Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Contribuições para a teoria de equações dos meios porosos com termos advectivos

Nicolau Matiel Lunardi Diehl

Tese de Doutorado

Porto Alegre, 23 de setembro de 2015.

Tese submetida por Nicolau Matiel Lunardi Diehl[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Esequia Sauter (UFRGS)
Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)
Dra. Lineia Schutz (UFRGS)
Dra. Lucinéia Fabris (UFSM)
Dr. Wilberclay Gonçalves Melo (UFS)

Data da Apresentação: 23 de setembro de 2015.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes

Sumário

Resumo

Nesta tese de doutorado examinamos propriedades qualitativas de soluções de equações de filtragem e, mais especificamente, de equações de meios porosos (ou *porous medium equations* e daí a sigla PME's).

As equações de filtragem modelam diversos fenômenos físicos, entre eles destacamos a dinâmica de gases ou fluidos em meios porosos.

No capítulo dois, obtemos um princípio de comparação e unicidade de solução (fraca) para equações de filtragem com condições de Cauchy.

Obtemos ainda, no capítulo três, alguns resultados básicos sobre as soluções para a equação de meios porosos com condição de Cauchy. Estabelecemos para soluções clássicas e limitadas propriedades tais como: decrescimento da norma L^1, conservação de massa e contração da norma L^1. Para soluções de viscosidade do mesmo problema, obtemos ainda: teoremas de comparação, contração da norma L^1 e unicidade.

O caso semidissipativo para equações de meios porosos é tratado no capítulo 4, onde obtemos a taxa ótima de decaimento para a norma L^∞ de soluções de equação (regularizada) de meios porosos com termo advectivo (com dependência de x, de t e u).

Finalmente, no capítulo 5, obtemos uma limitação uniforme para a norma L^∞ de soluções e condições suficientes para a existência global de soluções da equação (regularizada) de meios porosos com termo advectivo (com dependência de x, de t e de u).

Abstract

In this thesis, we examine qualitative properties of solutions of filtering equations and, more specifically, of *porous medium equations* (PME's).

The filtering equation models many physical phenomena, including the dynamics of gases or fluids in porous media.

In Chapter two, we obtain a comparison principle and the uniqueness of a (weak) solution for the filtering equations with Cauchy conditions.

In this work, in chapter three, we also obtain some important basic results for solutions to the porous media equation with Cauchy condition. For bounded classical solutions, we establish properties such as: decay of the L^1 norm, conservation of mass, and contraction in the L^1 norm. For viscosity solutions of the same problem, we prove a comparations priciple, contraction of the L^1 norm, and uniqueness.

The semidissipative case for porous media equations is discussed in chapter four, where we obtain the optimal decay rate in the L^∞ norm of solutions of the (regularized) porous media equations with advective term (with dependence of x, t and u).

Finally, in chapter five, we obtain a uniform bound for the norm L^∞ and sufficient conditions for the global existence of solutions of the (regularized) porous media equation with advective term (with dependence on x, of t and u).

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho de doutorado são examinadas propriedades qualitativas de soluções de equações de filtragem e, mais especificamente, de equações de meios porosos (ou *porous medium equations* e daí a sigla PME's).

As equações de filtragem são equações do tipo $u_t = \Delta A(u)$. No caso especial $A(u) = |u|^{m-1}u$, dizemos que as equações de filtragem são, em particular, equações de meios porosos. Quando só admitimos soluções positivas temos $A(u) = |u|^{m-1}u = u^m$ e quando admite-se soluções que trocam de sinal dizemos que as soluções são soluções com sinal (para a equação de meios porosos).

As equações de filtragem modelam diversos fenômenos físicos, entre eles destacamos a dinâmica de gases ou fluidos em meios porosos. No capítulo dois, obtemos um princípio de comparação e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta A(u) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

No capítulo três são obtidos vários resultados básicos importantes sobre as soluções (clássicas, limitadas) do problema de difusão não linear

$$u_t + \text{div}\,\big(f(x,t,u)\,u\big) \;=\; \text{div}\,\big(|\,u\,|^{\alpha}\,\nabla u\big) \;+\; \eta\,\Delta u, \tag{1.1}$$

$$u(\cdot,0) \;=\; u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{1.2}$$

dadas constantes $\alpha > 0$, $1 \leq p_0 < \infty$, $\eta > 0$, e sendo $f = (f_1, ..., f_n)$, onde f, $f_{x_1}, ..., f_{x_n}$, f_u, são contínuas e f satisfaz alguma entre as condições (1.3), (1.4) abaixo:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x,t,\mathrm{u}) \;\geq\; 0 \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}^n,\; t \geq 0,\; \mathrm{u} \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

ou

$$|\,f(x,t,\mathrm{u})\,| \;\leq\; B(t)\,|\,\mathrm{u}\,|^{k} \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}^n,\; t \geq 0,\; \mathrm{u} \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

para dadas $B \in C^0([0,\infty))$, $k \geq 0$ (constante).

No caso de f não depender de x e de t, tem-se, em particular, a equação

$$u_t + \text{div}\; f(u) \;=\; \text{div}\,\big(|\,u\,|^{\alpha}\,\nabla u\big) \;+\; \eta\,\Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\; t > 0, \tag{1.5}$$

que em ambos os casos (1.3) ou (1.4), as soluções de (1.1) exibem (enquanto existirem) várias propriedades conhecidas de problemas parabólicos em forma conservativa (como por exemplo regularidade, decrescimento na norma L^1, conservação de massa e propriedades de comparação), mas no caso de (1.4) outras propriedades familiares deixam, em geral, de ser válidas (decrescimento em normas L^q para $q > 1$, propriedade TVD (Total Variation Diminishing), contratividade em L^1, existência global, decaimento a zero em várias normas (ao $t \to \infty$) em caso de existência global, etc). De fato, o problema (1.1), com a condição adicional (1.4) pode tornar-se *muito* complicado quando a condição (1.3) for violada, como indicamos intuitivamente a seguir. Para isso, consideremos, por simplicidade, o problema unidimensional

$$u_t + (\, f(x)\,|\,u\,|^k u\,)_x \,=\, (\,|\,u\,|^\alpha\, u_x\,)_x + \eta\, u_{xx}, \tag{1.6}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

onde se supõe $J := \{\, x \in \mathbb{R} : \; f'(x) \,<\, 0 \,\} \neq \emptyset$. Reescrevendo a primeira equação na forma

$$u_t + (k+1)\, f(x)\,|\,u\,|^k u_x \,=\, (\,|\,u\,|^\alpha\, u_x\,)_x + \eta\, u_{xx} \,-\, f'(x)\,|\,u\,|^k u, \tag{1.7}$$

vê-se que $u(x,t)$ tende a ser estimulada a crescer (em magnitude) nos pontos $x \in J$, particularmente onde $-\,f'(x) \gg 1$. Por outro lado, como $\|\, u(\cdot,t)\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\, u_0\,\|_{L^1(\mathbb{R})}$ para todo t (enquanto a solução existir), um crescimento intenso em uma dada parte de J resulta na formação de estruturas alongadas (como ilustrado na Fig. 1 a seguir), que tendem a ser eficientemente dissipadas pelo termo difusivo presente. Quanto maior for o crescimento de $|\, u(x,t)\,|$, maior será o efeito do termo $-\, f'(x)\,|\,u\,|^k u$ no lado direito de (1.7) em forçar crescimento adicional e maior será a capacidade dissipativa do termo difusivo em (1.7) de impedir tal crescimento, dado o aumento do próprio coeficiente de difusão e da intensificação dos efeitos de alongamento no perfil de $u(\cdot,t)$!

A competição entre os termos difusivos e forçante na equação (1.6) pode, assim, tornar-se tão intensa que o resultado final desta interação (explosão ou não em tempo finito, existência global e comportamento ao $t \to \infty$, etc) é muito difícil de ser previsto. Além disso, em contraste com a literatura vigente (ver e.g. [12, 16, 17] e referências ali citadas), este tipo de interação (com conservação de massa ou vínculos similares) só passou a ser investigado matematicamente muito recentemente (em [1, 2, 9]).

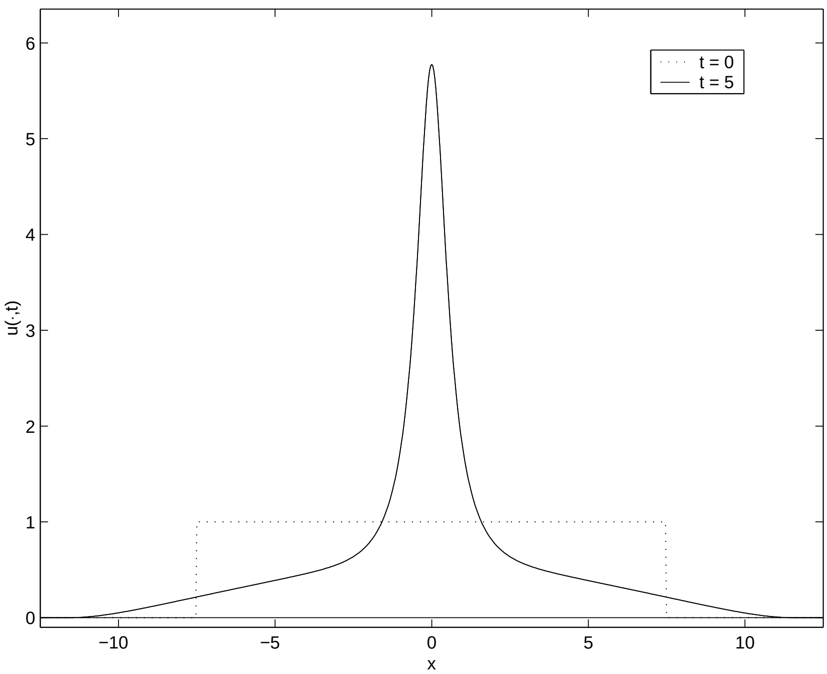

Fig. 1. Representação da solução $u(\cdot,t)$ no instante $t = 5$ (curva cheia) correspondente à equação (3.5) acima com $f(x) = -\operatorname{tgh} x$, $\alpha = 0.5$, $k = 1.5$, $\eta = 0.01$, e estado inicial u_0 indicado (curva tracejada). Nota-se o crescimento de $u(\cdot,t)$ devido a se ter $f'(x) < 0$, com formação de estruturas alongadas ("ondas de alta frequência") dada a conservação de massa.

Para problemas como (1.1)-(1.2), com a condição (1.4) sobre f acima, é natural esperar, com base na discussão anterior, que as soluções $u(\cdot,t)$ possam existir globalmente (i.e., estar definidas para todo $t > 0$) se $k \geq 0$, $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ não forem grandes (em um sentido apropriado). Nesta tese, vários resultados nesta direção são obtidos; em particular, é mostrado que *se*

$$k \;<\; \alpha \,+\, \frac{1}{n} \tag{1.8}$$

então a solução $u(\cdot,t)$ *do problema* (1.1) *com a condição adicional* (1.4) *é globalmente definida qualquer que seja o estado inicial* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *tendo-se* $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{\mathtt{loc}}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$. (Quando $k \geq$

$1+\alpha/n$, existência global é garantida para u_0 apropriadamente pequena, apenas.) Ademais, em caso de solução global, argumentos heurísticos sugerem que se tenha, sendo $q \geq 1$ qualquer:

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \left(\limsup_{t\to\infty} B(t)\right)^{\delta} \left(\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right)^{\gamma} \quad (1.9)$$

para certas constantes positivas K, δ, $\gamma > 0$ que dependem somente de n, q, α, κ (e não de f, u_0, u, ε), com δ, γ dadas por

$$\delta = \frac{n}{n\,(\alpha-\kappa)+q}, \qquad \gamma = \frac{q}{n(\alpha-\kappa)+q}. \quad (1.10)$$

Este resultado é estabelecido rigorosamente no caso unidimensional ($n=1$), em [9], e, em dimensão $n \geq 2$, desde que se tenha

$$\liminf_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{K} \cdot \left(\limsup_{t\to\infty} B(t)\right)^{\delta} \left(\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right)^{\gamma} \quad (1.11)$$

para alguma constante $\hat{K} > 0$ dependendo, também, apenas dos parâmetros n, q, α, k. (Para $n = 1$, (1.11) é obtida no capítulo cinco com o uso de certas desigualdades válidas somente em $\mathbb{R}$, e de um longo argumento adaptado de [1, 2]. A obtenção do resultado (1.11) para $n \geq 2$ permanece em aberto.)

No caso de soluções globalmente definidas, podemos examinar outras questões em aberto também se põem para o problema (1.1)-(1.2) com a condição (1.3) no caso de soluções globalmente definidas, mesmo em dimensão $n = 1$; por exemplo, não se conhecem condições gerais sobre f, u_0 que impedem explosão (*blow-up*) no infinito [i.e., de modo a se ter $u(\cdot,t) \in L^\infty([\,0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$], ou condições garantindo decaimento assintótico [$\lim_{t\to\infty} \| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$], ou, ainda, convergência a estados estacionários (quando existirem), e assim por diante.

Estas questões não serão examinadas nesta tese, com uma exceção: uma possibilidade simples assegurando *decaimento* é fornecida pela condição (1.3) acima: dada $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, a solução $u(\cdot,t) \in C^0([\,0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ correspondente do problema (1.1) com a condição (1.3) satisfaz

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p_0,\alpha) \, \| u(\cdot,0) \|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\delta_0} \, t^{-\gamma_0} \quad \forall \; t > 0, \tag{1.12}$$

onde

$$\delta_0 = \frac{2p_0}{2p_0 + n\alpha}, \qquad \gamma_0 = \frac{n}{2p_0 + n\alpha}, \tag{1.13}$$

e onde $K(n,p_0,\alpha) > 0$ é uma constante que depende apenas dos parâmetros n, p_0, α (e não de t, u, u_0, f ou η): veja o capítulo 4. Mas, mesmo no caso (1.3), há questões de interesse não respondidas: por exemplo, obtenção de aproximações assintóticas para $t^{\gamma_0} u(\cdot,t)$ ao $t \to \infty$, e (no caso $p_0 = 1$:) sobre a validade ou não da propriedade

$$\lim_{t \to \infty} \| u(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |\, m \,|, \qquad m = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, dx, \tag{1.14}$$

que é conhecida para a equação do calor e outros exemplos simples (ver e.g. [22]). Uma resposta parcial é obtida no capítulo 4: (1.14) é válida para (1.1) quando o termo $f = f(x,t,\mathrm{u})$ for independente de x, como na equação (1.5) acima.

Novamente, como em outras questões, o problema torna-se bem complicado quando f depende explicitamente de x, com muito menos resultados disponíveis na literatura. Por exemplo, com base em experimentos numéricos, pode-se formular a seguinte proposição no caso $p_0 = 1$, cuja prova (ou refutação) não é conhecida:

Conjectura. *Se* $u(\cdot, t)$ *é uma solução global do problema* (1.1) *com a condição adicional* (1.3) *tem-se sempre* $\lim\limits_{t \to \infty} \| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$ *quando não houver soluções estacionárias (não triviais).*

É conveniente notar que todas as propriedades obtidas nesta tese para problema regularizado (isto é, $\eta > 0$) são uniformes em η e em nada dependem do valor de η. Sendo assim, ao fazermos $\eta \to 0$ todas as propriedades (tais como unicidade, conservação de massa, decrescimento da norma L^1, entre outras) são preservadas. No capítulo 5 obteremos limitações uniformes (em η) para as soluções $u^{(\eta)}$, e com isso as soluções de viscosidade do problema degenerado (que são por definição $\lim\limits_{\eta \to 0} u^{(\eta)}$) tem as mesmas propriedades das soluções do problema regularizado. Para estender esses resultados devemos obter resultados de regularidade para soluções do problema degenerado, o que não será feito nesta tese.

Capítulo 2

Equações de filtragem

Neste capítulo obteremos um princípio de comparação e um teorema de unicidade para equações de filtragem. Começamos definindo solução fraca de uma equação de filtragem.

2.1 Solução fraca

Definição 2.1.1. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ tal que $\varphi(\cdot,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq t \leq T$ e $\varphi(x,T) \equiv 0$. Seja $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Dizemos que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0,T))$ tal que $A(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0,T))$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_t = \Delta A(u) \\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

em S_T se, para $0 < t < T$, satisfaz

$$\iint_{S_T} u\varphi_t + A(u)\Delta\varphi \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi(x,0)\, dx = 0.$$

Teorema 2.1.2. *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\bar{S_T})$, onde $\bar{S_T} \equiv \mathbb{R}^n \times [0,T]$, tal que $A(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dados $0 < t_0 < T$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0,T])$, existe $Z_{t_0;\varphi} \subset [t_0,T]$*

com $|Z_{t_0;\varphi}|_1 = 0$ *tal que,* $\forall\, \hat{t}_0 < \hat{t} \in [t_0, T] \setminus Z_{t_0;\varphi}$*, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t}_0)\varphi(x,\hat{t}_0)\,dx + \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}}\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t + A(u)\Delta\varphi\,dx\,dt,$$

onde $|\cdot|_1$ *denota a medida de Lebesgue em uma dimensão, e* $Z_{t_0;\varphi}$ *depende de* t_0*,* φ *e* u*.*

Demonstração. Como $u \in L^1_{\text{loc}}(\bar{S_T})$, $\exists\, Z_0 \subset [0,T]$ com $|Z_0|_1 = 0$, tal que $u(\cdot,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, t \in [0,T] \setminus Z_0$.

Sejam $\hat{t}_0 < \hat{t} \in (t_0, T) \setminus Z_0$. Definimos $\zeta_1, \zeta_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$\zeta_1(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{em } [\,0, +\infty) \\ 0\,, & \text{em } (-\infty, -1\,] \end{cases} \quad \text{e} \quad \zeta_2(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{em } (-\infty, 0\,] \\ 0\,, & \text{em } [\,1, +\infty) \end{cases}$$

com $0 \le \zeta_1, \zeta_2 \le 1$, $|\zeta_1'| \le \dfrac{C}{\varepsilon_1}$ e $|\zeta_2'| \le \dfrac{C}{\varepsilon_2}$.

Assim, sendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $\hat{t}_0 < \hat{t} - \varepsilon_1$ e $\hat{t} + \varepsilon_2 < T$, definimos $\zeta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ por

$$\zeta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{se } \hat{t}_0 < t < \hat{t} \\ 0 \quad , & \text{se } t < \hat{t_0} - \varepsilon_1 \text{ ou } t > \hat{t} + \varepsilon_2 \\ \zeta_1\!\left(\dfrac{t - \hat{t_0}}{\varepsilon_1}\right), & \text{se } \hat{t}_0 - \varepsilon_1 \le t \le \hat{t}_0 \\ \zeta_2\!\left(\dfrac{t - \hat{t}}{\varepsilon_2}\right), & \text{se } \hat{t} \le t \le \hat{t} + \varepsilon_2 \end{cases}$$

e definimos $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ por

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t)\zeta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t)\,, & \text{se } t_0 \le t \le T \\ 0 \quad , & \text{se } 0 \le t < t_0. \end{cases}$$

Vejamos que a função Φ construída satisfaz o enunciado pelo teorema:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u\Phi_t + A(u)\Delta\Phi \, dx \, dt = & \int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \zeta_1 \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) \zeta_2 \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt \\
& + \int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} A(u)\Delta\varphi \zeta_1 \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) \zeta_2 \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt \\
& + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}_0} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \zeta_1' \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) dx \, dt \\
& + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt
\end{aligned}
$$

Resta mostrar que $\exists Z_*$ com $|Z_*|_1 = 0$ tal que, ao $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, temos $\forall \hat{t}_0 \in (t_0, T) \setminus Z_*$

(i) $\displaystyle\int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \zeta_1 \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) \zeta_2 \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) + A(u)\Delta\varphi \zeta_1 \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) \zeta_2 \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt$
$\displaystyle\to \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t + A(u)\Delta\varphi \, dx \, dt,$

(ii) $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}_0} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \zeta_1' \left(\frac{t-\hat{t}_0}{\varepsilon_1}\right) dx \, dt \to \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t}_0)\varphi(x,\hat{t}_0) \, dx,$ e

(iii) $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt \to -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t}) \, dx.$

A primeira afirmação é imediata. Vejamos a prova de (iii).

Pondo $C = \max_{t\in[0,T]} \left|\zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right)\right|$ e $v(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t) \, dx$, temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t)\zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t}) \, dx \\
& \quad = \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t)\zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) - u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\zeta_2' \left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right) dx \, dt
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2}\left|\zeta_2'\left(\frac{t-\hat{t}}{\varepsilon_2}\right)\right|\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t)-u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\,dx\right|\,dt$$
$$\leq C\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2}|v(t)-v(\hat{t})|\,dt\to 0 \;q.t.p.$$

pelo Teorema da diferenciação de Lebesgue, já que $v\in L^1((t_0,T))$ pois $|v(t)|<\infty,\ \forall\, t\in(t_0,T)\setminus Z_0$. Note que na última passagem o Teorema da diferenciação de Lebesgue que nos dá um conjunto $Z_2\subset(t_0,T)$ com $|Z_2|_1=0$, tal que $\forall\,\hat{t}\in(t_0,T)\setminus(Z_0\cup Z_2)$, temos

$$\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\varepsilon_2}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t)\zeta_2'(t)\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\,dx\to 0.$$

Analogamente, obtemos um conjunto $Z_1\subset(t_0,T)$ com $|Z_1|_1=0$, tal que $\forall t\in(t_0,T)\setminus(Z_0\cup Z_1)$, temos

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\hat{t}_0-\varepsilon_1}^{\hat{t}_0}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\varphi(x,t)\zeta_1'(t)\,dx\,dt-\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\,dx\to 0.$$

Assim, $\forall\,\hat{t}_0,\hat{t}\in(t_0,T)\setminus(Z_0\cup Z_1\cup Z_2)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t})\varphi(x,\hat{t})\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{t}_0)\varphi(x,\hat{t}_0)\,dx+\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}}\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t+A(u)\Delta\varphi\,dx\,dt.$$

□

Definição 2.1.3. (*2ª definição de Solução Fraca*) Dizemos que $u\in L^\infty(S_T)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} u_t=\Delta A(u)\\ u(\cdot,0)=u_0\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\end{cases}$$

em S_T se, para $0<t<T$, satisfaz

(i) $\displaystyle\iint_{S_T} u\varphi_t+A(u)\Delta\varphi=0\,,\ \forall\,\varphi\in C_0^\infty(S_T)\,,$ e

(ii) $\exists\, E \subset (0,T)$ com $|E|_1 = 0$ tal que $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, t \in (0,T)\setminus E$ e $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^1_{\text{loc}}([0,T])$, ao $t \to 0$ com $t \notin E$.

Observação 2.1.4. $u \in L^\infty(S_T) \iff$ se $\exists\, M > 0$ e $\exists\, E \subset (0,T)$ com $|E|_1 = 0$ tal que $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, t \in (0,T)\setminus E$ e $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le M, \forall\, t \in (0,T)\setminus E$.

2.2 Princípios de comparação e unicidade de solução

Teorema 2.2.1. *Sejam $u, v \in L^\infty(S_T)$, onde $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times (0,T)$ com $0 < T < \infty$, soluções de $u_t = \Delta A(u)$, no sentido de 2.1.3, com condições iniciais $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Se $A \in C^1(\mathbb{R})$ é crescente e $A(u) - A(v) \in L^2(S_T)$, então*

$$u_0 \le v_0 \Rightarrow u(\cdot,t) \le v(\cdot,t)\,, \quad q.t.p.\ t \in (0,T).$$

Demonstração. Dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\hat{T}])$, com $0 < \hat{T} < T$, existe $Z_{\varphi,\hat{T}} \subset [0,T]$, com $|Z_{\varphi,\hat{T}}|_1 = 0$, tal que $\forall\, \hat{t} \in (0,\hat{T}) \setminus Z_{\varphi,\hat{T},u}$, temos, pelo Teorema (2.1.2) (fazendo $t_0 \to 0$ e $\hat{t} \to \hat{T}$), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\hat{T})\varphi(x,\hat{T})\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t + A(u)\Delta\varphi\,dx\,dt.$$

Da mesma forma, obtemos para v um conjunto $Z_{\varphi,\hat{T},v} \subset [0,T]$ com $|Z_{\varphi,\hat{T}}|_1 = 0$ e propriedades análogas. Escrevendo $\theta := u - v$ e $\theta_0 := u_0 - v_0$, temos que $\forall \hat{t} \in (0,\hat{T}) \setminus Z_{\varphi,\hat{T}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{T})\varphi(x,\hat{T})\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} \theta\varphi_t + [A]\Delta\varphi\,dx\,dt,$$

onde $[A] := A(u) - A(v)$ e $Z_{\varphi,\hat{T}} := Z_{\varphi,\hat{T},u} \cup Z_{\varphi,\hat{T},v}$.

Agora, definimos $a \in L^\infty(S_T)^+$ (ou seja, $a \in L^\infty(S_T)$ e a é não negativa em S_T) por

$$a(x,t) := \begin{cases} \dfrac{A(u)-A(v)}{u-v}, & \text{se } (x,t) \in S_T \text{ e } u(x,t) \neq v(x,t) \\ \quad 0 \quad , & \text{se } (x,t) \in S_T \text{ e } u(x,t) = v(x,t). \end{cases}$$

Note que $\dfrac{A(u)-A(v)}{u-v} = A'(\xi) \geq 0$, onde ξ pertence ao intervalo de extremos u e v, e ainda que

$$\left| \frac{A(u)-A(v)}{u-v} \right| = |A'(\xi)| \leq M_1 := \max_{|\xi| \leq M} |A'(\xi)|\,, \text{ onde } M := \max_{(x,t)\in S_T} |u-v|\,.$$

Analogamente definimos $a_0 \in L^\infty(S_T)^+$ por

$$a_0(x) := \begin{cases} \dfrac{A(u_0)-A(v_0)}{u_0-v_0}, & \text{se } (x,t) \in S_T \text{ e } u_0(x) \neq v_0(x) \\ \quad 0 \quad , & \text{se } (x,t) \in S_T \text{ e } u_0(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Seja $\tilde{a} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^+$ definida por

$$\tilde{a}(x,t) := \begin{cases} a(x,t)\,, & \text{se } 0 < t < T \\ a_0(x)\,, & \text{se } t \leq 0 \\ 0 \quad , & \text{se } t \geq T. \end{cases}$$

A função $\tilde{a}_\delta(x,t) := \dfrac{1}{\delta^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho\left(\frac{(x,t)-y}{\delta}\right) \tilde{a}(y)\,dy \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $0 \leq \tilde{a}_\delta \leq M_1$, onde $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho(y)\,dy = 1$ e $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})^+$. A função ρ é dita função de molificação e sua construção e propriedades são encontradas em [8]. Escrevendo $A_R = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < R\}$, temos ainda que $\|\tilde{a}_\delta - a\|_{L^p(A_R)} \to 0$, ao $\delta \to 0$, $\forall\, 1 \leq p < \infty$ e $\forall R < \infty$.

Definimos agora $\tilde{a}_{\varepsilon,\delta} := \varepsilon + \rho * \tilde{a}_\delta$, para $\varepsilon \leq 1$. Assim $\varepsilon \leq \tilde{a}_{\varepsilon,\delta} \leq 1 + M_1$. Sejam $(\delta_n)_n, (\varepsilon_n)_n$ sequências monótonas tais que $\delta_n \to 0$ e $\varepsilon_n \to 0$, e seja $\mathcal{E} := \{(\delta_n, \varepsilon_n) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $\mathcal{G} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^+$ um conjunto enumerável e denso em $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)^+$. Basta mostrar que $\forall\, g \in \mathcal{G}$ temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{t})g(x)\,dx \leq 0$, $\forall\, g \in \mathcal{G}$.
Definimos $\mathcal{T} := (0,T) \cap \mathbb{Q}$ e $\mathcal{R} := \{R_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, com $R_n > 1$ e $R_n \to \infty$.

