

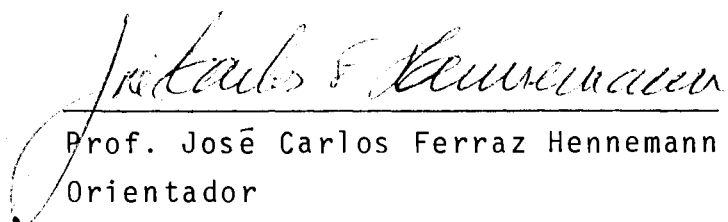
ANÁLISE DE VIGAS E PÓRTICOS PLANOS
TRELIÇADOS ATRAVÉS DE MATRIZES DE
RIGIDEZ E MOMENTOS DE INÉRCIA EQUIVALENTES

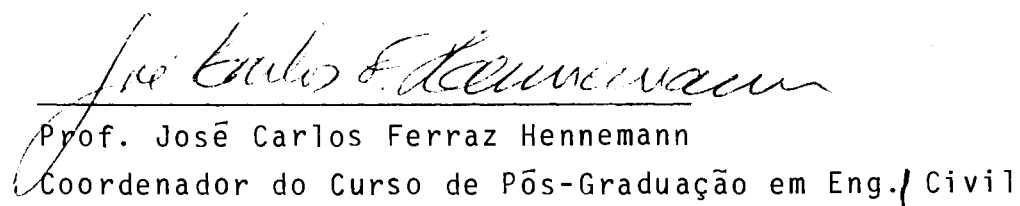
JOSE MÁRIO DOLEYS SOARES

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia Civil".

Porto Alegre
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil
Novembro 1984

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.


Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Orientador


Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Helsino e Lilia, pelo incentivo, dedicação e renúncias que fizeram para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos meus sogros Emídio e Dirce, pelo incentivo e colaboração.

À Carmen e Pâmela, razões maiores de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Alberto Tamagna e José Carlos Ferraz Hennemann pela orientação deste trabalho.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) pelo auxílio financeiro recebido.

Aos professores José Serafim Gomes Franco e José Carlos Ferraz Hennemann, ex-coordenador e atual coordenador do curso, respectivamente, pelo auxílio e confiança dispensados e, nas suas pessoas, a todo o Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

À Fundação Missioneira de Ensino Superior (FUNDAMES) por todo o auxílio e incentivo recebidos.

À Sra. Carmen L.Z. Rodrigues pela excelente datilografia.

À Sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

Aos desenhistas Tarcisio Knorst e Nelson Larossa.

Ao Sr. Ângelo Beltrame pela colaboração dispensada.

A todos que de alguma maneira colaboraram na realização deste trabalho.

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| I. INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1. Objetivos..... | 1 |
| 1.2. Desenvolvimento histórico do computador e métodos.... | 2 |
| 1.3. Apresentação do trabalho..... | 3 |
| II. COEFICIENTES DE RIGIDEZ PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIES DE FOURIER PARA VIGAS TRELIÇADAS EM X..... | 5 |
| 2.1. Introdução..... | 5 |
| 2.2. Equações de equilíbrio..... | 5 |
| 2.3. Equações dos deslocamentos em séries finitas de Fourier..... | 16 |
| 2.4. Determinação dos coeficientes de rigidez..... | 33 |
| 2.5. Momentos de engastamento perfeito..... | 48 |
| 2.6. Coeficientes de rigidez para vigas treliçadas em X sem montantes..... | 49 |
| 2.7. Coeficientes de rigidez para vigas treliçadas em X considerando a deformação por corte..... | 52 |
| 2.8. Determinação dos esforços nas barras..... | 54 |
| 2.9. Programa computacional para resolução de vigas contínuas treliçadas em X..... | 57 |
| III. RESOLUÇÃO DE VIGAS CONTÍNUAS WARREN..... | 60 |
| 3.1. Introdução..... | 60 |
| 3.2. Coeficientes de rigidez considerando a deformação por corte..... | 61 |
| 3.3. Momentos de engastamento perfeito..... | 64 |
| 3.4. Determinação das séries de Fourier para os deslocamentos e cargas aplicadas..... | 64 |
| 3.4.1. Introdução..... | 64 |
| 3.4.2. Equações de equilíbrio..... | 65 |
| 3.4.3. Equações dos deslocamentos e cargas aplicadas desenvolvidas em séries de Fourier..... | 71 |

| | |
|--|-----|
| 3.4.4. Coeficientes das séries das cargas aplicadas..... | 80 |
| 3.5. Determinação dos esforços nas barras de uma viga treliçada Warren..... | 82 |
| 3.6. Programa computacional para resolução de vigas contínuas Warren..... | 85 |
| IV. MOMENTOS DE INÉRCIA EQUIVALENTES PARA VIGAS TRELIÇADAS..... | 88 |
| 4.1. Inércias equivalentes usuais para vigas treliçadas quaisquer..... | 88 |
| 4.2. Inércia equivalente para viga treliçada em X consi- derando a influência do número de painéis..... | 89 |
| 4.3. Inércia equivalente para vigas treliçadas Warren considerando a influência do número de painéis..... | 92 |
| 4.4. Exemplos comparativos para as inércias equivalentes.. | 95 |
| V. EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE VIGAS TRELIÇADAS EM X E WARREN E ĀBACOS PARA COMPARAÇÃO E CORREÇÕES DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ..... | 101 |
| 5.1. Introdução..... | 101 |
| 5.2. Exemplos ilustrativos de vigas treliçadas em X..... | 101 |
| 5.2.1. Viga treliçada em X com 2 vãos de 6 painéis..... | 101 |
| 5.2.2. Viga treliçada em X com 3 vãos de 6 painéis..... | 107 |
| 5.2.3. Viga treliçada em X com 2 vãos de 12 painéis..... | 110 |
| 5.2.4. Viga treliçada em X de 12 painéis com e sem apoios verticais..... | 113 |
| 5.2.5. Pōrtico plano formado por barras treliçadas em X... | 116 |
| 5.3. Exemplos ilustrativos de vigas treliçadas tipo Warren..... | 123 |
| 5.3.1. Viga isostática com 5 painéis..... | 123 |
| 5.3.2. Viga Warren com 2 tramos de 5 painéis..... | 126 |
| 5.3.3. Viga Warren com 2 vãos de 12 tramos..... | 129 |
| 5.4. Ābacos para comparações e correções dos coeficientes de rigidez para vigas treliçadas em X..... | 132 |
| 5.4.1. Comparação entre coeficientes de rigidez..... | 132 |
| 5.4.2. Ābacos para correção dos coeficientes de rigidez obtidos por inércias equivalentes sem considerar deformação por corte..... | 132 |

| | |
|---------------------|-----|
| VI. CONCLUSÕES..... | 157 |
| BIBLIOGRAFIA..... | 161 |

SIMBOLOGIA

Letras maiúsculas

| | |
|---------------------|---|
| A | - Área equivalente |
| A_c | - Área da secção transversal dos cordões superior ou inferior para Timoshenko |
| A_d | - Área da secção transversal das barras diagonais |
| A_i | - Área da secção transversal das barras do cordão inferior |
| A_s | - Área da secção transversal das barras do cordão superior |
| A_v | - Área da secção transversal das barras verticais |
| C_{km} | - Constante elástica para uma barra km |
| C_1, C_2 e C_3 | - Relações entre áreas |
| E | - Módulo de Young |
| $F_d(r)$ | - Força resultante na barra r diagonal, inclinada para a direita |
| $F_e(r)$ | - Força resultante na barra r diagonal, inclinada para a esquerda |
| F_{hi} | - Força horizontal que forma binário equivalente ao momento de extremidade de uma barra i |
| $F_s(r)$ | - Força resultante na barra r do cordão superior |
| $F_v(r)$ | - Força resultante na barra r vertical |
| I | - Momento de inércia |
| I_{eq} | - Momento de inércia equivalente |
| K_{11} a K_{66} | - Coeficientes de rigidez |
| L | - Comprimento do vão entre dois apoios consecutivos |

| | |
|---------------|--|
| MA | - Momento de engastamento perfeito na extremidade A |
| MB | - Momento de engastamento perfeito na extremidade B |
| Mi | - Momento de extremidade para a barra i |
| \bar{P}_k^i | - Componente das forças externas aplicadas no nó k |
| P_{xk}^i | - Coeficiente da série das cargas para o cordão i |
| $P_x^i(r)$ | - Componente das forças externas aplicadas no nó r na direção x, do cordão i |
| $P_y^i(r)$ | - Componente das forças externas aplicadas no nó r na direção y do cordão i |
| Q_1 e Q_2 | - Relações entre forças aplicadas nos cordões superior e inferior |
| \bar{U}_k^i | - Componentes dos deslocamentos do nó k na direção i |
| U_k^i | - Coeficiente da série dos deslocamentos horizontais para o cordão i |
| $U^i(r)$ | - Deslocamento horizontal do nó r do cordão i |
| U_k^i | - Coeficientes da série dos deslocamentos verticais para o cordão i |
| $V^i(r)$ | - Deslocamento vertical do nó r do cordão i |
| X | - Eixo global de coordenadas |
| X_{km}^i | - Comprimento da projeção da barra km na direção i |
| Y | - Eixo global de coordenadas |
| Wk | - Função peso para os coeficientes das séries das cargas |

Letras minúsculas

| | |
|---------------|---|
| a_0 a a_5 | - Expressões relacionando áreas e módulo de Young |
| $f_k(r)$ | - Função trigonométrica |
| $g_k(r)$ | - Função trigonométrica |
| h | - Alturas dos painéis num mesmo vão |
| k | - Índice de variação do somatório para as séries |

| | |
|-----|---|
| l | - Comprimento de cada barra dos cordões superior e inferior |
| n | - Número de painéis num vão |
| r | - Índice para a numeração dos nós ou barras |
| x | - Eixo local de coordenadas |
| y | - Eixo local de coordenadas |

Letras gregas maiúsculas

| | |
|------------------|------------------------------------|
| Γ_r | - Operador diferencial central |
| $\bar{\Delta}_r$ | - Operador diferencial central |
| Δ_r | - Operador diferencial progressivo |
| $\phi^j(s)$ | - Giro da extremidade j |

Letras gregas minúsculas

| | |
|----------|--|
| α | - Função trigonométrica em cosseno |
| β | - Função trigonométrica em seno |
| θ | - Ângulo das barras inclinadas com o cordão inferior |
| μ | - Parâmetro de flexo-corte |

Outros símbolos

| | |
|------------|-----------------------------------|
| ∇_r | - Operador diferencial regressivo |
| Σ | - Somatório |

RESUMO

Este trabalho estuda a resolução de vigas contínuas e pórticos treliçados em X e Warren, utilizando-se rigidezes e momentos de inércia equivalentes.

As equações de equilíbrio em um nó genérico r , são obtidas pelo método das diferenças finitas e as equações para os deslocamentos e cargas estáticas arbitrárias, são apresentadas em séries finitas de Fourier.

É dedicado um capítulo para a obtenção de equações para momentos de inércia equivalentes, considerando-se a influência do número de painéis e comparações com as equações clássicas da literatura.

No final, são apresentados ábacos para vigas treliçadas em X, que permitem a comparação entre os coeficientes de rigidez pelas séries e coeficientes de rigidez pelos momentos de inércia equivalentes e correções para os coeficientes de rigidez considerando inércias equivalentes a partir só das áreas dos cordões superior e inferior.

ABSTRACT

This work study the resolution of Warren and X-trussed continuous beams using equivalent stiffness coefficients and moments of inertia.

The equilibrium equations in the generic Joint r are obtained by finite differences method and the deflections and arbitrary static load equations are present in finite Fourier series form.

The results of illustrative examples for both kinds of trussed be beams are compared with solutions obtained with the Lorane Linear Program.

The influence of panels number and comparisions with classic result of equivalent inertia are established.

Abacus for X-trussed beams for stiffness coefficients obtained by series versus equivalent inertia stiffness coefficients and corrections using the top and bottom chords area are presented.

I. INTRODUÇÃO

1.1. Objetivos

O objetivo deste trabalho é o estudo de vigas treliçadas em X e Warren através da obtenção de coeficientes de rigidez e momentos de inércia equivalentes que permitem que segmentos de vigas treliçadas sejam tratados como segmentos de vigas prismáticas de secções cheias e, utilização desses coeficientes e momentos de inércia equivalentes em programas computacionais para a resolução de vigas treliçadas, determinando-se os deslocamentos verticais e horizontais de todos os nós e os esforços em todas as barras.

Para a obtenção dos coeficientes de rigidez para uma viga treliçada em X, é aplicado o processo de determinação de esforços para deslocamentos e giros unitários, um por vez, nas extremidades, envolvendo equações em diferenças finitas e séries finitas de Fourier.

Os coeficientes de rigidez para vigas treliçadas Warren são obtidos utilizando-se momentos de inércia equivalentes que consideram o número de painéis.

As equações para os momentos de inércia equivalentes são deduzidas levando-se em consideração a influência do número de painéis e, comparadas com outros procedimentos referenciados no capítulo quatro.

Um outro objetivo deste trabalho é a montagem de ábacos que façam as correções dos coeficientes de rigidez encontrados a partir somente da contribuição das áreas das secções transversais dos cordões superior e inferior para a inércia equivalente. As correções são encontradas nos ábacos em função de relações entre áreas e do número de painéis.

1.2. Desenvolvimento histórico do computador e métodos

A construção de uma máquina calculadora foi uma antiga idéia de homens como Pascal, Leibnitz, Babbage e outros, mas a era dos computadores modernos somente começou em 1940.

O desenvolvimento da máquina Mark I por Aiken em 1944, na Universidade de Harvard, é geralmente tomada como ponto de início. Porém era um aparelho eletro-mecânico. Um ano mais tarde, Eickert e Mouchly desenvolveram a máquina ENIAC, na Universidade da Pensilvânia, que era realmente um aparelho eletrônico. Em seguida muitos pesquisadores se engajaram no desenvolvimento de atividades similares e produziram uma variedade de máquinas.

A comercialização de computadores começou em 1950, que é conhecida como a primeira geração de computadores, construídos usando válvulas eletrônicas.

A segunda geração de computadores foi caracterizada por serem completamente transistorizados e ocupando menores espaços. O volume de suas aplicações na Engenharia tornou-se considerável.

A utilização de microcircuitos eletrônicos integrados, caracterizando a terceira geração de computadores, permitiu o desempenho de grandes e complexas aplicações científicas.

O comportamento dos problemas de Engenharia podem ser, muitas vezes, definidos em sistemas de equações diferenciais e com conhecidas condições de contorno. Essa representação pode ser considerada como um modelo matemático para a resolução de problemas de Engenharia.

O uso de um modelo contínuo, exceção de casos simples, torna-se muito difícil devido a um número muito grande de graus de liberdade. A preocupação da Engenharia é obter modelos discretos, tornando finito o número de graus de liberdade com solução mais simples e resultados oferecendo boas aproximações.

Um método de reduzir um sistema com um número muito grande de graus de liberdade para um sistema com um número mais reduzido de incôgnitas é a técnica das diferenças finitas. Suas origens podem ser assinaladas por alguns problemas resolvidos por Euler e outros pioneiros do cálculo diferencial.

Em 1959, Dean e Tauber [5] estudaram a solução de estruturas treliçadas utilizando diferenças finitas.

Avent [2] em 1976, no estudo de vigas metálicas isotáticas para suporte de reservatórios de água, utilizou equações de equilíbrio em diferenças finitas e equações em séries finitas de Fourier para os deslocamentos e cargas estáticas. Nesse mesmo trabalho, fez um estudo para a obtenção de inércias equivalentes.

Recentemente, em 1982, Avent [2], desenvolveu um trabalho no qual obteve os coeficientes de rigidez equivalentes para vigas treliçadas em X.

1.3. Apresentação do trabalho

O presente trabalho consta de 6 capítulos em que cada um deles engloba um estudo detalhado sobre determinado assunto.

O primeiro capítulo compreende os objetivos, histórico do computador e dos métodos e esta apresentação.

A resolução de vigas contínuas treliçadas em X é amplamente estudada no capítulo II. Inicialmente são deduzidas as equações em diferenças finitas para o equilíbrio de um nó genérico r e, os deslocamentos e cargas são expandidos em séries finitas de Fourier cujos coeficientes são determinados pela resolução do sistema de equações de equilíbrio e condições de carregamento e condições de contorno.

As expressões em séries para os coeficientes de rigidez para as vigas treliçadas em X com e sem montantes são determinadas pelo processo convencional de giros e deslocamentos unitários, um por vez, nas extremidades, onde os deslocamentos são expressos em séries finitas de Fourier. Também são apresentados os coeficientes de rigidez considerando a deformação pelo cortante.

Ainda no capítulo II, são determinadas as equações em diferenças finitas para os esforços nas barras e abordado o funcionamento de um programa computacional para a resolução de vigas contínuas treliçadas em X.

No capítulo III, é desenvolvido o estudo detalhado sobre vigas contínuas treliçadas tipo Warren. São utilizados momentos de inércia equivalentes cujas equações consideram o número de painéis. Os deslocamentos e cargas são expressos em séries finitas de Fourier em que os coeficientes são determinados pela resolução do sistema de equações de equilíbrio, condições de contorno e cargas aplicadas.

As equações para as forças nas barras são apresentadas em diferenças finitas dos deslocamentos e, finalizando o capítulo III, é feita a explanação sobre o funcionamento de um programa computacional para a resolução de vigas contínuas treliçadas tipo Warren.

O capítulo IV abrange o estudo de momentos de inércia equivalentes para vigas treliçadas em X e Warren. São desenvolvidas as equações para as inércias equivalentes considerando-se a influência do número de painéis e feitos exemplos comparativos com outras equações usuais, que são apresentados em tabelas.

O capítulo V apresenta a resolução de exemplos de vigas contínuas e pórticos treliçados em X e Warren cujos resultados são comparados com os fornecidos pelo Lorane Linear e expostos em tabelas. São apresentados ábacos para comparações e correções dos coeficientes de rigidez.

No último capítulo, são transcritas todas as conclusões e observações tiradas a partir dos equacionamentos, exemplos e ábacos realizados.

II - COEFICIENTES DE RIGIDEZ PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIES DE FOURIER PARA VIGAS TRELIÇADAS EM X

2.1. Introdução

As vigas treliçadas em X, conforme mostra a figura (2.1), são estaticamente indeterminadas internamente e aproximações para as suas soluções são feitas considerando-se como vigas prismáticas de secções cheias, com momentos de inércia equivalentes ou coeficientes de rigidez equivalentes.

Este capítulo estuda a determinação de coeficientes de rigidez equivalentes, assumindo-se que a estabilidade das diagonais em cada painel já está sendo satisfeita e, que a viga tenha comportamento elástico linear com espaçamentos iguais entre os painéis, e as barras apresentem as mesmas propriedades ao longo do comprimento.

O sistema de equações de equilíbrio é expresso em diferenças finitas e são utilizadas séries finitas de Fourier em senos e cossenos para resolvê-lo.

2.2. Equações de equilíbrio

A determinação dos coeficientes de rigidez é feita a partir do estudo das equações de equilíbrio em um nó r do interior, e dos nós de contorno, para um carregamento estático, seguindo a sugestão de Avent [1].

As equações genéricas que exprimem as componentes das forças nas barras em termos dos deslocamentos dos nós, segundo Dean [5], são:

$$\sum_j \sum_m C_{km} \bar{U}_k^j X_{km}^j X_{km}^i - \sum_j \sum_m C_{km} \bar{U}_m^j X_{km}^j X_{km}^i = \bar{P}_k^i \quad (2.2.1)$$

onde:

i e j = componentes paralelas a um dos eixos

k = n \bar{o} no qual as equações de equilíbrio foram escritas

m = n \bar{o} ligado a k por uma barra

C_{km} = constante elástica para uma barra km (EA/ℓ^3)

X_{km}^i = $x_k^i - x_m^i$

\bar{U}_k^j = componentes do deslocamento do n \bar{o} k

\bar{P}_k^i = componentes das forças externas aplicadas no n \bar{o} k

Para uma melhor distinção entre as componentes dos deslocamentos, será usado a letra U para representar deslocamentos horizontais, a letra V para deslocamentos verticais, e, os índices 1 e 2 para indicar cordões inferior e superior, respectivamente.

A figura (2.1) mostra todas as características de um vão genérico de uma viga treliçada em X com n painéis

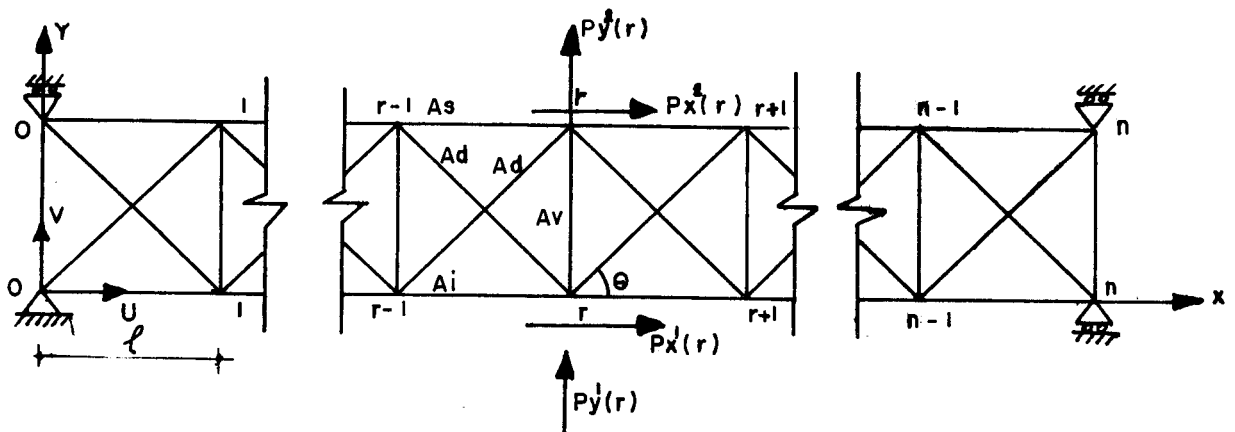
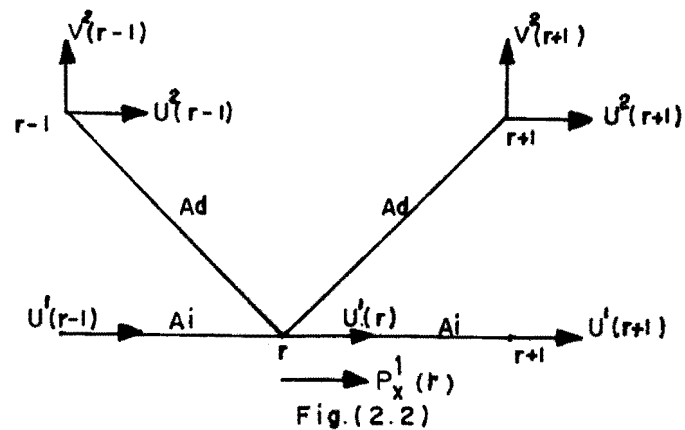


Fig.(2.1)

A seguir estão determinadas as equações de equilíbrio segundo dois eixos principais de coordenadas, X e Y, conforme mostra a figura (2.1) para nós genéricos r do interior dos cordões superior e inferior.

O estudo das condições de equilíbrio na direção X dos eixos principais de coordenadas, para um nó r do interior do cordão inferior, a partir da equação (2.2.1) e figura (2.2), resulta:



$$\begin{aligned}
 & - \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(r+1) + 2 \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(r) - \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(r-1) + \frac{2 E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \\
 & \ell^2 U^1(r) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 U^2(r+1) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 U^2(r-1) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \\
 & \ell^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} V^2(r+1) + \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} V^2(r-1) = P_x^1(r)
 \end{aligned}$$

A partir da simplificação de termos em ℓ e introdução das definições de $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = \sin \theta$, fica:

$$\begin{aligned}
 & \frac{E A_i}{\ell} U^1(r+1) - 2 \frac{E A_i}{\ell} U^1(r) + \frac{E A_i}{\ell} U^1(r-1) - 2 \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^1(r) + \\
 & + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^2(r+1) + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^2(r-1) + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^2 \beta V^2(r+1) - \frac{E A_d}{\ell} \\
 & \alpha^2 \beta V^2(r-1) = - P_x^1(r)
 \end{aligned}$$

Passando-se os termos ℓ e E para o outro lado da igualdade e definindo-se $C_1 = A_i/A_d$, acha-se:

$$C_1 U^1_{(r+1)} - 2 C_1 U^1_{(r)} + C_1 U^1_{(r-1)} - 2\alpha^3 U^1_{(r)} + \alpha^3 U^2_{(r+1)} + \alpha^3 U^2_{(r-1)} + \alpha^2_{\beta} V^2_{(r+1)} - \alpha^2_{\beta} V^2_{(r-1)} = - \frac{\ell}{E A_d} p^1_x(r)$$

A equação final para o equilíbrio na direção X , para um n^o genérico r do cordão inferior, fica expressa pela inserção dos operadores diferenciais $\bar{\Delta}r$ e Γr , definidos abaixo.

$$\bar{\Delta}r U(r) = U_{(r+1)} - 2 U_{(r)} + U_{(r-1)}$$

$$\Gamma r V(r) = \frac{1}{2} (V_{(r+1)} - V_{(r-1)})$$

$$(C_1 \bar{\Delta}r - 2\alpha^3) U^1_{(r)} + (0) V^1_{(r)} + ((\bar{\Delta}r + 2) \alpha^3) U^2_{(r)} +$$

$$(2\alpha^2_{\beta} \Gamma r) V^2_{(r)} = - \frac{\ell}{E A_d} p^1_x(r) \quad (2.2.2)$$

A determinação das demais equações de equilíbrio é feita com um procedimento análogo ao utilizado para a primeira equação, levando-se em consideração as barras e cargas que influenciam, conforme mostram as figuras (2.3) a (2.5).

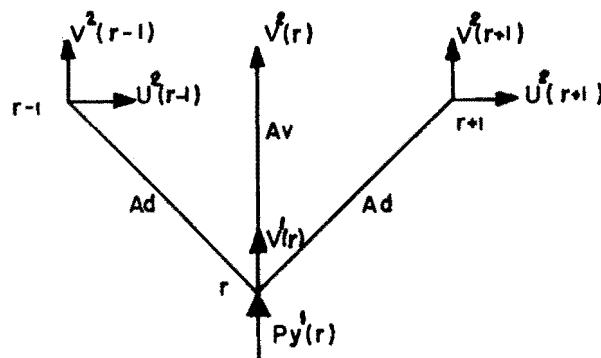
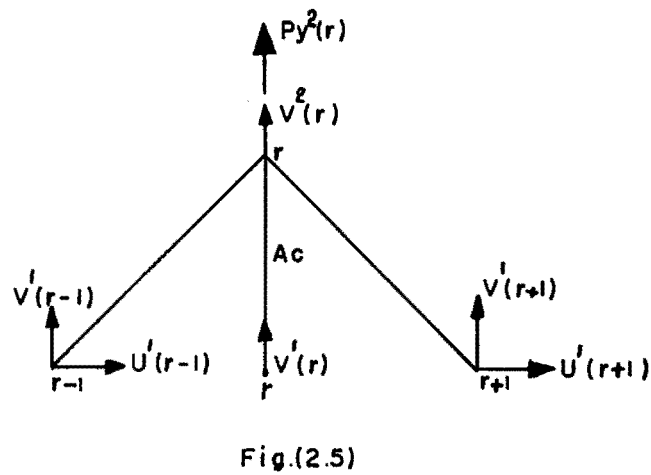
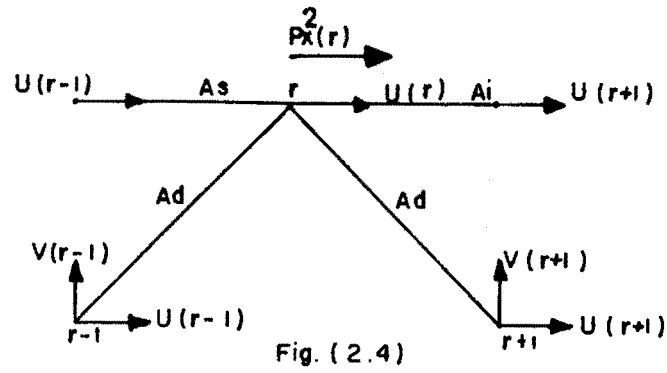


Fig. (2.3)



O sistema de equações de equilíbrio para um nó genérico r do interior do vão, fica da forma:

$$\begin{vmatrix}
 C_1 \bar{\Delta}r - 2\alpha^3 & 0 & (\bar{\Delta}r + 2) \alpha^3 & 2\alpha^2 \beta \Gamma r \\
 0 & -2\alpha\beta^2 - \alpha C_2 & 2\alpha^2 \beta \Gamma r & \alpha\beta^2 (\bar{\Delta}r + 2) + \alpha C_2 \\
 \alpha^3 (\bar{\Delta}r + 2) & -2\alpha^2 \beta \Gamma r & C_3 \bar{\Delta}r - 2\alpha^3 & 0 \\
 -2\alpha\beta \Gamma r & \alpha\beta^2 (\Gamma r + 2) + \alpha C_2 & 0 & -2\alpha\beta^2 - \alpha C_2
 \end{vmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U^1(r) \\
 V^1(r) \\
 U^2(r) \\
 V^2(r)
 \end{Bmatrix}
 = - \frac{\ell}{E A_d}
 \begin{Bmatrix}
 P_x^1(r) \\
 P_y^1(r) \\
 P_x^2(r) \\
 P_y^2(r)
 \end{Bmatrix}
 \quad (2.2.3)$$

em que:

$$C_2 = A_v / (A_d \cdot \beta) \quad C_3 = A_s / A_d$$

n = número de painéis

E = módulo de elasticidade longitudinal

ℓ = comprimento do painel

A_s , A_v , A_i e A_d = áreas das secções transversais das barras superior, vertical, inferior e diagonal, respectivamente.

Os sistemas de equações para os contornos são obtidos de maneira similar. Para a extremidade esquerda, em que $r = 0$, a aplicação da equação (2.2.1) para o estudo do equilíbrio na direção x dos eixos globais, conforme a fig. (2.6) resulta:

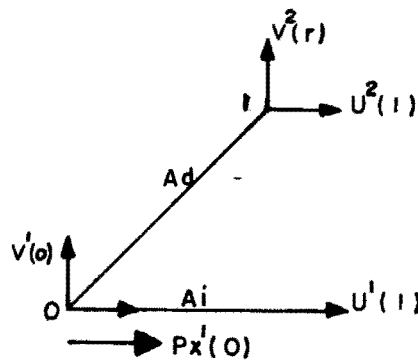


Fig. (2.6)

$$\begin{aligned} & \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(1) - \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(0) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 U^1(0) - \\ & - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} V^1(0) + \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} U^2(1) + \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 \cdot \\ & \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot V^2(1) = - P_x^1(0) \end{aligned}$$

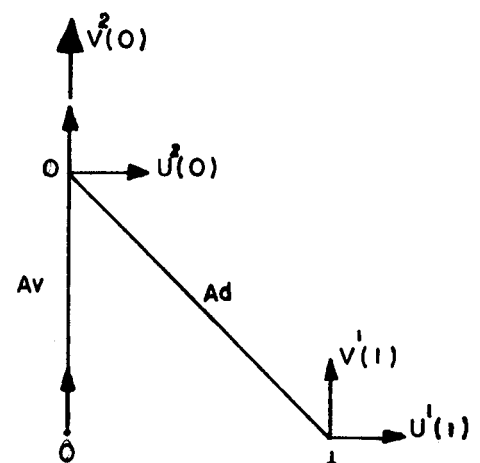
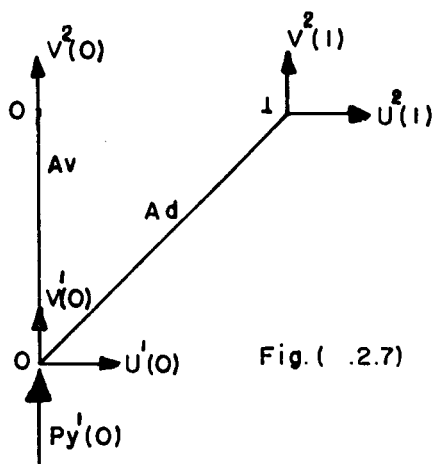
A introdução de α e β , já definidos anteriormente, e simplificação dos termos em ℓ , conduz a:

$$\begin{aligned} \frac{E A_i}{\ell} U^1(1) - \frac{E A_i}{\ell} U^1(0) - \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^1(0) - \frac{E A_d}{\ell} \alpha^{2\beta} V^1(0) \\ + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^2(1) + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^{2\beta} V^2(1) = - P_x^1(0) \end{aligned}$$

A expressão final para o equilíbrio na direção X, do apoio inferior em que $r = 0$, resulta da transposição dos termos ℓ , E e A_d para o outro lado da igualdade e aplicações do coeficiente C_1 , já definido, e do operador diferencial $\Delta r U(r) = U(r+1) - U(r)$.

$$\begin{aligned} (\Delta r C_1 - \alpha^3) U^1(0) - (\alpha^{2\beta}) V^1(0) + ((\Delta r + 1) \alpha^3) U^2(0) + \\ (\alpha^{2\beta} (\Delta r + 1)) V^2(0) = - \frac{\ell}{E A_d} P_x^1(0) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

As figuras (2.7) a (2.9) representam os esquemas para a obtenção das demais equações de equilíbrio para o contorno, em que $r = 0$.



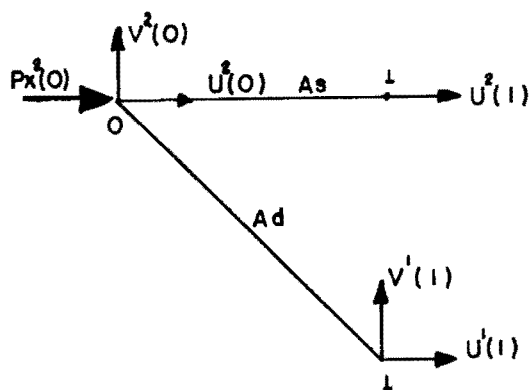


Fig. (2.9)

O sistema de equações de equilíbrio para o caso de $r = 0$, resulta:

$$\begin{vmatrix} \Delta r C_1 - \alpha^3 & -\alpha^2 \beta & (\Delta r + 1) \alpha^3 & \alpha^2 \beta (\Delta r + 1) \\ -\alpha^2 \beta & -\alpha \beta^2 - \alpha C_2 & (\Delta r + 1) \alpha^2 \beta & \alpha \beta^2 (\Delta r + 1) + \alpha C_2 \\ (\Delta r + 1) \alpha^3 & -(\Delta r + 1) \alpha^2 \beta & C_3 \Delta r - \alpha^3 & \alpha^2 \beta \\ -(\Delta r + 1) \alpha^2 \beta & \alpha \beta^2 (\Delta r + 1) + \alpha C_2 & \alpha^2 \beta & -\alpha \beta^2 - \alpha C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^1(0) \\ V^1(0) \\ U^2(0) \\ V^2(0) \end{Bmatrix} = - \frac{\ell}{E A_d} \begin{Bmatrix} P_x^1(0) \\ P_y^1(0) \\ P_x^2(0) \\ P_y^2(0) \end{Bmatrix} \quad (2.2.5)$$

As equações de equilíbrio para o caso em que $r = n$, são obtidas pela aplicação da equação (2.2.1) para cada uma das configurações apresentadas nas figuras (2.10) a (2.13).

A seguir, encontra-se explicitada a seqüência de obtenção de uma das equações de equilíbrio referenciadas no parágrafo anterior.

O equilíbrio na direção X do eixo global de coordenadas, para $r = n$ do cordão inferior, fica determinado aplicando-se a equação (2.2.1) para o esquema da figura (2.10).

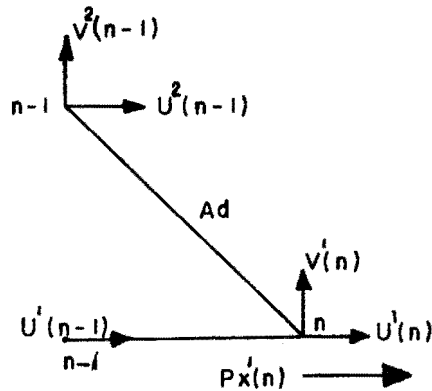


Fig. (2.10)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(n) + \frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 U^1(n-1) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 U^1(n) + \\
 & + \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} V^1(n) + \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \ell^2 U^2(n-1) - \frac{E A_d}{(\ell^3 / \cos^3 \theta)} \\
 & \ell^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} V^2(n-1) = - P_x^1(n)
 \end{aligned}$$

A simplificação dos termos em ℓ e introdução dos termos α e β , resulta:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{E A_i}{\ell} U^1(n) + \frac{E A_i}{\ell} U^1(n-1) - \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^1(n) + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^2 \beta V^1(n) \\
 & + \frac{E A_d}{\ell} \alpha^3 U^2(n-1) - \frac{E A_d}{\ell} \alpha^2 \beta V^2(n-1) = - P_x^1(n)
 \end{aligned}$$

A expressão final para o equilíbrio na direção X global, para $r = n$ no cordão inferior, fica definida transpondo-se os termos ℓ , E e A_d para o outro lado da igualdade, e introduzindo-se o coeficiente C_1 e o operador diferencial $\nabla_r U_{(r)} = U_{(r)} - U_{(r-1)}$.

$$\begin{aligned} & (-C_1 \nabla_r - \alpha^3) U^1_{(n)} + (\alpha^2 \beta) V^1_{(n)} + (\alpha^3 (1 - \nabla_r) U^2_{(n)} \\ & - (\alpha^2 \beta (1 - \nabla_r)) V^2_{(n)} = - \frac{\ell}{E A_d} P^1_x(n) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

As demais equações de equilíbrio para $r = n$, são determinadas por um procedimento similar, a partir dos esquemas apresentados nas figuras (2.11) a (2.13)

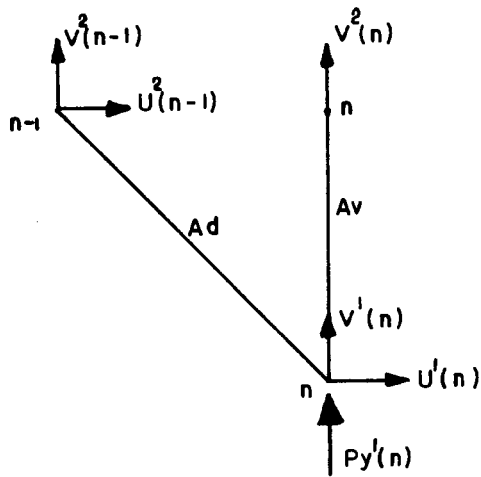


Fig. (2.11)

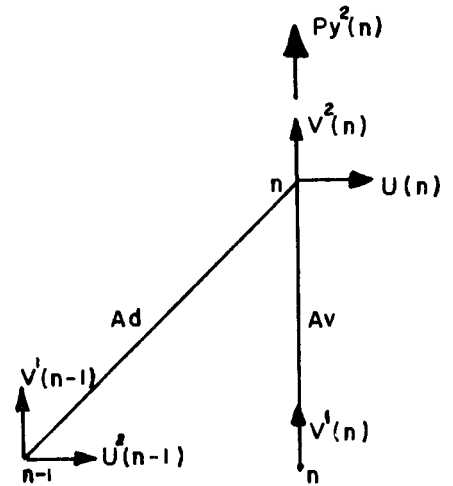
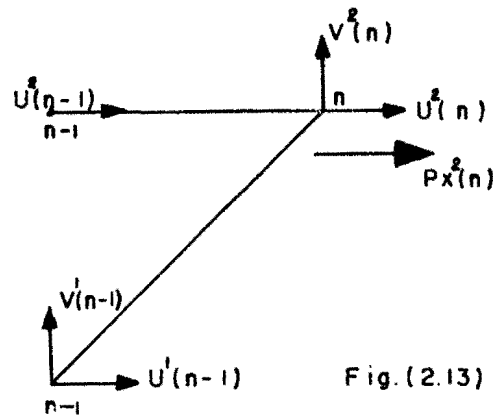


Fig. (2.12)



O equilíbrio no contorno onde $r = n$, fica expresso por um sistema de equações onde a primeira é a equação (2.2.16) deduzida anteriormente, e, as demais, determinadas conforme parágrafo anterior.

$$\begin{vmatrix} -C_1 \nabla r - \alpha^3 & \alpha^{2\beta} & \alpha^3 (1 - \nabla r) & -\alpha^{2\beta} (1 - \nabla r) \\ \alpha^{2\beta} & -\alpha\beta^2 - \alpha C_2 & -\alpha^{2\beta} (1 - \nabla r) & \alpha\beta^2 (1 - \nabla r) + \alpha C_2 \\ \alpha^3 (1 - \nabla r) & \alpha^{2\beta} (1 - \nabla r) & -C_3 \nabla r - \alpha^3 & -\alpha^{2\beta} \\ \alpha^{2\beta} (1 - \nabla r) & \alpha\beta^2 (1 - \nabla r) + \alpha C_2 & -\alpha^{2\beta} & -\alpha C_2 - \alpha\beta^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^1(n) \\ V^1(n) \\ U^2(n) \\ V^2(n) \end{Bmatrix} = -\frac{\ell}{E A_d} \begin{Bmatrix} P_x^1(n) \\ P_y^1(n) \\ P_x^2(n) \\ P_y^2(n) \end{Bmatrix} \quad (2.2.7)$$

2.3. Equações dos deslocamentos em séries finitas de Fourier

As soluções em séries finitas de Fourier foram usadas por Dean [5], para resolver uma larga faixa de equações diferenciais, desde que as condições de contorno fossem adequadas.

Para o caso da viga treliçada em X, duas condições naturais serão tratadas.

A solução para os deslocamentos é expressa em série finita de Fourier [2], da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} U^1(r) \\ V^1(r) \\ U^2(r) \\ V^2(r) \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} U_k^1 & g_k(r) \\ V_k^1 & f_k(r) \\ U_k^2 & g_k(r) \\ V_k^2 & f_k(r) \end{Bmatrix} \quad (2.3.1)$$

As funções $g_k(r)$ e $f_k(r)$ podem assumir as funções seno ou cosseno, dependendo da vinculação dos nós de contorno. O símbolo \sum_k implica limitado de 1 a $n-1$ para as séries em seno e zero a n para as séries em cosseno.

Quando os nós do contorno são suportados por roletes horizontais, conforme a figura (2.14), $g_k(r)$ e $f_k(r)$ são definidos como:

$$\begin{Bmatrix} g_k(r) \\ f_k(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{k\pi r}{n} \\ \text{sen} \frac{k\pi r}{n} \end{Bmatrix} \quad (2.3.2)$$

As equações dos deslocamentos, que cumprem as condições de contorno, ficam expressas por:

$$U^1(r) = \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.3)$$

$$V^1(r) = \sum_{k=1}^{n-1} V_k^1 \text{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.4)$$

$$U^2(r) = \sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.5)$$

$$V^2(r) = \sum_{k=1}^{n-1} V_k^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.6)$$

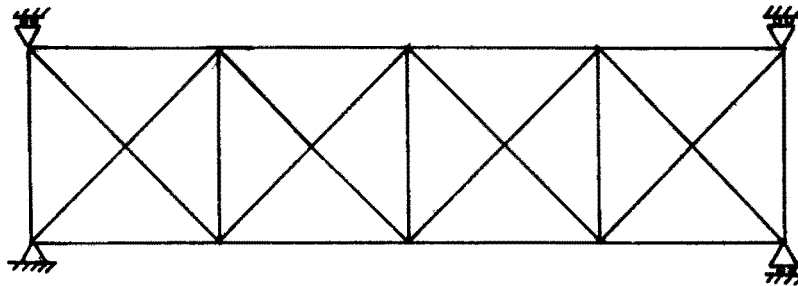


Fig. (2.14)

Para o caso dos nós de contorno serem suportados por roletes verticais, conforme mostra a figura (2.15), as funções $g_k(r)$ e $f_k(r)$, que cumprem as condições de contorno, têm as expressões abaixo.

$$\begin{Bmatrix} g_k(r) \\ f_k(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \\ \cos \frac{k\pi r}{n} \end{Bmatrix} \quad (2.3.7)$$

As equações dos deslocamentos ficam expressos por:

$$U^1(r) = \sum_{k=1}^{n-1} U_k^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.8)$$

$$V^1(r) = \sum_{k=0}^n V_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.9)$$

$$U^2(r) = \sum_{k=1}^{n-1} U_k^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.10)$$

$$v^2(r) = \sum_{k=0}^n v_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.11)$$

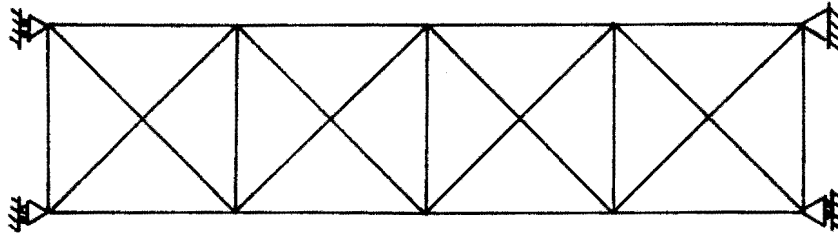


Fig. 2.15

A expansão em séries de Fourier [2] das cargas verticais e horizontais aplicadas fica definida pelas equações

$$\begin{Bmatrix} p_x^1(r) \\ p_y^1(r) \\ p_x^2(r) \\ p_y^2(r) \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} p_{xk}^1 & g_k(r) \\ p_{yk}^1 & f_k(r) \\ p_{xk}^2 & g_k(r) \\ p_{yk}^2 & f_k(r) \end{Bmatrix} \quad (2.3.12)$$

A partir da aplicação das propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno, pode-se encontrar os coeficientes das séries que representam os carregamentos. Para séries em cossenos, Thein [18] apresenta as seguintes expressões:

$$g_r = \sum_{n=0}^R \bar{g}_n \cos \frac{n\pi r}{R} \quad (2.3.13)$$

$$\bar{g}_n = \frac{1}{R} (g_0 - g_R \cos \pi n - 2 \sum_{r=1}^{R-1} g_r \cos \frac{n\pi r}{R}) \quad (2.3.14)$$

As equações (2.3.13) e (2.3.14) aplicadas à equação (2.3.12) e utilizando-se uma função peso w_k , que assume valor 1

para k variando de 1 a $n-1$ e valor zero para $k = 0$ ou n , os coeficientes das séries em cossenos das cargas, para roletes horizontais de contorno, ficam da seguinte forma:

$$P_{xk}^1 = 2 \frac{Wk}{n} \sum_r P_x^1(r) \cos \frac{k\pi r}{n}$$

$$P_{xk}^2 = 2 \frac{Wk}{n} \sum_r P_x^2(r) \cos \frac{k\pi r}{n}$$

Para uma função com expansão em série de Fourier em senos, Jolley [10] apresenta a seguinte expressão:

$$g_r = \sum_{n=1}^{R-1} \bar{g}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{R}$$

(2.3.15)

$$\bar{g}_n = \frac{2}{R} \sum_{\epsilon=1}^{R-1} g_r \operatorname{sen} \frac{n\pi \epsilon}{R}$$

Empregando-se as equações (2.3.15) e a função peso Wk para as séries em senos das cargas, os coeficientes das séries para roletes horizontais de contorno assumem a seguinte forma:

$$P_{yk}^1 = 2 \frac{Wk}{n} \sum_r P_y^1(r) \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

$$P_{yk}^2 = 2 \frac{Wk}{n} \sum_r P_y^2(r) \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

Os coeficientes da expansão em séries de Fourier das cargas externas aplicadas, de uma maneira genérica, ficam representados pelas expressões:

$$\begin{Bmatrix} p_{xk}^1 \\ p_{yk}^1 \\ p_{xk}^2 \\ p_{yk}^2 \end{Bmatrix} = 2 \frac{Wk}{n} \sum_r \begin{Bmatrix} p_x^1(r) & g_k(r) \\ p_y^1(r) & f_k(r) \\ p_x^2(r) & g_k(r) \\ p_y^2(r) & f_k(r) \end{Bmatrix} \quad (2.3.16)$$

Os coeficientes das séries das cargas para os tipos de carregamentos e vinculações, utilizados para a geração dos coeficientes de rigidez, segundo item (2.4), são deduzidos a seguir, conforme equação (2.3.16):

a) Para cargas axiais de compressão P_1 aplicadas no contorno, para o estudo da rigidez axial, segundo mostra a figura (2.16).

