de cálculo, antes de iniciar a leitura desta seção.

A regra de notação é a mesma adotada na seção 4.1 : somente índices incrementados ou decrementados figuram como subscritos.

##### H.4.1 DERIVADAS EM RELAÇÃO A $x_1$

As derivadas em relação a  $x_1$  presentes nas equações diferenciais são:

descendente de primeira ordem

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{F_j - F_{j-1}}{dx_1} \quad [\text{H.48}]$$

central de primeira ordem

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{dx_1} \quad [\text{H.49}]$$

descendente de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{F_j - 2F_{j-1} + F_{j-2}}{(dx_1)^2} \quad [\text{H.50}]$$

central de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{F_j - 2F_{j-1} + F_{j-2}}{(dx_1)^2} \quad [\text{H.51}]$$

(Nessas expressões, F representa uma variável do problema.)

As diferenças descendentes de primeira e segunda ordem são empregadas na equação de quantidade de movimento em  $x_1$  para representar as derivadas de  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$  e do comprimento de mistura. Em síntese, diferenças descendentes são usadas para representar derivadas de grandezas cujo valor não é conhecido na coluna  $j+1$  da malha (ver seção 4.3), com exceção da temperatura, cujas derivadas são expressas em termos de diferenças centrais devido ao fato de que a resolução de um problema de convecção forçada permite

essa aproximação; a justificativa para essa afirmação é essencialmente a mesma que explica a ausência de uma distribuição inicial de temperaturas, na seção 3.2.3.

As diferenças centrais são usadas em todos os outros termos que representam derivadas em relação a  $x_1$ .

#### H.4.2 DERIVADAS EM RELAÇÃO A $y_1$

As derivadas em relação a  $y_1$  são escritas como diferenças centrais com incremento variável, calculadas a partir das derivadas primeiras ascendente e descendente:

$$F_y^a = \frac{F_{i+1} - F_i}{dy_a} \quad [\text{H.52}]$$

$$F_y^b = \frac{F_i - F_{i-1}}{dy_b} \quad [\text{H.53}]$$

A diferença central de primeira ordem é simplesmente a média entre os valores de  $F_y^a$  e  $F_y^b$  :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{dy_b F_{i+1} + (dy_a - dy_b) F_i - dy_a F_{i-1}}{2dy_p} \quad [\text{H.54}]$$

recordando que  $dy_p$  é o produto dos incrementos  $dy_a$  e  $dy_b$ .

A derivada segunda é calculada como uma diferença central entre

$F_y^a$  e  $F_y^b$  :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = \frac{F_y^a - F_y^b}{\frac{1}{2} dy_s} \quad [H.55]$$

lembrando também que  $dy_s$  é a soma dos incrementos  $dy_a$  e  $dy_b$ .

Substituindo as expressões de  $F_y^a$  e  $F_y^b$ , resulta

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = \frac{dy_a F_{i+1} - dy_s F + dy_b F_{i-1}}{\frac{1}{2} dy_p dy_s} \quad [H.56]$$

As equações H.44 e H.45 definem as derivadas primeira e segunda utilizadas em todos os termos das equações de transporte, exceto para a derivada de  $\bar{v}$  na equação da continuidade e para a derivada de  $\bar{p}$  na equação de quantidade de movimento em  $y_1$ , ambas descritas por H.41 na metade superior da malha, e por H.42 na metade inferior (ver figura 5).

#### H.4.3 DERIVADAS EM RELAÇÃO A t

As derivadas temporais são ascendentes:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_{n+1} - F}{\Delta t} \quad [H.57]$$

São usadas em  $\bar{u}$  e  $\bar{T}$  nas equações de quantidade de movimento em  $x_1$  e energia, respectivamente

#### H.4.4 DERIVADA MISTA

A derivada  $\partial^2 \bar{u} / \partial x_1 \partial y_1$ , usada no modelo de turbulência, é obtida derivando-se  $\partial \bar{u} / \partial y_1$  em relação a  $x_1$  através da equação

H.45 :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial \bar{u} / \partial y_1 \Big|_{j+1} - \partial \bar{u} / \partial y_1 \Big|_{j-1}}{2\Delta x_1} \quad [\text{H.58}]$$

A derivada  $\partial \bar{u} / \partial y_1$ , por sua vez, se obtém da equação H.54, resultando assim

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{dy_b \left( \bar{u}_{i+1, j+1} - \bar{u}_{i+1, j+1} \right) + (dy_a - dy_b) \left( \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1} \right) - dy_a \left( \bar{u}_{i+1, j-1} - \bar{u}_{i+1, j-1} \right)}{4dx_1 dy_p}$$

[H.59]

## APÊNDICE I

### RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados numéricos discutidos no capítulo 5 se encontram neste anexo, confrontados com alguns dados experimentais e numéricos pesquisados.

