UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Estudo de correções relativísticas para o espalhamento η_c-núcleon no Método do Grupo Ressonante*

Frederico Fetter Gomes

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
Agosto de 2015.

* Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

The most beautiful experience we can have is the mysterious. It is the fundamental emotion that stands at the cradle of true art and true science. Whoever does not know it and can no longer wonder, no longer marvel, is as good as dead.

Albert Einstein

Agradecimentos

• Aos meus pais Virginia e Pedro, pelo apoio e conselhos ao longo dos últimos anos.

• Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef, pela orientação dedicada e por ter aceitado este desafio no meu retorno à Física.

• À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado.

• À minha avó Neiva, pelo carinho e preocupação constantes.

• Aos meus irmãos, Rodrigo e Marcelo, pelo companheirismo, amizade e compreensão dos quais apenas irmãos são capazes.

• Aos meus amigos Débora, Guilherme, Xido, Natália, Felipe, Ingrid e Larissa, pelo acolhimento que recebi nestes últimos anos.

• À Bruna Folador, pela parceria nos cálculos e diversos tropeços no desenvolvimento deste trabalho.

• A todos que me apoiaram de alguma maneira nesta jornada.

Obrigado!

Resumo

Estudamos os efeitos de correções relativísticas à interação spin-spin no espalhamento η_c-núcleon no modelo de quarks. No nível dos hádrons utilizamos o Método do Grupo Ressonante (RGM) em segunda quantização para obter um potencial entre o méson e o bárion em função de um potencial entre quarks constituíntes. Para esse potencial no nivel dos quarks utilizamos um potencial de troca de um glúon onde os espinores do charm são truncados em segunda ordem em momento e os espinores dos quarks up e down são truncados em quarta ordem obtendo assim um potencial tipo Fermi-Breit. O potencial entre os hádrons é então utilizado para calcular a seção de choque na aproximação de Born. Na ausência de dados experimentais, ajustamos nosso modelo e comparamos os resultados com os obtidos por *Hilbert et al. (2007)* [1].

Abstract

We study the effects of relativistic corrections to spin-spin interaction in the η_c-nucleon scattering in quark model. At hadron level we use the Ressonating Group Method (RGM) in second quantization in order to obtain a potential between the meson and baryon as a funtion of the potential between constituent quarks. To obtain this potential at quark level we use a one gluon exchange potential in which the charm spinors are truncated at second order in momentum and the quarks up and down spinors are truncated at fourth order in momentum obtaining thus a Fermi-Breit-like potential. Then the potential between hadrons is used to calculate the scattering cross section in the Born approximation. In the absence of experimental data we adjust our model and compare our results with the ones obtained by *Hilbert et al. (2007)* [1].

Conteúdo

1. Introdução 3

2. Interação Nuclear Forte 5

2.1 Modelo de Quarks 5

2.2 Cromodinâmica Quântica 7

2.2.1 Transformação Global e Conservação de Carga 9

3. A Física de Hádrons e o RGM 10

3.1 Charmônio 10

3.2 FAIR-PANDA 11

3.3 Potencial Méson-Bárion no RGM 12

4. O Potencial Microscópico 21

4.1 O Potencial de Troca de Um Glúon 21

4.2 Correção Relativística ao Potencial de Fermi-Breit 26

5. O Potencial Méson-Bárion Corrigido e Resultados 32

5.1 Seção de Choque 32

5.2 Resultados 34

6. Conclusão e Perspectivas 42

A. Identidade 44

B. Funções de Onda 46

B.1 Função de Onda do Méson 46

B.1.1 Espaço 46

B.1.2 Spin-Sabor 46

B.2 Função de Onda do Bárion 48
B.2.1 Espaço 48
B.2.2 Spin-Sabor 52

C. Variáveis de Mandelstam 55

D. Parte espacial de V_{mb} 57

E. Parte spin-sabor-cor de V_{mb} 62

F. Matrizes de Pauli, Dirac e Gell-Mann 64
F.1 Matrizes de Pauli 64
F.2 Matrizes de Dirac 64
F.3 Matrizes de Gell-Mann 64

Bibliografia 66

Capítulo 1

Introdução

A partir da segunda metade do século XX, o Modelo Padrão da física de partículas se estabeleceu firmemente sendo corroborado por diversos experimentos. Dentre seus paradigmas está a existência de estruturas subnucleares formadas por quarks e glúons regidas pela interação nuclear forte. Desenvolver uma descrição quantitativa satisfatória dessas estruturas e dos processos que as envolvem é um dos mais fascinantes empreendimentos da física contemporânea.