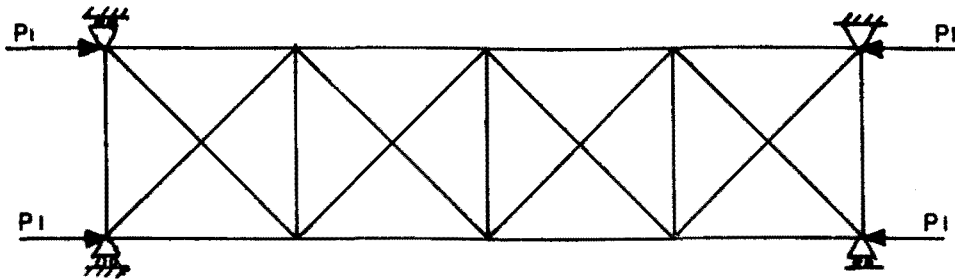


Fig. 2.16

$$p_{xk}^1 = p_{xk}^2 = 2 \frac{Wk}{n} (P_1 - P_1 \cos k\pi)$$

p_{xk}^1 e p_{xk}^2 são nulos para valores ímpares de k , então resulta:

$$p_{xk}^1 = p_{xk}^2 = 4 \frac{Wk}{n} P_1 \quad k = 1, 3, 5, \dots n \text{ (ímpares)}$$

(2.3.17)

$$p_{yk}^1 = p_{yk}^2 = 0$$

b) Os coeficientes das séries das cargas e vinculações apresentadas na figura (2.17), serão utilizados para a determinação do coeficiente de rigidez K_{22} , referenciados a partir da página 33.

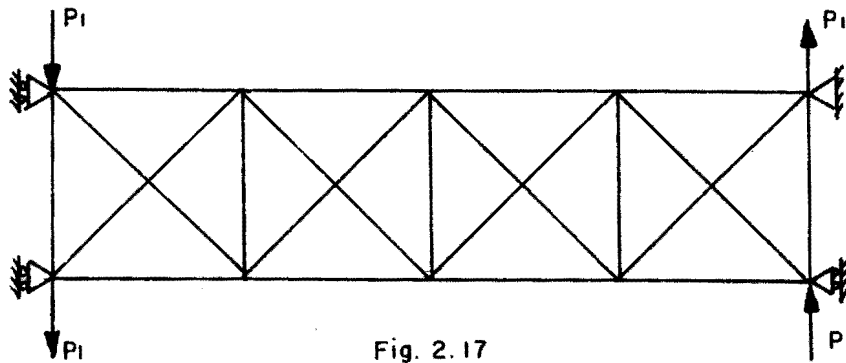


Fig. 2.17

$$P_{yk}^1 = P_{yk}^2 = 2 \frac{Wk}{n} (P_1 - P_1 \cos k\pi)$$

então:

$$P_{yk}^1 = P_{yk}^2 = 4 \frac{Wk}{n} P_1 \quad k = 1, 3, 5, \dots, n \text{ (ímpares)} \quad (2.3.18)$$

$$P_{xk}^1 = P_{xk}^2 = 0$$

c) A aplicação de giros no sentido horário, em ambas as extremidades, devido às cargas de contorno (P_1 & β/α), empregadas na determinação da rigidez à flexão K_{33} , figura (2.18).

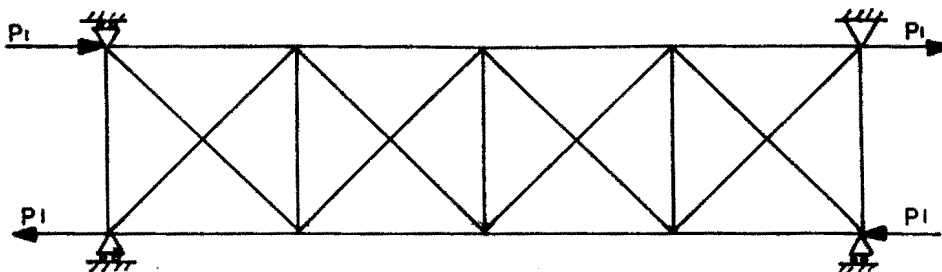


Fig. 2.18

$$p_{xk}^1 = -p_{xk}^2 = -2 \frac{Wk}{n} (P_1 + P_1 \cos k\pi)$$

então:

$$p_{xk}^1 = -p_{xk}^2 = -4 \frac{Wk}{n} P_1 \quad k=0,2,4, \dots, n \quad (\text{pares})$$

(2.3.19)

$$p_{yk}^1 = p_{yk}^2 = 0$$

d) Para giros (P_1 & β/α) nas extremidades, com sentidos indicados pela figura (2.19), usados na obtenção do coeficiente de rigidez K_{36} .

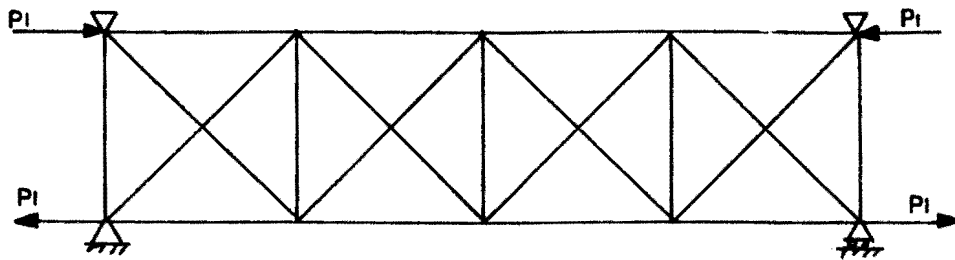


Fig. 2.19

$$p_{xk}^1 = -p_{xk}^2 = 2 \frac{Wk}{n} (-P_1 - P_1 \cos k\pi)$$

então:

$$p_{xk}^1 = -p_{xk}^2 = 4 \frac{Wk}{n} \quad k = 1, 3, \dots, n \quad (\text{ímpares})$$

(2.3.20)

$$p_{yk}^1 = p_{yk}^2 = 0$$

Os coeficientes das séries das cargas, para dois tipos usuais de carregamento, são determinados a seguir:

a) Para cargas concentradas em alguns nos dos cordões superior e inferior, como mostra a figura (2.20) e utilizando-se a equação (2.3.12).

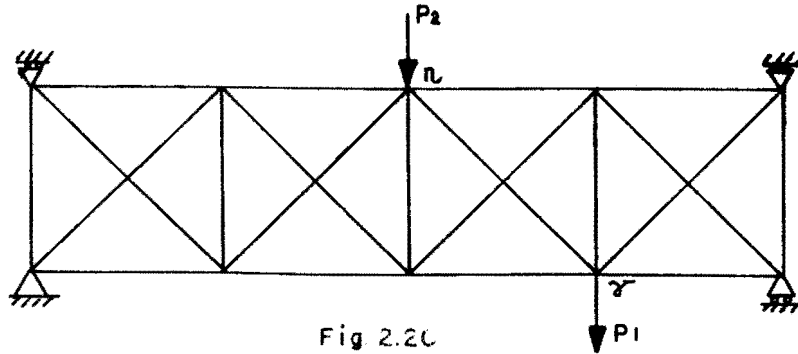


Fig 2.20

$$\begin{aligned}
 P_{xk}^1 &= P_{xk}^2 = 0 \\
 P_{yk}^1 &= -2 \frac{P_1}{n} \operatorname{sen} \frac{k\pi\gamma}{n} \\
 P_{yk}^2 &= -2 \frac{P_2}{n} \operatorname{sen} \frac{k\pi\eta}{n}
 \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

b) Carregamentos uniformes (P_2) em todos os nos do cordão superior e (P_1) nos nos do cordão inferior, conforme a figura (2.21) e equações (2.3.12).

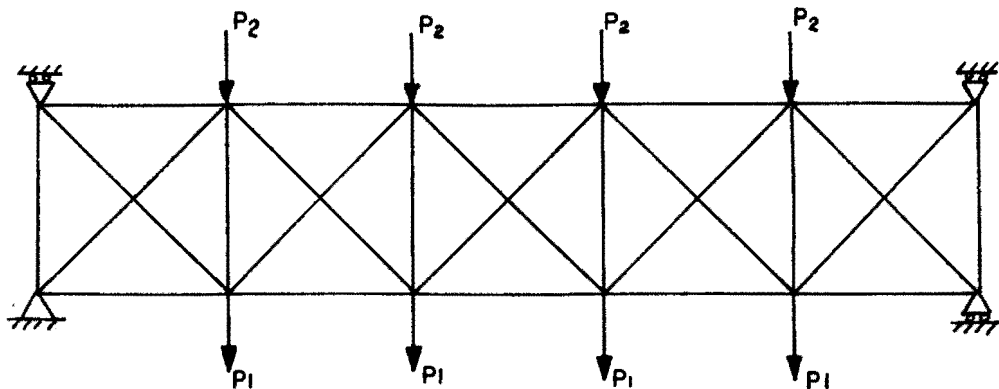


Fig. 2.21

Para este caso, os coeficientes das cargas são da seguinte forma a partir das equações (2.3.16)

$$P_{yk}^i = - 2 \frac{W_k}{n} P_i \sum_{r=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

segundo Jolley [10] a série $\sum_{r=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} = \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n}$

(2.3.22)

e só terá valores não nulos para valores ímpares de k . A função peso W_k e o termo $\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2}$ têm valores 1 e, conseqüentemente, as expressões para os coeficientes das cargas ficam da forma:

$$P_{xk}^1 = P_{xk}^2 = 0$$

$$P_{yk}^1 = - 2 P_1 \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n} \quad (2.3.23)$$

$$P_{yk}^2 = - 2 P_2 \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n} \quad k=1,3,5,\dots,n \text{ (ímpares)}$$

A substituição da solução em séries equação (2.3.1) e expansão das cargas em séries equação (2.3.12), nas equações diferenciais governantes equações (2.2.3) e condições de contorno equações (2.2.5) e (2.2.7), fornecem as expressões dos coeficientes das séries dos deslocamentos. Será feita a demonstração para a primeira equação e, as restantes são obtidas pelo mesmo procedimento.

A primeira equação do sistema (2.2.3) é expressa por:

$$(C_1 \bar{\Delta} r - 2\alpha^3) U^1(r) + ((\bar{\Delta} r + 2) \alpha^3) U^2(r) + (2\alpha^2 \beta \Gamma r) V^2(r) =$$

$$= - \frac{\ell}{E A_d} P_x^1(r)$$

A substituição dos operadores Δr e Γr pelas suas expressões correspondentes, já definidas, na igualdade acima, resulta:

$$C_1 (U^1_{(r+1)} - 2 U^1_{(r)} + U^1_{(r-1)} - 2\alpha^3 U^1_{(r)} + (U^2_{(r+1)} + U^2_{(r-1)}) \alpha^3 + \alpha^2 \beta (V^2_{(r+1)} - V^2_{(r-1)}) = - \frac{\ell}{E A_d} P^1_x(r)$$

A introdução das expansões em séries para os carregamentos e cargas, determina:

$$C_1 \left(\sum_k U^1_k \cos \frac{k\pi(r+1)}{n} - 2 \sum_k U^1_k \cos \frac{k\pi r}{n} + \sum_k U^1_k \cos \frac{k\pi(r-1)}{n} - 2\alpha^3 \sum_k U^1_k \cos \frac{k\pi r}{n} + \left(\sum_k U^2_k \cos \frac{k\pi(r+1)}{n} + \sum_k U^2_k \cos \frac{k\pi(r-1)}{n} \right) \alpha^3 + \alpha^2 \beta \left(\sum_k V^2_k \sin \frac{k\pi(r+1)}{n} - \sum_k V^2_k \sin \frac{k\pi(r-1)}{n} \right) \right) = - \frac{\ell}{E A_d} \sum_k P^1_{xk} \cos \frac{k\pi r}{n}$$

Aplicando-se as propriedades da soma de senos ou cossenos de arcos diferentes, definidas pelas equações (2.3.22), acha-se:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin (A+B)/2 \cos (A-B)/2$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos (A+B)/2 \sin (A-B)/2$$

$$\cos A - \cos B = 2 \cos (A+B)/2 \cos (A-B)/2$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos (A+B)/2 \cos (A-B)/2$$

(2.3.24)

$$2 C_1 \sum_k U_k^1 \left(-1 + \cos \frac{k\pi}{n} \right) - 2\alpha^3 \cos \frac{k\pi r}{n} + 2\alpha^3 \sum_k U_k^2 \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right)$$

$$\cos \frac{k\pi r}{n} + 2\alpha^2 \beta \sum_k V_k^2 \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \cos \frac{k\pi r}{n} = - \frac{\ell}{E A_d} \sum_k P_{xk}^1 \cos \left(\frac{k\pi r}{n} \right)$$

Colocando-se todos os termos do lado esquerdo da igualdade no mesmo somatório, tem-se:

$$\sum_k \left(2 C_1 U_k^1 \left(\left(-1 + \cos \frac{k\pi}{n} \right) - 2\alpha^3 \right) + \left(2\alpha^3 \cos \frac{k\pi}{n} \right) U_k^2 + \right.$$

$$\left. \left(2\alpha^2 \beta \sin \frac{k\pi}{n} \right) V_k^2 \right) \cos \frac{k\pi r}{n} = - \frac{\ell}{E A_d} \sum_k P_{xk}^1 \cos \frac{k\pi r}{n}$$

Pela igualdade das séries termo a termo, resulta:

$$2 C_1 \left(\left(-1 + \cos \frac{k\pi}{n} \right) - 2\alpha^3 \right) U_k^1 + \left(2\alpha^3 \cos \frac{k\pi}{n} \right) U_k^2 +$$

$$\left(2\alpha^2 \beta \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) V_k^2 = - \frac{\ell}{E A_d} P_{xk}^1$$

A expressão final para primeira equação é obtida introduzindo-se a definição de $\sigma_k = 1 - \cos (k\pi/n)$

$$\left(-2 C_1 \sigma_k - 2\alpha^3 \right) U_k^1 + (0) V_k^1 + \left(2\alpha^3 \cos \frac{k\pi}{n} \right) U_k^2 + \left(2\alpha^2 \beta \sin \frac{k\pi}{n} \right)$$

$$V_k^2 = - \frac{\ell}{E A_d} P_{xk}^1$$

As expressões para as demais equações de equilíbrio do sistema (2.2.7), resultam de um procedimento análogo.

O sistema de equações resultante, cujas incógnitas são os coeficientes das séries dos deslocamentos, fica da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} -2\sigma_k C_1 - 2\alpha^3 & 0 & 2\alpha^3 \cos k\pi/n & \pm 2\alpha^3 \beta \sin k\pi/n \\ 0 & -2\alpha\beta^2 - \alpha C_2 & \pm 2\alpha^2 \beta \sin k\pi/n & 2\alpha\beta^2 \cos k\pi/n + C_2 \\ 2\alpha^3 \cos k\pi/n & \pm 2\alpha\beta \sin k\pi/n & -2C_3 \sigma_k - 2\alpha^3 & 0 \\ \pm 2\alpha^2 \beta \sin k\pi/n & 2\alpha\beta^2 \cos k\pi/n + \alpha C_2 & 0 & -2\alpha\beta^2 - \alpha C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \\ U_k^2 \\ V_k^2 \end{Bmatrix} = -\frac{l}{E A_d} \begin{Bmatrix} p_{xk}^1 \\ p_{yk}^1 \\ p_{xk}^2 \\ p_{yk}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.3.25)$$

Os sinais superiores nos termos das equações correspondem a roletes horizontais de contorno, e os sinais inferiores, a roletes verticais de contorno.

O determinante do sistema de equações (2.3.25) tem valor zero para $k = 0$ o que indica que a solução para os coeficientes das séries dos deslocamentos é indeterminada.

As soluções em séries são válidas para todos os nós inclusive os de contorno.

O problema para $k = 0$, no primeiro vão, pode ser solucionado pela restrição do movimento do rolete em uma direção.

Para o caso de roletes horizontais de contorno, restringindo-se o deslocamento horizontal para $r = 0$, no nó inferior, a equação (2.3.3), resulta:

$$U_{(0)}^1 = \sum_{k=0}^n U_k^1 = 0$$

$$\sum_{k=0}^n U_k^1 = U_0^1 - \sum_{k=1}^n U_k^1 = 0$$

Isolando-se U_0^1 , tem-se:

$$U_0^1 = - \sum_{k=1}^n U_k^1 \quad (2.3.26)$$

O coeficiente U_0^2 , pode ser determinado a partir da terceira equação do sistema (2.3.25) com $k = 0$ e U_1^0 determinado na equação (2.3.26).

$$2\alpha^3 U_0^1 - 2\alpha^3 U_0^2 = - \frac{\ell}{E A_d} P_{x0}^2$$

$$U_0^2 = U_0^1 + \frac{\ell P_{x0}^2}{2 \alpha^3 E A_d} \quad (2.3.27)$$

O inconveniente que surge para $k = 0$ na resolução do sistema (2.3.25), quando se trata de um vão intermediário da viga, onde não se tem a restrição do deslocamento horizontal, conforme figuras (2.22) e (2.23), é contornado determinando-se as expressões para U_0^1 e U_0^2 a partir das equações (2.3.3) e (2.3.5) e com os deslocamentos dos nós comuns a dois vãos consecutivos, já determinados para o vão anterior.

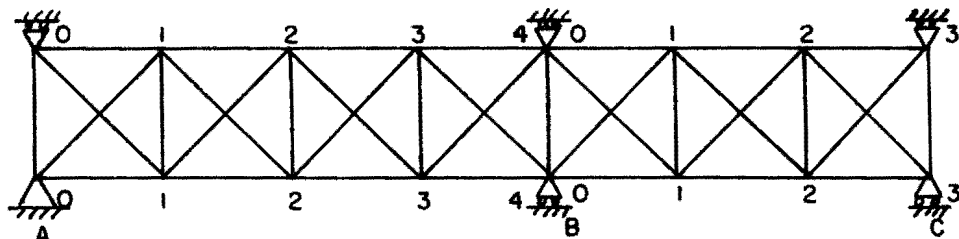


Fig.2.22

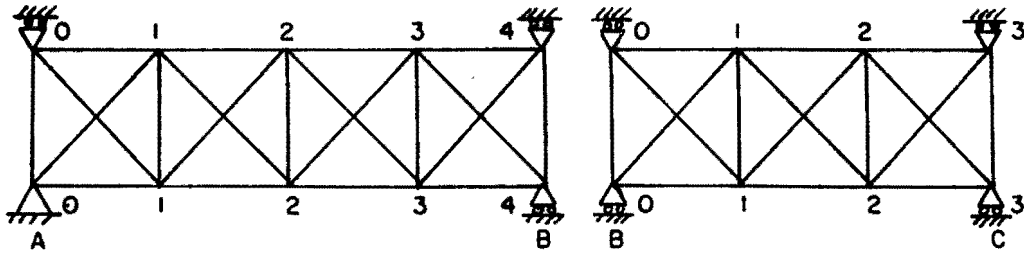


Fig. 2.23

O vão compreendido entre os apoios A e B da figura (2.3.9), apresenta restrição do deslocamento horizontal no nó A, com equações para U_0^1 e U_0^2 conforme equações (2.3.26) e (2.3.27) e, conseqüentemente, todos os deslocamentos podem ser determinados.

As equações para U_0^1 e U_0^2 nos demais vãos são obtidas fazendo-se a igualdade dos deslocamentos $U_{(n)}^1$ e $U_{(n)}^2$ do vão anterior, já determinados, com as equações dos deslocamentos $U_{(0)}^1$ e $U_{(0)}^2$ do vão em estudo.

Os deslocamentos horizontais para roletas horizontais de contorno expressos em séries finitas de Fourier [2], conforme equações (2.3.3) e (2.3.5), são:

$$U_{(r)}^1 = \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.28)$$

$$U_{(r)}^2 = \sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.29)$$

As expressões para U_0^1 e U_0^2 isoladas das equações anteriores, resultam:

$$U_0^1 = U_{(r)}^1 - \sum_{k=1}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.30)$$

$$U_0^2 = U_{(r)}^2 - \sum_{k=1}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n}$$

Da particularização para $r = 0$ nas equações para U_0^1 e U_0^2 , resultam as expressões abaixo:

$$U_0^1 = U_{(0)}^1 - \sum_{k=1}^n U_k^1 \quad (2.3.31)$$

$$U_0^2 = U_{(0)}^2 - \sum_{k=1}^n U_k^2 \quad (2.3.32)$$

A compatibilidade dos deslocamentos dos nós comuns a dois vãos genéricos $i - 1$ e i , possibilita as seguintes igualdades:

$$U_{(n)}^{i-1,1} = U_{(0)}^{i,1} \quad (2.3.33)$$

$$U_{(n)}^{i-1,2} = U_{(0)}^{i,2} \quad (2.3.34)$$

A substituição das equações (2.3.33) e (2.3.34) nas equações (2.3.31) e (2.3.32), respectivamente, conduz às equações para U_0^1 e U_0^2 para os demais vãos.

$$U_0^1 = U_{(n)}^{i-1,1} - \sum_{k=1}^n U_k^1 \quad (2.3.35)$$

$$U_0^2 = U_{(n)}^{i-1,2} - \sum_{k=1}^n U_k^2 \quad (2.3.36)$$

As expressões para os deslocamentos horizontais, com roletes horizontais de contorno para os demais vãos, exceto o primeiro, são determinadas substituindo-se as equações (2.3.35) e (2.3.36) nas equações (2.3.28) e (2.3.29), respectivamente:

$$U_{(r)}^{i,1} = U_{(n)}^{i-1,1} - \sum_{k=1}^n U_k^1 + \sum_{k=1}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.37)$$

$$U_{(r)}^i = U_{(n)}^{i-1} - \sum_{k=1}^n U_k^i + \sum_{k=1}^n U_k^i \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.3.38)$$

A determinação de V_0^1 para o caso de roletes verticais de contorno, é feita restringindo-se o deslocamento vertical para $r = 0$ no nó inferior. Isolando-se V_0^1 da equação (2.3.9), acha-se:

$$V_0^1 = - \sum_{k=1}^n V_k^1 \quad (2.3.39)$$

A expressão para V_0^2 é determinada utilizando-se a quarta equação do sistema (2.3.25), para $k = 0$.

$$V_0^2 = V_0^1 + \frac{\ell P_{x0}^2}{\alpha E A_d (2\beta^2 + C_2)} \quad (2.3.40)$$

A solução do sistema de equações (2.3.25), determina as expressões para os coeficientes das séries dos deslocamentos para $k > 0$.

a) Para um carregamento vertical arbitrário:

$$U_k^1 = \pm \frac{\ell \alpha \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} (P_{yk}^1 D_k(C_3) + P_{yk}^2 C_k(C_3))}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k} \quad (2.3.41)$$

$$U_k^2 = \pm \frac{\ell \alpha \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} (P_{yk}^1 C_k(C_1) + P_{yk}^2 D_k(C_1))}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k} \quad (2.3.42)$$

$$V_k^1 = \frac{\ell (P_{yk}^1 (E_k(0) - 2\beta^2 C_3 \alpha^3 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{n}) + P_{xk}^2 E_k(\frac{k\pi}{n}))}{2 E A_d \beta^2 \sigma_k^2 A_k} \quad (2.3.43)$$

$$V_k^2 = \frac{\ell (P_{yk}^1 E_k (\frac{k\pi}{n}) + P_{yk}^2 (E_k (0) + 2 \beta^2 C_1 \alpha^3 \text{sen}^2 \frac{k\pi}{n}))}{2 E A_d \beta^2 \sigma^2 A_k} \quad (2.3.44)$$

b) Para um carregamento horizontal arbitrário:

$$U_k^1 = - \frac{\ell (- P_{xk}^1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_2 \alpha^3) + P_{yk}^2 C_2 \alpha^3)}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.3.45)$$

$$U_k^2 = - \frac{\ell (\alpha^3 C_2 P_{xk}^1 - P_{xk}^2 (C_k (C_1) + D_k (C_1) - C_2 \alpha^3))}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.3.46)$$

$$V_k^1 = \pm \frac{\ell \alpha \text{sen} \frac{k\pi}{n} (P_{xk}^1 (C_k (C_3) - 2 \beta^2 C_3 \cos \frac{k\pi}{n}) - P_{xk}^2 C_k (C_1))}{2 E A_d \beta \sigma_k^2 A_k} \quad (2.3.47)$$

$$V_k^2 = \pm \frac{\ell \alpha \text{sen} \frac{k\pi}{n} (P_{xk}^1 C_k (C_3) - P_{xk}^2 D_k (C_1))}{2 E A_d \beta \sigma_k^2 A_k} \quad (2.3.48)$$

onde:

$$A_k = 2 C_1 C_3 (\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3 (C_1 + C_3)$$

$$B_k = 1 + \cos \frac{k\pi}{n}$$

$$C_k (\xi) = 2 \beta^2 \xi + C_2 (\xi + \alpha^3) \quad (2.3.49)$$

$$D_k (\xi) = 2 \beta^2 \xi \cos \frac{k\pi}{n} + C_2 (\xi + \alpha^3)$$

$$E_k (\xi) = (\sigma_k C_1 C_3 + \alpha^3 (C_1 + C_3))(2 \beta^2 \cos \zeta + C_2) + C_2 \alpha^6 B_k$$

sendo:

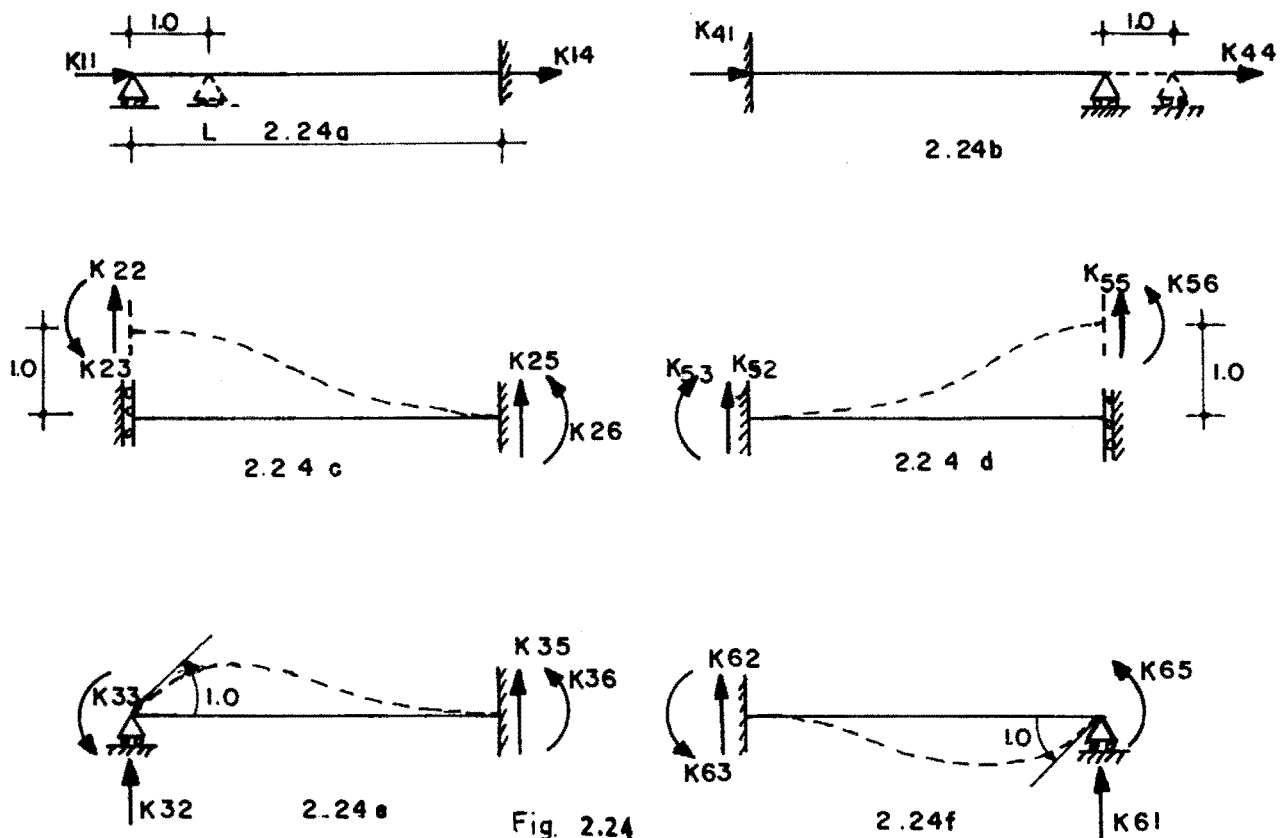
$$\xi = C_1 \text{ ou } C_3$$

$$\zeta = \frac{k\pi}{n} \text{ ou zero}$$

Os deslocamentos em qualquer n \bar{o} , s \bar{a} o determinados a partir da substitui \tilde{c} o dos coeficientes acima referenciados na equa \tilde{c} o (2.3.1) e com as equa \tilde{c} oes (2.3.2) ou (2.3.7) em fun \tilde{c} o da posi \tilde{c} o dos roletes de contorno.

2.4. Determina \tilde{c} o dos coeficientes de rigidez

A matriz de rigidez de uma barra prism \tilde{a} tica \bar{e} determinada pela aplica \tilde{c} o de rota \tilde{c} oes e deslocamentos unit \bar{a} rios, um por vez, na dire \tilde{c} o de cada eixo global de coordenadas e calculando-se os esfor \tilde{c} os que surgem nas extremidades da barra, conforme figura (2.24).



A matriz de rigidez de uma barra prismática conforme figura (2.24), é da forma:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
 & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 \text{SIM} & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 & & & & & \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad (2.4.1)$$

Os coeficientes de rigidez para uma viga treliçada em X, podem ser obtidos através da aplicação similar de deslocamentos unitários e rotações unitárias para uma das extremidades, e fixando-se a outra, e determinando-se os esforços que surgem.

Para o cálculo da rigidez axial, conforme figura (2.24.a), considera-se a situação apresentada na figura (2.16) utilizando-se cargas diferentes nos cordões superior (P_2) e inferior (P_1) devido às áreas não serem iguais, como mostra a figura (2.25)

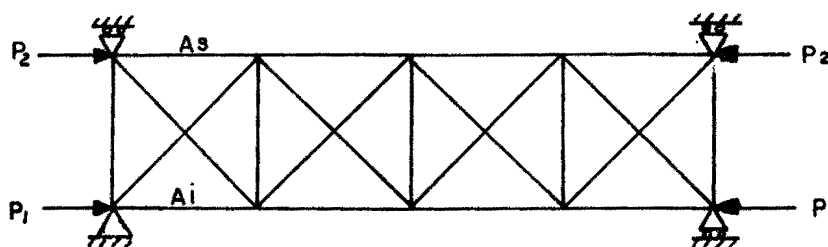


Fig. 2.25

As expressões para os coeficientes das séries das cargas ficam determinadas pela aplicação da equação (2.3.16) no esquema apresentado pela figura (2.25).

$$p_{yk}^1 = p_{yk}^2 = 0 \quad (2.4.2)$$

$$p_{xk}^1 = 4 \frac{Wk}{n} p_1 \quad k = 1, 3, 5, \dots, n \text{ (ímpares)} \quad (2.4.3)$$

$$p_{xk}^2 = 4 \frac{Wk}{n} p_2 \quad k = 1, 3, 5, \dots, n \text{ (ímpares)} \quad (2.4.4)$$

Os coeficientes das séries dos deslocamentos horizontais, a partir das equações (2.3.45) e (2.3.46) e figura (2.4.2), resultou:

$$U_k^1 = - \frac{\ell (- p_{xk}^1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_2 \alpha^3) + p_{xk}^2 C_2 \alpha^3)}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.4.5)$$

$$U_k^2 = - \frac{\ell (\alpha^3 C_2 p_{xk}^1 - p_{xk}^2 (C_k (C_1) + D_k (C_1) - C_2 \alpha^3))}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.4.6)$$

A hipótese de que a secção não gira, permite dizer que os deslocamentos horizontais dos dois cordões, para $r = 0$, são iguais.

$$U_{(0)}^1 = U_{(0)}^2$$

Substituindo-se na igualdade acima as expressões para os deslocamentos em séries de Fourier, conforme equações (2.3.3) e (2.3.5), com coeficientes indicados pelas equações (2.4.5) e (2.4.6), e coeficientes para as séries das cargas fornecidas pelas equações (2.4.3) e (2.4.4), tem-se:

$$\sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(-4 \frac{Wk}{n} P_1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_2 \alpha^3) + 4 \frac{Wk}{n} P_2 C_2 \alpha^3 \right)}{2 E A_d \sigma_k A_k} =$$

$$\sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(\alpha^3 C_2 4 \frac{Wk}{n} P_1 - 4 \frac{Wk}{n} P_2 (C_k (C_1) + D_k (C_1) - C_2 \alpha^3) \right)}{2 E A_d \sigma_k A_k}$$

A partir da troca de $C_k (C_3)$ e $D_k (C_3)$ pelas suas equações equivalentes (2.3.49), fica:

$$\sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(-4 \frac{Wk}{n} P_1 (2\beta^2 C_3 + C_2 (C_3 + \alpha^3)) + 2\beta^2 C_3 \cos \frac{k\pi}{n} + C_2 (C_3 + \alpha^3) \right)}{2 E A_d \sigma_k A_k}$$

$$\frac{+ 4 \frac{Wk}{n} P_1 C_2 \alpha^3}{2 E A_d \sigma_k A_k} = \sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(\alpha^3 C_2 4 \frac{Wk}{n} P_1 - 4 \frac{Wk}{n} P_2 (2\beta^2 C_1) + \right)}{2 E A_d \sigma_k A_k}$$

$$\frac{- 4 \frac{Wk}{n} P_2 ((C_2 (C_1 + \alpha^3) + 2\beta C_1 \cos \frac{k\pi}{n} + C_2 (C_1 + \alpha^3) - C_2 \alpha^3)}{2 E A_d \sigma_k A_k}$$

A simplificação dos termos em comum, resulta:

$$P_1 \sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk(\beta^2 C_3 B_k + C_2 (C_3 + \alpha^3))}{\sigma_k A_k} = P_2 \sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk(\beta^2 C_1 B_k + C_2 (C_1 + \alpha^3))}{\sigma_k A_k}$$

Isolando-se o quociente P_1/P_2 e fazendo-o igual a Q_1 , acha-se:

$$Q_1 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (\beta^2 C_1 B_k + C_2 (C_1 + \alpha^3))}{\sigma_k A_k}}{\sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (\beta^2 C_3 B_k + C_2 (C_3 + \alpha^3))}{\sigma_k A_k}} \quad (2.4.7)$$

O quociente entre a força total aplicada ($P_1 + P_2$) e o deslocamento total $U_{(0)}^1$ é igual ao quociente entre a força que surge na extremidade quando é dado um deslocamento horizontal unitário, e esse deslocamento unitário, então fica:

$$\frac{P_1 + P_2}{U_{(0)}^1} = \frac{K_{11}}{1.0}$$

Substituindo-se $U_{(0)}^1$ pela sua expressão equivalente, resulta:

$$K_{11} = \frac{P_1 + P_2}{\frac{4\ell}{n} \sum_{k=1,3..}^n \frac{2 Wk (P_1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_3 \alpha^3 - P_2 C_2 \alpha^3))}{2 E A_d \sigma_k A_k}}$$

A equação final para o coeficiente de rigidez K_{11} fica determinada aplicando-se o fator Q_1 e reorganizando-se a equação anterior:

$$K_{11} = \frac{n E A_d (1 + Q_1)}{4\ell \sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (Q_1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_2 \alpha^3) - C_2 \alpha^3)}{2 E A_d \sigma_k A_k}} \quad (2.4.8)$$

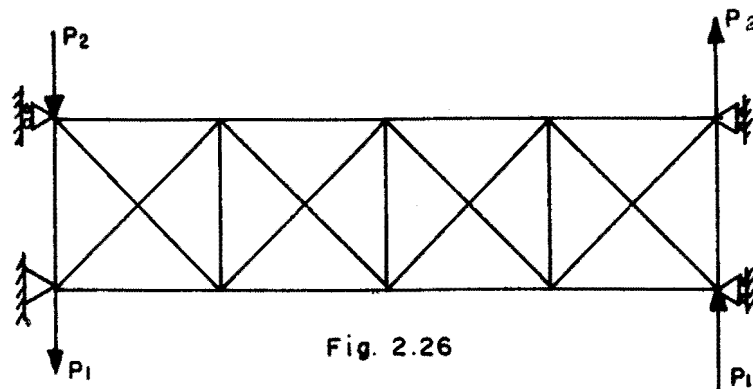
Os coeficientes de rigidez K_{44} e K_{14} , a partir das figuras (2.24.a) e (2.24.b), têm as mesmas expressões do coefi

ciente K_{11} , a menos de sinal.

$$K_{44} = -K_{14} = K_{11} \quad (2.4.9)$$

A força vertical necessária para causar um deslocamento unitário, dos nós extremos para os cordões superior e inferior, é determinada a partir das considerações apresentadas nas figuras (2.24.c) e (2.26).

Os coeficientes das séries das cargas a partir da equação (2.3.16) aplicada à figura (2.26), ficam:



$$P_{xk}^1 = P_{xk}^2 = 0 \quad (2.4.10)$$

$$P_{yk}^1 = 4 \frac{Wk}{n} P_1 \quad k=1,3,5,\dots,n \text{ (ímpares)} \quad (2.4.11)$$

$$P_{yk}^2 = 4 \frac{Wk}{n} P_2 \quad k=1,3,5,\dots,n \text{ (ímpares)} \quad (2.4.12)$$

Os coeficientes das séries dos deslocamentos são determinados aplicando-se as equações (2.3.47) e (2.3.48) ao esquema mostrado na figura (2.26).

$$v_k^1 = \frac{\varrho \left(4 \frac{Wk}{n} P_1 (E_k(0)) - 2\beta^2 C_3 \alpha^3 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) + 4 \frac{Wk}{n} P_2 (E_k(\frac{k\pi}{n}))}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2}$$

$$v_k^2 = \frac{\varrho \left(4 \frac{Wk}{n} P_1 (E_k(\frac{k\pi}{n})) + 4 \frac{Wk}{n} P_2 (E_k(0)) - 2\alpha\beta^2 C_1 \alpha^3 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right)}{2 E A_d \alpha \beta^2 \sigma_k^2 A_k}$$

para ambas as equações $k = 1, 3, 5, \dots, n$ (ímpares).

A hipótese de que as barras não deformam, permite dizer:

$$v_{(0)}^1 = v_{(0)}^2$$

As equações para os deslocamentos verticais, conforme equações (2.3.9) e (2.3.11), são:

$$v_{(r)}^1 = \sum_{k=0}^n v_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n}$$

$$v_{(r)}^2 = \sum_{k=0}^n v_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n}$$

A particularização das equações acima para $r = 0$, resulta:

$$\sum_{k=1,3,\dots}^n v_k^1 = \sum_{k=1,3,\dots}^n v_k^2$$

Substituindo-se $E_k(\xi)$ pela sua expressão equivalente dada pela equação (2.3.49) e fazendo-se a igualdade das séries, acha-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(4 \frac{Wk}{n} P_1 \left((\sigma_k C_1 C_3 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) (2\beta^2 + C_2) + C_2 \alpha^6 B_k \right) \right)}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2} \\
& - \frac{4 \frac{Wk}{n} P_1 (2\beta^2 C_3 \alpha^3 \sin^2 \frac{k\pi}{n}) + 4 \frac{Wk}{n} P_2 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) C_2 \right)}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2} \\
& + \frac{4 \frac{Wk}{n} P_2 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) (2\beta^2 \cos \frac{k\pi}{n} + C_2) + C_2 \alpha^6 B_k \right)}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2} = \\
& \sum_{k=1,3..}^n \frac{\ell \left(4 \frac{Wk}{n} P_1 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) (2\beta^2 \cos \frac{k\pi}{n} + C_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{4 \frac{Wk}{n} P_1 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) (C_2 \alpha^6 B_k) + 4 \frac{Wk}{n} P_2 (C_2 \alpha^6 B_k) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{4 \frac{Wk}{n} P_2 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 + C_3)) (2\beta^2 + C_2) - 2\beta^2 C_1 \alpha^3 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right)}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2} \right) \right)}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2}
\end{aligned}$$

As expressões na igualdade acima ficam reduzidas simplificando-se os termos em comum e substituindo-se B_k por sua expressão equivalente, conforme equação (2.3.49).

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1,3..}^n \frac{2 Wk P_1 \left((\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 - C_3 \cos \frac{k\pi}{n})) \right)}{\sigma_k A_k} = \\
& \sum_{k=1,3..}^n \frac{2 Wk P_2 \left((\sigma_k C_3 C_1 + (\alpha^3 C_3 - C_1 \cos \frac{k\pi}{n})) \right)}{\sigma_k A_k}
\end{aligned}$$

Isolando-se o quociente P_1/P_2 e fazendo-se igual a Q_2 , tem-se:

$$Q_2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_3 - C_1 \cos \frac{k\pi}{n}))}{\sigma_k A_k}}{\sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (\sigma_k C_3 C_1 + \alpha^3 (C_1 - C_3 \cos \frac{k\pi}{n}))}{\sigma_k A_k}} \quad (2.4.13)$$

Quando $A_s = A_i$, $Q_2 = 1$.

O quociente entre a força total aplicada ($P_1 + P_2$) e o deslocamento total $V_{(0)}^1$ ou $V_{(0)}^2$, é igual ao quociente entre a força que surge na extremidade, quando é dado um deslocamento unitário e esse deslocamento unitário, então fica:

$$\frac{P_1 + P_2}{V_{(0)}^1} = \frac{K_{22}}{1.0}$$

A substituição de $V_{(0)}^1$ pela sua expressão correspondente fornecida pelas equações (2.3.9) e (2.3.43), determina:

$$K_{22} = \frac{P_1 + P_2}{4e \sum_{k=1,3..}^n \frac{2 Wk P_1 (E_k(0) - 2\beta^2 C_3 \alpha^3 \sin^2 \frac{k\pi}{n}) + P_2 (H_k(\frac{k\pi}{n}))}{2 E A_d \sigma_k^2 A_k \alpha \beta^2}}$$

A determinação da equação final para o coeficiente de rigidez K_{22} é feita introduzindo-se o fator Q_2 , expresso pela equação (2.4.13).

$$K_{22} = \frac{A_d E n (1 + Q_2)}{4e \sum_{k=1,3..}^n \frac{Wk (E_k(0) + Q_2 E_k(k\pi/n) - 2\beta^2 C_3 \alpha^2 \sigma_k B_k)}{\sigma_k^2 A_k}} \quad (2.4.14)$$

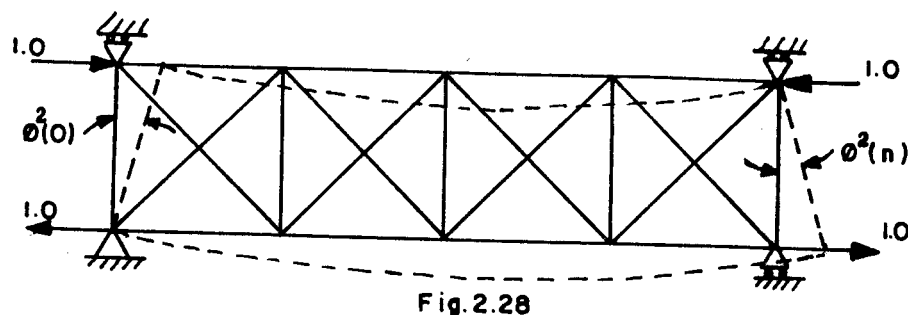
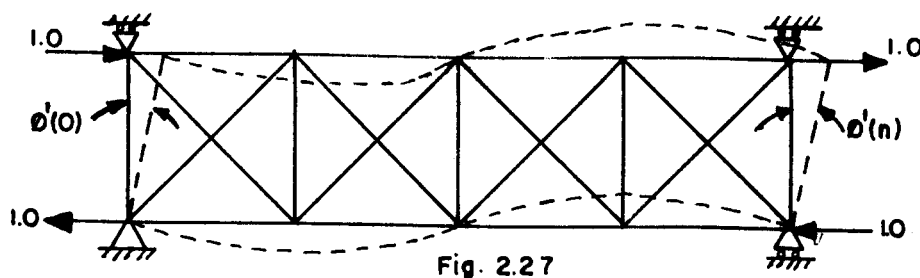
A análise das figuras (2.24) e definições de coeficientes de rigidez, permite a igualdade abaixo.

$$K_{55} = K_{22} = -K_{25}$$

A obtenção das reações horizontais das equações de contorno (2.2.5.b e d) e (2.2.7.b e d), determina os momentos causados por uma força vertical |14|.

$$K_{23} = K_{26} = -K_{35} = -K_{56} = K_{22} \frac{\ell n}{2} \quad (2.4.15)$$

Os momentos que surgem devido a um giro em uma das extremidades, são obtidos a partir da superposição das rotações, conforme figuras (2.27) e (2.28) e fazendo-se a rotação em uma extremidade igual a um e na outra, igual a zero.



As equações resultantes para a extremidade esquerda e para a extremidade direita, ficam sendo, respectivamente:

$$K_1 \phi^1(0) + K_2 \phi^2(0) = 1$$

(2.4.16)

$$K_1 \phi^1(n) + K_2 \phi^2(n) = 0$$

A rotação em uma extremidade \bar{e} é determinada a partir do quociente entre o deslocamento relativo dos nós extremos superior e inferior pela altura da treliça ($\beta l / \alpha$). Os coeficientes K_1 e K_2 são fatores de multiplicação para cargas unitárias. As figuras (2.29) e (2.30) apresentam os deslocamentos relativos entre os nós superiores e inferiores.