Dada $g \in \mathcal{G}$ toma $R \in \mathcal{R}$ tal que $\operatorname{supp} g \subset B_{R_g}$ e $R > R_g + 1$, tomemos também $(\varepsilon, \delta) \in \mathcal{E}$ e $\hat{t} \in \mathcal{T}$. Consideremos

$$\begin{cases} \Psi_t + \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)\Delta\Psi = 0\,, & \text{se } x \in B_R \text{ e } 0 < t < \hat{T} \\ \Psi(x,\hat{T}) = g(x)\,, & \text{se } x \in \overline{B}_R \\ \quad 0\,, & \text{se } |x| = R \text{ e } 0 < t < \hat{T}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pela teoria clássica de EDP's parabólicas temos que a solução $\Psi \in C^\infty(B_R \times [0,\hat{T}]) \cap C^1(\overline{B}_R \times [0,T])$. Definimos então

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \Psi(x,t)\zeta_R(x)\,, & \text{se } |x| < R \text{ e } 0 < t < \hat{T} \\ \quad 0\,, & \text{se } |x| \geq R \text{ e } 0 < t < \hat{T}, \end{cases}$$

onde ζ_R é suave definida por

$$\zeta_R := \begin{cases} \quad 1\,, & \text{se } |x| < R - 1 \\ \zeta_*(|x| - R + 1)\,, & \text{se } |x| \geq R - 1, \end{cases}$$

onde $\zeta_* \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\zeta_*(x) = 1,$ se $x \leq 0$ e $\zeta_*(x) = 0,$ se $x \geq 1$. Definimos $I = \{(\hat{T}, g, \varepsilon, \delta, R) \,/\, \hat{T} \in \mathcal{T}, g \in \mathcal{G}, (\varepsilon,\delta) \in \mathcal{E}, R \in \mathcal{R},$ tal que $R > R_g + 1\}$. Para cada $(\hat{T}, g, \varepsilon, \delta, R) \in I$, temos $\Phi = \Phi_{\hat{T},g,\varepsilon,\delta,R} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\hat{T}])$ e $Z_{\hat{T},g,\varepsilon,\delta,R} = Z \subset (0,\hat{T})$ com $|Z|_1 = 0$ de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{t})\Phi(x,\hat{t})\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x)\Phi(x,0)\,dx + \int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} \theta\Phi_t + [A]\Delta\Phi\,dx\,dt.$$

Dado $\hat{t} \in (0,T) \setminus Z$, seja $\hat{T}_m \in \mathcal{T}$ onde $\hat{T}_m > \hat{t}$ com $\hat{T}_m \searrow \hat{t}$. Seja $g \in \mathcal{G}, (\varepsilon, \delta) \in \mathcal{E}, R \in \mathcal{R}$, tal que $R > R_g + 1$, onde $\operatorname{supp} g \subset B_{R_g}$.

Seja $\Phi_m \equiv \Phi_{\hat{T}_m, g, \varepsilon, \delta, R} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \hat{T}_m])$. Assim , $\forall\, m, g, \varepsilon, \delta, R$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{t})\Phi_m(x,\hat{t})\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x)\Phi_m(x,0)\,dx + \int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} \theta\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_m) + [A]\Delta\Phi_m\,dx\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x)\Phi_m(x,0)\,dx + \int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} \theta\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_m) + a(x,t)\Delta\Phi_m\right]\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Queremos obter $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{t})\Phi_m(x,\hat{t})\,dx \leq 0$. Temos $\int_{\mathbb{R}^n} \theta_0\Phi_m(x,0)\,dx \leq 0$. Resta mostrar que

$$\int_0^{\hat{T}}\int_{\mathbb{R}^n} \theta\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_m) + a(x,t)\Delta\Phi_m\right]\,dx\,dt \leq 0.$$

Lembremos que $\Phi_m = \Psi_m\zeta_R$, e então

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m = \frac{\partial\Psi_m}{\partial t}\zeta_R + \Psi_m\frac{\partial\zeta_R}{\partial t}.$$

Também temos $\Delta\Phi_m = 2\nabla\Psi_m \cdot \nabla\zeta_R + \Psi_m\Delta\zeta_R + \zeta_R\Delta\Psi_m$.

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m + a(x,t)\Delta\Phi_m = \zeta_R(x)&\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi_m + \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)\Delta\Psi_m\right] \\
&+ a(x,t)\left[2\nabla\Psi_m \cdot \nabla\zeta_R + \Psi_m\Delta\zeta_R\right] \\
&+ \zeta_R[a(x,t) - \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)]\Delta\Psi_m.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\hat{t})\Phi_m(x,\hat{t})\,dx \leq &\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} [A](x,t)\left[2\nabla\Psi_m \cdot \nabla\zeta_R + \Psi_m\Delta\zeta_R\right]\,dx\,dt \\
&+ \int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} \theta(x,t)\left[a(x,t) - \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)\right]\Delta\Psi_m\zeta_R\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Sejam

$$I_m(\varepsilon, \delta; R) := \int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} [A](x,t)\,[2\nabla\Psi_m \cdot \nabla\zeta_R + \Psi_m\Delta\zeta_R]\;dx\,dt,$$

e

$$J_m(\varepsilon, \delta; R) := \int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} \theta(x,t)\,[a(x,t) - \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)]\,\Delta\Psi_m\zeta_R\,dx\,dt.$$

Dado $\eta > 0$, como $|\nabla\zeta_R(x)| \leq C$ e $|\Delta\zeta_R(x)| \leq C$, onde C não depende de R, ε, δ e m, temos

$$|I_m| \leq C\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |A(u) - A(v)|\,(|\nabla\Psi_m| + |\Psi_m|)\;dx\,dt, \tag{2.2}$$

já que $\nabla\zeta_R(x) = 0$ e $\Delta\zeta_R(x) = 0$ para $|x| \leq R - 1$. Vamos estimar separadamente $|\nabla\Psi_m|$ e $|\Psi_m|$. Estimemos primeiramente $|\nabla\Psi_m|$. Multiplicando (2.1) por $\Delta\Psi_m$ e integrando em $B_R \times [\tau, \hat{T}_m]$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} (\Delta\Psi_m)\frac{\partial}{\partial t}\Psi_m\,dx\,dt + \int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(\Delta\Psi_m)^2\,dx\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\hat{T}_m)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\tau)|^2\,dx \\ &\quad + \int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(\Delta\Psi_m)^2\,dx\,dt, \end{aligned}$$

ou ainda, para todo $0 < \tau < \hat{T}_m$, temos

$$\int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\tau)|^2\,dx + 2\int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(\Delta\Psi_m)^2\,dx\,dt = \int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\hat{T}_m)|^2\,dx.$$

Integrando em $[0, \hat{t}\,]$, obtemos

$$\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau + 2\int_0^{\hat{t}}\int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(\Delta\Psi_m)^2\,dx\,dt\,d\tau = \int_0^{\hat{t}}\int_{B_{R_g}} |\nabla g|^2\,dx\,d\tau,$$

já que $\Psi_m(x,\hat{T}) = g$ para $|x| = R$. Em particular, obtemos

$$\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} |\nabla\Psi_m(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau \leq \hat{t}\|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(\Delta\Psi_m(x,\tau))^2\,dx\,d\tau \leq \frac{\hat{t}}{2}\|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora vamos estimar $|\Psi_m|$. Para tal, multiplicamos (2.1) por $2\Psi_m$ e integramos em $B_R \times [\tau, \hat{t}_m]$, obtendo

$$0 = \int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} 2\Psi_m \frac{\partial}{\partial t}\Psi_m\,dx\,dt + \int_\tau^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta} 2\Psi_m\Delta\Psi_m\,dx\,dt.$$

Pelo Teorema de Fubini e como $\Psi_m(x,\hat{T}_m) = g$ para $|x| \leq R$, temos

$$\int_{B_R} (\Psi_m)^2\,dx \leq \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)|\Psi_m||\Delta\Psi_m|\,dx\,dt.$$

Integrando em $[0,\hat{T}_m]$ e aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}\Psi_m^2(x,\tau)\,dx\,d\tau &\leq \hat{T}_m\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\,\hat{T}_m\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)|\Psi_m||\Delta\Psi_m|\,dx\,dt \\ &\leq \hat{T}_m\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}(\Psi_m)^2\,dx\,dt \\ &\quad + 2\hat{T}_m\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}(\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t))^2|\Delta\Psi_m|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Como $0 < \varepsilon \leq \tilde{a}_{\varepsilon,\delta} \leq 1 + M_1$, e $\hat{T}_m \leq T$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}\Psi_m^2(x,\tau)\,dx\,d\tau &\leq 2T\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + 4(1+M_1)T^2\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R}\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}(x,t)|\Delta\Psi_m|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Logo $\displaystyle\int_0^{\hat{T}_m}\int_{B_R} (\Psi_m)^2\, dx\, dt \leq \tilde{C} \equiv 2\,T\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 4(1+M_1)^2\,T^2\,\|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

De (2.2) aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |A(u)-A(v)|\,(|\nabla\Psi_m| + |\Psi_m|)\; dx\, dt \leq \\
&\qquad \leq \left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |A(u)-A(v)|^2\, dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} (|\nabla\Psi_m|)^2\; dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\qquad + \left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |A(u)-A(v)|^2\, dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |\Psi_m|^2\, dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\qquad \leq \tilde{C}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}} |A(u)-A(v)|^2\, dx\, dt\right)^{1/2} \leq \frac{\eta}{2},
\end{aligned}$$

para $R = \hat{R}$ suficientemente grande, já que $A(u)-A(v) \in L^2(S_T)$.

Agora vamos estimar $|J_m(\varepsilon,\delta;\hat{R})|$.

$$\begin{aligned}
|J_m(\varepsilon,\delta;\hat{R})| &\leq \int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} |\theta||\tilde{a}-\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}||\Delta\Psi_m|\, dx\, dt \\
&\leq M\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} \frac{|\tilde{a}-\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}|^2}{\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}}\, dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} \tilde{a}_{\varepsilon,\delta}|\Delta\Psi_m|\, dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq MC\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} \frac{|\tilde{a}-\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}|^2}{\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}}\, dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq MC\varepsilon^{-1/2}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} |\tilde{a}-\tilde{a}_{\varepsilon,\delta}|^2\, dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq MC\sqrt{2}\varepsilon^{-1/2}\left[\varepsilon\sqrt{|B_{\hat{R}}|T} + \left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}} |\tilde{a}-\rho * \tilde{a}_{\delta}|^2\, dx\, dt\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

Escolhendo $\hat{\varepsilon}$ tal que $MC\hat{\varepsilon}^{1/2}\sqrt{2|B_{\hat{R}}|T} < \dfrac{\eta}{4}$ e escolhe $\hat{\delta}$ tal que

$$MC\hat{\varepsilon}^{-1/2}\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_{\hat{R}}}|\tilde{a}-\rho_\delta * \tilde{a}|\,dx\,dt\right)^{1/2} < \frac{\eta}{4}.$$

Isto é possível pois $\|\tilde{a}-\rho * \tilde{a}_\delta\|_{L^2(K\times[0,\hat{T}])} \to 0$, para qualquer compacto K. Assim, $|J_m(\hat{\varepsilon},\hat{\delta};\hat{R})| < \dfrac{\eta}{2}$.

Logo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x,\hat{t})\Phi_m(x,\hat{t})\,dx \leq \eta$, $\forall\, m$. Como $\Phi_m(x,\hat{t}) \to g(x)$ uniformemente em x, para $x \in B_{\hat{R}}$, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x,\hat{t})g(x)\,dx \leq \eta$, como $\eta > 0$ é arbitrário, temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x,\hat{t})g(x)\,dx \leq 0$. □

Observação 2.2.2. Em uma dimensão, vale o mesmo resultado do Teorema 2.2.1, mesmo se removermos a hipótese $A(u)-A(v) \in L^2(S_T)$. Isto ocorre pelo fato de termos que $|B_{R+1}\setminus B_R| = 2$ em uma dimensão, enquanto que em dimensão maior do que um temos $|B_{R+1}\setminus B_R| \to \infty$ ao $R \to \infty$.

Para provar o resultado removendo a hipótese, em uma dimensão, repetimos a demonstração exceto na estimativa de I_m, que é substituída por

$$\begin{aligned}
|I_m| &= \left|\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}[A](2\Psi_m'\zeta_R' + \Psi_m\zeta_R'')\,dx\,dt\right| \leq 2ML_M\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}(2\Psi_m'\zeta_R' + \Psi_m\zeta_R'')\,dx\,dt \\
&\leq 2CML_M\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}(2\Psi_m' + \Psi_m)\,dx\,dt \leq 4CML_M\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}|\Psi_m'| + |\Psi_m|\,dx\,dt \\
&\leq 8CML_M\left[\left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}|\Psi_m'|^2\,dx\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^{\hat{t}}\int_{B_R\setminus B_{R-1}}|\Psi_m|^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\right] \leq \frac{\eta}{2},
\end{aligned}$$

para $R = \hat{R}$ suficientemente grande, pois $\Psi_m(\cdot,t), \Psi_m'(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.2.3. ***(Unicidade de solução)*** *Sejam $u, v \in L^\infty(S_T)$, onde $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times (0,T)$ com $0 < T < \infty$, soluções de $u_t = \Delta A(u)$, no sentido de 2.1.3, com condição inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se $A(u) - A(v) \in L^2(S_T)$, então $u(\cdot,t) = v(\cdot,t)\,, \quad q.t.p.\ t \in (0,T)$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos $u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t)\,, \quad q.t.p.\ t \in (0,T)$, invertendo os papéis de u e v, isto é possível já que as condições iniciais são iguais, temos também $v(\cdot,t) \leq u(\cdot,t)\,, \quad q.t.p.\ t \in (0,T)$. Ou seja, $u(\cdot,t) = v(\cdot,t)\,, \quad q.t.p.\ t \in (0,T)$. $\square$

Observação 2.2.4. Nos casos de existência de solução clássica temos também unicidade de solução, já que toda solução clássica é também solução fraca e a solução fraca é única.

Capítulo 3

PME's com termos advectivos, propriedades básicas

Nas primeiras seções deste capítulo obteremos algumas propriedades básicas para soluções clássicas de equações do tipo

$$u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) = \operatorname{div}(|u|^\alpha \nabla u) + \eta \Delta u.$$

Ao longo do texto, entenderemos por solução clássica para o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}(|u(x,t)|^\alpha \nabla u) + \eta \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0. \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha, \eta, p_0 \in \mathbb{R}$, são constantes com $\alpha > 0, \eta \geq 0$ e $p_0 \geq 1$, uma função que satisfaça 3.0.1 abaixo.

Definição 3.0.1. Uma função $u \in L^\infty_{loc}\big([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ suave é dita solução clássica limitada com intervalo (maximal) de existência $[0,T_*)$, onde $0 \leq T_* \leq \infty$, se satisfaz classicamente a primeira equação de (3.1) e, além disso, $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^{p_0}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ao $t \to 0$.

Na Seção 3.4 mostraremos que uma solução suave $u(\cdot, t)$ para o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(|u(x,t)|^{\alpha}\nabla u) + \eta\Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.2}$$

está em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo q suficientemente grande e para cada $t \in [0, T_*)$, onde $\alpha, \eta \in \mathbb{R}, \ \alpha, \eta > 0$. Vamos ainda obter a igualdade de energia

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2 dx d\tau + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx d\tau$$
$$= q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,t,u)\,,\nabla u\rangle\, dx\, d\tau.$$

que será fundamental na prova dos resultados obtidos no último capítulo deste texto.

3.1 Decrescimento da norma L^1 e conservação de massa

Nesta seção vamos considerar o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) = \operatorname{div}(|u(x,t)|^{\alpha}\nabla u) + \eta\Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0. \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $\alpha, \eta > 0$.

Vamos mostrar no Teorema 3.1.1 que a norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ de uma solução suave de (3.3) decresce, ou seja, que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \ \forall\ 0 < t < T_*$. Para provar este teorema vamos considerar a seguinte hipótese sobre a f:

(f_1) Sejam $|u| \leq M$, $t \in [0,T]$ e $K = K(M,T) > 0$. Seja $f(x,t,u) = b(x,t,u)u$ tal que $|b(x,t,u)| < K, \ \forall |u| \leq M, \ \forall t \in [0,T], \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1. *Seja* $u(x,t) \in L^{\infty}_{loc}([0,T_*], L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ *solução suave para o problema* (3.3) *tal que* $u(\cdot,t) \to u_0$*, em* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, quando* $t \to 0$ *. Se* $f(x,t,u)$ *satisfaz* (f_1)*, então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \ \forall \ 0 < t_0 < t < T_*.$$

Demonstração. Seja $S \in C^1(\mathbb{R})$ uma função ímpar e crescente, tal que $S(\mathrm{u}) = -1$ se $\mathrm{u} \leq -1$, $S(\mathrm{u}) = 1$ se $\mathrm{u} \geq 1$ e $-1 \leq S \leq 1$. Tomando $\delta > 0$, definimos $L_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ por

$$L_\delta(\mathrm{u}) := \int_0^{\mathrm{u}} S(\mathrm{v}/\delta)\, d\mathrm{v}, \qquad \mathrm{u} \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Sejam $R > 0$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a função $\zeta_{R,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\zeta_{R,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \exp\big(-\varepsilon\sqrt{1+|\,x\,|^2}\big) - \exp\big(-\varepsilon\sqrt{1+R^2}\,\big), & \text{se } |\,x\,| < R, \\ 0, & \text{se } |\,x\,| \geq R. \end{cases} \tag{3.5}$$

Sejam $u(x,t)$ solução de (3.3) e $t_0 \in (0,T]$ tal que $T \in (t_0, T_*)$. Multiplicando a primeira equação de (3.3) por $\zeta_R(x)L'_\delta(u)$ (vamos denotar $\zeta_{R,\varepsilon}$ por ζ_R) e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0,t]$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)u_t\zeta_R(x)\,dxd\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)\,\mathrm{div}(b(x,\tau,u)u)\zeta_R(x)\,dxd\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)\,\mathrm{div}(|u|^{\alpha}\nabla u)\zeta_R(x)\,dxd\tau + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)\Delta u\zeta_R(x)\,dxd\tau,$$

já que $\operatorname{supp}\zeta \subset B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$.

Como $\zeta_R(x) = 0$ para $|x| = R$, usando o teorema de Fubini e integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\le R} L_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx \;=& \int_{|x|\le R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)\,dx \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)\langle \nabla u\,, b(x,\tau,u)\rangle\;\,dxd\tau \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)u\langle \nabla \zeta_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\;\,dxd\tau \\
&-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)\langle \nabla u\,,\nabla u\rangle\;|u|^\alpha\zeta_R(x)\,dxd\tau \\
&-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)|u|^\alpha\langle \nabla \zeta_R(x)\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau \\
&-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)\zeta_R(x)\langle \nabla u\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau \\
&-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)\langle \nabla \zeta_R(x)\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau .
\end{aligned}
$$

Como $-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)\zeta_R(x)\langle \nabla u\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau \le 0$ e

$$
-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)\langle \nabla u\,,\nabla u\rangle\;|u|^\alpha\zeta_R(x)\,dxd\tau \le 0,
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\le R} L_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx \;\le& \int_{|x|\le R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)\,dx\,+ \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)\langle \nabla u\,, b(x,\tau,u)\rangle\;\,dxd\tau \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)u\langle \nabla \zeta_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\;\,dxd\tau \\
&-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)|u|^\alpha\langle \nabla \zeta_R(x)\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau \\
&-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} L'_\delta(u)\langle \nabla \zeta_R(x)\,,\nabla u\rangle\;\,dxd\tau .
\end{aligned}
$$

Sejam

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)\langle \nabla u \,, b(x,\tau,u)\rangle \; dxd\tau \\
I_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)u\langle \nabla\zeta_R(x) \,, b(x,\tau,u)\rangle \; dxd\tau \\
I_3(t) &= -\int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)|u|^\alpha\langle \nabla\zeta_R(x) \,, \nabla u\rangle \; dxd\tau \\
I_4(t) &= -\eta\int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)\langle \nabla\zeta_R(x) \,, \nabla u\rangle \; dxd\tau
\end{aligned}$$

Vamos obter estimativas para cada uma das $I_i(t)$ acima, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Começemos por $I_1(t)$. Como $u(x,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$, e u é suave $\exists M = M(T) > 0$ tal que $|u(x,t)| \leq M, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, t \in [0,T]$. Pela hipótese (f_1), existe $K > 0$ tal que $|b(x,\tau,u)| \leq K(M,T)$. Aplicando Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)\langle \nabla u \,, b(x,\tau,u)\rangle \; dxd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)|\nabla u||b(x,\tau,u)| \, dxd\tau.
\end{aligned}$$

Observe que $|L''_\delta(v)v| \leq C$, e $\lim\limits_{\delta\to 0} L''_\delta(v)v = 0$ uniformemente em $v \in \mathbb{R}$. Por hipótese $|b(x,\tau,u)| \leq K(M,T)$. Como u é suave, $|\nabla u(x,\tau)| \leq C_1$, $\forall\, x \in B_R$ e $\forall \tau \in [t_0,t]$.

Assim, pelo teorema da convergência dominada, obtemos

$$I_1(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L''_\delta(u)u\zeta_R(x)\langle \nabla u, b(x,\tau,u)\rangle \, dxd\tau \to 0 \text{ ao } \delta \to 0. \tag{3.6}$$

Para o segundo termo, obtemos

$$| I_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L'_\delta(u) u \langle \, \nabla \zeta_R(x) \, , b(x,\tau,u) \rangle \; dx d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} |L'_\delta(u)||u||\nabla \zeta_R(x)||b(x,\tau,u)| \, dx d\tau.$$

Como $|L'_\delta(u)| \leq 1$, $|\nabla \zeta_R| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|b(x,\tau,u)| \leq K(M,T)$, temos

$$|I_2(t)| \leq \varepsilon K(M,T) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx d\tau. \tag{3.7}$$

Agora, analisamos o terceiro termo. Como $\lim\limits_{\delta\to 0} L'_\delta(u) = \operatorname{sgn}(u)$, fazendo $\delta \to 0$, temos, pelo teorema da convergência dominada,

$$I_3(t) = -\int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} L'_\delta(u)|u|^\alpha \langle \nabla \zeta_R(x) \, , \nabla u \rangle \; dx d\tau$$

$$\longrightarrow - \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} \operatorname{sgn}(u)|u|^\alpha \langle \nabla \zeta_R(x) \, , \nabla u \rangle \; dx d\tau.$$

Como $\nabla(|u|^{\beta+1}) = (\beta+1)|u|^\beta \operatorname{sgn}(u) \nabla u$, $\forall \beta > 0$, obtemos

$$I_3(t) = -\int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} \operatorname{sgn}(u)|u|^\alpha \langle \nabla \zeta_R(x) \, , \nabla u \rangle \; dx d\tau =$$

$$= \frac{-1}{\alpha+1} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} \langle \nabla \zeta_R(x) \, , \nabla(|u|^{\alpha+1}) \rangle \; dx d\tau.$$

Aplicando novamente o teorema da divergência, obtemos

$$I_3(t) = \frac{1}{\alpha+1} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\leq R} \Delta \zeta_R(x) |u|^{\alpha+1} \, dx d\tau - \frac{1}{\alpha+1} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} |u|^{\alpha+1} \langle \nabla \zeta_R(x), \frac{x}{R} \rangle \, d\sigma(x) d\tau.$$

Como $|\Delta\zeta_R(x)| \leq 2n\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\nabla\zeta_R(x)| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, temos

$$\begin{aligned} |I_3(t)| \ &\leq \frac{2n\varepsilon M^{\alpha+1}(T)}{\alpha+1}\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx d\tau \\ &\quad + \frac{M^{\alpha+1}(T)}{\alpha+1}(t-t_0)\varepsilon R^{n-1} n\omega_n e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Note que

$$\frac{M^{\alpha+1}(T)}{\alpha+1}(t-t_0)\varepsilon R^{n-1} n\omega_n e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}} \to 0, \text{ ao } R \to \infty.$$

Passemos a analisar o quarto termo. Como $\nabla(L_\delta(u)) = L'_\delta(u)\nabla u$, aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$I_4(t) = \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x) L_\delta(u)\, dx d\tau - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta(u) \langle \nabla\zeta_R(x), \frac{x}{R}\rangle\, d\sigma(x) d\tau.$$

Como $\lim\limits_{\delta\to 0} L_\delta(u) = |u|$, fazendo $\delta \to 0$, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$I_4(t) = \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x) |u(x,\tau)|\, dx d\tau - \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u(x,\tau)| \langle \nabla\zeta_R(x), \frac{x}{R}\rangle\, d\sigma(x) d\tau.$$

Como $|\Delta\zeta_R(x)| \leq 2n\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\nabla\zeta_R(x)| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, temos

$$\begin{aligned} |I_4(t)| \ &\leq 2n\eta\varepsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx d\tau \\ &\quad + \varepsilon\eta(t-t_0) M(T) R^{n-1} n\omega_n e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Note que $\varepsilon\eta(t-t_0)M(T)R^{n-1}n\omega_n e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}} \to 0$ ao $R \to \infty$.

Como

$$\int_{|x|\leq R} L_\delta(u)\zeta_R(x)\, dx \ \leq \int_{|x|\leq R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)\, dx + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t),$$

aplicando módulo, desigualdade triangular, obtemos

$$\int_{|x|\leq R} L_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx \;\leq \int_{|x|\leq R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)\,dx + |I_1(t)| + |I_2(t)| + |I_3(t)| + |I_4(t)|.$$

Fazendo $\delta \to 0$ aplicando (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) e fazendo $t_0 \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq R} |u(x,t)|\zeta_R(x)\,dx \leq & \int_{|x|\leq R} |u_0(x)|\zeta_R(x)\,dx \;+ \varepsilon\int_0^t S(T)\int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)| e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dxd\tau \\ & + \varepsilon(t-t_0)R^{n-1} n\omega_n e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\left(\eta M(T) + \frac{M^{\alpha+1}(T)}{\alpha+1}\right),\end{aligned}$$

onde $S(T) = K(M,T) + \dfrac{2nM^\alpha(T)}{\alpha+1} + 2n\eta.$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\Psi_\varepsilon(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\Psi_\varepsilon(x)\,dx + \;\varepsilon S(T)\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|\Psi_\varepsilon(x)\,dxd\tau,$$

onde $\Psi_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$.

Pelo Teorema de Gronwall, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\Psi_\varepsilon(x)\,dx \;\leq\; \exp\left(\varepsilon S(T)T\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\Psi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\,dx \;\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\,dx$. Logo,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

$\square$

Agora vamos obter, no teorema seguinte, a propriedade de conservação de massa para soluções da equação (3.3), ou seja, se $u(x,t)$ é solução de (3.3), então $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx$.

