

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**APLICAÇÃO DE DUAS TÉCNICAS DE ANÁLISE DE SÉRIES
TEMPORAIS À OCEANOGRAFIA E METEOROLOGIA**

LILIANA POHL

Orientadora: Sílvia R. C. Lopes

*Monografia apresentada para a obtenção
do grau de Bacharel em Estatística*

Porto Alegre, dezembro de 1995.

142640-6

Obra: 7669
Reg: 16413

*Aos meus pais, que com todo o amor,
carinho e compreensão deste mundo, me
incentivaram e conduziram pela estrada da vida e
me mostraram que sempre vale a pena lutar pelos
nossos ideais.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas, que de uma maneira ou de outra, mesmo através de pequenos atos, me ajudaram a concluir este curso:

Em especial à professora Sílvia Lopes por todos estes anos de orientação, apoio e conhecimentos transmitidos;

Aos meus pais, por terem me dado a vida e todo o amor deste mundo;

Ao Rômulo, pelos momentos de compreensão, carinho, amor e paciência demonstrados ao longo de todos esses anos de convivência;

À todos os professores do Departamento de Estatística, pelos conhecimentos transmitidos e pela amizade construída ao longo do curso;

Aos meus colegas de curso, que compartilharam bons e maus momentos;

À Suzi, Luciana, Vânia e Silvana, que possibilitaram a realização do meu Estágio em sua empresa e, sobretudo, muito me ensinaram;

À minha amiga Stela, pelos momentos de descontração e apoio;

Ao Kevin e à Jade, pela felicidade e o carinho transmitidos nos finais de semana.

À todos, o meu Muito Obrigado!

SUMÁRIO

RESUMO.....	5
1. INTRODUÇÃO.....	6
2. DEFINIÇÕES E OBJETIVOS DA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS.....	8
2.1. Processo Estocástico.....	8
2.2. Séries Temporais.....	9
2.2.1. Objetivos da Análise de Séries Temporais.....	9
2.3. Funções de Média, Variância, Autocovariância e Autocorrelação.....	10
3. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS E NÃO ESTACIONÁRIOS.....	12
4. TIPOS DE MODELOS.....	16
4.1. Modelos de Erro ou de Regressão.....	17
4.2. Modelos ARIMA.....	19
5. TIPOS DE VARIAÇÃO.....	24
6. ESTIMAÇÃO.....	26
6.1. Estimação no Domínio do Tempo.....	26
6.1.1. Estimação das Funções de Autocovariância e Autocorrelação.....	26
6.1.2. Interpretação do Correlograma.....	27
6.1.3. Decomposição Preditiva.....	29
6.2. Estimação no Domínio da Frequência.....	30
6.2.1. Análise Espectral.....	30

6.2.1.1. Análise de Fourier e Periodograma.....	31
6.2.1.2. Função de Distribuição Espectral.....	32
6.2.1.3. Função Densidade do Espectro.....	33
6.2.2. Filtragem Linear.....	35
7. APLICAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS ÀS SÉRIES GATE-I E RIO PEREQUÊ.....	37
7.1. Apresentação dos Dados.....	37
7.2. Análise dos Dados.....	38
7.2.1. Descrição das Rotinas Utilizadas.....	39
7.3. Interpretação dos Resultados.....	39
7.3.1. Análise Inicial.....	39
7.3.2. Análise da Autocorrelação.....	42
7.3.3. Análise Espectral.....	44
7.3.4. Filtragem Linear.....	48
7.3.4.1. Filtro Passa Baixa.....	48
8. PONTOS FIXOS NA ANÁLISE ESPECTRAL.....	53
8.1. Método da Contração na Detecção de Frequências.....	55
8.2. Filtro Complexo.....	59
9. APLICAÇÃO DE PONTOS FIXOS ÀS SÉRIES TEMPORAIS GATE-I E RIO PEREQUÊ.....	60
9.1. Análise das Séries Temporais GATE-I e Rio Perequê Utilizando o Filtro Complexo....	60
10. CONCLUSÕES.....	64
11. LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES.....	67
12. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	69
ANEXOS.....	71

RESUMO

A Análise de Séries Temporais tem tido um grande desenvolvimento nos anos recentes e objetiva, entre outras coisas, descrever, explicar, investigar, prever e controlar o comportamento de séries temporais.

Uma série temporal é um conjunto de observações feitas sequencialmente no tempo. O estudo de séries temporais abrange as mais diversas áreas do conhecimento, entre elas, a meteorologia e a oceanografia, que serão objeto de estudo deste trabalho.

Antes de uma análise prática, é importante a apresentação da teoria básica de séries temporais para que as análises feitas possam ser entendidas. Feito isto, partiu-se para a análise prática das séries temporais *GATE-I* e *Rio Perequê* através de dois métodos de detecção da periodicidade das séries: a Análise Clássica do Periodograma e a Análise Através de Pontos Fixos. A Análise Através de Pontos Fixos é eficiente para modelos de espectro misto.

A Análise Clássica do Periodograma detectou um ciclo de aproximadamente 22 horas para a série temporal *GATE-I* e de 24, 12, 8 e 6 horas para a série temporal *Rio Perequê*.

A Análise Através de Pontos Fixos detectou um ciclo de aproximadamente 24 horas para a série temporal *GATE-I* e, não conseguiu detectar as periodicidades da série temporal *Rio Perequê*, talvez pelo fato da mesma não ser regida por um modelo de espectro misto.

No presente caso, a Análise Clássica do Periodograma mostrou-se mais adequada para a série *Rio Perequê* e a Análise Através de Pontos Fixos mostrou-se mais adequada para a série *GATE-I*. Não podemos dizer, no entanto, que um dos métodos é melhor do que o outro, mas que, dependendo do modelo que rege a série temporal, teremos métodos mais adequados do que outros.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido para a monografia de conclusão do Curso de Bacharelado em Estatística, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e visa aplicar, utilizando dados reais, os conceitos e a teoria desenvolvidos na área de *Séries Temporais*.

A *Análise de Séries Temporais* tem tido um grande desenvolvimento nos anos recentes, pois a possibilidade de predizer o futuro através de observações passadas tem despertado o interesse das mais diversas áreas.

Em séries temporais os sistemas em que estamos interessados são sistemas que se desenvolvem no tempo (ou espaço) sujeitos a variações que podem ser descritas por leis probabilísticas e esse tipo de sistema é o objeto de estudo da teoria dos processos estocásticos.

Na teoria estatística de séries temporais o mecanismo gerador é considerado como um processo estocástico e a série temporal observada é uma das realizações possíveis. Logo, os conceitos de processos estocásticos e série temporal são análogos, respectivamente, aos conceitos de população e amostra na Estatística Elementar. O que distingue a análise de séries temporais de outras análises estatísticas é o reconhecimento explícito da importância da ordem

em que as observações são feitas, isto é, da dependência entre as observações. As observações vizinhas são dependentes e o estudo de uma série temporal consiste em analisar e modelar esta dependência.

A maior parte dos procedimentos estatísticos foi desenvolvida para analisar observações independentes. Desta forma, a maioria dos procedimentos não é relevante para o estudo de séries temporais. Portanto, novas técnicas e resultados têm sido desenvolvidos para aplicação específica em séries temporais, cujo estudo se constitui uma importante área da estatística. Exemplos ocorrem em vários campos do conhecimento como economia, sociologia, medicina, demografia, epidemiologia, mercadologia, meteorologia, oceanografia e tantas outras. As séries aqui em estudo são séries meteorológicas (**GATE-I**) e oceanográficas (**RIO PEREQUÊ**). A série temporal **GATE**, sigla de **Global Atmospheric Research Program, Atlantic Tropical Experiment** é resultado de um estudo conduzido em 1974 no Atlântico Leste na costa oeste da África para estudar dados de medição da taxa de chuva, totalizando 1716 dados. A série temporal **Rio Perequê** constitui-se de dados de medição da maré sobre o Rio Perequê obtidos com um Marégrafo Aanderaa WRL7 a cada 30 minutos durante dois meses resultando em 2976 dados.

Além da conceituação teórica básica de séries temporais, a presente monografia tratará do estudo de casos práticos por dois métodos distintos de detecção da periodicidade de séries temporais: a Análise Clássica do Periodograma e a Análise Através de Pontos Fixos, permitindo que uma comparação de resultados seja feita.

2. DEFINIÇÕES E OBJETIVOS DA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

2.1. Processo Estocástico

Definimos um processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$, onde T representa um conjunto de índices. Nestas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias, definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. O conjunto T é normalmente considerado como o conjunto dos inteiros \mathbf{Z} ou o conjunto dos reais \mathbf{R} . Para cada $t \in T$, X_t será uma variável aleatória real.

Como, para $t \in T$, X_t é uma variável aleatória definida em Ω , na realidade X_t é uma função de dois argumentos, $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Quando $t \in T$ está variando e $\omega \in \Omega$ está fixo, ou seja, $X(\cdot, \omega)$, obtemos uma trajetória de um processo estocástico.

2.2. Séries Temporais

Definimos uma série temporal como uma realização ou trajetória de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$, quando $t \in T$ representa tempo. Esta trajetória do processo é uma função de t , obtida para cada $\omega \in \Omega$ fixado. Denotamos a série temporal por $\{X_t\}_{t=1}^N$ onde N é o número total de observações. Portanto uma série temporal é um registro de observações de algum fenômeno medido seqüencialmente no tempo; entretanto, o tempo pode ser substituído por qualquer outro índice como espaço, profundidade, etc.

2.2.1. Objetivos da Análise de Séries Temporais

Existem vários objetivos na análise de séries temporais. Estes objetivos podem ser classificados como descrição, explicação, investigação, predição e controle.

- a) **Descrição:** o primeiro passo na análise de séries temporais é a visualização do comportamento dos dados, usualmente feito através da construção do gráfico e a obtenção de medidas descritivas que indicarão as principais características da série temporal. A verificação da existência de tendências, observações aberrantes (ou “outliers”), ciclos e variações sazonais, a construção de histogramas e diagramas de dispersão, etc., podem ser ferramentas úteis.
- b) **Explicação:** quando as observações são tomadas em duas ou mais variáveis, pode-se usar a variação de uma série para explicar a variação das outras séries temporais.
- c) **Investigação:** podemos investigar o mecanismo gerador da série temporal, procurando periodicidades relevantes nos dados.
- d) **Predição:** a partir da série temporal observada podemos prever valores futuros para a mesma série.

e) **Controle:** quando uma série temporal é gerada por medidas de qualidade num processo de manufatura, o objetivo da análise é controlar o processo. Podemos controlar a série temporal de saída $Y(t)$, de modo a trazê-la o mais próximo possível de um valor desejado, ajustando-se convenientemente a série temporal de entrada $X(t)$; este controle é necessário, devido às perturbações que normalmente afetam um sistema.

2.3. Funções de Média, Variância, Autocovariância e Autocorrelação

As definições a seguir fornecem as principais características de uma série temporal.

Definição 2.1: O valor médio ou esperança de uma série temporal é dado por

$$E(X_t) = \mu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx, \text{ para } t \in T,$$

onde $f_t(x)$ é a função densidade marginal correspondente à variável aleatória X_t , para todo $t \in T$.

Definição 2.2: A variância de uma série temporal é dada por

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2, \text{ para } t \in T.$$

Definição 2.3: Se X_t é um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in T$, então a função de autocovariância da série temporal é dada por

$$R_x(s, t) = C_x(s, t) = E\{(X_s - E(X_s)) \cdot (X_t - E(X_t))\}, \text{ para } t \in T.$$

Definição 2.4: A *função de autocorrelação de uma série temporal* é dada por

$$\rho_x(s, t) = \frac{R_x(s, t)}{\sqrt{R_x(s, s) \cdot R_x(t, t)}} = \frac{R_x(s, t)}{\sqrt{\sigma_s^2 \cdot \sigma_t^2}}, \text{ para } s, t \in T.$$

3. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS E NÃO ESTACIONÁRIOS

Como vimos, uma série temporal é a realização de um processo estocástico. Os processos estocásticos podem ser:

- a) processos estacionários e não estacionários, de acordo com a independência ou não relativamente à origem dos tempos (ver Definição 3.1 e 3.2);
- b) processos normais (Gaussianos) ou não normais, de acordo com as funções de distribuição de probabilidade que caracterizam os processos (ver Definição 3.3);
- c) processos Markovianos ou não Markovianos, de acordo com a independência dos valores do processo, em dado instante, de seus valores em instantes precedentes. Ou seja, o valor futuro de um processo Markoviano depende somente do valor presente e não dos valores passados. Um processo é dito Markoviano se e somente se

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n).$$

Intuitivamente, um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é estacionário se ele se desenvolve no tempo de modo que a escolha da origem dos tempos não é importante ou ainda,

se não existem mudanças sistemáticas na média e na variância. Em outras palavras, as características de X_{t+h} , para todo h , são as mesmas de X_t . As várias formas de “ruído” podem ser consideradas processos estacionários.

A maior parte da teoria probabilística de séries temporais é voltada para séries temporais estacionárias e, por esta razão, a análise de séries temporais freqüentemente requer uma transformação de séries não-estacionárias em séries estacionárias para que a teoria possa ser aplicada.

Formalmente, há duas formas de estacionariedade: fraca (ou ampla, ou de segunda ordem, ou em covariância) e forte (ou estrita).

Definição 3.1: Um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser *estritamente estacionário* se todas as distribuições finito-dimensionais permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(z_1, \dots, z_n; t_{1+h}, \dots, t_{n+h}) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n),$$

para quaisquer t_1, \dots, t_n e $h \in T$.

Isto significa, em particular, que todas as distribuições unidimensionais são invariantes sob translações do tempo. Logo a média μ_t e a variância σ_t^2 , se existem, são constantes, isto é,

$$\mu_t = \mu_{t+h} \quad \text{e} \quad \sigma_t^2 = \sigma_{t+h}^2, \text{ para todo } h \in T.$$

Num processo estocástico *estritamente estacionário*, é fácil mostrar que a função de autocovariância (autocorrelação) não depende de $t \in T$, somente depende da distância h .

Definição 3.2: Um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser *fracamente estacionário* (ou estacionário de segunda ordem ou estacionário em covariância ou em sentido amplo) se e somente se:

i) $E |X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in T$.

ii) $E(X_t) = \mu_t = m$, para todo $t \in T$, onde m é uma constante.

iii) $R_x(s, t) = R_x(s + h, t + h)$, ou ainda, $R_x(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h})$, para todo $s, t, h \in T$.

Definição 3.3: Um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser *Gaussiano* se, para qualquer conjunto t_1, \dots, t_n de valores em T , as variáveis aleatórias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} tem distribuição normal multivariada.

Note que se os momentos de primeira e segunda ordem existem para um processo, estacionariedade forte implica estacionariedade fraca. Entretanto estacionariedade fraca só implica em estacionariedade forte se o processo é Gaussiano.

Considere um processo estacionário $\{X_t, t \in T\}$. A função de autocovariância do processo possui as seguintes propriedades:

a) $R_x(0) \geq 0$;

b) $R_x(-h) = R_x(h)$, para todo $h \in T$; (3.1)

c) $|R_x(h)| \leq R_x(0)$, para todo $h \in T$;

d) $R_x(h)$ é positiva definida, isto é, $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k R_x(h_j - h_k) \geq 0$, para quaisquer

números reais a_1, \dots, a_n e $h_1, \dots, h_n \in T$.

A função de autocorrelação do processo $\{X_t, t \in T\}$ é definida por

$$\rho_x(h) = \frac{R_x(h)}{R_x(0)}, \text{ para todo } h \in T.$$

Segue-se que $\rho_x(0) = 1$ e $-1 \leq \rho_x(h) \leq 1$ e, as propriedades análogas a (3.1) valem também para $\rho_x(h)$.

4. TIPOS DE MODELOS

Os modelos para séries temporais podem ser divididos em duas classes, segundo o número de parâmetros envolvidos:

- a) modelos paramétricos, quando o número de parâmetros é finito;
- b) modelos não paramétricos, quando o número de parâmetros envolvidos é infinito.

Na classe de modelos paramétricos a análise é feita no domínio do tempo. Dentre estes modelos os mais freqüentemente usados são os modelos de erro (ou de regressão), os modelos autoregressivos médias móveis (ARMA) e os modelos autoregressivos integrados médias móveis (ARIMA).

Na classe de modelos não paramétricos a análise é feita no domínio da freqüência e os modelos mais utilizados são a função de autocovariância (ou autocorrelação) e sua transformada de Fourier, o espectro.

Uma outra forma de modelar uma série temporal observada é através do modelo aditivo Sinal + Ruído, da forma

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t, \text{ para } t \in T, \quad (4.1)$$

onde o ruído ε_t tem média zero e variância σ_ε^2 e o sinal $f(t)$ é determinístico.

Definição 4.1: Um processo estocástico $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ é dito ser um *ruído branco* se

i) $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$, usualmente considerada zero, isto é, $\mu_\varepsilon = 0$;

ii) $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, constante;

iii) $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$.

De acordo com as hipóteses feitas sobre $f(t)$ e ε_t , podemos ter duas classes de modelos: modelos de erro e modelos ARIMA.

4.1. Modelos de Erro ou de Regressão

Neste modelo as observações são independentes, o sinal $f(t)$ é uma função completamente determinada e ε_t é uma seqüência aleatória, independente de $f(t)$. Além disso, supõe-se que o processo ε_t é um ruído branco. Desta maneira, qualquer efeito do tempo influencia somente a parte determinística $f(t)$.

Veremos agora alguns exemplos deste modelo:

i) Modelo de Média Constante:

$$Y_t = Q + \varepsilon_t,$$

onde Q é constante e $t = 1, 2, \dots, N$.

ii) Modelo de Tendência Linear:

$$Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,$$

onde $f(t) = \alpha + \beta t$ é uma função linear dos parâmetros.

iii) Modelo de Regressão:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t,$$

onde $f(t) = \alpha + \beta X_t$, sendo X_t uma quantidade observável. Novamente, $f(t)$ é uma função linear dos parâmetros.

Nestes casos, onde $f(t)$ é uma função linear dos parâmetros, estes podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados.

iv) Modelo da Curva de Crescimento:

$$Y_t = \alpha + e^{\beta t + \varepsilon_t} \quad \text{ou} \quad \log Y_t = \log \alpha + \beta t + \varepsilon_t.$$

Neste caso, $f(t)$ não é uma função linear dos parâmetros, embora $\log(Y_t)$ transforma $f(t)$ em uma função linear. Em geral, há dois tipos diferentes de funções para $f(t)$:

1) polinômio em t , em geral de grau baixo, da forma

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m,$$

de modo que a componente sistemática se move lenta, suave e progressivamente no tempo. Aqui, $f(t)$ representa uma *tendência polinomial determinística de grau m* . Resulta que o processo Y_t será não estacionário se $m > 0$.

2) polinômio harmônico, ou seja, uma combinação linear de senos e cossenos com coeficientes constantes, da forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^r \{ \alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t \},$$

com $\lambda_n = \frac{2\pi n}{\tau}$, se $f(t)$ tem período τ .

4.2. Modelos ARIMA

A hipótese de erros não correlacionados introduz sérias limitações na validade dos modelos do tipo (4.1), para descrever o comportamento de séries onde os erros observados são autocorrelacionados e influenciam a evolução do processo. Neste caso os modelos ARIMA são úteis e descrevem duas classes de processos estocásticos.

i) *Processos Lineares Estacionários*, passíveis de representação na forma

$$X_t - m = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}, \quad \psi_0 = 1. \quad (4.2)$$

Em (4.2), ε_t é processo de ruído branco, $m = E(X_t)$ e ψ_1, ψ_2, \dots é uma seqüência de parâmetros tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 < \infty.$$

Existem três casos particulares do modelo (4.2): AR(p), MA(q) e ARMA(p, q).

Definição 4.2.1: Um processo $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser um *processo autoregressivo de ordem p* se

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (4.3)$$

onde ε_t é um processo estocástico de erros ou ruídos com média zero e variância σ_ε^2 .

Denotamos estes processos por AR(p). Este modelo pode ser considerado como um modelo

de regressão múltipla, mas X_t não é uma regressão em variáveis independentes e sim, uma combinação linear de valores do seu passado mais o termo aleatório do ruído, onde ϕ_1, \dots, ϕ_p são coeficientes e parâmetros a serem determinados. Usando o operador de defasagem B , cujo efeito é da forma $B^p(X_t) = X_{t-p}$, o modelo (4.3) pode ser reescrito por

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t, \quad \text{onde} \quad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p.$$

O modelo AR(p) é sempre invertível. Para a estacionariedade, as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

Definição 4.2.2: Um processo $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser um *processo média móvel de ordem q* se

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (4.4)$$

onde ε_t é um processo estocástico de erros ou ruídos com média zero e variância σ_ε^2 e $\theta_1, \dots, \theta_q$ são constantes desconhecidas. Denotamos estes processos por MA(q). O modelo média móvel de ordem q é uma versão filtrada do ruído $\{\varepsilon_t\}_{t \in T}$. Usando novamente o operador de defasagem B , o modelo (4.4) pode ser reescrito por

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad \text{onde} \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q.$$

Um processo MA(q) finito é sempre estacionário. Para ser invertível, as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

Definição 4.2.3: Um processo $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser um *processo autoregressivo média móvel de ordem p e q* se

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (4.5)$$

onde ε_t é um processo estocástico de erros ou ruídos com média zero e variância σ_ε^2 .