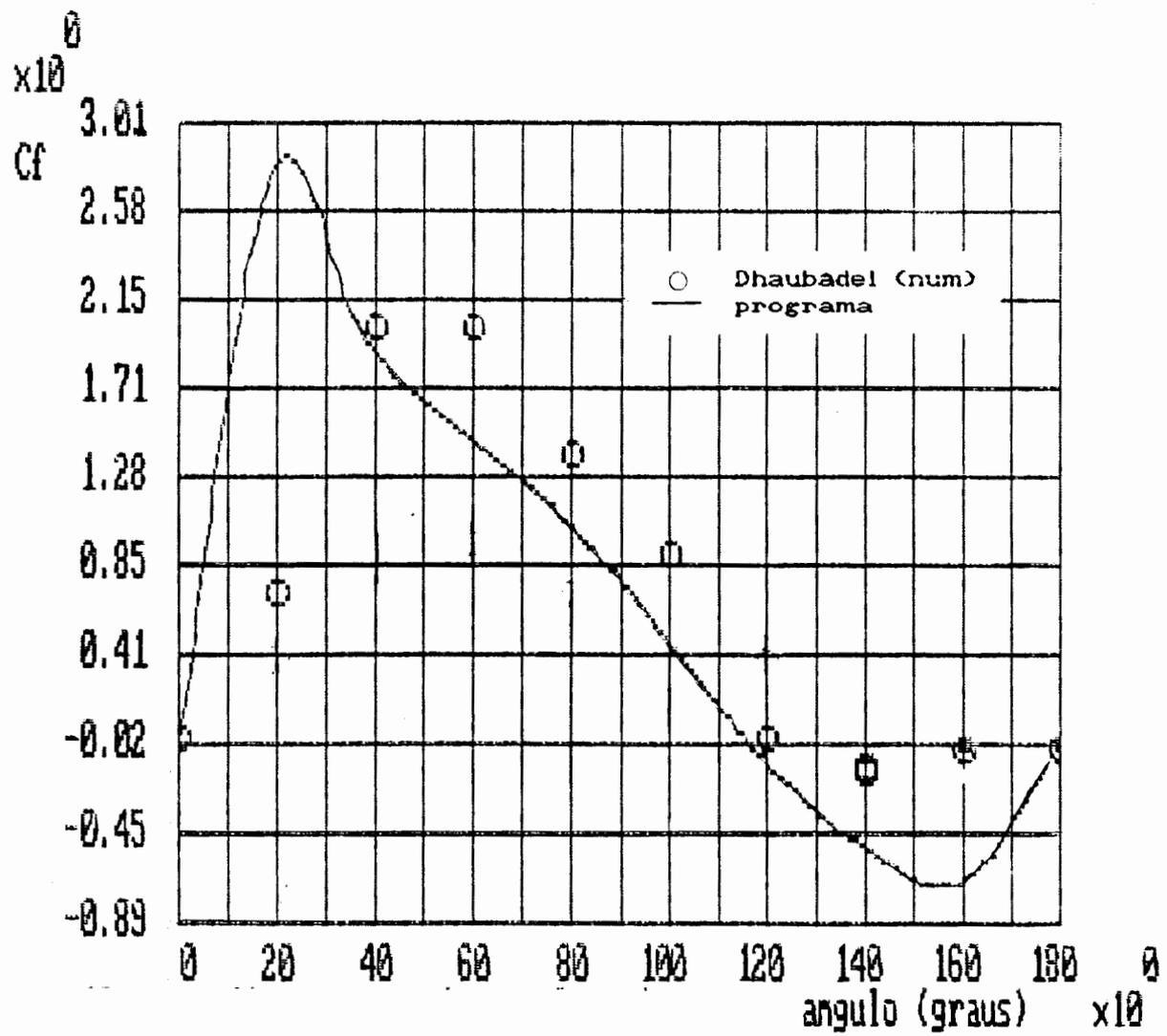


Figura 10 - Coeficiente de arrasto local para um tubo isolado

( $Re = 200$ )

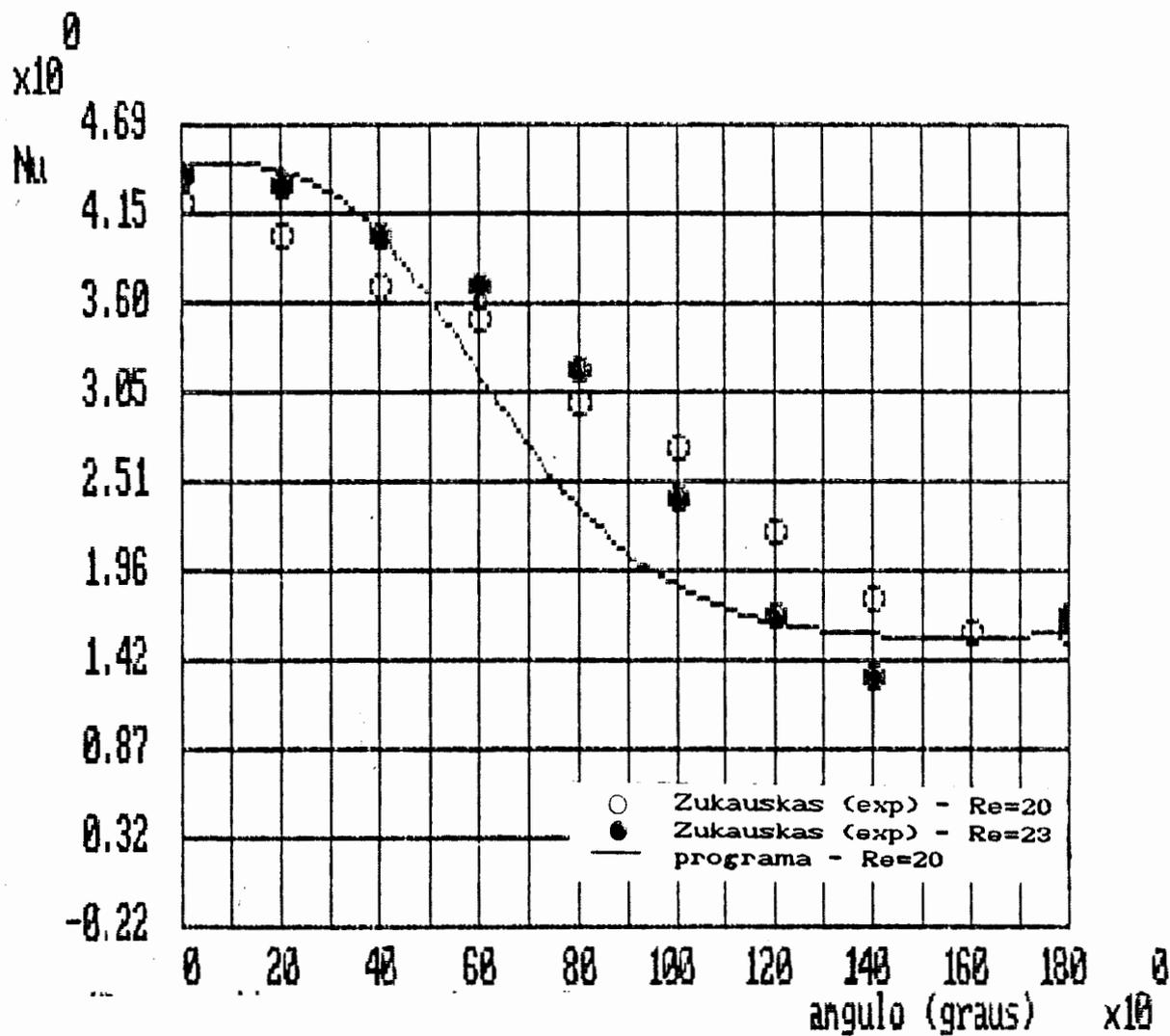


Figura 11 - Número de Nusselt local para um tubo isolado  
(Re = 20)