Teorema 3.1.2. *Seja u solução suave e limitada de* (3.3) *tal que* $u(\cdot,t) \to u_0$, *em* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *quando* $t \to 0$. *Se* f *satisfaz* $(f1)$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx.$$

Demonstração. Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi(y) = 0$, $\forall y \leq 0$ e $\psi(y) = 1$, $\forall y \geq 1$ com $0 \leq \psi \leq 1$, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi'(x)| = M_1 < \infty$ e $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi''(x)| = M_2 < \infty$. Seja $R > 0$, definimos

$$\overline{\zeta}_R(x) = \begin{cases} 1, & se\ |x| < R \\ 0, & se\ |x| > 2R \\ \psi\left(\dfrac{|x|}{R} - 1\right) & se\ R \leq |x| \leq 2R. \end{cases}$$

Sejam u solução de (3.3) com $|u| \leq M$ e $t_0 \in (0,T]$ tal que $T \in (t_0, T_*)$. Multiplicando a primeira equação de (3.3) por $\overline{\zeta}_R(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} u_t \overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} \operatorname{div}(b(x,\tau,u)u)\overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau = \\ &\qquad = \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} \operatorname{div}(|u|^\alpha \nabla u)\overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau + \eta \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} \Delta u \overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau, \end{aligned}$$

Como $\overline{\zeta}_R(x) = 0$ para $|x| > 2R$, usando o teorema de Fubini e o teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq 2R} u(x,t)\overline{\zeta}_R(x)\,dx &= \int_{|x|\leq 2R} u(x,t_0)\overline{\zeta}_R(x)\,dx \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} u(x,\tau)\langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\ dxd\tau \\ &- \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} |u(x,t)|^\alpha \langle \nabla u\,, \nabla\overline{\zeta}_R(x)\rangle\ dxd\tau \\ &-\eta \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq 2R} \langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, \nabla u\ \rangle\,dxd\tau. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sejam

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} u(x,\tau)\langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\; dxd\tau,\\
I_2(t) &= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} |u(x,t)|^{\alpha}\langle \nabla u\,, \nabla\overline{\zeta}_R(x)\rangle\; dxd\tau, \text{ e}\\
I_3(t) &= -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} \langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, \nabla u\rangle\; dx\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $|I_i| \to 0$ quando $R \to \infty$ para cada $1 \leq i \leq 3$.

$$
\begin{aligned}
|I_1(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} u(x,\tau)\langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\; dxd\tau\right|\\
&\qquad\qquad \leq \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} \big|u(x,\tau)\langle \nabla\overline{\zeta}_R(x)\,, b(x,\tau,u)\rangle\;\big|\; dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
|I_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} |u(x,\tau)||\nabla\overline{\zeta}_R(x)||b(x,\tau,u)|\, dxd\tau\\
&\leq \frac{K(M,T)M_1}{R}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R}|u(x,\tau)|\, dxd\tau \leq \frac{K(M,T)M_1}{R}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|\, dxd\tau,
\end{aligned}
$$

já que $|\nabla\overline{\zeta}_R(x)| \leq \dfrac{M_1}{R}$ e $|b(x,\tau,u)| < K(M,T)$.

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx$, pelo Teorema 3.1.1, fazendo $R \to \infty$ temos que $I_1(t) \to 0$.

Agora vamos estimar $I_2(t)$, para tal definimos $J(x,t) = \displaystyle\int_0^{u(x,t)} |v|^{\alpha} dv$. Assim $\nabla J(x,t) = |u(x,t)|^{\alpha}\nabla u$. Logo

$$
I_2(t) = -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} |u(x,t)|^{\alpha}\langle \nabla u\,, \nabla\overline{\zeta}_R(x)\rangle\; dxd\tau =
$$

$$= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} \langle \nabla J(x,t)\,,\nabla\overline{\zeta}_R(x)\rangle \;dxd\tau.$$

Aplicando novamente o teorema da divergência, obtemos

$$I_2(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} J(x,t)\Delta\overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|=2R} J(x,t)\langle\nabla\overline{\zeta}_R(x),\frac{x}{2R}\rangle\,d\sigma(x)d\tau.$$

Como $|\Delta\overline{\zeta}_R(x)| \leq \dfrac{M_2}{R^2}$ e $|J(x,t)| \leq \dfrac{1}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}$, temos

$$\begin{aligned}
|I_2(t)| \leq & \frac{M_2}{R^2(\alpha+1)}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{\alpha+1}\,dxd\tau + \frac{M_1}{R(\alpha+1)}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=2R}|u(x,\tau)|^{\alpha+1}d\sigma(x)d\tau \\
\leq & \frac{M_2}{R^2(\alpha+1)}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\alpha+1}(t-t_0) \;+\; \frac{M_1}{R(\alpha+1)}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\alpha+1}(t-t_0).
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $R\to\infty$ temos $|I_2(t)|\to 0$.

Agora vamos estimar $I_3(t)$. Pelo teorema da divergência, obtemos

$$I_3(t) = \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq 2R} u(x,\tau)\Delta\overline{\zeta}_R(x)\,dxd\tau \;-\; \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=2R} u(x,\tau)\langle\nabla\overline{\zeta}_R(x),\frac{x}{2R}\rangle\,d\sigma(x)d\tau.$$

Como $|\Delta\overline{\zeta}_R(x)| \leq \dfrac{M_2}{R^2}$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx$, temos

$$|I_3(t)| \leq \eta\frac{M_2}{R^2}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}(t-t_0) + \eta\frac{M_1}{R}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}(t-t_0).$$

Logo, fazendo $R\to\infty$ temos $|I_3(t)|\to 0$.

Sendo assim, fazendo $R\to\infty$, obtemos de (3.10) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx \;=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t_0)\,dx,$$

já que $I_1(t), I_2(t)$ e $I_3(t)$ vão a zero, ao $R\to\infty$, e $\overline{\zeta}_R(x)\to 1$, ao $R\to\infty$.

$\square$

3.2 Contração da norma L^1

Nesta seção vamos considerar o problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u) + \eta_2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $\eta_1, \eta_2 > 0$, e o problema regularizado

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u) + \eta_2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $\alpha, \eta_2 > 0$. Vamos mostrar que para duas quaisquer soluções fracas limitadas do problema de Cauchy tem-se contração da norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ tanto para soluções do primeiro problema quanto para soluções de viscosidade (veja definição 3.2.1 abaixo) do problema regularizado, desde que as condições iniciais sejam limitadas e sua diferença seja uma função integrável. De fato, para que a solução seja suave precisamos exigir apenas que $\eta_1 + \eta_2 > 0$ com $\eta_1 \geq 0$ e $\eta_2 \geq 0$, mas como estamos tratando desde o início o problema (3.12) vamos tomar $\eta_2 > 0$.

Definição 3.2.1. (*Solução de viscosidade do problema* (3.12)) Se $u^{(\eta_1)} \in L^\infty_{loc}\big([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R})\big)$ é solução clássica de (3.11) em $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times [0,T]$, para algum $T \leq T_*$, e $\lim\limits_{\eta_1 \to 0} u^{(\eta_1)} = u$ está bem definida, dizemos que u é solução de viscosidade para (3.12).

Para provar os resultados desta seção vamos exigir que

$$|\, f(x,t,v) - f(x,t,w)\,| \ \leq\ K_f(M,T)\,|\, v - w\,|, \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T \tag{3.13}$$

e $\forall\, v, w \in [-M, M]$.

Vale salientar que para cada η_1 e η_2 escolhidos, temos equações diferentes e soluções diferentes. Como os valores de η_1 e η_2 estão fixados, vamos denotar uma solução de (3.12) simplesmente por $u(\cdot, t)$ ao invés de $u^{(\eta)}(\cdot, t)$.

No primeiro teorema desta seção mostraremos a contratividade da norma L^1 supondo que $\eta_1 > 0$ e no segundo teorema obtemos o mesmo resultado permitindo $\eta_1 \geq 0$.

Teorema 3.2.2. *Sejam u e v soluções suaves e limitadas de* (3.11)*, com a hipótese adicional $\eta_1 > 0$, com valores iniciais $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, tais que $(u_0 - v_0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $u(\cdot, t) \to u_0$ e $v(\cdot, t) \to v_0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \to 0$, vale* (3.13) *e $u(\cdot, t)$, $v(\cdot, t)$ estão ambas definidas para $0 < t \leq T \leq T_*$, então*

$$\| \, u(\cdot, t) - v(\cdot, t) \, \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \| \, u_0 - v_0 \, \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall \; 0 < t \leq T.$$

Demonstração. Seja $S \in C^1(\mathbb{R})$ crescente, tal que $S(\mathrm{u}) = -1$ para $\mathrm{u} \leq -1$ e $S(\mathrm{u}) = 1$ se $\mathrm{u} \geq 1$, e tomando $\delta > 0$, definimos $L_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ por

$$L_\delta(\mathrm{u}) := \int_0^{\mathrm{u}} S(\mathrm{v}/\delta)\, d\mathrm{v}, \qquad \mathrm{u} \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

assim, temos que $L_\delta(\mathrm{u}) \to |\,\mathrm{u}\,|$ ao $\delta \to 0$, uniformemente em $\mathrm{u} \in \mathbb{R}$, e

$$|\,\mathrm{u}\,|\, L''_\delta(\mathrm{u}) \;\leq\; C \qquad \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R} \qquad (\,\forall\, \delta > 0\,) \tag{3.15}$$

onde C é constante positiva (que não depende de δ).

Seja $\Psi(x, t) := \zeta_{R,\varepsilon}(x) \cdot L'_\delta(u(x, t) - v(x, t))$ para $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [\,0, T\,]$. Tomamos $0 < t_1 < t_2 \leq T$ arbitrários e integramos $(u_t - v_t) \cdot \Psi(x, t)$ no cilindro $B_R \times [\,t_1, t_2\,]$. Assim, obtemos pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}(u_t - v_t)\Psi(x,t)\,dx\,dt = \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\int_{t_1}^{t_2}(u_t - v_t)\,L'_\delta(u(x,t)-v(x,t))\,dt\,dx =$$
$$= \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,L_\delta(u(x,t_2)-v(x,t_2))\,dx \;-\; \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,L_\delta(u(x,t_1)-v(x,t_1))\,dx.$$

Por outro lado, da equação (3.11) e do teorema da Divergência, temos

$$\int_{B_R}(u_t - v_t)\Psi(x,t)\,dx \;=\; I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+I_5(t)+I_6(t), \qquad (3.16)$$

onde

$$I_1(t) = -\int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\langle\,(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u - (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla v, \nabla(u-v)\,\rangle L''_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_2(t) = -\int_{B_R}\langle\,(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\,\nabla u \;-\; (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\,\nabla v,\;\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\,L'_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_3(t) \;=\; \int_{B_R}\langle\, f(x,t,u) \;-\; f(x,t,v),\;\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\;L'_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_4(t) \;=\; \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\;\langle\, f(x,t,u) \;-\; f(x,t,v),\;\nabla(u-v)\,\rangle\;L''_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_5(t) \;=\; -\,\eta_2\int_{B_R}\langle\,\nabla u \;-\; \nabla v,\;\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\;\rangle\;L'_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_6(t) \;=\; -\,\eta_2\int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\;|\,\nabla u \;-\; \nabla v\,|^2\,L''_\delta(u-v)\,dx.$$

Vamos estimar cada uma destas integrais. Para tal, definimos $M(T) > 0$ de modo que $\sup\limits_{0<t\leq T}\{\,\|\,u(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(B_R)}\,,\,\|\,v(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(B_R)}\,\} \leq M(T)$, e $K(T) > 0$ tal que $\sup\limits_{t_1<t\leq T}\{\,\|\,\nabla u(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(B_R)}\,,\,\|\,\nabla v(\cdot,t)\,\|_{L^\infty(B_R)}\,\} \leq K(T)$.

Primeiramente, vamos estimar $I_1(t)$. Pondo $F(w) := (w^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}$, $\quad w \in \mathbb{R}$, temos que $F \in C^1(\mathbb{R})$. Seja $\mathbb{F}(M,T) = \max\limits_{|\xi|\leq M(T)}|\,F'(\xi)|$. Assim, pelo

Teorema do Valor Médio, temos $F(u) - F(v) = F'(\xi)(u - v)$, para algum $\xi = \xi(x,t)$. Note que para cada $(x,t) \in B_R \times [0,T]$, ξ pertencente ao intervalo de extremos u e v, se $u \neq v$ e $\xi = 0$ se $u = v$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_1(t) = &- \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)(u^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \langle \nabla(u-v), \nabla(u-v) \rangle L''_\delta(u-v)\, dx \\
&- \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \langle (u^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla v - (v^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla v, \nabla(u-v) \rangle L''_\delta(u-v)\, dx \\
\leq &- \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)(F(u) - F(v)) \langle \nabla v, \nabla(u-v) \rangle L''_\delta(u-v)\, dx \\
\leq & \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) |F'(\xi)| |\nabla v| (|\nabla u| + |\nabla v|) L''_\delta(u-v)(u-v)\, dx \\
\leq & \; 2\mathbb{F}(M,T) K^2(T) \int_{B_R} L''_\delta(u-v)(u-v)\, dx \to 0, \text{ ao } \delta \to 0.
\end{aligned}$$

Para estimar $I_2(t)$, definimos $G \in C^1(\mathbb{R})$ com $G(u) = \displaystyle\int_0^u (w^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2}\, dw$, assim $\nabla G(u) = (u^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla u$. Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned}
I_2(t) \;&=\; - \int_{B_R} \langle \, (u^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla u \;-\; (v^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla v, \; \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, \rangle \; L'_\delta(u-v) \; dx \\
&=\; - \int_{B_R} \langle \, \nabla(G(u) - G(v)), \; \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, \rangle \; L'_\delta(u-v) \; dx.
\end{aligned}$$

Pelo teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
I_2(t) \;=\; & \int_{B_R} (G(u) - G(v)) \Delta \zeta_{R,\varepsilon}(x) L'_\delta(u-v) \; dx \\
&+ \int_{B_R} (G(u) - G(v)) \langle \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, , \, \nabla(u-v) \, \rangle L''_\delta(u-v) \; dx \\
&- \frac{1}{R} \int_{|x|=R} (G(u) - G(v)) \langle \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x), x \rangle L'_\delta(u-v) \; d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos $G(u) - G(v) = G'(\xi)(u-v)$, para algum $\xi = \xi(x,t)$. Note que para cada $(x,t) \in B_R \times [0,T]$, ξ pertence ao intervalo de extremos u e v, se $u \neq v$ e $\xi = 0$ se $u = v$. Assim, pondo $\mathbb{G}(M,T) = \max\limits_{|\xi| \leq M(T)} |G'(\xi)|$, temos

$$\begin{aligned}
|I_2(t)| \;\leq\; & \int_{B_R} |G'(\xi)||(u-v)L'_\delta(u-v)|\,|\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)|\;dx \\
& + \int_{B_R} |G'(\xi)||\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)||\nabla(u-v)|L''_\delta(u-v)|\,u-v|\;dx \\
& + \int_{|x|=R} |G'(\xi)||\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)||(u-v)L'_\delta(u-v)|\;d\sigma(x) \\
\leq\; & \mathbb{G}(M,T)\int_{B_R} |(u-v)L'_\delta(u-v)|\,|\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)|\;dx \\
& + 2\varepsilon K(T)\mathbb{G}(M,T)\int_{B_R} L''_\delta(u-v)|\,u-v|\;dx \\
& + 2\varepsilon M(T)\mathbb{G}(M,T)\int_{|x|=R} e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\;d\sigma(x),
\end{aligned}$$

onde o último termo da desigualdade anterior vai a zero ao $R \to \infty$ e o penúltimo termo vai a zero ao $\delta \to 0$.

Passemos a estimar $I_3(t)$.

$$\begin{aligned}
I_3(t) \leq & \int_{B_R} |\,f(x,t,u) - f(x,t,v)||\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)||L'_\delta(u-v)|\;dx \\
\leq & \; K_f(M,T)\int_{B_R} |\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)||\,(u-v)||\,L'_\delta(u-v)|\;dx.
\end{aligned}$$

Vamos, agora, estimar $I_4(t)$.

$$I_4(t) \leq 2K(T)\int_{B_R} |\,f(x,t,u) - f(x,t,v)|\,L''_\delta(u-v)\;dx$$

$$\leq 2K(T)K_f(M,T)\int_{B_R} |\, u-v|\, L''_\delta(u-v)\; dx \to 0,\ \text{ao } \delta \to 0.$$

Agora vamos estimar $I_5(t)$.

$$\begin{aligned}
I_5(t) &= -\,\eta_2\int_{B_R} \langle\, \nabla(\, L_\delta(u(x,t)-v(x,t))),\ \nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\; dx \\
&= -\,\eta_2\int_{|\,x\,|\,=R} L_\delta(u(x,t)-v(x,t))\ \langle\, \nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x),\ \frac{x}{R}\,\rangle\; d\sigma(x) \\
&\quad +\,\eta_2\int_{B_R} L_\delta(u(x,t)-v(x,t))\ \Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\; dx \\
&\leq \ \eta_2\int_{|\,x\,|\,=R} L_\delta(u(x,t)-v(x,t))\ |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)|\; d\sigma(x) \\
&\quad +\,\eta_2\int_{B_R} L_\delta(u(x,t)-v(x,t))\ \Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\; dx.
\end{aligned}$$

Temos ainda que $I_6(t)\,\leq\,0$. Com isso, integrando em $[t_1,t_2]$, usando as estimativas obtidas acima e fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,u(x,t_2)-v(x,t_2)\,|\,dx - \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,u(x,t_1)-v(x,t_1)\,|\,dx \leq \\
&\qquad \leq \mathbb{G}(M,T)\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{B_R} |u(x,t)-v(x,t)|\,|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\; dt \\
&\qquad\quad + 2\varepsilon M(T)\mathbb{G}(M,T)\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{|x|=R} e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\; d\sigma(x)\; dt \\
&\qquad\quad + \ K_f(M,T)\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{B_R} |\,u(x,t)-v(x,t)\,|\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\; dx\; dt \\
&\qquad\quad + \eta_2\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{|\,x\,|\,=R} |\,u(x,t)-v(x,t)\,|\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\; d\sigma(x)\; dt \\
&\qquad\quad + \eta_2\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{B_R} |\,u(x,t)-v(x,t)\,|\ \ |\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\; dt.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $t_1 \to 0$, obtemos

$$\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,u(x,t_2) - v(x,t_2)\,|\,dx - \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,u_0(x) - v_0(x)\,|\,dx \leq$$

$$\leq \mathbb{G}(M,T) \int_0^{t_2}\!\!\int_{B_R} |u(x,t) - v(x,t)|\,|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+\, 2\varepsilon M(T)\mathbb{G}(M,T) \int_0^{t_2}\!\!\int_{|x|=R} e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}\,d\sigma(x)\;dt$$

$$+\;\; K_f(M,T)\int_0^{t_2}\!\!\int_{B_R} |\,u(x,t) - v(x,t)\,|\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+\,\eta_2 \int_0^{t_2}\!\!\int_{|\,x\,|\,=\,R} |\,u(x,t) - v(x,t)\,|\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,d\sigma(x)\;dt$$

$$+\,\eta_2 \int_0^{t_2}\!\!\int_{B_R} |\,u(x,t) - v(x,t)\,|\;\;|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt,$$

já que $u(\cdot,t_1) \to u_0$, $v(\cdot,t_1) \to v_0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ao $t_1 \to 0$.

Como $|\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)| \leq 2n\varepsilon e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\,u(x,t_2) - v(x,t_2)\,|\;\Phi_\varepsilon(x)\,dx \;\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\,u_0(x) - v_0(x)\,|\;\Phi_\varepsilon(x)\,dx \,+$$

$$+\;\varepsilon\; C(T)\int_0^{t_2}\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |\,u(x,t) - v(x,t)\,|\,\Phi_\varepsilon(x)\,dx\,dt$$

para todo $0 < t_2 \leq T$, e $C(T)$ é dado por

$$C(T) = 2n\mathbb{G}(M,T) + nK_f(M,T) + n\eta_2 + 2n\eta_2,$$

e

$$\Phi_\varepsilon(x) := \;\exp\Big\{-\,\varepsilon\,\sqrt{1 + |\,x\,|^2}\,\Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos (renomeando t_2 por t)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\, u(x,t) - v(x,t) \,|\, \Phi_\varepsilon(x)\, dx \;\leq\; \exp\left(\varepsilon\, C(T)\, t\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\, u_0(x) - v_0(x) \,|\, \Phi_\varepsilon(x)\, dx$$

para todo $0 < t \leq T$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\|\, u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|\, u_0 - v_0 \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\; 0 < t \leq T. \qquad \square$$

Teorema 3.2.3. *Sejam u e v soluções de viscosidade do problema* (3.12)*, com valores iniciais $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, tais que $(u_0 - v_0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u(\cdot,t) \to u_0$ e $v(\cdot,t) \to v_0$, em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \to 0$. Se vale* (3.13) *e $u(\cdot,t), v(\cdot,t)$ estão ambas definidas para $0 < t \leq T$, então*

$$\|\, u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|\, u_0 - v_0 \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\; 0 < t \leq T.$$

Demonstração. Seja $\eta > 0$. Consideremos a equação

$$u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}((u^2 + \eta^2)^{\alpha/2} \nabla u) + \eta_2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \qquad (3.17)$$

Sejam $u^{(\eta)}(\cdot,t)$ e $v^{(\eta)}(\cdot,t)$ soluções da equação (3.17) com perfis inicias u_0 e v_0, respectivamente. Neste caso, o Teorema 3.2.2 vale para $u^{(\eta)}(\cdot,t)$ e $v^{(\eta)}(\cdot,t)$, ou seja,

$$\|\, u^{(\eta)}(\cdot,t) - v^{(\eta)}(\cdot,t) \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|\, u_0 - v_0 \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\; 0 < t \leq T.$$

Em particular, dado $R > 0$, temos

$$\|\, u^{(\eta)}(\cdot,t) - v^{(\eta)}(\cdot,t) \,\|_{L^1(B_R)} \;\leq\; \|\, u_0 - v_0 \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\; 0 < t \leq T.$$

Fazendo $\eta \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(B_R)} \leq \| u_0 - v_0 \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\ 0 < t \leq T$$

já que a desigualdade acima vale uniformemente em η. Como R é arbitrário, fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| u_0 - v_0 \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\ 0 < t \leq T.$$

Isso mostra que a contratividade vale para duas soluções de viscosidade de (3.12). $\square$

Teorema 3.2.4. *Sejam u e v soluções clássicas do problema* (3.11)*, ambas definidas para $0 < t \leq T$, com condições iniciais $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Se vale* (3.13)*, $u(\cdot,t) \to u_0$ e $v(\cdot,t) \to v_0$, em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ao $t \to 0$ e ainda $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x,t) - v(x,t)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \big(u_0(x) - v_0(x)\big)\, dx, \qquad \forall\ 0 < t \leq T. \tag{3.18}$$

Demonstração. Começaremos a prova deste teorema mostrando que $u(\cdot,t)-v(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$, onde u e v são soluções clássicas de (3.11). Observando que u, v são contínuas em $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ e $u(\cdot,t) \to u_0$, $v(\cdot,t) \to v_0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ao $t \to 0$, temos que $u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$.

Para mostrar que $u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$, é suficiente mostar que, dado $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon, T) \gg 1$ suficientemente grande tal que $\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(|x|>R)} < \varepsilon$, para todo $0 \leq t \leq T$. Tomando $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ com $0 \leq \psi \leq 1$ em toda parte e $\psi(\xi) = 0$ se $\xi \leq 0$, $\psi(\xi) = 1$ se $\xi \geq 1$, seja $\Psi_{R,S} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a função de corte definida por $\Psi_{R,S}(x) = 0$ se $|x| \leq R-1$, $\Psi_{R,S}(x) = \psi(|x| - R + 1)$ se $R - 1 < |x| < R$, e $\Psi_{R,S}(x) = 1$ se $R \leq |x| \leq R+S$, $\Psi_{R,S}(x) = \psi(R+S+1-|x|)$ se $R+S < |x| < R+S+1$, $\Psi_{R,S}(x) = 0$ se $|x| \geq R+S+1$, para qualquer $R > 1$, $S > 0$. Note, que a diferença $\theta(\cdot,t) := u(\cdot,t) - v(\cdot,t)$ satisfaz

$$\theta_t \,+\, \mathrm{div}\,[\,f(x,t,u) - f(x,t,v)\,] \;=\; \Delta\, G(u, v) \,+\, \eta_2 \Delta\theta, \tag{3.19}$$

onde $G(\cdot,\cdot)$ é dado por

$$G(\mathrm{u},\mathrm{v}) := -\int_{\mathrm{u}}^{\mathrm{v}} (\mathrm{w}^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2}\, d\mathrm{w}, \qquad \mathrm{u},\mathrm{v} \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Seja L_δ como no Teorema 3.2.2. Multiplicando (3.19) por $L'_\delta(\theta(x,t)) \cdot \Psi_{R,S}(x)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [\,0,t\,]$, para $0 < t \leq T$, procedendo de forma análoga à prova dos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3, fazendo $\delta \to 0$ e $S \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\,\theta(t)\,\|_{L^1(|\,x\,|>R)} \leq\; & \|\,u_0 - v_0\,\|_{L^1(|\,x\,|>R-1)} + \\ & + \big[\,K_f(M(T),T)\,C_1 + 2n\mathbb{G}(M(T),T) + \eta_2\, C_2\,\big] \int_0^T \|\,\theta(\tau)\,\|_{L^1(R-1<|\,x\,|<R)} d\tau \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, como obtido no Teorema 3.2.3. Aqui, K_f é o obtido assumindo a hipótese (3.13), C_1, C_2 dependem apenas de ψ, n (mas não de R), e $M(T) = \sup\limits_{0<t\leq T} \{\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}, \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}\}$.

Aplicando o teorema anterior para θ, temos que $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n \times [\,0,T])$ e segue que dado $\delta > 0$, $\exists\, R > 1$ suficientemente grande, tal que $\|\,\theta(t)\,\|_{L^1(|\,x\,|>R)} \leq \delta$, para todo $0 \leq t \leq T$. Assim, obtemos a continuidade.

Para mostrar a propriedade de conservação (3.18), vamos considerar $\theta(\cdot,t) = u(\cdot,t) - v(\cdot,t)$ e proceder analogamente. Tomando $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x) = 1$ se $|\,x\,| \leq 1$, $\phi(x) = 0$ se $|\,x\,| \geq 2$, e dado $R > 0$ definimos, $\Phi_R(x) := \phi(x/R)$. Multiplicando (3.19) por $\Phi_R(x)$ e integando em $\mathbb{R}^n \times [\,0,T]$, $0 < t \leq T$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,t)\, \Phi_R(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (\,u_0(x) - v_0(x)\,)\, \Phi_R(x)\, dx \,+\, I_R(t), \tag{3.21}$$

onde

$$I_R(t) \;=\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \langle\, [\, f(x,\tau,u(x,\tau)) - f(x,\tau,v(x,\tau))\,], \nabla\Phi_R(x)\,\rangle \, dx\, d\tau \;+$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(u(x,\tau),v(x,\tau))\,\Delta\Phi_R(x)\,dx\,d\tau \;+\; \eta_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,\tau)\,\Delta\Phi_R(x)\,dx\,d\tau,$$

onde $G(\cdot,\cdot)$ é definida por (3.20). Por (3.13), temos

$$|I_R(t)| \;\le\; \left[K_f(M(T),T)\frac{\hat{C}_1}{R} + \mathbb{G}(M,T)\,\frac{\hat{C}_2}{R^2} + \eta_2 \frac{\hat{C}_2}{R^2} \right] \int_0^T \|\theta(\tau)\|_{L^1(R<|x|<2R)}$$

para todo $0 \le t \le T$, onde $\hat{C}_1 \,=\, \|\,\nabla\phi\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $\hat{C}_2 \,=\, \|\,\Delta\,\phi\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ não dependem de $R > 0$. Pelo teorema anterior, temos $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n \times [\,0,T\,])$, e segue que $I_R(t) \to 0$, ao $R \to \infty$.
Então, fazendo $R \to \infty$ em (3.21) acima, obtemos (3.18), como queríamos.