Denotamos estes processos por ARMA(p, q). O modelo (4.5) pode ser reescrito por

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são os polinômios dados nas Definições 4.2.1 e 4.2.2. Para o processo ARMA(p, q) ser invertível, as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário. Para o processo ser estacionário, as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário (assume-se que $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$ não possuem raízes comuns).

Os processos MA(q) e AR(p) vistos acima são casos especiais do modelo ARMA(p, q).

ii) **Processos Lineares Não-Estacionários Homogêneos:** constituem uma generalização dos processos lineares estacionários, que supõem que o mecanismo gerador da série produz erros autocorrelacionados e que as séries são não estacionárias em nível ou em inclinação. Estas séries podem se tornar estacionárias através de um número finito de diferenças.

Estes processos são descritos de maneira adequada pelos chamados modelos Autoregressivos Integrados Médias Móveis de Ordem p, d e q, denotados por ARIMA(p, d, q), que podem ser generalizados pela inclusão de um operador sazonal.

Definição 4.2.4: Um processo $\{X_t, t \in T\}$ é dito ser um *processo autoregressivo integrado média móvel de ordem p, d e q* se a transformação (diferenciação)

$\nabla^d X_t$ ($d \geq 1$ e $\nabla = 1 - B$, onde B é o operador defasagem dado na Definição 4.2.1) resultar em um processo ARMA. O modelo é expresso na forma

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (4.6)$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são os polinômios estacionários e invertíveis do modelo ARMA(p, q) (como assumido anteriormente, $\phi(B)$ e $\theta(B)$ não possuem raízes comuns) e ε_t é um processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2 . Estes processos são denotados por ARIMA(p, d, q).

O processo (4.6) pode ser reescrito na forma

$$\phi(B)U_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

onde $U_t = (1 - B)^d X_t$ é o processo estacionário ARMA(p, q).

Note que, se d é um inteiro maior ou igual a 1, então X_t não é um processo estacionário.

Quando o parâmetro d (grau de diferenciação) assume valores não inteiros, o modelo ARIMA(p, d, q) é denominado processo geral com diferenciação fracionária (General Fractional Differenced Process) (ARFIMA). A mais importante característica do modelo ARFIMA(p, d, q) é a propriedade de longa dependência (“Long-memory”) quando $d \in (0, 0,5)$ e pequena dependência (“Short-memory”) quando $d \in (-0,5, 0,0)$.

Longa dependência (ou persistência) é caracterizada pela presença, na série temporal, de uma significativa dependência entre as observações mesmo para distantes “lags”. Esta característica tem sido observada em séries temporais de diferentes áreas de estudo tais como, meteorologia, astronomia, hidrologia e economia. Muitas referências podem ser encontradas em Sowell (1990).

No modelo ARIMA(p, d, q), $d \in (-0.5, 0.5)$, as características de longa e curta dependência podem ser notadas pelo comportamento da função espectral e da função de autocorrelação.

Se $d \in (0.0, 0.5)$ o processo tem a propriedade de longa dependência. Neste caso, o processo exibe uma forte e positiva dependência entre as observações distantes. No domínio do tempo, esta propriedade é observada se as autocorrelações decaem lentamente de forma hiperbólica, isto é, $\rho_k \sim k^{-d}$, o oposto das autocorrelações produzidas pelo modelo ARMA(p, q) (Box e Jenkins (1976)), as quais têm um decaimento exponencial $\rho_k \sim a^k$, $0 < a < 1$. No domínio da frequência, a propriedade de longa dependência aparece quando a função espectral tende ao infinito sempre que a frequência se aproxima de zero.

Se $d \in (-0.5, 0.0)$ o processo tem a propriedade de curta dependência. No domínio da frequência isto é indicado pelo comportamento da função espectral que se aproxima de zero quando a frequência também se aproxima de zero. No domínio do tempo, a função de autocorrelação poderá exibir dependências negativas entre observações distantes. Portanto, o tipo de dependência é essencialmente determinado pelo valor fracionário de d.

Outras propriedades, definições e resultados teóricos sobre o modelo ARFIMA(p, d, q) podem ser vistas em Reisen (1995).

5. TIPOS DE VARIAÇÃO

Os métodos tradicionais de análise de séries temporais preocupam-se principalmente com a decomposição das séries em tendência, variação sazonal, ciclos e outras flutuações “irregulares”. Embora esta não seja a melhor decomposição, ela é freqüentemente a mais usada. Os diferentes tipos de variação serão descritos com mais detalhes a seguir.

a) Efeito Sazonal: muitas séries temporais exibem uma variação periódica (diária, semanal, mensal, anual, etc.). Este tipo de variação é fácil de entender e pode ser medida e extraída dos dados, fornecendo uma série dessazonalizada. Por exemplo, medidas de temperatura exibem uma variação anual periódica, abaixando durante o inverno e aumentando no verão.

b) Outros Efeitos Cíclicos: além de efeitos sazonais, algumas séries temporais exibem outras variações de período fixo. Por exemplo, as variações de temperatura ao longo do dia. Além disso, outras séries apresentam variações cujo período não é fixo, porém são possíveis de ser previstos. Basicamente, variações cíclicas são variações periódicas com período sujeito a pequenas variações, em contraste com sazonalidade que tem período constante.

c) **Tendência:** são os efeitos a longo prazo na média. A dificuldade é definir longo prazo. Por exemplo, variáveis climáticas às vezes exibem variações com períodos de 50 anos. Se tivermos 20 anos de dados esta variação de longo prazo será confundida com tendência. Porém se tivermos centenas de anos o ciclo será visível. Contudo, à curto prazo é mais significativo encarar uma oscilação de longo prazo como tendência. Em se tratando de tendência, precisamos levar em conta o número de observações e fazer uma avaliação subjetiva do que é “longo prazo”. Granger (1966) define “tendência na média” como todos os componentes de frequência cujo comprimento de onda excede o comprimento da série temporal observada.

d) **Flutuação Irregular:** após remover a sazonalidade, o ciclo e a tendência a série fica reduzida a uma série de resíduos livre de qualquer variação regular. Esta série de resíduos é então modelada usando algum modelo probabilístico em que a noção de dependência é explorada.

6. ESTIMAÇÃO

6.1. Estimação no Domínio do Tempo

No Capítulo 4 foram introduzidos vários tipos de modelos probabilísticos que podem ser usados para descrever séries temporais. Nesta seção discutiremos o problema de encontrar um modelo conveniente para uma dada série temporal observada. A principal ferramenta neste caso é a função de autocorrelação amostral. Inferências baseadas nesta função são freqüentemente chamadas de análise no *domínio do tempo*.

6.1.1. Estimação das Funções de Autocovariância e Autocorrelação

A função de autocorrelação teórica é uma importante ferramenta para descrever as propriedades de um processo estocástico estacionário (ver Definição 2.4).

A função de autocovariância amostral é dada por

$$R_x^N(h) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}), \quad (6.1)$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t$ é a média amostral.

O estimador acima é um estimador viciado para a função de autocovariância. Apesar disto, ele é preferível em relação a outros porque é uma função definida não negativa e possui o menor erro quadrático médio entre os estimadores.

A função de autocorrelação amostral é dada por

$$\rho_x^N(h) = \frac{R_x^N(h)}{R_x^N(0)},$$

onde $R_x^N(h)$, $h \in T$ é definida como em (6.1) e $R_x^N(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2$ é a variância amostral.

6.1.2. Interpretação do Correlograma

O correlograma é útil na identificação de qual tipo de modelo ARIMA nos dá a melhor representação de uma série temporal observada. A interpretação do correlograma é um dos aspectos mais difíceis da análise de séries temporais e, neste momento vale muito a experiência prática. A seguir, temos algumas regras práticas.

a) Séries Aleatórias: Se uma série temporal é completamente aleatória, então, para valores grandes de N , a função de autocorrelação será aproximadamente zero para todos os valores não negativos do “lag” h . Para uma série temporal aleatória, $\rho_x^N(h) \sim N(0, 1/N)$, sendo assim, 19 de 20 valores de $\rho_x^N(h)$ podem ser esperados encontrar - se entre $\pm 2/\sqrt{N}$.

b) Correlação a Curto Prazo: Séries estacionárias freqüentemente exibem correlação a curto prazo, caracterizada por um valor consideravelmente grande de $\rho_x^N(1)$, seguido por dois ou três coeficientes significativamente maiores do que zero, tendendo a decrescer sucessivamente.

Valores de $\rho_x^N(h)$ para “lags” grandes tendem a ser aproximadamente zero.

c) Séries Alternadas: Se uma série tem a tendência de se alternar, com sucessivas observações em diferentes lados da média total, então o correlograma também tende a se alternar. O valor de $\rho_x^N(1)$ pode ser negativo. Contudo, o valor de $\rho_x^N(2)$ será positivo e todas as observações de “lag” múltiplo de 2 tenderão a estar do mesmo lado da média.

d) Séries Não-estacionárias: Se uma série temporal contém tendência, então os valores de $\rho_x^N(h)$ não decairão para zero exceto para valores grandes do “lag”. Isto é porque uma observação em um dos lados da média geral tende a ser seguida por um grande número de novas observações no mesmo lado da média devido a tendência. A função de autocorrelação amostral $\rho_x^N(h)$ somente pode ser calculada para séries temporais estacionárias. Deste modo, qualquer tendência deve ser eliminada antes de calcularmos $\rho_x^N(h)$.

e) Flutuações Sazonais: Se uma série temporal contém flutuações sazonais, o correlograma exibirá oscilações de mesma freqüência. Em particular, se a série X_t segue um modelo senoidal, assim se comportará $\rho_x^N(h)$. Por exemplo, se

$$X_t = a \cos(\omega t)$$

onde a é uma constante e a freqüência ω é tal que $0 < \omega < \pi$, então pode se mostrar facilmente que

$$\rho_x^N(h) \cong \cos(\omega h), \text{ para valores grandes de } N.$$

f) Outliers: Se uma série temporal contém um ou mais “outliers”, o correlograma será seriamente afetado e aconselha-se que eles sejam ajustados preliminarmente.

Assim, um correlograma cujos valores de $\rho_x^N(h)$ não decaem consideravelmente depressa para zero, indicam não-estacionariedade e a série precisa ser transformada em estacionária através de operadores diferença. Para séries estacionárias, o correlograma é comparado com as funções de autocorrelação teóricas de diferentes processos ARMA de ordem mais apropriada. A função de autocorrelação teórica de um processo MA(q) é fácil de ser reconhecida pois ela assume o valor zero a partir do “lag” q ao passo que a função de autocorrelação de um processo AR(p) é uma mistura de exponenciais e senóides e decai vagarosamente. A função de autocorrelação teórica de um modelo ARMA é inicialmente atenuada e então “cortada”, ou seja, passa a assumir o valor zero. Na prática, porém, a função de autocorrelação não assume o valor zero. O que ocorre é que a função de autocorrelação assume valores significativamente próximos de zero dentro de uma faixa de confiança.

6.1.3. Decomposição Preditiva

Teorema de Wold: Todo processo estacionário admite a representação

$$Y_t = D_t + Z_t, \text{ para } t \in T,$$

onde

- a) D_t e Z_t são não correlacionados;
- b) D_t é determinístico, no sentido de que valores futuros de D_t são previstos com precisão baseado em função linear dos valores passados D_{t-1}, D_{t-2}, \dots ;
- c) Z_t é um processo linear discreto geral (ou média móvel infinito, MA(∞))

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots$$

onde ε_t é um processo de ruído branco.

Observe que a decomposição não exclui a possibilidade de um mecanismo não linear representar melhor o processo. A decomposição significa que é razoável esperar que o verdadeiro mecanismo do processo possa ser adequadamente representado por um mecanismo que gera um tipo simples de processo determinístico mais um resíduo Z_t .

A decomposição de Wold mostra a importância dos processos lineares discretos em geral e indica a razão da grande utilização destes modelos, popularizados e tornados acessíveis por Box e Jenkins (1976).

6.2. Estimção no Domínio da Frequência

Na seção anterior foi enfatizada a função de autocorrelação amostral, que constitui-se numa ferramenta natural para considerar a evolução do processo ao longo do tempo. Nesta seção, introduziremos uma função complementar chamada de *função densidade do poder do espectro*, que é a ferramenta natural para considerar as propriedades da frequência de uma série temporal. Inferências baseadas nesta função são frequentemente chamadas de *análise no domínio da frequência*.

6.2.1. Análise Espectral

Análise Espectral é o nome dado aos métodos de estimação da função densidade do espectro, ou espectro, de uma dada série temporal. Esta análise fornece uma identificação mais precisa do que a visual para indicar a significância estatística das contribuições dos diversos tipos de oscilações.

6.2.1.1. Análise de Fourier e Periodograma

A análise espectral é essencialmente uma modificação da *Análise de Fourier*, que consiste basicamente em aproximar uma função por uma soma de termos em cossenos e senos, chamada de *Transformada de Fourier*.

A *Transformada de Fourier Discreta* (DFT) consiste, intuitivamente, em combinar ou correlacionar uma série temporal original com uma série de senos ou cossenos, de modo que as características oscilatórias da série temporal sejam ressaltadas.

A *transformada do cosseno* é dada por

$$X_c(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N X_t \cos(2\pi v_k t)$$

e a *transformada do seno* é dada por

$$X_s(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N X_t \sin(2\pi v_k t),$$

onde $v_k = \frac{k}{N}$, $1 \leq k \leq N$.

Chamamos $\lambda_k = \frac{2\pi k}{N}$, $1 \leq k \leq N$, de *freqüências de Fourier*.

A Transformada de Fourier Discreta (DFT) é definida por

$$X(k) = X_c(k) - iX_s(k), \quad 1 \leq k \leq N.$$

O *Periodograma* nos fornece a variância amostral em termos das freqüências, e pode ser escrito como uma combinação das transformadas do seno e cosseno da seguinte forma

$$P(v_k) = X_c^2(k) + X_s^2(k).$$

A fórmula da inversão através da qual podemos recuperar a série original é dada por

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X(k) e^{2\pi i v_k t}, \quad \text{onde } X(k) \text{ é a DFT de } X_t \text{ e } 1 \leq t, k \leq N.$$

A *Transformada de Fourier Infinita* (IFT) de a_t , onde a_t é uma função definida em T tal que $\sum_{t \in T} |a_t| < \infty$, é definida por

$$A(\lambda) = \sum_{t \in T} a_t e^{-i\lambda t}$$

e a fórmula da inversão é dada por

$$a_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda.$$

Os pares da IFT ($A(\lambda)$ e a_t) são importantes para caracterizar as propriedades estatísticas do estimador do “poder do espectro” e também para analisar a ação de filtros lineares aplicados a séries temporais.

6.2.1.2. Função de Distribuição Espectral

A função $F(\lambda)$ definida pela expressão (6.2) abaixo, é chamada de *função de distribuição espectral* e resulta do teorema de Bochner-Khintchin (ver Pereira (1984)).

Teorema de Bochner-Khintchin: A função de autocorrelação $\rho_x(h)$ de um processo estacionário discreto no tempo admite a representação

$$\rho_x(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} dF(\lambda), \text{ para } h \in T, \quad (6.2)$$

onde $F(\lambda)$ tem as propriedades de uma função de distribuição de probabilidade no intervalo $(-\pi, \pi)$, isto é, $F(-\pi) = 0$ e $F(\pi) = 1$. A notação $dF(\lambda)$ significa integração ou soma conforme $F(\lambda)$ seja contínuo ou uma função escada.

A função de distribuição espectral $F(\lambda)$ pode ser decomposta em duas funções, $F_1(\lambda)$ e $F_2(\lambda)$ da seguinte forma

$$F(\lambda) = a_1 F_1(\lambda) + a_2 F_2(\lambda),$$

onde $F_1(\lambda)$ é uma função contínua, $F_2(\lambda)$ é uma função escada e a_1 e a_2 são constantes. Esta decomposição usualmente corresponde à decomposição de Wold, com $F_1(\lambda)$ referindo-se a componente não determinística do processo e $F_2(\lambda)$ referindo-se a componente determinística.

6.2.1.3. Função Densidade do Espectro

Teorema da Representação Espectral: Considere $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico estacionário com função de autocovariância dada pela Definição 2.3. Suponha que

$$\sum_{h \in T} |R_x(h)| < \infty \text{ (somável ou absolutamente convergente).}$$

Então, existe uma função não negativa $f_x(\lambda)$ tal que

$$R_x(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda, \text{ para todo } h \in T, \quad (6.3)$$

onde $f_x(\lambda)$ é chamada *função densidade do poder do espectro* ou simplesmente *poder do espectro* e é dada por

$$f_x(\lambda) = \sum_{h \in T} R_x(h) e^{-i\lambda h}, \quad \forall \lambda \in (-\pi, \pi). \quad (6.4)$$

A razão de oscilação de uma série temporal é medida em termos de ν (ciclos por unidade de tempo) ou λ (radianos por unidade de tempo), sendo $\lambda = 2\pi\nu$. Se usarmos a frequência ν , teremos as correspondentes expressões (6.3) e (6.4) dadas por

$$R_x(h) = \int_{-1/2}^{1/2} f_x(v) e^{2\pi i v h} dv, \text{ para todo } h \in T$$

$$\text{e } f_x(v) = \sum_{h \in T} R_x(h) e^{-2\pi i v h}, \text{ para todo } v \in (0, 1/2).$$

A função $f_x(v)$ é essencialmente a variância amostral da série temporal no intervalo de frequência de comprimento dv centrado em v , pois

$$\text{Var}(X_t) = R_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} f_x(v) e^{2\pi i v \cdot 0} dv = \int_{-1/2}^{1/2} f_x(v) dv.$$

Portanto, o poder do espectro descreve uma análise de variância das séries temporais como uma função da variável classificatória v , a qual indexa os diferentes tipos de oscilações periódicas da série temporal nas diversas frequências.

Observe que a função $f_x(\lambda)$, definida acima, é a densidade espectral de um processo estacionário se e somente se

$$\text{i) } f_x(\lambda) = f_x(-\lambda);$$

$$\text{ii) } f_x(\lambda) \geq 0;$$

$$\text{iii) } \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda < \infty.$$

É interessante apontar explicitamente as relações e distinções que observamos nos dois tipos de decomposição de uma série temporal.

1) Da expressão (6.2) observamos que há uma correspondência um a um entre $\rho_x(h)$ e $F(\lambda)$; logo, toda a informação sobre o processo contida em $\rho_x(h)$ está contida em $F(\lambda)$ e vice-versa.

2) Mostra-se que a parte determinística na decomposição de Wold é um processo harmônico, isto é,

$$D_t = \sum_{i=1}^k [\alpha_i \text{sen}(\omega_i t) + \beta_i \text{cos}(\omega_i t)],$$

correspondendo ao espectro de linha $F_1(\lambda)$. Na expressão acima, ω_i são constantes, α_i e β_i são variáveis aleatórias não correlacionadas entre si com média 0 e variância σ_i^2 , para todo $i=1, \dots, k$. Mostra-se também que, dada uma função de distribuição espectral contínua $F_2(\lambda)$, sempre podemos encontrar um processo média móvel com distribuição espectral $F_2(\lambda)$ (ver Pereira (1984)).

6.2.2. Filtragem Linear

As características importantes de uma série temporal estão freqüentemente obscurecidas pelo ruído em determinadas bandas de freqüência. A filtragem linear tem por objetivo salientar ou suavizar partes interessantes da série temporal através de transformações lineares, isto é, através do suavizamento ou filtragem dos dados amostrais utilizando filtros lineares. A aplicação de filtros lineares nos permite reconhecer a extensão com que o conteúdo da freqüência numa série temporal pode ser modificado.

Um filtro linear aplicado a uma série de entrada X_t produz uma série de saída filtrada Y_t da seguinte forma

$$Y_t = \sum_{s \in T} a_s X_{t-s}.$$

Os coeficientes a_t , $t \in T$, são números reais conhecidos e são chamados *função de resposta do impulso*. Se $\sum_{t \in T} |a_t| < \infty$, então a *função de resposta da frequência* é a IFT da função a_t , isto é,

$$A(\lambda) = \sum_{t \in T} a_t e^{-i\lambda t}.$$

A autocovariância de um processo Y_t filtrado é dada em função da autocovariância do processo estacionário de entrada X_t (ver Definição 2.3), ou seja,

$$R_Y(h) = \sum_{r,s \in T} a_r a_s R_X(h + s - r).$$

Para a relação de igualdade acima ver Shumway (1988).

O poder do espectro da série de entrada X_t é modificado pela filtragem linear através de uma constante positiva (ver Shumway (1988)), da mesma forma que na estatística clássica a variância da variável aleatória X fica alterada quando fazemos uma transformação linear multiplicando X por uma constante a . O efeito da mudança no espectro é descrito pelo quadrado da magnitude da função resposta de frequência em cada frequência λ , ou seja,

$$f_Y(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_X(\lambda), \lambda \in (-\pi, \pi).$$

Os filtros dividem-se em passa-baixa, passa-alta e passa-banda. Se queremos enfatizar frequências altas devemos provocar um aumento de oscilações na série aplicando um filtro passa-alta e se queremos enfatizar frequências baixas devemos suavizar a série aplicando um filtro passa-baixa. Se queremos enfatizar frequências de um certo intervalo devemos aplicar um filtro passa-banda. Exemplos típicos de filtros passa-baixa são obtidos aplicando-se médias-móveis aos dados da série temporal (ver Definição 4.2.2). O operador primeira diferença $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ é um exemplo de filtro passa-alta, enquanto que o filtro complexo (ver Definição 8.2.1) é um exemplo de filtro passa-banda.

7. APLICAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS ÀS SÉRIES TEMPORAIS

GATE-I E RIO PEREQUÊ

Toda a teoria desenvolvida anteriormente é chamada *Análise Clássica do Periodograma* e será agora aplicada a um trabalho prático, ou seja, na análise de duas séries temporais reais: as séries temporais *GATE-I* e *Rio Perequê*.

7.1. Apresentação dos Dados

A série temporal *GATE*, sigla de Global Atmospheric Research Program, Atlantic Tropical Experiment, é resultado de um estudo conduzido em 1974 no Atlântico Leste na costa oeste da África para estudar dados de medição da taxa de chuva. Cinco navios equipados com radares de precipitação que cobriam uma área de cerca de 400 quilômetros de diâmetro, coletaram dados de taxa de chuva a cada 15 minutos. Os navios eram equipados com instrumentos de medição de chuva e outras sondas atmosféricas. Os dados foram gentilmente cedidos pelo Dr. T. L. Bell, da NASA.

Há várias fases no estudo da *GATE*, as duas primeiras são comumente conhecidas como *GATE-I* e *GATE-II*, correspondendo a grupos de dados que consistem de 1716 (18 dias) e 1512 (15 dias) dados, respectivamente. O presente trabalho tratará da primeira fase, conhecida como *GATE-I*.

A série temporal *Rio Perequê* constitui-se em uma série de dados de medição da maré sobre o Rio Perequê obtidos com um Marégrafo Aanderaa WRL7 a cada 30 minutos durante dois meses (início em 17/06/92). O marégrafo é colocado no fundo do mar e um sensor de pressão mede, a cada 30 minutos, a pressão da coluna d'água, que depois é transformada em altura tirando-se do sinal a pressão atmosférica e usando-se a densidade da água. Os valores estão dados em centímetros. Esses dois meses de observações resultaram em 2976 dados (são 48 observações por dia em 62 dias). Devido a problemas futuros na execução das rotinas de análise, mais particularmente na rotina SPECTRA, que exige que a quantidade de pontos da série seja uma potência de dois, foi necessário considerar apenas 2048 dados, ocasionando uma perda de 928 observações.

O Rio Perequê não é propriamente um rio, ele refere-se a um “braço de mar” em forma de rio e, portanto, é influenciado com as marés altas e baixas.

7.2. Análise dos Dados

Para a análise dos dados foram utilizadas as seguintes rotinas em linguagem BASIC criadas por Shumway: *Datain*, *Acfccf*, *Spectra*, *Transfil* (ver Shumway (1988)).

7.2.1. Descrição das Rotinas Utilizadas

1) **Datain:** permite o gráfico dos dados em duas dimensões, bem como a transformação do arquivo original em um arquivo randômico (este novo arquivo é necessário para acessar as demais rotinas). Pode-se plotar o gráfico de três maneiras distintas: com os dados brutos, com os dados retirada a média e ou com os dados retirada a tendência linear da série.

2) **Acfccf:** permite o gráfico da função de autocorrelação da série em duas dimensões, bem como o valor da autocorrelação da série.

3) **Spectra:** permite o gráfico da função poder do espectro da série em duas dimensões, bem como o valor da função poder do espectro em cada frequência estabelecida no intervalo $[0,0.5]$.

4) **Transfil:** permite que os dados da série sejam transformados através de um filtro linear pré-estabelecido.

7.3. Interpretação dos Resultados

7.3.1. Análise Inicial

Para uma análise inicial de uma série temporal é importante a visualização do comportamento dos dados. Isto é obtido através do gráfico das observações com relação ao tempo.

Primeiramente, através da rotina DATAIN, foram plotados na tela do micro as três possíveis variações de gráfico das séries *GATE-I* e *Rio Perequê*. A partir da observação deles pode-se perceber que uma melhor observação das séries é conseguida através do gráfico com os dados brutos. Sendo assim, todas as análises daqui para frente serão feitas com os dados brutos, ou seja, sem retirar a média.

Figura 7.1 : Gráfico da série *GATE-I* com 1716 dados.

```
GATE-I  
Max= 5.98775 Min= 0 Tick length = 5 pts  
Hit return to continue  
? █
```

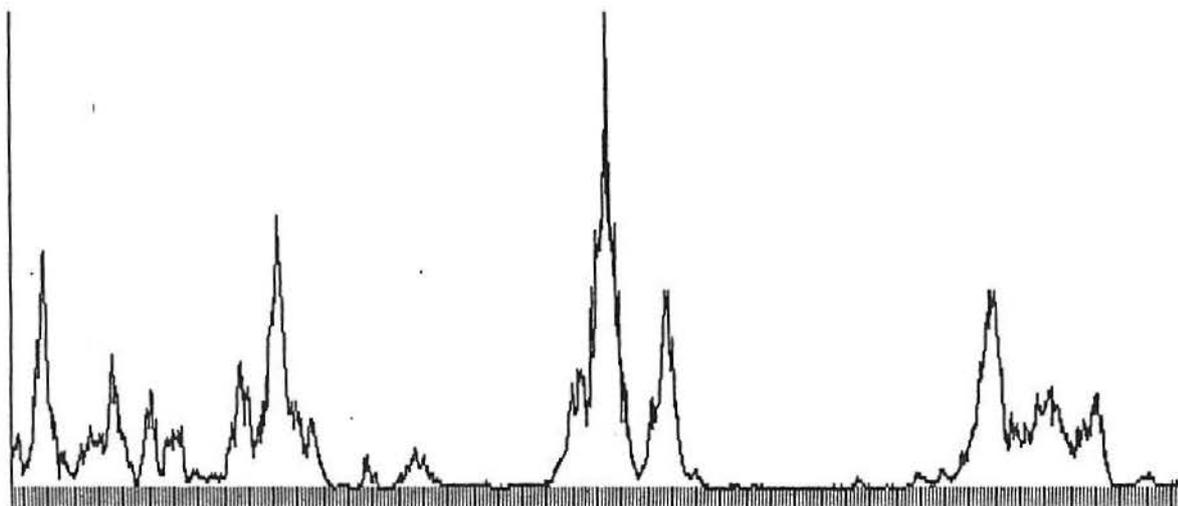
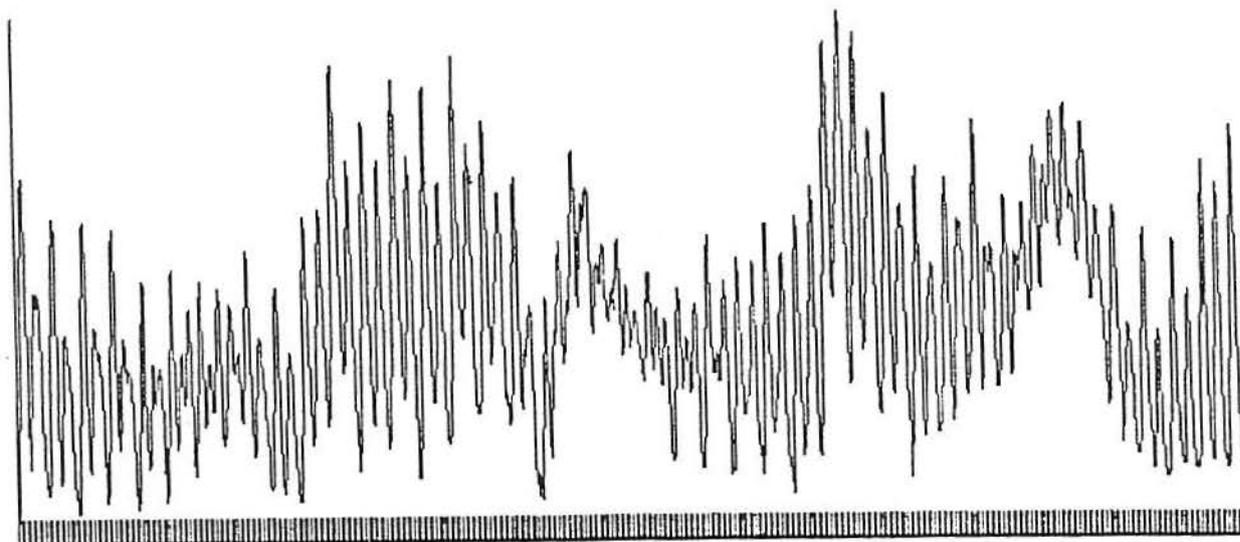


Figura 7.2 : Gráfico da série *Rio Perequê* com 2048 dados.

```
Rio Perequê
Max= 203.1404 Min= 22.3236 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █
```



Esta é a série utilizada no restante das análises.

No **Anexo 1** temos o gráfico da série *Rio Perequê* original, com 2976 dados.

Este gráficos permitem uma boa observação das séries *GATE-I* e *Rio Perequê*. Neste ponto, é possível fazer um cálculo grosseiro do período das séries, dividindo-se o número de dados pelo total de picos, ou seja, $1716/18 = 95.33$ (para a série *GATE-I*) e $2048/96=21.3$ (para a série *Rio Perequê*). Nota-se, com isso, que o comportamento da série *GATE-I* tende a se repetir a cada mais ou menos 95 observações, o que equivale a um ciclo de 23.83 horas e que a série *Rio Perequê* tende a se repetir a cada mais ou menos 21 pontos. Para a série original com 2976 dados, é possível fazer este mesmo cálculo para detectar o possível período da série, ou seja, $2976/153=19.45$. Esta diferença deve-se ao fato de que este cálculo é apenas uma estimativa grosseira do período da série e pode não condizer com a realidade.

7.3.2. Análise da Autocorrelação

A análise da autocorrelação foi feita a partir da rotina ACFCCF onde foi plotado o gráfico da função de autocorrelação. Com esta função podemos determinar picos significantes que nos darão uma melhor idéia das periodicidades presentes na série e também uma possível identificação do modelo que rege a série temporal.

Figura 7.3 : Gráfico da Função de Autocorrelação para os 1716 dados da série *GATE-I*.

```
ACF GATE-I  
Max= 1 Min= -.2282139 Tick length = 5 pts  
Hit return to continue  
? █
```

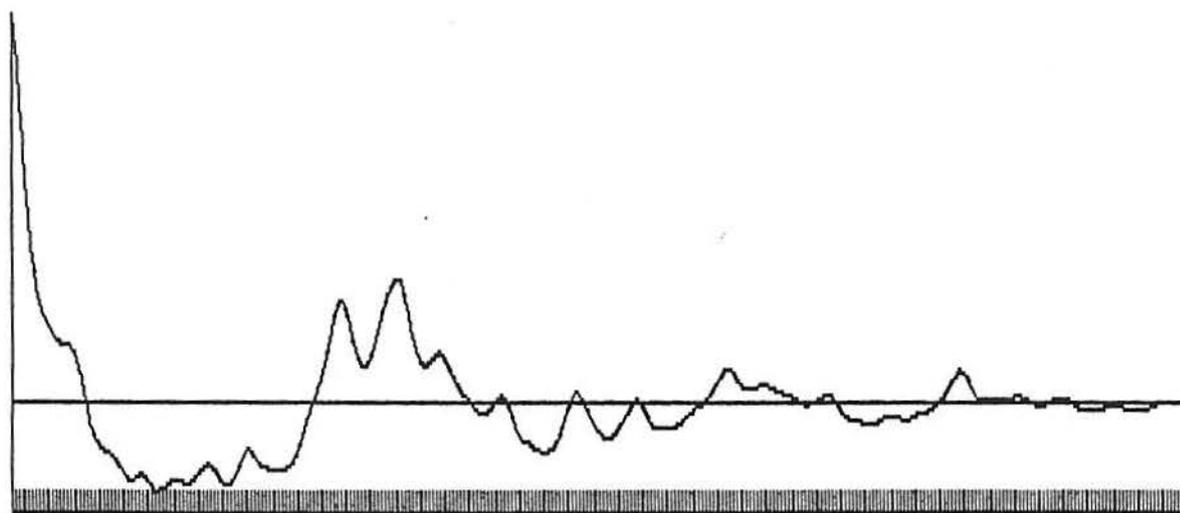
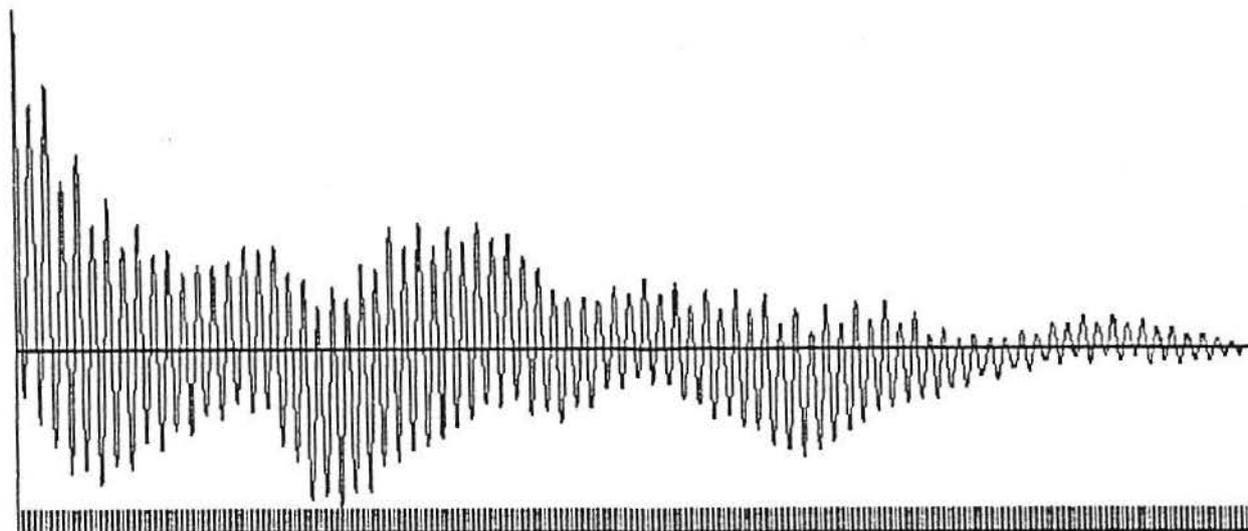


Figura 7.4 : Gráfico da Função de Autocorrelação para os 2048 dados da série *Rio Perequê*.

```
ACF Rio Perequê
Max= 1 Min= -.4538334 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █
```



Estes gráficos nos mostram o valor da autocorrelação em cada um dos 1716 e 2048 “lags” das séries, respectivamente. Ao longo dos 1716 e 2048 pontos das séries, respectivamente, é possível notar uma tendência de oscilação da função de autocorrelação, indicando que a série original também possui este tipo de comportamento e que deve ter uma ou mais periodicidades significativas. Além disto, estes gráficos estão a indicar que o modelo das séries temporais em estudo não deve ser um autoregressivo nem tampouco um média móvel. Percebe-se que a maior autocorrelação negativa da série *GATE-I* ocorre no “lag” 210 e a maior autocorrelação positiva ocorre no “lag” 563. Na série *Rio Perequê*, percebe-se que a maior autocorrelação negativa da série está no “lag” 536 e a maior autocorrelação positiva está no “lag” 49.

7.3.3. Análise Espectral

A análise espectral é feita a partir do gráfico da função poder do espectro. A função densidade do poder do espectro mede a variância amostral da série em um intervalo pequeno de frequência. Esta análise tem por objetivo a identificação de possíveis periodicidades significativas e fornece uma identificação mais precisa do que a visual para indicar a significância estatística das contribuições dos diversos tipos de oscilações. Utilizando a rotina SPECTRA foi plotado o gráfico da função poder do espectro da série e também do logaritmo natural desta função, para melhor visualização dos picos. Para utilizar a rotina SPECTRA a quantidade de pontos da série precisa ser necessariamente uma potência de dois. Se isto não ocorre, a rotina se encarrega de preencher os dados restantes com o valor zero. Na série *GATE-I*, utilizamos a série com os 1716 dados e deixamos que a rotina preenchesse os dados restantes com o valor zero até chegar à próxima potência de dois, que é 2048. A rotina passou então a considerar a série com 2048 pontos. Na série *Rio Perequê*, utilizamos apenas 2048 pontos e não os 2976 pontos totais originais. O ideal seria utilizarmos todos os dados, mas como a próxima potência de dois é 4096, é mais razoável utilizarmos 2048 dados.

Quando se calcula a função poder do espectro é necessário determinar um valor (chamado de M) para identificar o espaçamento entre as frequências a serem plotadas (M é potência de dois) e também uma constante de suavização (identificada por L , L é ímpar). Para garantir a independência entre as frequências plotadas deve-se ter $M < T/2L$ (T = número de pontos = 2048, para ambas as séries).

Figura 7.5: Gráfico da Função Poder do Espectro da série *GATE-I* com $L=3$, $M=256$ e $T=2048$.

```
Spectrum of GATE-I L=3 M=256 T=2048
Max= 59.59836 Min= 5.466079E-04 Tick length = .0078125 cycles/pt
Hit return to continue
? █
```



No **Anexo 2** temos o Poder do Espectro da série *GATE-I* com $L=3$, $M=256$ e $T=2048$ e o gráfico do Logaritmo Natural da Função Poder do Espectro desta série com $L=3$, $M=256$ e $T=2048$.

Figura 7.6: Gráfico da Função Poder do Espectro da série *Rio Perequê* com $L=3$, $M=256$ e $T=2048$.

```
Spectrum of Rio Perequê - L=3 M=256 T=2048
Max= 65036.8 Min= .3658416 Tick length = .0078125 cycles/pt
Hit return to continue
? █
```



No **Anexo 3** temos o Poder do Espectro da série *Rio Perequê* e o gráfico do Logaritmo Natural da Função Poder do Espectro desta série com $L=3$, $M=256$ e $T=2048$.

Utilizando diversos valores para L e M , detectamos as possíveis periodicidades das séries (invertendo as frequências relativas onde a função poder do espectro é alta). Nas tabelas 7.1 e 7.2 damos uma comparação das possíveis frequências ressaltadas para cada uma das séries temporais usando os valores para L e M indicados nas tabelas.

Tabela 7.1 : Comparações para possíveis periodicidades encontradas na série *GATE-I* para diversos valores de L e M:

L	M	Periodicidades Ressaltadas
3	256	512, 256, 128, 170.66, 85.33
5	128	256, 128, 85.33
7	128	256, 128, 85.33

Tabela 7.2: Comparações para possíveis periodicidades encontradas na série *Rio Perequê* para diversos valores de L e M:

L	M	Periodicidades Ressaltadas
3	256	512, 51.2, 24.38, 16.5, 12.48
7	128	256, 51.2, 25.6, 16, 12.19, 9.8
11	64	128, 42.6, 25.6, 16, 12.8, 9.8

Analisando estas tabelas percebemos que não devemos dar muita atenção à primeira periodicidade obtida em cada tabela pois verifica-se, claramente, que elas são influenciadas pelo valor de M (é exatamente o dobro deste valor), por exemplo, quando $M=256$ temos a periodicidade 512 ressaltada. Na série temporal *GATE-I*, devemos dar atenção às 2 últimas possíveis periodicidades : 170.66 e 85.33, pois as outras parecem ser harmônicas da primeira. Como a frequência 170.66 aparece apenas quando usamos $M=256$ e, além disto, ela é exatamente o dobro de 85.33, isto está nos indicando que ela é apenas uma harmônica da frequência 85.33, a qual parece ser a mais importante. Na série temporal *Rio Perequê*, devemos dar atenção à 4 possíveis periodicidades: algo em torno de 42.6 e 51.2 (muito

próximas), em torno de 24.38 e 25.6 (também muito próximas), em torno de 16 e em torno de 12. Salientamos que temos 48 observações por dia, ou seja, podemos dizer que estas periodicidades devem se referir à cerca de 24, 12, 8 e 6 horas do período, respectivamente. Com isto vimos que as possíveis periodicidades encontram-se nas frequências baixas em ambas as séries.

7.3.4. Filtragem Linear

A filtragem linear consiste na aplicação de um filtro linear aos dados da série. Todo filtro linear possui uma função resposta de impulso e uma função resposta de frequência. Um filtro linear aplicado a uma série temporal tem por objetivo reforçar ou enfatizar as características oscilatórias da série.