A teoria moderna que descreve a interação forte é a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), uma teoria de calibre não-abeliana renormalizável. Uma das características mais importantes dessa teoria é a liberdade assintótica. Isto é, a interação é fraca para momentos trocados elevados. Isso permite o tratamento perturbativo de processos a altas energias. Entretanto, para energias mais baixas, ou seja, maiores distâncias entre os quarks, a abordagem perturbativa falha.

No regime não-perturbativo, próprio para o tratamento de estados ligados de quarks como mésons e bárions quando os graus de liberdade internos são considerados, a QCD se torna uma teoria muito difícil de ser usada. Além disso, uma abordagem numérica adequada pela QCD na rede ainda esbarra em limitações de ordem computacional.

Frente a este cenário, o desenvolvimento de modelos inspirados na QCD para o tratamento simultâneo de hádrons e seus constituintes se mostra extremamente interessante. Dentre os métodos utilizados para esse fim temos os diagramas de troca de linhas de quark (*Quark Born Diagram Formalism*) [2]-[4], o formalismo de Fock-Tani [5] e o Método do Grupo Ressonante (*Ressonating Group Method*) [6].

Neste trabalho estudaremos espalhamento méson-bárion utilizando o método do grupo ressonante em segunda quantização para deduzir um potencial semi-relativístico para a interação spin-spin méson-bárion a partir de um potencial de troca de um glúon entre quarks. Esse potencial será então utilizado para calcular as seções de choque dos processos entre um méson η_c e um núcleon. Dizemos que esse potencial é semi-relativístico pois trataremos os quark *charm* e *anticharm*, contituíntes do méson η_c, de forma não relativística por serem muito mais pesados que os quark *up* e *down* do núcleon, enquanto que aos espinores dos quarks do núcleon serão adicionadas correções relativísticas, considerando ordens mais altas na expansão dos espinores em momento.

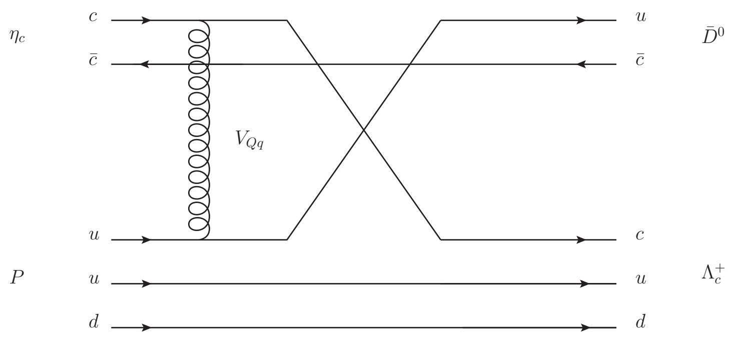

Fig. 1.1: *Espalhamento η_c-próton*

No Capítulo 2 veremos rapidamente alguns pontos da física da interação forte, começando pelo modelo de quarks e passando para a QCD. No Capítulo 3 abordaremos o experimento PANDA, em desenvolvimento em Darmstadt na Alemanha e uma das motivações deste trabalho e faremos uma exposição do RGM conforme utilizado por nós. Do RGM, resultará um potencial de interação méson-bárion V_{mb} em função de um potencial de interação entre quarks. No Capítulo 4 derivaremos o potencial de Fermi-Breit para a troca de um glúon entre quarks, primeiramente no regime não relativístico e, na seção seguinte, com a correção semi-relativística para a interação spin-spin. No Capítulo 5, utilizaremos o potencial entre quarks encontrado no capítulo anterior dentro potencial encontrado pelo formalismo do RGM, com o qual calcularemos as seções de choque propostas, na aproximação de Born. Os parâmetros do modelo no regime não relativístico serão ajustados de acordo com os resultados obtidos por *Hilbert et al. (2007)* [1] para que eles coincidam o melhor possível. Então as correções relativísticas são adicionadas e o resultado analisado.