□

Observação 3.2.5. De forma análoga a feita na demonstração do Teorema 3.2.3, e fazendo $\eta_1 \to 0$, obtemos o mesmo resultado do Teorema 3.2.4 para soluções de viscosidade do problema (3.12).

Podemos refinar um pouco o resultado do Teorema 3.2.4 como segue.

Teorema 3.2.6. *Sejam u e v soluções clássicas da equação* (3.11)*, com perfis iniciais $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, ambos definidos para $0 < t \le T$ e limitados na faixa $\mathbb{R}^n \times [\,0,T\,]$.*

(i) Se $(u_0 - v_0)_+ \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $(u(\cdot,t) - v(\cdot,t))_+ \in C^0([\,0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$, e

$$\|\,(u(\cdot,t) - v(\cdot,t))_+\,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \|\,(u_0 - v_0)_+\,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \;\; \forall\; 0 < t \le T. \qquad (3.22)$$

(ii) Se $(u_0 - v_0)_- \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $(u(\cdot,t) - v(\cdot,t))_- \in C^0([\,0,T\,], L^1(\mathbb{R}^n))$, e

$$\|\,(u(\cdot,t) - v(\cdot,t))_-\,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \|\,(u_0 - v_0)_-\,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \;\; \forall\; 0 < t \le T, \qquad (3.23)$$

onde $\mathrm{u}_+ := (\,|\mathrm{u}|+\mathrm{u}\,)/2$, $\mathrm{u}_- := (\,|\mathrm{u}|-\mathrm{u}\,)/2$ *denotam a parte positiva e parte negativa de* $\mathrm{u} \in \mathbb{R}$, *respectivamente.*

Demonstração. A demonstração é análoga a das provas do Teorema 3.2.2 e da primeira parte do Teorema 3.2.4, mas usando (para o item (i)) a função

$$J_\delta(\mathrm{u}) := \int_0^{\mathrm{u}} H(\mathrm{v}/\delta)\, d\mathrm{v}, \qquad \mathrm{u} \in \mathbb{R} \tag{3.24}$$

ao invés de $L_\delta(\cdot)$, onde $H \in C^1(\mathbb{R})$ e $H(\mathrm{u}) = 0$ para todo $\mathrm{u} \leq 0$, $H(\mathrm{u}) = 1$ para todo $\mathrm{u} \geq 1$, com $H'(\mathrm{u}) \geq 0$ em toda a parte. Uma vez provado (i), para provarmos (ii) basta notar que $\theta_- = (-\theta)_+$ para $\theta \in \mathbb{R}$ qualquer. □

3.3 Teoremas de comparação

Uma consequência importante e imediata de (3.22) é o *princípio de comparação* para soluções de (3.12). Lembre que precisamos da seguinte hipótese para f.

$$|\, f(x,t,\mathrm{u}) - f(x,t,\mathrm{v})\,| \;\leq\; K_f(M,T)\,|\,\mathrm{u}-\mathrm{v}\,|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T, \tag{3.25}$$

Teorema 3.3.1. *Sejam* $u(\cdot,t), v(\cdot,t)$ *soluções da equação* (3.11), *com valores iniciais* $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *respectivamente, ambas definidas para* $0 < t \leq T$ *e limitadas na faixa* $\mathbb{R}^n \times [\,0,T\,]$. *Se vale* (3.25), *então*

$$u_0(x) \;\leq\; v_0(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n \;\Longrightarrow\; u(x,t) \;\leq\; v(x,t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

para cada $0 < t \leq T$.

Demonstração. Sejam $u_0(x) \leq v_0(x)$. Temos, usando o Teorema 3.2.6, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x,t) - v(x,t))_+\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))_+\, dx = 0$$

Logo $\quad u(x,t) \leq v(x,t) \quad q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t \in (0,T]$. Mas como u e v são contínuas, temos que $\quad u(x,t) \leq v(x,t) \quad x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t \in (0,T]$. $\square$

Observação 3.3.2. O Teorema 3.3.1 pode ser obtido diretamente como consequência da contratividade da norma L^1 e conservação de massa.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (u(x,t) - v(x,t))_+ \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t) - v(x,t)| \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) - v(x,t) \, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) - v_0(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))_+ \, dx = 0.
\end{aligned}$$

Na desigualdade acima usamos a contractividade da norma L^1 na primeira integral e a conservação de massa na segunda integral.

Observação 3.3.3. Obtemos teorema análogo ao Teorema 3.3.1 para soluções de viscosidade de (3.12) procedendo como no Teorema 3.2.3.

Em seguida vamos enunciar um segundo teorema de comparação. Para tal, façamos algumas definições. Sejam $F, G \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty), \mathbb{R})$, com $F(x,t,w) \leq G(x,t,w)$, $\forall\, w \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, 0 < t \leq T$. Sejam $\alpha, \eta_1 > 0$, $\eta_2 \geq 0$ e $p_0 \geq 1$. Consideremos agora os problemas

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}((u(x,t)^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla u) + \eta_2 \Delta u + F(x,t,u) \\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.26}$$

e o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}((u(x,t)^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla u) + \eta_2 \Delta u + G(x,t,u) \\ u(\cdot,0) = v_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.27}$$

ambos definidos para $x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$.

Para o próximo teorema vamos supor que

$$|F(x,t,w)-F(x,t,\widetilde{w})| \leq K_F|w-\widetilde{w}|, \forall\, 0<t\leq T, \forall\, x\in\mathbb{R}^n, \forall w,\widetilde{w}\in[-M,M]. \tag{3.28}$$

Teorema 3.3.4. *Sejam* $u(\cdot,t)$ *e* $v(\cdot,t)$ *soluções dos problemas* (3.26) *e* (3.27) *com valores iniciais* $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$*, respectivamente, ambas definidas para* $0<t\leq T$ *e limitadas na faixa* $\mathbb{R}^n\times[0,T]$*. Se valem* (3.13) *e* (3.28)*, então*

$$u_0(x) \leq v_0(x) \quad \text{q.t.p. } x\in\mathbb{R}^n \Longrightarrow \quad u(x,t) \leq v(x,t), \quad \forall\ x\in\mathbb{R}^n,$$

para cada $0<t\leq T$ *e para cada* $\eta_1>0$.

Demonstração. Seja $H\in C^1(\mathbb{R})$ crescente, tal que $H(u)=0$ para u <0 e $H(u)=1$ se $u\geq 1$, e tomando $\delta>0$, definimos $J_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ por

$$J_\delta(u) := \int_0^u H(v/\delta)\, d\mathrm{v}, \qquad \mathrm{u}\in\mathbb{R}, \tag{3.29}$$

assim, temos que $H_\delta(u)\to u_+$ ao $\delta\to 0$, uniformemente em $u\in\mathbb{R}$, e

$$|\,u\,|\,H'_\delta(u) \;\leq\; C, \qquad \forall\ u\in\mathbb{R} \qquad (\forall\ \delta>0\,), \tag{3.30}$$

onde C é constante positiva (que não depende de δ).

Seja $\Psi(x,t) := \zeta_{R,\varepsilon}(x)\cdot H_\delta(u(x,t)-v(x,t))$ para $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]$, onde $\zeta_{R,\varepsilon}$ é a função definida em (3.5). Tomamos $0<t_1<t_2\leq T$ arbitrários e integramos $(u_t-v_t)\cdot\Psi(x,t)$ no cilindro $B_R\times[\,t_1,t_2]$, onde B_R denota a bola $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |\,x\,|<R\}$. Assim, obtemos pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{B_R}(u_t-v_t)\Psi(x,t)\,dx\,dt = \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\int_{t_1}^{t_2}(u_t-v_t)\,H_\delta(u(x,t)-v(x,t))\,dt\,dx =$$
$$= \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,J_\delta(u(x,t_2)-v(x,t_2))\,dx \;-\; \int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,J_\delta(u(x,t_1)-v(x,t_1))\,dx.$$

Por outro lado, usando as primeiras equações dos problemas (3.26), (3.27) e o teorema da divergência, temos

$$\int_{B_R} (u_t - v_t)\,\Psi(x,t)\;dx \;=\; I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t) + I_6(t), \qquad (3.31)$$

onde

$$I_1(t) \;=\; -\int_{B_R} \langle\, (u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\,\nabla u \;-\; (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\,\nabla v,\; \nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\; H_\delta(u-v)\;dx,$$

$$I_2(t) = -\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\langle (u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u - (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla v, \nabla(u-v)\rangle H'_\delta(u-v)\,dx,$$

$$I_3(t) \;=\; \int_{B_R} \langle\, f(x,t,u) \;-\; f(x,t,v),\; \nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\; H_\delta(u-v)\;dx,$$

$$I_4(t) \;=\; \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\;\langle\, f(x,t,u) \;-\; f(x,t,v),\; \nabla(u-v)\,\rangle\; H'_\delta(u-v)\;dx,$$

$$I_5(t) \;=\; -\,\eta_2 \int_{B_R} \langle\, \nabla u \;-\; \nabla v,\; \nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\;\rangle\; H_\delta(u-v)\;dx,$$

$$I_6(t) \;=\; -\,\eta_2 \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\;|\,\nabla u \;-\; \nabla v\,|^2\, H'_\delta(u-v)\;dx \quad \text{e}$$

$$I_7(t) \;=\; \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\;(F(x,t,u) - G(x,t,v))\,H_\delta(u-v)\;dx.$$

Vamos estimar cada uma destas integrais acima. Para tal, definimos $M(T) > 0$ tal que $\max\{|\,u(x,t)\,|, |\,v(x,t)\,|\} \leq M(T)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < t \leq T$, e $K(T) > 0$ tal que $\max\{|\,\nabla u(x,t)\,|\,, \,|\,\nabla v(x,t)\,|\,\} \leq K(T)$, $\forall\, x \in B_R$ e $0 < t \leq T$. Pondo $\varphi(w) := (w^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2}$, $w \in \mathbb{R}$, temos que $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Primeiramente vamos estimar $I_1(t)$.

$$
\begin{aligned}
I_1(t) \; = & - \int_{B_R} \langle (u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u - (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u \,,\, \nabla\zeta_{R,\varepsilon} H_\delta(u-v)\rangle \, dx \\
& - \int_{B_R} \langle (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u - (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla v \,,\, \nabla\zeta_{R,\varepsilon} H_\delta(u-v)\rangle \, dx \\
\leq & \int_{B_R} \varphi'(\xi)(u-v)|\nabla u| \, |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}| \, |H_\delta(u-v)| \, dx \\
& - \int_{B_R} (v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2} \langle H_\delta(u-v)(\nabla u - \nabla v) \,,\, \nabla\zeta_{R,\varepsilon}\rangle \, dx \\
\leq & \; K_\varphi(T)K(T) \int_{B_R} (\, u(x,t)-v(x,t))_+ \, |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}| \, dx \\
& + \left| \int_{B_R} (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2} \langle \nabla J_\delta(u-v) \,,\, \nabla\zeta_{R,\varepsilon}\rangle \, dx \right| \\
\leq & \; K_\varphi(T)K(T) \int_{B_R} (\, u(x,t)-v(x,t))_+ \, |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}| \, dx \\
& + \; (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2} \left| \int_{B_R} J_\delta(u-v) \, \Delta\zeta_{R,\varepsilon} \, dx \right| \\
& + \; (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2} \left| \int_{|x|=R} J_\delta(u-v) \, \langle \nabla\zeta_{R,\varepsilon} \,,\, \frac{x}{R}\rangle \, d\sigma(x) \right| \\
\leq & \; K_\varphi(T)K(T) \int_{B_R} (\, u(x,t)-v(x,t))_+ \, |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}| \, dx \\
& + \; (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{B_R} |J_\delta(u-v)| \, |\Delta\zeta_{R,\varepsilon}| \, dx \\
& + \; (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{|x|=R} |J_\delta(u-v)| \, |\nabla\zeta_{R,\varepsilon}| \, d\sigma(x),
\end{aligned}
$$

onde $K_\varphi(T) = K_\varphi(M(T),T) := \sup\limits_{|\xi|\leq M(T)} |\varphi'(\xi)| \; .$

Para $I_2(t)$, temos

$$\begin{aligned} I_2(t) \; &= \; -\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)(u(x,t)^2+\eta_1^2)^{\alpha/2} H_\delta'(u(x,t)-v(x,t))|\,\nabla(u-v)\,|^2\,dx \\ &\quad -\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big[(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}-(v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\big] H_\delta'(u-v)\langle\,\nabla v,\;\nabla(u-v)\,\rangle\,dx. \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)(u(x,t)^2+\eta_1^2)^{\alpha/2} H_\delta'(u(x,t)-v(x,t))|\,\nabla(u-v)\,|^2\,dx \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} I_2(t) \; &\leq -\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big[(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}-(v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\big] H_\delta'(u-v)\langle\,\nabla v,\;\nabla(u-v)\,\rangle\,dx \\ &\leq -\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big[(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}-(v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\big] H_\delta'(u-v)|\nabla v||\nabla(u-v)|\,dx \\ &\leq 2K^2(T)\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big|(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}-(v^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\big| H_\delta'(u-v)\,dx \\ &= 2K^2(T)\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big|\varphi'(\xi)(u-v)\big| H_\delta'(u-v)\,dx \\ &\leq 2K^2(T)\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)\big|\varphi'(\xi)\big||u-v| H_\delta'(u-v)\,dx \\ &\leq 2K^2(T)K_\varphi(T)\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x)|u-v| H_\delta'(u-v)\,dx, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o Teorema do Valor Médio. Observe que $\xi=\xi(x,t)$, para cada $(x,t)\in B_R\times[0,T]$, pertence ao intervalo de extremos u e v (nos casos onde $u=v$ o integrando vale zero). Vamos, agora, estimar $I_5(t)$.

$$I_5(t) \; = \; -\,\eta_2\int_{B_R} \langle\,\nabla J_\delta(u(x,t)-v(x,t)),\;\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,\rangle\,dx$$

$$= \; - \; \eta_2 \int_{|\,x\,| = R} J_\delta(u(x,t) - v(x,t)) \; \langle \; \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x), \; \frac{x}{R} \; \rangle \; d\sigma(x)$$

$$+ \; \eta_2 \int_{B_R} J_\delta(u(x,t) - v(x,t)) \; \Delta \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; dx.$$

Temos ainda que $I_6(t) \leq 0$. Agora vamos estimar $I_7(t)$.

$$\begin{aligned} I_7(t) \; &= \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; (F(x,t,u) - F(x,t,v)) \, H_\delta(u-v) \; dx \\ &+ \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; (F(x,t,v) - G(x,t,v)) \, H_\delta(u-v) \; dx \\ &\leq \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; (F(x,t,u) - F(x,t,v)) \, H_\delta(u-v) \; dx \\ &\leq K_F \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; |u-v| \, H_\delta(u-v) \; dx, \end{aligned}$$

pois $F(x,t,v) \leq G(x,t,v)$ e $F(x,t,u) - F(x,t,v) \leq K_F |u-v|$.

Usando estas estimativas e fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; (\; u(x,t_2) - v(x,t_2) \;)_+ \; dx \;\; - \int_{B_R} \zeta_{R,\varepsilon}(x) \; (\; u(x,t_1) - v(x,t_1) \;)_+ \; dx \leq$$

$$\leq K_\varphi(T) K(T) \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R} (u(x,t) - v(x,t))_+ \, | \, \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, | \, dx \; dt$$

$$+ (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R} (u(x,t) - v(x,t))_+ \, | \, \Delta \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, | \, dx \; dt$$

$$+ (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{|x|=R} (u(x,t) - v(x,t))_+ \, | \, \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, | \, d\sigma(x) \; dt$$

$$+ \;\; K_f(M(T),T) \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R} + (\; u(x,t) - v(x,t) \;)_+ \, | \, \nabla \zeta_{R,\varepsilon}(x) \, | \; dx \; dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{|\,x\,|\,=\,R} \eta_2\,(\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\;d\sigma(x)\;dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} \eta_2\,(\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;\;|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+K_F\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} (\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;\;|\,\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

por (3.13), (3.30) e o Teorema da Convergência Dominada. Agora, fazendo $t_1 \to 0$, obtemos

$$\int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,(\,u(x,t_2)-v(x,t_2)\,)_+\,dx\;\;-\int_{B_R}\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,(\,u(x,0)-v(x,0)\,)_+\,dx \leq$$

$$\leq K_\varphi(T)K(T)\int_0^{t_2}\int_{B_R}(u(x,t)-v(x,t))_+\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_0^{t_2}\int_{B_R}(u(x,t)-v(x,t))_+\,|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_0^{t_2}\int_{|x|=R}(u(x,t)-v(x,t))_+\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,d\sigma(x)\;dt$$

$$+\;K_f(M(T),T)\int_0^{t_2}\int_{B_R}(\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\,|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\;dx\;dt$$

$$+\int_0^{t_2}\int_{|\,x\,|\,=\,R} \eta_2\,(\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;|\,\nabla\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\;d\sigma(x)\;dt$$

$$+\int_0^{t_2}\int_{B_R} \eta_2\,(\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;\;|\,\Delta\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt$$

$$+K_F\int_0^{t_2}\int_{B_R} (\,u(x,t)-v(x,t)\,)_+\;\;|\,\zeta_{R,\varepsilon}(x)\,|\,dx\;dt,$$

já que $u(\cdot, t_1) \to u_0$ e $v(\cdot, t_1) \to v_0$, ao $t_1 \to 0$. Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (u(x,t_2) - v(x,t_2))_+ \Phi_\varepsilon(x)\, dx \leq & \int_{\mathbb{R}^n} (\, u_0(x) - v_0(x)\,)_+ \Phi_\varepsilon(x)\, dx \\
& + K_F \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} (\, u(x,t) - v(x,t)\,)_+ \, \Phi_\varepsilon(x)\, dx\, dt \\
& + \varepsilon\, C(T) \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x,t) - v(x,t))_+ \Phi_\varepsilon(x)\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

para todo $0 < t_2 \leq T$, e $C(T)$ é dado por

$$C(T) = (2n+1)(M(T) + \eta_1)^\alpha + (2n+1)\eta_2 + K_f(M(T), T) + K_\varphi(T)$$

e

$$\Phi_\varepsilon(x) := \exp\Big\{ - \varepsilon \sqrt{1 + |\, x\,|^2} \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos (renomeando t_2 por t)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} (\, u(x,t) - v(x,t)\,)_+ \, \Phi_\varepsilon(x)\, dx \leq \\
& \qquad \leq \exp\left((K_F + \varepsilon\, C(T))\, t \right) \int_{\mathbb{R}^n} (\, u_0(x) - v_0(x)\,)_+ \, \Phi_\varepsilon(x)\, dx = 0
\end{aligned}$$

para todo $0 < t \leq T$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\, u(x,t) - v(x,t)\,)_+ \, dx = 0, \qquad \forall\ 0 < t \leq T.$$

O que implica $u(x,t) \leq v(x,t)$ $\;q.t.p.$, mas como u e v são contínuas, temos $u(x,t) \leq v(x,t)$ $\;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, 0 < t \leq T$. □

Observação 3.3.5. Para soluções de viscosidade, consideremos

$$u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}((u^2 + \eta^2)^{\alpha/2} \nabla u) + \eta_2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \tag{3.32}$$

Sejam $u^{(\eta)}(\cdot, t)$ e $v^{(\eta)}(\cdot, t)$ soluções de (3.32) com perfis inicias u_0 e v_0 respectivamente. Neste caso, o teorema anterior vale para $u^{(\eta)}(\cdot, t)$ e $v^{(\eta)}(\cdot, t)$, ou seja,

$$u^{(\eta)}(x,t) \leq v^{(\eta)}(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, 0 < t \leq T.$$

Se a família $\{v^{(\eta)}(\cdot,t)\}_\eta$ é uniformemente limitada (veja condições no capítulo cinco), então fazendo $\eta \to 0$ obtemos, pelo teorema da convergência dominada, que

$$u(x,t) \leq v(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, 0 < t \leq T.$$

Para o último teorema de comparação vamos considerar o problema degenerado

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.33}$$

e os problemas auxiliares

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = (u_0)_+ + v_0 \end{cases} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(x,t,u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = -(u_0)_- - v_0, \end{cases} \tag{3.35}$$

onde $v_0(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $v_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. E ainda, as funções $(u_0)_+$ e $(u_0)_-$ são, respectivamente, as partes positivas e negativas de u_0.

Teorema 3.3.6. *Sejam* u, w *e* v *soluções dos problemas* (3.33), (3.34) *e* (3.35) *respectivamente, ambas definidas para* $0 < t \leq T$ *e limitadas na faixa* $\mathbb{R}^n \times [\,0, T\,]$. *Então*

$$v(x,t) \leq u(x,t) \leq w(x,t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \text{ para cada } 0 < t \leq T.$$

A prova deste teorema é análoga à prova do Teorema 3.3.4 e será omitida.

3.4 Limitação da norma L^q e estimativa básica de energia

Nesta seção começamos obtendo estimativas para a norma L^q de soluções do problema (3.36) abaixo. Estas estimativas serão importantes na obtenção de uma limitação global para soluções do mesmo problema. Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u) + \eta\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.36}$$

onde b satisfaz a hipótese (b1) abaixo.

(b1) $\exists\, k > 0$ e $B \in C^0((0,\infty))$ tais que $|b(x,t,u)|_2 \leq B(t)|u|^k$, onde $|\cdot|_2$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$.

O primeiro passo será mostrar que, nessas condições, as normas L^q ficam limitadas. Isso será feito em dois casos. Vejamos como esses casos aparecem naturalmente ao tentarmos limitar a norma L^q.

Sejam $0 < \varepsilon \leq 1$ e $\zeta_{R,\varepsilon}$ a função de corte (escreveremos $\zeta_{R,\varepsilon} = \zeta_R$) definida como na seção anterior. Sejam $q \geq 2$ e $\Phi_\delta(v) := L_\delta^q(v)$, onde L_δ é definida como em (3.4). Sejam $0 < t_0 < t < T$ quaisquer. Seja u uma solução suave e limitada de (3.36) em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ com $u(\cdot,t) \to u_0$ ao $t \to 0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Multiplicando a primeira equação de (3.36) por $\Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0,t]$, obtemos pelo teorema de Fubini e pelo teorema da divergência que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} \Phi_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)\,dx = &\int_{B_R} \Phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)\,dx \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} G_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&- \int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} G_\delta(u)\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Phi''_\delta(u)u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Phi'_\delta(u)u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau \\
&- \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Phi''_\delta(u)|u|^\alpha|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&- \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Phi''_\delta(u)|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Phi_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&- \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} \Phi_\delta(u)\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

onde

$$
G_\delta(u) := \int_0^u \Phi'_\delta(v)|v|^\alpha\,dv \overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} q\int_0^u |v|^{q-1}\operatorname{sgn}(v)|v|^\alpha\,dv = \frac{q}{q+\alpha}|u(x,t)|^{q+\alpha} \geq 0
$$

e $\nabla G_\delta(u) = \Phi'_\delta(u)|u|^\alpha\nabla u$.

Fazendo $\delta \to 0$, temos $L''_\delta(u)u \to 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} |u(x,t)|^q\zeta_R(x)\,dx + q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&\quad +\eta q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u|^{q-2}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau = \int_{B_R} |u(x,t_0)|^q\zeta_R(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q+\alpha}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&-\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}|u|^{q+\alpha}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&+q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q}\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau\\
&+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}|u|^{q}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Vamos estimar o termo $q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau$ a fim de compará-lo com o termo $q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau$.

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau &\le \int_{t_0}^{t}B(\tau)\int_{B_R}|u|^{q-1+k}|\nabla u|\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&\le \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}B(\tau)^2\int_{B_R}|u|^{q-\alpha+2k}\zeta_R(x)\,dx\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}|u(x,t)|^q\zeta_R(x)\,dx+\frac{q(q-1)}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&\quad+\eta q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\le\int_{B_R}|u(x,t_0)|^q\zeta_R(x)\,dx\\
&\quad+\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|^{q+\alpha}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&\quad-\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}|u|^{q+\alpha}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau
\end{aligned}
$$

$$+\frac{q(q-1)}{2}\int_{t_0}^{t} B(\tau)^2 \int_{B_R} |u|^{q-\alpha+2k}\zeta_R(x)\,dx\,d\tau$$
$$+\,q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u|^{q}\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau$$
$$+\,\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u|^{q}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau$$
$$-\,\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} |u|^{q}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau. \quad (3.38)$$

Observe que $u(\cdot,t)\to u_0$ em $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ quando $t\to 0$, já que $u(\cdot,t)\to u_0$, em $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ao $t\to 0$.

Assim, fazendo $t_0\to 0$ e depois $R\to+\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx &+ \frac{q(q-1)}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
&+\eta q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^2\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
&\le \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q}{q+\alpha}2n\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\alpha}\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
&+\frac{q(q-1)}{2}\int_0^t B(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\gamma}\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
&+q\varepsilon\int_0^t B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+k}\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
&+2n\eta\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q}\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau, \quad (3.39)
\end{aligned}$$

onde $\zeta_R(x)\to\Psi_\varepsilon(x):=e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, ao $R\to\infty$, e $\gamma:=2k-\alpha$.

Deste ponto em diante é necessário saber se $\gamma\ge 0$ ou se $\gamma<0$, ou seja, se $k\ge\alpha/2$ ou se $k<\alpha/2$. Consideremos primeiro o caso $k\ge\alpha/2$.