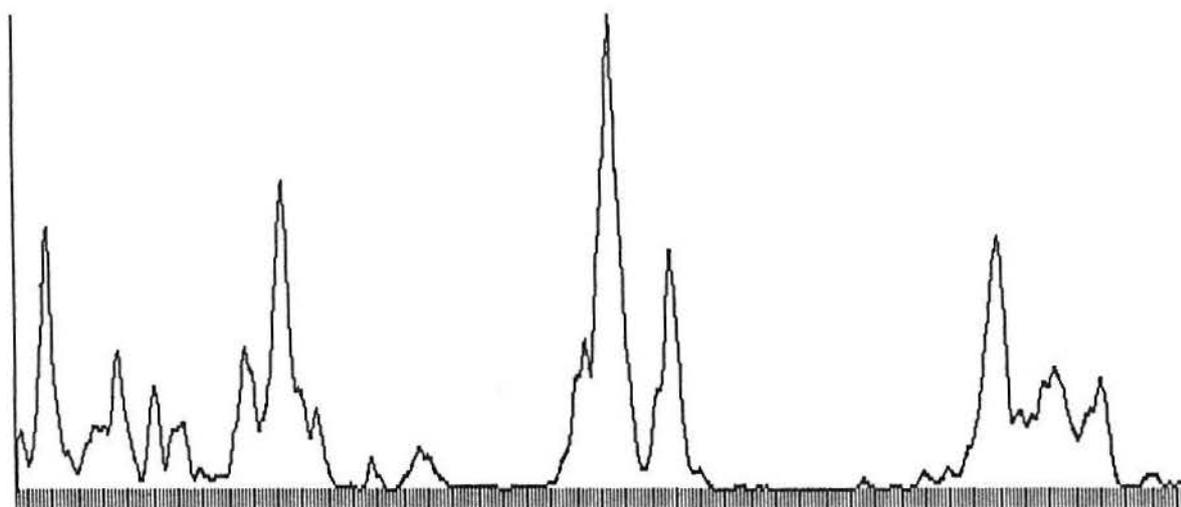
Nas séries *GATE -I* e *Rio Perequê* foram aplicados filtros do tipo passa baixa.

7.3.4.1. Filtro Passa Baixa

Procurando realçar as frequências baixas dos dados originais das séries em estudo, na série *GATE-I*, foram utilizados 6 filtros média móvel de ordens, respectivamente, 3, 5, 7, 9, 11 e 17. Na série *Rio Perequê* foram utilizados 5 filtros média móvel de ordens, respectivamente, 7, 15, 21, 29 e 41. Os filtros acima são denotados por MA(3), MA(5), MA(7), MA(9), MA(11), MA(15), MA(17), MA(21), MA(29) e MA(41), e a todos eles foi dado igual peso para os devidos coeficientes. Um filtro média móvel de ordem q , denotado por MA(q), é uma versão filtrada do ruído $\{\varepsilon_t\}_{t \in T}$ e transforma uma série original em um processo média móvel de ordem q visto na Definição 4.2.2.

Figura 7.7: Gráfico da série *GATE-I* filtrada com um Filtro MA(9).

```
GATE-I FILTRO MA(9)
Max= 4.498943 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █
```

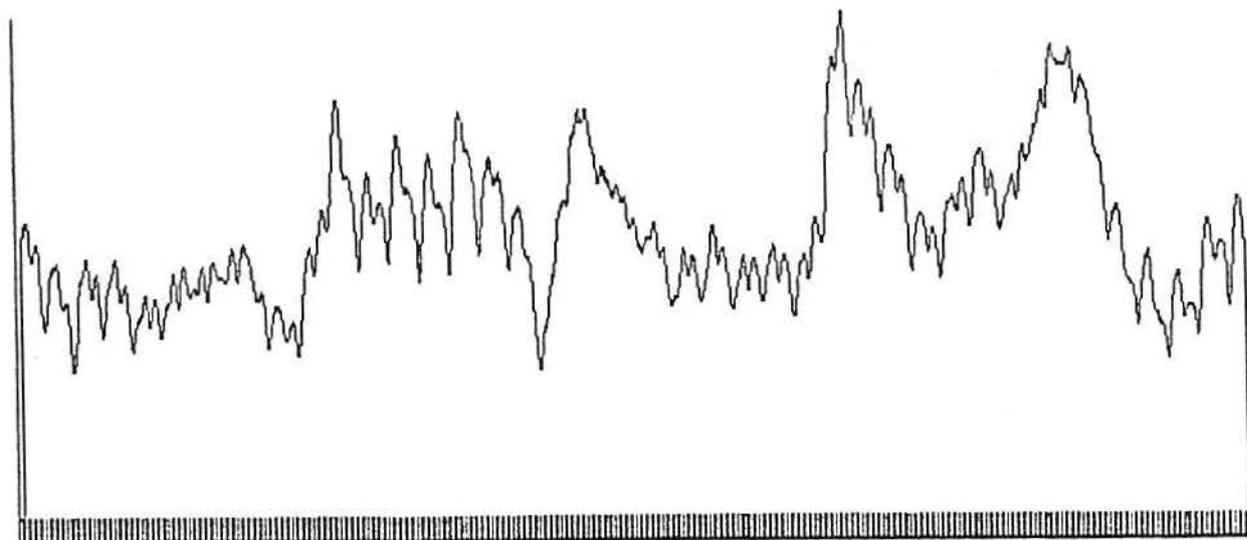


No **Anexo 4** temos os gráficos da série *GATE-I* filtrada com os filtros MA(3), MA(5), MA(7), MA(11) e MA(17), respectivamente.

O gráfico da Função Poder do Espectro da série *GATE-I* filtrada com um Filtro MA(9), usando $L=3$, $M=256$ e $T=2048$, é muito semelhante à Figura 7.5 e pode ser visto no **Anexo 5**.

Figura 7.8: Gráfico da série *Rio Perequê* filtrada com um Filtro MA(21).

```
Rio Perequê - FILTRO MA(21)
Max= 158.1174 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █
```



No **Anexo 6** temos o gráfico da série *Rio Perequê* filtrada com os filtros MA(7), MA(15), MA(29) e MA(41), respectivamente.

O gráfico da Função Poder do Espectro da série *Rio Perequê* filtrada com um Filtro MA(21), usando $L=3$, $M=256$ e $T=2048$, é bastante semelhante com o da Figura 7.6 e pode ser visto no **Anexo 7**.

Como estes filtros são filtros do tipo passa baixa, vemos que as séries estão mais suavizadas, ou seja, com menos ruído. Percebemos também que as características originais das séries não foram modificadas.

Para descobriremos se as periodicidades anteriormente encontradas não são causadas por ruídos, foram plotados a função poder do espectro das séries filtradas para cada um dos filtros. Percebe-se que todos os filtros ressaltaram as mesmas periodicidades anteriores, mostrando que novamente o período 85.33 é o que mais explica a variação total da série

GATE-I e que na série *Rio Perequê* devemos dar maior destaque para a periodicidade em torno de 25 e a periodicidade em torno de 46.5 e 51.2. Nas tabelas 7.3 e 7.4, damos as possíveis periodicidades ressaltadas pela função poder do espectro das séries filtradas com alguns dos filtros acima.

Tabela 7.3 : Comparações para possíveis periodicidades encontradas na série *GATE-I* para diversos valores de L e M e diversos filtros:

Filtro	L	M	Periodicidades Ressaltadas
MA(7)	5	128	256, 128, 85.33
MA(9)	3	256	512, 256, 128, 170.66, 85.33
MA(9)	5	128	256, 128, 85.33
MA(11)	7	128	256, 128, 85.33
MA(17)	7	128	256, 128, 85.33

Tabela 7.4 : Comparações para possíveis periodicidades encontradas na série *Rio Perequê* para diversos filtros:

Filtro	L	M	Periodicidades Ressaltadas
MA(7)	3	256	512, 51.2, 24.38, 16.5, 12.48
MA(15)	3	256	256, 51.2, 25.6, 12.19
MA(21)	3	256	512, 102, 46.5, 24.38, 16.5, 12.48
MA(29)	3	256	512, 102, 51.2, 24.38, 16.5, 12.48
MA(41)	3	256	512, 102, 51.2, 24.38, 16.5, 12.48

Observe-se que a contribuição de cada frequência na variação total desta série temporal está limpa da influência das demais, visto que foi garantida a independência entre as frequências, obedecendo a relação $M < T/2L$.

Como foi visto anteriormente, as possíveis periodicidades encontram-se nas frequências baixas, não sendo necessário a utilização de um filtro passa alta, que iria provocar um aumento de oscilações nas séries, tornando-as mais oscilatórias.

8. PONTOS FIXOS NA ANÁLISE ESPECTRAL

A Análise Espectral através de Pontos Fixos utiliza seqüências de filtros paramétricos com o objetivo de estimar as freqüências de um modelo de espectro misto.

O modelo de espectro misto é dado pela expressão

$$Z_t = \sum_{j=1}^p A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) + \varepsilon_t, \text{ para } t \in \mathbf{Z}, \quad (8.1)$$

onde p não é necessariamente conhecido e, para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, A_j é uma constante desconhecida, ω_j é uma freqüência desconhecida tomando valor em $(-\pi, \pi]$ e a fase ϕ_j é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi, \pi]$, cada uma independente entre si e também da componente de ruído. Por simplicidade, assumiremos que esta componente é um ruído branco Gaussiano tal que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

O método que permite a obtenção, através de um procedimento iterativo e com alta ordem de precisão, dos valores estimados de A_j , ω_j , $1 \leq j \leq p$, e σ_ε , pode ser visto em Kedem e Lopes (1992) e Lopes e Kedem (1994). O método consiste em filtrar uma série

temporal com um filtro paramétrico e imediatamente usar a resultante função de autocorrelação de primeira ordem no ajuste do parâmetro do filtro. O filtro ajustado é então aplicado novamente, dando origem a uma nova autocorrelação de primeira ordem e o procedimento é repetido. Escolhendo filtros apropriados, o esquema produz seqüências convergentes e, sob certas condições, este método garante a consistência forte dos estimadores do coseno das freqüências da parte discreta do espectro.

Considere $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário de média zero e seja $\{\zeta_\theta(\cdot)\}_{\theta \in \Theta}$ uma família paramétrica de filtros lineares invariantes no tempo, onde Θ é um parâmetro finito-dimensional no espaço de parâmetros Θ . Denotamos por $\{Z_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo filtrado

$$Z_t(\theta) = \zeta_\theta(Z)_t.$$

A família de autocorrelações parametrizadas de primeira ordem $\{\rho(\theta)\}_{\theta \in \Theta}$, quando $\{Z_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for um processo estocástico real é definida por

$$\rho(\theta) = \frac{E[Z_t(\theta)Z_{t+1}(\theta)]}{E[Z_t^2(\theta)]}.$$

Estamos interessados nos pontos fixos da aplicação $\rho(\theta)$ obtidos a partir da convergência da recursão

$$\theta_{k+1} = \rho(\theta_k) = \rho^k(\theta_0)$$

para algumas famílias específicas de filtros paramétricos.

O objetivo é obter filtros paramétricos lineares de tal forma que os pontos fixos da aplicação $\rho(\theta)$ resultante a serem determinados coincidam com os cossenos das freqüências que desejamos estimar.

Nas definições seguintes, utilizaremos a notação usual para iterações de aplicações

$$f^k(\alpha) = f(f^{k-1}(\alpha)), \quad k \geq 1,$$

onde $f^1(\alpha) = f(\alpha)$ e chamamos $f^k(\alpha)$ o k -ésimo iterado da aplicação $f(\cdot)$ no valor α .

Definição 8.1: Seja f uma função diferenciável definida de um intervalo $[a, b]$ em si mesmo. Um *ponto fixo* para a função f é um valor α^* tal que $f(\alpha^*) = \alpha^*$.

Definição 8.2: Um valor α^* é dito ser um *ponto fixo atrator* da aplicação $f(\alpha)$ se α^* é um ponto fixo e $|f'(\alpha^*)| < 1$. Ele é dito ser um *ponto fixo repulsor* se α^* é um ponto fixo e $|f'(\alpha^*)| > 1$.

Um ponto fixo atrator α^* tem a propriedade de que pontos próximos dos dois lados de α^* são atraídos para α^* através de iterações da f , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(\alpha) = \alpha^*, \quad \text{para todo } \alpha \text{ próximo a } \alpha^*.$$

Um ponto fixo repulsor α^* tem a propriedade de que pontos próximos dos dois lados de α^* são repelidos de α^* através de iterações da f .

8.1. Método da Contração na Detecção de Frequências

O Método da Contração na Detecção de Frequências pode ser mais facilmente descrito no caso em que no modelo temos apenas uma única senóide com frequência ω_1 .

Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in Z}$ dado por

$$Z_t = Y_t + \varepsilon_t = A \cos(\omega_1 t + \phi) + \varepsilon_t, \quad t \in Z,$$

onde $A > 0$ e $\omega_1 \in (0, \pi]$ são constantes, ϕ é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi, \pi]$, e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico estacionário e ergódico com média zero, independente da fase ϕ , com função de distribuição espectral $F_\varepsilon(\omega)$ contínua em ω_1 .

No caso de termos uma única frequência é conveniente utilizar a família de filtros paramétricos constituída pelos *filtros alfa*, definidos a seguir.

Definição 8.1.1: O *filtro alfa* aplicado a um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é definido pela seguinte transformação linear e invariante no tempo

$$Z_t(\alpha) = Z_t + \alpha Z_{t-1}(\alpha), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\alpha \in (-1, 1)$.

Na situação em que $p=1$, a aplicação $\rho(\alpha)$, que é a autocorrelação de primeira ordem do processo filtrado $\{Z_t(\alpha)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado na Definição 8.1.1, definida abaixo, nos possibilitará obter a frequência ω_1 a ser estimada como o arco cujo coseno é o ponto fixo atrator de $\rho(\cdot)$.

$$\rho(\alpha) = \frac{\frac{A^2}{2} \frac{\cos(\omega_1)}{1 - 2\alpha \cos(\omega_1) + \alpha^2} + \sigma_\varepsilon^2 \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}}{\frac{A^2}{2} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega_1) + \alpha^2} + \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1 - \alpha^2}} \quad (8.2)$$

A aplicação $\rho(\alpha)$, dada pela expressão (8.2) é uma aplicação do intervalo $[-1, 1]$ nele mesmo. Ver Lopes e Kedem (1994) para a expressão de $\rho(\alpha)$ em (8.2).

Através da expressão da derivada de $\rho(\alpha)$ (ver Lopes (1994)) observa-se que $\rho(-1) = -1$ e $\rho(+1) = +1$ mas $\rho'(-1) > 1$ e $\rho'(1) > 1$, já que

$$\rho'(-1) = \frac{\frac{A^2}{2} + \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \rho'(1).$$

Portanto, -1 e +1 são pontos fixos repulsores da aplicação $\rho(\cdot)$, dada pela expressão (8.2), conforme Definição 8.2.

É fácil ver que $\alpha^* = \cos(\omega_1)$ é o único ponto fixo em $(-1, 1)$ para a aplicação $\rho(\cdot)$, dada pela expressão (8.2), isto é, $\rho(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \cos(\omega_1) = \alpha^*$.

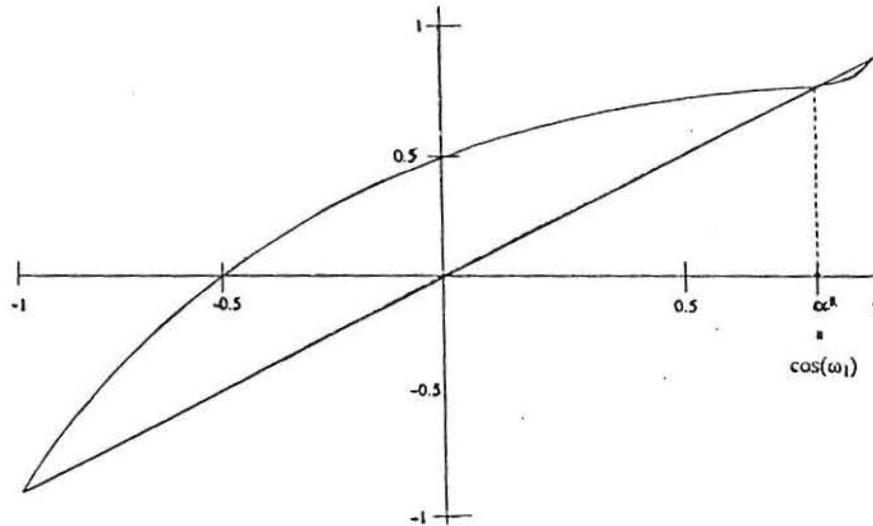
Novamente, usando a expressão da derivada de $\rho(\cdot)$, dada em Lopes (1994), quando α é o próprio ponto fixo α^* , temos que

$$\rho'(\alpha^*) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\frac{A^2}{2} + \sigma_\varepsilon^2}.$$

Note que este número é estritamente menor do que 1. Neste caso, o ponto fixo α^* é um atrator (observe o gráfico da aplicação $\rho(\cdot)$ em $[-1, 1]$ na Figura 8.1). Para qualquer ponto inicial $\alpha_0 \in (-1, 1)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k(\alpha_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \cos(\omega_1).$$

Figura 8.1: O ponto fixo atrator $\alpha^* = \cos(\omega_1)$ de $\rho(\alpha)$ obtido a partir do filtro alfa, quando $p=1$.



O Método da Contração na Detecção de Frequências e o filtro alfa são explicados com detalhes em Lopes (1994).

8.2. Filtro Complexo

Definição 8.2.1: O *filtro complexo* aplicado a um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbf{Z}}$ é definido pela transformação

$$Z_t(\alpha, M) = (1 + e^{i\theta(\alpha)}B)^M Z_t, \text{ para } t \in \mathbf{Z},$$

onde M é um número inteiro positivo, $\alpha \in (-1, 1)$, $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi)$, B é o operador defasagem (ver seção 4.2) e onde $\theta(\alpha) = \arccos(\alpha)$.

Claramente a expressão acima pode ser reescrita como

$$Z_t(\alpha, M) = \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} e^{i\theta(\alpha)n} Z_{t-n},$$

para $t \in \mathbf{Z}$, $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi)$ e $M \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Se M é grande e fixo (suponha, por exemplo, $M=30$), então para $\alpha_0 \in (-1, 1)$ escolhido ao acaso, $\rho^k(\alpha_0)$ estará bem próximo de um ponto fixo α^* , onde α^* é um dos possíveis valores $\cos(\omega_j)$, para $1 \leq j \leq p$, quando k for tomado grande.

Desta forma, obteremos as várias frequências do modelo (8.1) através de um procedimento iterativo. Os vários valores limites $\hat{\rho}^k(\alpha)$ são as estimativas dos cosenos das frequências.

Maiores esclarecimentos a respeito do filtro complexo e da Análise Espectral Através de Pontos Fixos podem ser vistos em Lopes (1991), Lopes e Kedem (1994) e Lopes (1994).

9. APLICAÇÃO DE PONTOS FIXOS ÀS SÉRIES

GATE-I E RIO PEREQUÊ

A técnica de Pontos Fixos Atratores vista no Capítulo 8, constitui-se numa alternativa à Análise Clássica do Periodograma e, em muitos casos, é mais indicada. Utilizou-se esta técnica para as mesmas séries temporais apresentadas e analisadas pela Análise Clássica do Periodograma no Capítulo 7.

9.1. Análise das Séries Temporais *GATE-I* e *Rio Perequê* utilizando o Filtro Complexo

O filtro complexo, dado na Definição 8.2.1, é um filtro recursivo de parâmetros M e α onde $\alpha = \cos(\theta(\alpha))$. Como foi visto anteriormente, para valores grandes de M e para qualquer $\alpha_0 \in (-1, 1)$ escolhido ao acaso, $\rho^k(\alpha_0)$ estará bem próximo de um ponto fixo α^* , e este, por sua vez, estará bastante próximo dos valores $\cos(\omega_j)$, para $1 \leq j \leq p$.

Sendo assim, encontramos um valor aproximado para uma das freqüências da parte discreta do espectro. A seguir, com um filtro passa banda (“band-pass”), podemos filtrar este valor $\rho^k(\alpha_0)$ que é aproximadamente $\cos(\omega_j)$ e aplicar o mesmo procedimento acima à série temporal resultante. Considerando um outro α_0 ao acaso, estimamos, com o mesmo procedimento anterior, outro valor $\cos(\omega_i)$, $1 \leq i \leq p$ e $i \neq j$. Assim sucessivamente, obtemos todas as freqüências ω_j , para $1 \leq j \leq p$. Lembramos que para qualquer ponto inicial $\alpha_0 \in (-1,1)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k(\alpha_0) = \cos(\omega_j) = \alpha^* \quad (9.1)$$

A rotina computacional utilizada para a obtenção das freqüências das séries temporais em estudo foi desenvolvida em linguagem FORTRAN pela orientadora deste trabalho. Para acessar a rotina, é necessário entrar com o tamanho da série temporal (N+M) e os parâmetros do filtro (M e um valor inicial chamado α_0).

Escolhendo-se filtros adequados, o esquema produzirá seqüências que convergirão para as verdadeiras freqüências da parte discreta do espectro da série temporal.

Utilizando diversos valores para M e α_0 , as seqüências produzidas nas séries *GATE-I* e *Rio Perequê* convergiram para as freqüências estimadas indicadas nas tabelas abaixo, estas freqüências estão dentro do intervalo $[0, \pi]$ e, para poderem ser comparadas com a Análise Espectral Clássica, devem ser corrigidas para o intervalo $[0, 1/2]$, resultando a coluna da Freqüência Corrigida nas Tabelas 9.1 e 9.2 abaixo.

Tabela 9.1: Frequências encontradas na série *GATE-I* para diversos valores dos parâmetros M e α_0 :

Número de Interações	M	α_0	Frequência Estimada	Frequência Corrigida	Periodicidade
4	10	0.5	0.0764670	0.0121701	82.168587
5	22	0.5	0.0679096	0.0108081	92.522785
5	25	0.5	0.0667383	0.0106217	94.146619
4	27	0.5	0.0660709	0.0105155	95.097619
3	30	0.1	0.0652890	0.0103911	96.236507
5	30	0.5	0.0652762	0.010389	96.255378

Fazendo a correção indicada acima, percebe-se que utilizando-se o filtro com parâmetros $M=30$ e $\alpha_0=0.1$, chega-se a uma periodicidade de aproximadamente 96.23 para a série *GATE-I*, que corresponde a um ciclo de aproximadamente 24 horas, pois a cada hora foram feitas 4 observações. Ressaltamos aqui que a escolha do ponto inicial α_0 é arbitrária e fornece o mesmo resultado. Observa-se também que o algoritmo tem um fator de convergência muito rápido. A convergência ocorre até, no máximo, na sexta iteração.