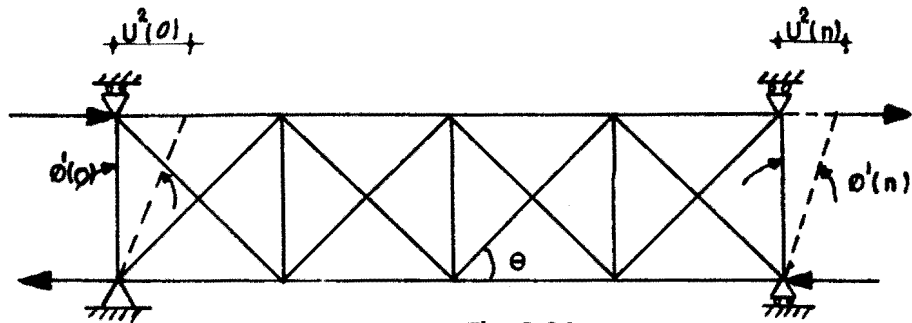


Fig. 2.29

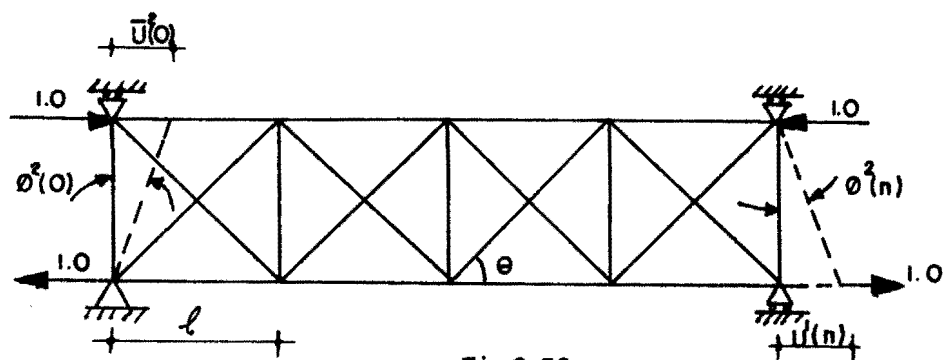


Fig. 2.30

A expressão equivalente para uma rotação genérica \bar{e} é dada por:

$$\phi^j(s) = \frac{U^i(s)}{l}$$

onde: $s = 0$ ou n , $i = 1$ ou 2 e $j = 1$ ou 2

Substituindo-se nas equações (2.4.16) as expressões equivalentes para cada uma das rotações, resulta:

$$K_1 \frac{U^2(0)}{\beta l / \alpha} + K_2 \frac{\bar{U}^2(0)}{\beta l / \alpha} = 1 \quad (2.4.17)$$

$$K_1 \frac{U^2(n)}{\beta l / \alpha} + K_2 \frac{\bar{U}^1(n)}{\beta l / \alpha} = 0$$

A resolução do sistema (2.4.17) determina as equações para K_1 e K_2 .

$$K_2 = \frac{\beta l}{\alpha} \frac{U^2(n)}{U^1(n) U^2(0) + U^2(n) \bar{U}^2(0)} \quad (2.4.18)$$

$$K_1 = \frac{\beta l}{\alpha} \frac{U^1(n)}{U^1(n) U^2(0) + U^2(n) \bar{U}^2(0)} \quad (2.4.19)$$

As forças necessárias para produzirem as rotações $K_1 \phi^1(0)$ e $K_2 \phi^2(0)$ têm valores K_1 e K_2 , respectivamente.

A superposição dos estados representados pelas figuras (2.29) e (2.30), para uma rotação final unitária, como mostra a figura (2.31), fica sendo:

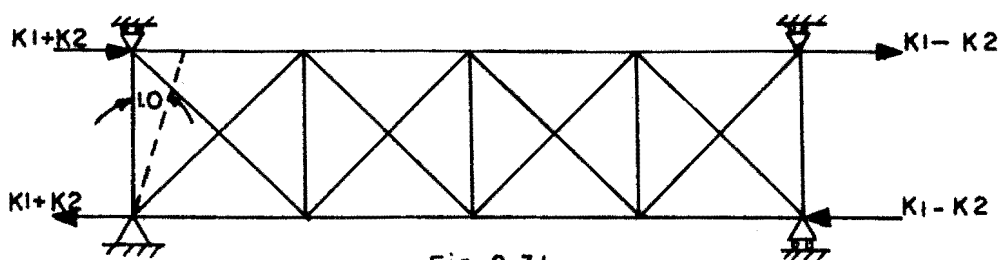


Fig. 2.31

O momento que surge na extremidade devido a essa rotação unitária e o coeficiente de rigidez K_{33} .

Substituindo-se os termos K_1 e K_2 pelas suas correspondentes expressões em função dos deslocamentos, conforme equações (2.4.18) e (2.4.19) resulta:

$$K_{33} = K_{66} = \frac{\beta^2 \ell^2}{\alpha^2} \frac{U^1(n) + U^2(n)}{U^1(n) U^2(0) + U^2(n) U^1(0)} \quad (2.4.20)$$

As expressões dos deslocamentos horizontais para a figura (2.31), em séries de Fourier [3], segundo equações (2.3.8) e (2.3.10), são:

$$U^1(r) = \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.4.21)$$

$$U^2(r) = \sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (2.4.22)$$

Os coeficientes das séries dos deslocamentos, conforme equações (2.3.45) e (2.3.46) são:

$$U_k^1 = \frac{-\ell (-P_{xk}^1 (C_k (C_3) + D_k (C_3) - C_2 \alpha^3) + P_{yk}^2 C_2 \alpha^3)}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.4.23)$$

$$U_k^2 = \frac{-\ell (\alpha^3 C_2 P_{xk}^1 - P_{xk}^2 (C_k (C_1) + D_k (C_1) - C_2 \alpha^3))}{2 E A_d \sigma_k A_k} \quad (2.4.24)$$

Os coeficientes das séries das cargas, a partir das equações (2.3.16) são:

a) Para a figura (2.29)

$$p_{xk}^1 = - p_{xk}^2 = - 4 \frac{Wk}{n} \quad k=2,4,\dots,n \text{ (pares)} \quad (2.4.25)$$

b) Para a figura (2.30)

$$p_{xk}^1 = - p_{xk}^2 = - 4 \frac{Wk}{n} \quad k=1,3,\dots,n \text{ (ímpares)} \quad (2.4.26)$$

A existência de valores não nulos para p_{xk}^1 e p_{xk}^2 somente para valores pares de k , equações (2.4.25) e (2.4.26), permite concluir que $U^2(0) = U^2(n)$ na equação (2.4.22).

A substituição na equação (2.4.22) dos coeficientes das séries dos deslocamentos, equação (2.4.24), dos coeficientes das séries das cargas, equação (2.4.25) e considerando-se as condições para $k = 0$ conforme equações (2.3.26) e (2.3.27) e, as funções $C_k(C_1)$, $D_k(C_1)$, B_k e A_k expressas pelas equações (2.3.49), tem-se:

$$U^2(0) = U^2(n) = \frac{4\ell}{n E A_d} \sum_{k=2,4,\dots}^n \frac{Wk ((C_1+C_3)(\beta^2 B_k+C_2) + 2 C_2 \alpha^3)}{\sigma_k A_k} + \frac{\ell}{n \alpha^3 E A_d} \quad (2.4.27)$$

A partir de um procedimento análogo, substituindo-se na equação (2.4.21) os coeficientes dos deslocamentos, equação (2.4.23), os coeficientes das cargas, equação (2.4.26), as condições para $k = 0$, equações (2.3.26) e (2.3.27) e as funções $C_k(C_3)$, $D_k(C_3)$, B_k e A_k pelas suas expressões equivalentes, equações (2.3.49), fica:

$$U^1(n) = \frac{8\ell}{n E A_d} \sum_{k=1,3,\dots}^n \frac{Wk (C_3 (\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3)}{\sigma_k A_k} \quad (2.4.28)$$

A expressão para o deslocamento $\bar{U}^2(0)$ é obtida da mesma maneira e resulta:

$$\bar{U}^2(0) = \frac{4\ell}{n E A_d} \sum_{k=1,3..}^n \frac{W_k ((\beta^2 B_k + C_2)(C_1 + C_3) + 2 C_2 \alpha^3)}{\sigma_k A_k}$$

Substituindo-se $U^2(0)$, $U^1(n)$ e $\bar{U}^2(0)$ na equação (2.4.20) e simplificando-se, tem-se:

$$K_{33} = \frac{\beta^2 \ell n E A_d}{4\alpha^2} \frac{(4\alpha^3 (\sum_{k=2,4}^n F_k + 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{W_k ((C_3 (\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3))}{\sigma_k A_k} + 1))}{(1+4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n F_k) (\sum_{k=1,3}^n F_k + 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{W_k (C_3 (\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3)}{\sigma_k A_k})}$$

(2.4.29)

Em que $F_k = \frac{W_k ((\beta^2 B_k + C_2) (C_1 + C_3) + 2 \alpha^3 C_2)}{\sigma_k A_k}$

Quando $C_1 = C_3$, o coeficiente de rigidez K_{33} fica da forma:

$$K_{33} = \frac{\beta^2 \ell n E A_d}{8\alpha^2} \frac{4\alpha^3 (\sum_{k=1}^n F_k) + 1}{(1 + 4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n F_k) (\sum_{k=1,3}^n F_k)}$$

O momento (K_{36}) que surge na outra extremidade devido à rotação unitária na extremidade oposta conforme figura (2.31), é expresso por:

$$K_{36} = \frac{\beta^2 \ell^2}{\alpha^2} \frac{U^1(n) - U^2(n)}{U^1(n) U^2(0) + U^2(0) \bar{U}^2(0)} \quad (2.4.31)$$

A expressão para K_{36} será a mesma do K_{33} fornecida pela equação (2.4.20), exceto a introdução de um sinal negativo.

$$K_{36} = -\frac{\beta^2 A_d E n \ell}{4\alpha^2} \frac{4\alpha^3 \left(\sum_{k=2,4}^n F_k - 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{Wk((C_3(\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3))}{\sigma_k A_k} + 1 \right)}{(1+4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n F_k) \left(\sum_{k=1,3}^n F_k + 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{Wk(C_3(\beta^2 B_k + C_2) + C_2 \alpha^3)}{\sigma_k A_k} \right)} \quad (2.4.32)$$

A expressão para K_{36} fica simplificada quando $C_1=C_3$.

$$K_{36} = -\frac{\beta^2 A_d E n \ell}{8\alpha^2} \frac{4\alpha^3 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k F_k \right) + 1}{(1 + 4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n F_k) \left(\sum_{k=1,3}^n F_k \right)} \quad (2.4.33)$$

Os demais coeficientes são nulos considerando-se que a matriz \bar{e} é simétrica.

2.5. Momentos de engastamento perfeito

Os momentos de engastamento perfeito [14], para os carregamentos genéricos da figura (2.32), ficam expressos pelas equações (2.5.1) e (2.5.2).

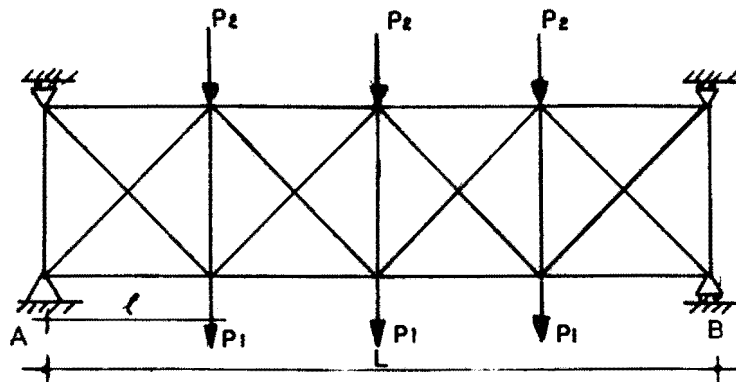


Fig. 2.32

$$MA = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(P_1(r) + P_2(r)) (r \ell) ((n-r) \ell)^2}{(n \ell)^2} \quad (2.5.1)$$

$$MB = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(P_1(r) + P_2(r)) (r \ell)^2 ((n-r) \ell)}{(n \ell)^2} \quad (2.5.2)$$

2.6. Coefficientes de rigidez para vigas treliçadas em X sem montantes

Os coeficientes de rigidez para este tipo de viga treliçada, conforme figura (2.33), são obtidos diretamente das expressões dos coeficientes de rigidez de vigas treliçadas em X com montantes, considerando-se a área vertical $A_v = 0$ e, conseqüentemente, $C_2 = 0$.

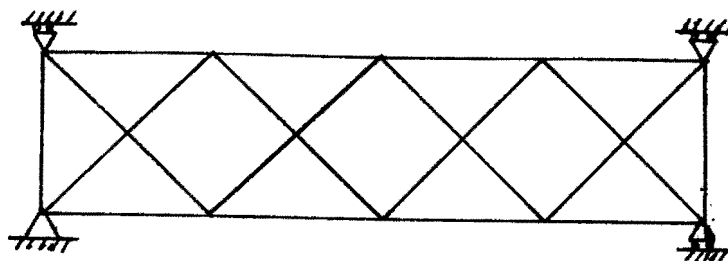


Fig. 2.33

As equações para os coeficientes de rigidez K_{11} , K_{44} e K_{14} são obtidas a partir das equações (2.4.7), (2.4.8) e (2.4.9), fazendo-se $C_2 = 0$.

$$K_{11} = \frac{n E A_d (1 + Q_1)}{4 \ell \sum_{k=1,3}^n \frac{W_k (Q_1 (C_k (C_3) + D_k (C_3)))}{\sigma_k A_k}} \quad (2.6.1)$$

$$K_{44} = -K_{14} = K_{11} \quad (2.6.2)$$

Os coeficientes K_{22} , K_{55} e K_{25} , a partir das equações (2.4.14), (2.4.13) e (2.4.34) para $C_2 = 0$, resultam:

$$K_{22} = \frac{A_d E n (1 + Q_2)}{4 \ell \sum_{k=1,3}^n Wk (\bar{E}_k (0) + Q_2 \bar{E}_k (k\pi/n) - 2\beta^2 C_3 \sin^2 k\pi/n)} \quad (2.6.3)$$

A função $\bar{E}_k(x)$ é a função $E_k(x)$ para $C_2 = 0$.

$$K_{55} = -K_{25} = K_{22} \quad (2.6.4)$$

Os momentos devidos ao cortante vertical, são expressos pela equação (2.4.15):

$$K_{23} = K_{26} = -K_{35} = -K_{56} = K_{22} \frac{\ell n}{2} \quad (2.6.5)$$

O coeficiente K_{33} a partir da equação (2.4.20), fazendo-se $C_2 = 0$, tem a forma:

$$K_{33} = \frac{\beta^2 \ell n E A_d}{4\alpha^2} \frac{(4\alpha^3 (\sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k + 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{Wk (C_3 \beta^2 B_k)}{\sigma_k A_k}) + 1)}{(1 + 4\alpha^3 (\sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k) (\sum_{k=1,3}^n \bar{F}_k + 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{Wk (C_3 \beta^2 B_k)}{\sigma_k A_k}))} \quad (2.6.6)$$

A expressão para K_{33} quando $C_1 = C_3$, resulta:

$$K_{33} = \frac{\beta^2 \ell n E A_d}{8\alpha^2} \frac{4\alpha^3 \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \right) + 1}{\left(1 + 4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k \right) \left(\sum_{k=1,3}^n \bar{F}_k \right)} \quad (2.6.7)$$

A função \bar{F}_k é definida como:

$$\bar{F}_k = \frac{W_k (\beta^2 B_k (C_1 + C_3))}{\sigma_k A_k} \quad (2.6.8)$$

A expressão para o coeficiente K_{36} é deduzida a partir da equação (2.4.33), fazendo-se $C_2 = 0$, e resulta:

$$K_{36} = - \frac{\beta^2 A_d E n \ell}{4\alpha^2} \frac{4\alpha^3 \left(\sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k - 2 \sum_{k=1,3}^n \frac{W_k (C_3 \beta^2 B_k)}{\sigma_k A_k} \right) + 1}{\left(1 + 4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k \right) \left(\sum_{k=1,3}^n \bar{F}_k + 2 \frac{W_k (C_3 \beta^2 B_k)}{\sigma_k A_k} \right)} \quad (2.6.9)$$

Para $C_1 = C_3$, K_{36} assume a forma:

$$K_{36} = - \frac{\beta^2 A_d E n \ell}{8\alpha^2} \frac{4\alpha^3 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{F}_k \right) + 1}{\left(1 + 4\alpha^3 \sum_{k=2,4}^n \bar{F}_k \right) \left(\sum_{k=1,3}^n \bar{F}_k \right)} \quad (2.6.10)$$

2.7. Coefficientes de rigidez para vigas treliçadas em X considerando a deformação por corte

Os coeficientes de rigidez de uma barra composta por um reticulado, podem ser determinados como sendo contínuos, incluindo a deformação por corte e corrigidos pelo parâmetro de flexocorte [16] que permite levar em conta a deformação pelo cortante em estruturas reticulares.

Considerando-se como uma única barra cada um dos vãos entre apoios com características mostradas na figura (2.34), os coeficientes de rigidez resultam:

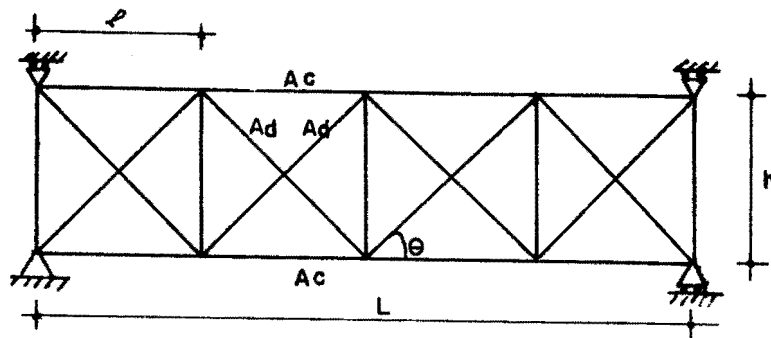


Fig.2.34

$$K_{11} = K_{44} = -K_{14} = \frac{EA}{L} \quad (2.7.1)$$

$$K_{26} = -K_{35} = K_{23} = K_{56} = 4 \frac{(1+3\mu)}{(1+12\mu)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-6\mu}{2\mu+1}\right) \frac{EI}{L^2} \quad (2.7.2)$$

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = \frac{2}{L} K_{23} \quad (2.7.3)$$

$$K_{33} = K_{66} = 4 \frac{(1-6\mu)}{(2\mu+1)} \frac{EI}{L} \quad (2.7.4)$$

$$K_{36} = \frac{2 (1 + 3\mu) (1 - 6\mu) EI}{(1 + 12\mu) (2\mu + 1) L} \quad (2.7.5)$$

O coeficiente μ é o parâmetro de flexocorte e para a disposição das barras |12| da figura (2.34) assume a expressão:

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{A_c}{2 A_d \cos^2 \theta \sin \theta} \quad (2.7.6)$$

A área equivalente (A) que aparece na equação (2.7.1), é obtida considerando-se somente a contribuição das áreas das secções transversais dos cordões superior e inferior e, para a figura (2.34), tem a expressão a seguir.

$$A = 2 A_c \quad (2.7.7)$$

O momento de inércia equivalente (I) é obtido considerando-se somente a influência das áreas das secções transversais dos cordões superior e inferior, conforme demonstração feita na seção (4.1). A equação (4.1.2) particularizada para o caso da figura (2.35), fica:

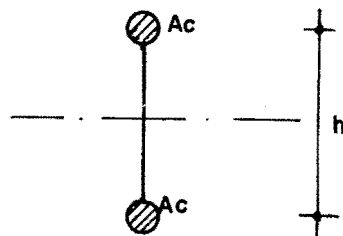


Fig.2.35

$$I = \frac{A_c h^2}{2} \quad (2.7.8)$$

Introduzindo-se nas equações (2.7.1) a (2.7.5) as funções s e c , definidas nas equações (2.7.14) e (2.7.15) os coeficientes de rigidez ficam expressas por:

$$K_{11} = K_{44} = -K_{14} = \frac{EA}{L} \quad (2.7.9)$$

$$K_{23} = K_{26} = -K_{35} = -K_{56} = s(1+c) \frac{EI}{L^2} \quad (2.7.10)$$

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = 2s(1+c) \frac{EI}{L^3} \quad (2.7.11)$$

$$K_{33} = K_{66} = s \frac{EI}{L} \quad (2.7.12)$$

$$K_{36} = s c \frac{EI}{L} \quad (2.7.13)$$

$$s = 4 \frac{(1 + 3\mu)}{(1 + 12\mu)} \quad (2.7.14)$$

$$c = \frac{1 - 6\mu}{4\mu + 2} \quad (2.7.15)$$

2.8. Determinação dos esforços nas barras

Os esforços em uma barra qualquer de uma viga contínua treliçada em X , podem ser determinados a partir da rigidez axial da barra e dos deslocamentos relativos, na direção da barra, dos nós extremos.

A utilização de um programa matricial introduzindo-se modificações nas equações para a matriz de rigidez equivalente, nos carregamentos da viga e nas condições de contorno, permite a determinação dos deslocamentos dos nós, que são utilizados na determinação dos esforços nas barras.

A figura (2.36) mostra a numeração dos nós e barras,

independentes para cada cordão e inclinação das barras diagonais.

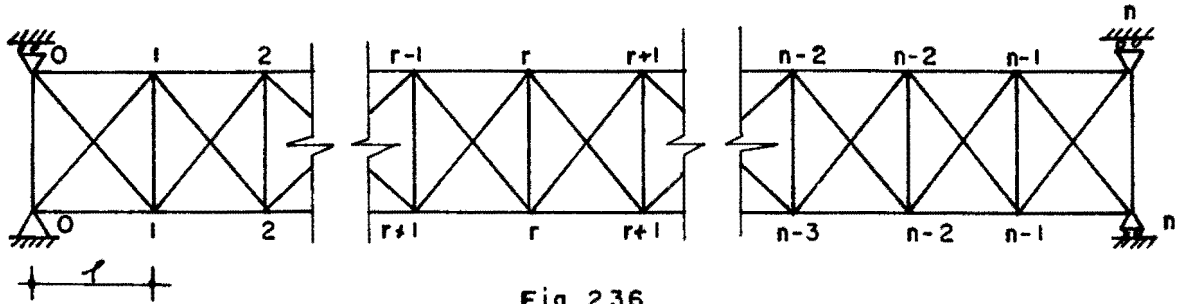


Fig. 2.36

A força em cada uma das barras dos montantes, conforme figuras (2.36) e (2.38), são:

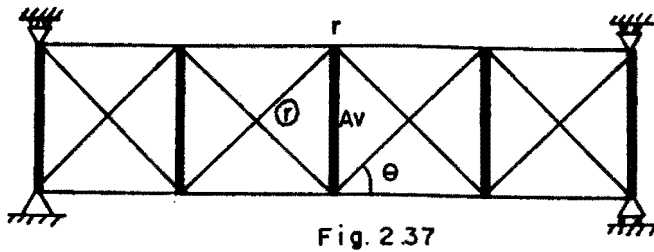


Fig. 2.37

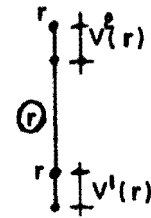


Fig. 2.38

$$F_v(r) = \frac{E A_v}{l\beta/\alpha} (v^2(r) - v^1(r)) \quad (2.8.1)$$

onde a expressão $E A_v / (l\beta/\alpha)$ é a rigidez axial da barra. Os esforços nas barras do cordão superior, conforme figuras (2.39) e (2.40), resultam:

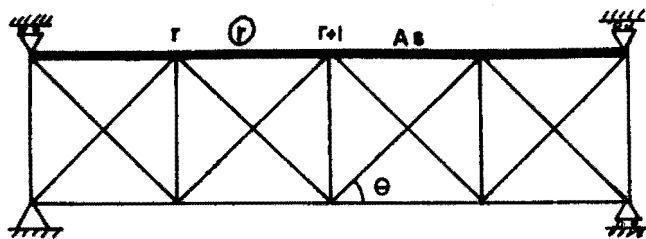


Fig. 2.39

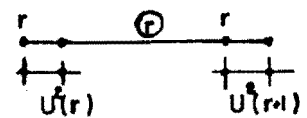


Fig. 2.40

$$F_s(r) = \frac{E A_s}{\ell} (U^2(r+1) - U^2(r)) \quad (2.8.2)$$

Aplicando-se o operador Δr $U(r) = U(r+1) - U(r)$, tem-se:

$$F_s(r) = \frac{E A_s}{\ell} \Delta r U^2(r) \quad (2.8.3)$$

Os esforços nas barras do cordão inferior, conforme figuras (2.41) e (2.42), ficam determinados pelas equações (2.8.4) e (2.8.5).

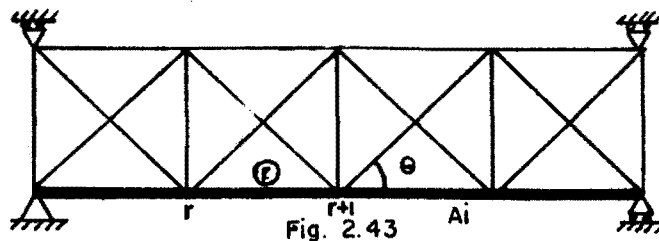


Fig. 2.43

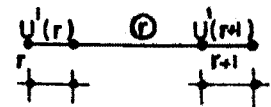


Fig. 2.42

$$F_i(r) = \frac{E A_i}{\ell} (U^1(r+1) - U^1(r)) \quad (2.8.4)$$

Introduzindo-se o operador Δr , resulta:

$$F_i(r) = \frac{E A_i}{\ell} \Delta r U^1(r) \quad (2.8.5)$$

As forças nas barras diagonais com inclinação para a direita, conforme figuras (2.43) e (2.44) são:

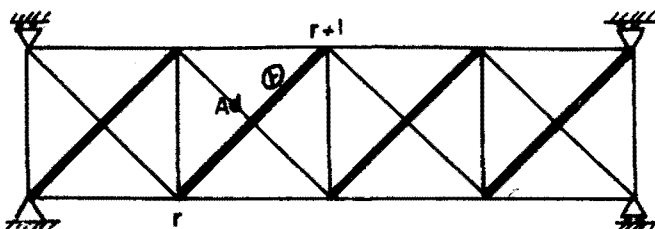


Fig. 2.43

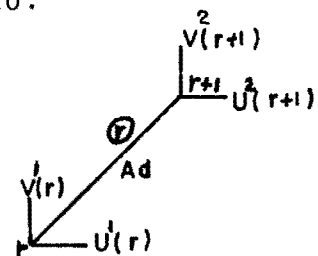


Fig. 2.44

$$F_d(r) = \frac{E A_d \alpha}{\ell} ((U^2(r+1) - U^1(r)) \alpha + (V^2(r+1) - V^1(r)) \beta) \quad (2.8.6)$$

Para as barras diagonais com inclinação para a esquerda, conforme figuras (2.45) e (2.46), as forças ficam expressas por:

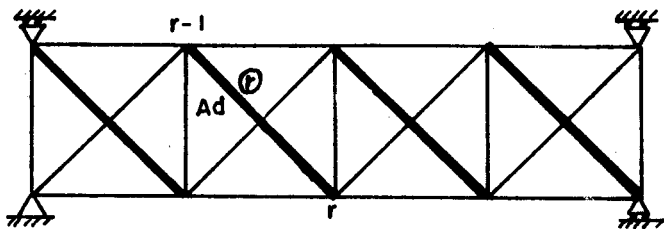


Fig. 2.45

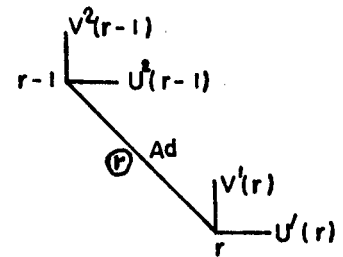


Fig. 2.46

$$F_e(r) = \frac{E A_d \alpha}{\ell} ((U^1(r) - U^2(r-1)) \alpha + (V^2(r-1) - V^1(r)) \beta) \quad (2.8.7)$$

2.9. Programa computacional para resolução de vigas contínuas treliçadas em X

O programa computacional utilizado é um programa comum de pórtico plano em que algumas subrotinas sofrem mudanças.

A matriz de rigidez é montada a partir das características da viga e das equações para os coeficientes de rigidez para o desenvolvimento em séries de Fourier ou coeficientes considerando deformação por corte.

A partir dos esforços nas extremidades das barras, a viga contínua com um número qualquer de apoios e de painéis por vão, se transforma em vigas bi-apoiadas com momentos aplicados, como mostra o exemplo das figuras (2.47) a (2.50).

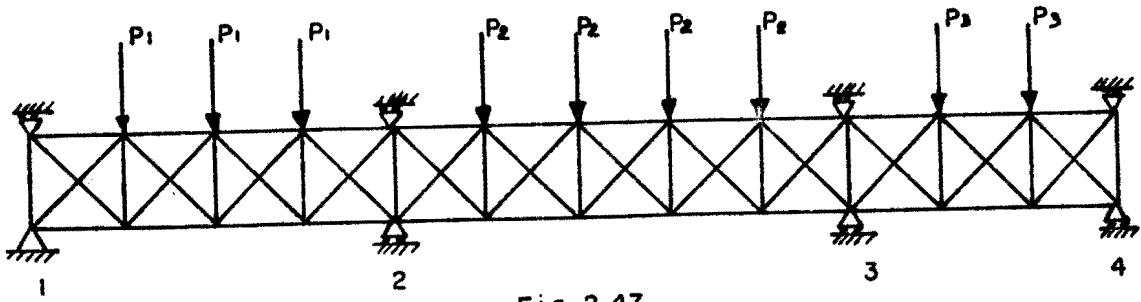


Fig. 2.47

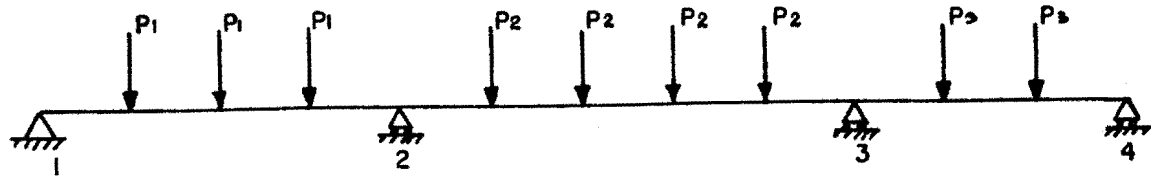


Fig. 2.48

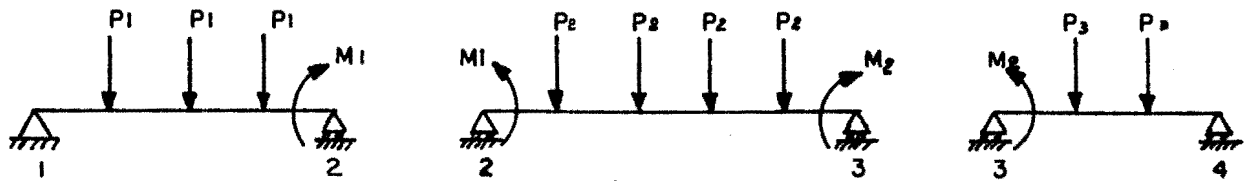


Fig. 2.49

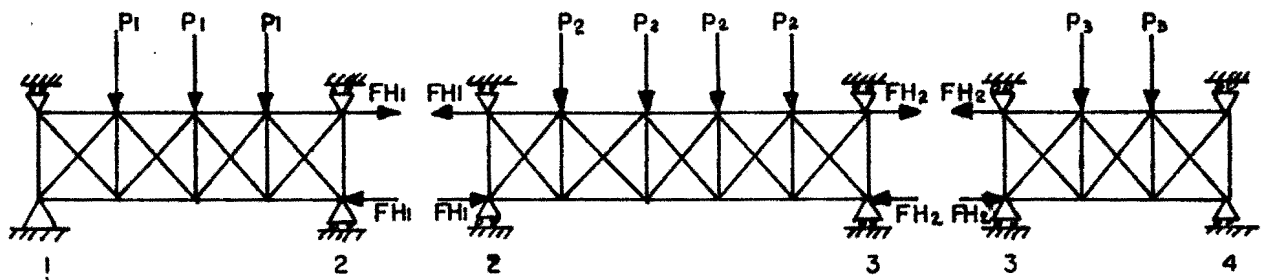


Fig. 2.50

As forças F_{h1} e F_{h2} formam os pares de forças que representam os momentos de extremidade de barra.

Os deslocamentos totais de todos os nos para um vo genérico, são obtidos pela superposição de tantos estados quantos forem os carregamentos e são obtidos utilizando as equações (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.30) a (2.3.48). A figura (2.51) mostra um exemplo simples, mas muito utilizado.

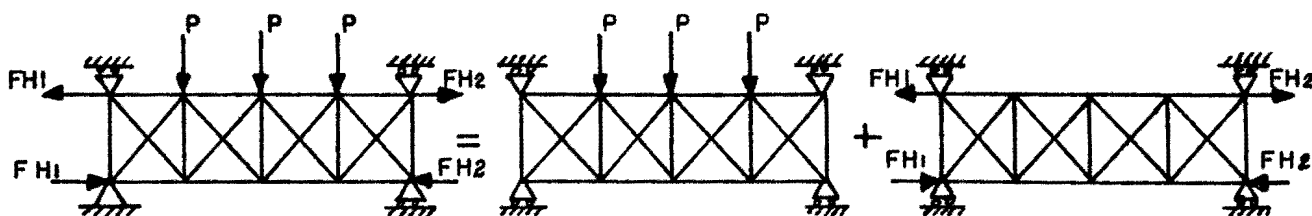


Fig. 2.51

As forças em todas as barras que formam os painéis da viga contínua são calculadas a partir das equações (2.8.1) a (2.8.7), aplicadas a cada vão, utilizando-se os deslocamentos calculados como mostra o parágrafo anterior.

O programa fornece todos os deslocamentos verticais e horizontais de todos os nos da viga treliçada, bem como, as forças em todas as barras.

III - RESOLUÇÃO DE VIGAS CONTÍNUAS WARREN

3.1. Introdução

Este capítulo estuda a solução de vigas contínuas Warren através das suas substituições por vigas prismáticas de secções cheias, com momentos de inércia equivalentes.

O procedimento acima, permite que se considere uma única barra equivalente os vãos entre dois apoios consecutivos, visando a obtenção dos esforços de extremidade de barra, que serão os mesmos para a viga prismática e viga Warren.

As vigas contínuas treliçadas Warren, por superposição de efeitos, ficam subdivididas em vigas isostáticas com os carregamentos iniciais e, mais os carregamentos devido a esforços de extremidade de barra, obtidos pela resolução da viga contínua prismática a partir da matriz de rigidez equivalente, da referência [12], apresentada no item 3.2.

As figuras (3.1) e (3.2) apresentam um exemplo de viga Warren e sua substituição por uma viga prismática de secção cheia, para a obtenção dos esforços de extremidade de barras.

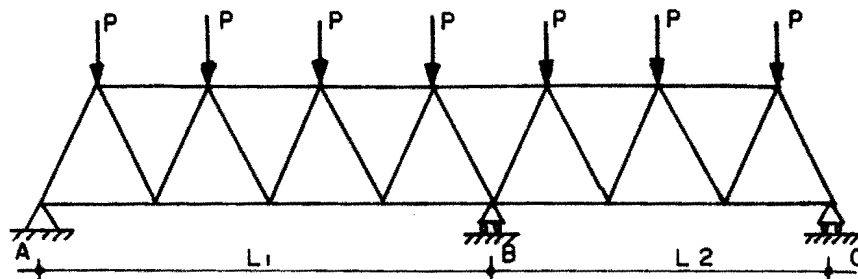
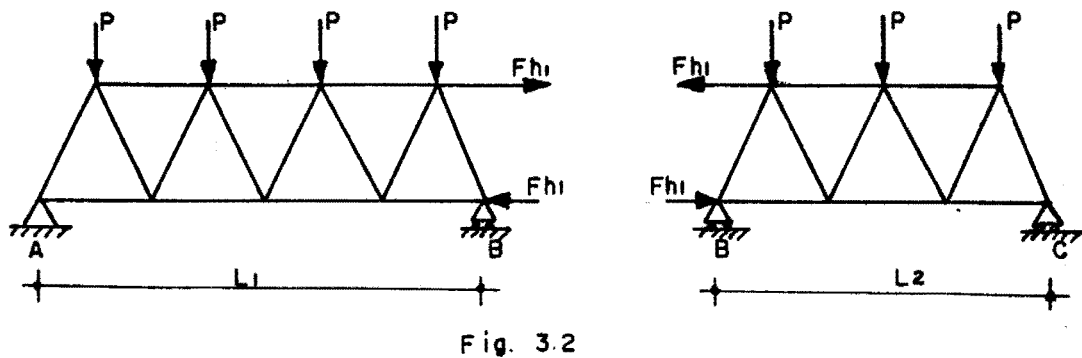
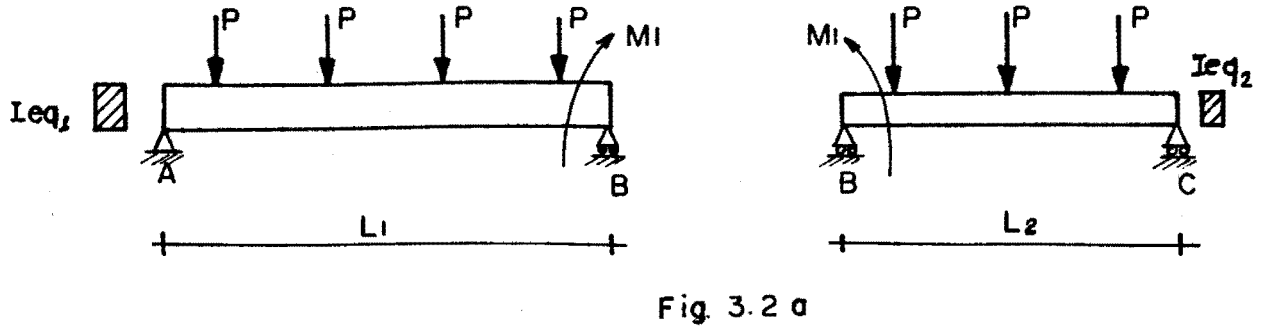
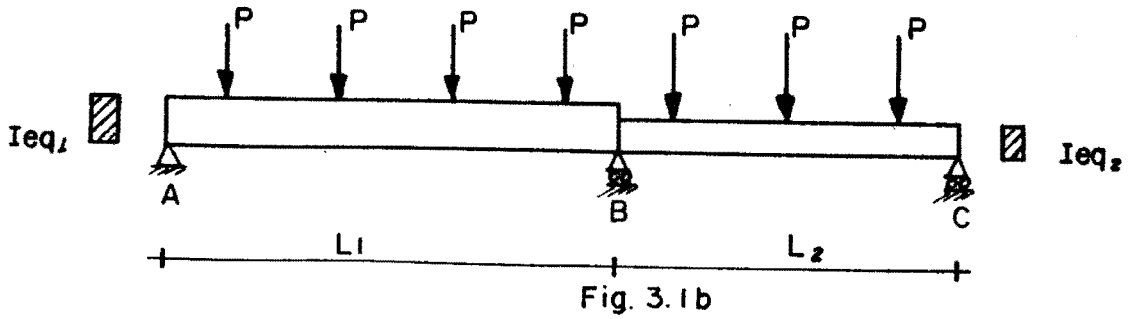


Fig. 3.1



O par de forças F_{h1} afastado de uma distância h , substitui o momento de extremidade M_1 que surge devido a continuidade.

3.2. Coeficientes de rigidez considerando a deformação por corte

Os coeficientes de rigidez para um vão qualquer de viga contínua Warren, como mostram as figuras (3.3) e (3.4), podem ser determinados como sendo contínuos, considerando a deformação por corte e corrigidos pelo parâmetro de flexocorte, ref. [12], que permite levar em conta a deformação pelo cortante em estruturas reticulares.

As expressões para os coeficientes de rigidez da ref [12] são aplicáveis para áreas iguais nos cordões superior e inferior.

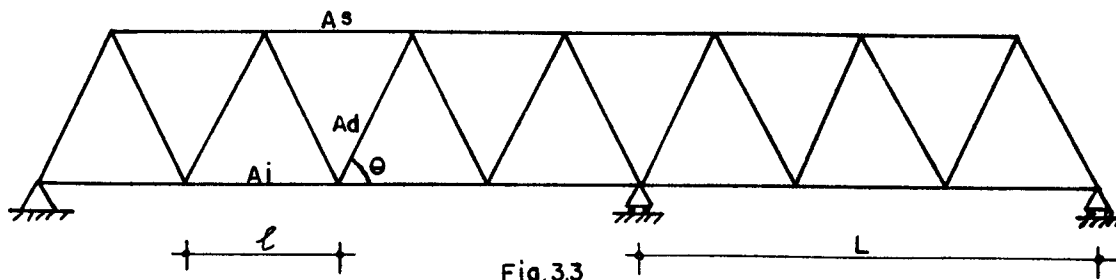


Fig. 3.3

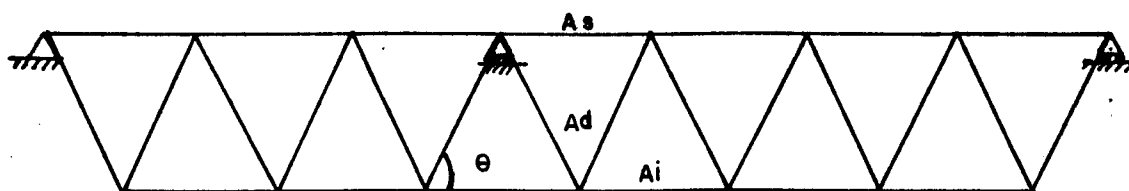


Fig. 3.4

A área equivalente $A_{\bar{e}}$ é considerada somente como a soma das áreas dos cordões superior e inferior, e, é expressa pela equação:

$$A = A_s + A_i \quad (3.2.1)$$

O momento de inércia equivalente, $I_{\bar{e}}$, é obtido considerando-se somente as áreas dos cordões superior e inferior, conforme dedução feita no Capítulo IV e figura (3.5).

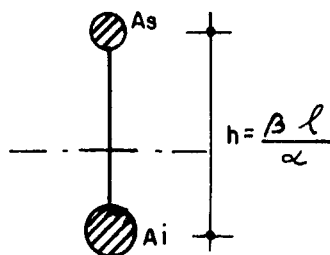


Fig. 3.5

$$I = \frac{\beta^2 l^2}{4 \alpha^2} \frac{A_s A_i}{(A_s + A_i)} \quad (3.2.2)$$

onde $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = \sin \theta$

Os coeficientes de rigidez da referência [12] para áreas A_c iguais nos cordões inferior e superior, são:

$$K_{11} = K_{44} = -K_{14} = \frac{E A}{L} \quad (3.2.3)$$

$$K_{26} = -K_{35} = K_{23} = -K_{56} = s (1 + c) \frac{E I}{L^2} \quad (3.2.4)$$

$$K_{33} = K_{66} = s \frac{E I}{L} \quad (3.2.5)$$

$$K_{36} = s c \frac{E I}{L} \quad (3.2.6)$$

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = 2s (1 + c) EI/L^3 \quad (3.2.7)$$

$$K_{24} = K_{34} = K_{45} = K_{46} = K_{12} = K_{13} = K_{15} = K_{16} = 0 \quad (3.2.8)$$

Em que as funções s e c assumem as seguintes expressões:

$$s = 4 \frac{(1 + 3\mu)}{(1 + 12\mu)} \quad (3.2.9)$$

$$c = \frac{(1 - 6\mu)}{(4\mu + 2)} \quad (3.2.10)$$

onde μ é o parâmetro de flexocorte [12] que, para este caso, assume a forma:

$$\mu = \frac{h^2 A_c}{2L^2 A_d \alpha^2 \beta} \quad (3.2.11)$$

3.3. Momentos de engastamento perfeito

Os momentos de engastamento perfeito [14], são determinados considerando-se o somatório dos momentos de engastamento devido a cada carga, conforme a figura (3.4) e equações (3.2.1) e (3.2.2).

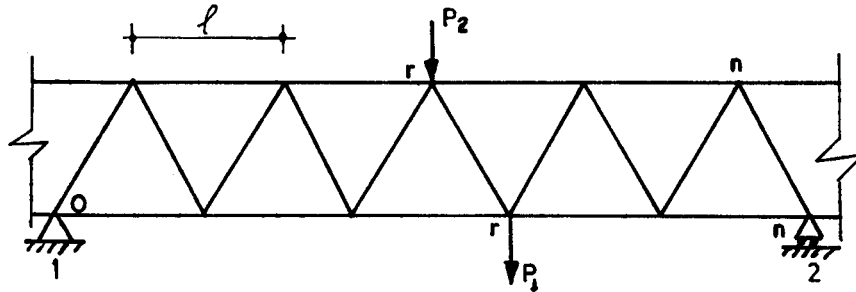


Fig. 3.6

$$M_1 = \sum_{r=1}^n \frac{P_1(r) \cdot r \cdot l \cdot ((n-r) \cdot l)^2}{(n \cdot l)^2} + \frac{P_2(r) \cdot (r-0,5) \cdot l \cdot ((n-r+0,5) \cdot l)^2}{(n \cdot l)^2} \quad (3.3.1)$$

$$M_2 = \sum_{r=1}^n \frac{P_1(r) \cdot (r \cdot l)^2 \cdot (n-r) \cdot l}{(n \cdot l)^2} + \frac{P_2(r) \cdot ((r-0,5) \cdot l)^2 \cdot (n-r+0,5) \cdot l}{(n \cdot l)^2} \quad (3.3.2)$$

Um programa matricial é utilizado para a solução da viga contínua prismática equivalente, conforme referencia o item (3.1), e com os momentos de extremidade de barra, volta-se à viga contínua treliçada Warren e por superposição de efeitos, ela fica subdividida em vigas isostáticas bi-apoiadas, conforme mostra o exemplo das figuras (3.1) e (3.2).

3.4. Determinação das séries de Fourier para os deslocamentos e cargas aplicadas

3.4.1. Introdução

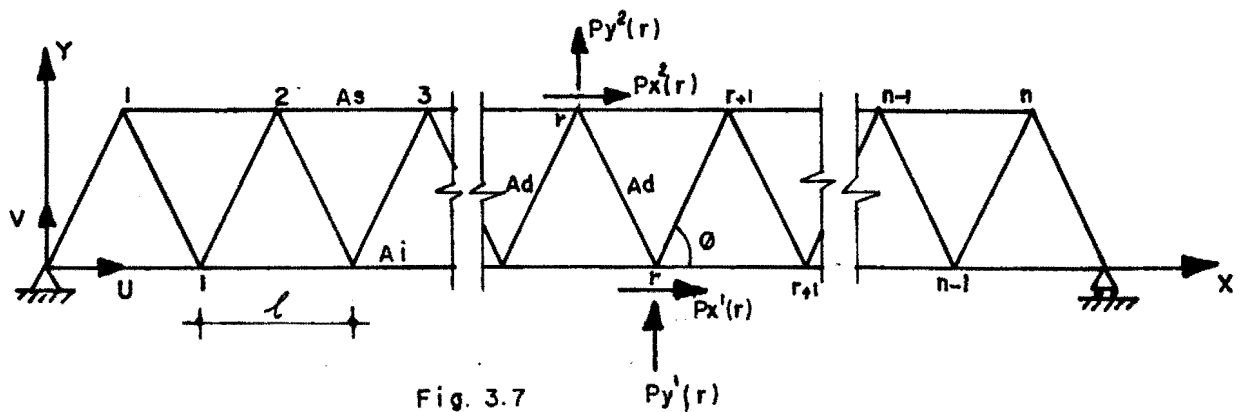
As equações para os deslocamentos são expressas em \bar{s}

ries finitas de Fourier cujos coeficientes ficam determinados a partir da montagem e resolução de um sistema de equações de equilíbrio para um n \bar{o} r do interior do v \tilde{a} o.