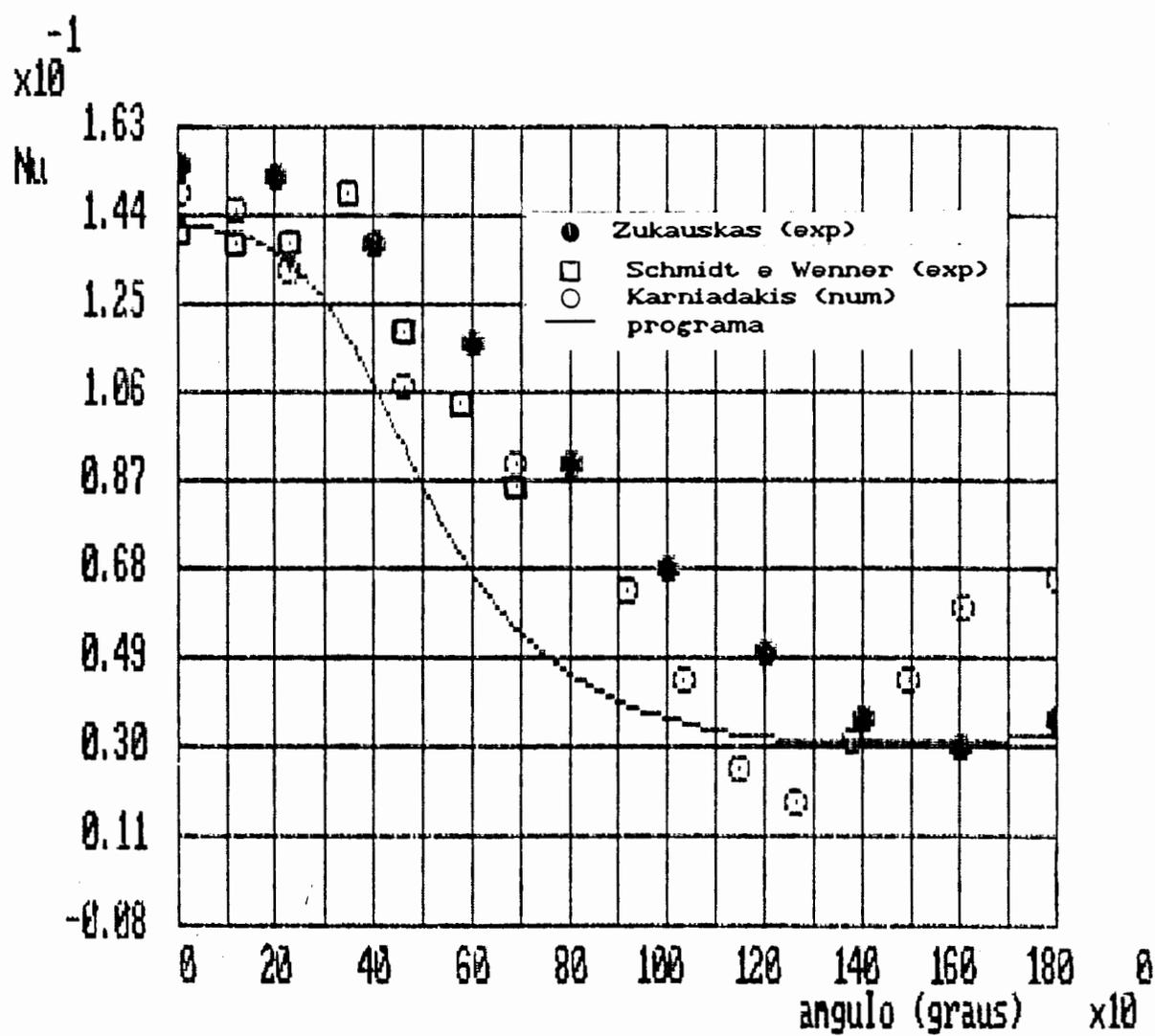


Figura 12 - Número de Nusselt local para tubo isolado ( $Re = 200$ )

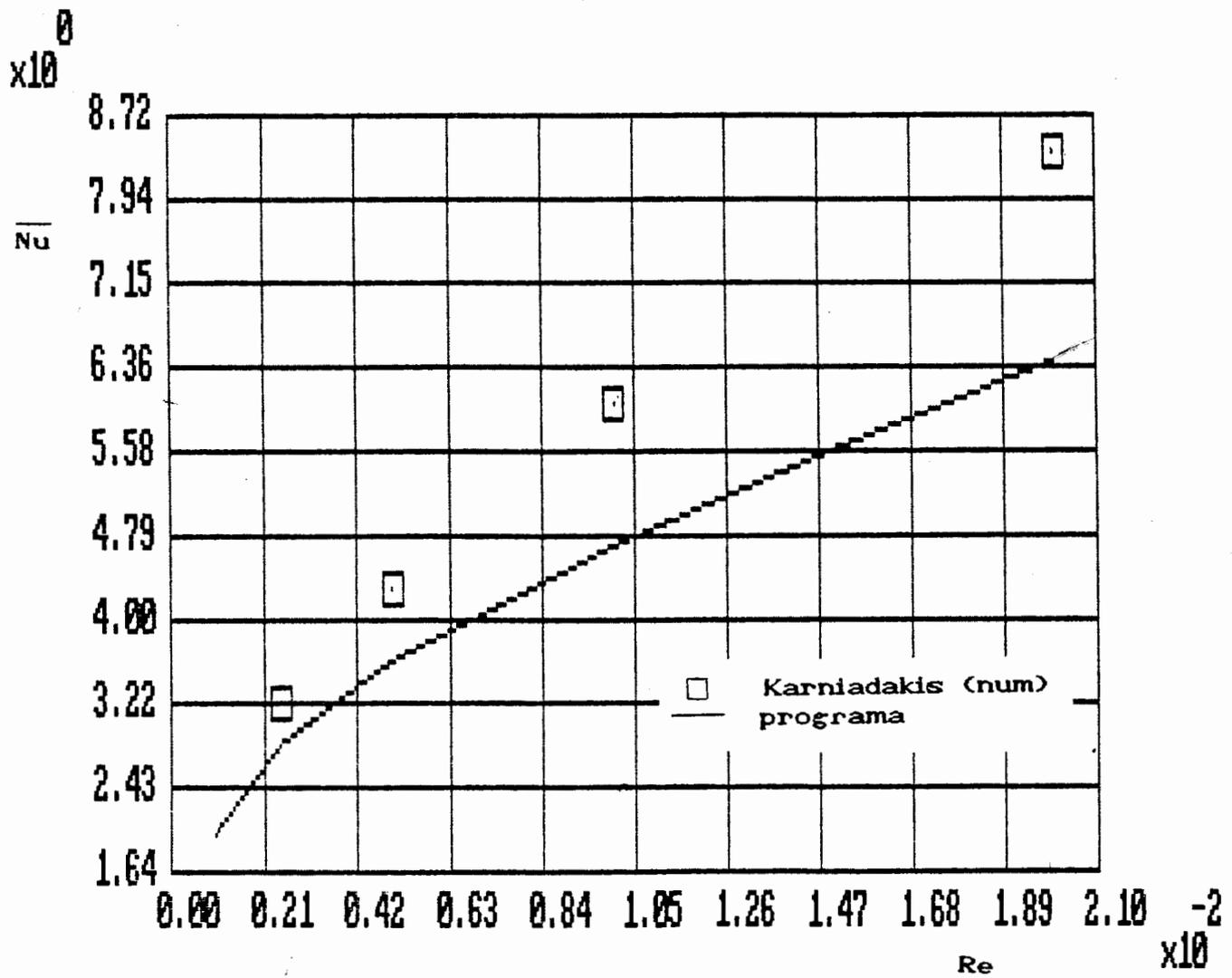


Figura 13 - Número de Nusselt medio para um tubo isolado  
(baixos números de Reynolds)