Tabela 9.2 Frequências encontradas na série *Rio Perequê* para diversos valores dos parâmetros M e α_0 :

Número de Interações	M	α_0	Frequência Estimada	Frequência Corrigida	Periodicidade
4	4	0.5	0.2158582	0.0343549	29.10
4	12	0.5	0.2046758	0.0325752	30.698233
6	20	0.5	0.2011642	0.0320163	31.234113
6	25	0.3	0.1990306	0.0316767	31.568941

Pela tabela acima, percebemos que a técnica de pontos fixos atratores não mostrou-se eficiente para detectar as periodicidades da série *Rio Perequê*. No entanto, percebemos que com valores pequenos para o parâmetro M , a seqüência tende a convergir para a periodicidade em torno de 24 e que necessitaríamos valores muito maiores para o parâmetro M do que a capacidade da rotina (que é $M=34$) para que a seqüência convergisse para as outras periodicidades maiores.

10. CONCLUSÕES

A Análise de Séries Temporais revelou-se uma área extremamente interessante, pois, apesar da teoria apresentada no início deste trabalho parecer complicada, na prática, os resultados são recompensadores.

O estudo das séries temporais *GATE-I* e *Rio Perequê* através dos dois métodos de detecção das periodicidades das séries, mostrou que não existe um método melhor do que o outro. O que existe são vários métodos que, dependendo do modelo que rege a série temporal, se adequarão melhor e produzirão melhores resultados. Isto pôde ser comprovado nas análises realizadas, pois para a série *GATE-I*, a técnica de pontos fixos atratores mostrou-se mais adequada e para a série *Rio Perequê*, a análise clássica mostrou-se mais adequada. Esta afirmação é possível porque estudos anteriores da NASA (no caso da série *GATE-I*) e do Laboratório de Física Marinha do Centro de Estudos do Mar da UFPR (no caso da série *Rio Perequê*) confirmam as periodicidades encontradas nos dois casos. Ressaltamos, no entanto, que esta diferença de resultados não significa que a técnica de pontos fixos atratores falhou no

caso da série temporal *Rio Perequê*, mas sim, que ela só se aplica à modelos de espectro misto dado pela expressão 8.1, que pode não ser o caso desta série temporal.

A análise da série temporal *GATE-I* revelou que esta série é uma série periódica regida por um modelo de espectro misto com uma única periodicidade importante, ou seja,

$$Z_t = A \cos(\omega_1 t + \phi) + \varepsilon_t, \quad t \in T.$$

Através da Análise Clássica do Periodograma detectou-se que o período mais significativo da série *GATE-I* ocorre em torno de 85.33. Após análises deste resultado, chega-se à conclusão que a periodicidade acima refere-se a 21.33 horas do período, pois a cada hora foram feitas quatro observações. Podemos dizer que a cada mais ou menos 22 horas a série tende a se repetir de uma maneira quase que perfeita e que esta periodicidade revela um ciclo diário para esta série de medição de taxa de chuva no Atlântico Leste.

A Análise Através da Teoria dos Pontos Fixos Atratores detectou um ciclo diário de 24 horas para a série temporal *GATE-I*, coincidindo exatamente com o resultado obtido pela NASA.

Não foi possível a identificação do modelo que rege a série temporal *Rio Perequê*. O estudo da teoria dos Pontos Fixos Atratores revela que, para modelos de espectro misto (ver expressão 8.1), a técnica de pontos fixos atratores funciona muito bem. O fato desta técnica não ter sido muito eficiente no caso da série temporal *Rio Perequê* nos dá indícios de que este não é o modelo que se adequa à série temporal em estudo.

Através da Análise Clássica do Periodograma detectou-se que os períodos mais significativos ocorrem em torno de 46.5 ou 51.2, 24.38, 16.5 e 12.48. Após análises destes resultados, chega-se à conclusão que as periodicidades acima podem ser 48, 24, 16 e 12. Sabemos que estas periodicidades referem-se à 24, 12, 8 e 6 horas do período, respectivamente.

Podemos dizer que a cada 24 pontos a série *Rio Perequê* tende a se repetir de uma maneira quase que perfeita e que esta componente no 24 (ou seja, 12 horas do período) é a maré semi-diurna (meio-dia). A componente no 48 é a maré semi-noturna (meia-noite). Também podemos dizer que a cada 16 observações (8 horas do período) e a cada 12 observações (6 horas do período), a série tende a se repetir. As duas primeiras periodicidades ressaltadas coincidem com os resultados obtidos pelo Laboratório de Física Marinha do Centro de Estudos do Mar da UFPR, no entanto, nada podemos afirmar quanto as outras duas periodicidades, que poderão ser apenas harmônicas das primeiras. Um estudo complementar, através de outro método serviria para comprovar a importância ou não destas periodicidades. Este estudo foi feito utilizando-se a Análise Através da Teoria dos Pontos Fixos Atratores que, como já foi visto, não mostrou-se adequada, ou seja, não conseguiu detectar as periodicidades da série *Rio Perequê*.

11. LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho deparou-se com algumas limitações de ordem computacional, pois as rotinas usadas na Análise Clássica do Periodograma são bastante limitadas em termos de tamanho das séries temporais em estudo, que não pode ser muito grande e deve ser uma potência de dois, e também devido ao problema já mencionado no Capítulo 7 no que diz respeito a Análise Espectral, ou seja, a rotina ressalta periodicidades irrelevantes, que são influenciadas pelo valor do parâmetro M .

A rotina computacional utilizada na Análise Através de Pontos Fixos, também apresenta limitações por não processar análises com um valor para o parâmetro do filtro (M) maior do que 34. Recomenda-se que se busque fazer estas mesmas análises utilizando outras rotinas computacionais, como as do livro de Brockwell e Davis (1991), para que uma comparação mais ampla dos resultados seja feita e, também, estender as rotinas na Análise Através de Pontos Fixos armazenando de forma ótima o fatorial de qualquer número inteiro.

Recomenda-se também que seja feita a complementação deste trabalho através da análise da segunda fase do estudo da *GATE*, a análise da série temporal *GATE-II*.

A obtenção de uma quantidade maior de dados da série temporal *Rio Perequê* possibilitaria a continuação deste estudo, procurando por periodicidades influenciadas pelas fases da lua, pois sabe-se, por estudos anteriores, que a fase da lua influencia na ocorrência das marés. Recomenda-se então, que sejam mantidos contatos com o Dr. Eduardo Marone do Laboratório de Física Marinha do Centro de Estudos do Mar da UFPR para obter mais dados da série temporal Rio Perequê, pois 2048 dados representam menos de 2 meses de observação.

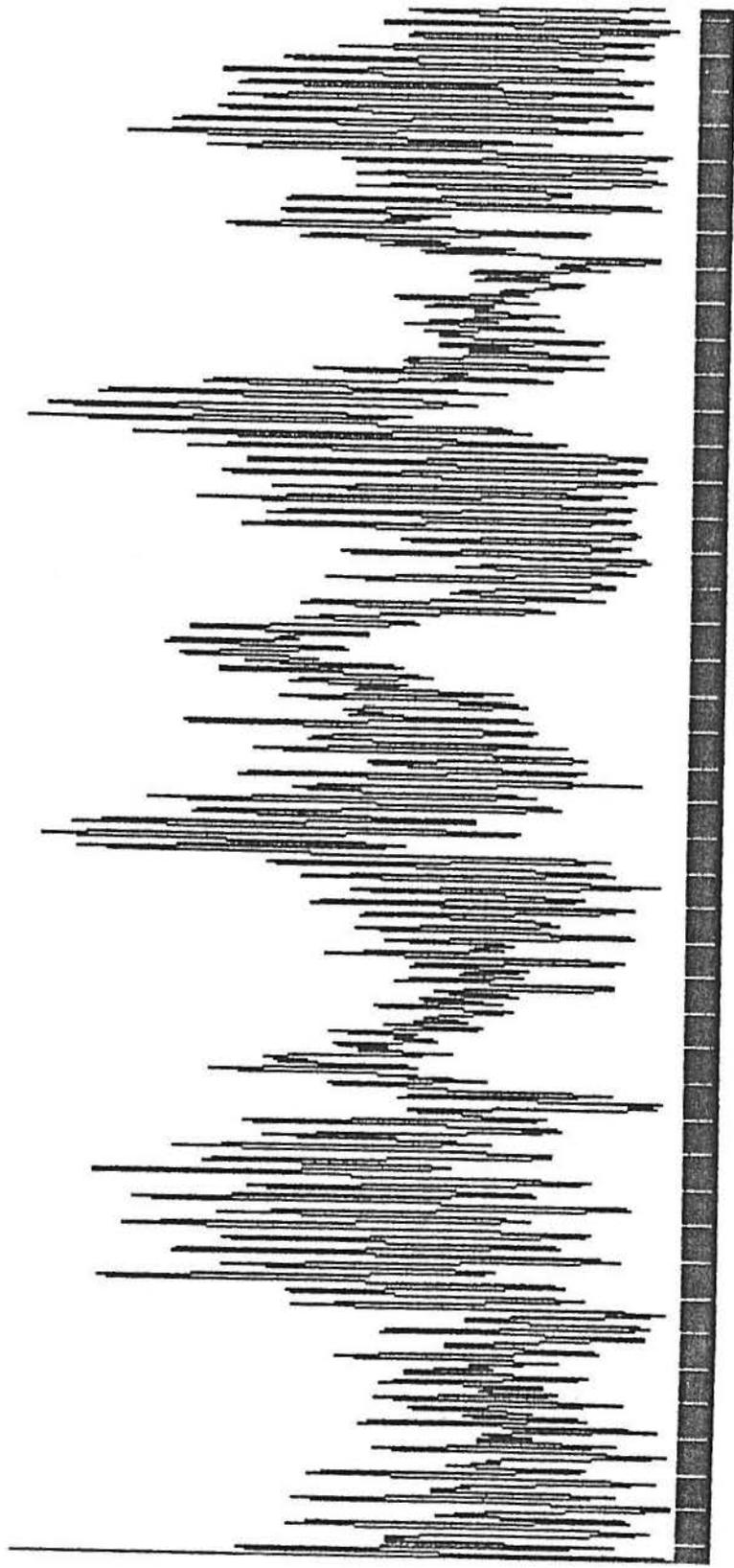
12. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) BLOOMFIELD, P. *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- 2) BOX, G. E. P. e JENKINS, G. M. *Time Series Analysis – Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day, 1976.
- 3) BROCKWELL, P. J. e DAVIS, R. A. *Time Series: Theory and Methods*. 2ª.ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- 4) CHATFIELD, C. *The Analysis of Time Series: An Introduction*. 3ª.ed. New York: Chapman and Hall, 1984.
- 5) GRANGER, C. W. J. The typical shape of an econometric variable. *Econometrica*, Vol. 34, p. 150-161, 1966.
- 6) KEDEM, B. e LOPES, S. Fixed points in mixed spectrum analysis. In Byrnes J. S. et al. (eds.), *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis, with Applications (Proceedings of NATO ASI)*. Massachusetts: Kluwer, p. 573-591, 1992.

- 7) LOPES, S. Spectral analysis in sinusoidal frequency modulated models. Tese de Doutoramento na University of Maryland, Mathematics Department, College Park. 1991.
- 8) LOPES, S. Análise Espectral de Séries Temporais Através de Pontos Fixos. *Revista de Econometria*, Rio de Janeiro, Vol. 13, Nº 2, p. 43-70, 1994.
- 9) LOPES, S. e KEDEM, B. Iteration of mappings and fixed points in mixed spectrum analysis. *Stochastic Models*. Vol. 10, Nº 2, 309-333, 1994.
- 10) MORETTIN, P. A. e TOLOI, C. M. C. *Modelos para Previsão de Séries Temporais*. XIII Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas-MG. Vol. 1, 1981.
- 11) PEREIRA, B. B. *Séries Temporais Multivariadas*. VI Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Rio de Janeiro-RJ. 1984.
- 12) PEREIRA, B. B. , ZANUSSO PAIS, M. B. e SALLES, P. R. H. *Introdução à Análise Espectral de Séries Temporais*. IM-UFRJ. 1984.
- 13) PRIESTLEY, M. B. *Spectral Analysis and Time Series*. London: Academic Press, Vol. 1 e 2, 1981.
- 14) REISEN, V. A. *ARFIMA-O Modelo ARIMA Para d Fracionário*. VI Escola de Séries Temporais e Econometria. Vitória-ES. 1995.
- 15) SHUMWAY, R. H. *Applied Statistical Time Serie Analysis*. New York: Prentice Hall, 1988.
- 16) SOWELL, F. *Maximum Likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series model*. Graduate School of Industrial Administration – Carnegie Mellon University. 1990.

ANEXOS

Rio Peregué
Max= 208.5896 Min= 22.3236 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
?



Start= 1 End= 1716 Number= 1716
 mean= .4916503 slope= -1.442448E-04

Spectrum of GATE-I - L=3 H=256 T=2048 series
 Degrees of freedom 5.027344

ANEXO 2

Frequency	Power		
0	.4487028		
1.953125E-03		59.59836	512
3.90625E-03	26.04202	256	
5.859375E-03		8.637988	170.66
.0078125	6.536756	128	
9.765625E-03		3.916083	
1.171875E-02		7.508348	85.33
1.367188E-02		5.608483	
.015625	1.272474		
1.757813E-02		2.594111	
1.953125E-02		1.747487	
2.148438E-02		2.898619	
.0234375	.9228384		
2.539063E-02		.8979771	
2.734375E-02		.4380935	
2.929688E-02		.3223506	
.03125	.5578361		
3.320313E-02		.2766967	
3.515625E-02		.2293988	
3.710938E-02		.3895043	
.0390625	.1337497		
4.101563E-02		.1953316	
4.296875E-02		4.631337E-02	
4.492188E-02		3.443832E-02	
.046875	4.913841E-02		
4.882813E-02		.1601631	
5.078125E-02		8.699656E-02	
5.273438E-02		.0457218	
.0546875	6.496661E-02		
5.664063E-02		.1712341	
5.859375E-02		.1624518	
6.054688E-02		.1106553	
.0625	3.714441E-02		
6.445313E-02		4.503046E-02	
6.640625E-02		4.337305E-02	
6.835938E-02		1.954907E-02	
.0703125	.1181736		
7.226563E-02		7.539057E-02	
7.421875E-02		.108917	
7.617188E-02		5.795795E-02	
.078125	6.673769E-02		
8.007813E-02		3.066685E-02	
8.203125E-02		.0510279	
8.398438E-02		5.112347E-02	
.0859375	1.410147E-02		
8.789062E-02		1.738994E-02	
8.984375E-02		5.093163E-02	
9.179688E-02		3.940147E-02	
.09375	5.535867E-02		
9.570312E-02		1.278156E-02	
9.765625E-02		3.436579E-02	
9.960938E-02		.0416932	
.1015625	3.204094E-02		

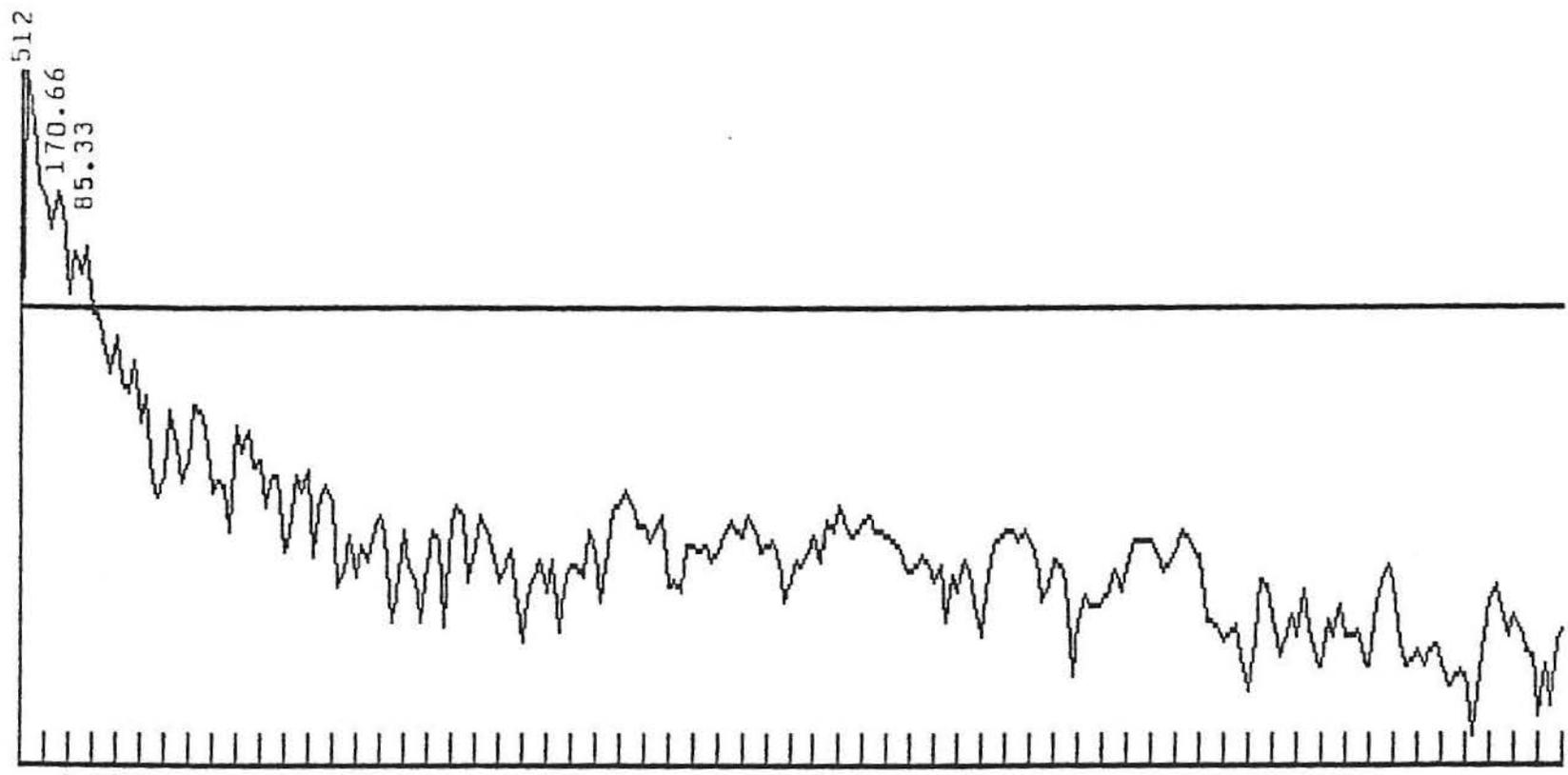
.1035156	7.549666E-03
.1054688	9.770794E-03
.1074219	1.799876E-02
.109375	9.133266E-03
.1113281	1.485686E-02
.1132813	1.099167E-02
.1152344	1.769267E-02
.1171875	2.515624E-02
.1191406	.0178292
.1210938	4.014931E-03
.1230469	6.310404E-03
.125	1.914286E-02
.1269531	1.037425E-02
.1289063	7.814096E-03
.1308594	3.921177E-03
.1328125	1.033356E-02
.1347656	.0199163
.1367188	1.677761E-02
.1386719	3.774055E-03
.140625	2.291621E-02
.1425781	3.038021E-02
.1445313	2.418577E-02
.1464844	8.194949E-03
.1484375	1.444095E-02
.1503906	2.534436E-02
.1523438	2.007787E-02
.1542969	1.398072E-02
.15625	7.773897E-03
.1582031	9.729231E-03
.1601563	1.367913E-02
.1621094	6.509504E-03
.1640625	2.823553E-03
.1660156	5.996153E-03
.1679688	8.926582E-03
.1699219	1.106011E-02
.171875	6.754041E-03
.1738281	1.131986E-02
.1757813	3.384777E-03
.1777344	7.353669E-03
.1796875	1.056147E-02
.1816406	1.074422E-02
.1835938	9.084174E-03
.1855469	1.874438E-02
.1875	1.382026E-02
.1894531	5.515056E-03
.1914063	1.321983E-02
.1933594	2.744674E-02
.1953125	3.179091E-02
.1972656	3.869443E-02
.1992188	2.957894E-02
.2011719	2.079047E-02
.203125	2.125044E-02
.2050781	1.562524E-02
.2070313	2.018171E-02
.2089844	2.543236E-02
.2109375	7.659884E-03
.2128906	7.807984E-03
.2148438	6.672349E-03
.2167969	1.532001E-02
.21875	1.545307E-02