3.4.1 Caso $k \geq \alpha/2$

Teorema 3.4.1. *Seja $q \geq 2$. Se $u(\cdot, t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ de (3.36), então $u(\cdot, t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Demonstração. Da equação (3.39), obtemos, em particular,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx \ &\leq \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q}{q+\alpha} 2n\varepsilon M^\alpha(T) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx\, d\tau \\ &+ \frac{q(q-1)}{2} M^\gamma(T) \int_0^t B(\tau)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx\, d\tau \\ &+ q\varepsilon M^k(T) \int_0^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx\, d\tau \\ &+ 2n\eta\varepsilon \int_0^t \int_{B_R} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx\, d\tau,\end{aligned}$$

onde $M(T) := \sup\{|u(x,t)| : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]\}$. Pelo lema de Gronwall, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Psi_\varepsilon(x)\, dx \leq \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \exp\left(K(T) + \frac{q(q-1)}{2} M^\gamma(T) \int_0^t B(\tau)^2\, d\tau \right),$$

onde $K(T) = \dfrac{2qn\varepsilon M^\alpha(T)}{q+\alpha} + q\varepsilon M^k(T) \displaystyle\int_0^T B(\tau)\, d\tau + 2n\eta\varepsilon.$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \exp\left(\frac{q(q-1)}{2} M^\gamma(T) \int_0^t B(\tau)^2\, d\tau \right),$$

ou seja, $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M_q(T),\ \forall\, 0 \leq t \leq T.$ □

Corolário 3.4.2. *Seja $q \geq 2$. Se $u(\cdot, t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ de (3.36), então*

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau<+\infty \quad e \quad \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau<+\infty\,.$$

Demonstração. De (3.39) mais o fato de que $u(\cdot,t)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $0\le t\le T$, obtemos, fazendo $\varepsilon\to 0$, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^q\,dx+\frac{q(q-1)}{2}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau\\ +\,\eta q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}&|u|^{q-2}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau \;\le\; \|u_0(x)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &+\frac{q(q-1)M^\gamma(T)}{2}\int_0^t B(\tau)^2\int_{B_R}|u|^q\,dx\,d\tau<+\infty.\end{aligned}$$

Logo, fazendo $t=T$, obtemos em particular

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau<+\infty \text{ e } \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau<+\infty\,. \qquad \square$$

Lema 3.4.3. *Seja $q\ge 2$. Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ de* (3.36)*, então*

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1+k}|\nabla u|\,dx\,d\tau<+\infty\,.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1+k}|\nabla u|\,dx\,d\tau &\le\frac{1}{2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-\alpha+2k}\,dx\,d\tau+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau\right)\\ &\le\frac{M^\gamma(T)}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\,d\tau+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau,\end{aligned}$$

na última desigualdade temos que a primeira parcela é finita pois $u(\cdot,t)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $0\le t\le T$ e a segunda parcela é finita pelo Corolário 3.4.2. $\square$

Teorema 3.4.4. *Seja $q\ge 2$. Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ de* (3.36)*, então existe $E_q\subset[0,T]$ com $|E_q|_1=0$, tal que $\forall\, t\in[0,T]\backslash E_q$*

tem-se

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\,dx$$
$$= \ q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,t,u)\,,\nabla u\rangle\,dx.$$

Demonstração. De (3.37), temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|u(x,t)|^q\zeta_R(x)\,dx &+ q(q-1)\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+\eta q(q-1)\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau = \int_{B_R}|u(x,t_0)|^q\zeta_R(x)\,dx\\
&+\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^{q+\alpha}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&-\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}|u|^{q+\alpha}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&+q(q-1)\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+q\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^q\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau\\
&+\eta\int_{t_0}^t\int_{B_R}|u|^q\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&-\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}|u|^q\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Como $u(\cdot,t)\in L^q(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $0\le t\le T$. Fazendo $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ e $t_0\to 0$ (nesta ordem), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2dxd\tau + \eta q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2dxd\tau$$
$$= \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \ q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\,dx\,d\tau.$$

Como todas as funções são absolutamente integráveis, temos, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, que existe $E_q \subset [0,T]$ onde $|E_q|_1 = 0$, tal que $\forall\, t \in [0,T] \setminus E_q$ tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2 dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx \\ = q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,t,u)\,,\nabla u\rangle\, dx.\end{aligned}$$

□

3.4.2 Caso $0 \leq k < \alpha/2$

Teorema 3.4.5. *Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ de* (3.36)*, $q \geq 2$ e $q \geq 1-2k+\alpha$, então $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Demonstração. Da equação (3.39), obtemos, em particular,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx \;&\leq \|u_0(x)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q}{q+\alpha}2n\varepsilon M^\alpha(T)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\ &+ \frac{q(q-1)}{2}\int_0^t B(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+\gamma}\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\ &+ q\varepsilon M^k(T)\int_0^t B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\ &+ 2n\eta\varepsilon\int_0^t\int_{B_R}|u|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau.\end{aligned}$$

Note que, como $q \geq 1-\gamma$, temos $q+\gamma \geq 1$, e assim

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+\gamma}\Psi_\varepsilon(x)\,dx &= \int_{|u(x,t)|\leq 1}|u|^{q+\gamma}\Psi_\varepsilon(x)\,dx + \int_{|u(x,t)|>1}|u|^{q+\gamma}\Psi_\varepsilon(x)\,dx \\ &\leq \int_{|u(x,t)|\leq 1}|u|\Psi_\varepsilon(x)\,dx + \int_{|u(x,t)|>1}|u|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx \\ &\leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\Psi_\varepsilon(x)\,dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Psi_\varepsilon(x)\,dx \;\leq\; & \|u_0(x)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q}{q} 2n\varepsilon M^\alpha(T) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\alpha} \Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
& + \frac{q(q-1)}{2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{t_0}^T B(\tau)^2\,d\tau \\
& + \frac{q(q-1)}{2} \int_{t_0}^t B(\tau)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
& + q\varepsilon M^k(T) \int_0^t B(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau \\
& + 2n\eta\varepsilon \int_0^t \int_{B_R} |u|^q \Psi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau.
\end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Psi_\varepsilon(x)\,dx \leq \left(\|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right) \exp\left(K(T)\right),$$

onde
$K(T) = \dfrac{2qn\varepsilon M^\alpha(T)}{q+\alpha} + \dfrac{q(q-1)}{2} \displaystyle\int_0^T B(\tau)^2\,d\tau + q\varepsilon M^k(T) \int_0^T B(\tau)\,d\tau + 2n\eta\varepsilon.$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right) \exp\left(\frac{q(q-1)}{2} \int_0^T B(\tau)^2\,d\tau \right),$$

ou seja, $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M_q(T),\ \forall\, 0 \leq t \leq T.$
Note que aqui a constante $M_q(T)$ não depende de $M(T)$. □

Corolário 3.4.6. *Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ de (3.36), $q \geq 2$ e $q \geq 1 - 2k + \alpha$, então*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau < +\infty \ \ e \ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau < +\infty.$$

Demonstração. De (3.39) mais o fato de que $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo

$0 \le t \le T$, obtemos, fazendo $\varepsilon \to 0$, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \, dx + \frac{q(q-1)}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau$$
$$+ \eta q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau \;\le\; \|u_0(x)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$
$$+ \frac{q(q-1)}{2} \int_0^t B(\tau)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\gamma} \, dx \, d\tau < +\infty$$

já que $\gamma < 0$ e $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ implica , por interpolação, que $u(\cdot,t) \in L^{q+\gamma}(\mathbb{R}^n)$, já que $q+\gamma \ge 1$. Logo, fazendo $t = T$, obtemos, em particular,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau < +\infty \text{ e } \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau < +\infty. \qquad \square$$

Lema 3.4.7. *Seja $q \ge 2$ e $q \ge 1-\gamma$. Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ de (3.36), então*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1+k} |\nabla u| \, dx \, d\tau < +\infty \, .$$

Demonstração. Pela desigualdade de Young temos que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1+k} |\nabla u| \, dx \, d\tau \le \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-\alpha+2k} \, dx \, d\tau + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau \right).$$

A segunda parcela é finita pelo Corolário 3.4.6. A primeira parcela é finita pois $\gamma < 0$, $q+\gamma \ge 1$ e $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ implica, por interpolação, que $u(\cdot,t) \in L^{q+\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Teorema 3.4.8. *Seja $q \ge 2$ e $q \ge 1-\gamma$. Se $u(\cdot,t)$ é solução suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ de (3.36), então existe $E_q \subset [0,T]$ com $|E_q|_1 = 0$, tal* *que* $\forall\, t \in [0,T] \setminus E_q$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\,dx$$
$$= q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,t,u)\,,\nabla u\rangle\,dx.$$

Demonstração. De (3.37), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R}|u(x,t)|^q\zeta_R(x)\,dx + q(q-1)\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau&\\
+\,\eta q(q-1)\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q-2}|\nabla u|^2\zeta_R(x)\,dx\,d\tau = \int_{B_R}|u(x,t_0)|^q\zeta_R(x)\,dx&\\
+\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q+\alpha}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau&\\
-\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|=R}|u|^{q+\alpha}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau&\\
+\,q(q-1)\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau&\\
+\,q\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q}\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau&\\
+\,\eta\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{B_R}|u|^{q}\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau&\\
-\,\eta\int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|=R}|u|^{q}\frac{1}{R}\langle\nabla\zeta_R(x)\,,x\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau.&\qquad(3.41)
\end{aligned}$$

Como $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq t \leq T$, fazendo $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ e $t_0 \to 0$ (nesta ordem), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2dxd\tau + \eta q(q-1)\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2dxd\tau$$
$$= \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,\tau,u)\,,\nabla u\rangle\,dx\,d\tau.$$

Como todas as funções são absolutamente integraveis, temos, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, que existe $E_q \subset [0,T]$ onde $|E_q|_1 = 0$, tal que $\forall\, t \in [0,T] \setminus E_q$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2 dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx$$
$$= q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}u\langle b(x,t,u)\,,\nabla u\rangle\, dx.$$

$\square$

Capítulo 4

PME's com termos advectivos: Caso semidissipativo

Neste capítulo vamos supor que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0$. Com esta hipótese mostraremos que qualquer solução suave $u(x,t)$ de

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) = \operatorname{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u) + \eta_2 \Delta u, \; x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0. \\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\alpha > 0, p_0 \geq 1, |f(x,t,u)| \leq B(T)|u(x,t)|^{k+1}$, com $k \geq 0$; satisfaz

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \; \forall\, 0 \leq t \leq T, \text{ para cada } 1 \leq p_0 \leq q \leq \infty.$$

Mais precisamente, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em t.

Em seguida, obteremos uma estimativa para a velocidade de decaimento destas soluções e, finalmente, mostraremos que esta estimativa é consistente com a mudança de escala.

4.1 Decrescimento da norma L^q para soluções suaves

Teorema 4.1.1. *Seja* $u(x,t) \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *solução do problema* (4.1) *para algum* $T > 0$. *Se* $f, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ *são funções contínuas tais que* $\exists B(T) > 0$ *com* $|f(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{k+1}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, u \in \mathbb{R}$, *e* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0$, $\forall (x,t) \in B_R \times (0,T]$, *então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t \leq T \text{ para cada } p_0 \leq q \leq \infty.$$

Demonstração. Sejam $p_0 \leq q \leq \infty$, $M(T) := \sup\{\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} : 0 < \tau < T\}$, $K_f(T) := \sup\left\{\left|\dfrac{\partial}{\partial v}[f(x,t,v)]\right| : |v| \leq M(T)\right\}$ e $\delta > 0$. Escreveremos $\dfrac{\partial}{\partial v}[f(x,t,v)] = f'(v)$.

Multiplicando a primeira equação de (4.1) por $\Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ para dado t_0 arbitrário com $0 < t_0 < t \leq T$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)u_\tau \, dx\, d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)\,\mathrm{div}(f)\, dx\, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)\left[\mathrm{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u) + \eta_2\Delta u\right] dx\, d\tau.$$

Sejam $I_1(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)u_\tau \, dx\, d\tau$,

$I_2(t) = -\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)\,\mathrm{div}(f)\, dx\, d\tau$,

$I_3(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} \Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)\,\mathrm{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u)\, dx\, d\tau$ e

$$I_4(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<R} \eta_2 \Phi'_\delta(u) \zeta_R(x) \Delta u \, dx \, d\tau.$$

Vamos trabalhar primeiramente com $I_1(t)$. Aplicando o Teorema de Fubini e integrando em τ, obtemos

$$I_1(t) = \int_{|x|<R} \zeta_R(x) \int_{t_0}^{t} \Phi'_\delta(u) u_\tau \, d\tau \, dx =$$

$$= \int_{|x|<R} \zeta_R(x) \Phi_\delta(u(x,t)) \, dx - \int_{|x|<R} \zeta_R(x) \Phi_\delta(u(x,t_0)) \, dx.$$

Aplicando o teorema da Divergência para $I_2(t)$ temos,

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, \Phi''_\delta(u) \nabla u \rangle \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, \nabla \zeta_R(x) \rangle \Phi'_\delta(u) \, dx \, d\tau \\
&= q(q-1) \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, L_\delta^{q-2}(u) (L'_\delta(u))^2 \nabla u \rangle \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad + q \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, L_\delta^{q-1}(u) L''_\delta(u) \nabla u \rangle \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad + q \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, \nabla \zeta_R(x) \rangle L_\delta^{q-1}(u) L'_\delta(u) \, dx \, d\tau \\
&\leq q \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, \nabla (L_\delta^{q-1}(u)) \rangle L'_\delta(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad + qB(T) \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} |u(x,t)|^{q+k-1} |u(x,t)| L''_\delta(u) |\nabla u| \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
&\quad + qB(T) \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} |u(x,t)|^{q+k} |\nabla \zeta_R(x)| \, dx \, d\tau. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Escrevendo $I_{2,1}(t) = q \displaystyle\int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \langle f(x,t,u) \, , \, \nabla (L_\delta^{q-1}(u)) \rangle L'_\delta(u) \zeta_R(x) \, dx \, d\tau.$

Novamente, pelo Teorema da Divergência, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{2,1}(t) =& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \operatorname{div}[f(x,t,u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)]L_\delta^{q-1}(u)\,dx\,d\tau \\
=& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \operatorname{div}[f(x,t,u)]L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \langle f(x,t,u)\,,\,\nabla u\rangle L_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \langle f(x,t,u)\,,\,\nabla\zeta_R(x)\rangle L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\,dx\,d\tau \\
\leq& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u}(x,t,u)u_{x_j}L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
& + qB(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u(x,t)|^{q+k-1}\,|\nabla u||u(x,t)|L''_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
& + qB(T)M^k(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |u(x,t)|^q\,|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

já que $\quad -q\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x,t,u)L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \;\leq\; 0.$

Como $|u(x,t)|L''_\delta(u)\to 0$ ao $\delta\to 0$, fazendo $\delta\to 0$ obtemos de (4.2) e (4.3)

$$
\begin{aligned}
I_2(t) \leq& -q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial u}(x,t,u)|u(x,t)|^{q-2}\,u\,u_{x_j}\,\zeta_R(x)\,dx\,d\tau + \\
& + 2qM^k(T)B(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u(x,t)|^q|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Podemos escrever

$$
\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial u}(x,t,u)\,q\,|u(x,t)|^{q-2}\,u\,u_{x_j} \;=\; \operatorname{div}\left(\int_0^u \frac{\partial f_j}{\partial v}(x,t,v)\,q\,|v(x,t)|^{q-2}\,v\,d\,v\right).
$$

Assim,

$$
I_2(t) \leq \int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\langle\int_0^u\frac{\partial f}{\partial v}(x,t,v)\,q\,|v(x,t)|^{q-2}\,v\,dv\,,\,\nabla\zeta_R(x)\rangle\,dx\,d\tau +
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2qB(T)M^k(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u(x,t)|^q|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau \\
&\leq (K_f(T) + 2qB(T)M^k(T))\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u(x,t)|^q\,|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau,
\end{aligned}
$$

já que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(x,t,v)\,q\,|v(x,t)|^{q-2}\,v\,dv\right| &\leq K_f(T)\int_0^u q\,|v(x,t)|^{q-2}\,v\,dv \\
&= K_f(T)|u(x,t)|^q.
\end{aligned}
$$

Agora vamos estimar $I_3(t)$ e $I_4(t)$. Pelo teorema da Divergência, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_3(t) + I_4(t) =& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\langle\nabla(\Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)),(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\langle\nabla(\Phi_\delta'(u)\zeta_R(x)),\eta_2\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
=& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\langle\nabla u,\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Phi_\delta'(u)(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\langle\nabla\zeta_R(x),\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)\eta_2\langle\nabla u,\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Phi_\delta'(u)\eta_2\langle\nabla\zeta_R(x),\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
\leq& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Phi_\delta'(u)(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\langle\nabla\zeta_R(x),\nabla u\rangle\,dx\ d\tau \\
& -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\eta_2\langle\nabla\zeta_R(x),\Phi_\delta'(u)\nabla u\rangle\,dx\ d\tau,
\end{aligned}
$$

já que

$$
\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)(u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\langle\nabla u,\nabla u\rangle \geq 0\,, \quad \text{e} \quad \eta_2\Phi_\delta''\zeta_R(x)\langle\nabla u,\nabla u\rangle \geq 0.
$$

Definindo $G_\delta(u) := \displaystyle\int_0^u (w^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\Phi'_\delta(w)\,dw$ podemos reescrever a desigualdade acima por

$$\begin{aligned} I_3(t)+I_4(t) \leq &-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \langle \nabla\zeta_R(x), \nabla G_\delta(u)\rangle \,dx\ d\tau + \\ &-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \eta_2\langle \nabla\zeta_R(x), \Phi'_\delta(u)\nabla u\rangle \,dx\ d\tau. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicando o teorema da Divergência nas duas primeiras integrais do lado direito da desigualdade (4.4) acima, obtemos

$$\begin{aligned} I_3(t)+I_4(t) \leq &\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x) G_\delta(u)\,dx\ d\tau \\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} \frac{1}{R} G_\delta(u)\langle\nabla\zeta_R(x), x\rangle\, d\sigma(x)\ d\tau \\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \eta_2\Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u)\,dx\ d\tau \\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} \frac{\eta_2}{R}\Phi_\delta(u)\ \langle\nabla\zeta_R(x), x\rangle\ d\sigma(x)\ d\tau. \end{aligned}$$

Note que

$$G_\delta(u) \leq \int_0^{u(x,t)} (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\Phi'_\delta(w)\,dw \leq (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\Phi_\delta(u).$$

Usando esta estimativa e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} I_3(t)+I_4(t) \leq &(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u(x,\tau))\,dx\ d\tau \\ &+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} \Phi_\delta(u)|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\ d\tau \\ &+\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u)\,dx\ d\tau \\ &+\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} \Phi_\delta(u)|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\ d\tau. \end{aligned}$$

Como $I_1(t) = I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)$, usando as estimativas anteriormente obtidas e fazendo $\delta \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} \zeta_R(x)|u(x,t)|^q\,dx \leq& \int_{|x|<R} \zeta_R(x)|u(x,t_0)|^q\,dx \\
&+ K_f(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\nabla\zeta_R(x)|\,|u(x,\tau)|^q\,dx\ d\tau \\
&+ 2qB(T)M^k(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla\zeta_R(x)|\,|u(x,\tau)|^q\,dx\ d\tau \\
&+ (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Delta\zeta_R(x)\,|u(x,\tau)|^q\,dx\ d\tau \\
&+ (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} |u(x,\tau)|^q\,|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\ d\tau \\
&+ \eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \Delta\zeta_R(x)|u(x,\tau)|^q\,dx\ d\tau \\
&+ \eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} |u(x,\tau)|^q|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\ d\tau.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e as estimativas para $|\nabla\zeta_R(x)|$ e $|\Delta\zeta_R(x)|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} |u(x,t)|^q\zeta_R(x)\,dx \leq& \int_{|x|<R} |u(x,t_0)|^q\zeta_R(x)\,dx \\
&+ \xi K_f(T)\int_{0}^{t}\int_{B_R} |u(x,\tau)|^q\,e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau \\
&+ 2q\xi B(T)M^k(T)\int_{0}^{t}\int_{B_R}|u(x,\tau)|^q\,e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau \\
&+ n\xi(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{0}^{t}\int_{B_R}|u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau \\
&+ \xi(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{0}^{t}\int_{|x|=R}|u(x,\tau)|^q\,e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}\,d\sigma(x)\ d\tau \\
&+ n\xi\eta_2\int_{0}^{t}\int_{B_R} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau \\
&+ \xi\eta_2\int_{0}^{t}\int_{|x|=R} |u(x,\tau)|^q\,e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}\,d\sigma(x)\ d\tau,
\end{aligned}$$

ou, ainda

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|<R} |u(x,t)|^q \zeta_R(x)\, dx \ \leq & \int_{|x|<R} |u(x,t_0)|^q \zeta_R(x)\, dx \\
& + \xi K_f(T) \int_0^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^q \, e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + 2q\xi B(T) M^k(T) \int_0^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^q \, e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + n\xi (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_0^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + \xi (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} t e^{-\xi\sqrt{1+R^2}} R^{n-1} w_n \\
& + n\xi\eta_2 \int_0^t \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + \xi\eta_2 M^q(T) t e^{-\xi\sqrt{1+R^2}} R^{n-1} w_n.
\end{aligned}
$$

Agora, fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \\
& + \xi K_f(T) \int_0^t \int_{R^n} |u(x,\tau)|^q \, e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + 2q\xi B(T) M^k(T) \int_0^t \int_{R^n} |u(x,\tau)|^q \, e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + n\xi (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + n\xi\eta_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau.
\end{aligned}
$$

Aplicando o lema de Gronwall, obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ \exp(S(\xi,T,t)),
$$

onde $S(\xi,T,t) = \big(n\xi(M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} + n\xi\eta_2 + 2q\xi B(T)M^k(T) + \xi K_f(T)\big)\, t,$

e $S(\xi, T, t) \to 0$ ao $\xi \to 0$.

Fazendo $\xi \to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q \, dx < \infty.$$

Ou ainda,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

$\square$

Com isso mostramos que $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para cada $0 \le t_0 \le t \le T$ e para cada $p_0 \le q \le \infty$, já que se $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \le q < \infty$ pela desigualdade de interpolação.

Observação 4.1.2. Para $q = \infty$ basta tomar um $p \le q$ no Teorema 4.1.1, e depois de obter o resultado, fazer $q \to \infty$, obtendo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

4.2 Estimativas de decaimento das normas L^q e L^∞

Nesta seção vamos obter uma importante desigualdade de energia que será fundamental na obtenção da velocidade de decaimento de uma solução suave para o problema regularizado.

Teorema 4.2.1. *Seja $u(x,t) \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (4.1) para algum $T > 0$. Se $f, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ são funções contínuas tais que $\exists B(T) > 0$ com $|f(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{k+1}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, u \in \mathbb{R}$, e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0$, $\forall (x,t) \in B_R \times (0,T]$, então*

$$(t-t_0)^\gamma \|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau$$
$$\leq \gamma \int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^{\gamma-1}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,d\tau.$$

Demonstração. Sejam $M(T) := \sup\{\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \,/\, 0 < \tau < T\}$ e $K_f(T) := \sup\left\{\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}(v)\right| : |v| \leq M(T)\right\}$. Seja ainda $p_0 \leq p < \infty$ e $\delta > 0$.
Multiplicando a primeira equação de (4.1) por $(\tau - t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ para dado t_0 arbitrário com $0 < t_0 < t \leq T$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)u_\tau\,dx\,d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)\operatorname{div}(f)\,dx\,d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)\left[\operatorname{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u) + \eta_2\Delta u\right]\,dx\,d\tau.$$

Sejam $I_1(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)u_\tau\,dx\,d\tau$,

$$I_2(t) = -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau-t_0)^\gamma \Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)\operatorname{div}(f)\,dx\,d\tau,$$

$$I_3(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau - t_0)^{\gamma}\Phi'_{\delta}(u)\zeta_R(x)\,\mathrm{div}((u^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\nabla u)\,dx\,d\tau, \text{ e}$$

$$I_4(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R} (\tau - t_0)^{\gamma}\eta_2\Phi'_{\delta}(u)\zeta_R(x)\Delta u\,dx\,d\tau.$$

Vamos trabalhar primeiramente com $I_1(t)$. Como

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}[(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_{\delta}(u)]\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\gamma(\tau-t_0)^{\gamma-1}\Phi_{\delta}(u) + (\tau-t_0)^{\gamma}\Phi'_{\delta}(u)u_{\tau}\,d\tau,$$

aplicando o teorema de Fubini em $I_1(t)$, obtemos

$$I_1(t) = \int_{|x|<R}\zeta_R(x)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi'_{\delta}(u)u_{\tau}\,d\tau\,dx,$$

e então,

$$I_1(t) = \int_{B_R}\zeta_R(x)(t-t_0)^{\gamma}\Phi_{\delta}(u(x,t))\,dx - \gamma\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\zeta_R(x)(\tau-t_0)^{\gamma-1}\Phi_{\delta}(u(x,\tau))\,dx\,d\tau. \tag{4.5}$$

Aplicando o teorema da Divergência para $I_2(t)$ temos,

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u)\,,\,\Phi''_{\delta}(u)\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u)\,,\,\nabla\zeta_R(x)\rangle\Phi'_{\delta}(u)\,dx\,d\tau \\
&= q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u), L_{\delta}^{q-2}(u)(L'_{\delta}(u))^2\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dxd\tau \\
&\quad + q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u)\,,L_{\delta}^{q-1}(u)L''_{\delta}(u)\nabla u\rangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \\
&\quad + q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u)\,,\,\nabla\zeta_R(x)\rangle L_{\delta}^{q-1}(u)L'_{\delta}(u)\,dx\,d\tau \\
&\leq q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle f(x,t,u)\,,\nabla(L_{\delta}^{q-1}(u))\rangle L'_{\delta}(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau
\end{aligned}$$

$$+ qB(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma |u(x,t)|^{q+k-1}|u(x,t)|L''_\delta(u)|\nabla u|\zeta_R(x)\,dxd\tau$$
$$+ qB(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma |u(x,t)|^{q+k}|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau. \tag{4.6}$$

Escrevendo $I_{2,1}(t) = q\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\langle f(x,t,u)\,,\,\nabla(L_\delta^{q-1}(u))\rangle L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau.$

Novamente, pelo teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(t) = &- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\,\mathrm{div}[f(x,t,u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)]L_\delta^{q-1}(u)\,dx\,d\tau\\
= &- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\,\mathrm{div}\,f(x,t,u)L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\langle f(x,t,u)\,,\,\nabla u\rangle L_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\langle f(x,t,u)\,,\,\nabla\zeta_R(x)\rangle L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\,dx\,d\tau\\
\le &- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial u}(x,t,u)u_{x_j}L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+ qB(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma|u(x,t)|^{q+k-1}\,|\nabla u||u(x,t)|L''_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+ qB(T)M^k(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma|u(x,t)|^{q}\,|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

já que $\quad -q\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x,t,u)L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)\,dx\,d\tau \;\le\; 0.$

Como $|u(x,t)|L''_\delta(u) \to 0$, ao $\delta \to 0$, fazendo $\delta \to 0$, obtemos de (4.6) e (4.7)

$$\begin{aligned}
I_2(t) \le &- q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial u}(x,t,u)|u(x,t)|^{q-2}\,u\,u_{x_j}\,\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+ 2qB(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau - t_0)^\gamma|u(x,t)|^{q+k}|\nabla\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau.
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u}(x,t,u)\, q\, |u(x,t)|^{q-2}\, u\, u_{x_j} \;=\; \operatorname{div}\left(\int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(x,t,v)\, q\, |v(x,t)|^{q-2}\, v\, d\, v\right)$$

e assim,

$$\begin{aligned} I_2(t) \leq & \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} (\tau - t_0)^{\gamma} \langle \int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(x,\tau,v) q |v(x,\tau)|^{q-2}\, v\, dv, \nabla\zeta_R(x)\rangle\, dx\, d\tau \\ & + 2qB(T) \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^{q+k}\, |\nabla\zeta_R(x)|\, dx\, d\tau \\ \leq & \,(K_f(T) + 2qB(T)M^k(T)) \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^{q}\, |\nabla\zeta_R(x)|\, dx d\tau, \end{aligned} \tag{4.8}$$

já que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(x,t,v)\, q\, |v(x,t)|^{q-2}\, v\, dv\right| & \leq K_f(T) \int_0^u q\, |v(x,t)|^{q-2}\, v\, dv \\ & = K_f(T) |u(x,t)|^q. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar $I_3(t)$ e $I_4(t)$. Pelo teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} I_3(t) + I_4(t) = & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \langle \nabla(\Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)), (|u|^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \nabla u\rangle\, dx\, d\tau \\ & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \langle \nabla(\Phi'_\delta(u)\zeta_R(x)), \eta_2 \nabla u\rangle\, dx\; d\tau \\ = & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Phi''_\delta(u)\zeta_R(x)(|u| + \eta_1)^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla u\rangle\, dx\; d\tau \\ & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Phi'_\delta(u)(|u|^2 + \eta_1^2)^{\alpha/2} \langle \nabla\zeta_R(x), \nabla u\rangle\, dx\; d\tau \\ & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Phi''_\delta(u)\zeta_R(x)\eta_2 \langle \nabla u, \nabla u\rangle\, dx\; d\tau \\ & - \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Phi'_\delta(u)\eta_2 \langle \nabla\zeta_R(x), \nabla u\rangle\, dx\; d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta'(u)(|u|^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\langle\nabla\zeta_R(x),\nabla u\rangle\,dx\ d\tau\\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\eta_2\langle\nabla\zeta_R(x),\Phi_\delta'(u)\nabla u\rangle\,dx\ d\tau\\
&\quad -q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2\zeta_R(x)|u|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla u\rangle\,dx\,d\tau,
\end{aligned}
$$

já que

$$
\begin{aligned}
(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)(|u|+\eta_1)^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla u\rangle \geq (\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)|u|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla u\rangle \geq\\
\geq q(q-1)(\tau-t_0)^{\gamma}\zeta_R(x)\langle\nabla u,\nabla u\rangle L_\delta(u)^{q-2}(L_\delta'(u))^2|u|^{\alpha},
\end{aligned}
$$

e $\eta_2(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta''(u)\zeta_R(x)\langle\nabla u,\nabla u\rangle \geq 0.$