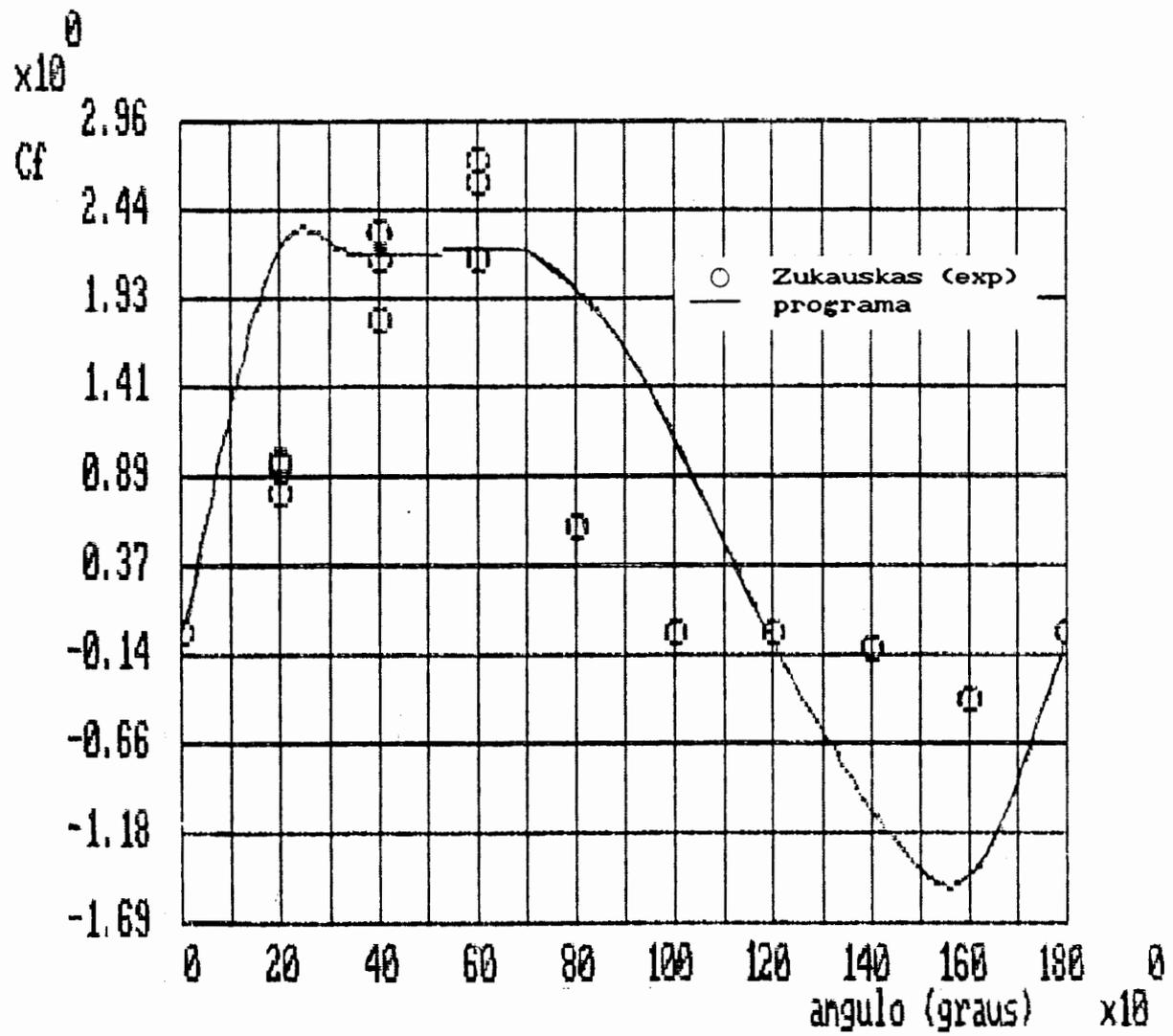


Figura 14 - Coeficiente de arrasto local para um tubo isolado

( $Re = 5,2 \cdot 10^4$ )

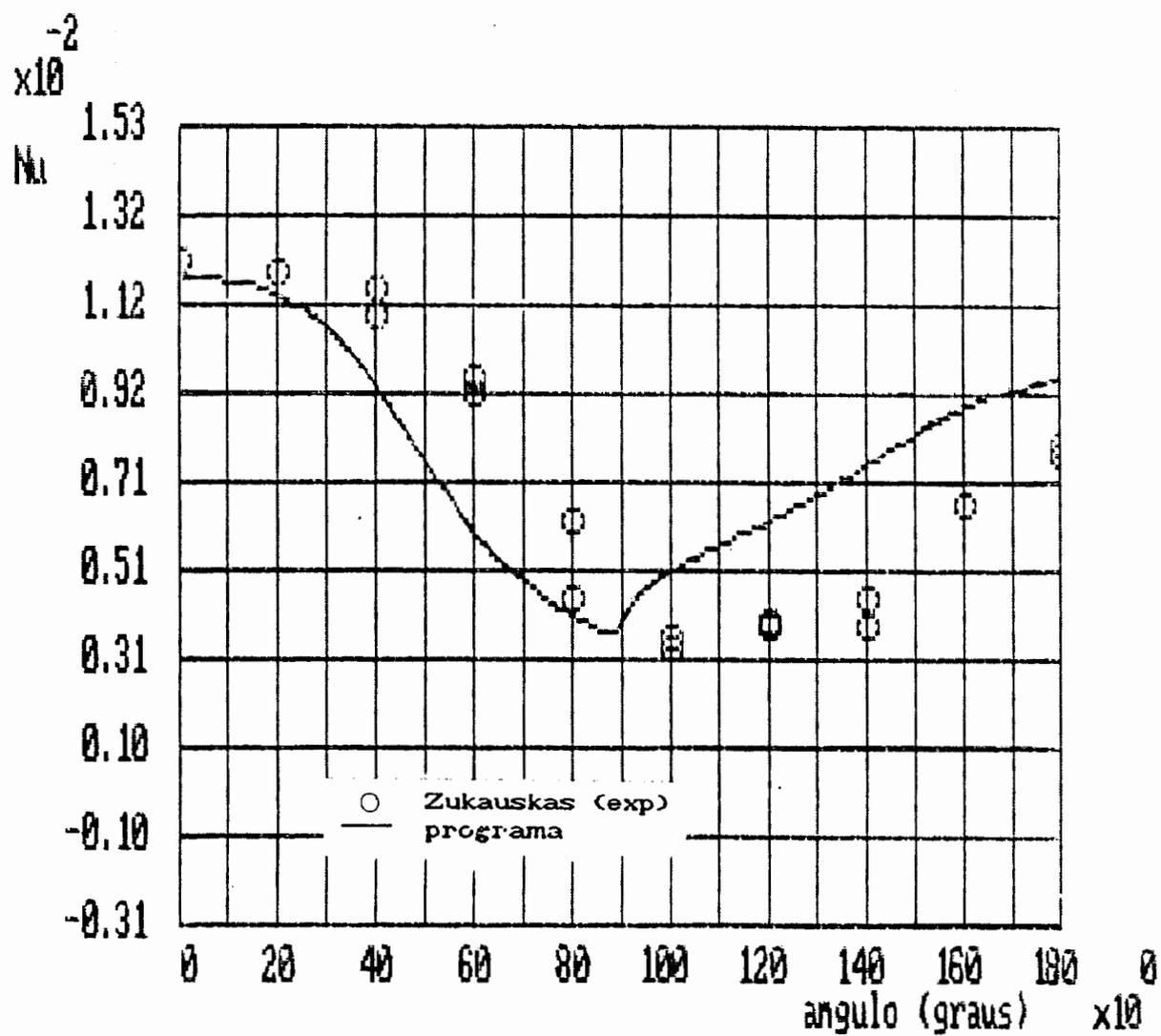


Figura 15 - Número de Nusselt local para um tubo isolado  
( $Re = 1,4 \cdot 10^4$ ).