Capítulo 2

Interação Nuclear Forte

De acordo com o Modelo Padrão, quaisquer processos da natureza podem ser descritos a partir da combinação de quatro interações fundamentais: gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte.

Neste trabalho estamos interessados nesta última. Muito mais forte que as outras, a interação nuclear forte é responsável pela a integridade do núcleo atômico, formação de bárions e mésons além do confinamento dos quarks no interior dos hádrons. A teoria moderna que a descreve é a Cromodinâmica Quântica, que é uma teoria quântica de campos não-abeliana que apresenta invariância de calibre.

A formulação como uma teoria de campos é recomendada pois permite a criação e aniquilação de partículas, que surgem como excitações dos campos. Invariância de calibre significa que a teoria é invariante frente a transformações de graus de liberdade internos. Assim, a imposição de uma simetria frente a uma tranformação de fase local leva à introdução de campos de calibre. Neste processo surgem termos no lagrangiano que acoplam os campos de matéria aos campos de calibre. Esses campos são nada mais que os campos de força das interações. Ou seja, a simetria do lagrangiano gera a dinâmica da teoria [7].

2.1 Modelo de Quarks

Quando se descobriu, na primeira metade do século XX, que o núcleo concentrava cargas positivas (prótons) e neutras (nêutrons), estava posto um problema: como o núcleo se mantinha coeso frente à repulsão eletromagnética? A resposta mais natural era a de que deveria haver uma outra interação, atrativa e de curto alcance, agindo dentro do núcleo, que por ser mais forte que a eletromagnética, foi nomeada "interação nuclear forte".

As partículas que interagiam via interação forte foram chamadas de hádrons. Além dos prótons e nêutrons, a lista de hádrons conhecidos foi estendida ao longo dos anos com a descoberta de uma variedade de mésons e bárions, respectivamente hádrons de spin inteiro e semi-inteiro. Tais descobertas se deram primeiramente através do estudo de raios cósmicos e posteriormente pela criação de feixes de altas energias em laboratório.

Em 1961, Gell-Mann propôs o Método do Octeto (*Eightfold Way*), no qual arranjava os hádrons conhecidos conforme sua carga Q e estranheza S em padrões geométricos. Isso sugeria a existência de uma partícula ainda não descoberta com $Q = -1$ e $S = -3$. Em 1964 tal partícula foi encontrada e denominada Ω^-.

Com o objetivo de explicar esse padrão apresentado pelos hádrons, Gell-Mann [8] e Zweig [9] propuseram independentemente em 1964 que os hadrons fossem compostos por férmions que vinham em três 'sabores': *up*, *down* e *strange*. Cada sabor de quark também possuiria um antiquark associado, de massa idêntica mas carga oposta. Neste modelo os bárions seriam formados por três quarks e os mésons por um quark e um antiquark. O próton, por exemplo, seria composto de dois quarks up e um down (uud) e o nêutron por dois quarks down e um up (ddu).

Devido à independência da interação forte frente ao sabor e às diferenças de massas dos quarks serem pequenas se comparadas com energia total dos hádrons, podemos considerar a existência de uma simetria de sabor aproximada no modelo de quarks. O grupo associado a tal simetria é o $SU(3)_f$, estando os quarks na representação fundamental ($\mathbf{3}$) e os antiquarks na representação conjugada ($\bar{\mathbf{3}}$). Assim, os padrões descobertos por Gell-Mann são os multipletos dos mésons ($\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$) e dos bárions ($\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$).

Porém, considerar hádrons como estados ligados de quarks levaria a dois problemas. Em primeiro lugar, bárions como o Ω^- (sss) não satisfariam o princípio da exclusão de Pauli, conforme imposto pela teoria quântica de campos. O segundo problema é que, se os quarks existissem, deveria ser relativamente simples de encontrá-los. Bastaria elevar a energia dos aceleradores e sua identificação se daria de forma clara pela sua carga fracionária, característica peculiar dos quarks. Entretanto, a subsequente busca se mostrou incapaz de encontrá-los.