3.4.2. Equa \tilde{c} oes de equil \tilde{b} rio

As componentes das for \tilde{c} as nas barras podem ser expressas a partir dos deslocamentos relativos dos n \bar{o} s extremos da barra, conforme a equa \tilde{c} ao (2.3.1).

A figura (3.7) mostra um v \tilde{a} o gen \tilde{e} rico com n pain \tilde{e} is indicando todas as caracter \tilde{i} sticas e nomenclaturas.



As expressões e operadores diferenciais utilizados mais adiante, são:

$$a_1 = \frac{l}{2 E A_d \alpha \beta^2} \quad (3.4.1)$$

$$a_2 = \frac{2 A_d \alpha^3}{A_s} \quad (3.4.2)$$

$$a_3 = \frac{2 A_d \alpha^3}{A_i} \quad (3.4.3)$$

$$a_4 = \frac{l}{E A_s} \quad (3.4.4)$$

$$a_5 = \frac{\ell}{E A_j} \quad (3.4.5)$$

$$\alpha = \cos \theta \quad \beta = \sin \theta \quad (3.4.6)$$

$$\bar{\Delta} r U(r) = U(r+1) - 2U(r) + U(r-1) \quad (3.4.7)$$

$$\nabla r U(r) = U(r) - U(r-1) \quad (3.4.8)$$

$$\Delta r U(r) = U(r+1) - U(r) \quad (3.4.9)$$

O estudo do equilíbrio para um nó r do cordão superior na direção x do eixo global de coordenadas, a partir da equação (2.2.1) e figura (3.8), resulta:

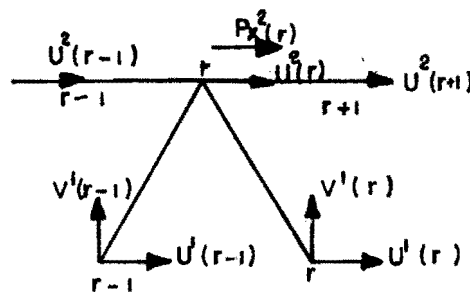


Fig. 3.8

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{E A_s}{\ell^3} \ell^2 U^2(r) + 2 \frac{E A_d \ell^2}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta) 4} U^2(r) - \frac{E A_s}{\ell^3} \ell^2 (U^2(r-1) + U^2(r+1)) + \\
 & - \frac{E A_d \ell^2}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta) 4} (U^1(r-1) + U^1(r)) + \frac{E A_d}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta) 4} \frac{\ell^2 \sin \theta}{\cos \theta} (v^1(r) - v^1(r-1)) = \\
 & = P_x^2(r)
 \end{aligned}$$

A simplificação dos termos em ℓ e utilização dos operadores $\bar{\Delta} r$ e ∇r , expressos pelas equações (3.4.7) e (3.4.8), fica:

$$\left(-\frac{E A_s}{\ell} \bar{\Delta r} + \frac{4 E A_d \cos^3 \theta}{\ell}\right) U^2(r) + \frac{2 E A_d \cos^3 \theta}{\ell} (\nabla r - 2) U^1(r) + \frac{2 E A_d \cos^3 \theta}{\ell} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \nabla r V^1(r) = P_x^2(r)$$

Dividindo-se todos os termos por $E A_s / \ell$ e introduzindo-se o coeficiente a_2 expresso pela equação (3.4.2), acha-se:

$$(-\bar{\Delta r} + 2a_2) U^2(r) + a_2 (\nabla r - 2) U^1(r) + a_2 \tan \theta \nabla r V^1(r) = \frac{\ell}{E A_s} P_x^2(r)$$

Com a utilização dos coeficientes a_4 , α e β , conforme equações (3.4.4) e (3.4.6), resulta na expressão final para a equação de equilíbrio na direção X dos eixos globais.

$$a_2 (\nabla r - 2) U^1(r) + a_2 \frac{\beta}{\alpha} \nabla r V^1(r) + (-\bar{\Delta r} + 2a_2) U^2(r) + (0) V^2(r) = a_4 P_x^2(r)$$

(3.4.10)

A equação de equilíbrio para um nō genérico r do cordão superior, na direção Y dos eixos globais de coordenadas, é obtida aplicando-se a equação (2.2.1) ao esquema apresentado na figura (3.9).

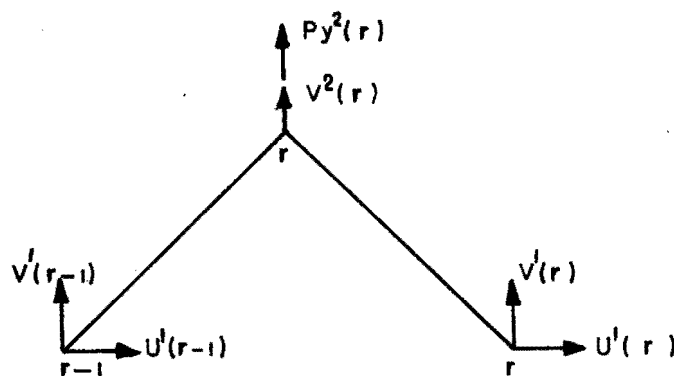


Fig. 39

$$\frac{2 E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin^2 \theta}{4 \cos^2 \theta} v^2(r) + \frac{E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin^2 \theta}{4 \cos^2 \theta} (v^1(r) + v^1(r-1)) +$$

$$\frac{E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin \theta}{4 \cos \theta} (u^1(r) - u^1(r-1)) = p_y^2(r)$$

O emprego do operador ∇r , expresso pela equação (3.4.8), conduz a:

$$\frac{4 E A_d \sin^2 \theta \cos \theta}{\ell} v^2(r) + \frac{2 E A_d \sin^2 \theta \cos \theta}{\ell} (\nabla r - 2) v^1(r) +$$

$$\frac{2 E A_d \sin \theta \cos^2 \theta}{\ell} \nabla r u^1(r) = p_y^2(r)$$

A aplicação dos coeficientes a_1 , α e β , conforme equações (3.4.1) e (3.4.6), resulta na equação final para o equilíbrio na direção Y global de um nó genérico r do cordão superior.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \nabla r\right) u^1(r) + (\nabla r - 2) v^1(r) + (0) u^2(r) + (2) v^2(r) = a_1 p_y^2(r) \quad (3.4.11)$$

O equilíbrio para um nó genérico r do cordão inferior, na direção x dos eixos globais, é obtido a partir da equação (2.2.1) e figura (3.10), conforme abaixo.

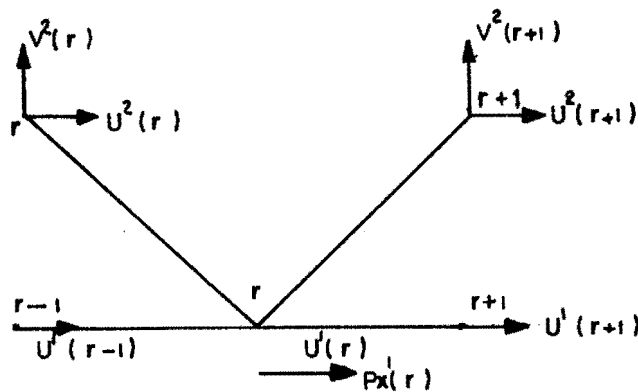


Fig. 3.10

$$\frac{E A_i}{\ell^3} \ell^2 (2 U^1(r) - U^1(r-1) - U^1(r+1)) + \frac{2 E A_d}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2}{4} U^1(r) - \frac{E A_d}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta)} \cdot$$

$$\frac{\ell^2}{4} (U^2(r) + U^2(r+1)) - \frac{E A_d}{\ell^3 / (8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin \theta}{4 \cos \theta} (V^2(r+1) - V^2(r)) = P_x^1(r)$$

A introdução dos coeficientes a_3 e a_5 , expressos pelas equações (3.4.3) e (3.4.5), e simplificação dos termos da igualdade acima, resulta:

$$2 U^1(r) - U^1(r-1) - U^1(r+1) + 2 a_3 U^1(r) - a_3 (U^2(r) + U^2(r+1)) -$$

$$a_3 \frac{\beta}{\alpha} (V^2(r+1) - V^2(r)) = a_5 P_x^1(r)$$

Aplicando-se os operadores $\bar{\Delta}r$ e Δr , conforme equações (3.4.7) e (3.4.9), tem-se a expressão final para o equilíbrio, na direção X global, de um n \bar{o} genérico r do interior, para o cordão inferior.

$$(-\bar{\Delta}r + 2a_3) U^1(r) + (0) V^1(r) - (a_3 (\Delta r + 2)) U^2(r) - (a_3 \frac{\beta}{\alpha} \Delta r) V^2(r) = a_5 P_x^1(r)$$

(3.4.12)

A equação de equilíbrio para um n \bar{o} r genérico do cordão inferior, na direção y dos eixos globais, é obtida utilizando-se a equação (2.2.1) e figura (3.11).

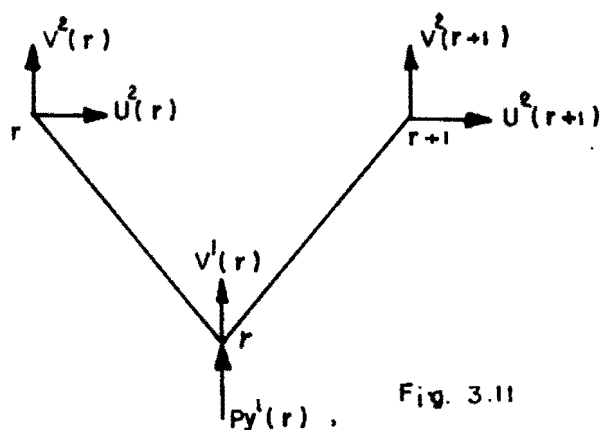


Fig. 3.11

$$\frac{-E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin \theta}{4 \cos \theta} (U_{(r+1)} - U_{(r)}) + \frac{E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin^2 \theta}{4 \cos^2 \theta} (-V^2_{(r+1)} - V^2_{(r)}) + \frac{E A_d}{\ell^3/(8 \cos^3 \theta)} \frac{\ell^2 \sin^2 \theta}{4 \cos^2 \theta} V^1_{(r)} = p^1_{y(r)}$$

A utilização do coeficiente a_1 , expresso pela equação (3.4.1), e simplificação da igualdade acima, fica:

$$2 V^1_{(r)} - \cotg \theta (U^2_{(r+1)} - U^2_{(r)}) - (V^2_{(r+1)} + V^2_{(r)}) = a_1 p^1_{y(r)}$$

O emprego das definições de α , β e Δr , equações (3.4.6) e (3.4.9), determina a equação final para o equilíbrio na direção Y global, de um nó genérico r do interior do cordão inferior.

$$(0) U^1_{(r)} + (2) V^1_{(r)} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \Delta r\right) U^2_{(r)} - (\Delta r + 2) V^2_{(r)} = a_1 p^1_{y(r)} \quad (3.4.13)$$

A reunião das equações de equilíbrio, (3.4.10) a (3.4.13), segundo as duas direções globais, para nós genéricos r de ambos os cordões, forma o sistema de equações a seguir.

$$\begin{vmatrix} (-\Delta r + 2a_3) & 0 & -a_3(\Delta r + 2) & -a_3 \frac{\beta}{\alpha} \Delta r \\ 0 & 2 & \frac{\alpha}{\beta} \Delta r & -(\Delta r + 2) \\ a_2(\nabla r - 2) & a_2 \frac{\beta}{\alpha} \nabla r & (-\Delta r + 2a_2) & 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} \nabla r & (\nabla r - 2) & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U^1(r) \\ V^1(r) \\ U^2(r) \\ V^2(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_5 P_x^1(r) \\ a_1 P_y^1(r) \\ a_4 P_x^2(r) \\ a_1 P_y^2(r) \end{Bmatrix} \quad (3.4.14)$$

3.4.3. Equações dos deslocamentos e cargas aplicadas desenvolvidas em séries de Fourier

A escolha das séries em cossenos para os deslocamentos horizontais, e séries em senos para os deslocamentos verticais, é justificada pelo cumprimento das condições de contorno e por apresentarem as mesmas variações que deslocamentos correspondentes ao longo da viga.

As figuras (3.12), (3.13) e (3.14) mostram, respectivamente, em uma viga Warren de um vão, os desenvolvimentos de uma função seno e função cosseno:

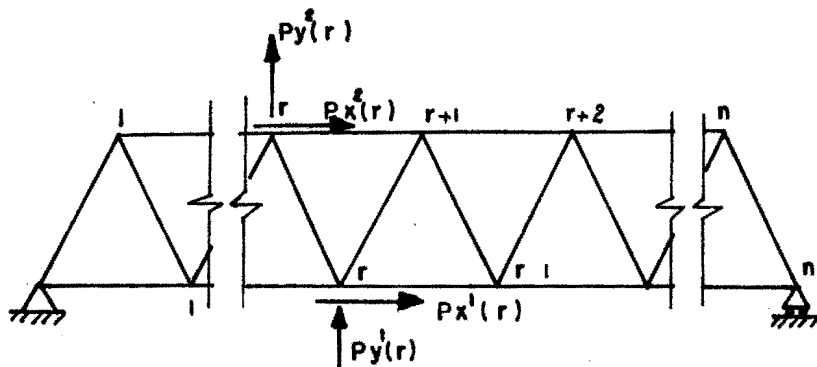


Fig. 3.12



Fig. 3.13

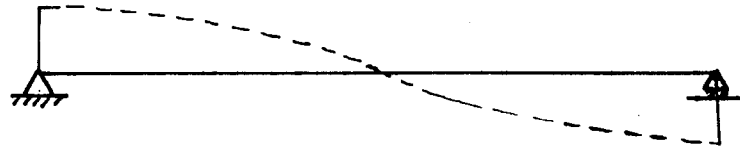


Fig. 3.14

As expressões dos deslocamentos em séries de Fourier [14], que cumprem todas as condições de contorno, são:

$$U^1(r) = \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.15)$$

$$U^2(r) = \sum_{k=1}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{l}{2} \right) \quad (3.4.16)$$

$$V^1(r) = \sum_{k=1}^{n-1} V_k^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.17)$$

$$V^2(r) = \sum_{k=1}^{n-1} V_k^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{l}{2} \right) \quad (3.4.18)$$

Os coeficientes U_k e V_k são determinados mais adiante pela solução das equações de equilíbrio substituindo-se os deslocamentos e cargas pelas suas expansões em séries.

Os índices 1 e 2 que aparecem nas equações dos deslocamentos, se referem aos cordões inferior e superior, respectivamente. A defasagem de $l/2$ nas expressões para o cordão superior é devido a posição dos nós.

As expansões em séries de Fourier para os carregamentos [1], são:

$$P_x^1(r) = \sum_{k=0}^n P_{xk}^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.19)$$

$$P_x^2(r) = \sum_{k=1}^n P_{xk}^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{l}{2} \right) \quad (3.4.20)$$

$$P_y^1(r) = \sum_{k=1}^n P_{yk}^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.21)$$

$$p_{yk}^2(r) = \sum_{k=1}^n p_{yk}^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \quad (3.4.22)$$

Os coeficientes das séries dos carregamentos, adotando-se um procedimento análogo ao feito na equação (2.3.12), ficam:

$$p_{xk}^1 = \frac{2 Wk}{n} \sum_r p_{x(r)}^1 \cos \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.23)$$

$$p_{yk}^1 = \frac{2 Wk}{n} \sum_r p_{y(r)}^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (3.4.24)$$

$$p_{xk}^2 = \frac{2 Wk}{n} \sum_r p_{x(r)}^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \quad (3.4.25)$$

$$p_{yk}^2 = \frac{2 Wk}{n} \sum_r p_{y(r)}^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \quad (3.4.26)$$

Onde a função peso Wk assume valor $1/2$ para $k = 0$ ou n e valor 1 para os demais valores de k .

Substituindo-se as equações (3.4.15) e (3.4.18) no sistema (3.4.14), resulta um sistema cujas incógnitas são os coeficientes das séries dos deslocamentos.

A substituição dos operadores $\bar{\Delta}r$ e Δr , conforme equações (3.4.7) e (3.4.9), na primeira equação do sistema, resulta:

$$\begin{aligned} & (-\bar{\Delta}r + 2a_3) U^1(r) - a_3 (\Delta r + 2) U^2(r) - a_3 \tan \theta \Delta r V^2(r) = a_5 P_x^1(r) \\ & - U^1(r-1) + 2 U^1(r) - U^1(r+1) + 2a_3 U^1(r) - a_3 U^2(r+1) - U^2(r) + 2 U^2(r) \\ & - a_3 \tan \theta (V^2(r+1) - V^2(r)) = a_5 P_x^1(r) \end{aligned}$$

A introdução das equações (3.4.15) e (3.4.18), fica:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi}{n} (r-1) + 2 \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} - \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi}{n} (r+1) + 2a_3 \\
& \sum_{k=0}^n U_k^1 \cos \frac{k\pi r}{n} - a_3 \left(\sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r+1 - \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \right) \\
& - a_3 \left(\sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r+1 - \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=0}^n U_k^2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \right) - a_3 \tan \theta \left(\sum_{k=0}^n V_k^2 \right. \\
& \left. \sin \frac{k\pi}{n} \left(r+1 - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^n V_k^2 \sin \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2}\right) \right) = a_5 \sum_{k=0}^n P_{xk}^1 \cos \frac{k\pi r}{n}
\end{aligned}$$

A aplicação das propriedades de soma de senos ou cossenos de arcos diferentes, equações (2.3.24), e consideração da igualdade das séries termo a termo, determinam uma nova forma para a primeira equação do sistema (3.4.14), onde as incógnitas são os coeficientes das séries dos deslocamentos.

$$U_k^1 \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{2n} + 2a_3 \right) - 2a_3 U_k^2 \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) - 2a_3 \tan \theta V_k^2 \sin \frac{k\pi}{2n} = a_5 P_{xk}^1$$

Fazendo-se $\sigma_k = 1 - \cos \frac{k\pi}{n}$, tem-se:

$$(\sigma_k + a_3) U_k^1 - \left(a_3 \cos \frac{k\pi}{2n} \right) U_k^2 - \left(a_3 \frac{\beta}{\alpha} \sin \frac{k\pi}{2n} \right) V_k^2 = \frac{a_5}{2} P_{xk}^1 \quad (3.4.27)$$

A segunda equação do sistema (3.4.14), com a introdução do operador Δr expresso pela equação (3.4.9), resulta:

$$2 V^1(r) - \cotg \theta \Delta r U^2(r) - (\Delta r + 2) V^2(r) = a_1 P_y^1(r)$$

$$2 V^1(r) - \cotg \theta (U^2(r+1) - U^2(r)) - (V^2(r+1) + V^2(r)) = a_1 P_y^1(r)$$

A representação dos deslocamentos em séries de Fourier na igualdade acima, é obtida introduzindo-se as equações (3.4.16) a (3.4.18) e (3.4.21).

$$2 \sum_{k=0}^n V_k^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} - \operatorname{cotg} \theta \left(\sum_{k=0}^n U_k^2 \left(\cos \frac{k\pi}{n} \left(r + \frac{1}{2} \right) - \cos \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n V_k^2 \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r + \frac{1}{2} \right) + \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2} \right) \right) \right) = a_1 \sum_{k=0}^n P_{yk}^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

A introdução das propriedades das somas de senos e cossenos, equação (2.3.24), resulta:

$$\sum_{k=0}^n \left(V_k^1 + \operatorname{cotg} \theta \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} U_k^2 - \cos \frac{k\pi}{2n} V_k^2 \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} = \frac{a_1}{2} \sum_{k=0}^n P_{yk}^1 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

A igualdade das séries termo a termo conduz à expressão final para a segunda equação do sistema (3.4.14).

$$V_k^1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} \right) U_k^2 - \cos \frac{k\pi}{2n} V_k^2 = \frac{a_1}{2} P_{yk}^1 \quad (3.4.28)$$

As outras duas equações do sistema (3.4.14), através de um procedimento análogo as anteriores, pela substituição das equações dos deslocamentos e cargas por suas expressões equivalentes em séries, resulta:

$$\left(-a_2 \cos \frac{k\pi}{2n} \right) U_k^1 + \left(a_2 \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} \right) V_k^1 + (a_2 + \sigma_k) U_k^2 = \frac{a_4}{2} P_{xk}^2 \quad (3.4.29)$$

$$- \left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} \right) U_k^1 - \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) V_k^1 + V_k^2 = \frac{a_1}{2} P_{yk}^2 \quad (3.4.30)$$

A reunião das equações (3.4.27) a (3.4.30) forma um sistema de equações derivado do sistema de equações de equilíbrio, cujas incógnitas são os coeficientes das séries dos deslocamentos.

$$\begin{vmatrix} \sigma_k + a_3 & 0 & -a_3 \cos \frac{k\pi}{2n} & -a_3 \frac{\beta}{\alpha} \sin \frac{k\pi}{2n} \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{k\pi}{2n} & -\cos \frac{k\pi}{2n} \\ -a_2 \cos \frac{k\pi}{2n} & a_2 \frac{\beta}{\alpha} \sin \frac{k\pi}{2n} & \sigma_k + a_2 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{k\pi}{2n} & -\cos \frac{k\pi}{2n} & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \\ U_k^2 \\ V_k^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{a_5}{2} p_{xk}^1 \\ \frac{a_1}{2} p_{yk}^1 \\ \frac{a_4}{2} p_{xk}^2 \\ \frac{a_1}{2} p_{yk}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.4.31)$$

O sistema tem determinante nulo para $k = 0$, mas esse inconveniente pode ser resolvido com adequadas condições de contorno. Restringindo-se o deslocamento horizontal no apoio da esquerda, obtêm-se os valores dos coeficientes para $k = 0$ para o primeiro vão.

$$\begin{aligned} U_0^1 &= 0 = \sum_{k=0}^n U_k^1 = U_0^1 + \sum_{k=1}^n U_k^1 = 0 \\ U_0^1 &= - \sum_{k=1}^n U_k^1 \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

Para $k = 0$ na primeira equação do sistema (3.4.31), resulta para U_0^2 :

$$U_0^2 = U_0^1 - \frac{a_5}{2 a_3} p_{x0}^1 \quad (3.4.33)$$

A equação final para U_0^2 no primeiro vão, é obtida substituindo-se U_0^1 da equação (3.4.33) pela sua expressão equivalente conforme equação (3.4.32).

$$U_0^2 = \sum_{k=1}^n U_k^1 - \frac{a_5}{2 a_3} p_{x0}^1 \quad (3.4.34)$$

A singularidade para $k = 0$ no sistema (3.4.31), para o segundo vão em diante, é solucionada como no capítulo anterior, pela compatibilidade dos deslocamentos para os nós comuns a dois vãos adjacentes, resultando para U_0^1 :

$$U_0^1 = U_1^{i-1}(n) - \sum_{k=1}^n U_k^1 \quad (3.4.35)$$

A expressão para U_0^2 é obtida a partir da equação (3.4.33) substituindo-se U_0^1 por sua expressão segundo a equação (3.4.35).

$$U_0^2 = U_1^{i-1}(n) - \sum_{k=1}^n U_k^1 - \frac{a_5}{2 a_3} P_{x0}^1 \quad (3.4.36)$$

A solução do sistema de equações para os coeficientes das séries dos deslocamentos é obtida pelo algoritmo de Gauss. Para facilitar a solução, o problema é dividido em duas partes, uma só para cargas verticais arbitrárias e outra, para cargas horizontais arbitrárias.

O procedimento acima permite calcular os coeficientes das séries dos deslocamentos para cada carregamento individualmente e, para carregamentos combinados basta fazer a superposição.

A fim de facilitar as operações, são feitas as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} A_k &= \sigma_k + a_3 \\ B_k &= a_3 \cos \frac{k\pi}{2n} \\ C_k &= a_3 \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} \\ D_k &= \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} \\ E_k &= \cos \frac{k\pi}{2n} \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

$$\begin{aligned}
 F_k &= a_2 \cos \frac{k\eta}{2n} \\
 G_k &= a_2 \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{k\eta}{2n} \\
 H_k &= \sigma_k + a_2 \\
 P_1 &= \frac{a_5}{2} p_{xk}^1 \\
 P_2 &= \frac{a_1}{2} p_{yk}^1 \\
 P_3 &= \frac{a_4}{2} p_{xk}^2 \\
 P_4 &= \frac{a_1}{2} p_{yk}^2
 \end{aligned} \tag{3.4.37}$$

O sistema de equações para cargas verticais, após fazer a substituição dos termos pelas suas expressões equivalentes, conforme equações (3.4.37), resulta:

$$\begin{vmatrix}
 A_k & 0 & -B_k & -C_k \\
 0 & 1 & D_k & -E_k \\
 -F_k & G_k & H_k & 0 \\
 -D_k & -E_k & 0 & 1
 \end{vmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_k^1 \\
 V_k^1 \\
 U_k^2 \\
 V_k^2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 P_2 \\
 0 \\
 P_4
 \end{Bmatrix} \tag{3.4.38}$$

A triangularização de Gauss e retrossubstituição, conduzem a:

$$V_k^2 = \frac{G_k P_2 A_k (D_k E_k A_k - B_k D_k) + (-G_k D_k A_k - B_k F_k + A_k H_k)(E_k P_2 A_k + P_k A_k)}{-(A_k E_k G_k - C_k F_k)(D_k E_k A_k - B_k D_k) + (-G_k D_k A_k - B_k F_k + A_k H_k)(-A_k E_k - C_k D_k + A_k)} \tag{3.4.39}$$

$$U_k^2 = \frac{-G_k P_2 A_k + (C_k F_k - E_k G_k A_k) V_k^2}{(-G_k D_k A_k - B_k F_k + A_k H_k)} \quad (3.4.40)$$

$$V_k^1 = P_2 + E_k V_k^2 - D_k U_k^2 \quad (3.4.41)$$

$$U_k^1 = \frac{C_k V_k^2 + B_k U_k^2}{A_k} \quad (3.4.42)$$

Para cargas horizontais, o sistema (3.4.38) muda somente o vetor das cargas, que fica:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.4.43)$$

A triangularização de Gauss e retrosubstituição, fornecem as expressões para o cálculo dos coeficientes das séries dos deslocamentos.

$$V_k^2 = \frac{D_k P_1 (-G_k D_k A_k - F_k B_k + A_k H_k) - (F_k P_1 + P_3 A_k)(D_k E_k A_k - D_k B_k)}{(F_k C_k - A_k E_k G_k)(A_k D_k E_k - D_k B_k) + (-G_k D_k A_k - F_k B_k + A_k H_k)(-A_k E_k - D_k C_k + A_k)} \quad (3.4.44)$$

$$U_k^2 = \frac{(F_k P_1 + A_k P_3) + (F_k C_k - A_k E_k G_k) V_k^2}{(-G_k D_k A_k - F_k B_k + A_k H_k)} \quad (3.4.45)$$

$$V_k^1 = E_k V_k^2 - D_k U_k^2 \quad (3.4.46)$$

$$U_k^1 = \frac{P_1 + C_k V_k^2 + B_k U_k^2}{A_k} \quad (3.4.41)$$

3.4.4. Coeficientes das séries das cargas aplicadas

Os coeficientes para as séries das cargas são obtidos através das equações (3.4.23) a (3.4.26) e para os carregamentos mais usuais são deduzidos a seguir.

a) Para cargas uniformemente distribuídas nos nós, conforme mostra a figura (3.15), o coeficiente P_k^1 é obtido da mesma maneira que as equações (3.4.24) e resulta:

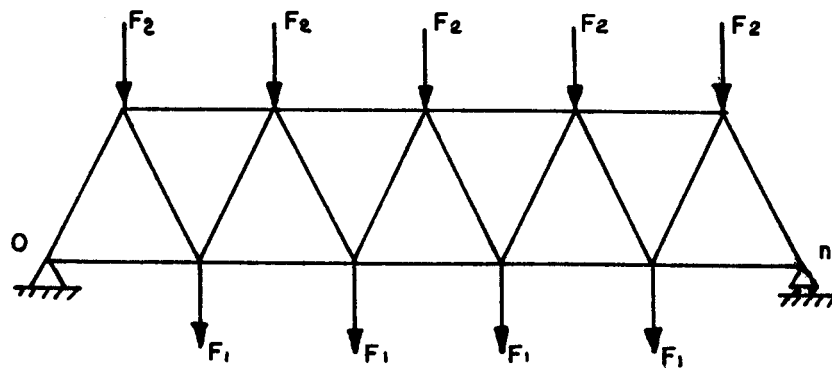


Fig. 3.15

$$P_{yk}^1 = \frac{2 F_1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

(3.4.48)

$$P_{yk}^1 = \frac{2 F_1}{n} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2n} \quad k = 1, 3, \dots, n \text{ (ímpares)}$$

A determinação dos coeficientes P_{yk}^2 a partir da aplicação da equação (3.4.26) resulta:

$$P_{yk}^2 = \frac{2 F_2}{n} \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(r - \frac{1}{2} \right)$$

Resolvendo-se o somatório [10], tem-se:

$$p_{yk}^2 = \frac{2 F_2}{n} \operatorname{cosec} \frac{k\pi}{2n} \quad k=1,3,\dots,n \text{ (ímpares)} \quad (3.4.49)$$

Por não ter cargas horizontais aplicadas, então:

$$p_{xk}^1 = p_{xk}^2 = 0 \quad (3.4.50)$$

b) Para um carregamento equivalente a momentos aplicados nas extremidades, como mostra a figura (3.16), os coeficientes das séries das cargas são determinados pela aplicação das equações (3.4.23) e (3.4.25).

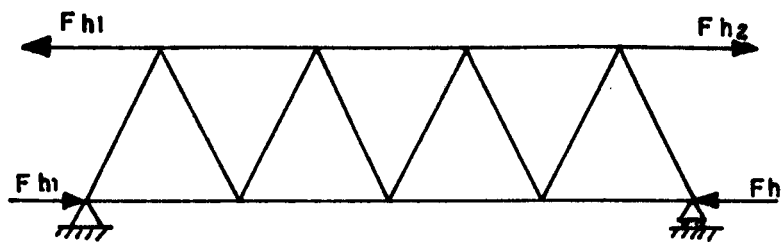


Fig. 3.16

$$p_{xk}^1 = \frac{2 W_k}{n} (F_{h1} - F_{h2} \cos \frac{k\pi}{n}) \quad (3.4.51)$$

$$p_{xk}^2 = \frac{2 W_k}{n} (F_{h2} \cos \frac{k\pi}{n} (n - \frac{1}{2}) - F_{h1} \cos \frac{k\pi}{2n}) \quad (3.4.52)$$

$$p_{yk}^1 = p_{yk}^2 = 0 \quad (3.4.53)$$

c) Para cargas concentradas, como mostra a figura (3.17), os coeficientes são obtidos diretamente pela aplicação das equações (3.4.23) e (3.4.26), são:

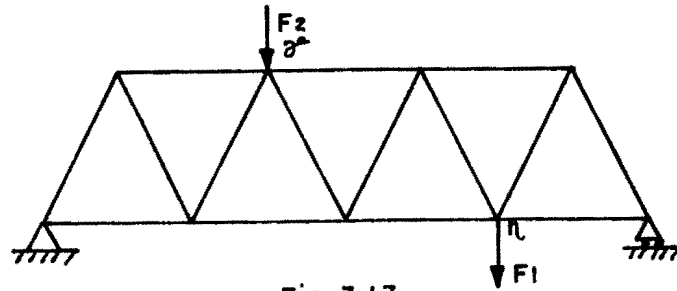


Fig. 3.17

$$P_{xk}^1 = P_{xk}^2 = 0 \quad (3.4.54)$$

$$P_{yk}^1 = \frac{2 F_1}{n} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \quad (3.4.55)$$

$$P_{yk} = \frac{2 F_2}{n} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.56)$$

onde n e γ são os pontos de aplicação das cargas F_1 e F_2 , respectivamente.

3.5. Determinação dos esforços nas barras de uma viga treliçada Warren

Os esforços nas barras de uma viga contínua treliçada Warren, conforme figuras (3.18) e (3.19), são determinados conhecendo-se os deslocamentos de todos os nós e rigidezes axiais.

As figuras (3.18) e (3.19) mostram as numerações independentes para os nós dos cordões superior e inferior e, como é feita a numeração das barras em cada vão.

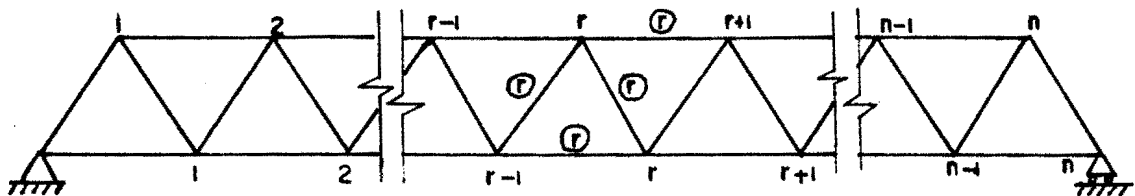


Fig. 3.18

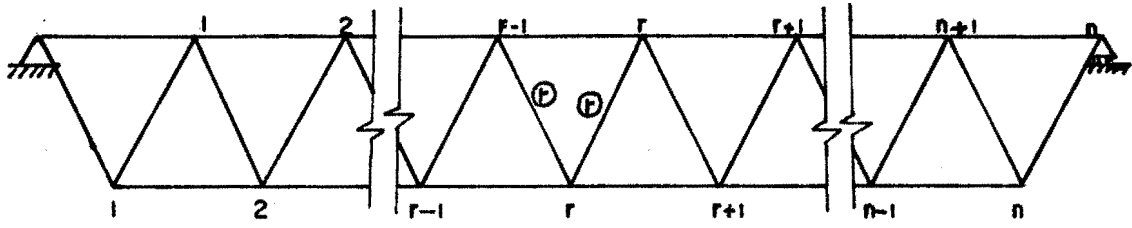


Fig. 3.19

A força em cada uma das barras do cordão superior, conforme figuras (3.20) e (3.21), é expressa por:

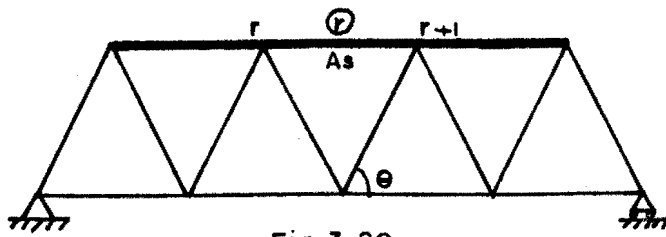


Fig. 3.20

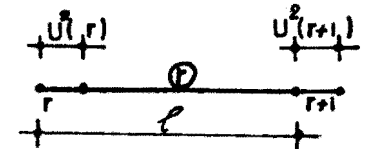


Fig. 3.21

$$F_s(r) = \frac{E A_s}{l} (U^2(r+1) - U^2(r)) \quad (3.5.1)$$

Aplicando-se o operador Δr , fica:

$$F_s(r) = \frac{E A_s}{l} \Delta r U^2(r) \quad (3.5.2)$$

A força nas barras do cordão inferior, conforme figuras (3.22) e (3.23), são:

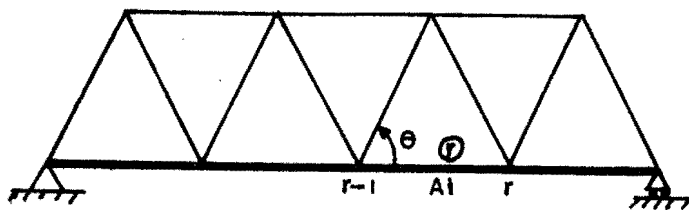


Fig. 3.22

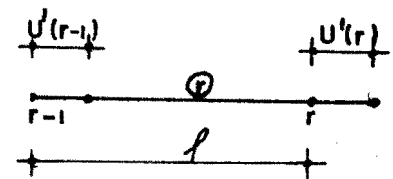


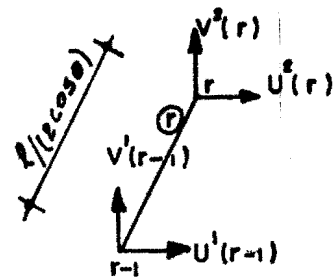
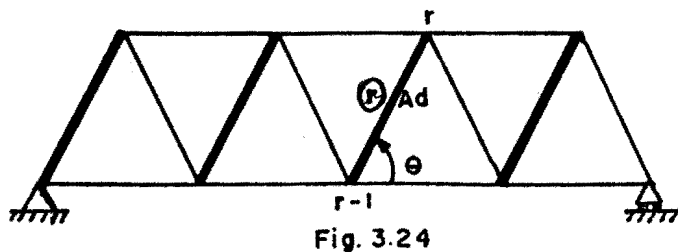
Fig. 3.23

$$F_i(r) = \frac{E A_i}{\ell} (U^1(r) - U^1(r-1)) \quad (3.5.3)$$

Aplicando-se o operador Δr , fica:

$$F_i(r) = \frac{E A_i}{\ell} \Delta r U^1(r) \quad (3.5.4)$$

As forças nas barras inclinadas para a direita, conforme figuras (3.24) e (3.25), são:



$$F_d(r) = \frac{E A_d}{2 \cos \theta} (U^2(r) - U^1(r-1)) \cos \theta + (V^2(r) - V^1(r-1)) \operatorname{sen} \theta \quad (3.5.5)$$

Fazendo $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = \operatorname{sen} \theta$, fica:

$$F_d(r) = \frac{2 E A_d \alpha}{\ell} ((U^2(r) - U^1(r-1)) \alpha + (V^2(r) - V^1(r-1)) \beta) \quad (3.5.6)$$

As forças nas barras inclinadas para a esquerda, conforme figuras (3.26) e (3.27), são expressas por:

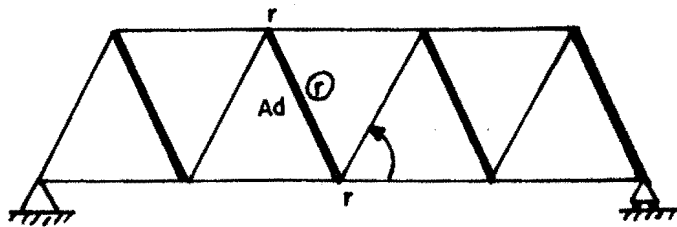


Fig.3.26

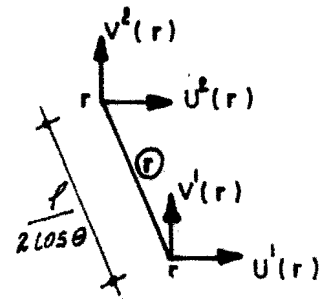


Fig.3.27

$$F_e(r) = \frac{2 E A_d \alpha}{\ell} ((U^1(r) - U^2(r)) \alpha + ((V^2(r) - V^1(r)) \beta)$$

(3.5.7)

A determinação dos deslocamentos e forças nas barras para a viga treliçada Warren da figura (3.28) é feita a partir da viga Warren da figura (3.29), trocando-se o sentido do carregamento e o cordão de aplicação das cargas.

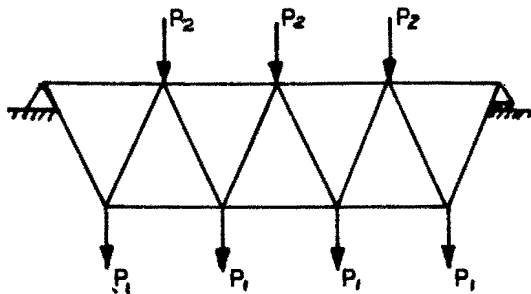


Fig.3.28

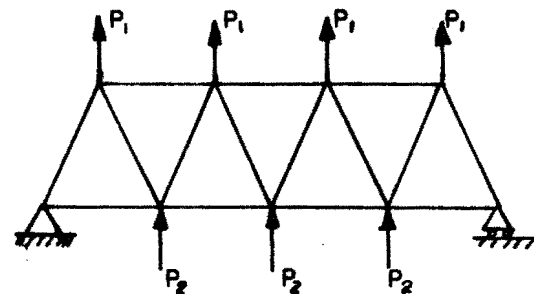


Fig.3.29

3.6. Programa computacional para resolução de vigas contínuas Warren

A resolução de vigas contínuas Warren, é feita a partir de um programa para pórtico plano, em que algumas sub-rotinas sofrem alterações.

A matriz de rigidez de cada vão é obtida conforme as equações (3.2.3) e (3.2.8) e, os momentos de engastamento per-

feito pelas equações (3.3.1) e (3.3.2).

A partir da determinação dos esforços nas extremidades, a viga fica subdividida em n vãos isostáticos, com os carregamentos iniciais mais os momentos de extremidade, como mostra o exemplo da figura (3.30) e (3.31).

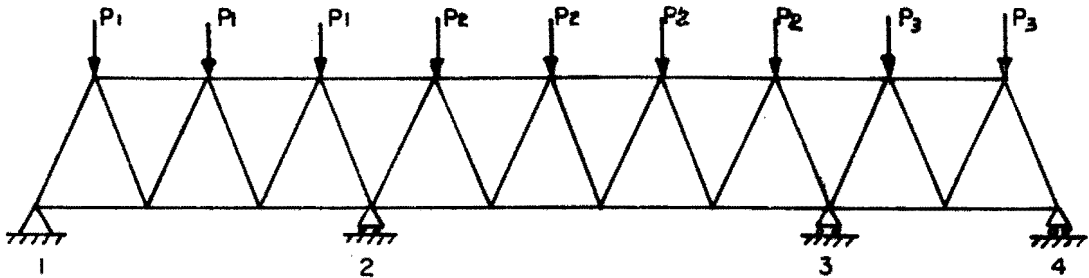


Fig. 3.30

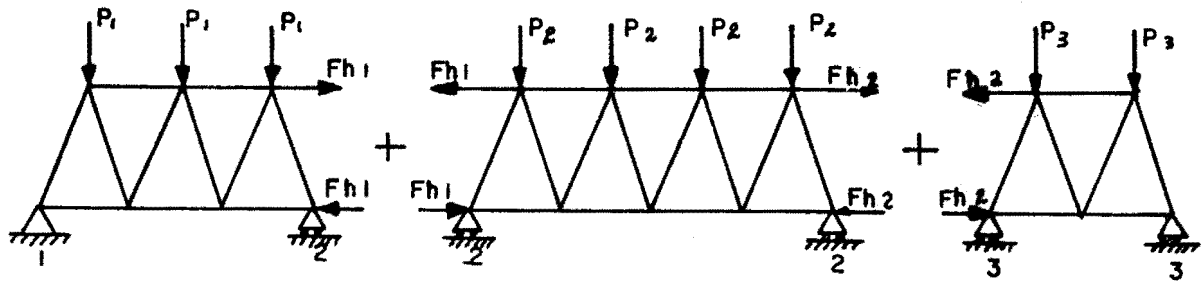


Fig. 3.31

As forças F_{h1} e F_{h2} , do exemplo, formam os pares de forças que representam os momentos de extremidade de barra.

Os deslocamentos totais de todos os nós, para um vão genérico, são determinados pela superposição de todos os estados de carregamento.

As expressões para os deslocamentos são fornecidas pelas equações (3.4.15) a (3.4.18).

As forças em todas as barras que formam cada painel da viga contínua, são calculados a partir das equações (3.5.1) a (3.5.7).

O programa fornece todos os deslocamentos verticais e horizontais de todos os nós e as forças em todas as barras.

O programa pede como dados de entrada o número de nós, número de elementos, número de vãos simétricos, coordenadas,

conetividades, áreas das barras em cada vão, número de painéis, comprimento dos painéis, o ângulo das barras inclinadas com a horizontal, módulo de elasticidade longitudinal e cargas nos cordões superior e inferior.

IV - MOMENTOS DE INÉRCIA EQUIVALENTES PARA VIGAS TRELIÇADAS

4.1. Inércias equivalentes usuais para vigas treliçadas quaisquer

A técnica mais largamente utilizada para a resolução de vigas treliçadas, com boa aproximação, é tratando-se a viga treliçada como uma viga prismática com um momento de inércia equivalente.

O momento de inércia é usualmente obtido considerando-se somente a contribuição das áreas das secções transversais das barras dos cordões superior e inferior, conforme figura (4.1) e equações deduzidas a seguir, desprezando-se o momento de inércia das áreas em relação aos seus centros de gravidade.

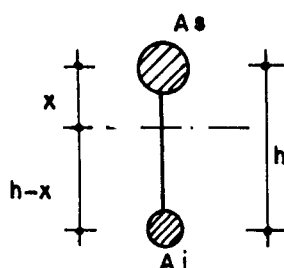


Fig. 4. 1.

O Teorema de Steiner aplicado em relação ao centro de gravidade do conjunto, resulta:

$$I_{eq} = A_s x^2 + A_i (h - x)^2 \quad (4.1.1)$$

A igualdade dos momentos estáticos das áreas em relação ao centro de gravidade do conjunto permite obter-se x em função de h que substituído na equação (4.1.1) fornece a equação para o momento de inércia equivalente, como segue.

$$A_s x = A_i (h - x)$$

$$x = \frac{A_i}{A_s + A_i} h$$

$$I_{eq} = A_s \frac{A_i^2 h^2}{(A_s + A_i)^2} + A_i \left(h - \frac{A_i}{A_s + A_i} h \right)^2$$

$$I_{eq} = h^2 \frac{A_s A_i}{A_s + A_i} \quad (4.1.2)$$

A equação (4.1.2) foi utilizada por [2] para a montagem de curvas relacionando cocientes entre coeficientes de rigidez.

Trabalhos apresentados no Steel Joist Institute e American Institute of Steel Construcion, conforme referência [1], recomendam o uso da equação (4.1.2) com um fator de minoração da inércia devido a deformações adicionais resultantes da configuração treliçada, como mostra a equação (4.1.3).

$$I_{eq} = 0,85 h^2 \frac{A_s A_i}{A_s + A_i} \quad (4.1.3)$$

As equações (4.1.2) e (4.1.3) não levam em consideração a influência do número de painéis, o que pode conduzir a erros na inércia e, por extensão, nos deslocamentos e forças nas barras.

4.2. Inércia equivalente para viga treliçada em x considerando a influência do número de painéis

O momento de inércia equivalente é obtido, fazendo-se a igualdade das expressões para os deslocamentos verticais, pe-

lo método das séries e pela integração da equação da linha elástica.

A figura (4.2) mostra uma viga treliçada em x , com carregamento senoidal que assim foi escolhido, porque envolve em sua equação dos deslocamentos verticais termos em senos, o que facilita a comparação com a equação dos deslocamentos pela integração da equação da linha elástica.