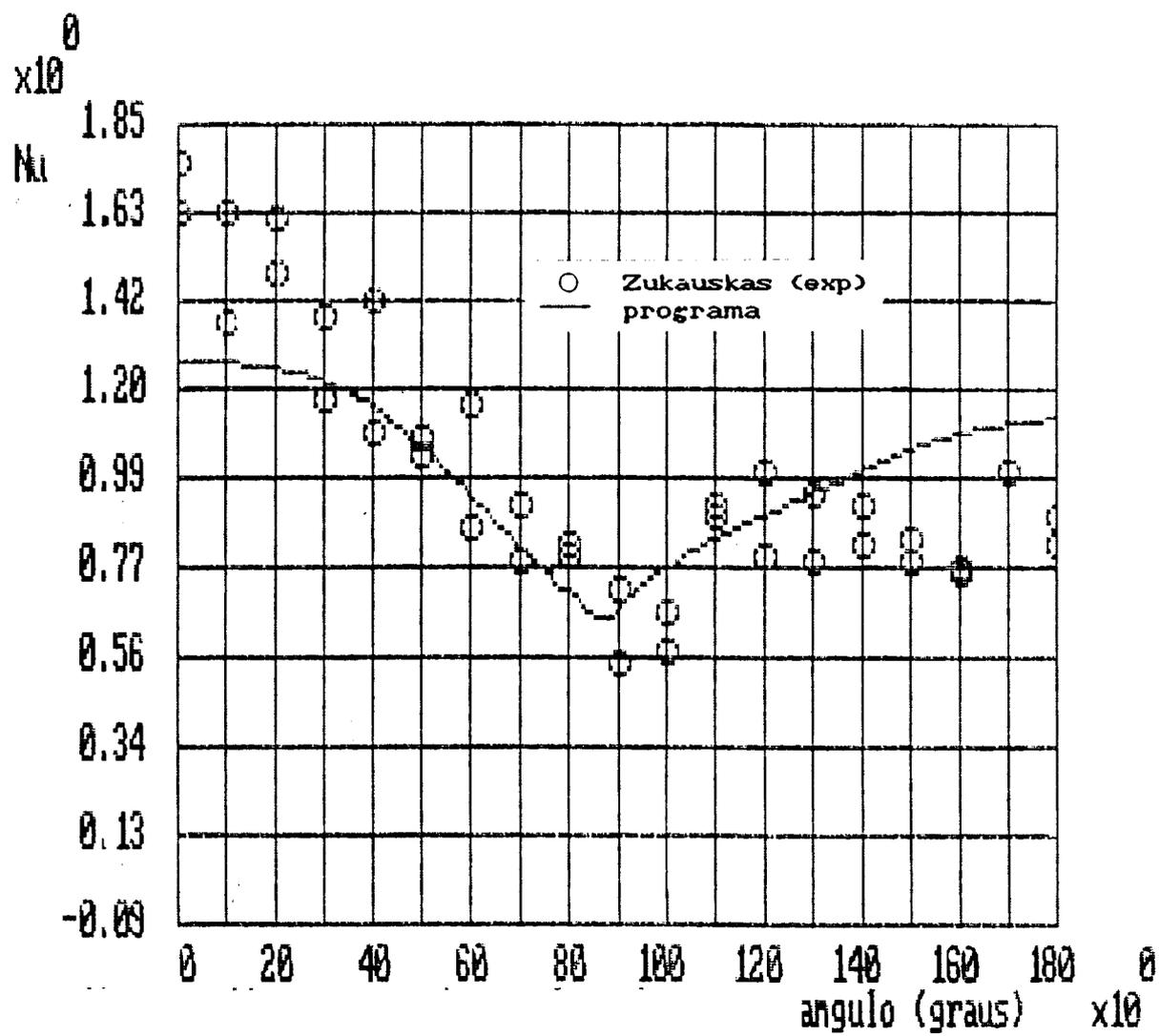


Figura 16 - Número de Nusselt local para um tubo isolado  
( $Re = 7.10^4$ )

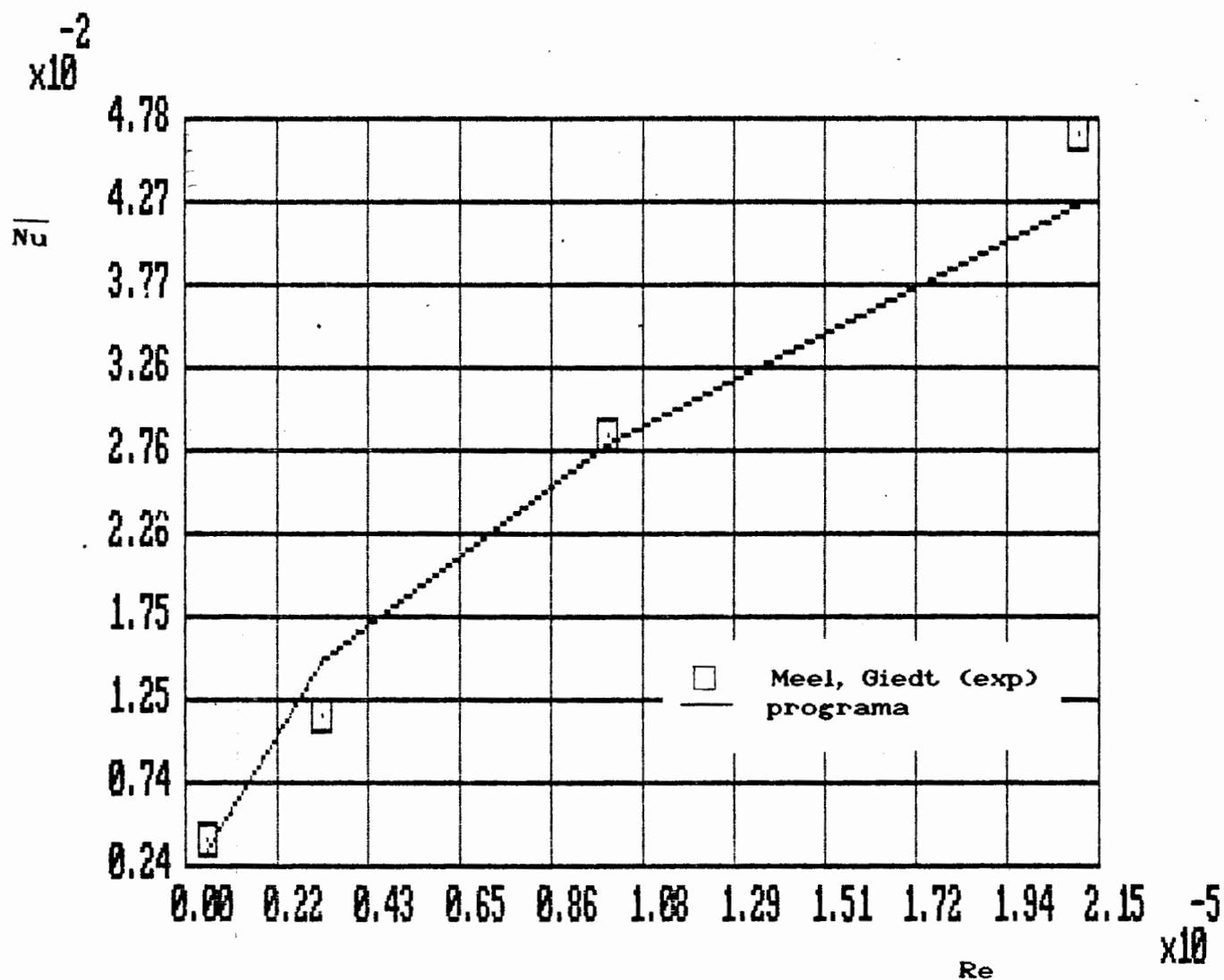


Figura 17 - Número de Nusselt médio para um tubo isolado  
(Números de Reynolds moderados e altos)