Ambos problemas podem ser resolvidos com a introdução de um novo número quântico para os quarks, chamado de cor, que vem em três variedades: vermelho, verde e azul. Aos anti-quarks são associadas anti-cores: anti-vermelho (ciano), anti-verde (magenta) e anti-azul (amarelo) [10].

Assim, a função de onda total do hádron seria o produto da função de onda de spin-espaço-sabor ψ e da função de onda de cor $\mathcal{C}$, sendo a primeira simétrica frente à permutação de duas partículas e a segunda antissimétrica, de forma que a função de onda total $\Psi = \psi\mathcal{C}$ ficaria antissimétrica, o que resolve o primeiro problema.

O número quântico de cor resolve o segundo problema impondo-se o que se chama de confinamento da cor. De acordo com essa ideia, todas as partículas observáveis deveriam ser "brancas", ou seja, carregar em igual peso as três cores ou uma cor e sua correspondente anti-cor.

2.2 Cromodinâmica Quântica

O que vimos até aqui é o chamado modelo de quarks da física de partículas. Entretanto, acredita-se que todas as interações fundamentais podem ser descritas a partir de teorias quânticas de campos de calibre. Uma simetria de calibre de cor $SU(3)_c$ nos permite isso [11].

A teoria resultante que descreve a interação forte é Cromodinâmica Quântica. Ela é formulada a partir de uma densidade lagrangeana $\mathscr{L}$ invariante a transformações locais desse grupo e que deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0\,. \tag{2.1}$$

Como queremos uma teoria que descreva quarks, partimos de uma densidade lagrangeana de férmions livres

$$\mathscr{L}(x) = \sum_f \bar{\Psi}^f(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\Psi^f(x) \tag{2.2}$$

onde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, γ^μ são as matrizes de Dirac, apresentadas no Apêndice F e m_f a massa do férmion de sabor f e

$$\Psi^f(x) = \begin{pmatrix} \psi_r^f(x) \\ \psi_g^f(x) \\ \psi_b^f(x) \end{pmatrix} , \tag{2.3}$$

onde os campos de Dirac $\psi^f_{r,g,b}$ representam quarks de sabor f e cor vermelha (r), verde (g) ou azul (b).

Impomos sobre a teoria uma invariância frente a uma transformação local de calibre $SU(3)_c$

$$\begin{aligned} \Psi^f(x) \quad &\rightarrow \quad \Psi^{f\prime}(x) = e^{[ig_s \lambda_a \omega_a(x)/2]}\Psi^f(x) \\ \bar{\Psi}^f(x) \quad &\rightarrow \quad \bar{\Psi}^{f\prime}(x) = \bar{\Psi}^f(x) e^{[-ig_s \lambda_a \omega_a(x)/2]} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde ω_a é um parâmetro dependente do ponto no espaço-tempo e λ_a são os geradores do $SU(3)_c$, apresentados no Apêndice F, que satisfazem a seguinte relação de comutação

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo, cujos termos não nulos são dados por

$$\begin{gathered} f_{123} = 1 \quad ; \quad f_{147} = 1/2 \quad ; \quad f_{156} = -1/2 \quad ; \quad f_{246} = 1/2 \quad ; \quad f_{257} = 1/2 \\ f_{345} = 1/2 \quad ; \quad f_{367} = -1/2 \quad ; \quad f_{458} = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad f_{678} = \sqrt{3}/2 \end{gathered}$$

e são antissimétricos frente à permutação de quaisquer dois índices.

Por conveniência, utilizaremos a versão infinitesimal da transformação de calibre, dada por

$$\begin{aligned} \Psi^{f\prime}(x) &= (1 + ig_s\lambda_a\eta_a(x)/2)\Psi^f(x) \\ \bar{\Psi}^{f\prime}(x) &= \bar{\Psi}^f(x)(1 - ig_s\lambda_a\eta_a(x)/2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde η_a é um parâmetro infinitesimal.

Frente à (2.5), o lagrangiano se tranforma como

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}^{'} = \mathscr{L} - \frac{1}{2}g_s\bar{\Psi}_f\lambda_a\left(\gamma^\mu\partial_\mu\eta_a(x)\right)\Psi_f\,. \tag{2.6}$$

Logo, o lagrangiano em (2.2) não é invariante à transformação (2.5).