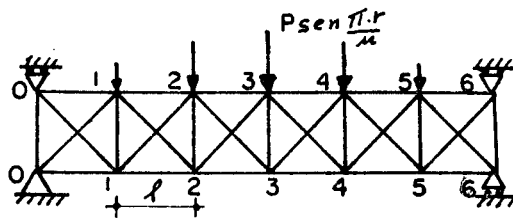


Fig. 4.2

A expressão para uma carga distribuída em seno envolve uma derivada de quarta ordem dos deslocamentos conforme abaixo.

$$E I_{eq} \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = + q \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n\ell} \quad (4.2.1)$$

A equação para os deslocamentos resulta de quatro integrações sucessivas da equação (4.2.1) cumprindo-se as condições de deslocamento e momento nulos no contorno.

$$V(x) = \frac{q \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n\ell}}{\left(\frac{\pi}{n\ell}\right)^4 E I_{eq}} \quad (4.2.2)$$

Passando-se para variáveis discretas os termos q e x e substituindo na equação (4.2.2) tem-se a equação para os deslocamentos em que r já indica a posição do nó.

$$q = \frac{p}{l} \quad e \quad x = \frac{r}{n}$$

$$v^2(r) = \frac{\frac{p}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}}{\left(\frac{\pi}{nl}\right)^4 E I_{eq}} \quad (4.2.3)$$

A equação para os deslocamentos verticais expressa em séries finitas de Fourier a partir das equações (2.3.4) e (2.3.44) aplicadas ao esquema apresentado pela figura (4.2), fica:

$$v^2(r) = \sum_{k=1}^n \frac{l p_{yk}^2 (E_k(0) - 2\beta^2 C_1 \alpha^3 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{n})}{2 E A_d \alpha \beta^2 \sigma_k^2 A_k} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n}$$

Os coeficientes para as séries das cargas ficam definidos utilizando-se a equação (2.3.16) e figura (4.2)

$$p_{yk}^2 = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^n p \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (4.2.4)$$

O somatório só terá valores não nulos para $k = 1$ e a expressão para p_{yk}^2 assume a forma abaixo.

$$\begin{aligned} p_{yk}^2 &= p & k &= 1 \\ p_{yk}^1 &= 0 & k &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Ao se fazer a substituição de p_{yk}^2 expresso pela equação (4.2.5) na equação (4.2.4) tem-se a equação para os deslocamentos para o carregamento da figura (4.2).

$$v^2(r) = \frac{\ell P (E_1(0) - 2\beta^2 C_1 \alpha^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n})}{2 E A_d \alpha \beta^2 \sigma_1^2 A_1} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} \quad (4.2.6)$$

A partir da comparação das expressões para os deslocamentos verticais indicadas pelas equações (4.2.3) e (4.2.6), tem-se a equação para o momento de inércia equivalente.

$$\frac{P (E_1(0) - 2\beta^2 C_1 \alpha^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n})}{2 E A_d \alpha \beta^2 \sigma_1^2 A_1} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} = \frac{\frac{P}{\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 E I_{eq}}$$

Isolando-se o termo I_{eq} e simplificando os termos em comum, obtêm-se o momento de inércia equivalente considerando a influência do número de painéis.

$$I_{eq} = \frac{2 n^4 \ell^2 A_d \alpha \beta^2 \sigma_1^2 A_1}{\pi^4 (E_1(0) - 2\beta^2 C_1 \alpha^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n})} \quad (4.2.7)$$

onde α , β , σ_k , A_k , $E_k(0)$ e C_1 são definidos nas equações (2.3.49).

4.3. Inércia equivalente para vigas treliçadas Warren considerando a influência do número de painéis

A partir de um procedimento análogo ao feito no item (4.2), a equação para os deslocamentos verticais de uma viga treliçada Warren, conforme figura (4.3) e equação (4.2.3), fica da forma:

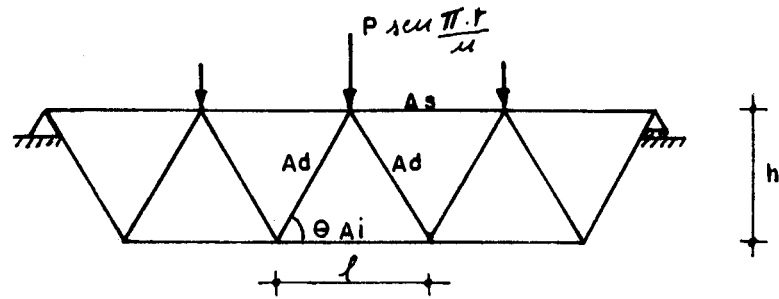


Fig. 4.3

$$v^2(r) = \frac{P \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}}{\left(\frac{\pi}{n\ell}\right)^4 E I_{eq}} \quad (4.3.1)$$

Os deslocamentos verticais para a viga e carregamento da figura (4.3), segundo [1], ficam expressos pela equação a seguir.

$$v^2(r) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_0}{\sigma_k^2} \left(a_2 \left(1 - \frac{\sigma_k}{2} \right) + a_3 + \sigma_k \right) P_{yk}^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (4.3.2)$$

em que:

$$a_0 = \frac{\ell}{2\alpha\beta^2 E A_d}$$

$$a_2 = \frac{2 A_d \alpha^3}{A_s}$$

$$a_3 = \frac{2 A_d \alpha^3}{A_i} \quad (4.3.3)$$

$$\alpha = \cos \theta \quad \beta = \operatorname{sen} \theta$$

$$\sigma_k = 1 - \cos \frac{k\pi}{n}$$

$$p_{yk}^2 = \frac{2 Wk}{n} \sum_{r=1}^{n-1} p_{y(r)}^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi r}{n} \quad (4.3.3)$$

$$h = \frac{\ell\beta}{2\alpha}$$

O coeficiente p_{yk}^2 tem a mesma forma da equação (4.2.5) e Wk é a função peso que assume valor um para valores de k variando de 1 a $n - 1$ e 0,5 para valores zero ou n para k .

A equação para os deslocamentos verticais com a substituição de p_{yk}^2 expresso pela equação (4.2.5) na equação (4.3.2), resulta:

$$v^2(r) = \frac{a_0 P}{\sigma_1^2} \left(a_2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{2} \right) + a_3 + \sigma_1 \right) \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} \quad (4.3.4)$$

A igualdade entre as equações (4.3.1) e (4.3.4) resulta na expressão para o momento de inércia equivalente.

$$\frac{a_0 P}{\sigma_1^2} \left(a_2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{2} \right) + a_3 + \sigma_1 \right) \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} = \frac{\frac{P}{\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}}{\left(\frac{\pi}{n\ell} \right)^4 E I_{eq}}$$

Após simplificar os termos em comum e isolar o I_{eq} , resulta:

$$I_{eq} = \frac{\sigma_1^2 \ell^3 \left(\frac{n}{\pi} \right)^4}{E a_0 \left(a_2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{2} \right) + a_3 + \sigma_1 \right)} \quad (4.3.5)$$

Substituindo-se a_0 , a_2 , a_3 e σ_1 pelas suas expressões equivalentes indicadas pelas equações (4.3.3), tem-se:

$$I_{eq} = \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2 (\frac{n}{\pi})^4 \ell^3}{\frac{E \ell}{\alpha \beta^2} \left(\frac{2 A_d \alpha^3}{A_s} \left(1 - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{2} \right) + \frac{2 A_d \alpha^3}{A_i} + 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)}$$

A equação fica simplificada fazendo a aproximação $1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2$ pra $n \geq 4$ painéis.

$$I_{eq} = \frac{\ell^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2}}{4 \frac{(A_i \left(1 - \frac{\pi^2}{4 n^2} + A_s + \frac{\pi^2 A_s A_i}{4 n^2 A_d \alpha^3} \right))}{A_s A_i}}$$

Sem grandes perdas de precisão como veremos nos exemplos, pode-se fazer outra aproximação, considerando-se $\frac{\pi^2}{4 n^2} \approx 0$ para $n \geq 12$ painéis.

$$I_{eq} = h^2 \frac{A_s A_i}{\left(A_s + A_i + \frac{\pi^2 A_s A_i}{4 n^2 \alpha^3 A_d} \right)} \quad (4.3.6)$$

A medida que o número de painéis aumenta, os valores obtidos pelas equações (4.1.2) e (4.3.6) se aproximam dos valores fornecidos pela equação (4.3.5).

4.4. Exemplos comparativos para as inércias equivalentes

Os exemplos a seguir permitem uma melhor comparação entre as equações para os momentos de inércia equivalentes.

As tabelas (4.1), (4.2) e (4.3) apresentam exemplos comparativos para as equações dos momentos de inércia equivalentes para vigas treliçadas em X. Em cada tabela, a primeira

coluna refere-se à equação (4.2.7), a segunda coluna à equação (4.1.2) e a terceira coluna à equação (4.1.3).

TABELA (4.1)

Viga Treliçada em X - $\theta = 30^\circ$

$$A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2$$

$$A_v = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

Valores de $I_{eq} \times 10^5 (\text{m}^4)$

| n | I exato (4.2.7) | I aprox (4.1.2) | AISC/SJI (4.1.3) |
|----|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 5.585 | 8.167 | 6.942 |
| 8 | 7.369 | 8.167 | 6.942 |
| 12 | 7.796 | 8.167 | 6.942 |
| 16 | 7.955 | 8.167 | 6.942 |
| 20 | 8.030 | 8.167 | 6.942 |
| 24 | 8.071 | 8.167 | 6.942 |
| 28 | 8.096 | 8.167 | 6.942 |

TABELA (4.2)

Viga Treliçada em X - $\theta = 45^\circ$

$$A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2$$

$$A_v = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

Valores de $I_{eq} \times 10^4 (\text{m}^4)$

| n | I exato (4.2.7) | I aprox (4.1.2) | AISC/SJI (4.1.3) |
|----|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 1.271 | 2.450 | 2.083 |
| 8 | 2.022 | 2.450 | 2.083 |
| 12 | 2.243 | 2.450 | 2.083 |
| 16 | 2.330 | 2.450 | 2.083 |
| 20 | 2.372 | 2.450 | 2.083 |
| 24 | 2.395 | 2.450 | 2.083 |
| 28 | 2.409 | 2.450 | 2.083 |

TABELA (4.3)

Viga Treliçada em X - $\theta = 60^\circ$
 $A_j = 0.01 \text{ m}^2$ $A_s = 0.001 \text{ m}^2$ $A_d = 0.0006 \text{ m}^2$
 $A_v = 0.0005 \text{ m}^2$ $l = 0.7 \text{ m}$
 Valores de $I_{eq} \times 10^4 (\text{m}^4)$

| n | I exato (4.2.7) | I aprox (4.1.2) | AISC/SJI (4.1.3) |
|----|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 2.295 | 8.820 | 7.497 |
| 8 | 5.393 | 8.820 | 7.497 |
| 12 | 6.912 | 8.820 | 7.497 |
| 16 | 7.645 | 8.820 | 7.497 |
| 20 | 8.035 | 8.820 | 7.497 |
| 24 | 8.263 | 8.820 | 7.497 |
| 28 | 8.406 | 8.820 | 7.497 |

A equação (4.2.7) é a expressão exata para o cálculo do momento de inércia equivalente para vigas treliçadas em X, pois não envolve nenhuma aproximação ao longo de sua dedução. Os exemplos acima expostos, mostram claramente a influência do número de painéis na inércia equivalente.

As equações (4.1.2) e (4.1.3) são aproximadas e pela comparação entre os resultados, pode-se concluir que as equações acima referenciadas, podem ser usadas com boa aproximação, para um número de painéis acima de 12.

A equação (4.3.5) é a solução exata para os momentos de inércia equivalentes para vigas treliçadas Warren.

As comparações apresentadas nas tabelas (4.4) a (4.6) mostram que a equação (4.3.6) embora seja uma equação aproximada, apresenta bons resultados mesmo para um número pequeno de painéis.

As equações (4.1.2) e (4.1.3) não levam em consideração a influência do número de painéis, e só apresentam resultados com razoável aproximação para mais de 12 painéis por vão.

TABELA (4.4)

Viga Treliçada Warren - $\theta = 30^{\circ}$
 $A_j = 0.001 \text{ m}^2$ $A_s = 0.001 \text{ m}^2$ $A_d = 0.0005 \text{ m}^2$ $\ell = 0.7 \text{ m}$
 Valores de $I_{eq} \times 10^5 (\text{m}^4)$

| n | I exato (4.3.5) | I aprox (4.3.6) | I aprox (4.1.2) | AISC/SJI (4.1.3) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 1.598 | 1.650 | 2.042 | 1.735 |
| 8 | 1.914 | 1.927 | 2.042 | 1.735 |
| 12 | 1.983 | 1.989 | 2.042 | 1.735 |
| 16 | 2.009 | 2.012 | 2.042 | 1.735 |
| 20 | 2.021 | 2.023 | 2.042 | 1.735 |
| 24 | 2.027 | 2.028 | 2.042 | 1.735 |
| 28 | 2.032 | 2.032 | 2.042 | 1.735 |

TABELA (4.5)

Viga Treliçada Warren - $\theta = 45^{\circ}$
 $A_j = 0.001 \text{ m}^2$ $A_s = 0.001 \text{ m}^2$ $A_d = 0.0005 \text{ m}^2$ $\ell = 0.7 \text{ m}$
 Valore de $I_{eq} \times 10^5 (\text{m}^4)$

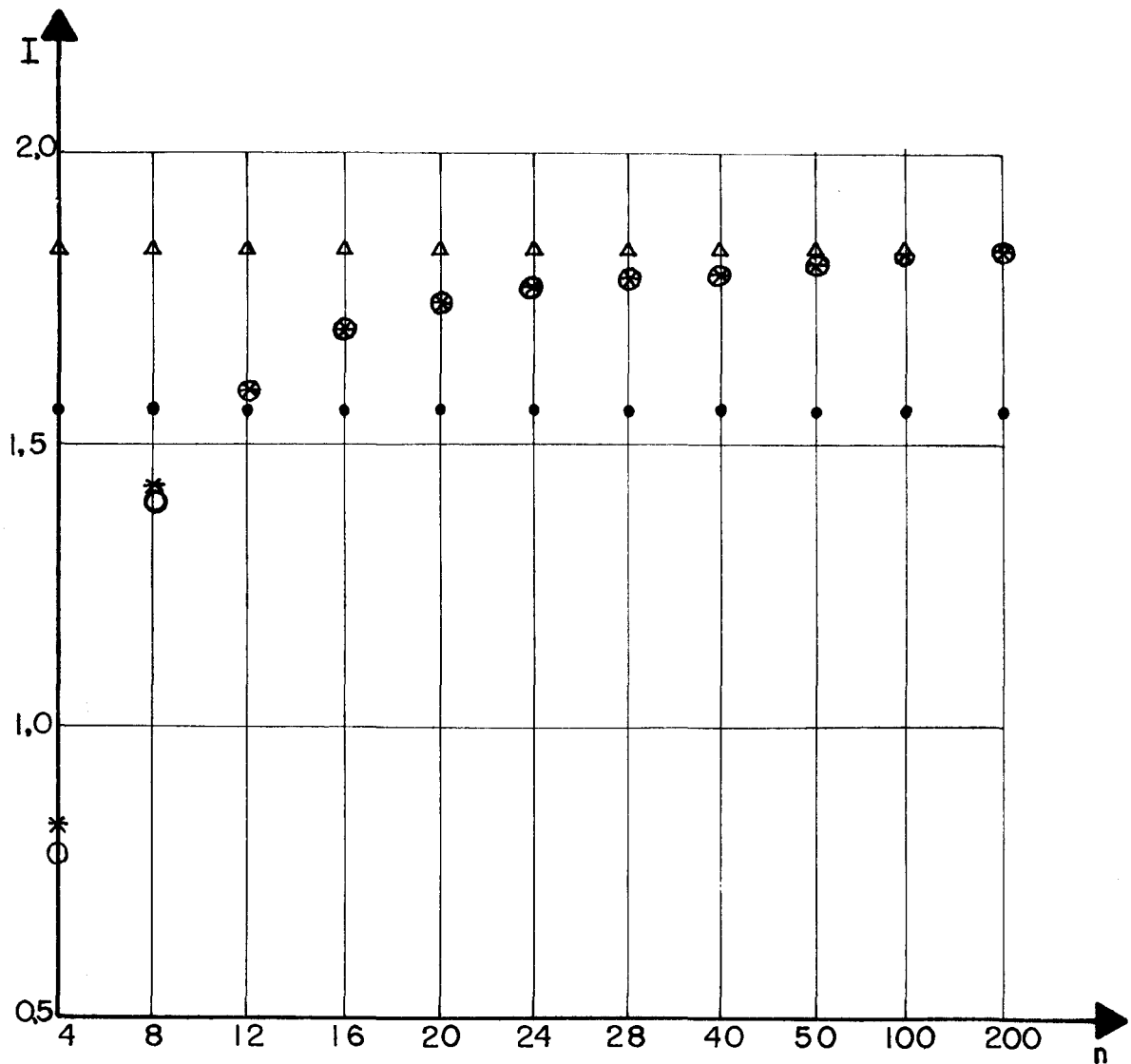
| n | I exato (4.3.5) | I aprox (4.3.6) | I aprox (4.1.2) | AISC/SJI (4.1.3) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 4.119 | 4.265 | 6.125 | 5.206 |
| 8 | 5.483 | 5.522 | 6.125 | 5.206 |
| 12 | 5.824 | 5.842 | 6.125 | 5.206 |
| 16 | 5.953 | 5.962 | 6.125 | 5.206 |
| 20 | 6.014 | 6.020 | 6.125 | 5.206 |
| 24 | 6.047 | 6.053 | 6.125 | 5.206 |
| 28 | 6.072 | 6.071 | 6.125 | 5.206 |

TABELA (4.6)

Viga Treliçada Warren - $\theta = 60^\circ$
 $A_i = 0.001 \text{ m}^2$ $A_s = 0.001 \text{ m}^2$ $A_d = 0.0005 \text{ m}^2$ $\ell = 0.7 \text{ m}$
 Valores de $I_{eq} \times 10^4 (\text{m}^4)$

| n | I exato (4.3.5) | I aprox (4.3.6) | I aprox (4.1.2) | AISJ/SJI (4.1.3) |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 4 | 0.790 | 0.823 | 1.837 | 1.562 |
| 8 | 1.393 | 1.404 | 1.837 | 1.562 |
| 12 | 1.611 | 1.616 | 1.837 | 1.562 |
| 16 | 1.703 | 1.706 | 1.837 | 1.562 |
| 20 | 1.749 | 1.751 | 1.837 | 1.562 |
| 24 | 1.776 | 1.777 | 1.837 | 1.562 |
| 28 | 1.792 | 1.792 | 1.837 | 1.562 |
| 40 | 1.814 | 1.815 | 1.837 | 1.562 |
| 50 | 1.823 | 1.823 | 1.837 | 1.562 |
| 100 | 1.836 | 1.834 | 1.837 | 1.562 |
| 200 | 1.837 | 1.837 | 1.837 | 1.562 |

A comparação entre os resultados obtidos das equações para os momentos de inércia equivalentes para vigas treliçadas Warren é apresentada nas tabelas (4.4) a (4.6). Em cada tabela, a primeira coluna de resultados, refere-se à equação (4.3.5), a segunda coluna à equação (4.3.6), a terceira à equação (4.1.2) e a quarta coluna à equação (4.1.3). Os valores da tabela (4.6), foram apresentados em gráfico, para melhor visualização, conforme mostra a figura (4.4).



COMPARAÇÕES ENTRE OS VALORES DAS INÉRCIAS
PARA UMA VIGA WARREN CONFORME EXEMPLO DA TABELA (4.6)

Fig. 4.4

- - I exato - Eq. (4.3.5)
- * - I aprox. - Eq. (4.3.6)
- Δ - I aprox. - Eq. (4.1.2)
- - I aprox. - Eq. (4.1.3)

V. EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE VIGAS TRELIÇADAS EM X E WARREN E ÁBACOS PARA COMPARAÇÃO E CORREÇÕES DOS COEFICIENTES DE RIGI- DEZ

5.1. Introdução

Os resultados obtidos pelos programas foram comparados com resultados fornecidos por um programa matricial tradicional, no caso, o Lorane Linear.

As comparações são apresentadas em tabelas para uma melhor visualização.

5.2. Exemplos ilustrativos de vigas treliçadas em X

A resolução de vigas treliçadas em X foi feita utilizando-se coeficientes de rigidez equivalentes, obtidos conforme capítulo II.

5.2.1. Viga treliçada em X com 2 vãos de 6 painéis

O primeiro exemplo é apresentado a seguir, onde foram comparados os deslocamentos dos nós e as forças nas barras para o Lorane Linear com e sem apoios superiores e a solução pelas séries. As figuras (5.1) e (5.2) apresentam os dados do exemplo e as figuras (5.3) e (5.4) mostram a viga sem os apoios superiores.

As comparações entre os resultados são apresentadas nas tabelas (5.1) e (5.2).

A análise das tabelas (5.1) e (5.2) mostra a exatidão do método dos coeficientes de rigidez equivalentes, cujos resultados coincidem com os fornecidos pelo Lorane.

A subtração dos apoios superiores gera uma alteração nos resultados, máxima de 20%, nas barras próximas aos apoios.

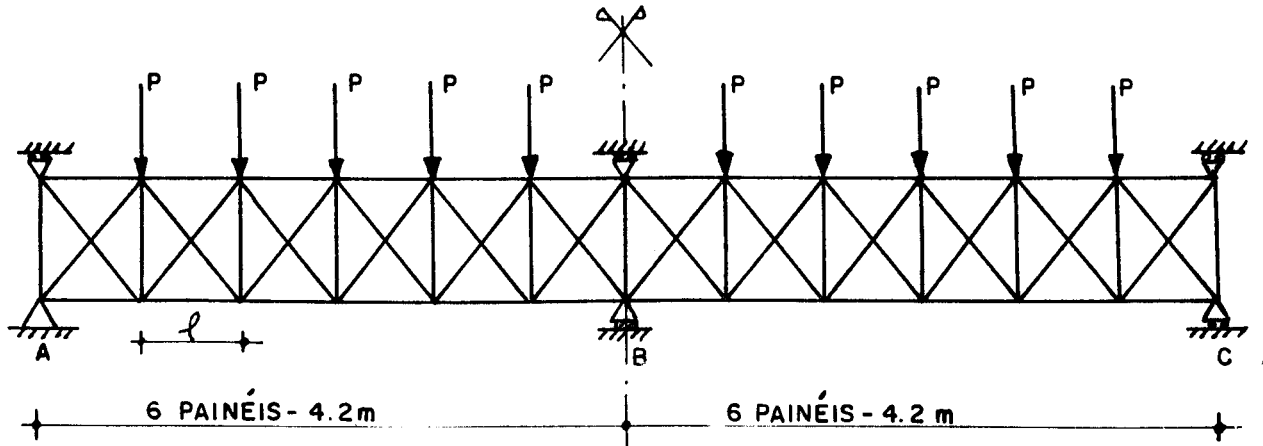


Fig. 5.1

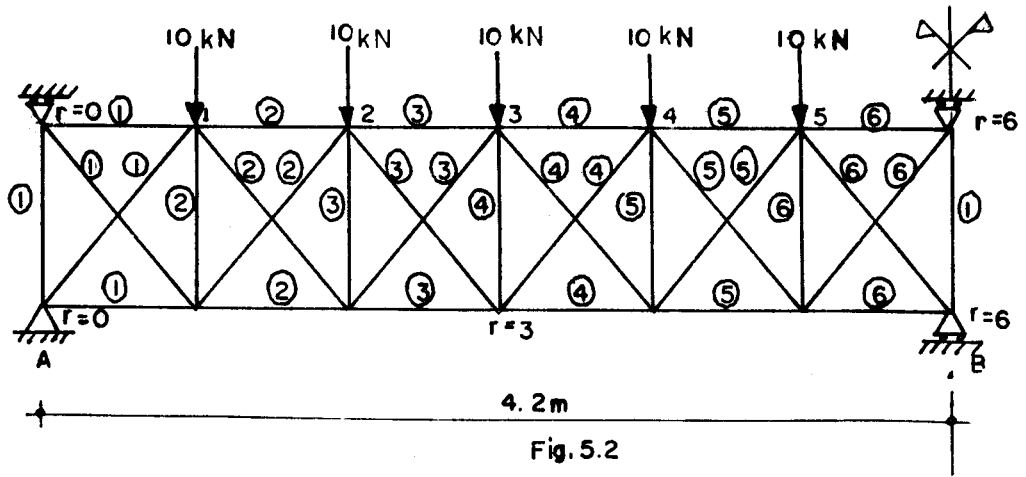


Fig. 5.2

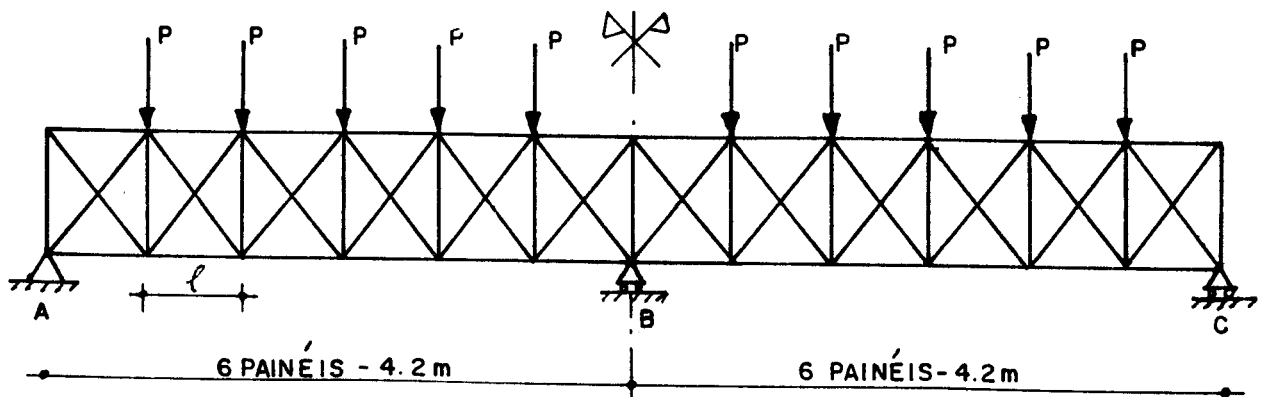


Fig. 5.3

TABELA 5.1

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 6 PAINÉIS

$\theta = 45^\circ$ $A_s = 0.002 \text{ m}^2$ $A_i = 0.002 \text{ m}^2$ $A_d = 0.001 \text{ m}^2$ $A_v = 0.00070711 \text{ m}^2$ $l = 0.7 \text{ m}$

COMPARAÇÕES ENTRE OS DESLOCAMENTOS 10^{-2} m (cm)

| r | PROGRAMA | $U^1(r)$ | | $U^2(r)$ | | |
|---|----------|----------|----------------|----------|--------|----------------|
| | | LORANE | SEM APOIO SUP. | PROGRAMA | LORANE | SEM APOIO SUP. |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.190 | 0.190 | 0.197 |
| 1 | 0.016 | 0.016 | 0.019 | 0.175 | 0.175 | 0.185 |
| 2 | 0.056 | 0.056 | 0.059 | 0.140 | 0.140 | 0.149 |
| 3 | 0.102 | 0.102 | 0.105 | 0.099 | 0.098 | 0.107 |
| 4 | 0.136 | 0.136 | 0.140 | 0.067 | 0.067 | 0.075 |
| 5 | 0.143 | 0.143 | 0.149 | 0.064 | 0.064 | 0.071 |
| 6 | 0.105 | 0.105 | 0.116 | 0.105 | 0.105 | 0.116 |

CONTINUAÇÃO DA TABELA 5.1

| r | PROGRAMA | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | | |
|---|----------|----------|----------------|----------|--------|----------------|
| | | LORANE | SEM APOIO SUP. | PROGRAMA | LORANE | SEM APOIO SUP. |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.034 |
| 1 | -0.254 | -0.254 | -0.282 | -0.268 | -0.268 | -0.291 |
| 2 | -0.416 | -0.416 | -0.449 | -0.428 | -0.428 | -0.462 |
| 3 | -0.448 | -0.448 | -0.489 | -0.461 | -0.461 | -0.501 |
| 4 | -0.357 | -0.357 | -0.402 | -0.370 | -0.370 | -0.417 |
| 5 | -0.181 | -0.181 | -0.239 | -0.195 | -0.195 | -0.238 |
| 6 | 0 | 0 | | 0 | 0 | |

TABELA 5.2

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 6 PAINÉIS

$$\theta = 45^{\circ} \quad A_s = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.0070711 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE FORÇAS NAS BARRAS 10N (kgf)

| r | $F_s(r)$ | | | $F_i(r)$ | | | $F_d(r)$ | | |
|---|----------|----------|--------------|----------|----------|--------------|----------|----------|--------------|
| | PROGRAMA | LORANE | S/APOIO SUP. | PROGRAMA | LORANE | S/APOIO SUP. | PROGRAMA | LORANE | S/APOIO SUP. |
| 1 | - 855.63 | - 855.63 | - 730.67 | 988.01 | 988.00 | 1126.07 | -1397.25 | -1397.25 | -1592.50 |
| 2 | -2143.21 | -2143.20 | -2182.72 | 2387.70 | 2387.69 | 2387.50 | - 769.42 | - 769.42 | - 750.61 |
| 3 | -2495.19 | -2495.19 | -2526.32 | 2722.97 | 2722.96 | 2757.39 | - 50.49 | - 50.49 | - 62.09 |
| 4 | -1838.82 | -1838.81 | -1875.89 | 2066.59 | 2066.59 | 2121.29 | 656.62 | 656.62 | 634.88 |
| 5 | - 174.08 | - 174.09 | - 293.82 | 418.57 | 418.58 | 416.85 | 1351.90 | 1351.90 | 1428.52 |
| 6 | 2426.24 | 2426.23 | 2752.66 | -2293.87 | -2293.85 | -1823.19 | 2138.28 | 2138.28 | 1565.39 |

CONTINUAÇÃO DA TABELA 5.2

| $F_e(r)$ | | | $F_v(r)$ | | |
|----------|----------|---------------|----------|---------|---------------|
| PROGRAMA | LORANE | APOIO SIMPLES | PROGRAMA | LORANE | APOIO SIMPLES |
| 1210.03 | 1210.04 | 1033.33 | 0 | 0 | -730.67 |
| 423.65 | 423.65 | 461,00 | -311,57 | -311,56 | -199.91 |
| - 271.64 | - 271.63 | - 264.69 | -263,87 | -263,87 | -282.07 |
| - 978.75 | - 978.74 | - 981,93 | -272,23 | -272,22 | -261.77 |
| -1697.67 | -1697.67 | -1602.50 | -263,87 | -271,63 | -315,79 |
| -2325.50 | -2325.50 | -2879.85 | -174,08 | -174,08 | 26.24 |

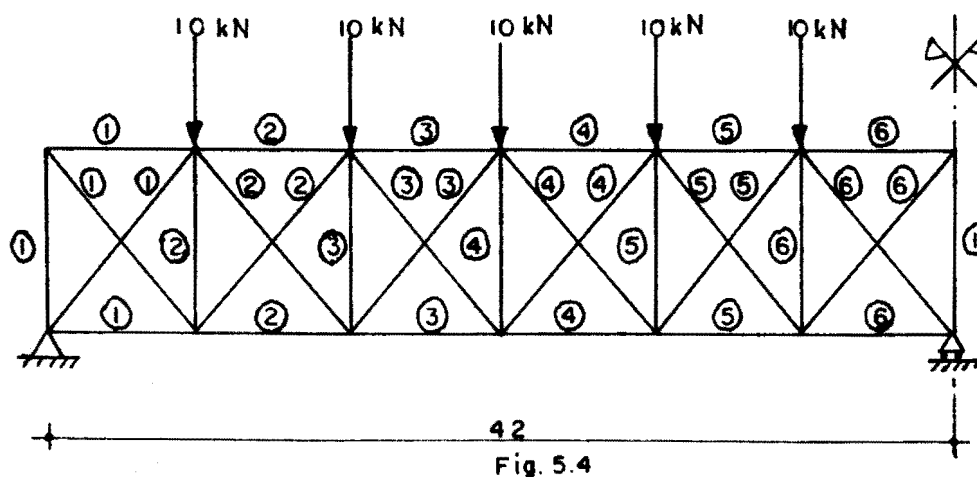


Fig. 5.4

O exemplo da figura (5.1) apresenta 26 graus de liberdade quando considerado como treliça e apenas 6 graus de liberdade quando analisado como viga contínua com rigidez equivalente, ocasionando uma diminuição no volume de cálculos.

5.2.2. Viga treliçada em X com 3 vãos de 6 painéis

O segundo exemplo para vigas treliçadas em X é constituído de 3 vãos de 6 painéis cada um, com os dados mostrados nas figuras (5.5) e (5.6). As tabelas (5.3) e (5.4) apresentam as comparações entre os resultados pela solução em séries e pelo programa Lorane Linear.

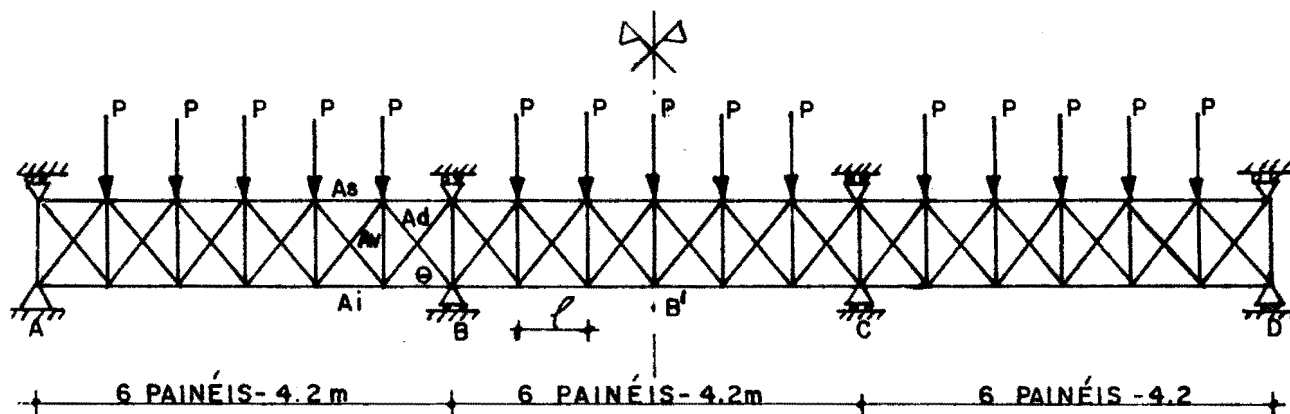


Fig. 5.5

TABELA 5.3

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 3 x 6 PAINÉIS

$$\theta = 45^{\circ} \quad A_s = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00070711 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE OS DESLOCAMENTOS 10^{-2} m (cm)

| TRECHO | r | $u^1(r)$ | | $u^2(r)$ | | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | |
|--------|---|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| | 0 | 0 | 0 | 0.205 | 0.205 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0.017 | 0.017 | 0.190 | 0.190 | -0.273 | -0.273 | -0.287 | -0.287 |
| | 2 | 0.060 | 0.060 | 0.152 | 0.151 | -0.450 | -0.450 | -0.463 | -0.463 |
| A-B | 3 | 0.109 | 0.109 | 0.106 | 0.106 | -0.492 | -0.492 | -0.505 | -0.505 |
| | 4 | 0.149 | 0.149 | 0.069 | 0.069 | -0.401 | -0.401 | -0.413 | -0.413 |
| | 5 | 0.163 | 0.163 | 0.059 | 0.059 | -0.211 | -0.211 | -0.225 | -0.225 |
| | 6 | 0.134 | 0.134 | 0.091 | 0.091 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0.134 | 0.134 | 0.091 | 0.091 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0.100 | 0.100 | 0.127 | 0.127 | -0.102 | -0.102 | -0.117 | -0.117 |
| B-B' | 2 | 0.101 | 0.101 | 0.131 | 0.131 | -0.202 | -0.202 | -0.215 | -0.215 |
| | 3 | 0.118 | 0.117 | 0.117 | 0.117 | -0.241 | -0.241 | -0.253 | -0.253 |

TABELA 5.4

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 3 x 6 PAINÉIS

$$\theta = 45^{\circ} \quad A_s = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.002 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00070711 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS 10N (kgf)

| TRECHO | r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | | $F_v(r)$ | |
|--------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| | | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| A-B | 1 | -904.54 | -904.53 | 1036.92 | 1036.91 | -1466.41 | 1466.42 | 1279.20 | 1279.20 | 0 | 0 |
| | 2 | -2289.03 | -2289.92 | 2534.42 | 2534.42 | -838.59 | -838.59 | 492.82 | 492.82 | -311.57 | -311.56 |
| | 3 | -2739.73 | -2739.73 | 2967.51 | 2967.50 | -119.66 | -119.66 | -202.47 | -202.47 | -263.87 | -263.87 |
| | 4 | -2181.18 | -2181.17 | 2408.95 | 2408.95 | 587.45 | 587.45 | -909.57 | -909.57 | -272.23 | -272.22 |
| | 5 | -614.26 | -614.26 | 858.75 | 858.75 | 1282.74 | -1282.74 | -1628.50 | -1628.50 | -311.57 | -311.57 |
| | 6 | 1888.25 | 1888.25 | -1755.87 | 1755.86 | 2069.11 | 2069.12 | -2256.33 | -2256.33 | 0 | 0 |
| B-B' | 1 | 2167.53 | 2167.52 | -2035.15 | -2035.14 | -1861.38 | -1861.37 | 1674.16 | 1674.16 | 0 | 0 |
| | 2 | 223.58 | 223.57 | 20.91 | 20.92 | -1233.55 | -1233.54 | 887.78 | 887.78 | -311.57 | -311.56 |
| | 3 | -784.78 | -784.79 | 1012.56 | 1012.56 | -514.62 | -514.62 | 192.49 | 192.49 | -263.88 | -263.87 |
| | 4 | -784.78 | -784.79 | 1012.56 | 1012.56 | -514.62 | -514.62 | 192.49 | 192.49 | -272.23 | -272.22 |

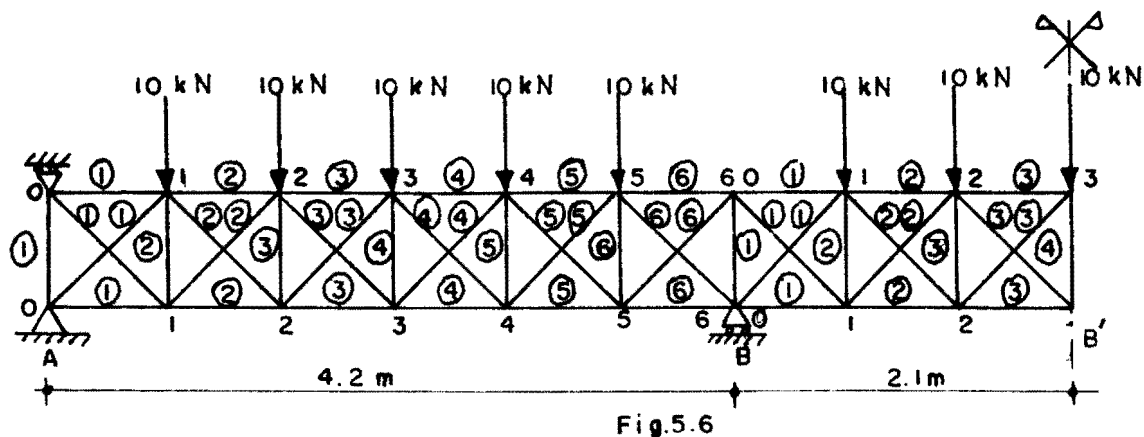


Fig.5.6

Os resultados traduzem a precisão do método em séries, mesmo para poucos painéis por vão.

5.2.3. Viga treliçada em X com 2 vãos de 12 painéis

O terceiro exemplo apresenta a comparação entre os resultados dos deslocamentos e forças nas barras, para uma viga de 2 tramos com 12 painéis por vão, utilizando-se os coeficientes de rigidez pelas séries e os coeficientes de rigidez considerando a deformação pelo cortante.

As figuras (5.7) e (5.8) mostram as características da viga e os resultados são apresentados nas tabelas (5.5) e (5.6).

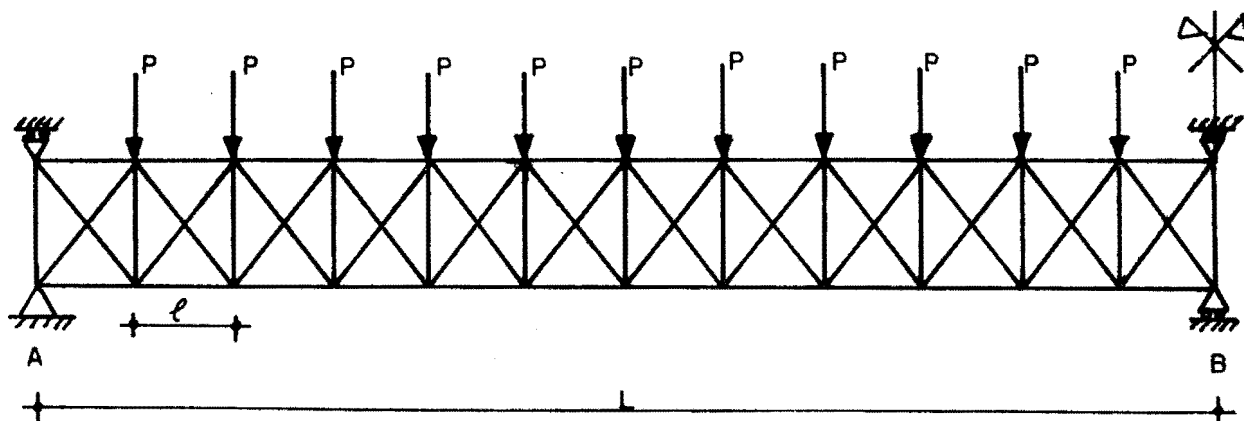


Fig. 5.7

TABELA 5.5

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^\circ \quad A_s = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.004 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00282843 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE OS DESLOCAMENTOS OBTIDOS PELOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PELAS SÉRIES
E COEFICIENTES DO TIMOSHENKO 10^{-2} m (cm)

| r | $u^1(r)$ | | $u^2(r)$ | | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | |
|----|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|
| | SÉRIES | TIMOSHENKO | SÉRIES | TIMOSHENKO | SÉRIES | TIMOSHENKO | SÉRIES | TIMOSHENKO |
| 0 | 0 | 0 | 0.1313 | 0.1311 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.0035 | 0.0037 | 0.1280 | 0.1280 | -0.1509 | -0.1493 | -0.1527 | -0.1538 |
| 2 | 0.0130 | 0.0134 | 0.1189 | 0.1191 | -0.2843 | -0.2835 | -0.2858 | -0.2857 |
| 3 | 0.0268 | 0.0273 | 0.1055 | 0.1059 | -0.3887 | -0.3871 | -0.3903 | -0.3906 |
| 4 | 0.0432 | 0.0439 | 0.0895 | 0.0900 | -0.4575 | -0.4561 | -0.4591 | -0.4588 |
| 5 | 0.0605 | 0.0614 | 0.0725 | 0.0733 | -0.4871 | -0.4853 | -0.4886 | -0.4885 |
| 6 | 0.0709 | 0.0781 | 0.0564 | 0.0573 | -0.4772 | -0.4755 | -0.4788 | -0.4784 |
| 7 | 0.0913 | 0.0924 | 0.0426 | 0.0438 | -0.4311 | -0.4292 | -0.4327 | -0.4324 |
| 8 | 0.1014 | 0.1027 | 0.0329 | 0.0342 | -0.3552 | -0.3535 | -0.3567 | -0.3563 |
| 9 | 0.1058 | 0.1072 | 0.0289 | 0.0304 | -0.2592 | -0.2573 | -0.2608 | -0.2608 |
| 10 | 0.1028 | 0.1043 | 0.0323 | 0.0341 | -0.1564 | -0.1553 | -0.1579 | -0.1575 |
| 11 | 0.0907 | 0.0924 | 0.0447 | 0.0468 | -0.0630 | -0.0612 | -0.0648 | -0.0658 |
| 12 | 0.0678 | 0.0697 | 0.0678 | 0.0701 | 0 | 0 | 0 | 0 |

TABELA 5.6

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^{\circ} \quad A_s = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.004 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00282843 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS OBTIDAS PELOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PELAS SÉRIES E COEFICIENTES DE RIGIDEZ DO TIMOSHENKO (Timo) - 10N (kgf)

| r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | | $F_v(r)$ | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| | SÉRIES | TIMO | SÉRIES | TIMO | SÉRIES | TIMO | SÉRIES | TIMO | SÉRIES | TIMO |
| 1 | - 981.49 | - 929.50 | 1048.97 | 1099.33 | -1483.46 | -1554.93 | 1388.03 | 1314.48 | 0 | 0 |
| 2 | -2733.47 | -2667.36 | 2857.92 | 2919.69 | -1170.19 | -1259.60 | 994.21 | 902.75 | -154.05 | -38.82 |
| 3 | -4018.40 | -3967.47 | 4133.94 | 4177.59 | - 810.36 | - 876.19 | 646.94 | 579.06 | -130.02 | -18.79 |
| 4 | -4798.16 | -4735.79 | 4915.09 | 4967.33 | - 457.79 | - 537.79 | 292.41 | 210.33 | -133.78 | -29.18 |
| 5 | -5078.72 | -5020.01 | 5195.44 | 5241.1 | - 104.07 | - 176.85 | - 61.00 | - 135.82 | -133.19 | -23.68 |
| 6 | -4859.16 | -4796.88 | 4975.92 | 5022.23 | 249.47 | 173.70 | - 414.57 | - 492.39 | -133.27 | -26.79 |
| 7 | -4139.61 | -4075.89 | 4256.37 | 4301.24 | 603.02 | 527.25 | - 768.13 | - 845.94 | -133.25 | -24.66 |
| 8 | -2920.09 | -2857.02 | 3036.8 | 3078.11 | 956.59 | 883.82 | -1121.66 | -1196.50 | -133.27 | -26.79 |
| 9 | -1200.41 | -1130.76 | 1317.35 | 1362.34 | 1309.99 | 1229.97 | -1475.37 | -1557.44 | -133.19 | -23.68 |
| 10 | 1018.43 | 1079.49 | - 902.88 | - 869.39 | 1664.53 | 1598.70 | -1827.95 | -1895.83 | -133.77 | -29.18 |
| 11 | 3742.44 | 3821.62 | -3618.00 | -3569.28 | 2011.80 | 1922.38 | -2187.77 | -2279.23 | -130.02 | -18.79 |
| 12 | 6933.50 | 7001.46 | -6866.02 | -6831.42 | 2405.63 | 2334.13 | -2501.05 | -2574.60 | -154.05 | -38.82 |

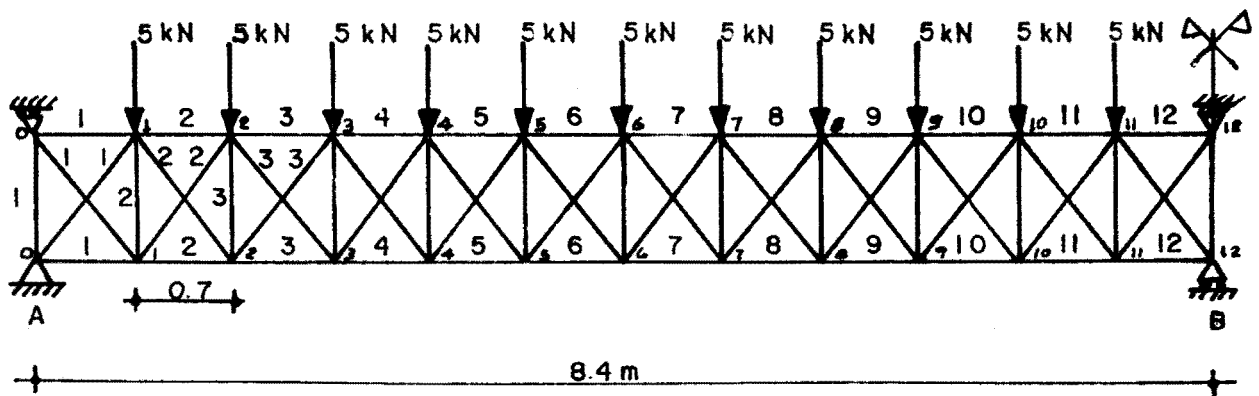


Fig. 5.8

A análise das tabelas (5.5) e (5.6) mostra que os deslocamentos e forças nas barras obtidos utilizando-se coeficientes de rigidez levando em consideração a deformação pelo cortante, são muito próximos dos valores exatos fornecidos pelo Lorané.