Definindo $G_\delta(u) := \displaystyle\int_0^u (w^2+\eta_1^2)^{\alpha/2}\Phi_\delta'(w)\,dw$, podemos reescrever a desigualdade acima por

$$
\begin{aligned}
I_3(t)+I_4(t) &\leq -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\langle\nabla\zeta_R(x),\nabla G_\delta(u)\rangle\,dx\ d\tau\\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\eta_2\langle\nabla\zeta_R(x),\Phi_\delta'(u)\nabla u\rangle\,dx\ d\tau\\
&\quad -q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}L_\delta(u)^{q-2}(L_\delta'(u))^2\zeta_R(x)|u|^{\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Teorema da Divergência nas duas primeiras integrais do lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_3(t)+I_4(t) &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Delta\zeta_R(x)G_\delta(u)\,dx\ d\tau\\
&\quad +\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}\frac{1}{R}(\tau-t_0)^{\gamma}G_\delta(u)\langle\nabla\zeta_R(x),x\rangle\,d\sigma(x)\ d\tau\\
&\quad +\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\eta_2(\tau-t_0)^{\gamma}\Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u)\,dx\ d\tau
\end{aligned}
$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}\frac{\eta_2}{R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u)\left\langle\nabla\zeta_R(x),x\right\rangle\,d\sigma(x)\,d\tau$$
$$-q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}L_\delta(u)^{q-2}(L'_\delta(u))^2\zeta_R(x)|u|^{\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau.$$

Note que

$G_\delta(u)\le (M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_0^u\Phi'_\delta(w)\,dw=(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\Phi_\delta(u)$. Usando esta estimativa e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
I_3(t)+I_4(t)\le{}&(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u)|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&+\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u)\,dx\,d\tau\\
&+\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u)|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&-q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}L_\delta(u)^{q-2}(L'_\delta(u))^2\zeta_R(x)|u|^{\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau.
\end{aligned}$$

Como $I_1(t)=I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R}\zeta_R(x)(t-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u(x,t))\,dx\le{}&\gamma\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R}\zeta_R(x)(\tau-t_0)^{\gamma-1}\Phi_\delta(u(x,\tau))\,dx\,d\tau\\
&+(K_f(T)+2qB(T)M^k(T))\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u(x,\tau))\,|\nabla\zeta_R(x)|\,dxd\tau\\
&+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u(x,\tau))\Delta\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Phi_\delta(u(x,\tau))|\nabla\zeta_R(x)|\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&+\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}(\tau-t_0)^{\gamma}\Delta\zeta_R(x)\Phi_\delta(u)\,dx\,d\tau
\end{aligned}$$

$$+\eta_2 \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Phi_{\delta}(u) |\nabla \zeta_R(x)| \, d\sigma(x) \ d\tau$$

$$-q(q-1) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\le R} (\tau - t_0)^{\gamma} L_{\delta}(u)^{q-2} (L'_{\delta}(u))^2 \zeta_R(x) |u|^{\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau.$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} \zeta_R(x)(t-t_0)^{\gamma} |u(x,t)|^q \, dx \ \le \ & \gamma \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<R} \zeta_R(x) (\tau - t_0)^{\gamma - 1} |u(x,\tau)|^q \, dx \, d\tau \\
& + (K_f(T) + 2qB(T)M^k(T)) \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^q \, |\nabla \zeta_R(x)| \, dx d\tau \\
& + (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\le R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^q \Delta \zeta_R(x) \, dx \ d\tau \\
& + (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^q |\nabla \zeta_R(x)| \, d\sigma(x) \ d\tau \\
& + \eta_2 \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\le R} (\tau - t_0)^{\gamma} \Delta \zeta_R(x) |u(x,\tau)|^q \, dx \ d\tau \\
& + \eta_2 \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^q |\nabla \zeta_R(x)| \, d\sigma(x) \ d\tau \\
& - q(q-1) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\le R} (\tau - t_0)^{\gamma} \zeta_R(x) |u(x,\tau)|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e as estimativas para $|\nabla \zeta_R(x)|$ e $|\Delta \zeta_R(x)|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} (t-t_0)^{\gamma} |u(x,t)|^q \zeta_R(x) \, dx \ \le \ & \gamma \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<R} (\tau - t_0)^{\gamma-1} |u(x,\tau)|^q \zeta_R(x) \, dx \, d\tau \\
& + \xi (K_f(T) + 2qB(T)M^k(T)) \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,\tau)|^q e^{-\xi\sqrt{1+R^2}} \, dx d\tau \\
& + n\xi (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|\le R} (\tau - t_0)^{\gamma} |u(x,t)|^q e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \ d\tau \\
& + \xi (M^2(T) + \eta_1^2)^{\alpha/2} M^q(T) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} (\tau - t_0)^{\gamma} e^{-\xi\sqrt{1+R^2}} \, d\sigma(x) \ d\tau
\end{aligned}$$

$$+n\xi\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau$$
$$+\xi\eta_2 M^{q}(T)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}(\tau-t_0)^{\gamma}e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}\,d\sigma(x)\ d\tau$$
$$-q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}\zeta_R(x)|u(x,\tau)|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_{|x|<R}(t-t_0)^{\gamma}|u(x,t)|^{q}\zeta_R(x)\,dx \ \leq\ & \gamma\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<R}(\tau-t_0)^{\gamma-1}|u(x,\tau)|^{q}\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+\xi(K_f(T)+2qB(T)M^{k}(T))\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}\,dxd\tau\\
&+n\xi(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau\\
&+\xi(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}M^{q}(T)e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}R^{n-1}w_n\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\ d\tau\\
&+n\xi\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau\\
&+\xi\eta_2 M^{q}(T)e^{-\xi\sqrt{1+R^2}}R^{n-1}w_n\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\ d\tau\\
&-q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q-2+\alpha}\zeta_R(x)|\nabla u|^2\,dx\,d\tau.\end{aligned}$$

Agora fazendo $R\to\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(t-t_0)^{\gamma}|u(x,t)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx \ \leq\ & \gamma\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma-1}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\,d\tau\\
&+n\xi(M^2(T)+\eta_1^2)^{\alpha/2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau\\
&+n\xi\eta_2\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\ d\tau\end{aligned}$$

$$-q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q-2+\alpha}e^{-\xi\sqrt{1+|x|^2}}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau.$$

Como $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}<\infty$, fazendo $\xi\to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}(t-t_0)^{\gamma}|u(x,t)|^q\,dx+q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma}|u(x,\tau)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau$$
$$\leq \gamma\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{\gamma-1}|u(x,\tau)|^q\,dx\,d\tau,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(t-t_0)^{\gamma}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}+q(q-1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau\\ \leq \gamma\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma-1}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,d\tau.\end{aligned}\tag{4.9}$$

□

O próximo teorema mostra que a norma $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ de $u(\cdot,t)$ fica por baixo de uma função positiva que é produto de uma constante e uma potência de t com expoente negativo e menor do que -1, ou seja uma solução decresce em relação a t. Dessa forma se a solução estiver definida $\forall t$, então a solução tende a zero ao $t\to+\infty$.

Teorema 4.2.2. *Seja $u(x,t)\in L^{\infty}([0,T],L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (4.1) para algum $T>0$. Se $f,\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ são funções contínuas tais que $\exists B(T)>0$ com $|f(x,t,u)|\leq B(T)|u|^{k+1},\forall x\in\mathbb{R}^n,t\geq 0,u\in\mathbb{R}$, e $\sum_{i=1}^{n}u(x,t)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t,u)\geq 0$, $\forall(x,t)\in B_R\times(0,T]$, então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq K_q(n,\alpha)\|u_0\|^{\delta}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\kappa},\ \forall\, t\in(t_0,T],\ \forall\, 2p_0\leq q\leq\infty,$$

onde $\delta=\dfrac{2q+n\alpha}{2q+2n\alpha}$ e $\kappa=\dfrac{n}{2q+2n\alpha}$.

Demonstração. Seja $u(x,t)$ solução de (4.1). Definimos $w(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $w(x,t) := |\, u(x,t)|^{\frac{q+\alpha}{2}}$.

Assim de (4.9) da prova do Teorema 4.2.1, obtemos

$$(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\tau$$
$$\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \|w(\cdot,\tau)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}\, d\tau,$$

onde $\beta = \dfrac{2q}{q+\alpha}$. Pela desigualdade de interpolação de Niremberg-Gagliardo-Sobolev, temos que $\exists\, C > 0$ (constante) tal que

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w(\cdot,t)\|^{1-\theta}_{L^{\beta/2}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\nabla w(\cdot,t)\|^\theta_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\dfrac{1}{\beta} = \theta\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right) + (1-\theta)\dfrac{2}{\beta}$ o que nos dá $\theta = \dfrac{n(q+\alpha)}{nq+2q+2n\alpha}$. Assim

$$(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\tau \leq$$
$$\leq \gamma C^\beta \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \|w(\cdot,\tau)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta/2}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\nabla w(\cdot,t)\|^{\theta\beta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\tau$$
$$\leq \gamma C^\beta \|u(\cdot,t_0)\|^{q(1-\theta)}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)} \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \|\nabla w(\cdot,t)\|^{\theta\beta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\tau,$$

já que $\|w(\cdot,t)\|^{\beta/2}_{L^{\beta/2}(\mathbb{R}^n)} = \|u(\cdot,t)\|^{q/2}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|^{q/2}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}$ pelo Teorema 4.1.1.

Aplicando a desigualdade de Hölder e em seguida a desigualdade de Young, ambas com $p = \dfrac{2}{\theta\beta}$ e $q = \dfrac{2}{2-\theta\beta}$, obtemos

$$(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\tau$$

$$\leq \gamma C^{\beta}\|u(\cdot,t_0)\|^{q(1-\theta)}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{\frac{2-\theta\beta}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{(\gamma-1)\frac{2}{\theta\beta}}\|\nabla w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right)^{\frac{\theta\beta}{2}}$$

$$\leq \Big(\gamma C^{\beta}\|u(\cdot,t_0)\|^{q(1-\theta)}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{2}{2-\theta\beta}}\frac{2-\theta\beta}{2}\bigg(\frac{\theta\beta(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\bigg)^{\frac{\theta\beta}{2}\frac{2}{2-\theta\beta}}(t-t_0)+$$

$$+\frac{2q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau,$$

onde na última desigualdade escolhemos γ de forma que $(\gamma-1)\frac{2}{\theta\beta}=\gamma$, ou seja, $\gamma=\frac{2}{2-\theta\beta}$. Daí $\displaystyle\int_0^t \tau^{\gamma-1}\,d\tau<\infty$, já que $\gamma-1>-1$.

Então

$$(t-t_0)^{\gamma}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}+\frac{2q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\leq$$

$$\leq \Big(\gamma C^{\beta}\|u(\cdot,t_0)\|^{q(1-\theta)}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{2}{2-\theta\beta}}\frac{2-\theta\beta}{2}\bigg(\frac{\theta\beta(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\bigg)^{\frac{\theta\beta}{2-\theta\beta}}(t-t_0).$$

Em particular, escrevendo a desigualdade acima em termos de u, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^{q}_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}\leq \Big(\gamma C^{\beta}\|u(\cdot,t_0)\|^{q(1-\theta)}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{2}{2-\theta\beta}}\frac{2-\theta\beta}{2}\bigg(\frac{\theta\beta(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\bigg)^{\frac{\theta\beta}{2-\theta\beta}}(t-t_0)^{1-\gamma},$$

que é equivalente a

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}\leq (C^{\beta}\gamma)^{\frac{1}{q}\frac{2}{2-\theta\beta}}\bigg(\frac{2-\theta\beta}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}\bigg(\frac{\theta\beta(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\bigg)^{\frac{1}{q}\frac{\theta\beta}{2-\theta\beta}}\|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{2(1-\theta)}{2-\theta\beta}}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{\frac{1-\gamma}{q}}.$$

Como $\dfrac{2(1-\theta)}{2-\theta\beta}=\dfrac{2q+n\alpha}{2q+2n\alpha}$ e $\dfrac{1-\gamma}{q}=\dfrac{-n}{2q+2n\alpha}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}\leq K_n\|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{2q+n\alpha}{2q+2n\alpha}}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{\frac{-n}{2q+2n\alpha}},$$

onde $K_q=K_q(n,\alpha)=(C^{\beta}\gamma)^{\frac{1}{q}\frac{2}{2-\theta\beta}}\bigg(\dfrac{2-\theta\beta}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}\bigg(\dfrac{\theta\beta(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\bigg)^{\frac{1}{q}\frac{\theta\beta}{2-\theta\beta}}$. □

Teorema 4.2.3. *Seja $u(x,t)\in L^{\infty}([0,T],L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (4.1) para algum $T>0$. Se $f,\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ são funções contínuas tais* *que* $\exists B(T) > 0$ *com* $|f(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{k+1}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, u \in \mathbb{R}$, *e* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0$, $\forall (x,t) \in B_R \times (0,T]$, *então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K_n(\alpha,q)\|u_0\|^{\delta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\kappa},\ \forall\, t \in (t_0,T],\ \forall\, 2p_0 \leq q \leq \infty,$$

onde $\delta = \dfrac{2q}{2q+n\alpha}$, $\kappa = \dfrac{n}{2q+n\alpha}$ *e* $K_n(\alpha,q)$ *é constante.*

Demonstração. Seja $u(\cdot,t)$ uma solução suave de (4.1). Temos, pelo Teorema 4.2.2 que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q\|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{2q+n\alpha}{2q+2n\alpha}}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{\frac{-n}{2q+2n\alpha}},$$

onde $K_q(n,\alpha) = C^{\frac{1}{q+\alpha}\frac{nq+2q+2n\alpha}{q+n\alpha}}\left(\dfrac{nq+2q+2n\alpha}{q+n\alpha}\right)^{\frac{1}{q}\frac{nq+4q+4n\alpha}{2q+2n\alpha}}\left(\dfrac{(q+\alpha)^2}{4q(q-1)}\right)^{\frac{n}{2q+2n\alpha}}$,

já que $\gamma = \dfrac{2}{2-\theta\beta}$, $\beta = \dfrac{2q}{q+\alpha}$ e $\theta\beta = \dfrac{2qn}{nq+2q+2n\alpha}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 1$, definimos $t_0^{(m)} = 2^{-m}t$ e $t_j^{(m)} = t_0^m + (1-2^{-j})t$ para todo $1 \leq j \leq m$. Aplicando esta desigualdade, m vezes, para $q = 2^m q$, e $t_0 = t_{m-1}^{(m)}$, $q = 2^{m-1}q$, e $t_0 = t_{m-2}^{(m-1)}, \cdots, q = 2q$ e $t_0 = t_0^{(1)}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t_m^{(m)})\|_{L^{2^m q}(\mathbb{R}^n)} \leq K_m\|u(\cdot,t_{m-1}^{(m)})\|^{\frac{2^m 2q+n\alpha}{2^m 2q+2n\alpha}}_{L^{2^{m-1}q}(\mathbb{R}^n)}(t-t_{m-1}^{(m)})^{\frac{-n}{2^m 2q+2n\alpha}}$$

$$\leq K_m K_{m-1}^{\frac{2^m 2q+n\alpha}{2^m 2q+2n\alpha}}\|u(\cdot,t_{m-2}^{(m)})\|^{\frac{2^{m-1}2q+n\alpha}{2^{m-1}2q+2n\alpha}\frac{2^m 2q+n\alpha}{2^m 2q+2n\alpha}}_{L^{2^{m-2}q}(\mathbb{R}^n)}(t_m^{(m)}-t_{m-1}^{(m)})^{\frac{-n}{2^m 2q+2n\alpha}}\cdot$$

$$\cdot(t_{m-1}^{(m)}-t_{m-2}^{(m)})^{\frac{-n}{2^{m-1}2q+2n\alpha}\frac{2^m 2q+n\alpha}{2^m 2q+2n\alpha}}$$

$\vdots$

$$\leq K_m K_{m-1}^{\frac{2^m 2q+n\alpha}{2^m 2q+2n\alpha}}\cdot\ldots\cdot K_1^{B_m}\|u(\cdot,t_0^{(m)})\|^{A_m}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\cdot$$

$$\cdot(t_m^{(m)}-t_{m-1}^{(m)})^{\frac{-n}{2^m 2q+2n\alpha}B_0}(t_{m-1}^{(m)}-t_{m-2}^{(m)})^{\frac{-n}{2^{m-1}2q+2n\alpha}B_1}\cdot\ldots\cdot(t_1^{(m)}-t_0^{(m)})^{\frac{-n}{2^{m-1}2q+2n\alpha}B_{m-1}},$$

onde, para $1 \leq j \leq m$,

$$K_j = C^{\frac{1}{2^j q+\alpha}\frac{2^j q(n+2)+2n\alpha}{2^j q+n\alpha}}\left(\frac{2^j q(n+2)+2n\alpha}{2^j q+n\alpha}\right)^{\frac{1}{2^j q}\frac{2^j q(n+4)+4n\alpha}{2^j 2q+2n\alpha}}\left(\frac{(2^j q+\alpha)^2}{2^j 4q(2^j q-1)}\right)^{\frac{n}{2^j 2q+2n\alpha}},$$

$$A_m = \prod_{j=1}^{m} \frac{2^j 2q + n\alpha}{2^j 2q + 2n\alpha} = \frac{1}{2^m} \prod_{j=1}^{m} \frac{2^j 2q + n\alpha}{2^{j-1} 2q + 2n\alpha} = \frac{1}{2^m} \frac{2^m 2q + n\alpha}{2q + n\alpha}\ ,\ B_0 = 1 \text{ e}$$

$$B_j = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{2^{m-k} 2q + n\alpha}{2^{m-k} 2q + 2n\alpha} = \frac{1}{2^j} \frac{2^m 2q + n\alpha}{2^{m-j} 2q + n\alpha} \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

Como $t_j^{(m)} - t_{j-1}^{(m)} = 2^{-j} t$, para todo $1 \leq j \leq m$, podemos reescrever a desigualdade acima por

$$\|u(\cdot, t_m^{(m)})\|_{L^{2^m q}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^{m} \left[K_j^{B_{m-j}} \|u(\cdot, t_0^{(m)})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{A_m} (2^{-j} t)^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}} \right].$$

Agora vamos estimar, em separado, $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} K_j^{B_{m-j}}$ e $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} (2^{-j} t)^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}}$.

Note que $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} (2^{-j} t)^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}} = \prod_{j=1}^{m} t^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}} \prod_{j=1}^{m} 2^{-j \frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}}$.

Primeiramente, observemos que,

$\displaystyle\prod_{j=1}^{m} t^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}} = t^{\sum_{j=1}^{m} \frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}}$, e que (trocando $m-j$ por j), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{-n}{2^{m-j} 2q + 2n\alpha} B_j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{-n}{2^{m-j} 2q + 2n\alpha} \frac{1}{2^j} \frac{2^m 2q + n\alpha}{2^{m-j} 2q + n\alpha} \\
&= -2n(2^m 2q + n\alpha) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^{m-j+1} 2q + 2n\alpha} \frac{2^{-j}}{2^{m-j} 2q + 2n\alpha}.
\end{aligned}$$

Pondo $\hat{\alpha} = \dfrac{2^m 2q}{2n\alpha}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j} &= -\frac{2n(2^m 2q + n\alpha)}{\hat{\alpha}(2n\alpha)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\hat{\alpha}2^{-j+1}+1} \frac{\hat{\alpha}2^{-j}}{\hat{\alpha}2^{-j}+1} \\ &= -\frac{2n(2^m 2q + n\alpha)}{\hat{\alpha}(2n\alpha)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\hat{\alpha}2^{-j}+1} - \frac{1}{\hat{\alpha}2^{-j+1}+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{2n(2^m 2q + n\alpha)}{\hat{\alpha}(2n\alpha)^2} \left[\frac{1}{\hat{\alpha}2^{-m+1}+1} - \frac{1}{2\hat{\alpha}+1} \right] \\ &= -\frac{2n(2^m 2q + n\alpha)}{2^m 2q} \left[\frac{1}{4q+2n\alpha} - \frac{1}{2^m 4q + 2n\alpha} \right] \\ &= -\frac{2n(2q + \frac{n\alpha}{2^m})}{2q} \left[\frac{1}{4q+2n\alpha} - \frac{1}{2^m 4q + 2n\alpha} \right].\end{aligned}$$

Agora, fazendo $m \to +\infty$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j} = \frac{-2n}{4q+2n\alpha} = \frac{-n}{2q+n\alpha}, \text{ e ainda}$$

$$\lim_{m\to+\infty} A_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{2q + \frac{n\alpha}{2^m}}{2q+n\alpha} = \frac{2q}{2q+n\alpha}.$$

Assim, acabamos de mostrar que os expoentes são de fato $\gamma = \dfrac{2q}{2q+n\alpha}$ e $\kappa = \dfrac{n}{2q+n\alpha}$. Resta mostrar que a constante não vai a infinito ao $m \to \infty$.

Notemos que

$$\prod_{j=1}^{m} (2^{-j})^{\frac{-n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}} = 2^{\sum_{j=1}^{m} j \frac{n}{2^j 2q + 2n\alpha} B_{m-j}}.$$

Como $B_j = \dfrac{1}{2^j} \dfrac{2^m 2q + n\alpha}{2^{m-j} 2q + n\alpha} \leq \dfrac{2^m 2q + n\alpha}{2^m 2q} = 1 + \dfrac{n\alpha}{2^m 2q}$, $\forall\, 1 \leq j \leq m$, temos que

$$\prod_{j=1}^{m}(2^{-j})^{\frac{-n}{2^j2q+2n\alpha}B_{m-j}} \leq 2^{n(1+\frac{n\alpha}{4q})\sum_{j=1}^{m}\frac{j}{2^j2q+2n\alpha}} \leq 2^{\frac{n}{2q}(1+\frac{n\alpha}{4q})\sum_{j=1}^{m}\frac{j}{2^j}}.$$

Logo, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\prod_{j=1}^{\infty}(2^{-j})^{\frac{-n}{2^j2q+2n\alpha}B_{m-j}} \leq 2^{\frac{n}{2q}(1+\frac{n\alpha}{4q})\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j}} = 2^{\frac{n}{q}(1+\frac{n\alpha}{4q})}.$$

Finalmente vamos estimar $\displaystyle\prod_{j=1}^{m}K_j^{B_{m-j}}$. Para tal, notemos que

$$\begin{aligned}
K_j &= C^{\frac{1}{2^jq+\alpha}\frac{2^jq(n+2)+2n\alpha}{2^jq+n\alpha}}\left(\frac{2^jq(n+2)+2n\alpha}{2^jq+n\alpha}\right)^{\frac{1}{2^jq}\frac{2^jq(n+4)+4n\alpha}{2^j2q+2n\alpha}}\left(\frac{(2^jq+\alpha)^2}{2^j4q(2^jq-1)}\right)^{\frac{n}{2^j2q+2n\alpha}}\\
&\leq C^{\frac{n+2}{2^j2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}}\left(n+2+\frac{2n\alpha}{2^jq}\right)^{\frac{n+4}{2}+\frac{4n\alpha}{2^{2j}2q}}\left(\frac{(2^jq+\alpha)^2}{2^j4q(2^jq-1)}\right)^{\frac{n}{2^j2q}}.
\end{aligned}$$

Tomando $j \geq j_0$ de modo que $\dfrac{2n\alpha}{2^{2j}q} < 1$, $\dfrac{\alpha}{2^j(2q-1)} < 1$ e $\dfrac{\alpha^2}{2^{2j}2q(2q-1)} < 1$, temos

$$\begin{aligned}
K_j &\leq C^{\frac{n+2}{2^j2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}}\,(n+3)^{\frac{n+4}{2}+1}\left(\frac{(2^jq+\alpha)^2}{2^j4q(2^jq-1)}\right)^{\frac{n}{2^j2q}}\\
&\leq C^{\frac{n+2}{2^j2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}}\,(n+3)^{\frac{n+6}{2}}\left(\frac{2^{2j}q^2+2^j2q\alpha+\alpha^2}{2^{2j}2q(2q-1)}\right)^{\frac{n}{2^j2q}}\\
&\leq C^{\frac{n+2}{2^j2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}}\,(n+3)^{\frac{n+6}{2}}\left(\frac{q}{2(2q-1)}+\frac{\alpha}{2^j(2q-1)}+\frac{\alpha^2}{2^{2j}2q(2q-1)}\right)^{\frac{n}{2^j2q}}\\
&\leq C^{\frac{n+2}{2^j2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}}\,(n+3)^{\frac{n+6}{2}}\left(\frac{q}{2(2q-1)}+2\right)^{\frac{n}{2^j2q}}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\prod_{j=1}^{m} K_j^{B_{m-j}} \leq \prod_{j=1}^{m} \left[C^{\frac{n+2}{2^j 2q}+\frac{2n\alpha}{2^{2j}q}} (n+3)^{\frac{n+6}{2}} \left(\frac{q}{2(2q-1)} + 2 \right)^{\frac{n}{2^j 2q}} \right]^{\frac{4q+n\alpha}{4q}}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{j_0-1} K_j^{\frac{4q+n\alpha}{4q}} \right) (n+3)^{\frac{n+6}{2}\frac{4q+n\alpha}{4q}} C^{\frac{4q+n\alpha}{4q}\frac{n+2}{2q}(1-2^{-m})+\frac{2n\alpha}{q}(\frac{1}{3}-4^{-m})}.$$

$$\cdot \left(\frac{q}{2(2q-1)} + 2 \right)^{\frac{4q+n\alpha}{4q}\frac{n}{2q}(1-2^{-m})}.$$

Agora, fazendo $m \to +\infty$, obtemos

$$\prod_{j=1}^{m} K_j^{B_{m-j}} \leq \left(\prod_{j=1}^{j_0-1} K_j^{\frac{4q+n\alpha}{4q}} \right) (n+3)^{\frac{n+6}{2}\frac{4q+n\alpha}{4q}} C^{\frac{4q+n\alpha}{4q}\frac{n+2}{2q}+\frac{2n\alpha}{3q}} \left(\frac{q}{2(2q-1)} + 2 \right)^{\frac{4q+n\alpha}{4q}\frac{n}{2q}},$$

ou seja, $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} K_j^{B_{m-j}} < \infty$. □

4.3 Análise de Escalas

Nesta seção vamos fazer a análise de escalas para checar a taxa de decaimento obtida na seção anterior para uma solução de (4.1). Para tal, vamos considerar o problema não suavizado correspondente, isto é, o mesmo que (4.1) com $\eta_1 = 0$ e $\eta_2 = 0$.