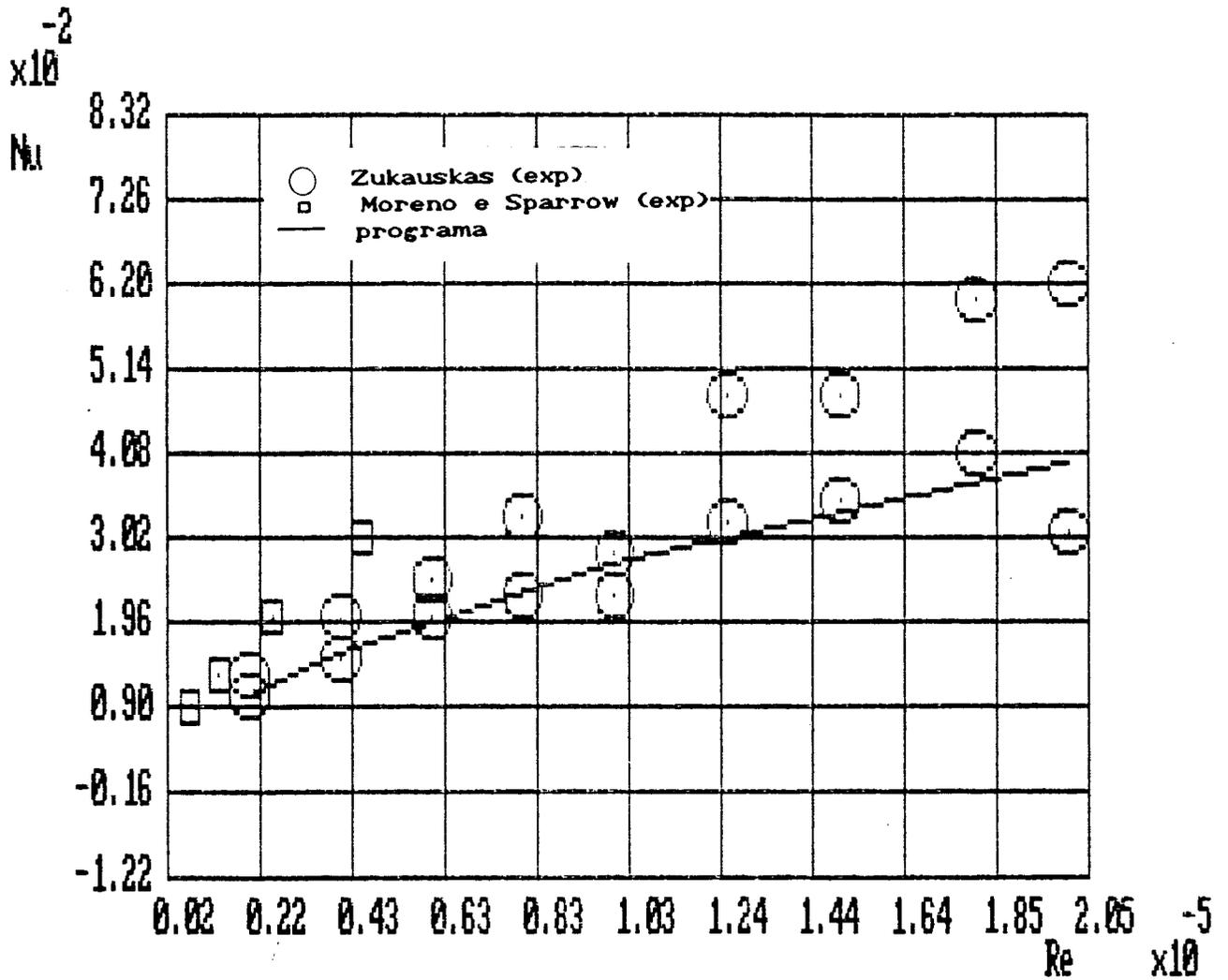


Figura 18 - Número de Nusselt global para um banco de tubos  
(Arranjo em linha; números de Reynolds moderados)

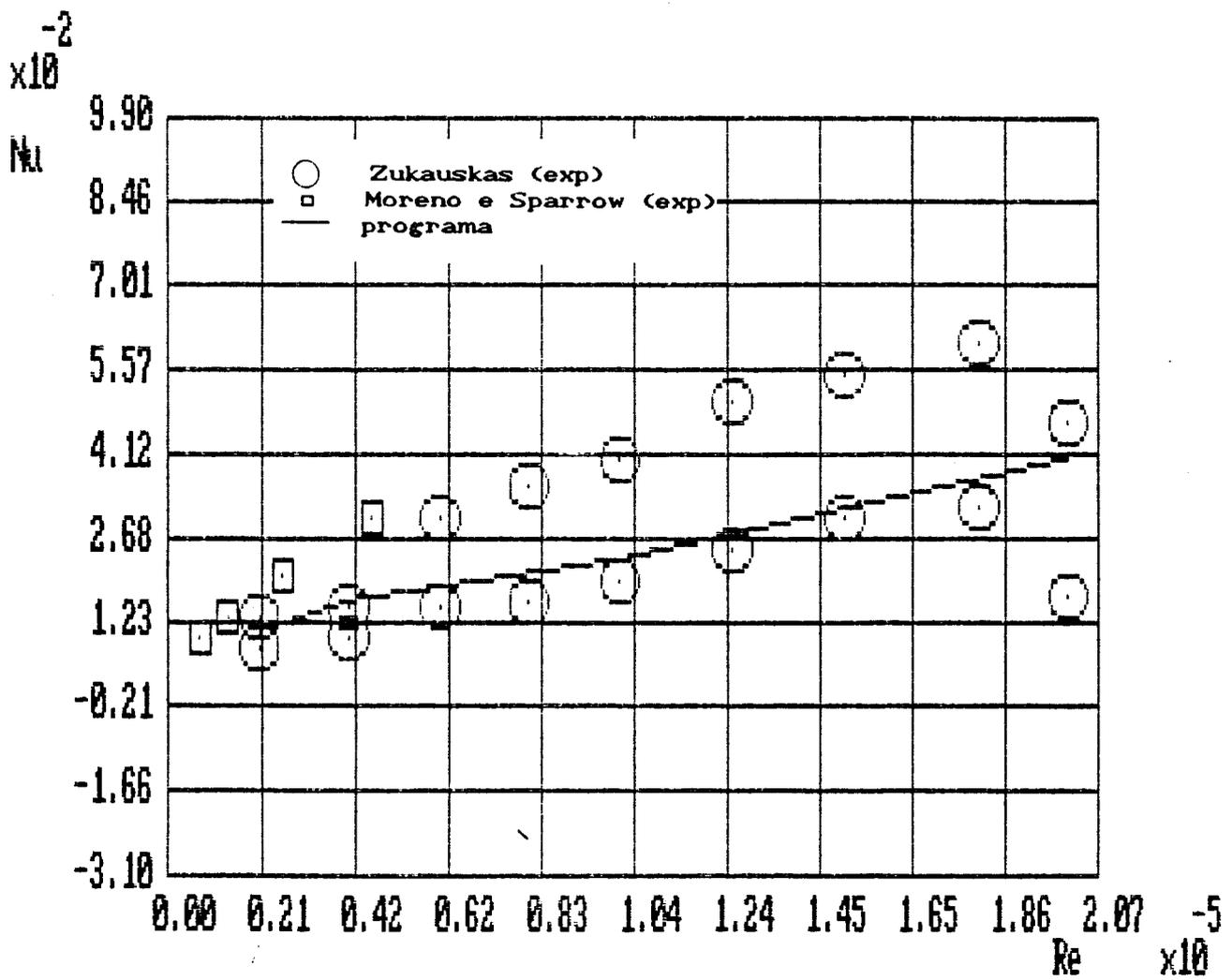


Figura 19 - Número de Nusselt global para um banco de tubos  
(Arranjo triangular; números de Reynolds moderados)