5.2.4. Viga treliçada em X com 2 vãos de 12 painéis com e sem apoios verticais

O quarto exemplo consta de uma viga contínua com 2 tramos com 12 painéis por vão, com e sem apoio superior, conforme figuras (5.7) a (5.9). Os resultados são expostos nas tabelas (5.7) e (5.8).

A comparação dos resultados permite afirmar que a alteração dos resultados, retirando-se os apoios, é restrita a uma pequena região próxima aos apoios e com diferenças inferiores a 10%, para os valores máximos.

TABELA 5.7

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^\circ \quad A_s = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.004 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00282843 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE OS DESLOCAMENTOS COM E SEM APOIOS SUPERIORES - 10^{-2} m (cm)

LORANE = SEM APOIOS SUPERIORES

SÉRIES=COM APOIOS SUPERIORES

| r | $u^1(r)$ | | $u^2(r)$ | | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | |
|----|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| 0 | 0 | 0 | 0.131 | 0.132 | 0 | 0 | 0 | -0.010 |
| 1 | 0.004 | 0.004 | 0.128 | 0.130 | -0.151 | -0.158 | -0.153 | -0.158 |
| 2 | 0.013 | 0.013 | 0.119 | 0.120 | -0.284 | -0.290 | -0.286 | -0.293 |
| 3 | 0.027 | 0.027 | 0.106 | 0.107 | -0.389 | -0.397 | -0.390 | -0.399 |
| 4 | 0.043 | 0.044 | 0.090 | 0.091 | -0.458 | -0.467 | -0.459 | -0.469 |
| 5 | 0.061 | 0.061 | 0.073 | 0.074 | -0.487 | -0.481 | -0.489 | -0.499 |
| 6 | 0.071 | 0.078 | 0.056 | 0.058 | -0.477 | -0.489 | -0.479 | -0.490 |
| 7 | 0.091 | 0.092 | 0.043 | 0.044 | -0.431 | -0.455 | -0.433 | -0.445 |
| 8 | 0.101 | 0.102 | 0.033 | 0.034 | -0.355 | -0.370 | -0.357 | -0.370 |
| 9 | 0.106 | 0.107 | 0.029 | 0.030 | -0.259 | -0.273 | -0.261 | -0.274 |
| 10 | 0.103 | 0.104 | 0.032 | 0.033 | -0.156 | -0.170 | -0.158 | -0.172 |
| 11 | 0.091 | 0.091 | 0.045 | 0.046 | -0.063 | -0.077 | -0.065 | -0.080 |
| 12 | 0.068 | 0.070 | 0.068 | 0.070 | 0 | 0 | 0 | -0.029 |

TABELA 5.8

VIGA TRELIÇADA EM X - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^\circ \quad A_s = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.004 \text{ m}^2 \quad A_v = 0.00282843 \text{ m}^2 \quad l = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS, COM E SEM APOIOS SUPERIORES - 10N (kgf)

LORANE = SEM APOIOS SUPERIORES

SÉRIES = COM APOIOS SUPERIORES

| $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | | $F_v(r)$ | |
|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| 1 | - 981.49 - 829.40 | 1048.97 | -1203.51 | -1483.46 | -1702.02 | 1388.03 | 1172.94 | 0 | -829.40 |
| 2 | -2733.47 -2761.07 | 2857.92 | 2837.66 | -1170.19 | -1138.09 | 994.21 | 1029.77 | -154.05 | - 24.65 |
| 3 | -4018.40 -4020.77 | 4133.94 | 4143.78 | - 810.36 | - 817.36 | 646.94 | 643.40 | -130.02 | -150.20 |
| 4 | -4798.16 -4807.30 | 4915.09 | 4923.06 | - 457.79 | - 458.68 | 292.41 | 294.96 | -133.78 | -130.61 |
| 5 | -5078.72 -5089.64 | 5195.44 | 5206.54 | - 104.07 | - 105.93 | - 61.00 | - 59.39 | -133.19 | -133.67 |
| 6 | -4859.16 -4872.63 | 4975.92 | 4989.36 | 249.47 | 247.74 | - 414.57 | - 412.83 | -133.27 | -133.20 |
| 7 | -4139.61 -4155.57 | 4256.37 | 4272.24 | 603.02 | 601.34 | - 768.13 | - 766.33 | -133.25 | -133.30 |
| 8 | -2920.09 -2938.19 | 3036.80 | 3055.44 | 956.59 | 954.48 | -1121.66 | -1120.30 | -133.27 | -133.04 |
| 9 | -1200.41 -1223.00 | 1317.35 | 1336.45 | 1309.99 | 1310.72 | -1475.37 | -1471.16 | -133.19 | -134.65 |
| 10 | 1018.43 1006.31 | - 902.88 | - 868.43 | 1664.53 | 1647.00 | -1827.95 | -1841.99 | -133.77 | -124.34 |
| 11 | 3742.44 3645.09 | -3618.00 | -3663.82 | 2011.80 | 2111.29 | -2187.77 | -2084.81 | -130.02 | -190.42 |
| 12 | 6933.50 7364.10 | -6866.02 | -6379.00 | 2405.63 | 1755.04 | -2501.05 | -3148.17 | -154.05 | 233.18 |

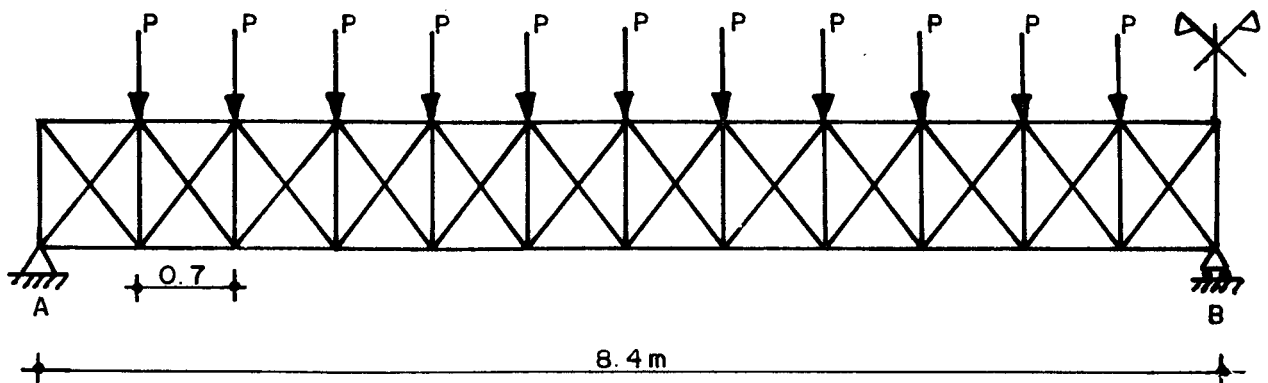


Fig. 5.9

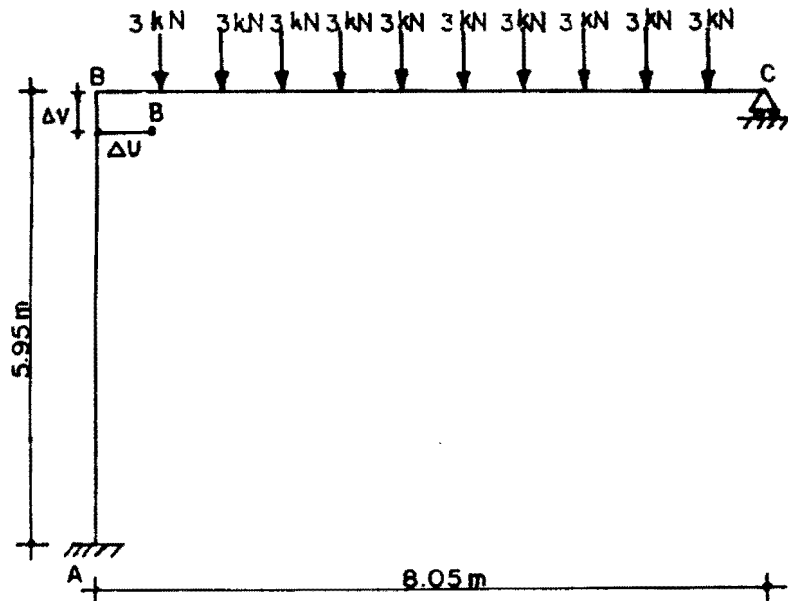
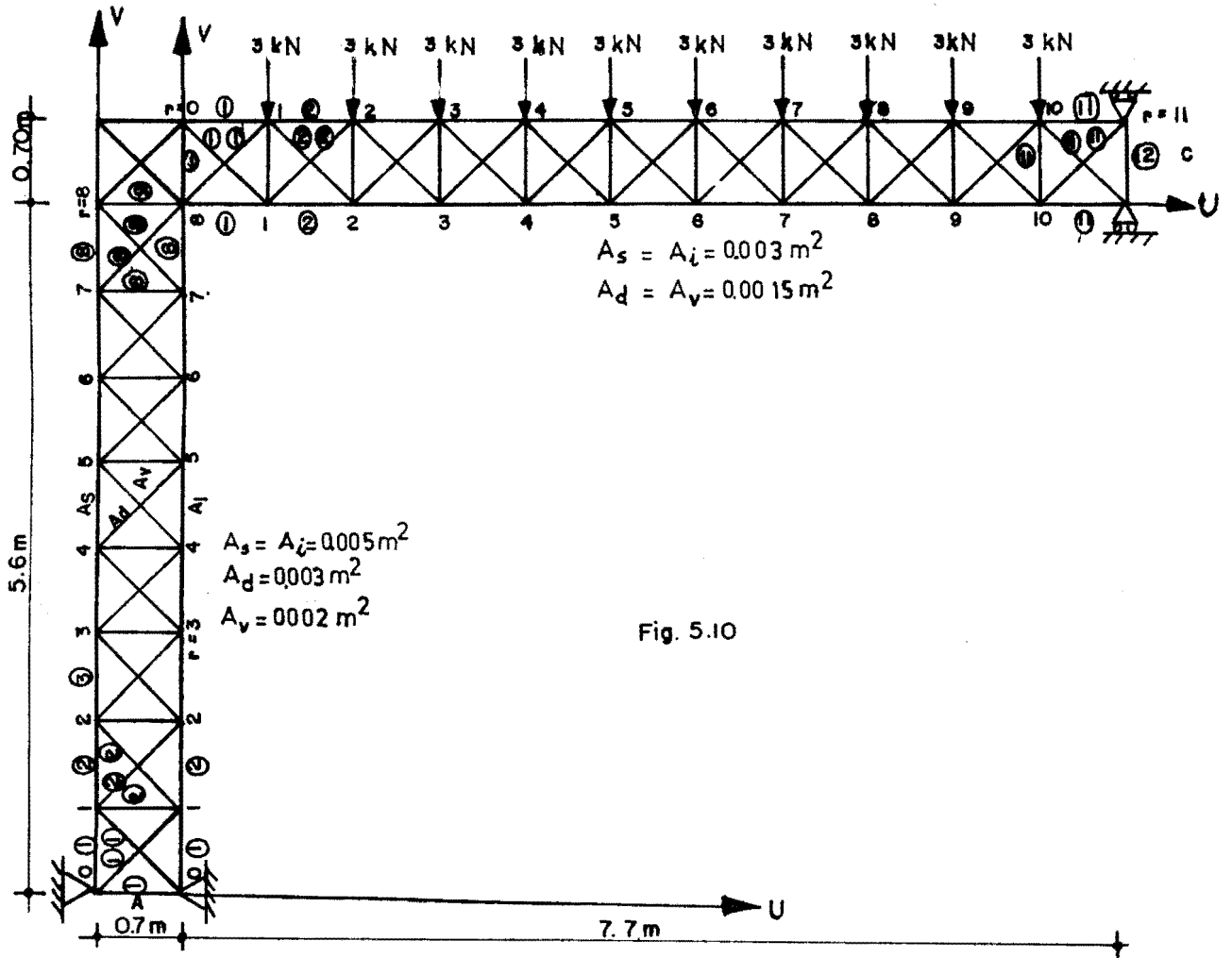
5.2.5. Pórtico plano formado por barras treliçadas em X

O exemplo a seguir, é constituído por um pórtico plano formado por 2 barras treliçadas com todas as características mostradas na figura (5.10). Os resultados dos deslocamentos e forças nas barras são comparados com as soluções pelo sistema Lorane Linear expostos nas tabelas (5.9) e (5.10).

A figura (5.11) apresenta o esquema do pórtico para a resolução pelos coeficientes de rigidez equivalentes.

As figuras (5.12.a) e (5.13.a) exibem as barras com as cargas externas e forças de extremidade de barras, onde F_a equivale à metade da força axial e, F_b forma o binário que representa o momento de extremidade.

As figuras (5.12.b) e (5.13.b) representam os deslocamentos de corpo livre que devem ser superpostos às soluções dos esquemas das figuras (5.12.a) e (5.13.a), respectivamente.



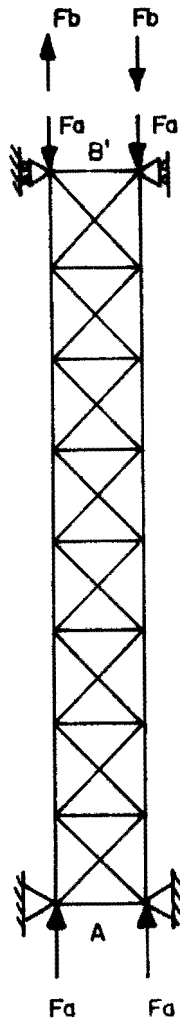


Fig. 5.12.a

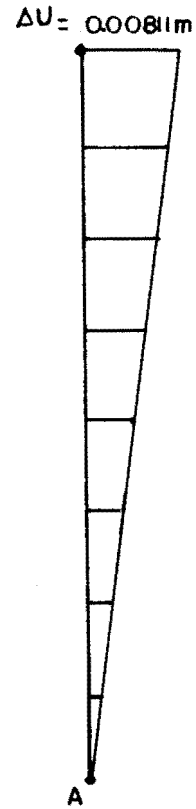


Fig. 5.12.b

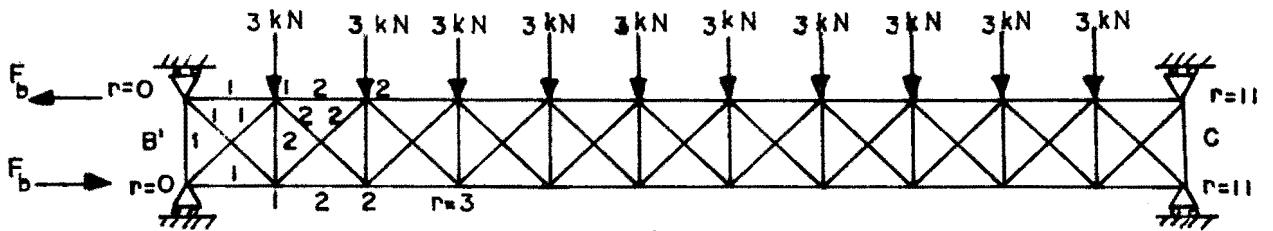


Fig. 5.13.a

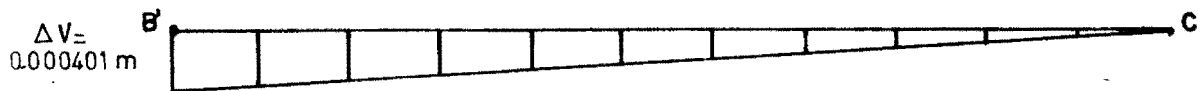


Fig. 5.13.b

TABELA 5.9

PÓRTICO PLANO TRELIÇADO EM X - $\theta = 45^\circ$
 Barra vertical - $A_s = A_i = 0.005m^2$ $A_d = 0.003m^2$ $A_v = 0.002m^2$
 Barra horizontal - $A_s = A_i = 0.003m^2$ $A_d = 0.0015m^2$ $A_v = 0.0015m^2$
 Comparação entre os deslocamentos - 10^{-2} m - (centímetros)

| BARRA | r | $U^1(r)$ | | $U^2(r)$ | | $V^1(r)$ | | $V^2(r)$ | |
|----------|---|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| | 0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| | 1 | 0.014 | 0.014 | 0.012 | 0.011 | -0.017 | -0.017 | -0.008 | -0.008 |
| | 2 | 0.052 | 0.052 | 0.050 | 0.049 | -0.035 | -0.035 | -0.015 | -0.016 |
| | 3 | 0.115 | 0.115 | 0.113 | 0.111 | -0.053 | -0.052 | -0.023 | -0.023 |
| Vertical | 4 | 0.203 | 0.204 | 0.202 | 0.200 | -0.070 | -0.070 | -0.031 | -0.031 |
| | 5 | 0.316 | 0.318 | 0.315 | 0.314 | -0.088 | -0.087 | -0.038 | -0.039 |
| | 6 | 0.455 | 0.458 | 0.455 | 0.452 | -0.106 | -0.104 | -0.046 | -0.047 |
| | 7 | 0.619 | 0.623 | 0.620 | 0.616 | -0.124 | -0.122 | -0.053 | -0.054 |
| | 8 | 0.804 | 0.811 | 0.811 | 0.809 | -0.183 | -0.140 | -0.120 | -0.083 |

CONTINUAÇÃO DA TABELA 5.9

| | | $u^1(r)$ | | $u^2(r)$ | | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | |
|------------|----|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| BARRA | r | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| | 0 | 0.810 | 0.800 | 1.020 | 1.070 | -0.040 | -0.140 | -0.040 | -0.140 |
| | 1 | 0.800 | 0.800 | 1.030 | 1.070 | -0.310 | -0.400 | -0.310 | -0.400 |
| | 2 | 0.810 | 0.820 | 1.030 | 1.060 | -0.570 | -0.650 | -0.570 | -0.650 |
| | 3 | 0.820 | 0.840 | 1.010 | 1.030 | -0.800 | -0.880 | -0.800 | -0.880 |
| | 4 | 0.850 | 0.880 | 0.980 | 1.000 | -0.980 | -1.040 | -0.980 | -1.040 |
| | 5 | 0.890 | 0.920 | 0.950 | 0.960 | -1.080 | -1.130 | -1.080 | -1.130 |
| Horizontal | 6 | 0.930 | 0.960 | 0.910 | 0.910 | -1.090 | -1.130 | -1.090 | -1.140 |
| | 7 | 0.970 | 1.010 | 0.870 | 0.870 | -1.020 | -1.060 | -1.020 | -1.060 |
| | 8 | 1.000 | 1.050 | 0.830 | 0.830 | -0.860 | -0.890 | -0.860 | -0.890 |
| | 9 | 1.040 | 1.080 | 0.800 | 0.800 | -0.630 | -0.650 | -0.630 | -0.650 |
| | 10 | 1.060 | 1.110 | 0.780 | 0.780 | -0.330 | -0.340 | -0.330 | -0.340 |
| | 11 | 1.070 | 1.110 | 0.780 | 0.770 | - | - | - | - |

TABELA 5.10

PÓRTICO PLANO TRELIÇADO EM X - $\theta = 45^\circ$

Barra vertical - $A_s = A_i = 0.005m^2$ $A_d = 0.003m^2$ $A_v = 0.002m^2$
 Barra horizontal - $A_s = A_i = 0.003m^2$ $A_d = 0.0015m^2$ $A_v = 0.0015m^2$
 Comparação entre as forças nas barras - 10N - (kgf)

| BARRA | r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | | $F_v(r)$ | |
|----------|---|----------|---------|----------|----------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| | | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| | 1 | 1172.68 | 1192.82 | -2631.80 | -2587.58 | -151.19 | -144.52 | -151.18 | -144.52 | - | - |
| | 2 | 1139.36 | 1160.96 | -2665.14 | -2619.44 | -104.06 | - 99.47 | -104.05 | - 99.47 | 180.48 | 172.52 |
| | 3 | 1144.56 | 1165.92 | -2659.96 | -2614.48 | -111.40 | -106.48 | -111.39 | -106.48 | 152.35 | 145.62 |
| | 4 | 1143.77 | 1165.20 | -2660.75 | -2615.20 | -110.29 | -105.46 | -110.28 | -105.46 | 156.75 | 149.86 |
| Vertical | 5 | 1143.78 | 1164.95 | -2660.76 | -2615.45 | -110.29 | -105.11 | -110.28 | -105.11 | 155.96 | 148.90 |
| | 6 | 1144.57 | 1167,32 | -2659.97 | -2613.08 | -111.41 | -108.46 | -111.39 | -108.46 | 156.75 | 151.02 |
| | 7 | 1139.38 | 1151.97 | -2665.16 | -2628.43 | -104.06 | - 86.76 | -104.05 | - 86.76 | 152.35 | 138.04 |
| | 8 | 1172.71 | 1250.45 | -2631.83 | -2529.94 | -151.20 | -226.03 | -151.18 | -226.03 | 180.48 | 221.18 |
| | 9 | - | 618.65 | - | -1108.76 | - | -874.91 | - | 667.46 | - | -312.14 |

CONTINUAÇÃO DA TABELA 5.10

| BARRA | r | F_s | | F_i | | F_d | | F_e | | F_v | |
|------------|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|
| | | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE | SÉRIES | LORANE |
| | 1 | 1081.53 | 453.83 | -1050.08 | - 128.27 | -1016.72 | -1360.97 | 972.25 | 900.56 | - | -1108.77 |
| | 2 | - 427.54 | -1145.71 | 486.75 | 1170.48 | - 824.23 | - 936.15 | 740.49 | 901.12 | -104.67 | 25.17 |
| | 3 | -1652.09 | -2277.25 | 1708.06 | 2337.24 | - 609.80 | - 748.93 | 530.65 | 664.08 | - 92.41 | - 107.62 |
| | 4 | -2574.85 | -3128.46 | 2631.19 | 3184.33 | - 397.94 | - 533.88 | 318.25 | 454.87 | - 93.86 | - 92.07 |
| | 5 | -3197.80 | -3677.36 | 3254.10 | 3733.72 | - 185.77 | - 322.09 | 106.15 | 242.39 | - 93.68 | - 93.89 |
| Horizontal | 6 | -3520.74 | -3926.54 | 3577.04 | 3982.83 | 26.35 | - 109.92 | - 105.99 | 30.30 | - 93.71 | - 93.68 |
| | 7 | -3543.67 | -3871.69 | 3599.97 | 3931.98 | 238.50 | 102.22 | - 318.12 | - 181.83 | - 93.71 | - 93.70 |
| | 8 | -3266.59 | -3524.81 | 3322.93 | 3581.15 | 450.60 | 314.32 | - 530.28 | - 291.10 | - 93.68 | - 93.68 |
| | 9 | -2689.70 | -2874.15 | 2745.66 | 2930.11 | 663.00 | 526.72 | - 742.12 | - 605.85 | - 93.86 | - 93.85 |
| | 10 | -1810.99 | -1921.67 | 1870.21 | 1980.88 | 872.84 | 736.55 | - 956.58 | - 820.29 | - 92.41 | - 92.41 |
| | 11 | - 647.82 | - 664.70 | 679.27 | 716.15 | 1104.61 | 968.32 | -1149.08 | -1012.79 | -104.67 | - 104.67 |

Os esforços nas barras do painel de ligação dos dois tramos, assinaladas na figura (5.10), não são determinados pelo programa mas resultam em valores bem menores que os máximos de qualquer dos tramos, conforme valores fornecidos pelo programa Lorane, apresentados na tabela (5.10).

A observação das tabelas (5.9) e (5.10) mostra o bom funcionamento do método dos coeficientes de rigidez equivalentes, com erros menores que 5% para os valores máximos.

5.3. Exemplos ilustrativos para vigas treliçadas tipo Warren

A resolução de vigas Warren foi feita utilizando-se inércias equivalentes, conforme o capítulo III. São apresentados 3 exemplos com carregamentos, número de painéis e vãos diversos para possibilitar algumas conclusões sobre o método.

5.3.1. Viga Warren isostática com 5 painéis

O primeiro exemplo de vigas Warren é constituído de um vão isostático com 5 painéis, conforme mostra a figura (5.14) e, os resultados são exibidos nas tabelas (5.11) e (5.12).

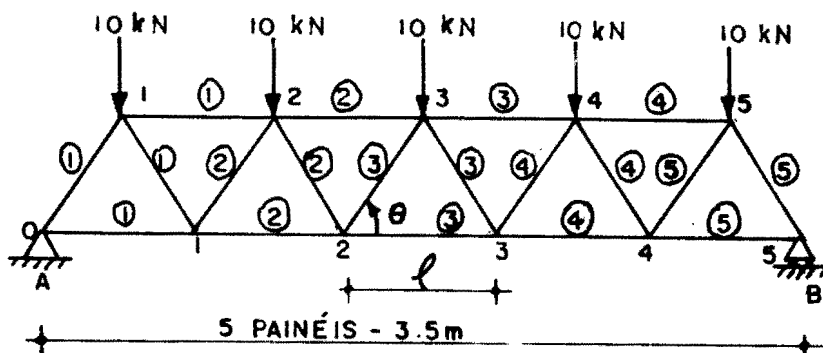


Fig.5.14

TABELA 5.11

VIGA TRELIÇADA WARREN - ISOSTÁTICA - 1 x 5 PAINÉIS

$$\theta = 60^{\circ} \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS 10^{-2} m (cm)

| r | $u^1(r)$ | | $u^2(r)$ | | $v^1(r)$ | | $v^2(r)$ | |
|---|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 0 | 0 | 0 | - | - | 0 | 0 | - | - |
| 1 | 0.042 | 0.042 | 0.354 | 0.354 | -0.706 | -0.706 | -0.410 | -0.410 |
| 2 | 0.133 | 0.133 | 0.287 | 0.287 | -1.092 | -1.092 | -0.969 | -0.969 |
| 3 | 0.242 | 0.242 | 0.187 | 0.187 | -1.092 | -1.092 | -1.166 | -1.166 |
| 4 | 0.333 | 0.333 | 0.087 | 0.087 | -0.706 | -0.706 | -0.969 | -0.969 |
| 5 | 0.375 | 0.375 | 0.021 | 0.021 | 0 | 0 | -0.410 | -0.410 |

TABELA 5.12

VIGA TRELIÇADA WARREN - ISOSTÁTICA - 1 x 5 PAINÉIS

$$\theta = 60^{\circ} \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÃO ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS 10N (kgf)

| r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | |
|---|----------|--------|----------|--------|----------|----------|----------|----------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 1 | -2000 | -2000 | 1250 | 1250 | -2795.09 | -2795.09 | 1677.05 | 1677.05 |
| 2 | -3000 | -3000 | 2750 | 2750 | -1677.05 | -1677.05 | 559.02 | 559.02 |
| 3 | -3000 | -3000 | 3250 | 3250 | - 559.02 | - 559.02 | - 559.02 | - 559.02 |
| 4 | -2000 | -2000 | 2750 | 2750 | 559.02 | 559.02 | -1677.05 | -1677.05 |
| 5 | - | - | 1250 | 1250 | 1677.05 | 1677.05 | -2795.09 | -2795.08 |

A análise das tabelas (5.11) e (5.12) mostra a igualdade entre os resultados, os quais foram obtidos diretamente pela solução do sistema de equações de equilíbrio.

5.3.2. Viga Warren com 2 tramos de 5 painéis

O segundo exemplo de viga Warren é formado por uma viga contínua de 2 tramos cada um com 5 painéis, segundo as figuras (5.15) e (5.16). Os resultados são expostos nas tabelas (5.13) e (5.14).

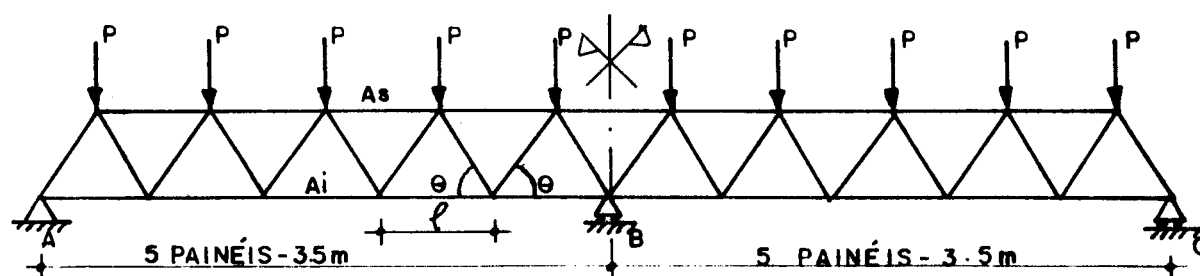


Fig. 5.15

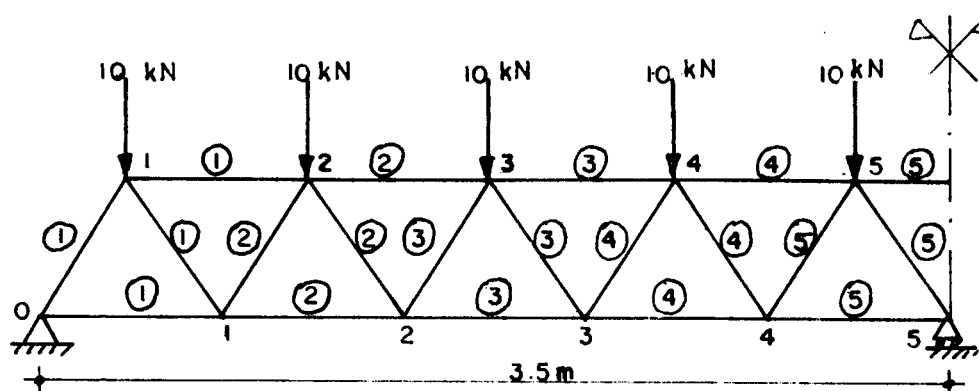


Fig. 5.16

TABELA 5.13

VIGA TRELIÇADA WARREN - SIMÉTRICA - 2 x 5 PAINÉIS

$$\theta = 60^{\circ} \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS 10^{-2} m (cm)

| r | $U^1(r)$ | | $U^2(r)$ | | $V^1(r)$ | | $V^2(r)$ | |
|---|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 0 | 0 | 0 | - | - | 0 | 0 | 0 | - |
| 1 | 0.035 | 0.034 | 0.321 | 0.312 | -0.606 | -0.579 | -0.359 | -0.345 |
| 2 | 0.108 | 0.102 | 0.267 | 0.261 | -0.917 | -0.870 | -0.827 | -0.788 |
| 3 | 0.185 | 0.170 | 0.192 | 0.193 | -0.892 | -0.839 | -0.908 | -0.918 |
| 4 | 0.233 | 0.207 | 0.129 | 0.140 | -0.556 | -0.516 | -0.783 | -0.733 |
| 5 | 0.219 | 0.177 | 0.125 | 0.137 | 0 | 0 | -0.321 | -2.297 |

TABELA 5.14

VIGA TRELIÇADA WARREN - SIMÉTRICA - 2 x 5 PAINÉIS

$$\theta = 60^\circ \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÃO ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS 10N (kgf)

| r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | |
|---|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 1 | -1625.16 | -1524.40 | 1062.58 | 1012.20 | -2376.01 | -2263.35 | 1257.98 | 1145.31 |
| 2 | -2250.33 | -2048.80 | 2187.75 | 2036.60 | -1257.98 | -1145.31 | 139.94 | 27.28 |
| 3 | -1875.50 | -1573.20 | 2312.91 | 2061.00 | -139.94 | -27.28 | -978.10 | -1090.75 |
| 4 | -500.67 | -97.60 | 1438.08 | 1085.40 | 978.10 | 1090.75 | -2096.13 | -2208.79 |
| 5 | 1874.16 | 2378.00 | -436.75 | -890.20 | 2096.13 | 2208.79 | -3214.16 | -3326.82 |

A observação das tabelas (5.13) e (5.14) permite concluir que a aproximação para um número pequeno de painéis, utilizando-se um momento de inércia equivalente, é razoável, com erros menores de 10% para os máximos valores.

5.3.3. Viga Warren com 2 vãos de 12 tramos

O terceiro exemplo consta de uma viga contínua com 2 vãos, com 12 painéis cada um, conforme mostram as figuras (5.17) e (5.18). Os resultados são confrontados nas tabelas (5.15) e (5.16).

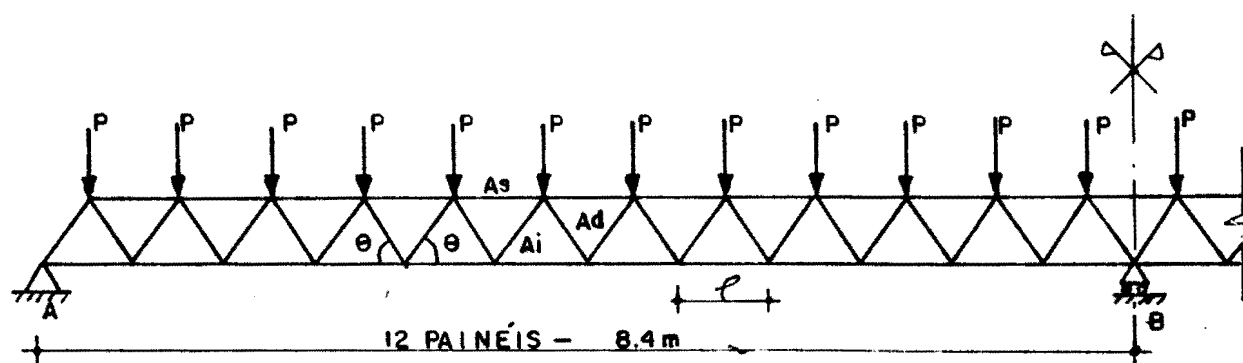


Fig. 5.17

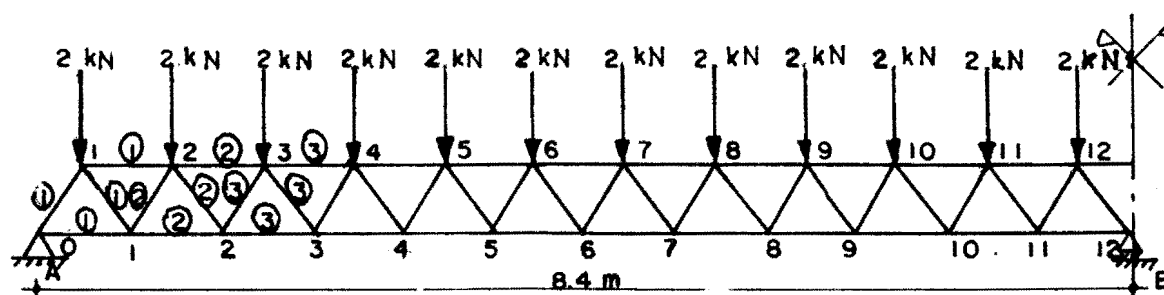


Fig. 5.18

TABELA 5.15

VIGA TRELIÇADA WARREN - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^\circ \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÕES ENTRE OS DESLOCAMENTOS 10^{-2} m (cm)

| r | $U^1(r)$ | | $U^2(r)$ | | $V^1(r)$ | | $V^2(r)$ | |
|----|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 0 | 0 | 0 | - | - | 0 | 0 | - | - |
| 1 | 0.030 | 0.030 | 1.006 | 1.008 | -2.133 | -2.137 | -1.091 | -1.093 |
| 2 | 0.107 | 0.107 | 0.952 | 0.954 | -4.013 | -4.022 | -3.121 | -3.127 |
| 3 | 0.218 | 0.218 | 0.858 | 0.860 | -5.482 | -5.494 | -4.812 | -4.822 |
| 4 | 0.348 | 0.349 | 0.738 | 0.740 | -6.430 | -6.445 | -6.030 | -6.044 |
| 5 | 0.486 | 0.486 | 0.604 | 0.605 | -6.804 | -6.821 | -6.695 | -6.711 |
| 6 | 0.617 | 0.618 | 0.469 | 0.471 | -6.603 | -6.622 | -6.779 | -6.797 |
| 7 | 0.728 | 0.729 | 0.348 | 0.349 | -5.880 | -5.899 | -6.306 | -6.326 |
| 8 | 0.806 | 0.808 | 0.254 | 0.254 | -4.740 | -4.759 | -5.358 | -5.378 |
| 9 | 0.838 | 0.840 | 0.199 | 0.199 | -3.342 | -3.359 | -4.066 | -4.084 |
| 10 | 0.810 | 0.812 | 0.197 | 0.197 | -1.900 | -1.914 | -2.617 | -2.632 |
| 11 | 0.708 | 0.711 | 0.262 | 0.261 | -0.680 | -0.688 | -1.249 | -1.260 |
| 12 | 0.521 | 0.524 | 0.406 | 0.405 | 0 | 0 | -0.255 | -0.260 |

TABELA 5.16

VIGA TRELIÇADA WARREN - SIMÉTRICA - 2 x 12 PAINÉIS

$$\theta = 45^\circ \quad A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_i = 0.001 \text{ m}^2 \quad A_d = 0.0005 \text{ m}^2 \quad \ell = 0.7 \text{ m}$$

COMPARAÇÃO ENTRE AS FORÇAS NAS BARRAS 10N (kgf)

| r | $F_s(r)$ | | $F_i(r)$ | | $F_d(r)$ | | $F_e(r)$ | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE | PROGRAMA | LORANE |
| 1 | -1605.92 | -1607.16 | 902.96 | 903.58 | -1276.97 | -1277.86 | 994.11 | 995.02 |
| 2 | -2811.80 | -2814.33 | 2308.86 | 2310.75 | -994.13 | -995.02 | 711.27 | 712.17 |
| 3 | -3617.68 | -3621.49 | 3314.75 | 3317.91 | -711.28 | -712.17 | 428.39 | 429.33 |
| 4 | -4023.50 | -4028.66 | 3920.60 | 3925.08 | -428.42 | -429.33 | 145.51 | 146.49 |
| 5 | -4029.28 | -4035.82 | 4126.40 | 4132.24 | -145.51 | -146.49 | -137.37 | -136.36 |
| 6 | -3635.01 | -3642.99 | 3932.16 | 3939.41 | 137.31 | 136.36 | -420.25 | -419.20 |
| 7 | -2840.69 | -2850.15 | 3337.86 | 3346.57 | 420.21 | 419.20 | -703.13 | -702.04 |
| 8 | -1646.34 | -1657.32 | 2343.52 | 2353.73 | 703.10 | 702.04 | -985.94 | -984.88 |
| 9 | -51.94 | -64.48 | 949.14 | 960.90 | 985.96 | 984.88 | -1268.86 | -1267.73 |
| 10 | 1942.46 | 1928.35 | -845.26 | -831.94 | 1268.81 | 1267.73 | -1551.71 | -1550.57 |
| 11 | 4336.89 | 4321.19 | -3039.67 | -3024.77 | 1551.68 | 1550.57 | -1834.53 | -1833.41 |
| 12 | 7131.32 | 7114.03 | -5634.11 | -5617.61 | 1834.51 | 1834.51 | -2117.38 | -2116.25 |

A análise das tabelas (5.15) e (5.16) mostra que a medida que aumenta o número de painéis, os valores dos resultados mais se aproximam daqueles fornecidos pelo Lorane, conforme comparação entre os resultados do exemplo 2 e exemplo 3. A partir de 12 painéis por vão, a influência do número de painéis no momento de inércia é menor, conforme capítulo IV, e os resultados começam a ficar muito próximos dos valores exatos, com erros menores de 1%.

5.4. Ábacos para comparações e correções dos coeficientes de rigidez para vigas treliçadas em X

5.4.1. Comparação entre coeficientes de rigidez

As comparações entre os coeficientes de rigidez pelas séries, conforme equações (2.4.29), e os coeficientes de rigidez pelas inércias equivalentes considerando as deformações por corte, equações (2.7.4), não foram feitas diretamente e sim, na forma de cociente com o seu coeficiente de rigidez correspondente, obtido considerando-se uma inércia equivalente. O motivo da comparação ter sido feita dessa forma é que permite também, fazer as correções dos coeficientes de rigidez pelas inércias equivalentes, sem deformação por corte.

As figuras (5.20) a (5.29) permitem que sejam feitas as correções e comparações acima mencionadas.

5.4.2. Ábacos para correção dos coeficientes de rigidez obtidos por inércia equivalentes sem considerar deformação por corte

As figuras (5.20) a (5.39) fornecem os fatores de correção para os coeficientes de rigidez resultantes de inércias equivalentes sem considerar a deformação por corte.

Foram plotadas curvas para uma diversidade de ângulos e números de painéis, que atendem os usos normais da prática e, uma ampla variação das relações entre as áreas, expressas pelos coeficientes C_1 , C_2 e C_3 definidos no capítulo II.

Os coeficientes de correção para os coeficientes K_{33} são determinados pelas figuras (5.20) a (5.29) em função do número de painéis e das relações entre as áreas.

Para os coeficientes de transmissão K_{36}/K_{33} , as correções são determinadas pelas figuras (5.30) a (5.39).

As figuras (5.40) a (5.44) indicam as correções para os coeficientes de rigidez axial K_{11} , para variações de até 5 vezes nas relações entre as áreas dos cordões superior e inferior e vice-versa.

O usuário de posse das características de áreas e ângulos e número de painéis, calcula os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 e entra nas figuras correspondentes obtendo os coeficientes de correção.