Para manter a invariância de calibre devemos substituir a derivada ordinária $\partial_\mu\Psi^f$ pela derivada covariante $D_\mu\Psi^f$, que queremos que se tranforme da mesma forma que Ψ. A derivada covariante que desejamos é definida como

$$D^\mu\Psi^f(x) = [\partial^\mu + ig_s\lambda_a A_a^\mu(x)/2]\Psi^f(x) \tag{2.7}$$

onde introduzimos os oito campos de calibre A_a^μ que devem se tranformar da seguinte maneira

$$A_a^\mu(x) \to A_a^{\mu\prime}(x) \equiv A_a^\mu(x) - \partial^\mu\eta_a(x) - g_s f_{abc}\eta_b(x)A_c^\mu(x)\,. \tag{2.8}$$

Assim a derivada covariante se transforma como desejado, isto é,

$$D^{\mu\prime}\Psi^{f\prime} = (1 + ig_s\lambda_a\eta_a(x)/2)D^\mu\Psi^f \tag{2.9}$$

e o lagrangiano fica invariante ao $SU(3)_c$. Quando quantizados, os campos de calibre A_a^μ introduzidos darão origem aos glúons, os bósons mediadores da interação nuclear forte.

Outros termos invariantes de Poincaré e ao $SU(3)_c$ podem ser adicionados ao lagrangiano. Por exemplo, se definirmos

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g_s f_{abc}A_b^\mu A_c^\nu\,, \tag{2.10}$$

o lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_G &= G_{a\mu\nu}(x)G_a^{\mu\nu}(x) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu})(\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu}) + g_s f_{abc}A_{a\mu}(x)A_{b\nu}(x)\partial^\mu A_c^\nu(x) \\ &\quad -\frac{1}{4}g_s^2 f_{abc}f_{alm}A_b^\mu(x)A_c^\nu(x)A_{l\mu}(x)A_{m\nu}(x)\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

que descreve a contribuição puramente gluônica, é invariante.

Em contraste com a eletrodinâmica quântica, estes campos interagem entre si, como indicam o segundo e terceiro termos à direita da igualdade em (2.11). O segundo representa um vértice de três glúons e o quarto termo representa um vértice de quatro glúons. A existência destes termos tem como origem a natureza não abeliana do grupo de simetria, que tem como consequência os bósons de calibre carregarem cor [12].

A QCD descreve um cenário mais rico do que o modelo de quarks. Além de mésons e bárions, ela prevê a existência de partículas em que graus de liberdade de glúons aparecem explicitamente, como glueballs, que são sistemas compostos apenas por glúons, e híbridos, que são estados ligados de um par quark-antiquark e um glúon.

Não procederemos à quantização da QCD. Antes de avançarmos para o próximo capítulo veremos uma das consequências da simetria do lagrangiano.

2.2.1 Transformação Global e Conservação de Carga

O Teorema de Noether afirma que se o lagrangiano for invariante a uma transformação infinitesimal

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}^{'} - \mathscr{L} = 0 \tag{2.12}$$

implica na conservação de corrente

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \tag{2.13}$$

onde

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta\psi\,. \tag{2.14}$$

No caso específico da transformação (2.5) em que $\eta_a(x) = \eta_a$ é constante, obtemos a corrente convervada

$$\mathcal{J}^{\mu,a}(x) = \bar{\Psi}^f(x)\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\Psi^f(x)\,. \tag{2.15}$$

Se tomarmos a componente temporal dessa corrente e integrarmos em todo o espaço, obtemos

$$F^a \equiv \int d^3x \mathcal{J}^{0,a}(x) = \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x)\frac{\lambda^a}{2}\Psi^f(x) \tag{2.16}$$

chamado de operador de cor.

Capítulo 3

A Física de Hádrons e o RGM

Neste capítulo começaremos abordando o charmônio, sua descoberta e principais características. Descreveremos então o PANDA, experimento em desenvolvimento que buscará, dentre outras metas, fazer medidas de precisão do charmônio. Passaremos então ao Método do Grupo Ressonante, através do qual derivaremos um potencial de interação entre um méson e um bárion levando em conta sua estrutura interna.