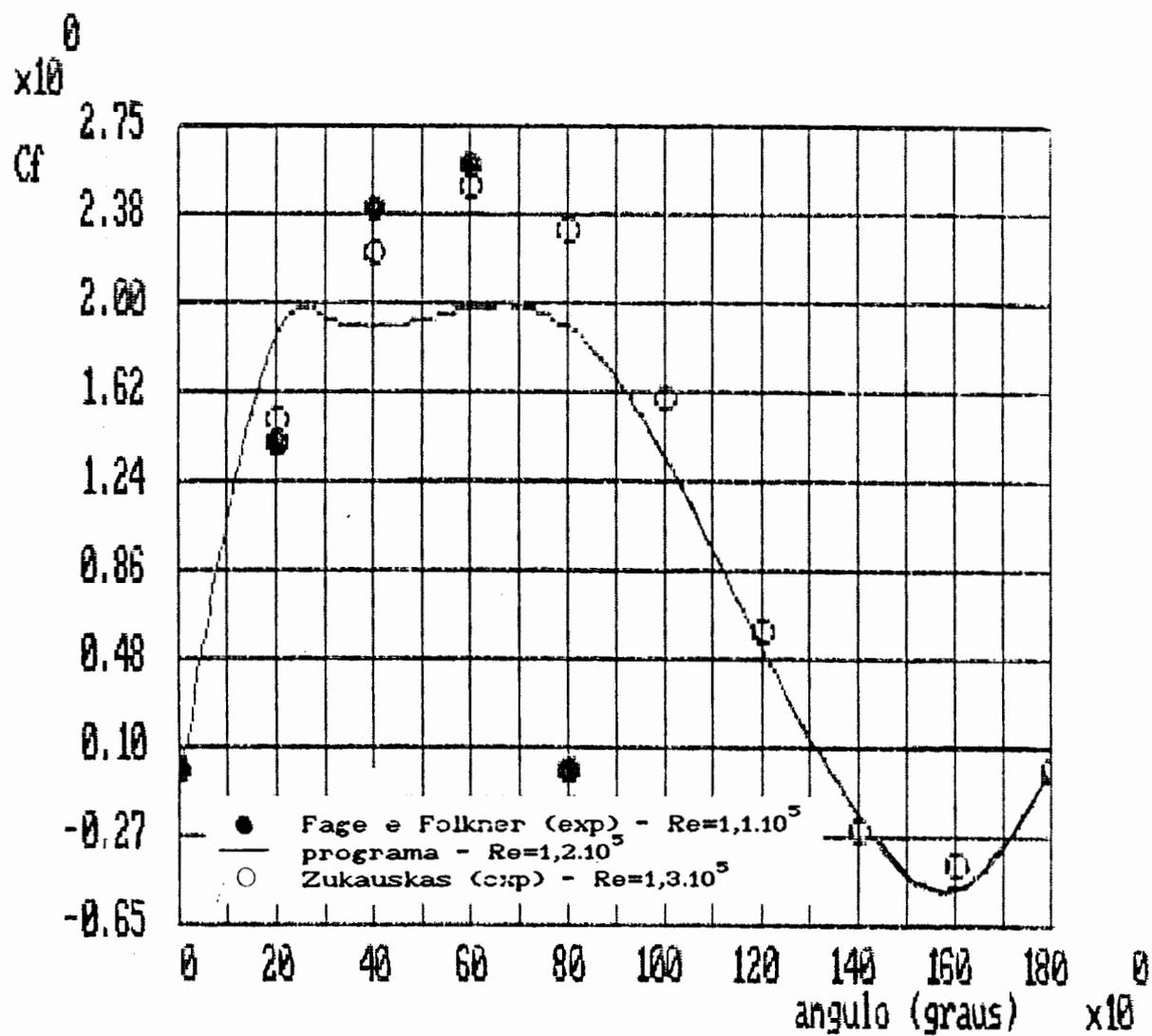


Figura 20 - Coeficiente de arrasto local para um tubo isolado  
( $Re = 1,2.10^5$ )

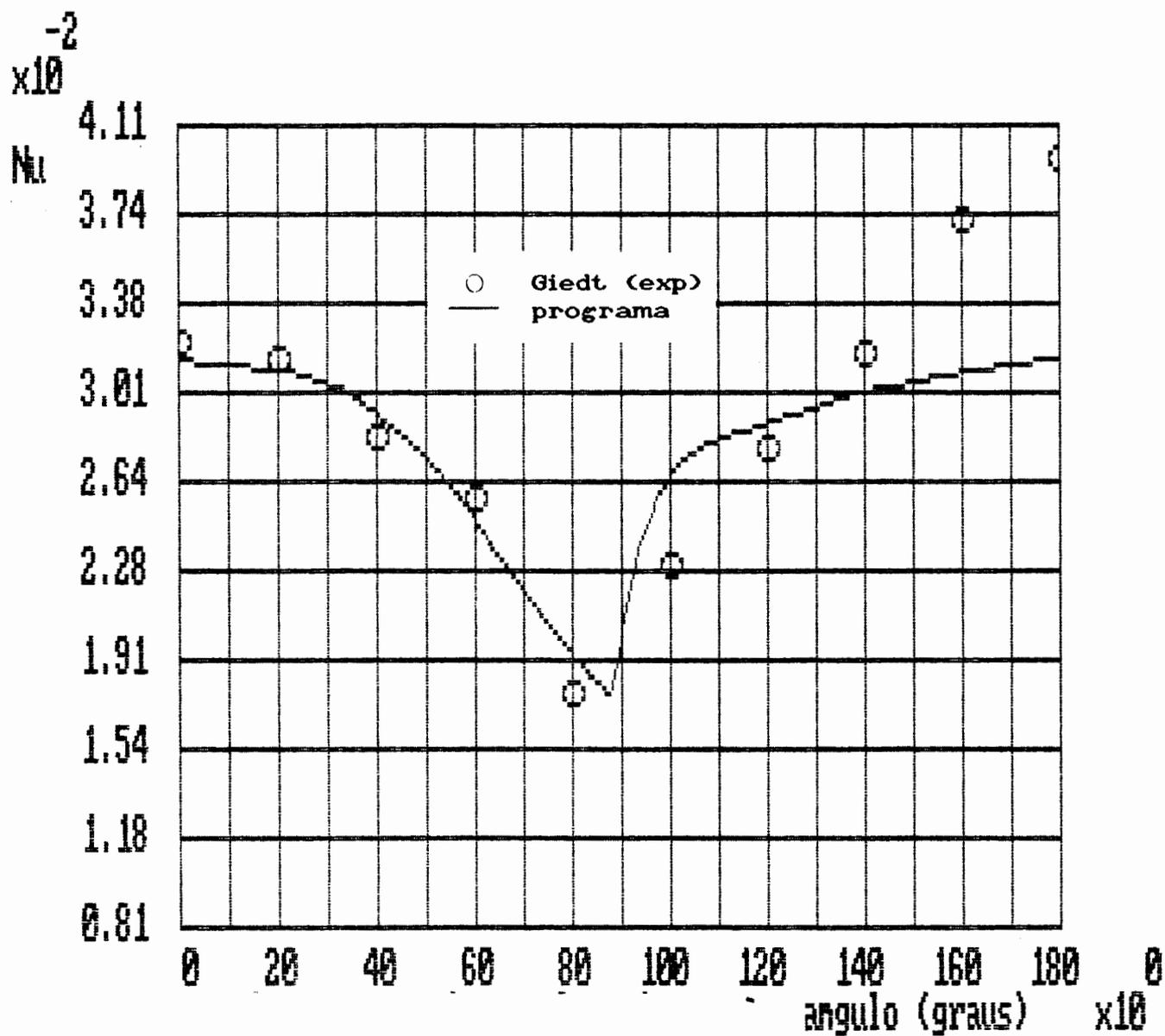


Figura 21 - Número de Nusselt local para um tubo isolado  
( $Re = 1.10^5$ )