Consideremos

$$u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) = \operatorname{div}((|u(x,t)|)^{\alpha} \nabla u(x,t)).$$

Esta equação pode ser reescrita por

$$
\begin{aligned}
u_t = &-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,u) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(x,t,u)\, u_{x_j}(x,t) \\
&+|u(x,t)|^{\alpha}\Delta u(x,t) + \alpha |u(x,t)|^{\alpha-1}|\nabla u(x,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Sejam $\theta > 0$, $L > 0$ e $\lambda > 0$. Definindo $\tilde{u}(x,t) := \lambda u(Lx, \theta t)$, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x,t) = &\frac{\partial}{\partial t}[\lambda u(Lx,\theta t)] = \lambda\theta\, u_t(Lx,\theta t) \\
=&\lambda\theta \left[-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Lx,\theta t,u) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t,u)\, u_{x_j}(Lx,\theta t) \right] \\
&+ \lambda\theta \left[|u(Lx,\theta t)|^{\alpha}\Delta u(Lx,\theta t) + \alpha |u(Lx,\theta t)|^{\alpha-1}|\nabla u(Lx,\theta t)|^2 \right] \\
=&\lambda\theta \left[-L^{-1}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Lx,\theta t, \frac{1}{\lambda}\lambda u) L \right] \\
&- \lambda\theta \left[\frac{L^{-1}}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t, \frac{1}{\lambda}\lambda u)\, \lambda u_{x_j}(Lx,\theta t) L \right] \\
&+ \lambda\theta \left[\lambda^{-\alpha}|\tilde{u}(x,t)|^{\alpha}(\lambda L^2)^{-1}\Delta \tilde{u}(x,t) \right] \\
&+ \lambda\theta \left[\lambda^{1-\alpha}\alpha|\tilde{u}(x,t)|^{\alpha-1}|(\lambda L)^{-2}\nabla \tilde{u}(x,t)|^2 \right].
\end{aligned}
$$

Definindo $\tilde{f}(x,t,\tilde{u}(x,t)) = \dfrac{\lambda\theta}{L} f(Lx,\theta t, \lambda^{-1}\tilde{u}(x,t))$, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \tilde{f}(x,t,\tilde{u}(x,t)) \; = &\lambda\,\theta \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Lx,\theta t, \frac{1}{\lambda}\tilde{u}(x,t)) \\
&+ \theta \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t, \frac{1}{\lambda}\tilde{u}(x,t))\, u_{x_j}(Lx,\theta t).
\end{aligned}
$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x,t) + \operatorname{div} \tilde{f}(x,t,\tilde{u}) &= \frac{\theta\lambda^{-\alpha}}{L^2}\left[|\tilde{u}(x,t)|^{\alpha}\Delta\tilde{u}(x,t) + |\tilde{u}(x,t)|^{\alpha-1}|\nabla\tilde{u}(x,t)|^2\right] \\ &= \frac{\theta\lambda^{-\alpha}}{L^2}\operatorname{div}(|\tilde{u}(x,t)|^{\alpha}\nabla\tilde{u}(x,t)).\end{aligned}$$

Queremos que $\tilde{u}(x,t)$ satisfaça a mesma equação que $u(x,t)$ satisfaz. Para tal devemos exigir que $\dfrac{\theta\lambda^{-\alpha}}{L^2} = 1$, e notar que $\tilde{f}$ satisfaz a mesma hipótese de f, ou seja, que vale $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{f}_i(x,t,u) \geq 0$.

Se $\tilde{u}(x,t)$ satisfaz $u_t(x,t) + \operatorname{div}\tilde{f}(x,t,u) = \operatorname{div}(|u(x,t)|^{\alpha}\nabla u(x,t))$, deve valer

$$\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K\|\tilde{u_0}\|^{\delta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}t^{-\gamma}.$$

Fazendo as mudanças de variável $\theta t = t$ e $Lx = x$, a desigualdade acima é reescrita como

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K\lambda^{\delta-1}L^{\frac{-n\delta}{q}}\|u_0\|^{\delta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}t^{-\gamma}\theta^{\gamma}.$$

Como queremos $\dfrac{\theta\lambda^{-\alpha}}{L^2} = 1$, ou equivalentemente, $\theta = L^2\lambda^{\alpha}$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K\lambda^{\delta-1+\alpha\gamma}L^{\frac{-n\delta}{q}+2\gamma}\|u_0\|^{\delta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}t^{-\gamma}.$$

Se $\delta > 1-\alpha\gamma$ faz $\lambda \to 0$ e se $\delta < 1-\alpha\gamma$ faz $\lambda \to \infty$, obtendo $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq 0\,\forall t$, o que implica $u \equiv 0$ que é o caso trivial.

Neste caso devemos ter $\delta - 1 + \alpha\gamma = 0$. Analogamente para L, obtemos $\dfrac{n\delta}{q} = 2\gamma$. Juntando estas duas igualdades temos $\delta = \dfrac{2q}{n\alpha+2q}$ e $\gamma = \dfrac{n}{n\alpha+2q}$. Assim

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K\|u_0\|^{\frac{2q}{n\alpha+2q}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{n\alpha+2q}}.$$

Este resultado é consistente com o obtido na seção 4.2. Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in (0, \infty)$, e escolhendo $q = 1$, temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n\alpha+2}} t^{-\frac{n}{n\alpha+2}}.$$

Capítulo 5

PME's com termos advectivos, Limitação global

O objetivo inicial deste capítulo é obter uma estimativa para $\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ que só dependa de α, k e p; ou seja, mostrar que uma solução u do problema regularizado (5.1) (abaixo) não tem *blow up* em tempo finito desde que a condição inicial seja limitada.

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^\alpha \nabla u) + \eta\Delta u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.1}$$

onde b satisfaz a hipótese (**b1**) abaixo.

(b1) $\exists\, k > 0$ e $B \in C^0((0,\infty])$ tais que $|b(x,t,u)|_2 \leq B(t)|u|^k$, onde $|\cdot|_2$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$.

Em um segundo momento usaremos o Teorema 3.3.6 para mostrar que se uma solução do problema degenerado (idem a (5.1) mas $\eta = 0$), com condição inicial limitada, está definida em um certo intervalo, então esta solução não tem *blow up* em tempo finito.

Na primeira seção começamos obtendo uma estimativa de energia que será fundamental para estimar normas L^q altas (q grande). Através da iteração desta estimativa obtemos uma limitação global para soluções do problema (5.1), mais específicamente obtemos uma estimativa do tipo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \max\{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; [\mathbb{B}(0,t)]^\delta [\mathbb{U}_p(0,t)]^\gamma\}.$$

Análise de escalas nos indica que se uma desigualdade desse tipo é válida, então devemos ter $p > n(k-\alpha)$ e $p \geq 1$. Nessas condições

$$\delta = \frac{n}{n(\alpha-k)+p} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{p}{n(\alpha-k)+p} \cdot$$

5.1 Estimativa de energia

Vamos definir uma função auxiliar com o intuito de facilitar as contas. Definimos

$$v(x,t) := |u(x,t)|^{\frac{q+\alpha}{2}}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0,T_*), \tag{5.2}$$

assim, temos

$$\|v(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\frac{q+\alpha}{2}\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx = \|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

pois $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $\beta = \frac{2q}{q+\alpha} \in (0,2)$.

Note que, para $\beta \in (0,1)$, $L^\beta(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ v$ mensurável em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\int |v|^\beta\, dx < \infty\}$ não é um espaço normado, porém para $u, v \in L^\beta$, a função $d(u,v) := \int_\Omega |u-v|^\beta\, dx$ define uma métrica e este fato é suficiente para nossas pretenções. Vamos denotar, mesmo para $\beta \in (0,1)$, $\|v(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(\cdot,t)|^\beta\, dx\right)^{1/\beta}$.

Como $\dfrac{q+\alpha}{2} > 1$, já que $q \geq 2$ e $\alpha > 0$, temos

$$\nabla v(x,t) = \nabla |u(x,t)|^{\frac{q+\alpha}{2}} = \frac{q+\alpha}{2} |\, u(x,t)|^{\frac{q+\alpha}{2}-1} \operatorname{sgn}(u) \nabla u,$$

assim obtemos

$$\frac{4}{(q+\alpha)^2} |\, \nabla v(x,t)|^2 = |\, u(x,t)|^{q+\alpha-2} |\, \nabla u(x,t)|^2,$$

e então

$$\frac{4}{(q+\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\, \nabla v(x,t)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\, u(x,t)|^{q+\alpha-2} |\, \nabla u(x,t)|^2 \, dx$$

Assim, do Teorema 3.4.4 (se $\gamma \geq 0$) ou do Teorema 3.4.8 (se $\gamma < 0$), decorre que $\exists E_q \subset [0, T_*]$ tal que $\forall\, t \in [0, T_*) \setminus E_q$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1) & \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u(\cdot,t)|^2 \, dx \\ & \leq \; B(t) q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{q+k-1} |\nabla u(x,t)| \, dx \\ & \leq \; B(t) q(q-1) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2+\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-\alpha+2k} \, dx \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Esta última desigualde equivale,$\forall\, t \in [0, T_*) \setminus E_q$, a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + & \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2} \|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \; 2B(t) \frac{q(q-1)}{q+\alpha} \|\, \nabla v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\, v(\cdot,t)\|^{\tilde{\beta}/2}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $\tilde{\beta} = \dfrac{2}{q+\alpha}(q+2k-\alpha) = \dfrac{2(q+\gamma)}{q+\alpha} > 0$, pois $q+\gamma \geq 1$.

Queremos usar a desigualdade de Sobolev-Niremberg-Gagliardo (SNG), veja em [15], que nos dá uma constante $K(n)$ tal que $K(n) \geq K(r,p,q,n)$, $\forall\, r \in [r_0, r_1] \subset (0, +\infty)$; $\forall\, q \in [q_0, q_1] \subset [1, +\infty)$ e $\forall\, p \in [p_0, p_1] \subset (0, +\infty)$ tem-se

$$\| v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq K_0 \| v\|^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| \nabla v\|^{\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \theta \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{n} \right) + (1-\theta)\, \dfrac{1}{p}$ e $0 \leq \theta < 1$. Como n é fixo denotaremos $K(n)$ simplesmente por K.

Aplicando SNG para β e $\tilde{\beta}$ obtemos $\mathbb{K}$ tal que

$$\| v\|_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbb{K} \| v\|^{1-\theta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \| \nabla v\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e assim, teremos $\dfrac{1}{\tilde{\beta}} = \theta \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \right) + (1-\theta)\, \dfrac{1}{\beta_0}$ para um certo $\beta_0 \leq \tilde{\beta}$ e devemos ter $0 \leq \theta < 1$. Vamos tomar β_0 da forma $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\sigma}$ com $\sigma > 1$ para que tenhamos $p\,\sigma^m \to \infty$ ao $m \to \infty$. A condição $\beta_0 \leq \tilde{\beta}$, $\forall\, q \geq p\,\sigma$ é equivalente a $\sigma \geq 1 + \dfrac{\gamma_-}{p}$, onde γ_- denota a parte negativa de γ. Com esta condição satisfeita temos que

$$\theta = \frac{\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\tilde{\beta}}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{2}} = \frac{q+\alpha}{q+\gamma} \cdot \frac{n(\sigma-1)q + n\sigma\gamma}{n(\sigma-1)q + 2q + n\sigma\alpha} \in [0,1), \tag{5.4}$$

já que $\theta < 1 \Leftrightarrow \sigma p + k > (n-1)(k-\alpha)$, que é óbvio se $n = 1$ e vale para $n \geq 2$ desde que $p > n(k-\alpha)$.
Note que

$$1 - \theta = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{\tilde{\beta}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{2}} = \frac{2q(q+k-(n-1)(k-\alpha))}{(q+\gamma)(n(\sigma-1)q + 2q + n\sigma\alpha}. \tag{5.5}$$

e que

$$(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2} = \frac{2q}{q+\alpha} \cdot \frac{q+k-(n-1)(k-\alpha)}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha}. \tag{5.6}$$

Tomemos $p > n(k-\alpha)$ e fixemos σ qualquer desde que $\sigma > \max\{1; 1+\frac{\gamma_-}{p}; \frac{2}{p}\}$.

Escrever $q = p\,\sigma^m$ nos será útil nos casos em que $1 \leq n(k-\alpha)$, onde precisaremos tomar $p > 1$ tal que $p > n(k-\alpha)$. É conveniente notar que esta condição não é uma limitação da técnica que estamos utilizando pois tal restrição é exatamente a prevista em análise de escalas para a propriedade que estamos querendo obter.

Aplicando a desigualdade de Sobolev-Niremberg-Gagliardo em (5.3) obtemos que $\forall\, t \in [0, T_*) \setminus E_q$ vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|v(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \; 2B(t)\frac{q(q-1)}{q+\alpha}\mathbb{K}^{\tilde{\beta}/2}\|\, v(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\tilde{\beta}/2}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\, \nabla v(\cdot,t)\|^{1+\frac{\theta\tilde{\beta}}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Note que $\|v(\cdot,t)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} = \|u(\cdot,t)\|^{q/\sigma}_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para todo $q \geq p\,\sigma$ já que $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

Afim de comparar os termos $\|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $\|\, \nabla v(\cdot,t)\|^{1+\frac{\theta\tilde{\beta}}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, é essencial que $1+\dfrac{\theta\tilde{\beta}}{2} \leq 2$, $\forall q \geq p\,\sigma$, mas vamos pedir um pouco mais, queremos $1+\dfrac{\theta\tilde{\beta}}{2} < 2$, $\forall\, q \geq p\,\sigma$, ou seja, (tomando $q = p\,\sigma$) que

$$\frac{p\,\sigma}{\sigma} = p > n(k-\alpha), \tag{5.8}$$

já que

$$1+\frac{\theta\tilde{\beta}}{2}=1+\frac{n(\sigma-1)q+n\sigma\gamma}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha}=\frac{2n(\sigma-1)q+2q+2n\sigma k}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha}\cdot \tag{5.9}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.7) obtemos, $\forall\, q\geq p\,\sigma$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|v(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}+\frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq\ \frac{2-\theta\tilde{\beta}}{4}\,\frac{2q(q-1)}{q+\alpha}\left[B(t)\mathbb{K}^{\tilde{\beta}/2}\right]^{\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}\|\,v(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{2+\theta\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}}}\\
&\quad+\frac{2+\theta\tilde{\beta}}{4}\,\frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\|\,\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde

$$\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}=\frac{n(\sigma-1)+2q+n\sigma\alpha}{q-n\sigma(k-\alpha)}, \tag{5.11}$$

já que $\left(1+\dfrac{\theta\tilde{\beta}}{2}\right)p'=2$ e que $\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}=1$. De (5.10) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|v(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}+\frac{2-\theta\tilde{\beta}}{4}\,\frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\qquad\leq\ \frac{2-\theta\tilde{\beta}}{4}\,\frac{2q(q-1)}{q+\alpha}\left[B(t)\mathbb{K}^{\tilde{\beta}/2}\right]^{\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}\|\,v(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{2+\theta\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}}}\\
&\qquad=\ \frac{2-\theta\tilde{\beta}}{4}\,\frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\left(\frac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}B(t)^{\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}\,\mathbb{K}^{\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}\|\,v(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5.1.1. *Seja $p\geq 1$ e $p>n(k-\alpha)$. Se $\hat{t}\in(0,T_*)\setminus E_q$ for tal que $\dfrac{d}{dt}\|v(\cdot,\hat{t})\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\geq 0$, então $\forall\, q\geq p\,\sigma$ temos*

(i) $\|\nabla v(\cdot,\hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\dfrac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{2-\theta\tilde{\beta}}} B(t)^{\frac{2}{2-\theta\tilde{\beta}}} \mathbb{K}^{\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{2}{2-\theta\tilde{\beta}}} \| v(\cdot,\hat{t})\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2}\frac{2}{2-\theta\tilde{\beta}}}$

(ii) $\|v(\cdot,\hat{t})\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\dfrac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{2\delta}{2-\theta\tilde{\beta}}} B(t)^{\frac{2\delta}{2-\theta\tilde{\beta}}} \Gamma \mathbb{K}^{\frac{\delta\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}}} \| v(\cdot,\hat{t})\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\frac{\delta\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}}+1-\delta}$

onde $0 \leq \delta < 1$ *é tal que* $\dfrac{1}{\beta} = \delta\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right) + (1-\delta)\dfrac{1}{\beta_0}$.

(iii) $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\dfrac{q+\alpha}{2}\right)^{\delta_q} B(t)^{\delta_q} \Gamma^{\frac{2}{q+\alpha}} \mathbb{K}^{\rho_q} \| u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma_q}$

onde $\delta_q = \frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}$, $\rho_q = \frac{q+\gamma}{q+\alpha}\cdot\frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}$ *e* $\gamma_q = \frac{q-n(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)}$.

Demonstração. O item (i) é obtido diretamente da desigualdade anterior ao enunciado do teorema.

Para o item (ii) aplicamos em (i) a desigualdade de Sobolev-Niremberg-Gagliardo obtendo Γ tal que

$$\|v\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \Gamma \|v\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-\delta} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\delta},$$

onde,

$$\delta = \frac{\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{2}} = \frac{n(\sigma-1)(q+\alpha)}{n(\sigma-1)q + 2q + n\sigma\alpha} \in (0,1). \tag{5.12}$$

Portanto, obtemos o desejado.

Passemos a prova do item (iii). Escrevendo (ii) em termos da função u, obtemos

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{q+\alpha}{2}\right)^{\delta_q} B(t)^{\delta_q} \Gamma^{\frac{2}{q+\alpha}} \mathbb{K}^{\rho_q} \| u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma_q},$$

onde $\delta_q = \frac{\beta}{q}\frac{2\delta}{2-\theta\tilde{\beta}}$, $\rho_q = \frac{\beta}{q}\frac{\delta\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}}$ e $\gamma_q = \delta(1-\theta)\frac{\tilde{\beta}}{2-\theta\tilde{\beta}} + 1 - \delta$.

Resta escrever δ_q, ρ_q e γ_q em termos de q, n, k, α e de σ.

Para obter δ_q, usando (5.11) e (5.12), obtemos que

$$\delta_q = \frac{\beta\delta}{2q} \cdot \frac{4}{2-\theta\tilde{\beta}} = \frac{1}{q+\alpha} \cdot \frac{n(\sigma-1)(q+\alpha)}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha} \cdot \frac{n(\sigma-1)+2q+n\sigma\alpha}{q-n\sigma(k-\alpha)},$$

ou seja,

$$\delta_q = \frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)} \cdot \tag{5.13}$$

Passemos a ρ_q. Como $\rho_q = \dfrac{\tilde{\beta}\delta_q}{2}$, por (5.13), temos que

$$\rho_q = \frac{q+\gamma}{q+\alpha} \cdot \frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)} \cdot$$

Passemos a γ_q. Temos que

$$1-\delta = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}-\frac{1}{2}} = \frac{2q+n\alpha}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha} \tag{5.14}$$

e então, usando (5.6), (5.11), (5.12), e (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} 1-\delta+\delta\frac{q}{q+\alpha} \cdot \frac{q+k-(n-1)(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)} &= \frac{2q+n\alpha}{n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha} \\ &\quad + \frac{n(\sigma-1)q(q+k-(n-1)(k-\alpha))}{(n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha)(q-n\sigma(k-\alpha))} \\ &= \frac{Qq-n\alpha n\sigma(k-\alpha)}{[n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha][q-n\sigma(k-\alpha)]}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q &= 2q-2n\sigma(k-\alpha)+n(\sigma-1)q+n(\sigma-1)k-n(\sigma-1)(n-1)(k-\alpha)+n\alpha \\ &= n(\sigma-1)q+2q+n\sigma\alpha-2nk+2n\alpha-n^2(\sigma-1)(k-\alpha) \end{aligned}$$

$$= [n(\sigma - 1)q + 2q + n\sigma\alpha] - (k - \alpha)[2n + n^2(\sigma - 1)]$$
$$= [n(\sigma - 1)q + 2q + n\sigma\alpha] - (k - \alpha)[n(2 + n(\sigma - 1))],$$

então

$$\begin{aligned} Qq - n\alpha n\sigma(k-\alpha) &= q[n(\sigma - 1)q + 2q + n\sigma\alpha] - (k-\alpha)n[2q + n(\sigma-1)q] \\ &\quad -(k-\alpha)n(n\sigma\alpha) \\ &= q[n(\sigma - 1)q + 2q + n\sigma\alpha] - (k-\alpha)n[2q + n(\sigma-1)q + n\sigma\alpha] \\ &= [n(\sigma - 1)q + 2q + n\sigma\alpha][q - (k-\alpha)n]. \end{aligned}$$

Portanto

$$1 - \delta + \delta\frac{q}{q+\alpha} \cdot \frac{q + k - (n-1)(k-\alpha)}{q - n\sigma(k-\alpha)} = \frac{q - (k-\alpha)n}{q - n\sigma(k-\alpha)},$$

o que completa a demonstração de (iii).

□

5.2 Estimativas para a norma L^∞

Iniciamos esta seção fazendo algumas definições que serão úteis no que segue.

Definição 5.2.1. Para cada $0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$, definimos

$$\mathbb{B}(t_0, t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} B(\tau), \quad \mathbb{B}(t_0) := \sup_{t_0 \leq \tau} B(\tau) \quad \text{e} \quad \mathbb{B} := \limsup_{t \to \infty} B(t).$$

Definição 5.2.2. Para cada $0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$ e cada q tal que $0 \leq q \leq \infty$, definimos

$$\mathbb{U}_q(t_0, t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \mathbb{U}_q(t_0) := \sup_{t_0 \leq \tau} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \quad \text{e}$$
$$\mathbb{U}_q := \limsup_{t \to \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 5.2.3. *Seja $p \geq 1$ e $p > n(k-\alpha)$. Dado $0 \leq t_0 < T_*$, se para cada t, com $t_0 \leq t \leq T$, e u uma solução limitada de (5.1) tal que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < M_p(T), \forall\, 0 \leq t \leq T$, então, para cada $q \geq p\,\sigma$ e para cada $0 \leq t \leq T$, pondo $\lambda(q) = \mathbb{K}^{\frac{q+\gamma}{q+\alpha}\frac{n(\sigma-1)q}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\Gamma^{\frac{2q}{q+\alpha}}\left(\dfrac{q+\alpha}{2}\right)^{\frac{n(\sigma-1)q}{q-n\sigma(k-\alpha)}}$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \max\Big\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \lambda(q)^{\frac{1}{q}}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{q-n(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\Big\},$$

ou seja,

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \leq \max\Big\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \lambda(q)^{\frac{1}{q}}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{q-n(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\Big\}$$

Demonstração. Pondo $\Lambda_q := \lambda(q)^{1/q}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{q-n(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}$, vamos provar o resultado em três casos.

<u>Caso I</u> : $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda_q$ e $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda_q$, $\forall\, t_0 < \tau \leq t$.

Neste caso, temos que ter $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$, $\forall\, \tau \in (t_0,t) \setminus E_q$, pois se $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \geq 0$ para algum $\tau \in (t_0,t)\setminus E_q$, teríamos, por (iii) do teorema 5.1.1, que

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \lambda(q)^{1/q}B(\tau)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-n\sigma(k-\alpha)}}\|\, u(\cdot,\tau)\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q-n(k-\alpha)}{q-n\sigma(k-\alpha)}} \leq \Lambda_q,\ \forall\, \tau \in [t_0,t].$$

Assim, $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é estritamente decrescente em $[t_0,t]$ e então

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

<u>Caso II</u>: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} > \Lambda_q$ e $\exists\, t_1 \in (t_0,t)$ tal que $\|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R})} = \Lambda_q$.

Seja $t_2 := \inf\Big\{\tau \in (t_0,t) : \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda_q\Big\}$. Então $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é estritamente decrescente em $[t_0,t_2]$ pelo primeiro caso.

Afirmação: $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda_q$, $\forall\, \tau \in [t_2, t]$. Se tal afirmação não fosse verdadeira, existiria $t_3 > t_2$ tal que $\|u(\cdot,t_3)\| > \Lambda_q$.

Definindo $t_4 = \inf\left\{\tau \in (t_2,t_3) : \|u(\cdot,s)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda_q,\ \forall\, s \in (\tau, t_3]\right\}$, teríamos que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ seria estritamente decrescente em $[t_4, t_3]$ como no Caso I. Contradição!

Caso III: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \Lambda_q$.

Neste caso temos que ter $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \Lambda_q$, $\forall \tau \in [t_0, t]$. De fato, suponhamos que $\exists\, t_2 \in (t_0, t]$ com $\|u(\cdot,t_2)\|_{L^q(\mathbb{R})} > \Lambda_q$. Tomamos $t_1 \in [t_0, t_2]$ tal que

$$\|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R})} = \Lambda_q \text{ e } \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} > \Lambda_q,\ \forall\, \tau \in (t_1, t_2]. \tag{5.15}$$

Assim, existe $t_* \in (t_1, t_2] \setminus E_q$ onde $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R})}\Big|_{t=t_*} \geq 0$. Caso contrário teríamos $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R})} < 0, \forall\, \tau \in [t_1, t_2] \setminus E_q$, e deste modo teríamos $\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R})}$ decrescente em $[t_1, t_2]$ o que contradiria o item (iii) do Teorema 5.1.1, visto que $t_* \in (t_1, t_2]$. □

Agora aplicaremos o Teorema 5.2.3 sucessivamente para $q = \sigma p, \sigma^2 p, \cdots, \sigma^m p$.

Lema 5.2.4. *Seja $p \geq 1$ e $p > n(k-\alpha)$. Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema* (5.1)*. Dados t_0 e t quaisquer, tais que $0 \leq t_0 \leq t < T_*$, temos*

(i) $\mathbb{U}_{p\sigma}(t_0,t) \leq \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma}(\mathbb{R}^n)}; \lambda(p\sigma))\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma-a\sigma}}\|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{p\sigma-a}{p\sigma-\sigma a}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}$,

e mais geralmente, para $m \geq 2$,

(ii) $\mathbb{U}_{p\sigma^m}(t_0,t) \leq \max\Big\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^m}(\mathbb{R}^n)};$

$$C(l,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\sigma^{-m-1}\sum_{j=l}^{m}\frac{(p\sigma^m-a)n(\sigma-1)}{(p\sigma^j-a)(p\sigma^{j-1}-a)}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^{l-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^m-a}{p\sigma^m-\sigma^{m-l+1}a}}, 2 \le l \le m\,;$$

$$\left. C(1,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{n(\sigma-1)\sum_{j=1}^{m}\frac{(p\sigma^m-a)}{(p\sigma^{m-j+1}(p\sigma^j-a)(p\sigma^{j-1}-a)}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^m-a}{p\sigma^m-\sigma^m a}}\right\},$$

onde $a := n(k-\alpha)$, $C(l,m) := \displaystyle\prod_{j=l}^{m}\lambda(p\sigma^j)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}}$ *para cada* $1 \le l \le m$ *e* $\lambda(q)$ *é dado no Teorema 5.2.3.*

Demonstração. Seja $a = n(k-\alpha)$ e $\lambda(q)$ dado no Teorema 5.2.3. Vamos supor que $\mathbb{U}_p \ge 1$, pois caso contrário $u(\cdot,t)$ é limitada para todo $t > 0$. Provaremos por indução em m, aplicando o Teorema 5.2.3 para $q = p\sigma, p\sigma^2, p\sigma^3, \cdots, p\sigma^m$.