3.1 Charmônio

Até o início da década de 70 apenas três sabores de quarks eram conhecidos: *up*, *down* e *strange*. Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani argumentaram, baseados no formalismo de teorias de calibre da interação eletrofraca, sustentando a existência de um quarto quark, o *charm*, cuja massa deveria ficar na faixa de 3-4 GeV (mecanismo GIM). Se a existência deste quark fosse conforme o previsto, ele deveria formar um estado ligado não-relativístico $c\bar{c}$, chamado de charmônio, conforme sugerido por Appelquist e Politzer [13].

Então, em novembro de 1974 foi anunciada a descoberta do J/ψ, feita independentemente por dois grupos. Um no BNL (*Brookhaven National Laboratory*), liderado por Samuel Ting, onde foi nomeada J e o outro, por meios diferentes, no SLAC (*Stanford Linear Accelarator Center*), liderado por Burton Richter, onde foi nomeada ψ, tendo a quase simultânea descoberta motivado a denominação da partícula por duas letras. Mais tarde ela foi identificada como composta por $c\bar{c}$.

O quark *charm* apresenta spin 1/2, carga elétrica $Q = +2/3$ e massa de aproximadamente 1.27 GeV. Sua descoberta abriu portas para a busca de hádrons ainda desconhecidos pois novas combinações de quarks eram em tese possíveis, o que foi eventualmente verificado.

Com a confirmação da existência do charm, foi postulado um novo número quântico aditivo, o charme C, com $C = 1$ para o quark charm, $C = -1$ para o anti-charm e $C = 0$ para todas as outras partículas elementares. Se diz que um hádron tem charme aberto se $C \neq 0$ e charme fechado se

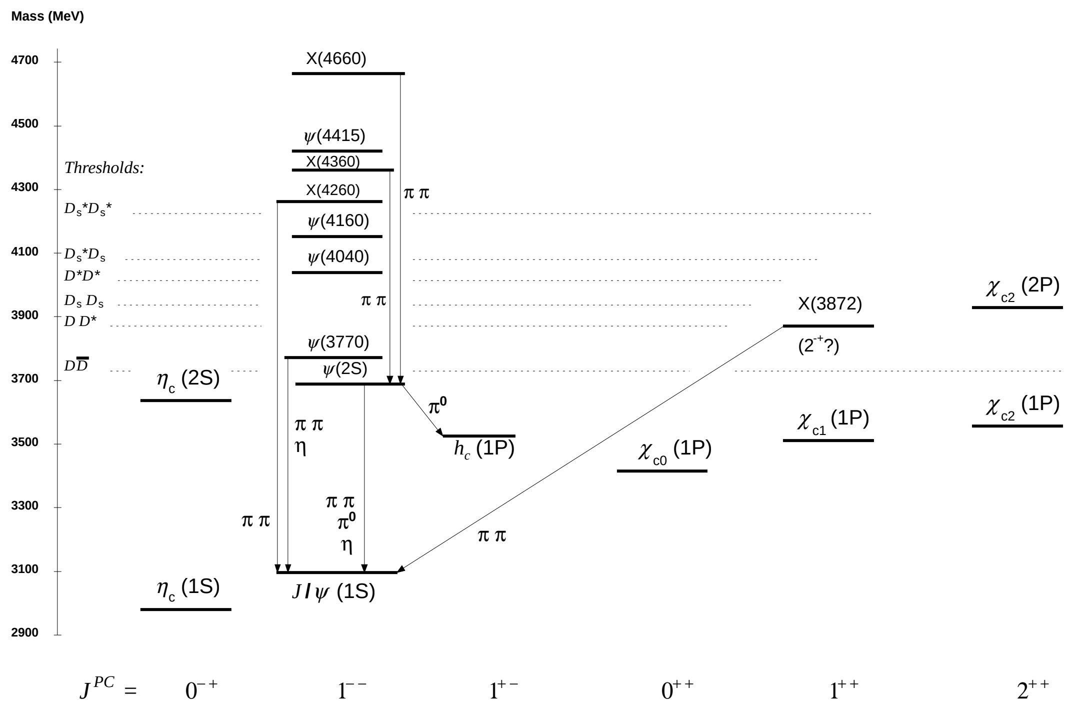

Fig. 3.1: *Espectro do charmônio. Extraído do* Review of Particle Physics - PDG *[15]*

$C = 0$. Em particular, o charmônio tem charme fechado.