A fim de facilitar, a seguir estão transcritos do capítulo II, as expressões para os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 . A figura (5.19) auxilia na identificação das partes constituintes de uma viga treliçada em X.

$$C_1 = \frac{A_i}{A_d}$$

$$C_2 = \frac{A_v}{A_d \sin \theta}$$

$$C_3 = \frac{A_s}{A_d}$$

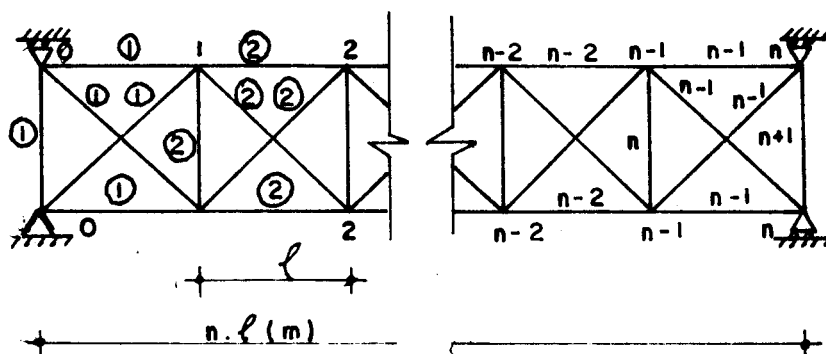
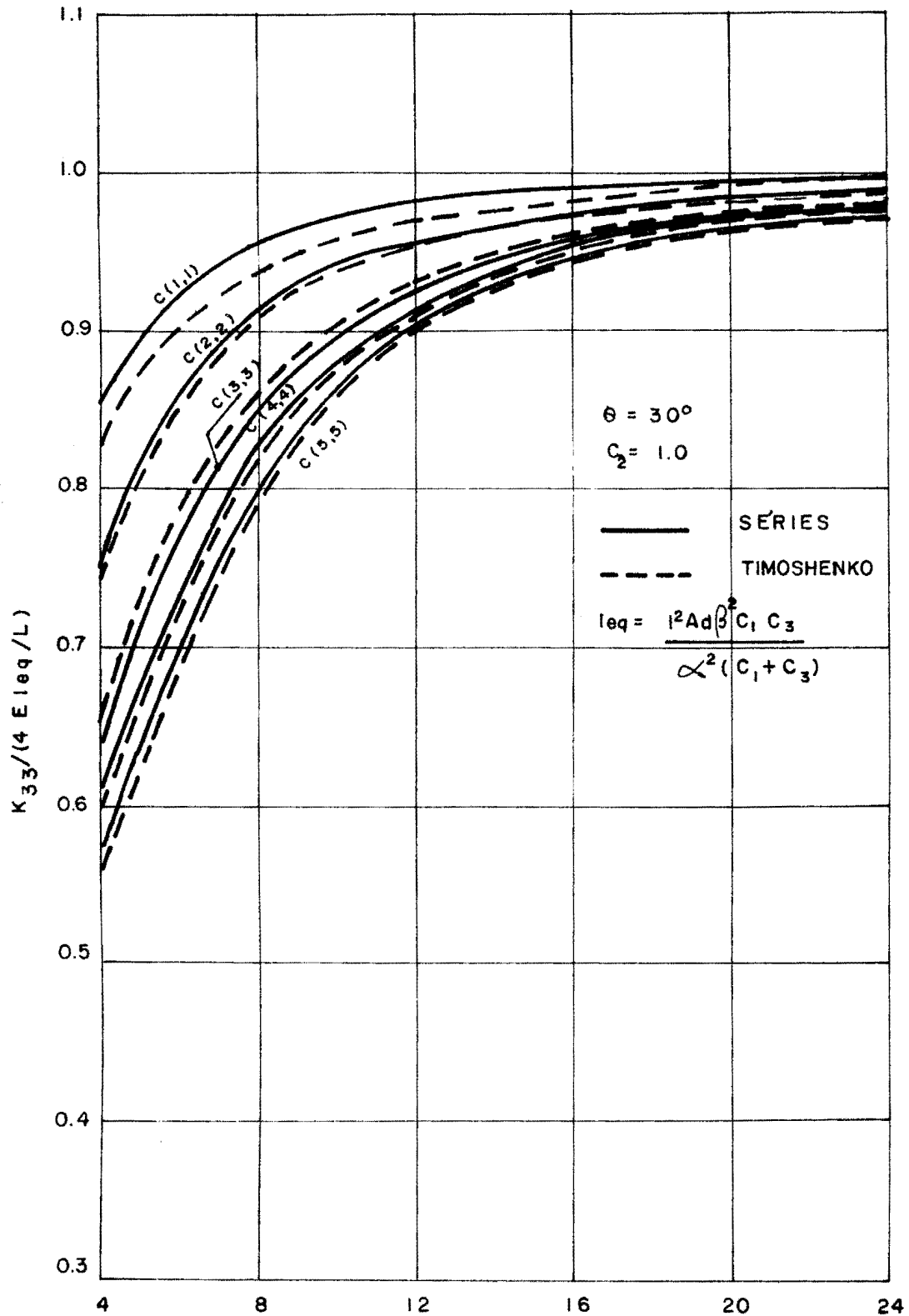
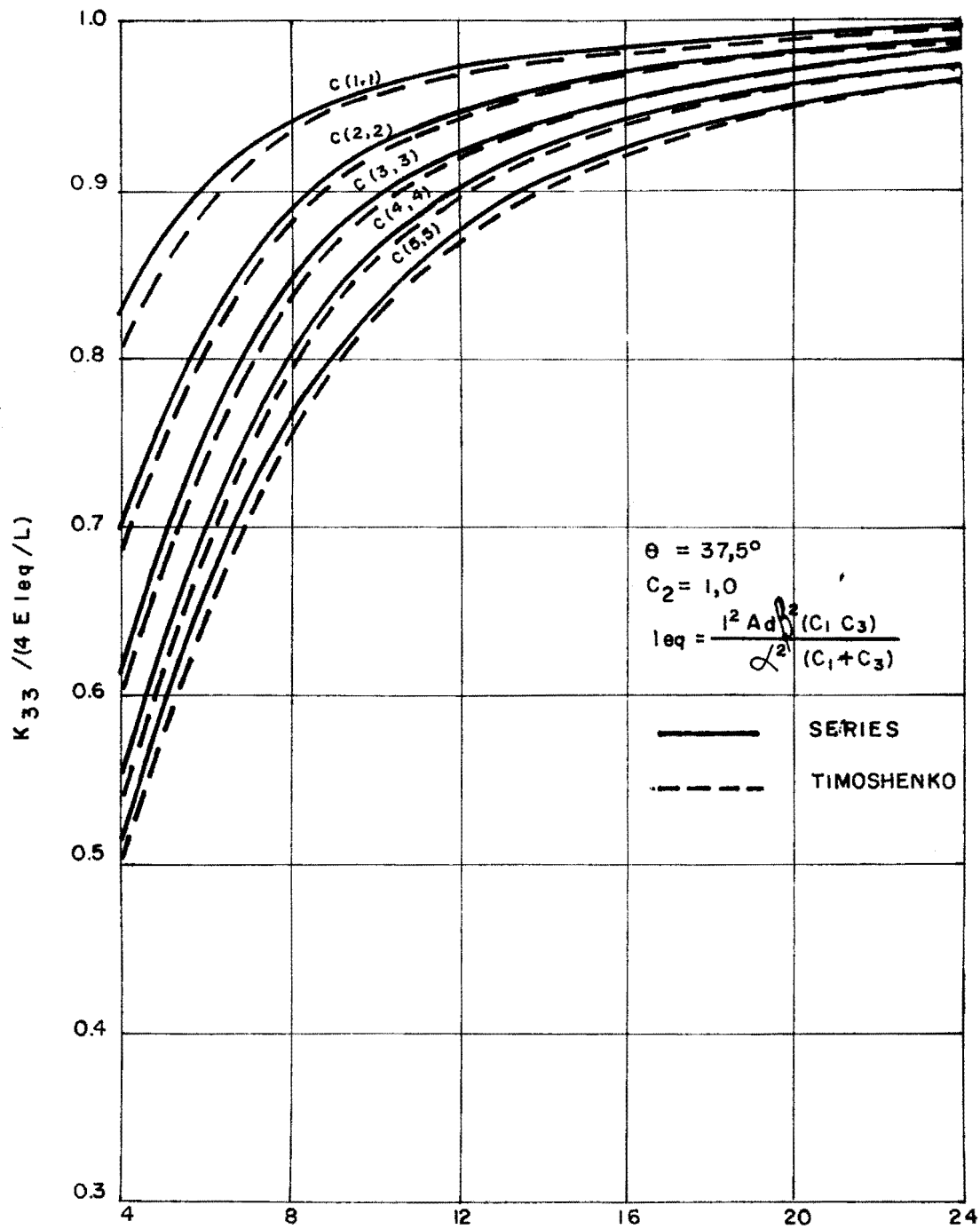


Fig. 5.19



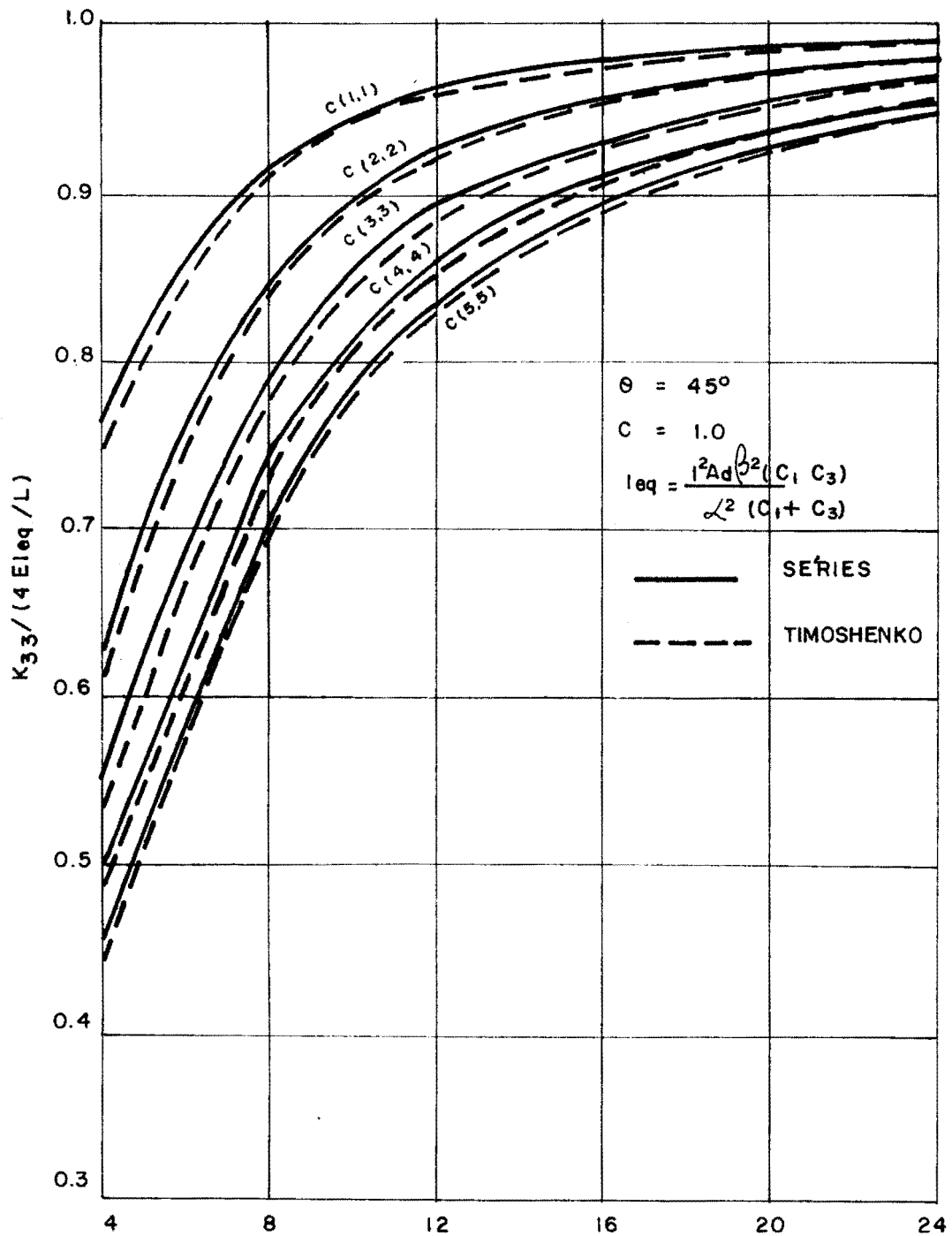
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS. $C(C_1 C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.20



VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS.
 $C (C_1, C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS
 A_s E A_i .

Fig. 5.21



VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS. $C(C_1, C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.22

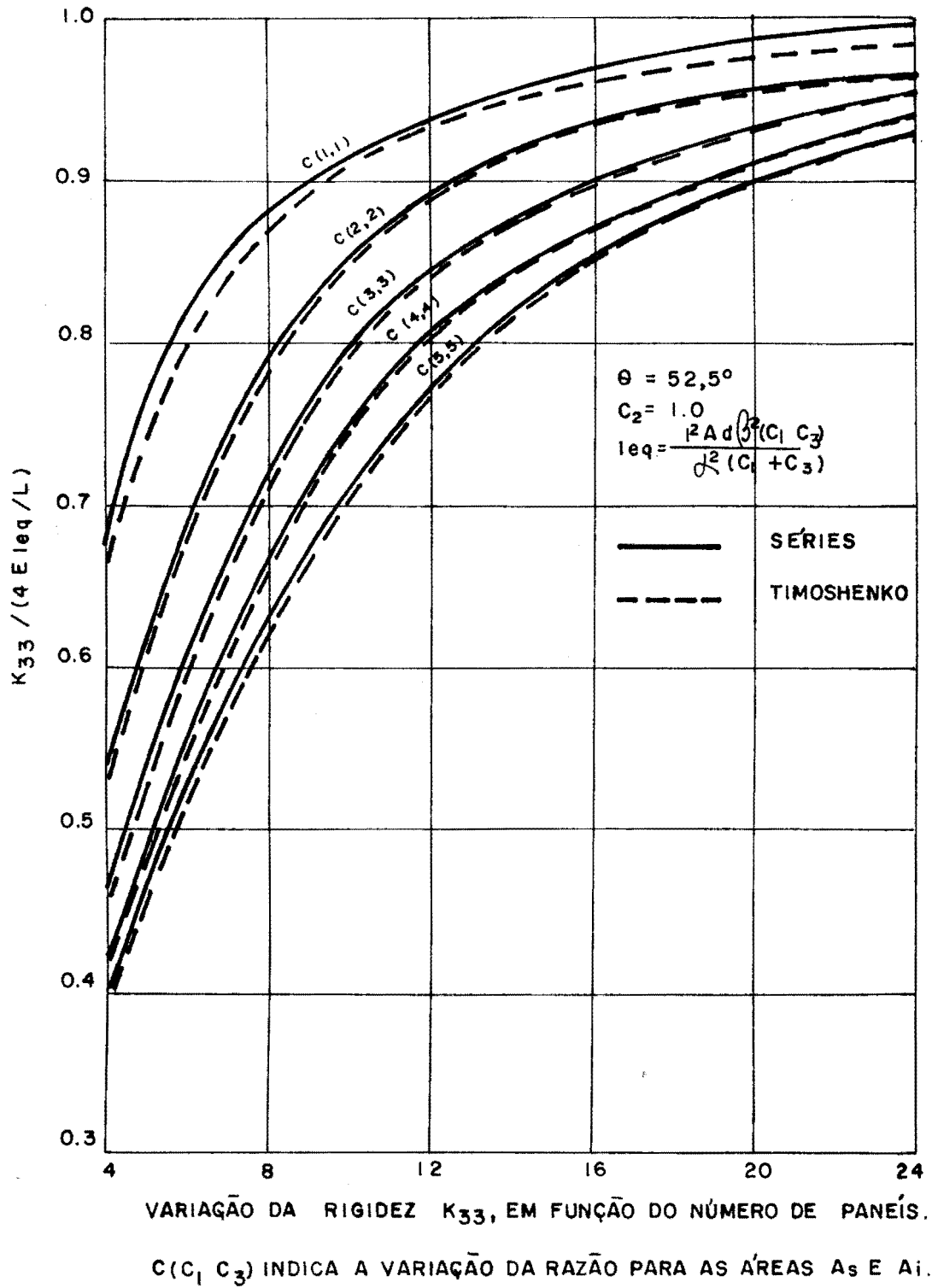
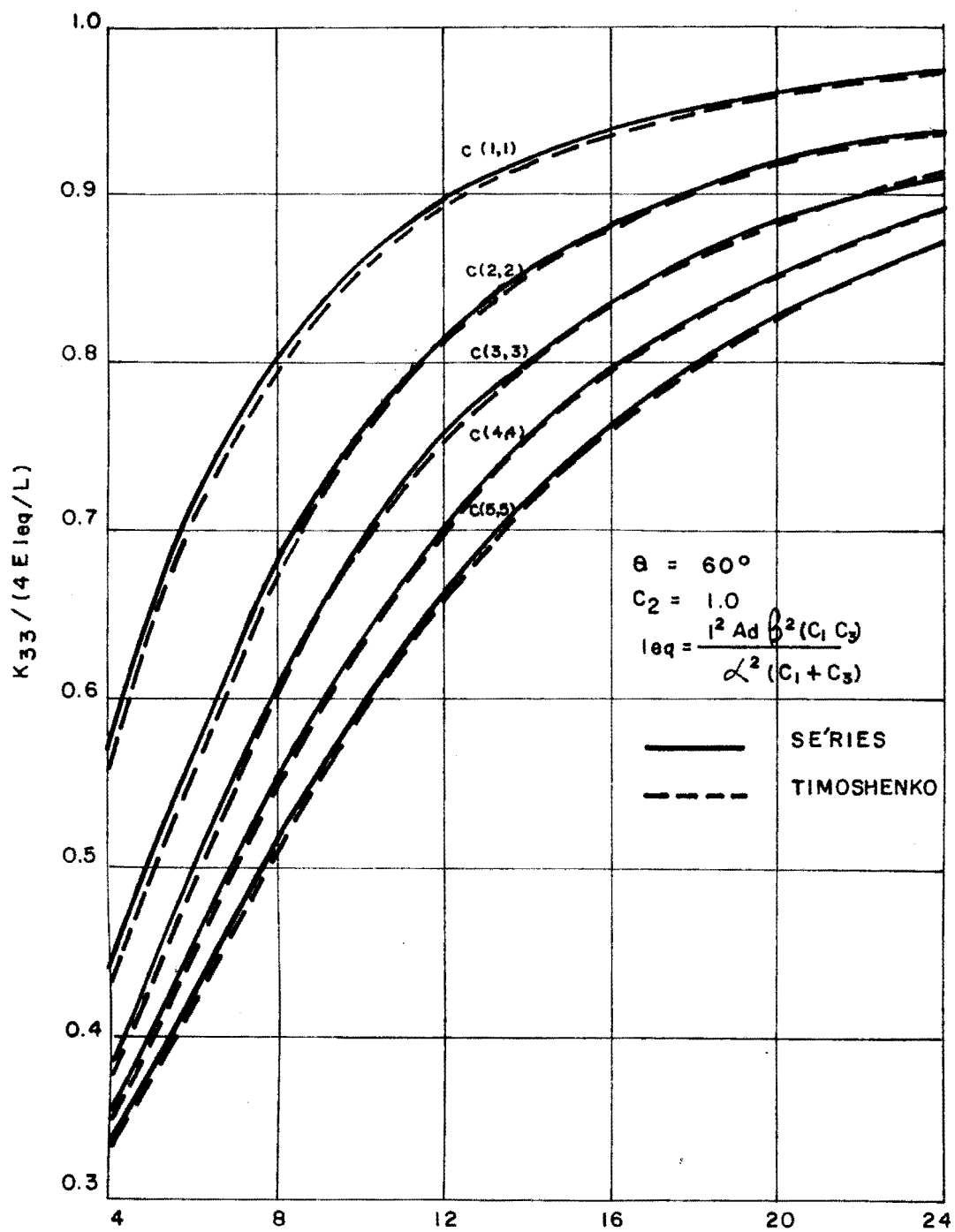
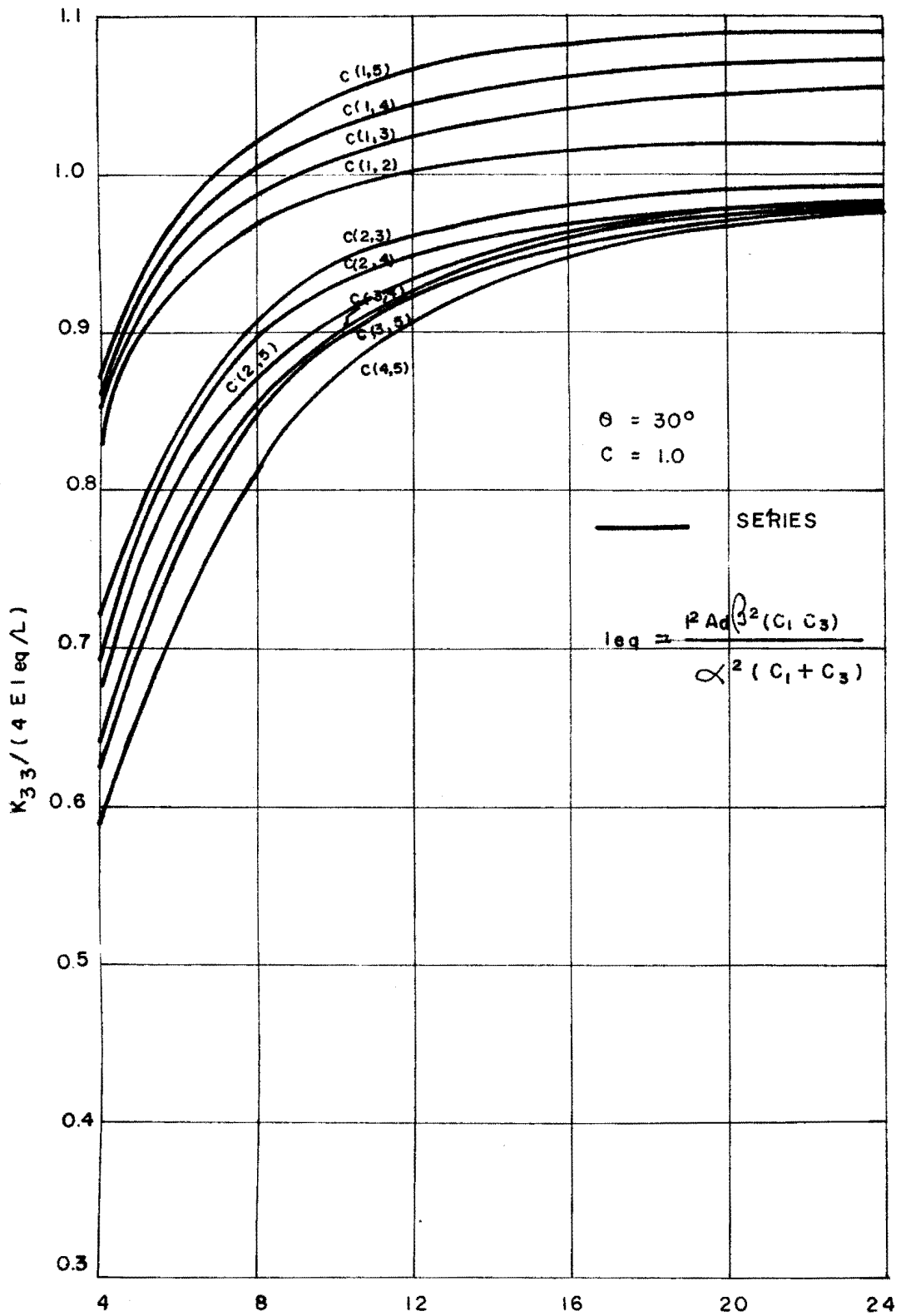


Fig. 5.23



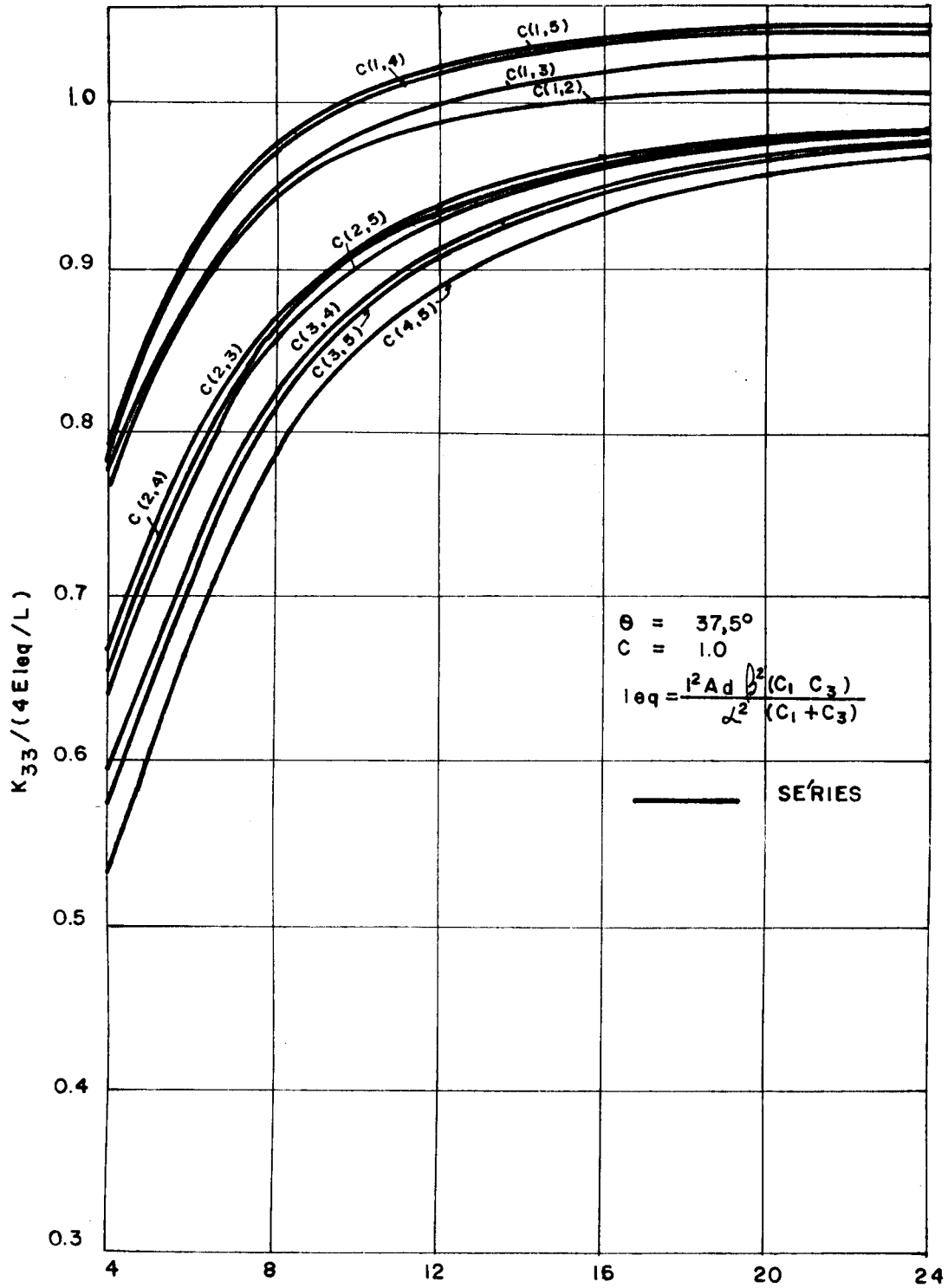
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEÍIS.
 $C (C_1, C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS $A_s E A_i$.

Fig. 5.24



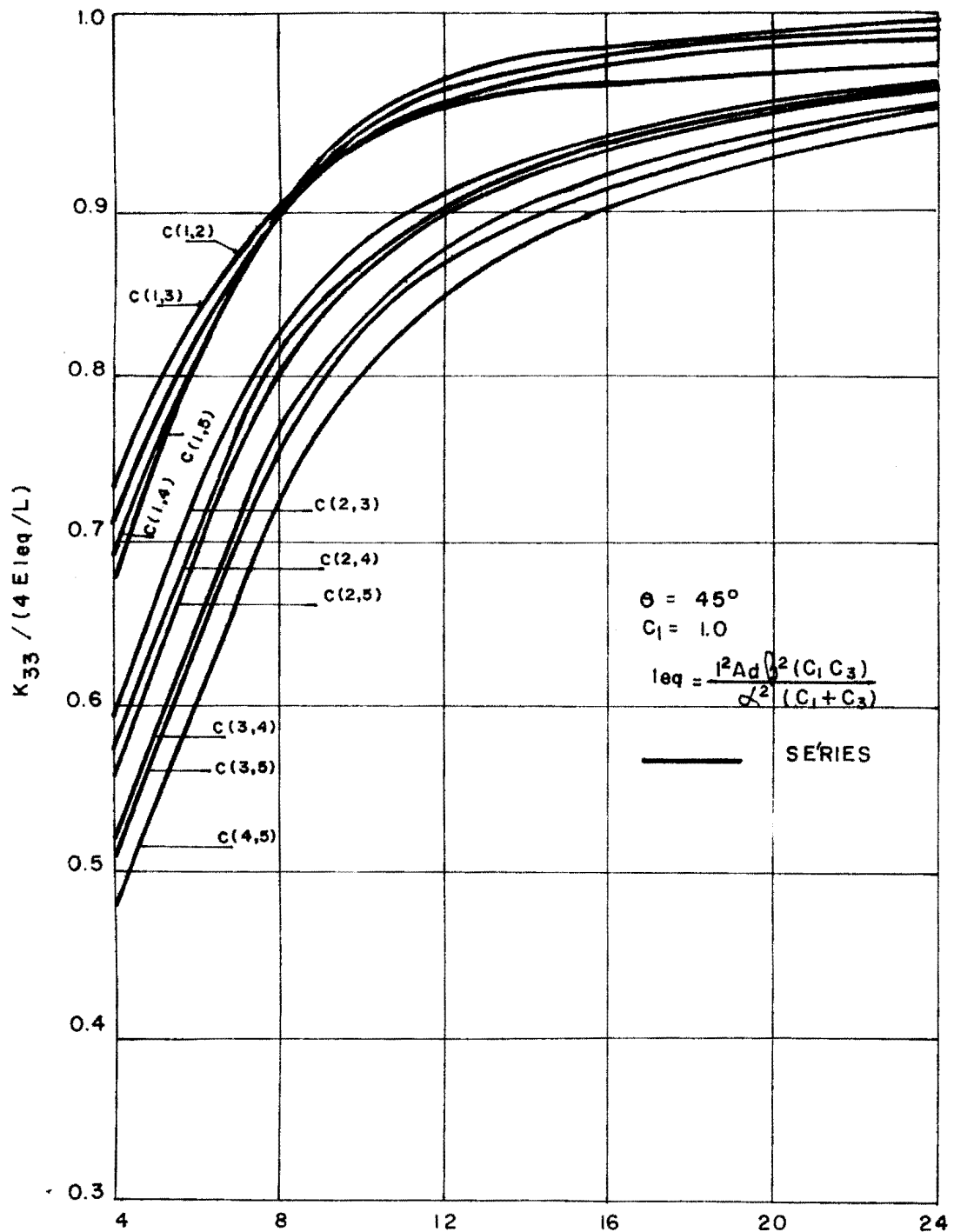
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS. $C(C_1 C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.25



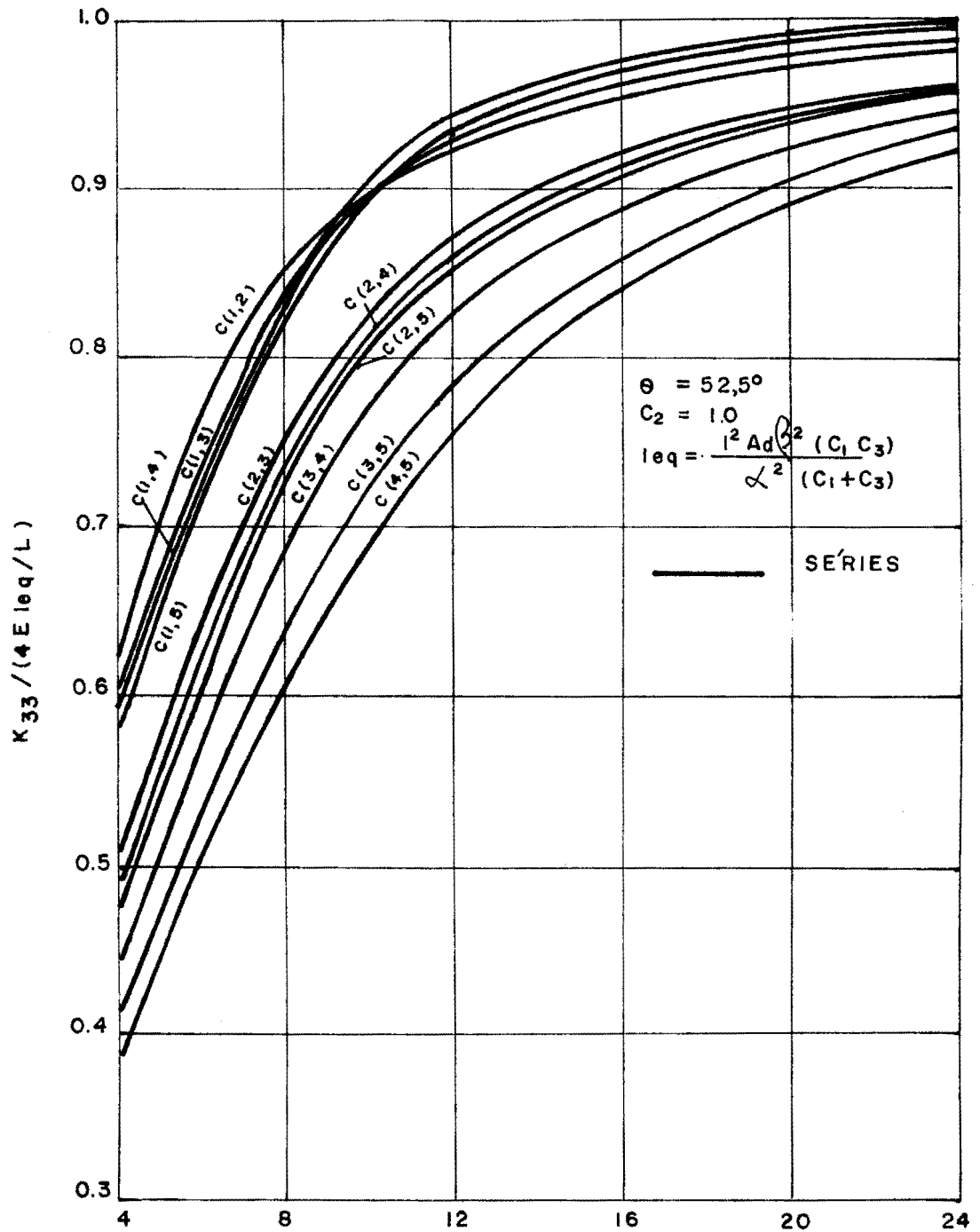
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS.
 $C(C_1 C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.26



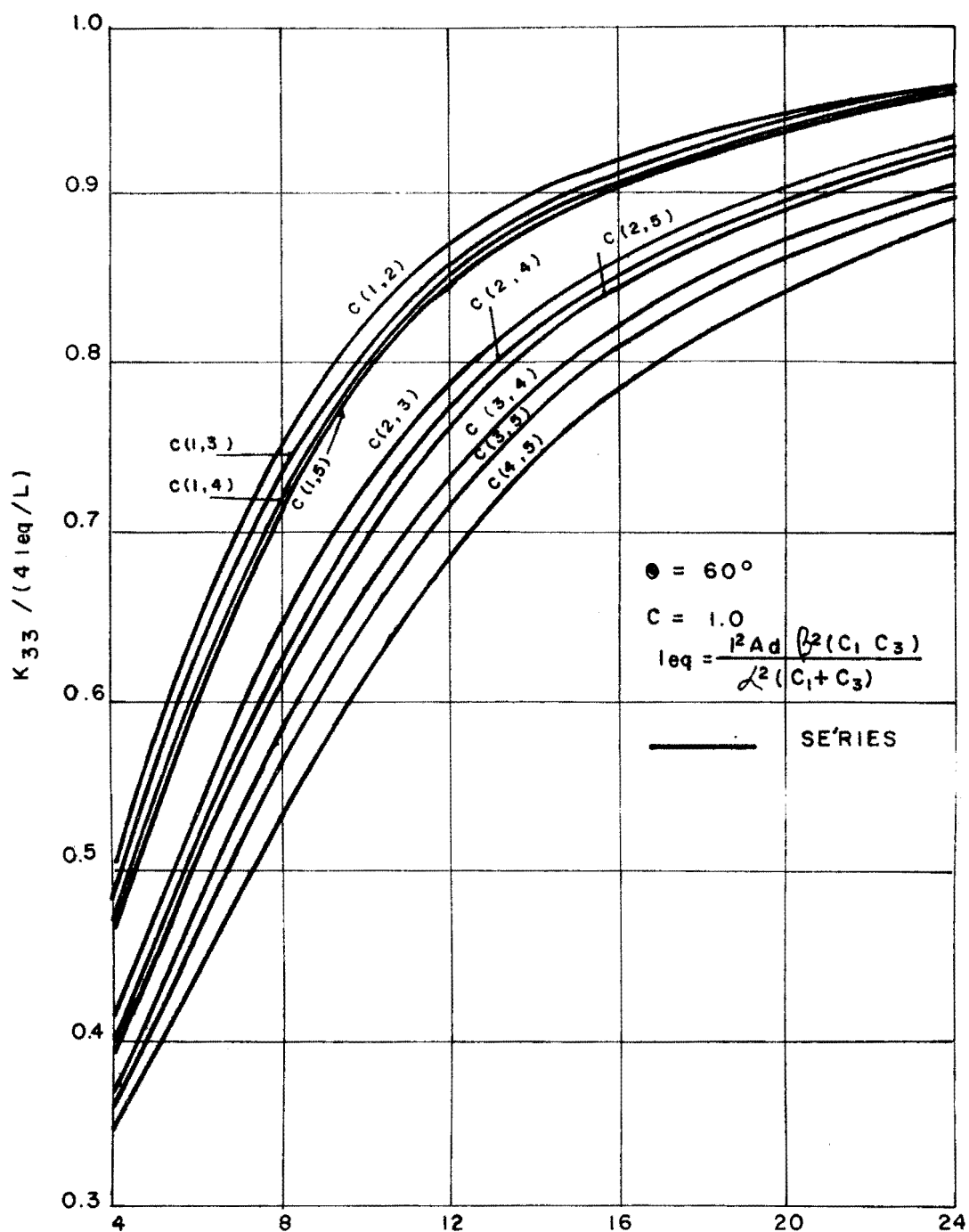
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS. $c(C_1, C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.27



VARIAÇÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANEIS. $c(C_1, C_3)$ INDICA A VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.28



VARIACÃO DA RIGIDEZ K_{33} , EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE PANÉIS.
 $C(C_1, C_3)$ INDICA A VARIACÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E $A_{i...}$

Fig. 5.29

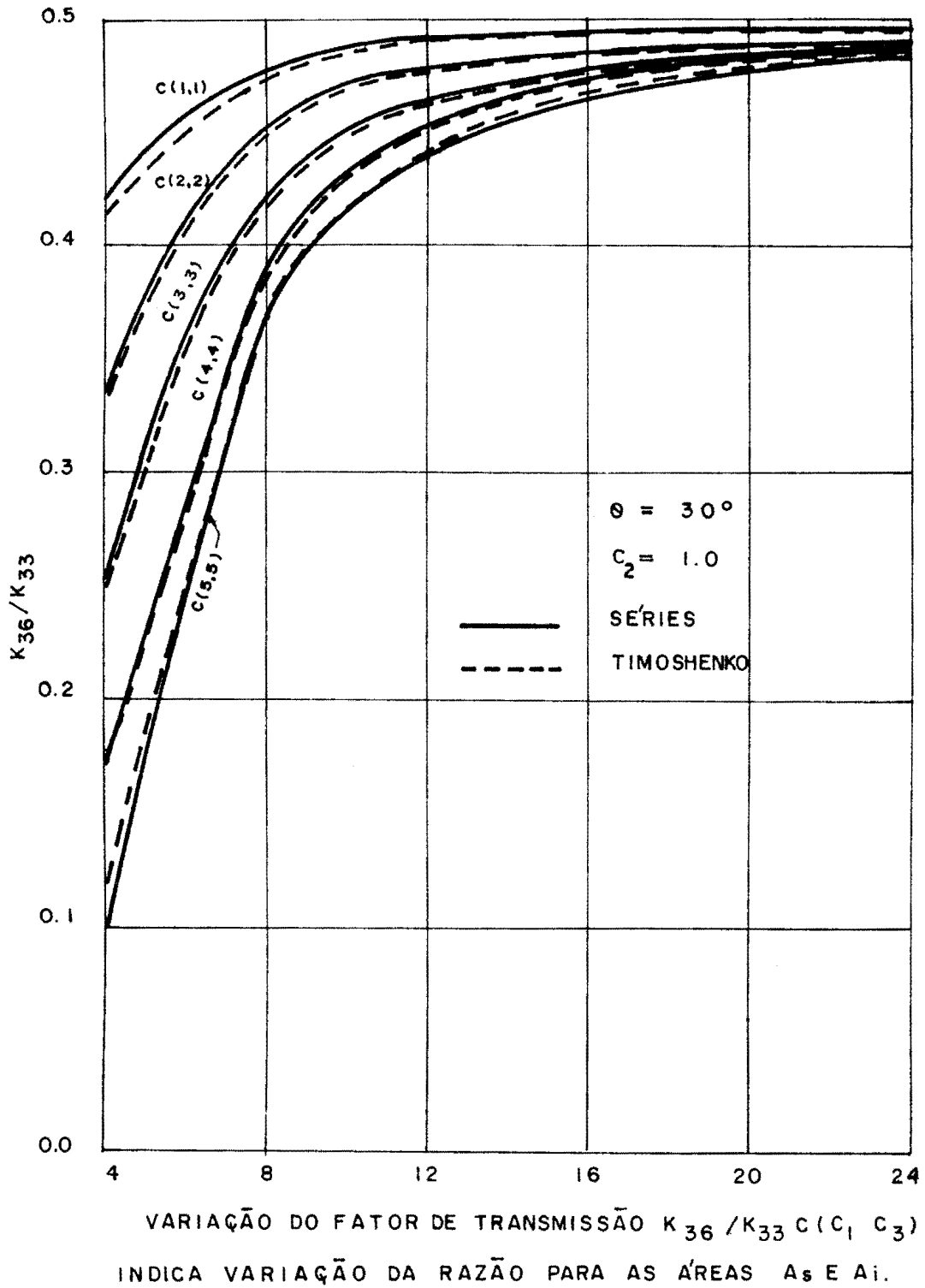


Fig. 5.30

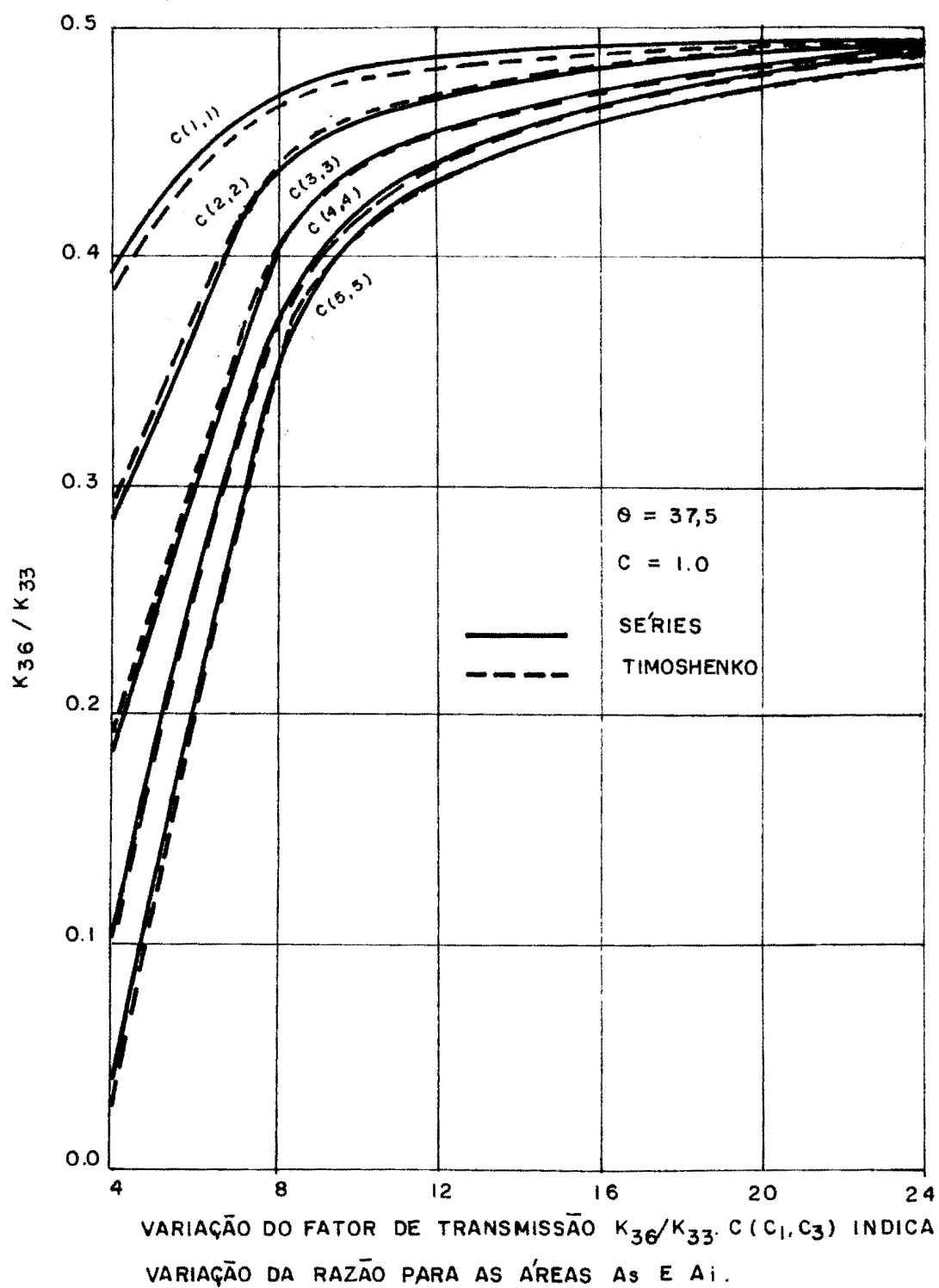


Fig. 531

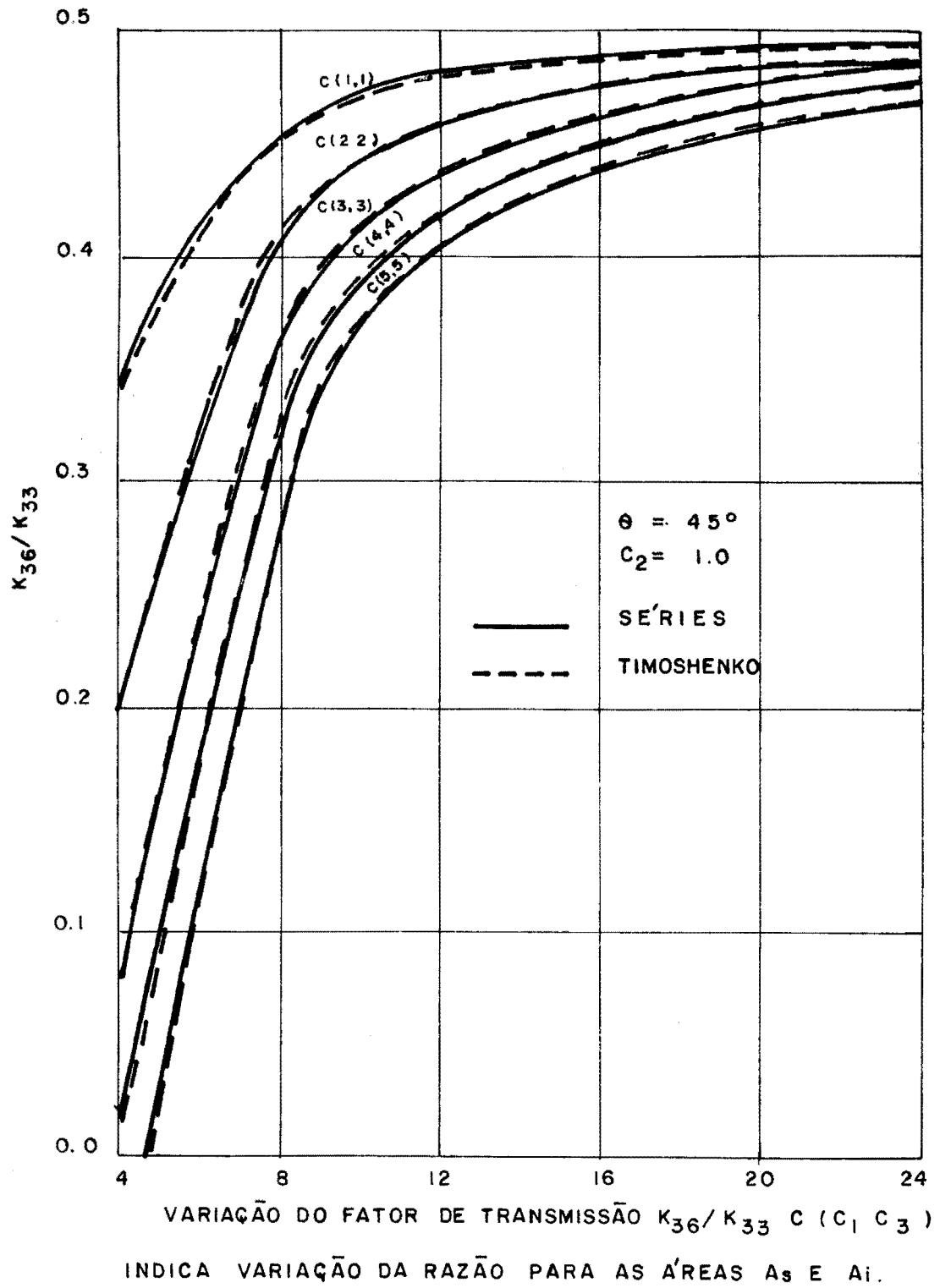
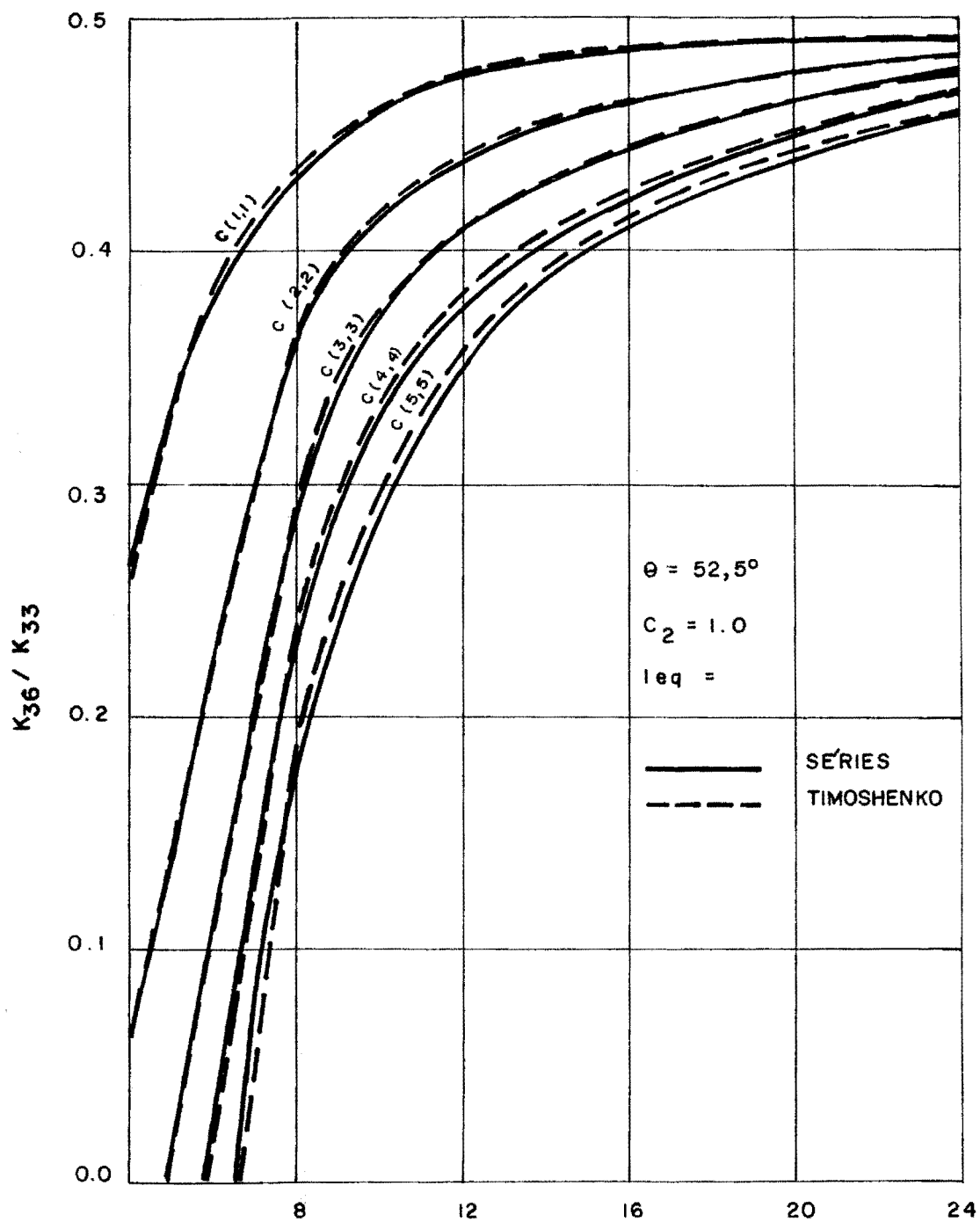
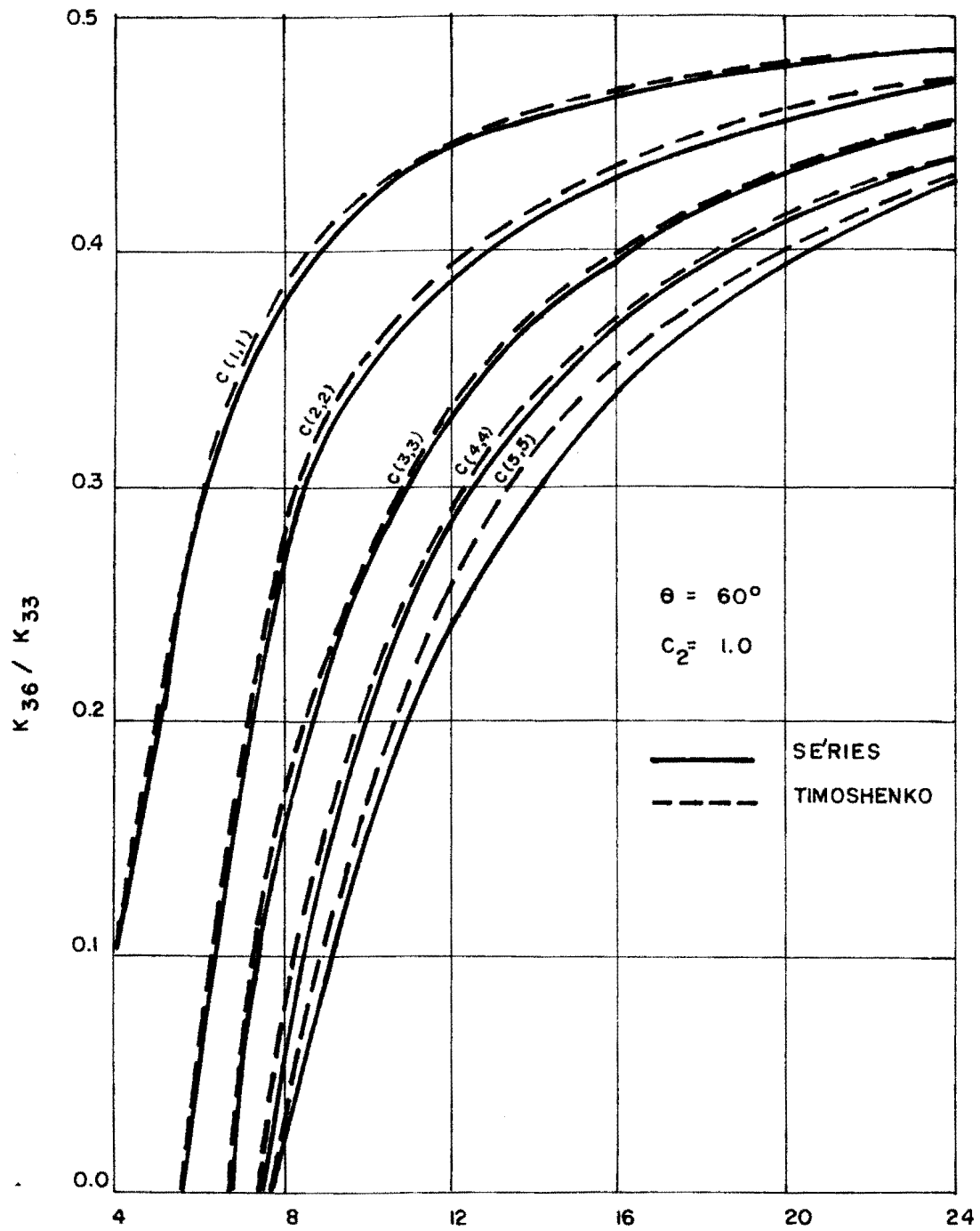


Fig. 5.32



VARIAÇÃO DO FATOR DE TRANSMISSÃO K_{36}/K_{33}
 $C(C_{1.3})$. INDICA VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS
 ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.33



VARIAÇÃO DO FATOR DE TRANSMISSÃO K_{36} / K_{33}
 C (C_1, C_3). INDICA VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS
 A_s E A_i .