Fazendo $m = 1$ no Teorema 5.2.3 obtemos (i). Para $m = 2$, ou seja, fazendo $q = p\sigma^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{p\sigma^2}(t_0,t) &\le \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^2}(\mathbb{R}^n)};\lambda(p\sigma^2)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^2-a\sigma}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma a}}\right\}\\
&\le \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^2}(\mathbb{R}^n)};\lambda(p\sigma^2)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^2-a\sigma}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma a}};\right.\\
&\qquad\left.\lambda(p\sigma^2)\lambda(p\sigma)^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma a}}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^2-a\sigma}+\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^2-a)}{\sigma(p\sigma^2-a\sigma)(p\sigma-a\sigma)}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma^2 a}}\right\}\\
&= \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^2}(\mathbb{R}^n)};\lambda(p\sigma^2)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^2-a)}{\sigma(p\sigma^2-a)(p\sigma-a)}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma a}};\right.\\
&\qquad\left.\lambda(p\sigma^2)\lambda(p\sigma)^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma a}}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^2-a)}{\sigma(p\sigma^2-a)(p\sigma-a)}+\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^2-a)}{\sigma^2(p\sigma-a)(p-a)}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^2-a}{p\sigma^2-\sigma^2 a}}\right\}
\end{aligned}$$

que, para $m = 2$, é o resultado desejado. Agora, tomando $m = 3$, temos

$$\mathbb{U}_{p\sigma^3}(t_0;t) \le \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^3}(\mathbb{R}^n)};\lambda(p\sigma^3)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^3-\sigma a}}\mathbb{U}_{p\sigma^2}(t_0,t)^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma a}}\right\}.$$

Observando que

$$\frac{1}{p\sigma^3 - \sigma a} = \frac{p\sigma^3 - a}{\sigma(p\sigma^3 - a)(p\sigma^2 - a)},$$

$$\frac{p\sigma^2 - a}{\sigma(p\sigma^2 - a)(p\sigma - a)} \frac{p\sigma^3 - a}{(p\sigma^3 - \sigma a)} = \frac{p\sigma^3 - a}{\sigma^2(p\sigma^2 - a)(p\sigma - a)}$$

e

$$\frac{p\sigma^2 - a}{\sigma^2(p\sigma - a)(p - a)} \frac{p\sigma^3 - a}{p\sigma - \sigma a} = \frac{p\sigma^3 - a}{\sigma^3(p\sigma - a)(p - a)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{p\sigma^3}(t_0;t) \ \leq \max \Bigg\{ & \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^3}(\mathbb{R}^n)}; \lambda(p\sigma^3)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma(p\sigma^3-a)(p\sigma^2-a)}} \cdot \\ & \cdot \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma a}} \lambda(p\sigma^3)\lambda(p\sigma^2)^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma a}} \mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma(p\sigma^3-a)(p\sigma^2-a)}+\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma^2(p\sigma^2-a)(p\sigma-a)}} \cdot \\ & \cdot \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma^2 a}} \lambda(p\sigma^3)\lambda(p\sigma^2)^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma^2 a}} \cdot \\ & \cdot \mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma(p\sigma^3-a)(p\sigma^2-a)}+\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma^2(p\sigma^2-a)(p\sigma-a)}+\frac{n(\sigma-1)(p\sigma^3-a)}{\sigma^3(p\sigma-a)(p-a)}} \mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^3-a}{p\sigma^3-\sigma^3 a}} \Bigg\}\end{aligned}$$

Supondo o resultado válido para todo $k \leq m-1$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{p\,\sigma^{m-1}}(t_0,t) \leq \max \Bigg\{ & \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^{m-1}}(\mathbb{R}^n)}; \\ & C(l,m-1)\mathbb{B}(t_0,t)^{\sigma^{-m}\sum_{j=l}^{m-1}\frac{(p\sigma^{m-1}-a)n(\sigma-1)}{(p\sigma^j-a)(p\sigma^{j-1}-a)}} \|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^{l-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p\sigma^{m-1}-a}{p\sigma^{m-1}-\sigma^{m-l}a}}, 2\leq l\leq m-1; \\ & C(1,m-1)\mathbb{B}(t_0,t)^{n(\sigma-1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(p\sigma^{m-1}-a)}{(p\sigma^{m-j}(p\sigma^j-a)(p\sigma^{j-1}-a)}} \mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p\sigma^{m-1}-a}{p\sigma^{m-1}-\sigma^{m-1}a}} \Bigg\}.\end{aligned}$$

O Teorema 5.2.3, para $q = p\sigma^m$, nos dá

$$\mathbb{U}_{p\sigma^m}(t_0;t) \leq \max\Big\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^m}(\mathbb{R})}; \lambda(p\sigma^m)\mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^m - a\sigma}} \mathbb{U}_{p\sigma^{m-1}}(t_0;t)^{\frac{p\sigma^m - a}{p\sigma^m - \sigma a}} \Big\}.$$

Dessas duas últimas desigualdade, de forma análoga ao feito para $k = 3$, segue o desejado para $k = m$. $\square$

Agora, nosso objetivo é obter expresões mais simples e estimativas para as somas do Lema 5.2.4 a fim de tornar o resultado mais limpo e, ao mesmo tempo, garantir que as somas são finitas ao $m \to \infty$. Mais precisamente, queremos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5.2.5. *Sejam $p \geq p_0$ tal que $p > n(k-\alpha)$ e $\sigma > 1$ tal que $\sigma > \max\{1; \frac{2}{p}; 1 + \frac{\gamma_-}{p}\}$. Seja $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T), L^\infty(\mathbb{R}^n))$, e se $\gamma < 0$ assumimos que $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T), L^p(\mathbb{R}^n))$, uma solução clássica de* (5.1)*. Então, para todo $0 \leq t_0 \leq t < T_*$, temos*

$$\mathbb{U}_\infty(t_0,t) \leq K_* \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n}{p-n(k-\alpha)}} \mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p}{p-n(k-\alpha)}} \right\},$$

onde $K_* = K_*(\sigma,p,\alpha,k,n)$.

Demonstração. Ponha $a := n(k-\alpha)$. Fixa l, com $1 \leq l \leq m$, e observe que

$$\frac{\sigma^j}{(p\sigma^j - a)(p\sigma^{j-1} - a)} = \left[\frac{1}{p\sigma^{j-1}} - \frac{1}{p\sigma^j - a} \right] \frac{\sigma}{p(\sigma - 1)}.$$

Assim,

$$\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^m - a}{\sigma^{m-j+1}(p\sigma^j - a)(p\sigma^{j-1} - a)} = \frac{1}{\sigma - 1} \frac{\sigma^{-l+1} - \sigma^{-m}}{p - a\sigma^{-+1}}.$$

Logo, a parte (ii) do Lema 5.2.4 pode ser reescrita por

$$\mathbb{U}_{p\,\sigma^m}(t_0,t) \leq \max\Bigg\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)};$$

$$\left[\prod_{j=l}^{m}\lambda(p\sigma^{j})^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}}\right]\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{p-a\sigma^{-l+1}}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^{l-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}},\, 2\leq l\leq m\,;$$

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\lambda(p\sigma^{l})^{\frac{p\sigma^{m}-a}{p\sigma^{m}-a\sigma^{m-j}}}\right]\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}\Bigg\}.$$

Vamos, agora, estimar os termos intermediários (que correspondem a l, para $1\leq l\leq m$), usando interpolação e desigualdade de Young. Para tal, definimos

$$J_l\equiv C(l,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{p-a\sigma^{-l+1}}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^{l-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}},$$

onde $a=n(k-\alpha)$ e $C(l,m)\equiv\displaystyle\prod_{j=l}^{m}\lambda(p\sigma^{j})^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}}$. Fixado $2\leq l\leq m$, por interpolação, temos que

$$\|v\|_{L^{p\sigma^{l-1}}(\mathbb{R}^n)}\leq\|v\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m}}{1-\sigma^{-m}}}\|v\|_{L^{p\sigma^{m}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1-\sigma^{-l+1}}{1-\sigma^{-m}}}.$$

Então,

$$J_l\leq C(l,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{p-a\sigma^{-l+1}}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m}}{1-\sigma^{-m}}\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}}\cdot$$
$$\cdot\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^{m}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1-\sigma^{-l+1}}{1-\sigma^{-m}}\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}},$$

ou, equivalentemente,

$$J_l\leq C(l,m)^{\frac{1}{p'}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^{m}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1-\sigma^{-l+1}}{1-\sigma^{-m}}\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}}C(l,m)^{\frac{1}{q'}}\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{p-a\sigma^{-l+1}}}\cdot$$
$$\cdot\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m}}{1-\sigma^{-m}}\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-l+1}}},$$

que, por Young, nos dá

$$J_l \leq \frac{1}{p'}C(l,m)\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^m}(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{1}{q'}C(l,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m}}{1-\sigma^{-m}}\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}$$
$$\leq \max\left\{C(l,m)\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^{p\sigma^m}(\mathbb{R}^n)};C(l,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\|u_0(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}\right\},$$

já que $\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}=1$. Dessa forma, pelo Lema 5.2.4, temos

$$\mathbb{U}_{p\,\sigma^m}(t_0,t) \leq \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)};K_1(m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}};\right.$$
$$\left.C(1,m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}\right\}$$
$$=\max\left\{K_2(m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)};K_3(m)\mathbb{B}(t_0,t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}}\mathbb{U}_p(t_0,t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}\right\},$$

onde $K_1(m) \equiv \max\limits_{2\leq l\leq m} C(l,m)$, $K_2(m) \equiv \max\{1,K_1(m)\}$ e $K_3(m)\equiv\max\{K_1(m),C(1,m)\}$. Resta mostrar que $K_3(m)$ é uniformemente limitado em m.

Fixado l, com $1\leq l\leq m$, temos

$$C(l,m)=\prod_{j=l}^{m}\lambda(p\sigma^j)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}}$$

onde $\lambda(p\sigma^j)=\Gamma^{\frac{2}{p\sigma^j+\alpha}}\mathbb{K}^{\frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha}\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^j-\sigma a}}\left(\dfrac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{n(\sigma-1)}{p\sigma^j-\sigma a}}$.

Observe que $p\sigma^j\geq p\sigma+\gamma\geq p\sigma+\gamma_-=p\left(\sigma+\frac{\gamma_-}{p}\right)\geq p>0,\ \forall j\geq 1.$

Dessa maneira, temos

$$C(l,m) = E_1(l,m)E_2(l,m)E_3(l,m),$$

onde $E_1(l,m) = \Gamma^{2\sum_{j=l}^{m} \frac{1}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}}$,

$$E_2(l,m) = \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^j+\gamma}{(p\sigma^j+\alpha)(p\sigma^j-a\sigma)} \frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}} \quad \text{e}$$

$$E_3(l,m) = \left[\prod_{j=l}^{m} \left(\frac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j-a\sigma} \frac{1}{p-a\sigma^{-j}}}\right]^{n(\sigma-1)(p-a\sigma^{-j})}.$$

Queremos estimativas uniformes (em m) para estes termos. Começamos por $E_1(l,m)$.

Se $\Gamma \leq 1$, então $E_1(l,m) \leq 1$, $\forall\, 1 \leq l \leq m$. Se $\Gamma > 1$, então

$$E_1(l,m) = \Gamma^{2\sum_{j=l}^{m} \frac{1}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a\sigma^{-j}}} \leq \Gamma^{2\sum_{j=l}^{m} \frac{1}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p}{p-a\sigma^{-1}}} \leq \Gamma^{2\sum_{j=l}^{m} \frac{1}{p\sigma^j} \frac{p}{p-a\sigma^{-1}}}.$$

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p\sigma^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p\sigma^j} = \frac{1}{p(\sigma-1)}$ e , temos

$$E_1(l,m) \leq \max\left\{1; \Gamma^{\frac{2}{p}(\sigma-1)^{-1} \frac{p\sigma}{p\sigma-a}}\right\}.$$

Estimemos agora $E_2(l,m)$. Se $\mathbb{K} \leq 1$, então $E_2(l,m) \leq 1$, $\forall\, 1 \leq l \leq m$. Se $\mathbb{K} > 1$, então

$$\begin{aligned} E_2(l,m) = \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p-a\sigma^{-m}}{(p\sigma^j-a\sigma)(p-a\sigma^{-j})}} &\leq \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p}{(p\sigma^j-a\sigma)(p-a\sigma^{-j})}} \\ &= \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p\sigma^j}{p\sigma^j-a} \frac{1}{p\sigma^j-\sigma a}} \end{aligned}$$

$$E_2(l,m) \leq \max\left\{1; \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=l}^{m} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p\sigma^j}{p\sigma^j-a} \frac{1}{p\sigma^j-\sigma a}}\right\}.$$

Note que

$$\frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \leq 1 \text{ se } \gamma \leq \alpha \text{ (isto é } k \leq \alpha) \quad \text{e}$$

$$\frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \leq \frac{\gamma}{\alpha} \text{ se } \gamma \geq \alpha \text{ (isto é } k \geq \alpha).$$

Note ainda que

$$\frac{p\sigma^j}{(p\sigma^j - a\sigma)(p\sigma^j - a)} = \frac{1}{\sigma - 1}\left(\frac{1}{\sigma^{j-1} - a} - \frac{1}{\sigma^j - a}\right)$$

e então

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{p\sigma^j}{(p\sigma^j - a)(p\sigma^j - a\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1}\frac{1}{p - a}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=l}^{\infty} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha}\frac{p\sigma^j}{p\sigma^j - a}\frac{1}{p\sigma^j - \sigma a} &\leq \max\left\{1; \frac{\gamma}{\alpha}\right\} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{p\sigma^j}{(p\sigma^j - a)(p\sigma^j - a\sigma)} \\
&\leq \max\left\{1; \frac{\gamma}{\alpha}\right\} \frac{1}{\sigma - 1}\frac{1}{p - a}.
\end{aligned}$$

Logo

$$E_2(l,m) \leq \max\left\{1; \mathbb{K}^{\frac{n}{p-a}\max\left\{1;\frac{\gamma}{\alpha}\right\}}\right\}.$$

Por último estimemos $E_3(l,m)$. Como $\dfrac{p\sigma^j+\alpha}{2} \geq \dfrac{p\sigma+\alpha}{2} \geq \dfrac{p\sigma^j}{2} \geq 1$, pois $\sigma \geq \frac{2}{p}$, temos então, para cada $1 \leq l \leq m$, que

$$1 \leq \prod_{j=l}^{m} \left(\frac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j - a\sigma}\frac{1}{p - a\sigma^{-j}}} \leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j - a\sigma}\frac{1}{p - a\sigma^{-j}}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
E_3(l,m) &\leq \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j - a\sigma}\frac{1}{p - a\sigma^{-j}}}\right]^{n(\sigma-1)(p-a\sigma^{-m})} \\
&\leq \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p\sigma^j+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j - a\sigma}\frac{1}{p - a\sigma^{-j}}}\right]^{n(\sigma-1)p)}
\end{aligned}$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p\sigma^j + \alpha}{2} \right)^{\frac{p\sigma^j}{(p\sigma^j - a\sigma)(pp\sigma^j - a)}} \right]^{n(\sigma-1))} \equiv \mathbb{T}(\sigma, p, \alpha, k, n) < \infty.$$

Definindo $K_*(\sigma, p, \alpha, k, n) \equiv K_*$ por

$$K_* \equiv \mathbb{T} \cdot \max \left\{ 1; \mathbb{K}^{n(\sigma-1)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p\sigma^j+\gamma}{p\sigma^j+\alpha} \frac{p\sigma^j}{(p\sigma^j - a\sigma)(p\sigma^j - a)}} \right\} \max \left\{ 1; \Gamma^{\frac{2\sigma p}{p\sigma - a} \sum_{p\sigma^j+\alpha}^{\infty}} \right\},$$

onde $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}(\sigma, p, \alpha, k, n)$, $\mathbb{K}$ e Γ são os mesmos das estimativas de $E_1(l, m)$, $E_2(l, m)$ e $E_3(l, m)$. Assim, de

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{p\,\sigma^m}(t_0, t) \leq \max \Bigg\{ & \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)}; K_1(m)\mathbb{B}(t_0, t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}} \mathbb{U}_p(t_0, t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}}; \\ & C(1, m)\mathbb{B}(t_0, t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}} \mathbb{U}_p(t_0, t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}} \Bigg\} \\ = \max \Bigg\{ & K_2(m)\|u(\cdot, t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)}; K_3(m)\mathbb{B}(t_0, t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}} \mathbb{U}_p(t_0, t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

obtemos, escrevendo $K_* \equiv K_*(\sigma, p, \alpha, k, n)$,

$$\mathbb{U}_{p\,\sigma^m}(t_0, t) \leq K_* \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{p\,\sigma^m}(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}(t_0, t)^{\frac{n(1-\sigma^{-m})}{p-a}} \mathbb{U}_p(t_0, t)^{\frac{p-a\sigma^{-m}}{p-a}} \right\}.$$

Fazendo $m \to \infty$ temos, para cada $p_0 \leq p < \infty$ satisfazendo $p > n(k - \alpha)$ e para cada $\sigma > \max\left\{1, \frac{2}{p}, 1 + \frac{\gamma_-}{p}\right\}$, que

$$\mathbb{U}_\infty(t_0, t) \leq K_* \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}(t_0, t)^{\frac{n}{p-a}} \mathbb{U}_p(t_0, t)^{\frac{p}{p-a}} \right\}.$$

Assim obtivemos uma limitação uniforme para a norma do sup e provamos o desejado. □

5.3 Condições para existência global

Nesta última seção trazemos, como aplicação da limitação uniforme, um teorema que nos dá condições suficientes para existência global de soluções de (5.1). Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(|\, u\,|^{\alpha}\nabla u) + \eta\Delta u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{5.16}$$

onde $p_0 \geq 1$, $\alpha > 0$, $\eta > 0$ e b satisfaz a hipótese ($\mathbf{b_1}$) abaixo.

(b1) $\exists\, k > 0$ e $B \in C^0((0,\infty])$ tais que $|b(x,t,u)|_2 \leq B(t)|u|^k$, onde $|\cdot|_2$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.3.1. *Dada $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, com $p_0 \geq 1$. Sejam $p \geq p_0$ e $\sigma > 1$ tal que $\sigma > \max\{1; \frac{2}{p}; 1 + \frac{\gamma_-}{p}\}$. Seja u uma solução clássica de* (5.16). *Se $\mathbb{B}(0;\infty) < \infty$, então*

(i) *Se $0 \leq k < \dfrac{1}{n} + \alpha$, então u está definida para todo $t > 0$ para qualquer u_0.*

(ii) *Se $k = \dfrac{1}{n} + \alpha$, então as soluções são globais sempre que*

$$\|\, u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\frac{\mathbb{K}^{\frac{\sigma+\gamma}{\sigma+\alpha}}}{2(\sigma+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\right]^{-n}. \tag{5.17}$$

(iii) *Se $k > \dfrac{1}{n} + \alpha$, então as soluções são globais sempre que o dado inicial satisfizer*

$$\|\, u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\, u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}^{n(k-\alpha)-1} \leq \left[\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}\mathbb{B}(0;\infty)}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\right]^{-n}. \tag{5.18}$$

Demonstração. Para (i), fazemos $t_0 = 0$ e $p = 1$, no Teorema 5.2.5, obtendo

$$\mathbb{U}_\infty(0,t) \leq K_* \max\left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}(0,t)^{\frac{n}{1-n(k-\alpha)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{1-n(k-\alpha)}} \right\} < \infty, \; \forall\, t > 0,$$

já que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$, $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ e $\mathbb{B}(0;\infty) < \infty$.

Para provar (ii) e (iii), lembremos da desigualdade (5.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|v(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{4q(q-1)}{(q+\alpha)^2}\|\nabla v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \; 2B(t)\frac{q(q-1)}{q+\alpha}\mathbb{K}^{\tilde{\beta}/2}\| v(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\tilde{\beta}/2}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\| \nabla v(\cdot,t)\|^{1+\frac{\theta\tilde{\beta}}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

que reescrita em termos de u, nos fornece

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u(\cdot,t)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx \\ &\leq B(t)\frac{2q(q-1)}{(q+\alpha)}\mathbb{K}^{\frac{q+\gamma}{q+\alpha}}\| u(\cdot,t)\|^{qc}_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}\left[\frac{(q+\alpha)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}|u(\cdot,t)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}+\frac{\theta\tilde{\beta}}{4}} \end{aligned}$$

onde $c := \dfrac{q+k-(n-1)(k-\alpha)}{nq(\sigma-1)+2q+n\sigma\alpha}$.

Exigindo $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\theta\tilde{\beta}}{2}\right) = 1$; ou seja, $q = n\sigma(k-\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u(\cdot,t)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx \\ &\quad\leq B(t)\frac{q(q-1)}{2(q+\alpha)}\mathbb{K}^{\frac{q+\gamma}{q+\alpha}}\| u(\cdot,t)\|^{k-\alpha}_{L^{n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|u(\cdot,t)|^{q+\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx, \quad (5.19) \end{aligned}$$

para todo $t \in (0,t_*) \setminus E_{n\sigma(k-\alpha)}$. Note que nos casos (ii) e (iii) temos $n\sigma(k-\alpha) \geq 1$. Assim $\|u(\cdot,t)\|_{L^{n\sigma(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em $[0,T]$ sempre que tivermos

$$\frac{1}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}\mathbb{B}(0;\infty)\|\,u(\cdot,t)\|^{k-\alpha}_{L^{n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\leq 1,\,\forall\,t>0. \quad (5.20)$$

No caso (ii), esta condição se torna simplesmente

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{\sigma+\gamma}{\sigma+\alpha}}}{2(\sigma+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|\,u(\cdot,t)\|^{1/n}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leq 1,\,\forall\,t>0, \quad (5.21)$$

que é satisfeita para todo $t>0$ desde que valha para $t=0$. Isto mostra que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\sigma(\mathbb{R}^n)}$ é monotonicamente decrescente em $[0,T_*)$ caso valha (5.17). Pelo Teorema 5.2.5, tomando $p=\sigma$, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ é controlada por $\|u(\cdot,t)\|_{L^\sigma(\mathbb{R}^n)}$ que é monotonicamente decrescente. Por interpolação temos que $u_0\in L^\sigma(\mathbb{R}^n)$, já que $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ fica limitada em qualquer intervalo limitado, e assim não pode ser $T_*<\infty$.

Para provar o caso (iii), observemos que

$$\|u(\cdot,t)\|^{k-\alpha}_{L^{n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\leq\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.22)$$

Note que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|^{2n(k-\alpha)}_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^1|u(x,t)|^{2n(k-\alpha)-1}\,dx\\ &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{2n(k-\alpha)-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.23)\end{aligned}$$

Logo, de (5.23), decorre

$$\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\leq\|u(\cdot,t)\|^{1/n}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{k-\alpha-\frac{1}{n}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},\,\forall t\in[0,T_*),$$

Assim, usando (5.22), obtemos

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}B(t)\|\,u(\cdot,t)\|^{k-\alpha}_{L^{n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(k-\alpha)-1/n}. \quad (5.24)$$

De (5.18) e de (5.24), obtemos, para todo $t \in [0, T_*)$ suficientemente próximo de zero, que

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}\|u(\cdot,t)\|_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}} < 1. \quad (5.25)$$

Afirmamos que (5.25) tem que ser verdadeira para todo $t \in [0, T_*)$. De fato, se não fosse, existiria $T_1 \in (0, T_*)$ tal que

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}\|u(\cdot,t)\|_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}} < 1, \forall\, t \in [0, T_1),$$

enquanto que

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,T_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}\|u(\cdot,T_1)\|_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}} = 1.$$

Por (5.22), teríamos que (5.20) seria satisfeita para $T = T_1$, e então, por (5.19), teríamos $\|u(\cdot,t)\|_{L^{n\sigma(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}$ decrescente em $[0, T_1]$. E neste caso,

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,T_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}\|u(\cdot,T_1)\|_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}} \\
&\leq \frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-(k-\alpha)^{-1}}}\|u_0\|_{L^{2n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(k-\alpha)-2}{2n-(k-\alpha)^{-1}}} \\
&\leq \frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k-1/n} < 1.
\end{aligned}$$

Contradição! Logo, (5.25) é válida para todo $0 \leq t < T_*$. Se (5.25) é válida para todo $0 \leq t < T_*$, então, por (5.22), temos

$$\frac{\mathbb{K}^{\frac{n\sigma(k-\alpha)+\gamma}{n\sigma(k-\alpha)+\alpha}}}{2(n\sigma(k-\alpha)+\alpha)}\mathbb{B}(0;\infty)\|u(\cdot,t)\|^{k-\alpha}_{L^{n(k-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} < 1,\ \forall\, t \in [0,T_*). \tag{5.26}$$

Assim, pelo Teorema 5.2.5, tomando $p = n\sigma(k-\alpha)$, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ é limitada em $[0,T_*)$ e, de forma análoga ao caso (ii), obtemos que T_* não pode ser finito. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J. A. Barrionuevo, L. S. Oliveira and P. R. Zingano, *General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media*, Intern. J. Partial Diff. Equations, **2014** (2014), $1-8$.

[2] P. Braz e Silva, W. Melo and P. R. Zingano, *An asymptotic supnorm estimate for solutions of 1-D systems of convection-diffusion equations*, J. Diff. Equations, **258** (2015), $2806-2822$.

[3] J. Q. Chagas, N. M. L. Diehl and P. L. Guidolin, *Some properties of Steklov averages* (in Portuguese), unpublished note, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 2015.

[4] P. Daskalopoulos and C. E. Kenig, Degenerate Diffusions: initial value problems and local regularity theory, European Mathematical Society, Zürich, 2007.

[5] E. DiBenedetto, Degenerate Parabolic Equations, Springer, New York, 1993.

[6] E. DiBenedetto, *On the local behavior of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **13** (1986), $487-535$.

[7] E. Dibenedetto, V. Vespri and J. M. Urbano, *Current issues on singular and degenerate evolution equations*, in: C. M. Dafermos and E. Feireisl (Eds.), Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, vol. 1, pp. $169-286$, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2004.

[8] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[9] L. Fabris, *On the global existence and supnorm estimates for nonnegative solutions of the porous medium equation with arbitrary advection terms* (in Portuguese), PhD Thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, October/2013.

[10] D.Gilbarg e N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2ª edição, Springer, Berlim, 1983.

[11] E. Henriques and J. M. Urbano, *Intrinsic scaling for PDEs with an exponential nonlinearity*, Indiana Univ. Math. J., **55** (2006), 1701 − 1722.

[12] B. Hu, Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations, Springer, Berlin, 2011.

[13] N. Igbida and J. M. Urbano, *Uniqueness for nonlinear degerate problems*, NoDEA Nonl. Diff. Eqs. Appl., **10** (2003), 287 − 307.

[14] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov e N. N. Uralceva , *Linear and Quisilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[15] L. Niremberg *On elliptic partial differential equations Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, no 2* (1959), 115 − 162.

[16] P. Quittner and P. Souplet, Superlinear Parabolic Problems: blow-up, global existence and steady states, Birkhäuser, Basel, 2007.

[17] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[18] E. V. Teixeira and J. M. Urbano, *An intrinsic Liouville theorem for degenerate parabolic equations*, Arch. Math. (Basel), **102** (2014), $433 - 487$.

[19] J. M. Urbano, *Hölder continuity of local weak solutions for parabolic equations exhibiting two degeneracies*, Adv. Diff. Eqs., **6** (2001), $327 - 358$.

[20] J. M. Urbano, *Regularity for partial differential equations: from De Giorgi-Nash-Moser theory to intrinsic scaling*, CIM Bull., **12** (2002), $8 - 14$.

[21] J. M. Urbano, The Method of Intrinsic Scaling: a systematic approach to regularity for degenerate and singular PDEs, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1930, Springer, New York, 2008.

[22] J. L. Vázquez, The Porous Medium Equation: mathematical theory, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[23] Z. Wu, J. Zhao, J. Yin and H. Li, Nonlinear Diffusion Equations, World Scientific, Singapore, 2001.

[24] P. Zingano, *Dois Problemas em Equações Diferenciais Parciais*, trabalho inédito submetido para avaliação para fins de progressão funcional à Classe E, (2015).