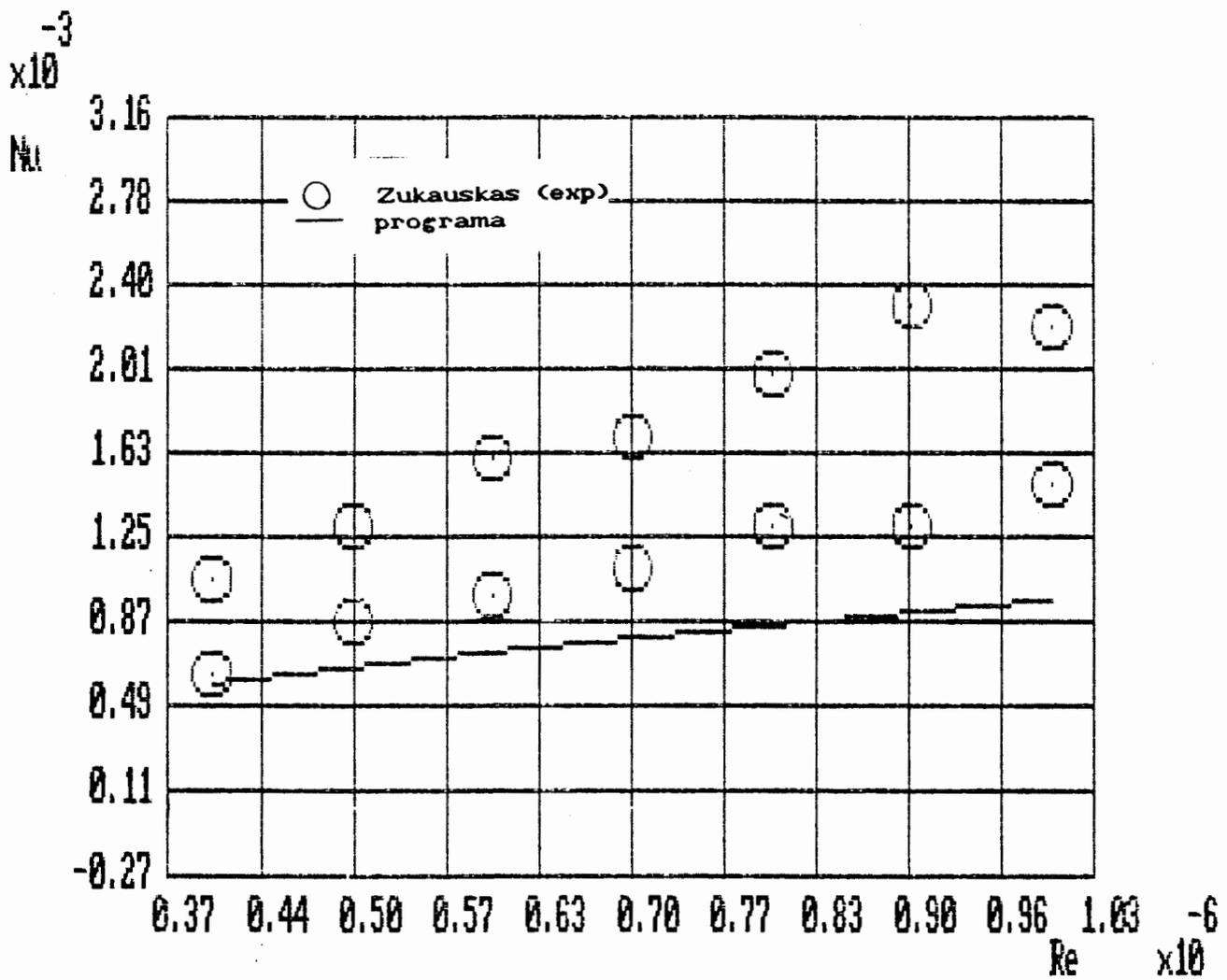


Figura 22 - Número de Nusselt global para um banco de tubos  
(Arranjo em linha; números de Reynolds altos)

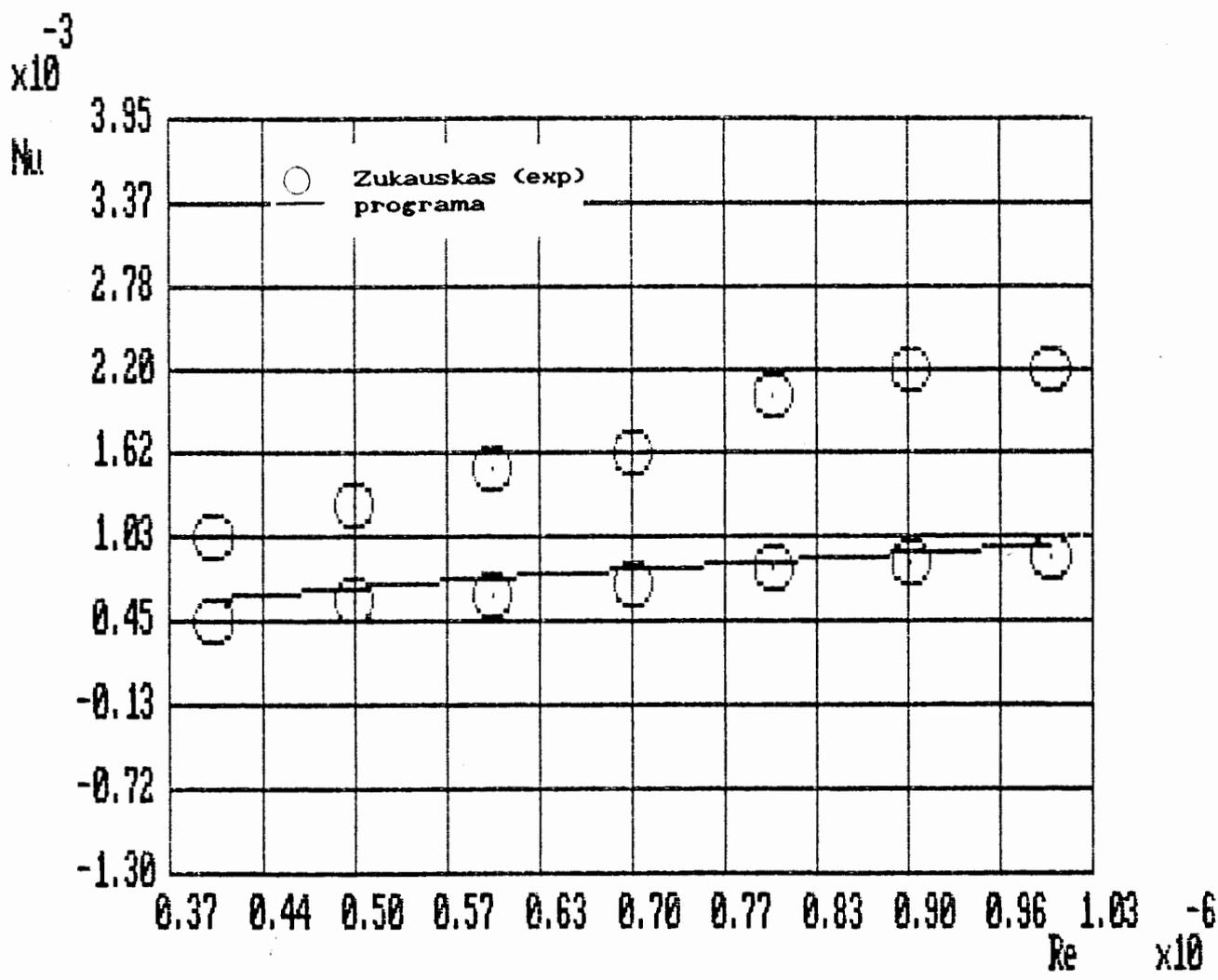


Figura 23 - Número de Nusselt global para um banco de tubos (Arranjo triangular; números de Reynolds altos)