.2207031	.0136113
.2226563	1.437128E-02
.2246094	1.144614E-02
.2265625	1.373941E-02
.2285156	1.814423E-02
.2304688	2.260636E-02
.2324219	1.848854E-02
.234375	1.703465E-02
.2363281	2.491752E-02
.2382813	1.907598E-02
.2402344	1.309845E-02
.2421875	1.443807E-02
.2441406	1.596214E-02
.2460938	1.154967E-02
.2480469	5.624842E-03
.25	8.167875E-03
.2519531	1.155158E-02
.2539063	.0108551
.2558594	1.376425E-02
.2578125	1.731211E-02
.2597656	1.159063E-02
.2617188	2.265878E-02
.2636719	1.949753E-02
.265625	2.861679E-02
.2675781	2.121994E-02
.2695313	1.802409E-02
.2714844	.0191662
.2734375	2.384161E-02
.2753906	.0259065
.2773438	1.862546E-02
.2792969	1.958567E-02
.28125	1.698693E-02
.2832031	1.572437E-02
.2851563	.0144381
.2871094	.0100053
.2890625	9.386784E-03
.2910156	1.079713E-02
.2929688	1.271929E-02
.2949219	1.047481E-02
.296875	8.193931E-03
.2988281	1.002748E-02
.3007813	3.932346E-03
.3027344	8.941879E-03
.3046875	6.994562E-03
.3066406	1.093755E-02
.3085938	9.450128E-03
.3105469	4.450567E-03
.3125	3.19005E-03
.3144531	8.612144E-03
.3164063	1.418699E-02
.3183594	1.705539E-02
.3203125	1.999212E-02
.3222656	1.992683E-02
.3242188	1.633048E-02
.3261719	1.988232E-02
.328125	1.547799E-02
.3300781	1.135685E-02
.3320313	5.727476E-03
.3339844	7.641834E-03
.3359375	.011535

.3378906	1.061309E-02
.3398438	8.059995E-03
.3417969	1.484267E-03
.34375	3.839506E-03
.3457031	5.970006E-03
.3476563	5.153838E-03
.3496094	5.09185E-03
.3515625	5.54538E-03
.3535156	6.612612E-03
.3554688	9.263814E-03
.3574219	6.668284E-03
.359375	9.674201E-03
.3613281	1.645808E-02
.3632813	1.648066E-02
.3652344	.0164668
.3671875	1.683199E-02
.3691406	1.255774E-02
.3710938	9.557096E-03
.3730469	.0114377
.375	1.403822E-02
.3769531	1.901462E-02
.3789063	1.839765E-02
.3808594	1.399929E-02
.3828125	1.295906E-02
.3847656	4.083377E-03
.3867188	3.877537E-03
.3886719	3.380576E-03
.390625	2.871555E-03
.3925781	3.287298E-03
.3945313	3.718601E-03
.3964844	1.610408E-03
.3984375	1.154879E-03
.4003906	2.919104E-03
.4023438	8.129408E-03
.4042969	7.287088E-03
.40625	4.459718E-03
.4082031	2.22791E-03
.4101563	2.71375E-03
.4121094	4.172606E-03
.4140625	3.121095E-03
.4160156	7.023946E-03
.4179688	3.421675E-03
.4199219	1.939911E-03
.421875	1.84849E-03
.4238282	4.056087E-03
.4257813	3.130685E-03
.4277344	5.027685E-03
.4296875	2.960396E-03
.4316407	3.104546E-03
.4335938	3.245333E-03
.4355469	2.010639E-03
.4375	1.827384E-03
.4394532	5.290428E-03
.4414063	8.170395E-03
.4433594	1.011933E-02
.4453125	7.683082E-03
.4472657	2.907235E-03
.4492188	1.892181E-03
.4511719	2.026867E-03
.453125	2.263106E-03

.4550782	1.878508E-03
.4570313	2.35886E-03
.4589844	2.589683E-03
.4609375	1.849908E-03
.4628907	1.271955E-03
.4648438	1.375195E-03
.4667969	1.628829E-03
.46875	1.463287E-03
.4707032	5.466079E-04
.4726563	1.056096E-03
.4746094	3.15753E-03
.4765625	5.607665E-03
.4785157	7.273476E-03
.4804688	4.656912E-03
.4824219	3.060031E-03
.484375	4.294078E-03
.4863282	3.368921E-03
.4882813	2.36841E-03
.4902344	2.21003E-03
.4921875	7.798776E-04
.4941407	1.808322E-03
.4960938	9.105667E-04
.4980469	2.925601E-03
.5	3.281141E-03

Ln Spectrum of GATE-I - L=3 M=256 T=2048
Max= 4.087628 Min= -7.511779 Tick length = .0078125 cycles/pt
Hit return to continue
? ■



Start= 1 End= 2048 Number= 2048
 mean= 89.88748 slope= 1.201076E-02

Spectrum of Rio Perequê - L=3 M=256 T=2048 series
 Degrees of freedom 6

ANEXO 3

Frequency	Power		
0	19432.27		
<u>1.953125E-03</u>		<u>29422.76</u>	512
3.90625E-03	8880.55		
5.859375E-03		5650.381	
.0078125	4511.072		
9.765625E-03		4072.743	
1.171875E-02		1059.653	
1.367188E-02		629.0777	
.015625	459.7265		
1.757813E-02		810.4671	
<u>1.953125E-02</u>		<u>10053.75</u>	51
2.148438E-02		9199.009	
.0234375	448.5533		
2.539063E-02		208.25	
2.734375E-02		128.8787	
2.929688E-02		332.6619	
.03125	389.7957		
3.320313E-02		592.031	
3.515625E-02		1410.242	
3.710938E-02		2428.104	
.0390625	27970.21		
<u>4.101563E-02</u>		<u>65036.8</u>	24.38
4.296875E-02		5005.542	
4.492188E-02		1606.062	
.046875	809.25		
4.882813E-02		559.6921	
5.078125E-02		267.4457	
5.273438E-02		113.5292	
.0546875	130.7498		
5.664063E-02		64.71446	
5.859375E-02		497.1898	
<u>6.054688E-02</u>		<u>13371.94</u>	16.5
.0625	4313.302		
6.445313E-02		81.07906	
6.640625E-02		49.30689	
6.835938E-02		141.6875	
.0703125	75.33353		
7.226563E-02		18.85096	
7.421875E-02		20.92259	
7.617188E-02		58.50197	
.078125	125.1726		
<u>8.007813E-02</u>		<u>7120.407</u>	12.48
8.203125E-02		198.6499	
8.398438E-02		325.7989	
.0859375	58.94656		
8.789062E-02		48.66309	
8.984375E-02		50.26416	
9.179688E-02		22.03073	
.09375	51.16261		
9.570312E-02		79.485	
9.765625E-02		22.14057	
9.960938E-02		141.2424	
.1015625	171.6895		

.1035156	13.72524
.1054688	44.32601
.1074219	4.376478
.109375	30.19159
.1113281	25.87755
.1132813	24.18734
.1152344	17.31558
.1171875	19.71386
.1191406	34.71245
.1210938	31.29896
.1230469	87.40994
.125	49.47158
.1269531	7.488363
.1289063	30.69663
.1308594	18.94384
.1328125	11.64946
.1347656	13.71324
.1367188	10.25972
.1386719	24.23015
.140625	26.11482
.1425781	12.17532
.1445313	4.261073
.1464844	42.75763
.1484375	19.4122
.1503906	17.81635
.1523438	6.136832
.1542969	13.20204
.15625	18.68776
.1582031	6.334034
.1601563	18.05483
.1621094	26.12945
.1640625	13.88167
.1660156	24.45025
.1679688	14.08854
.1699219	1.459426
.171875	12.51644
.1738281	3.927577
.1757813	9.301722
.1777344	3.496848
.1796875	8.608974
.1816406	10.91301
.1835938	1.498225
.1855469	9.364326
.1875	12.03771
.1894531	17.14933
.1914063	15.98736
.1933594	4.554482
.1953125	4.525451
.1972656	2.192807
.1992188	5.961014
.2011719	11.62256
.203125	8.246118
.2050781	3.760826
.2070313	3.47535
.2089844	4.698462
.2109375	5.941839
.2128906	1.541408
.2148438	3.720108
.2167969	6.902697
.21875	7.344462

.2207031	4.275327
2226563	8.829991
.2246094	7.797218
.2265625	8.376558
2285156	4.90568
2304688	1.486496
.2324219	3.189744
234375	2.989259
2363281	5.192961
.2382813	4.884421
.2402344	2.627369
2421875	1.513995
2441406	.7568412
.2460938	3.180234
2480469	3.202344
25	2.091734
.2519531	2.790435
.2539063	.9514091
2558594	1.903366
.2578125	4.619342
.2597656	2.015895
2617188	1.670995
2636719	3.565061
.265625	2.333153
2675781	1.205986
2695313	3.488197
.2714844	1.951533
.2734375	4.038824
2753906	1.654934
2773438	7.578915
.2792969	4.737105
28125	.9159221
2832031	1.71878
.2851563	4.049361
2871094	3.817092
2890625	.7868528
.2910156	1.936136
.2929688	4.984247
2949219	2.535726
296875	2.56
.2988281	3.022746
3007813	2.181386
3027344	4.046934
.3046875	2.393064
.3066406	1.635021
3085938	.8466327
.3105469	3.423784
.3125	1.185065
3144531	3.201579
3164063	2.241607
.3183594	3.073429
3203125	4.577783
3222656	2.412066
.3242188	1.679289
.3261719	3.772428
328125	.8253643
3300781	3.994867
.3320313	.8737278
3339844	2.088498
3359375	1.467918

.3378906	3.333218
.3398438	3.350827
.3417969	.9045524
.34375	4.052347
.3457031	1.07834
.3476563	1.408205
.3496094	2.195188
.3515625	1.769483
.3535156	3.166815
.3554688	2.596328
.3574219	.9163098
.359375	3.48499
.3613281	2.298672
.3632813	2.338226
.3652344	.8932898
.3671875	2.797522
.3691406	.5015751
.3710938	1.794393
.3730469	1.331664
.375	1.810148
.3769531	.9654865
.3789063	3.048737
.3808594	5.252293
.3828125	2.77254
.3847656	.6195931
.3867188	3.586175
.3886719	4.636729
.390625	1.368015
.3925781	3.269953
.3945313	2.425972
.3964844	1.617235
.3984375	2.556844
.4003906	3.511173
.4023438	.8478133
.4042969	.3658416
.40625	1.534282
.4082031	3.520372
.4101563	1.290853
.4121094	3.050907
.4140625	.8802524
.4160156	1.134597
.4179688	1.299773
.4199219	1.763303
.421875	.9324196
.4238282	1.772698
.4257813	2.140687
.4277344	2.827419
.4296875	2.021957
.4316407	1.078345
.4335938	1.566679
.4355469	.9449029
.4375	.5599807
.4394532	2.045996
.4414063	1.484726
.4433594	1.747167
.4453125	2.826129
.4472657	1.249604
.4492188	3.025208
.4511719	1.458681
.453125	2.442456

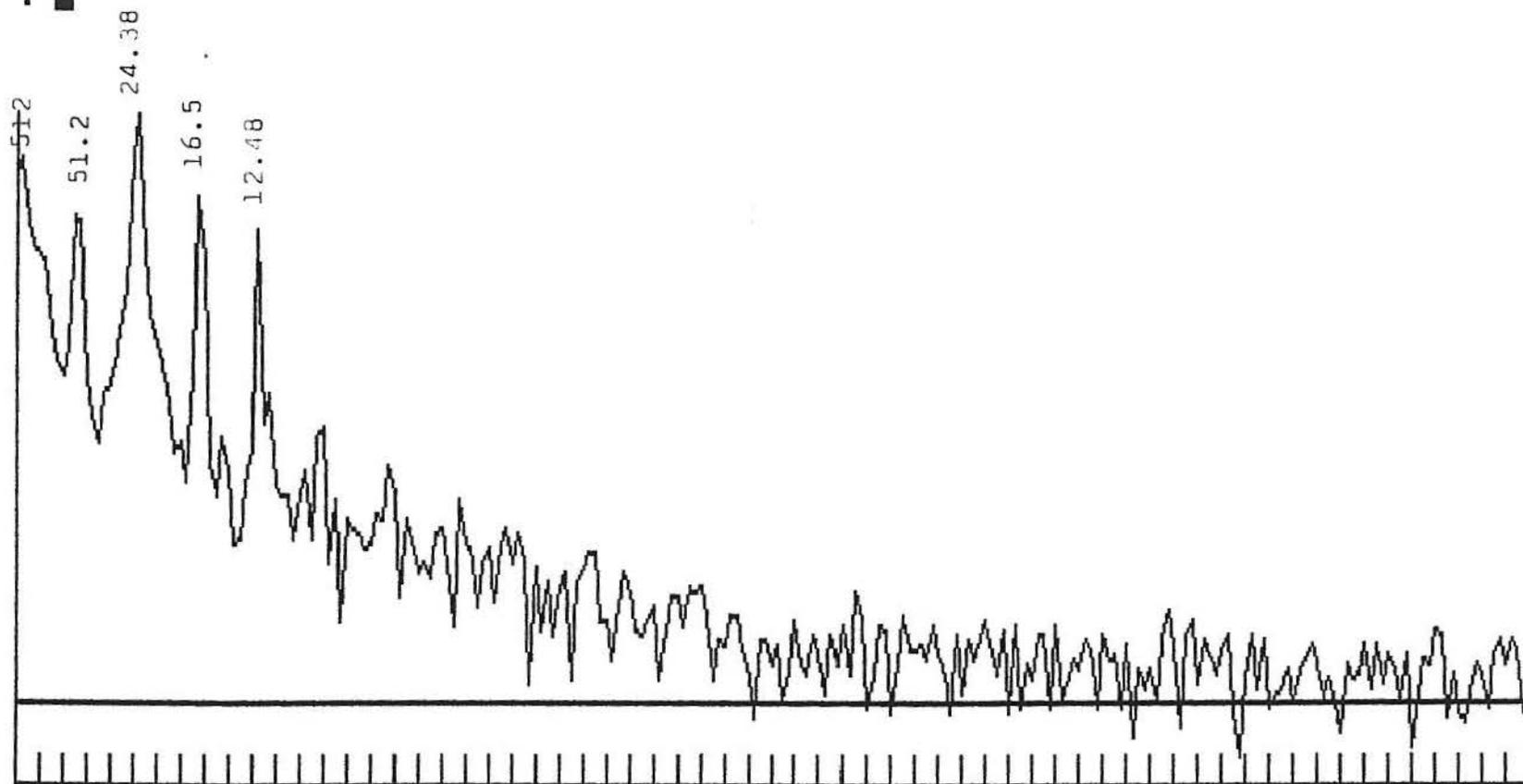
.4550782	1.784979
.4570313	1.028653
.4589844	2.378555
.4609375	.4264775
.4628907	1.187518
.4648438	2.280151
.4667969	1.993617
.46875	3.976322
.4707032	3.523763
.4726563	.7097461
.4746094	1.682466
.4765625	.7760825
.4785157	.6873181
.4804688	1.186712
.4824219	2.050516
.484375	1.678016
.4863282	.9095056
.4882813	2.366989
.4902344	3.07397
.4921875	2.013127
.4941407	3.092376
.4960938	2.684478
.4980469	.8464308
.5	1.638085

Ln Spectrum of Rio Perequê - L=3 M=256 T=2048

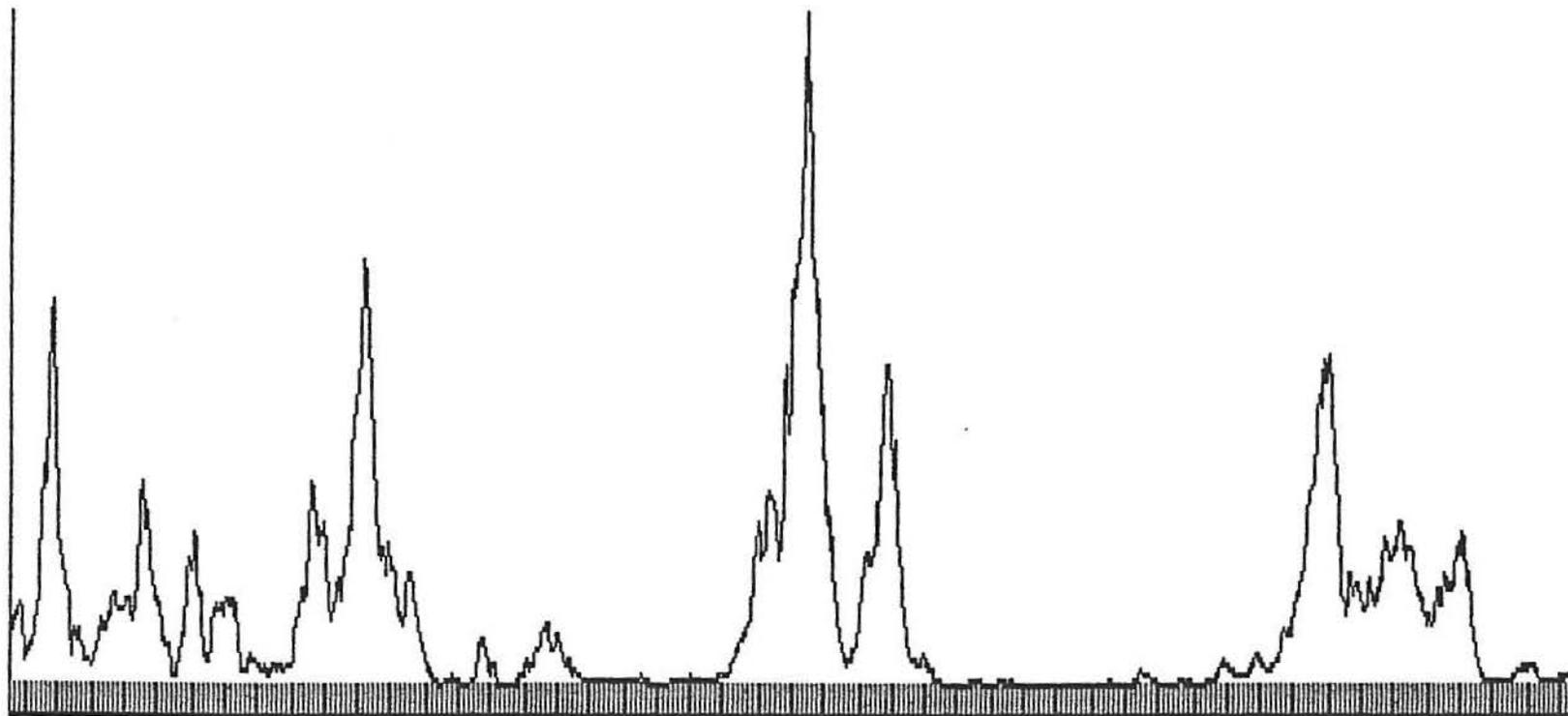
Max= 11.08271 Min= -1.005555 Tick length = .0078125 cycles/pt

Hit return to continue

? ■



GATE-I - FILTRO MA(3)
Max= 5.049743 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █

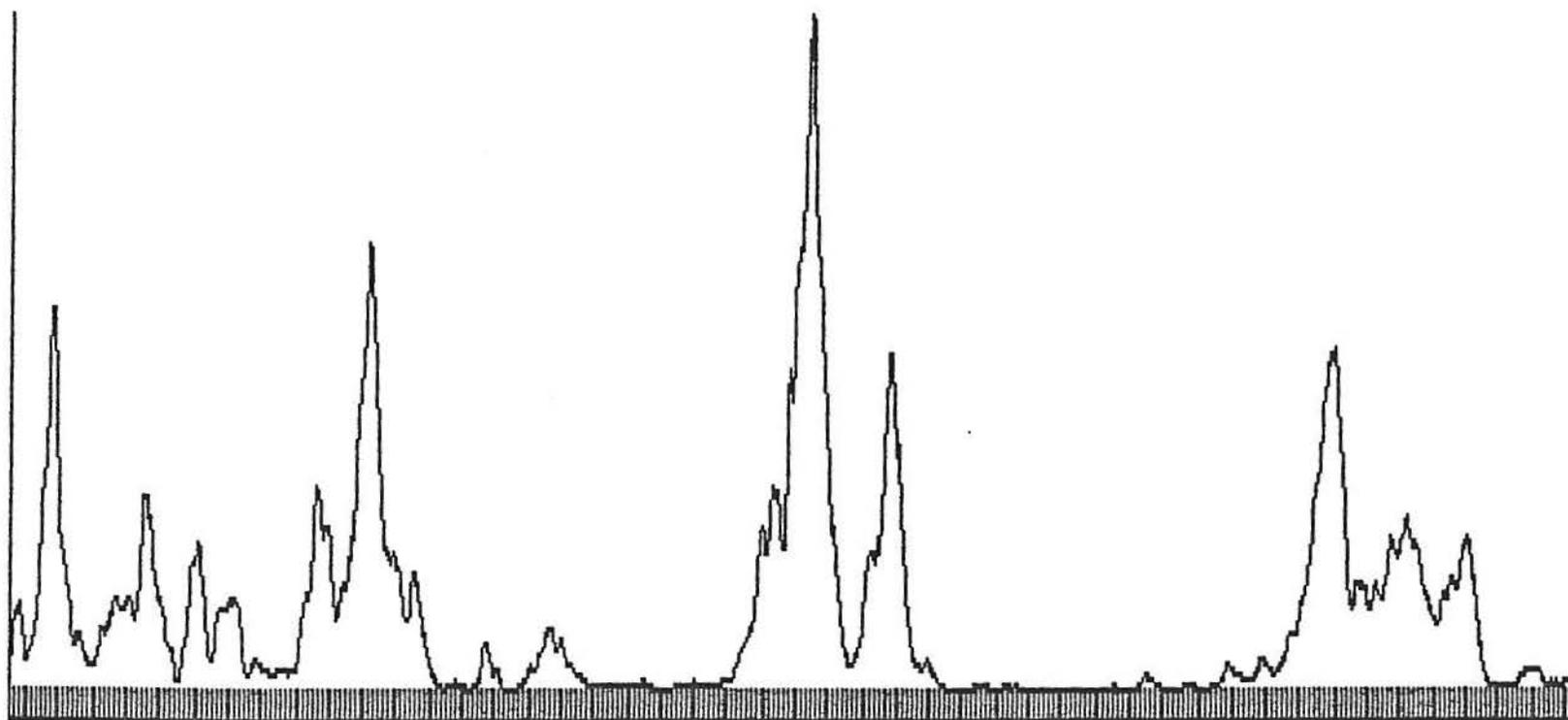


GATE-I - FILTRO MA(5)