Fig. 5.34

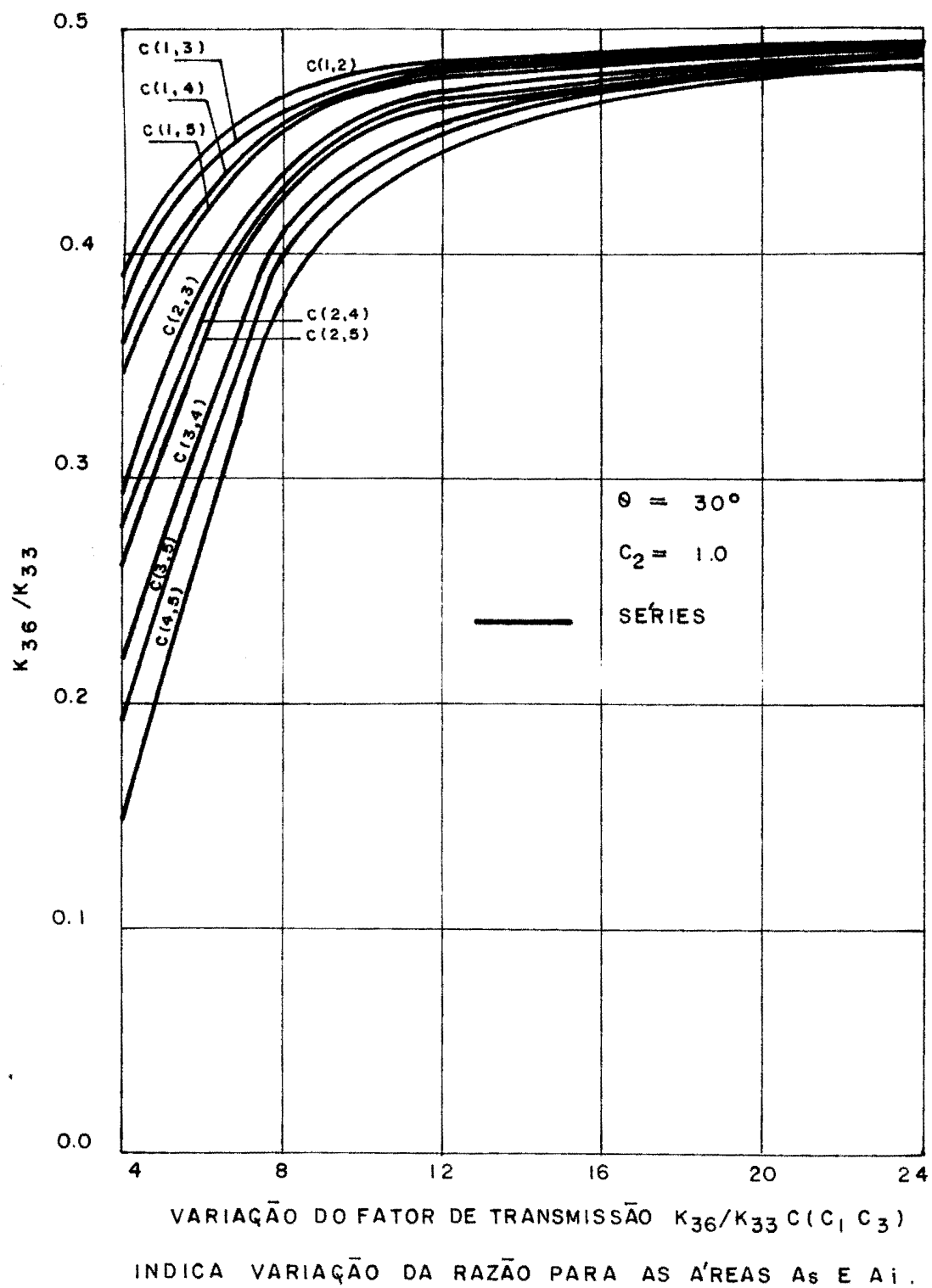
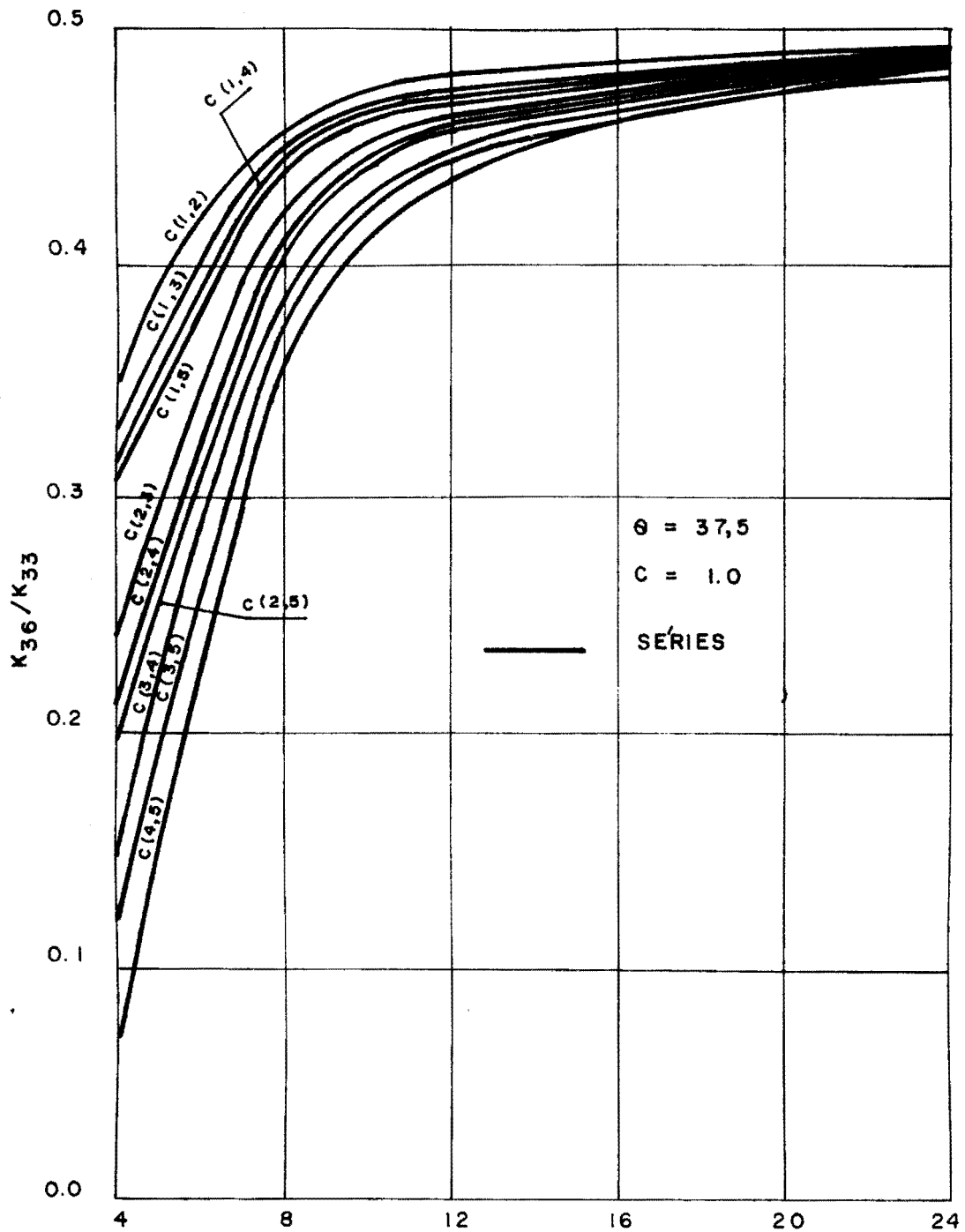


Fig. 5.35



VARIAÇÃO DO FATOR DE TRANSMISSÃO K_{36}/K_{33} . $C(C_1, C_3)$
 INDICA VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS A_s E A_i .

Fig.5.36

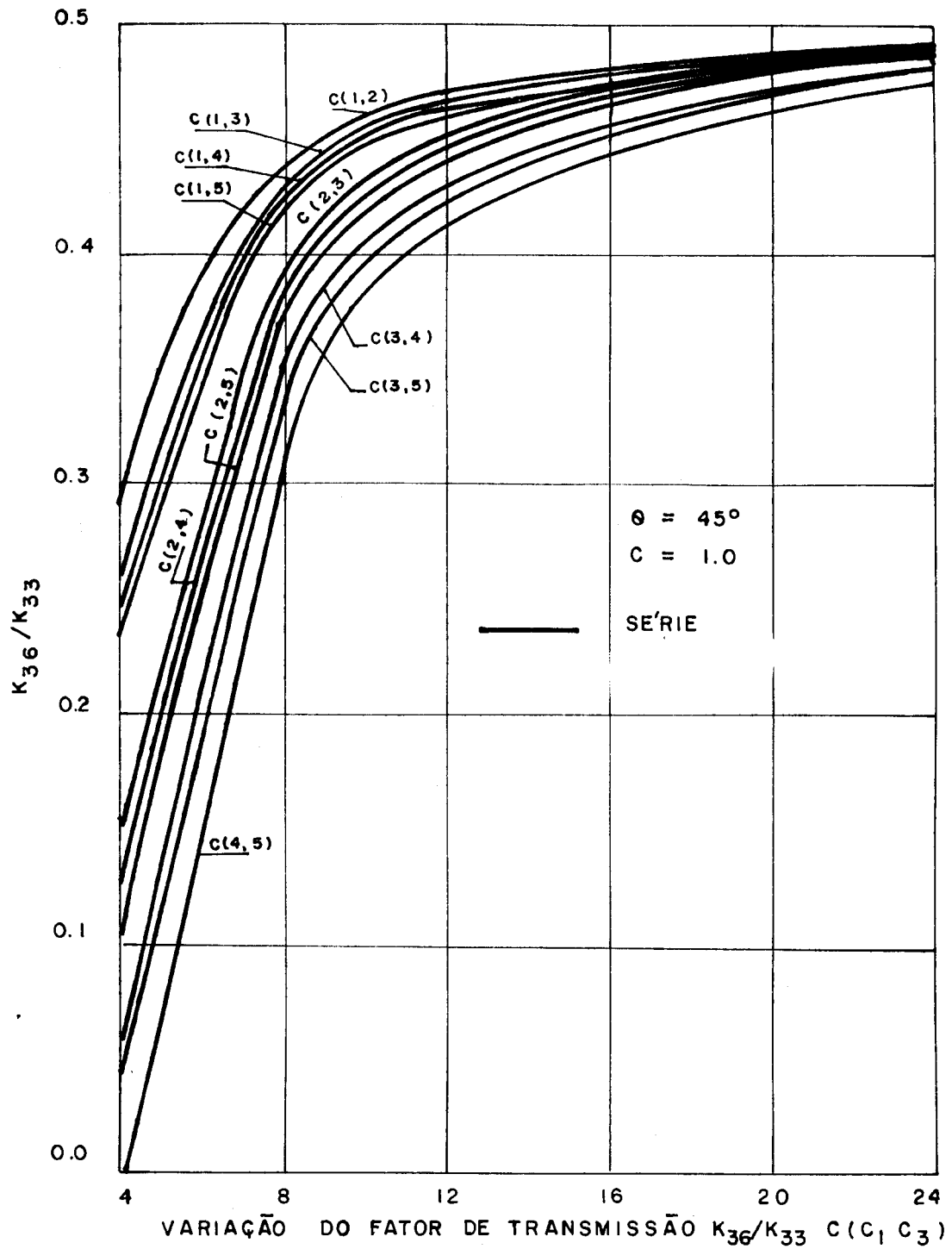
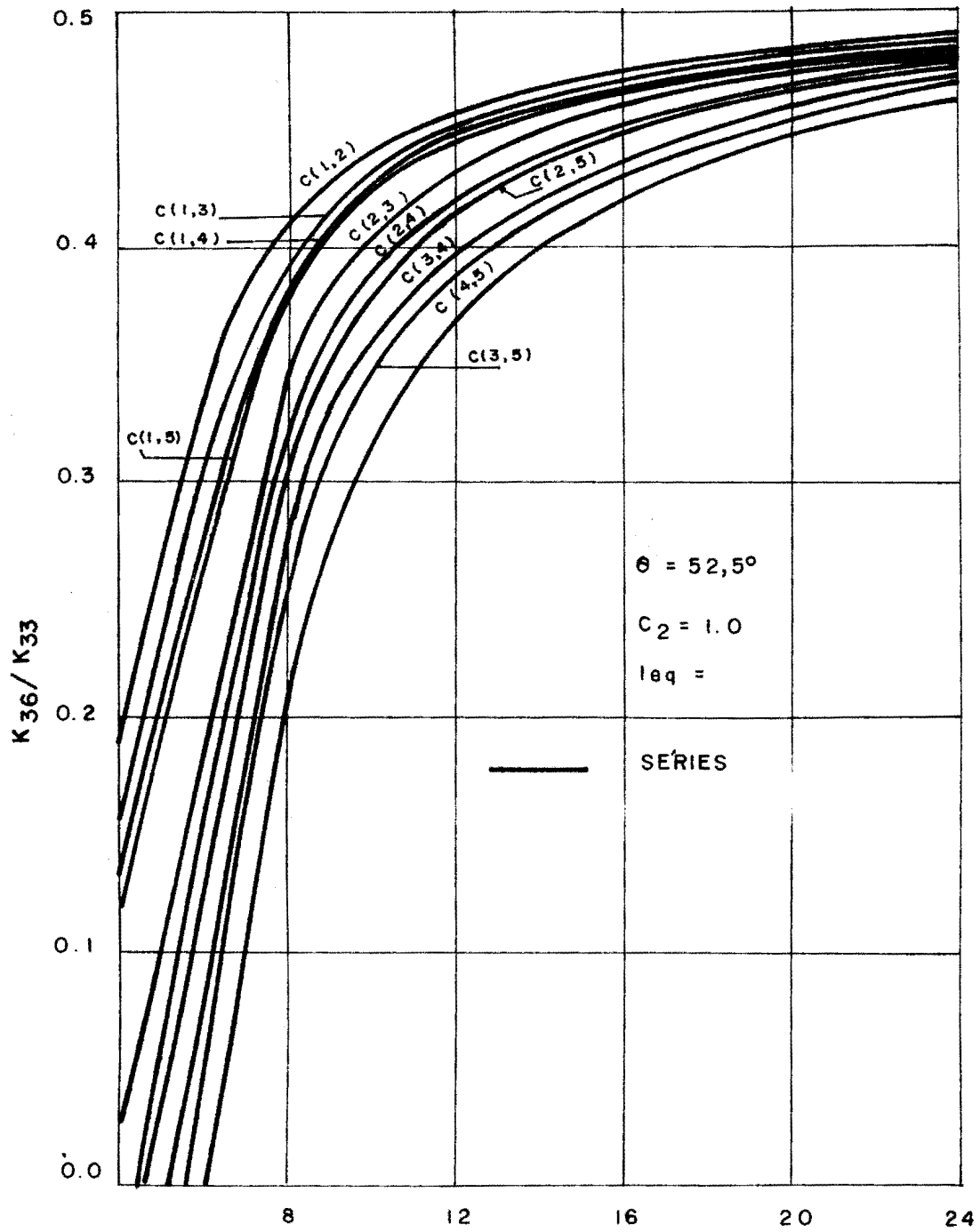
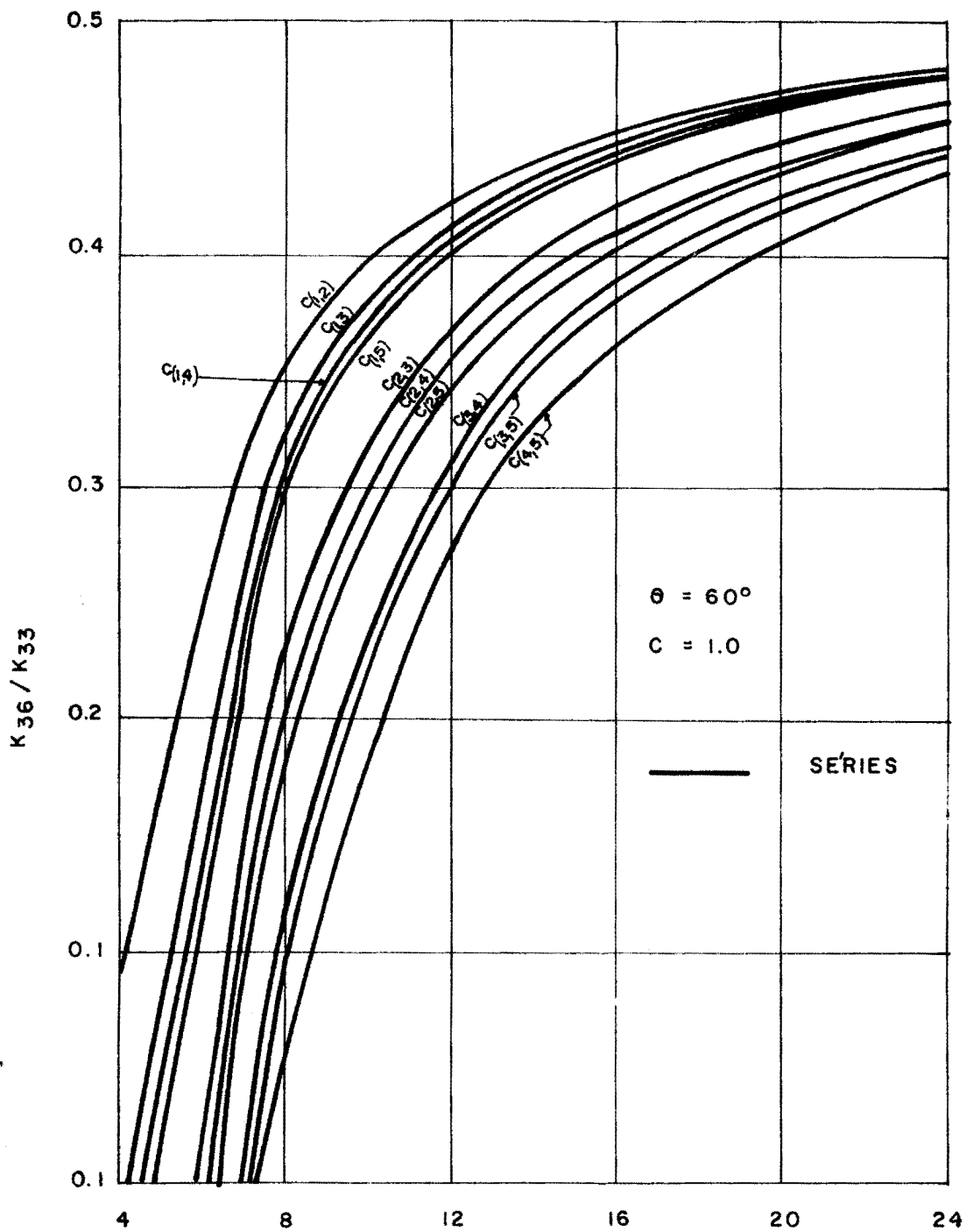


Fig. 5.37



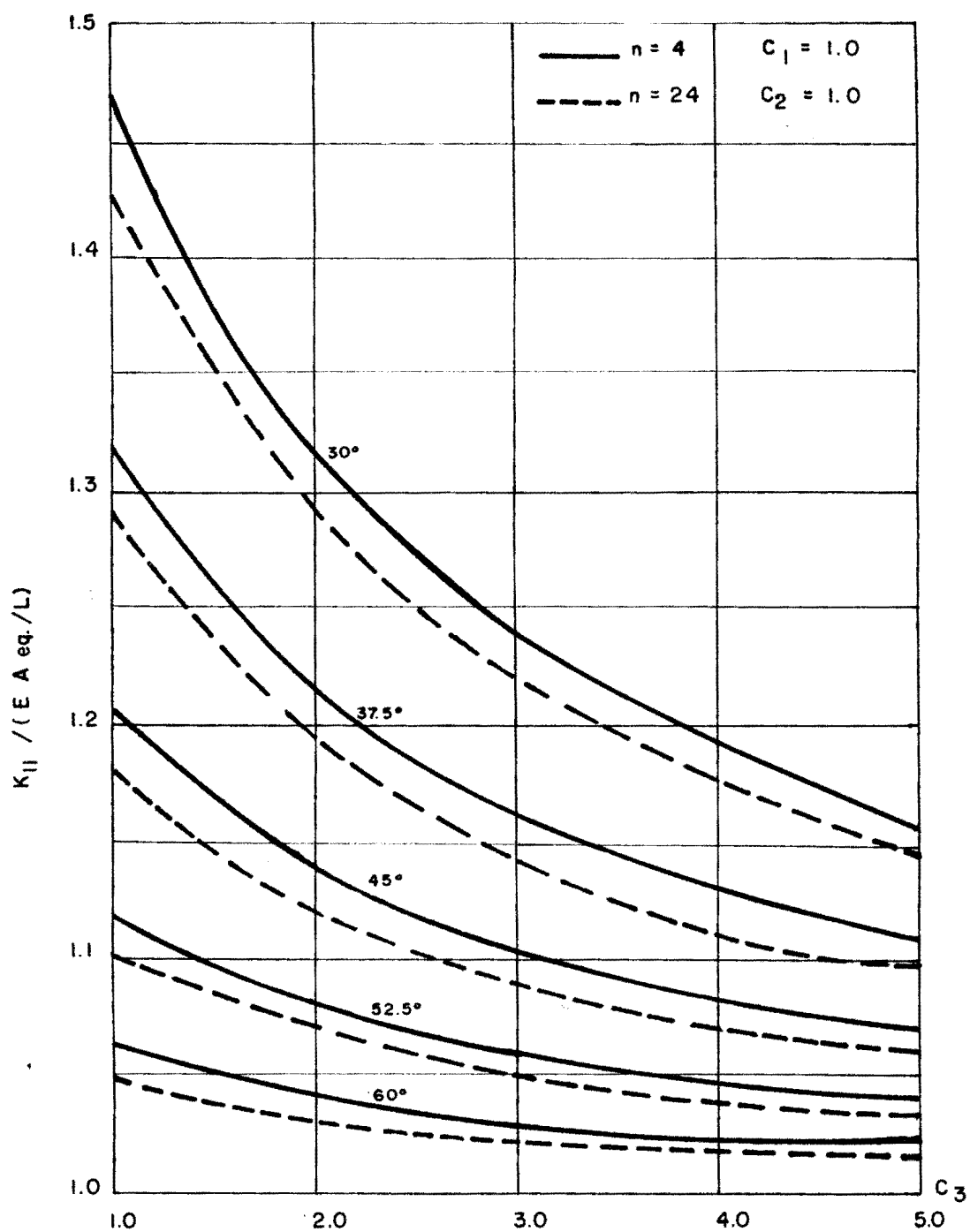
VARIAÇÃO DO FATOR DE TRANSMISSÃO K_{36}/K_{33}
 C (C_1, C_3). INDICA VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS
 ÁREAS A_s E A_i .

Fig. 5.38



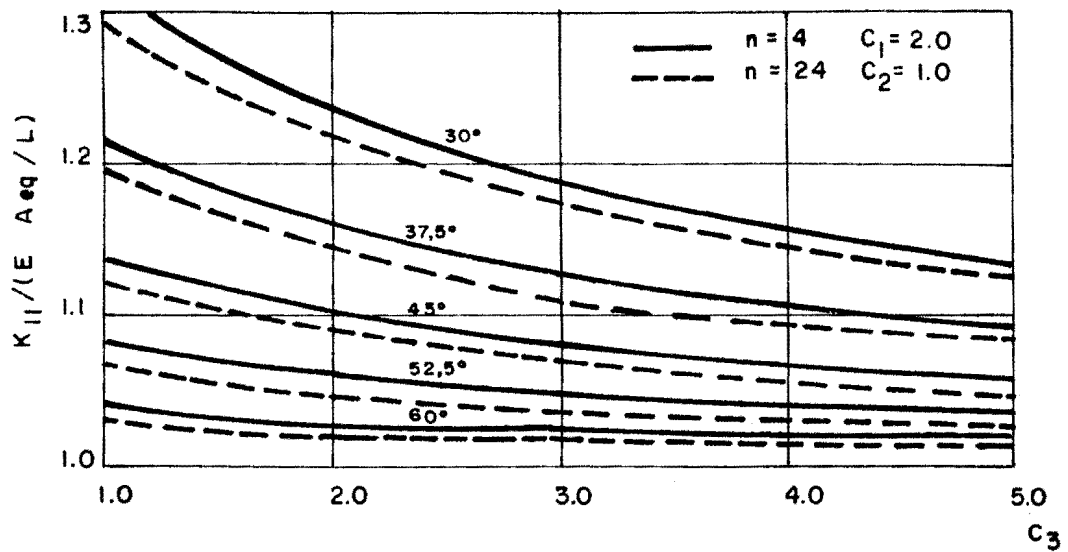
VARIAÇÃO DO FATOR DE TRANSMISSÃO K_{36} / K_{33}
 $C (C_1, C_3)$. INDICA VARIAÇÃO DA RAZÃO PARA AS ÁREAS
 A_s E A_i .

Fig. 5.39



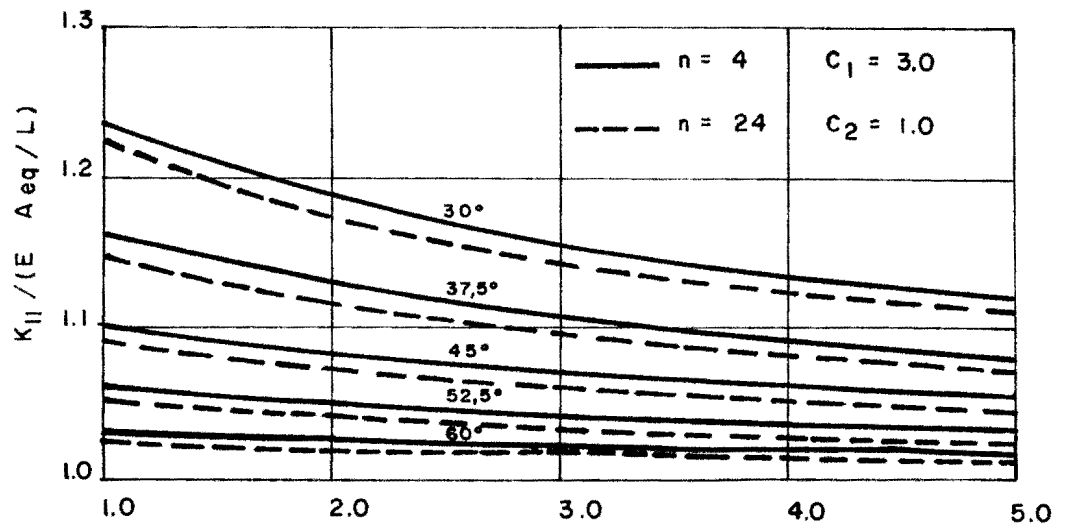
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ AXIAL EM RELAÇÃO A VARIAÇÃO DA ÁREA DOS CORDÕES SUPERIOR E INFERIOR K_{II} — RESOLUÇÃO PELA SÉRIES.

Fig. 5.40



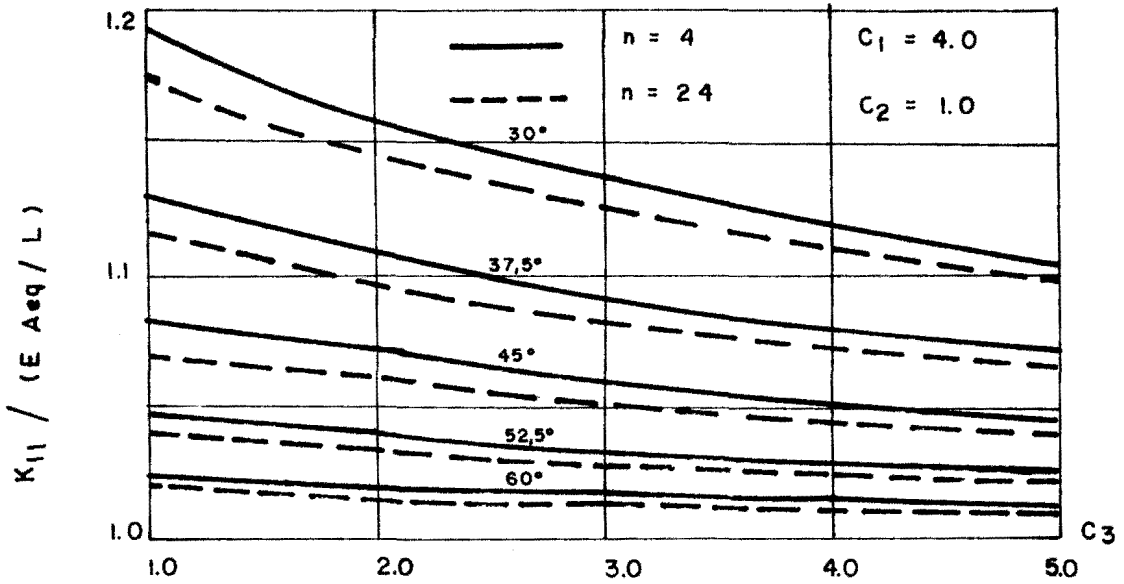
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ AXIAL EM RELAÇÃO A VARIACÃO DE ÁREA DOS CORDÕES SUPERIOR E INFERIOR. K_{II} — RESOLUÇÃO PELAS SÉRIES.

Fig. 5.41



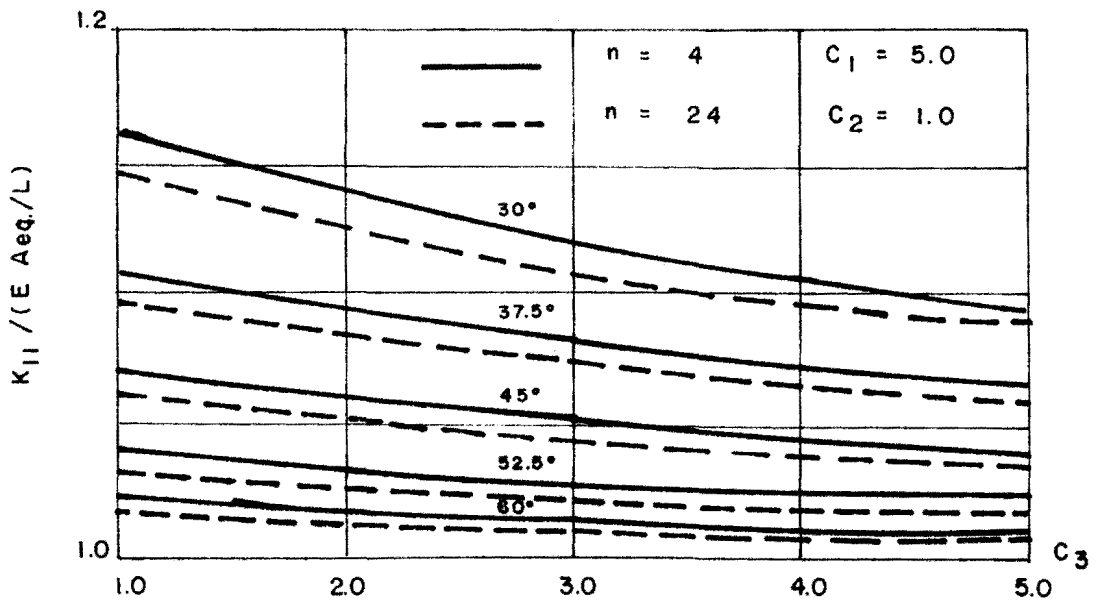
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ AXIAL EM RELAÇÃO A VARIACÃO DE ÁREA DOS CORDÕES SUPERIOR E INFERIOR. K_{II} — RESOLUÇÃO PELAS SÉRIES.

Fig. 5.42



VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ AXIAL EM RELAÇÃO A VARIACÃO DA ÁREA DOS CORDÕES SUPERIOR E INFERIOR. K_{II} - RESOLUÇÃO PELAS SÉRIES

Fig. 5.43



VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ AXIAL EM RELAÇÃO A VARIACÃO DA ÁREA DOS CORDÕES SUPERIOR E INFERIOR. K_{II} - RESOLUÇÃO PELAS SÉRIES.

Fig. 5.44

VI. CONCLUSÕES

Este capítulo encerra as considerações finais e conclusões sobre o presente trabalho, em que se procura analisar os resultados frente a soluções por métodos tradicionais, bem como apresentar algumas sugestões para o prosseguimento dessa linha de estudo.

A primeira consideração importante, antes de se entrar no conteúdo propriamente dito, é a grande facilidade de uso computacional que proporciona a utilização de microcomputadores. A disponibilidade permanente de equipamentos e a operação diretamente pelo usuário tornam mais acessível a montagem e correção de programas computacionais.

As expressões e equações matemáticas ao longo do trabalho, muitas vezes se mostram muito extensas e áridas, mas procurou-se explicitar passos intermediários na obtenção das equações finais, a fim de permitir uma melhor compreensão por parte do leitor.

A utilização de rigidezes e momentos de inércia equivalentes permite que segmentos de vigas treliçadas sejam analisados como segmentos de vigas prismáticas de secções cheias. A consideração de um único vão entre dois apoios consecutivos, com conseqüente diminuição das dimensões da matriz de rigidez global, reduz o esforço computacional.

O método das séries finitas é solução exata para os coeficientes de rigidez, deslocamentos e forças nas barras porque usa-se diferenças finitas para um problema que é naturalmente discreto e, conseqüentemente, funciona bem para qualquer número de painéis por vão, conforme comprovam os resultados dos exemplos apresentados no capítulo V.

O método em séries para as vigas treliçadas em X exige apoios nos dois nós de extremidade de barra, cordão superior e inferior, a fim de atender as condições de contorno para as

séries em seno dos deslocamentos.

O capítulo V apresenta comparações entre os resultados de exemplos com e sem apoios nos dois cordões. As alterações nos resultados devido a subtração dos apoios superiores são maiores próximo aos apoios e, para vãos com menos de 12 painéis, as diferenças nos resultados situam-se em torno de 10% para os valores máximos.

As vigas treliçadas, na prática, dificilmente apresentam apoios nos dois cordões, embora muitas vezes, o encontro ou cruzamento de duas ou mais vigas nos apoios estabeleça uma maior rigidez, simulando os apoios do cordão superior. Quando isso não ocorrer, pode-se utilizar barras verticais com grande rigidez para os montantes que ficam nos apoios, principalmente quando o número de painéis por vão for menor que 12, onde a influência é maior.

O exemplo de pórtico plano apresentado no capítulo V possibilitou a verificação da equação para o coeficiente de rigidez axial k_{11} . Apesar de algumas dificuldades para a representação das extremidades das barras, os resultados mostraram-se bons, com erros menores que 5% para os valores máximos.

As expressões para os coeficientes de rigidez obtidos através de momentos de inércia equivalentes e consideração da influência da deformação por corte [12] são mais simples e fáceis de calcular do que os coeficientes de rigidez pelas séries, mas só funcionam com boa aproximação para um número de painéis acima de 12.

A solução de vigas treliçadas isostáticas tipo Warren é exata porque envolve somente equações de equilíbrio.

Para vigas contínuas Warren os resultados, para um número de painéis abaixo de 12, apresentam diferenças em torno de 10% e, para tramos com mais de 12 painéis, os resultados apresentam erros em torno de 1%. Essas diferenças nos resultados são devidas às aproximações assumidas nas equações dos momentos de inércia equivalentes.

O capítulo IV apresenta um estudo sobre momentos de inércia equivalentes onde os resultados de exemplos, através das equações obtidas nesse capítulo, são comparados com resultados

tradicionais da literatura. Esses exemplos mostram, claramente, a grande influência que têm o número de painéis no momento de inércia equivalente quando o número de painéis por vão for menor que 12. Neste caso, os momentos de inércia equivalentes da literatura tradicional, não devem ser usados.

A rigidez equivalente considerando-se somente a contribuição das áreas das secções transversais das barras dos cordões superior e inferior, para um número de painéis menor que 12 fornece valores maiores que os reais, conforme exemplos do capítulo IV.

O uso de coeficientes de rigidez considerando-se momentos de inércia equivalentes devem ser corrigidos, conforme os ábacos, quando o número de painéis for menor que 24.

Os resultados pelas séries e os propostos por |12| apresentam-se muito próximos entre si. A grande influência do número de painéis no coeficiente k_{33} é apresentada nas figuras (5.20) a (5.29) em que a convergência para o valor exato ocorre para um número de painéis acima de 24.

Para os coeficientes de transmissão k_{36}/k_{33} conforme figuras (5.30) a (5.39), nota-se que a medida que o ângulo de inclinação das barras diagonais com a horizontal aumenta, a convergência do fator de transmissão para o valor 0.5 em função do número de painéis, fica mais lenta. Este fenômeno é justificado porque aumentando-se o ângulo, as barras diagonais contribuem menor à flexão, como pode ser observado comparando-se as figuras (5.30) a (5.39) entre si. Uma observação similar é válida para os coeficientes $k_{33}/(4 EI \text{ eq/L})$.

A observação e comparação entre si das figuras (5.39) a (5.44) permite a conclusão de que a rigidez axial é aumentada quando se diminui o ângulo θ e, que a rigidez axial $E A_{\text{eq}}/L$ mais se aproxima do valor exato fornecido pelas equações em séries quando são aumentadas as relações entre as áreas dos cordões com a área da secção transversal das barras diagonais.

As comparações entre os resultados obtidos nos exemplos, pelas diversas maneiras de se considerar os coeficientes de rigidez equivalentes a partir de momentos de inércia equivalentes, permitem um melhor conhecimento do grau de precisão das aproximações assumidas.

Os estudos de pórtico plano com barras treliçadas em X e Warren, inclinadas e em balanço, torção e placas ficam como sugestões de casos gerais para próximos trabalhos.

O estudo de torres metálicas treliçadas é um caso particular que também poderá ser desenvolvido por este método.

BIBLIOGRAFIA

1. AVENT, R. Richard. Deflection and ponding of steel joists. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 102(7):1399-410, July 1976.
2. AVENT, R. Richard & ISSA, Raja R.A. Beam element stiffness matrix for X-braced truss. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 108(10):2192-210, Oct. 1982.
3. BLEICH, F. & RAMSEY, L.B. Buckling strength of metal structures. New York, McGraw-Hill, 1952.
4. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1978.
5. DEAN, D.L. & TAUBER, S. Solutions for one-dimensional structural lattices. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 85(4):31-41, Oct. 1959.
6. FERRANTE, Agustin J. et alii. A linguagem LORANE linear para análise estrutural por computador. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1977.
7. GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Análise de estruturas reticuladas. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.
8. GERSTLE, Kurt H. Basic structural analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1974.

9. HUSSEY, M.J.L.; TARZI, A.I.; THERON, W.F.D. Simply supported rectangular double-layered grids. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(3):753-64, Mar. 1971.
10. JOLLEY, L. Summation of series. New York, Dover, 1961.
11. KARMAN, Theodore von & BIOT, Maurice A. Mathematical methods in engineering. New York, McGraw-Hill, 1940.
12. KLEIN, D.L. Funções de estabilidade aplicadas em estruturas reticuladas. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1972. Diss. maestr. engenharia civil.
13. POLIMAX SISTEMAS E PERIFÉRICOS LTDA. Basic interpreter preliminary user's manual. São Paulo, 1982.
14. POPOV, Egor P. Introdução à mecânica dos sólidos. São Paulo, Edgard Blücher, 1978.
15. RENTON, J.D. Behavior of howe, pratt, and warren trusses. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(2):183-202, Feb. 1969.
16. RIERA, Jorge D.; REIMUNDÍN, Juan C.; CUDMANI, Robert C. Análisis de estructuras de barras considerando el efecto de fuerzas axiales y deformaciones por corte. Tucumán, Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán, S.d.
17. SOARES, J.M.D.; TAMAGNA, A.; HENNEMANN, J.C. Matriz de rigidez de pórtico plano formado por treliças regulares. Trabalho apresentado na XXII Jornada Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Chile, 1983.

18. THEIN, Wab & CALCOTE, Lee R. Structural analysis by finite difference calculus. New York, Van Nostrand, 1970.
19. TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE, James M. Theory of elastic stability. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1961.
20. WANG, Ping-Chun. Numerical and matrix methods in structural mechanics, with applications to computers. New York, John Wiley, 1966.