Ressalta-se que o J/ψ não é o estado fundamental do charmônio, mas o sim o seu primeiro estado excitado. Como pode ser visto na Fig. 3.1, o estado fundamental é chamado η_c, com massa de 2,98 GeV e spin nulo, enquanto que o J/ψ apresenta massa de 3,09 GeV e spin $S = 1$. É importante notar que apesar de tanto o J/ψ quanto o η_c serem compostos por um par $c\bar{c}$, eles tendem a ser considerados partículas distintas, e por isso, recebem nomes distintos.

Por fim, a descoberta do J/ψ rendeu a Richter e Ting o prêmio Nobel de física de 1976.

3.2 FAIR-PANDA

A principal motivação deste estudo é o estabelecimento da colaboração PANDA (*AntiProton Annihilations at Darmstadt*), um experimento em desenvolvimento no FAIR (*Facility for Antiproton and Ions Research*), uma instalação internacional no GSI dedicado ao estudo com antiprótons e íons em Darmstadt no estado de Hesse, na Alemanha. Espera-se que os primeiros feixes sejam gerados em 2018 [14].

Essa colaboração se propõe ao estudo de questões fundamentais na física nuclear e de hádrons na interação de antiprotons com núcleons e núcleos, utilizando o detector universal PANDA, que será contruído no HESR (*High Energy Storage Ring*) no FAIR, com o GSI servindo de pré-acelerador e injetor para o novo complexo. O experimento utilizará feixes de antiprótons de qualidade e intensidade sem precedentes na faixa de energia de 1 - 15 GeV. Vários alvos são considerados para diferentes programas no PANDA, mas a maioria das medidas requerirá um alvo de prótons.

Experimentos anteriores no LEAR/CERN demonstraram que partículas com graus de liberdade gluônicos são abundantemente produzidas em aniquilações antipróton-próton no setor de quarks leves, permitindo estudos espectroscópicos com precisão e estatística inéditos. Além disso, feixes de antiprótons na faixa de energia do experimento permitirão a produção de quarks *strange*, *charm* e gluons.

O PANDA, por sua vez, é motivado pelos principais desafios apresentados pela QCD na compreensão da interação forte, especialmente no regime não-perturbativo da teoria, no qual ela apresenta alta complexidade devido aos glúons carregarem cor. Seu objetivo é atingir uma espectroscopia de precisão abrangente do sistema charmônio para um estudo detalhado, particularmente da parte de confinamento do potencial QCD.

Dentre outros, são previstos os seguintes experimentos: medidas de precisão das massas, largura e canais de decaimento de todos todos os estados de charmônio; firme estabelecimento de excitações gluônicas (glueballs e híbridos charmosos), previstos pela QCD na faixa de massa do charmônio (3 - 5 GeV) onde é esperado que ele esteja menos misturado com uma variedade de mesons normais, busca por modificações nas propriedades de mesons em meio nuclear e sua possível relação com a restauração parcial da simetria quiral para quarks leves.

Para realizar seus estudos será utilizado o detector PANDA, colocado dentro do anel de armazenamento. A versatilidade do detector permitirá a detecção de modos de decaimentos hadrônicos e eletromagnéticos e a quase total cobertura do ângulo sólido.

3.3 Potencial Méson-Bárion no RGM

Devido a dificuldades em se aplicar a QCD no regime não-perturbativo, que domina a formação de estados ligados de quarks, e à limitação da capacidade computacional disponível para um tratamento ideal da QCD na rede, modelos efetivos de quarks inspirados na QCD assumem um papel importante no tratamento da física de hádrons quando se deseja levar em consideração graus de liberdade internos.