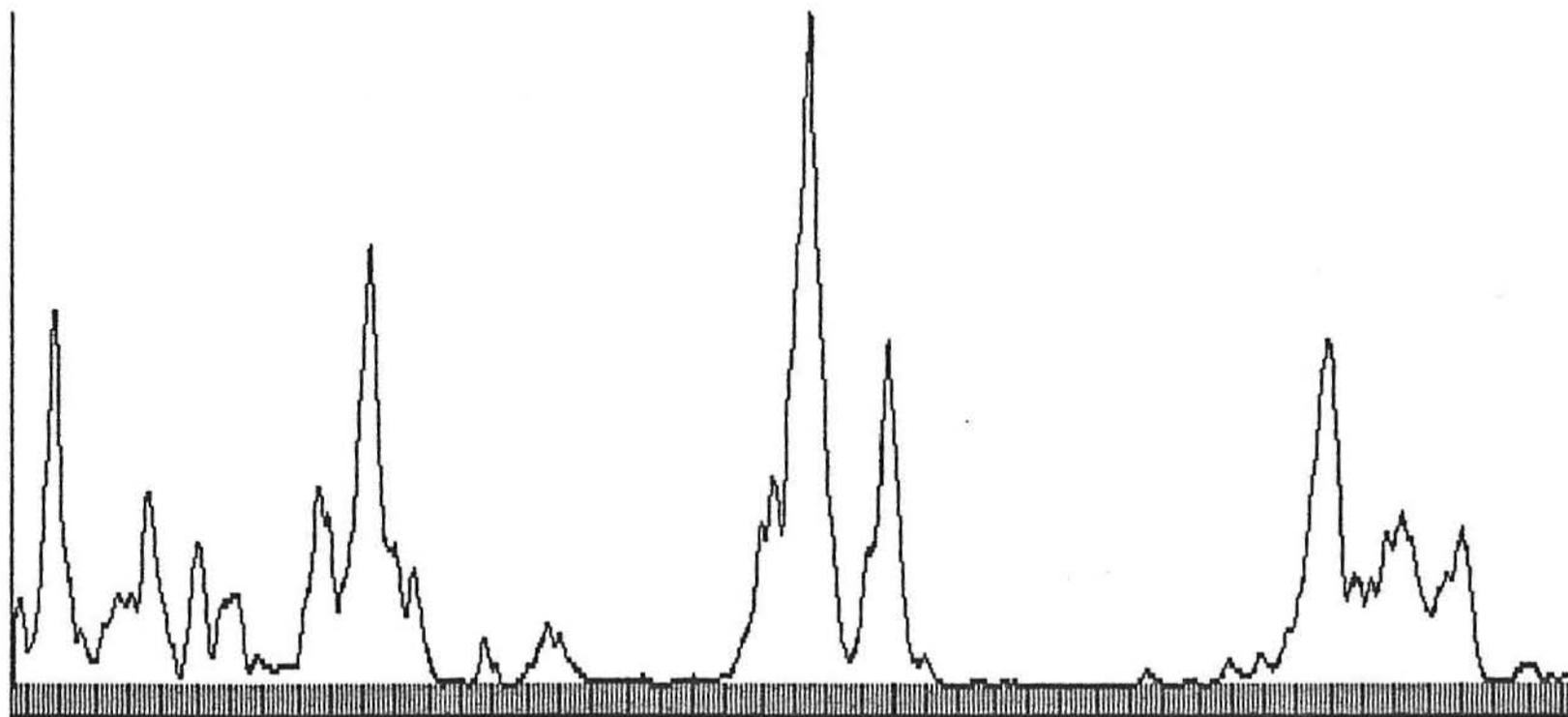
Max= 4.785226 Min= 0 Tick length = 5 pts

Hit return to continue

? █



GATE-I - FILTRO MA(7)
Max= 4.657776 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █

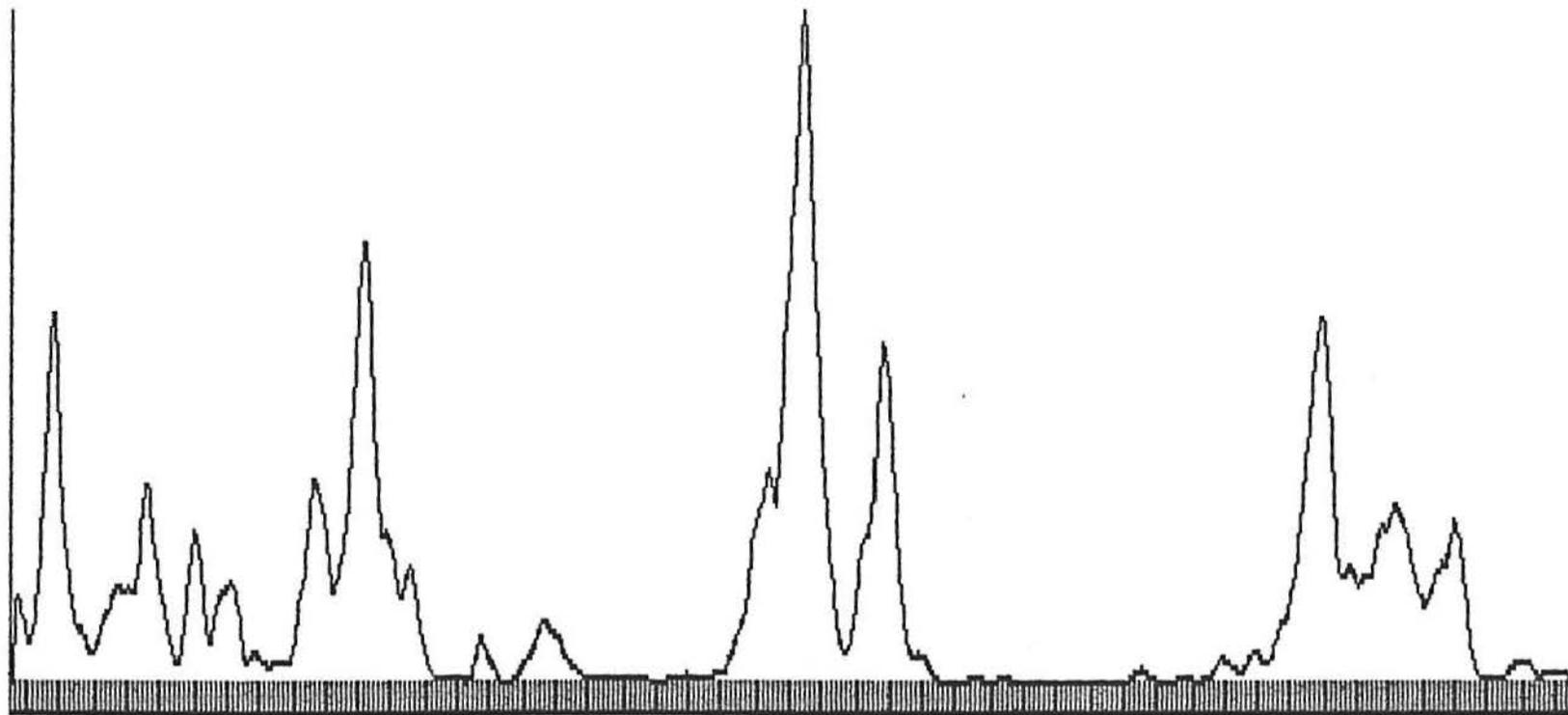


GATE-I - FILTRO MA(11)

Max= 4.329386 Min= 0 Tick length = 5 pts

Hit return to continue

? █

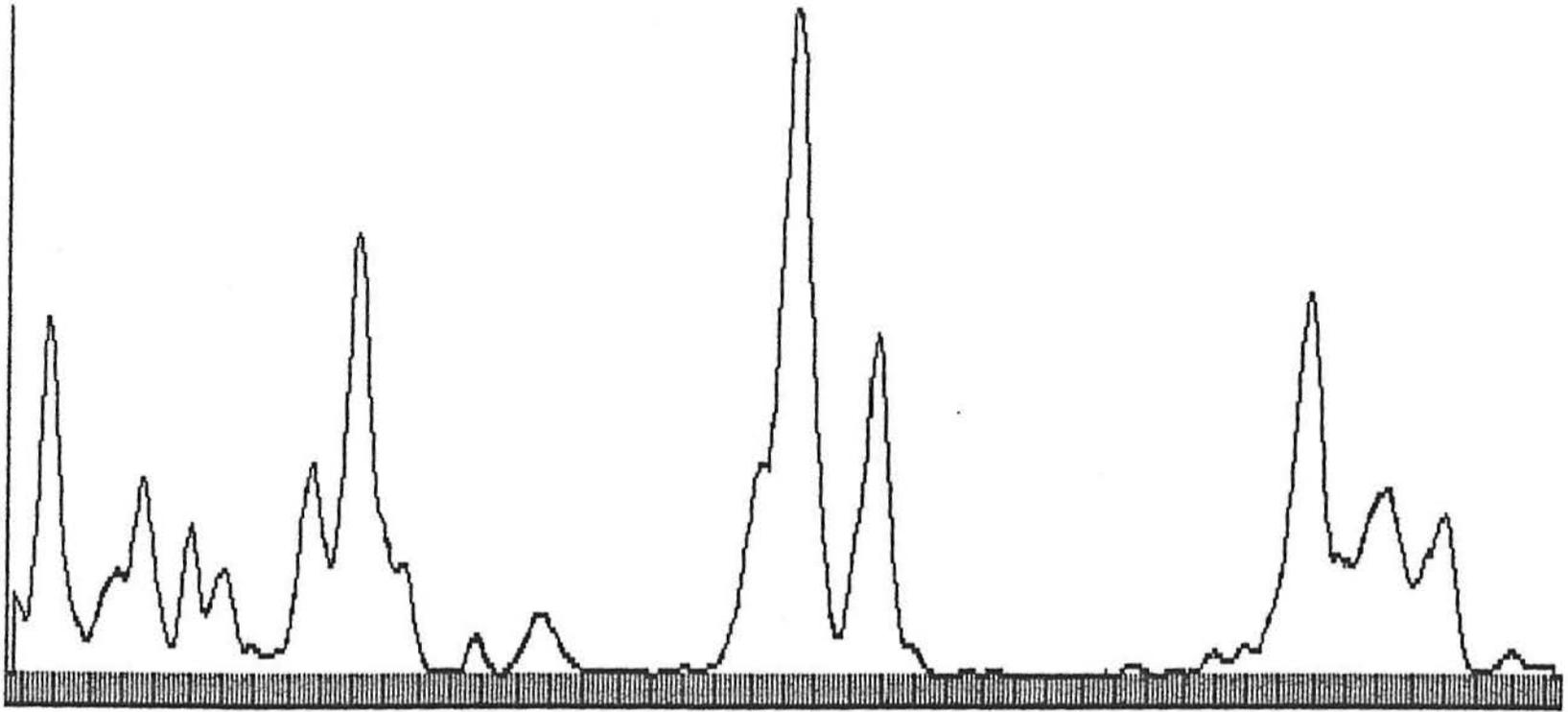


GATE-I - FILTRO MA(17)

Max= 3.941314 Min= 0 Tick length = 5 pts

Hit return to continue

? █



Spectrum of GATE-I - FILTRO MA(9) - L=3 M=256 T=2048
Max= 59.48037 Min= 4.777099E-06 Tick length = .0078125 cycles/pt
Hit return to continue
? ■



Start= 1 End= 1716 Number= 1716
 mean= .4905453 slope= -1.410905E-04

Spectrum of GATE-I - FILTRO MA(9) - L=3 N=256 T=2048 series
 Degrees of freedom 5.027344

Frequency	Power		
0	.3913553		
1.953125E-03		59.48037	512
3.90625E-03	25.95239		256
5.859375E-03		8.58319	170.66
.0078125	6.378241		
9.765625E-03		3.825555	
1.171875E-02		7.368326	85.33
1.367188E-02		5.438366	
.015625	1.16219		
1.757813E-02		2.362285	
1.953125E-02		1.575297	
2.148438E-02		2.521073	
.0234375	.7569846		
2.539063E-02		.7085316	
2.734375E-02		.368782	
2.929688E-02		.2573567	
.03125	.4475079		
3.320313E-02		.2154988	
3.515625E-02		.1833947	
3.710938E-02		.293966	
.0390625	8.435836E-02		
4.101563E-02		.1012632	
4.296875E-02		3.013836E-02	
4.492188E-02		2.290267E-02	
.046875	3.483135E-02		
4.882813E-02		7.231661E-02	
5.078125E-02		5.219693E-02	
5.273438E-02		.0285179	
.0546875	3.026205E-02		
5.664063E-02		7.935615E-02	
5.859375E-02		7.612863E-02	
6.054688E-02		3.670796E-02	
.0625	9.106264E-03		
6.445313E-02		1.485207E-02	
6.640625E-02		6.042334E-03	
6.835938E-02		4.830871E-03	
.0703125	3.015269E-02		
7.226563E-02		1.861733E-02	
7.421875E-02		3.138824E-02	
7.617188E-02		.0148006	
.078125	.0125429		
8.007813E-02		8.482274E-03	
8.203125E-02		5.273029E-03	
8.398438E-02		4.255422E-03	
.0859375	4.454714E-03		
8.789062E-02		1.178542E-03	
8.984375E-02		3.38452E-03	
9.179688E-02		3.963679E-03	
.09375	3.165566E-03		
9.570312E-02		2.285798E-03	
9.765625E-02		2.865573E-03	
9.960938E-02		1.997126E-03	
.1015625	3.173293E-03		

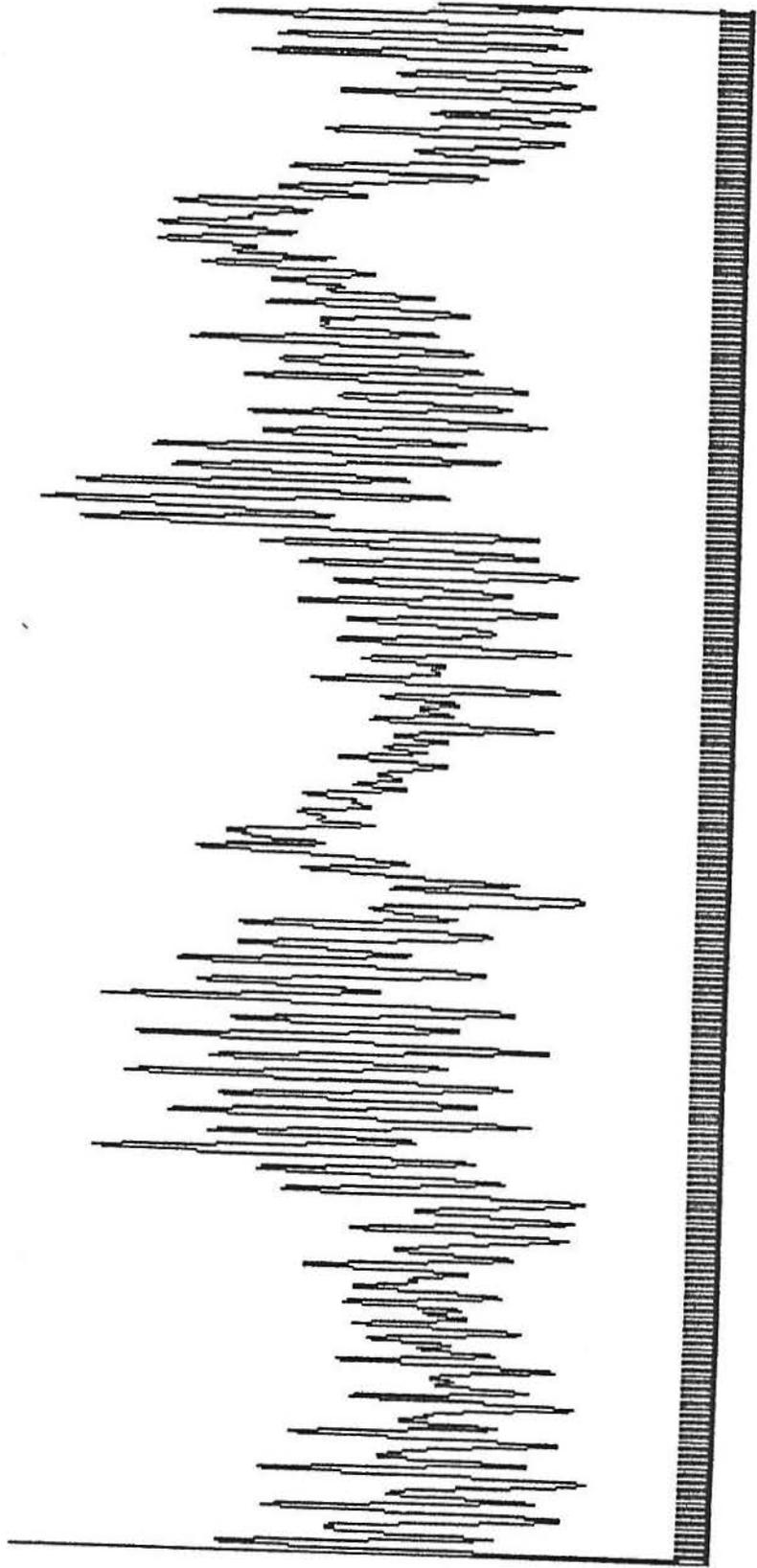
.1035156	2.162497E-03
.1054688	7.937341E-04
.1074219	2.396725E-03
.109375	1.791574E-03
.1113281	9.21786E-04
.1132813	2.240345E-03
.1152344	1.665773E-03
.1171875	1.135429E-03
.1191406	1.938843E-03
.1210938	1.273436E-03
.1230469	1.002628E-03
.125	1.880625E-03
.1269531	8.339437E-04
.1289063	1.083725E-03
.1308594	1.802432E-03
.1328125	1.572862E-03
.1347656	9.923698E-04
.1367188	2.138785E-03
.1386719	1.041627E-03
.140625	1.413763E-03
.1425781	1.952103E-03
.1445313	1.753755E-03
.1464844	1.40941E-03
.1484375	9.541705E-04
.1503906	1.359071E-03
.1523438	3.224006E-03
.1542969	7.309784E-04
.15625	1.102736E-03
.1582031	1.884761E-03
.1601563	3.769783E-04
.1621094	6.309012E-04
.1640625	1.376584E-03
.1660156	9.004201E-04
.1679688	1.191028E-03
.1699219	1.591594E-03
.171875	1.137189E-03
.1738281	2.178026E-04
.1757813	6.990319E-04
.1777344	6.683078E-04
.1796875	4.866272E-04
.1816406	6.009703E-04
.1835938	8.21251E-04
.1855469	1.519986E-03
.1875	5.065534E-04
.1894531	1.386209E-04
.1914063	8.994588E-04
.1933594	9.147677E-04
.1953125	6.028193E-04
.1972656	1.253145E-03
.1992188	7.655894E-04
.2011719	3.050921E-04
.203125	3.536324E-04
.2050781	3.167677E-04
.2070313	1.036524E-04
.2089844	1.751225E-04
.2109375	1.208814E-04
.2128906	1.462041E-04
.2148438	1.954563E-04
.2167969	8.417412E-05
.21875	1.274851E-04

.2207031	1.601756E-04
.2226563	3.284673E-05
.2246094	8.069355E-05
.2265625	1.20033E-04
.2285156	3.108994E-05
.2304688	1.470088E-04
.2324219	1.511681E-04
.234375	6.267596E-05
.2363281	1.891816E-04
.2382813	1.648407E-04
.2402344	5.766214E-05
.2421875	1.760876E-04
.2441406	1.556715E-04
.2460938	1.216177E-04
.2480469	1.56572E-04
.25	8.436056E-05
.2519531	1.785929E-04
.2539063	2.296077E-04
.2558594	2.471041E-04
.2578125	3.13108E-04
.2597656	2.30621E-04
.2617188	4.851072E-04
.2636719	4.542477E-04
.265625	5.470423E-04
.2675781	4.463542E-04
.2695313	4.726943E-04
.2714844	4.281675E-04
.2734375	5.397259E-04
.2753906	7.062941E-04
.2773438	4.46149E-04
.2792969	5.45319E-04
.28125	4.807805E-04
.2832031	3.555778E-04
.2851563	4.320124E-04
.2871094	2.530126E-04
.2890625	2.505975E-04
.2910156	3.166631E-04
.2929688	1.881457E-04
.2949219	2.157816E-04
.296875	2.675611E-04
.2988281	2.219723E-04
.3007813	2.290281E-04
.3027344	3.80263E-04
.3046875	1.137802E-04
.3066406	2.536075E-04
.3085938	3.06736E-04
.3105469	1.311848E-04
.3125	2.197348E-04
.3144531	2.836912E-04
.3164063	9.873396E-05
.3183594	3.071677E-04
.3203125	2.173323E-04
.3222656	9.224538E-05
.3242188	2.855452E-04
.3261719	1.694479E-04
.328125	1.398764E-04
.3300781	3.138554E-04
.3320313	1.475361E-04
.3339844	1.734573E-04
.3359375	3.009482E-04

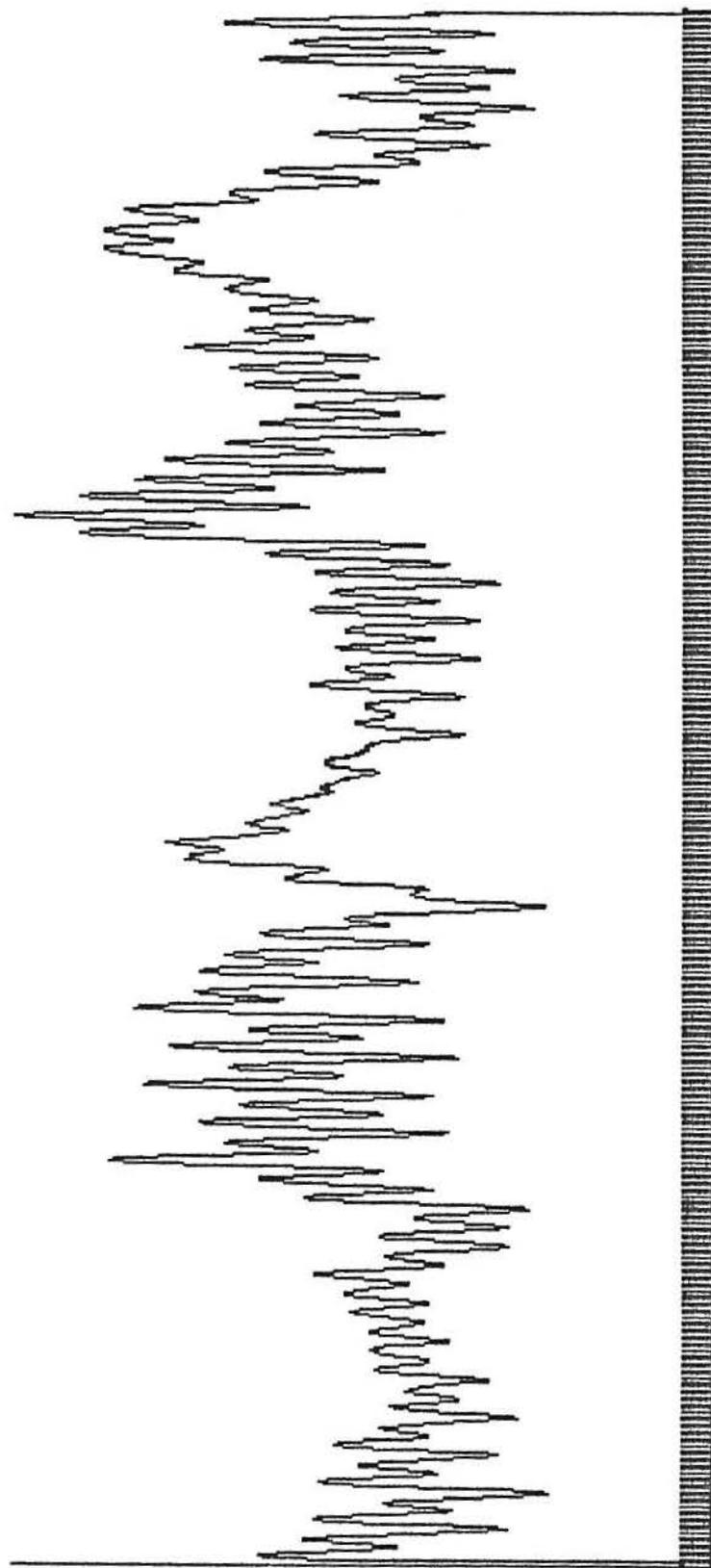
.3378906	1.41006E-04
.3398438	2.336661E-04
.3417969	2.963393E-04
.34375	1.48465E-04
.3457031	3.072502E-04
.3476563	2.934431E-04
.3496094	1.624298E-04
.3515625	3.197432E-04
.3535156	2.159554E-04
.3554688	1.841987E-04
.3574219	3.032863E-04
.359375	2.677369E-04
.3613281	1.458541E-04
.3632813	4.644633E-04
.3652344	4.406595E-04
.3671875	2.596699E-04
.3691406	3.252149E-04
.3710938	3.983571E-04
.3730469	4.218118E-04
.375	4.283178E-04
.3769531	3.141401E-04
.3789063	4.913585E-04
.3808594	5.514645E-04
.3828125	1.28825E-04
.3847656	3.025781E-04
.3867188	3.952139E-04
.3886719	1.063326E-04
.390625	3.270226E-04
.3925781	3.974055E-04
.3945313	8.528266E-05
.3964844	3.082504E-04
.3984375	3.018083E-04
.4003906	1.323903E-04
.4023438	2.584658E-04
.4042969	2.160928E-04
.40625	9.328823E-05
.4082031	2.572089E-04
.4101563	1.284534E-04
.4121094	2.449173E-04
.4140625	2.716296E-04
.4160156	1.702136E-04
.4179688	1.47091E-04
.4199219	2.325823E-04
.421875	1.636849E-04
.4238282	1.218104E-04
.4257813	2.424467E-04
.4277344	1.073589E-04
.4296875	1.021264E-04
.4316407	1.96381E-04
.4335938	5.504407E-05
.4355469	1.180971E-04
.4375	1.394366E-04
.4394532	5.215681E-05
.4414063	1.201404E-04
.4433594	1.147323E-04
.4453125	3.693701E-05
.4472657	1.160891E-04
.4492188	8.38964E-05
.4511719	3.57926E-05
.453125	1.081791E-04

.4550782	6.303972E-05
.4570313	3.803234E-05
.4589844	1.05173E-04
.4609375	4.029218E-05
.4628907	4.635081E-05
.4648438	1.017455E-04
.4667969	1.380819E-05
.46875	2.999092E-05
.4707032	7.274558E-05
.4726563	4.777099E-06
.4746094	7.217834E-05
.4765625	6.979015E-05
.4785157	9.009838E-05
.4804688	4.201866E-05
.4824219	9.027327E-05
.484375	3.830519E-05
.4863282	7.911088E-05
.4882813	4.923218E-05
.4902344	3.299305E-05
.4921875	4.950302E-05
.4941407	3.999964E-05
.4960938	1.425179E-05
.4980469	7.25468E-05
.5	4.813615E-05

Rio Perequè - FILTRO MA(7)
Max= 194.1288 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
?



Rio Peregúe - FILTRO MA(15)
Max= 173.8001 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? ■

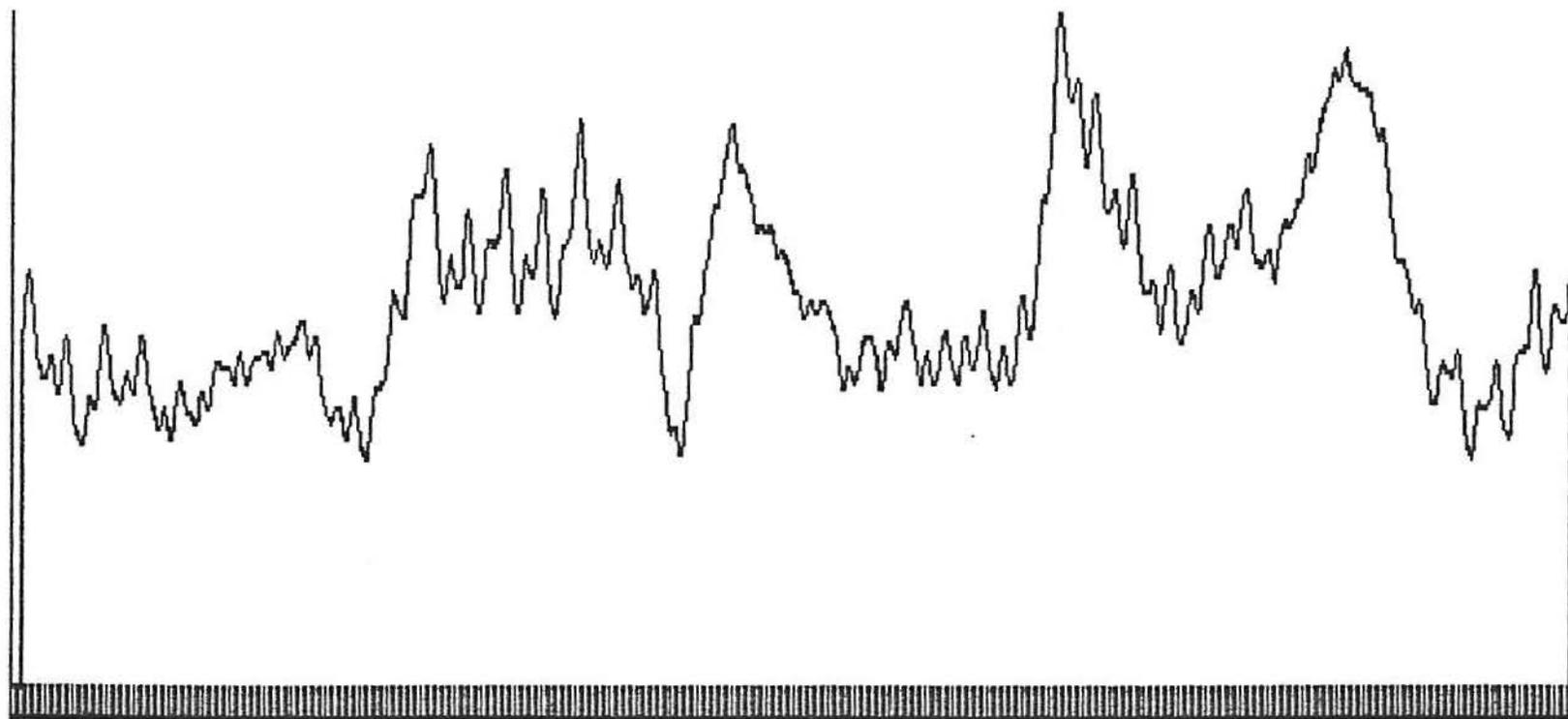


Rio Pereguã - FILTRO MA(29)

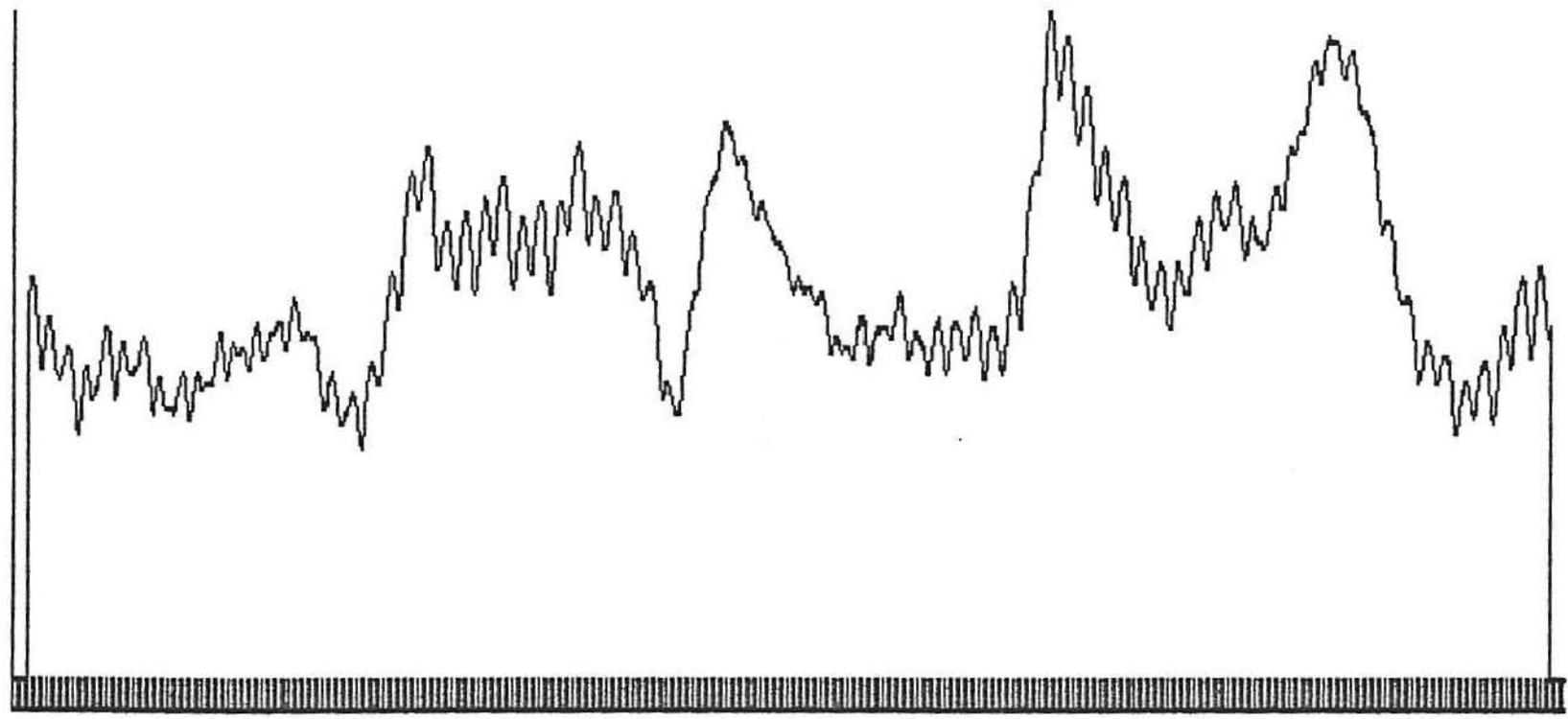
Max= 155.6853 Min= 0 Tick length = 5 pts

Hit return to continue

? ■



Rio Perequê - FILTRO MA(41)
Max= 150.575 Min= 0 Tick length = 5 pts
Hit return to continue
? █



Spectrum of Rio Perequê - FILTRO MA(21) - L=3 M=256 T=2048
Max= 33196.41 Min= 6.643102E-02 Tick length = .0078125 cycles/pt
Hit return to continue
? ■



Start= 1 End= 2048 Number= 2048
 mean= 89.16009 slope= 1.201709E-02

Spectrum of Rio Perequè - FILTRO MA(21) - L=3 N=256 T=2048 series
 Degrees of freedom 6

Frequency	Power		
0	27443.57		
1.953125E-03		33196.41	51.2
3.90625E-03	6793.997		
5.859375E-03		4509.438	
.0078125	4432.806		
9.765625E-03		5542.011	10.2
1.171875E-02		1948.576	
1.367188E-02		1175.981	
.015625	657.4264		
1.757813E-02		472.2413	
1.953125E-02		7572.908	51.2
2.148438E-02		7714.453	46.5
.0234375	1093.479		
2.539063E-02		771.9415	
2.734375E-02		417.4707	
2.929688E-02		481.413	
.03125	393.7145		
3.320313E-02		347.3994	
3.515625E-02		305.5312	
3.710938E-02		243.8591	
.0390625	1115.797		
4.101563E-02		1766.785	24.38
4.296875E-02		111.329	
4.492188E-02		19.20329	
.046875	6.264846		
4.882813E-02		2.847048	
5.078125E-02		5.765824	
5.273438E-02		14.73161	
.0546875	22.54198		
5.664063E-02		28.76748	
5.859375E-02		60.05081	
6.054688E-02		585.9048	16.5
.0625	86.83749		
6.445313E-02		77.57356	
6.640625E-02		76.80636	
6.835938E-02		81.19441	
.0703125	69.91952		
7.226563E-02		74.71512	
7.421875E-02		73.23641	
7.617188E-02		70.28942	
.078125	86.26544		
8.007813E-02		165.0793	12.48
8.203125E-02		31.50021	
8.398438E-02		33.80781	
.0859375	31.19386		
8.789062E-02		23.86983	
8.984375E-02		17.4206	
9.179688E-02		11.98831	
.09375	7.26109		
9.570312E-02		4.058345	
9.765625E-02		2.355556	
9.960938E-02		1.167349	
.1015625	2.069302		

.1035156	4.017606
.1054688	4.293922
.1074219	9.125752
.109375	10.93344
.1113281	14.12697
.1132813	15.68565
.1152344	18.32948
.1171875	24.99737
.1191406	21.64285
.1210938	24.07008
.1230469	23.74483
.125	20.86008
.1269531	23.69762
.1289063	22.0971
.1308594	18.87894
.1328125	15.63833
.1347656	15.07803
.1367188	11.25146
.1386719	8.1789
.140625	5.759802
.1425781	3.824937
.1445313	2.128183
.1464844	1.16596
.1484375	.354008
.1503906	.2090117
.1523438	.5500333
.1542969	1.69856
.15625	2.411428
.1582031	3.911603
.1601563	5.09571
.1621094	8.839626
.1640625	10.69621
.1660156	9.000498
.1679688	12.69834
.1699219	12.39511
.171875	12.74453
.1738281	13.33067
.1757813	11.97392
.1777344	12.87489
.1796875	11.60976
.1816406	10.06395
.1835938	8.702846
.1855469	7.094031
.1875	5.915676
.1894531	4.45832
.1914063	3.158245
.1933594	2.103755
.1953125	1.173042
.1972656	.6446758
.1992188	.3500882
.2011719	.4750211
.203125	.971004
.2050781	1.430894
.2070313	2.144999
.2089844	2.883585
.2109375	3.874072
.2128906	5.225471
.2148438	6.447321
.2167969	7.02107
.21875	7.64913

.2207031	8.515924
.2226563	7.878176
.2246094	8.38354
.2265625	7.898114
.2285156	7.495778
.2304688	7.296851
.2324219	6.372637
.234375	5.36241
.2363281	4.426166
.2382813	3.463009
.2402344	2.480477
.2421875	1.689784
.2441406	1.019262
.2460938	.5305465
.2480469	.2167963
.25	8.554686E-02
.2519531	.2042502
.2539063	.4584687
.2558594	.9043277
.2578125	1.802732
.2597656	2.34909
.2617188	3.030654
.2636719	3.905798
.265625	4.575262
.2675781	5.308357
.2695313	5.861148
.2714844	5.881916
.2734375	6.371462
.2753906	6.099835
.2773438	5.9362
.2792969	5.529389
.28125	5.116687
.2832031	4.550328
.2851563	3.839324
.2871094	3.131086
.2890625	2.409284
.2910156	1.781478
.2929688	1.089852
.2949219	.7458943
.296875	.3575344
.2988281	.1928163
.3007813	.2140616
.3027344	.3158164
.3046875	.6377228
.3066406	1.082013
.3085938	1.574848
.3105469	2.132808
.3125	2.685162
.3144531	3.285958
.3164063	3.917932
.3183594	4.276582
.3203125	4.510138
.3222656	4.79182
.3242188	4.83376
.3261719	4.885138
.328125	4.671846
.3300781	4.289002
.3320313	3.860665
.3339844	3.348715
.3359375	2.780428

.3378906	2.228228
.3398438	1.655232
.3417969	1.127646
.34375	.7230447
.3457031	.3438525
.3476563	.1556335
.3496094	6.643102E-02
.3515625	.1089971
.3535156	.306362
.3554688	.515459
.3574219	.9338244
.359375	1.539549
.3613281	1.774846
.3632813	2.334954
.3652344	2.896941
.3671875	3.241449
.3691406	3.694651
.3710938	4.049987
.3730469	4.09012
.375	4.15498
.3769531	4.077092
.3789063	3.892373
.3808594	3.580544
.3828125	3.198867
.3847656	2.744103
.3867188	2.257547
.3886719	1.78009
.390625	1.339464
.3925781	.9050525
.3945313	.5531727
.3964844	.3082337
.3984375	.1399885
.4003906	.1245502
.4023438	.2119355
.4042969	.4152475
.40625	.7475736
.4082031	1.019971
.4101563	1.421422
.4121094	1.975022
.4140625	2.316672
.4160156	2.744651
.4179688	3.212056
.4199219	3.412784
.421875	3.673194
.4238282	3.731755
.4257813	3.745895
.4277344	3.639731
.4296875	3.423942
.4316407	3.077206
.4335938	2.722873
.4355469	2.304043
.4375	1.827314
.4394532	1.431663
.4414063	1.009222
.4433594	.6279182
.4453125	.3818092
.4472657	.1340642
.4492188	7.374661E-02
.4511719	6.900832E-02
.453125	.2056729

.4550782	.4044573
.4570313	.6446708
.4589844	1.088846
.4609375	1.501569
.4628907	1.895453
.4648438	2.307636
.4667969	2.710682
.46875	3.081528
.4707032	3.27987
.4726563	3.526159
.4746094	3.592506
.4765625	3.555475
.4785157	3.409246
.4804688	3.180953
.4824219	2.887862
.484375	2.544537
.4863282	2.134206
.4882813	1.638287
.4902344	1.274527
.4921875	.9431879
.4941407	.5071071
.4960938	.3288264
.4980469	.1653773
.5	.1210826