No mesmo sentido, desejamos estudar o espalhamento η_c-núcleon em determinados canais, que são partículas com estrutura interna. Para tanto, utilizaremos o Método do Grupo Ressonante (RGM), um método originalmente proposto por Wheeler em 1937 no contexto da física nuclear [16]. Ele visa tratar problemas envolvendo simultaneamente partículas compostas e seus constituintes e se baseia no ponto de vista de que os núcleons passam parte do tempo em várias subestruturas ou *clusters*. De acordo com a interpretação de Wildermuth e Kanellopoulos, esses clusters se formam pela manifestação de correlações de longa distância no núcleo devido à natureza, em média, atrativa das forças nucleares [17].

Neste trabalho, utilizaremos o RGM em uma linguagem de segunda quantização no contexto de física de hádrons. Aqui, méson e bárion são vistos como *clusters* que interagem através de um potencial entre seus quarks constituintes.

Nesse formalismo, o nosso sistema no estado Λ composto por um méson e um bárion é dado por

$$|\Lambda\rangle = \varphi_{\Lambda}^{\alpha\beta} M_{\alpha}^{\dagger} B_{\beta}^{\dagger} |0\rangle \tag{3.1}$$

onde $|0\,\rangle$ é o estado de vácuo do modelo, $M_{\alpha}^{\dagger}$ é o operador de criação de um méson no estado α e $B_{\beta}^{\dagger}$ é o operador de criação de um bárion no estado β e $\varphi_{\Lambda}^{\alpha\beta}$ é a função de onda *ansatz* para o estado de um méson e um bárion que descreve o movimento de ambos. Em (3.1) está implícita a soma sobre os índice α e β.

O vácuo do modelo é definido por

$$q_{fsc}(\vec{p})|0\rangle = \bar{q}_{f's'c'}(\vec{p}\,')|0\rangle = 0\,; \tag{3.2}$$

onde q e $\bar{q}$ são os operadores de aniquilação de um quark e de um antiquark respectivamente e que satisfazem as seguintes operações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{fsc}(\vec{p}), q_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = \{q_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = \{q_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}^{\dagger}_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = 0 \\ \{q_{fsc}(\vec{p}), q^{\dagger}_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}^{\dagger}_{f's'c'}(\vec{p}\,')\} = \delta_{ff'}\delta_{ss'}\delta_{cc'}\delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os índices f, s, c e $\vec{p}$ denotam respectivamente sabor, spin, cor e momento do quark.

Quando conveniente, como nesta seção, utilizaremos uma notação compacta para os índices

$$q_{fsc}(\vec{p}) \to q_{\mu} \quad ; \quad \mu = \{\vec{p}, f, s, c\}\ .$$

Queremos descrever os hádrons em termos dos seus constituintes. Assim, escrevemos os operadores $M_{\alpha}^{\dagger}$ e $B_{\beta}^{\dagger}$ em termos de operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks e analisamos as suas propriedades.

Começamos pelo méson. Escrevemos seu operador de criação da seguinte forma

$$M_{\alpha}^{\dagger} = \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}\ , \tag{3.4}$$

onde

$$\Phi_{\alpha}^{\mu\nu} = \delta(\vec{p}_{\alpha} - \vec{p}_{\mu} - \vec{p}_{\nu})\ \frac{\delta^{c_{\mu}c_{\nu}}}{\sqrt{3}}\ \xi_{\alpha}^{f_{\mu}\,f_{\nu}}\ \varphi(\vec{p}_{\mu}, \vec{p}_{\nu}) \tag{3.5}$$

é a função de onda do estado ligado do méson, cuja estrutura é detalhada no Apêndice B.

É conveniente trabalhar com funções de onda ortonormalizadas:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle 0|M_{\alpha} M_{\beta}^{\dagger}|0\rangle = \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu}\Phi_{\beta}^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}\ . \tag{3.6}$$

Utilizando esta relação de ortonormalização, juntamente com as relações de anticomutação (3.3), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \qquad , \qquad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} \ , \tag{3.7}$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\mu\sigma}\bar{q}_\sigma^\dagger\bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\rho\nu}q_\rho^\dagger q_\mu \ . \tag{3.8}$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0 \ , \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu}\bar{q}_\nu^\dagger \ , \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu}q_\mu^\dagger \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ apresentado na Eq. (3.8) e que aparece na relação não-canônica (3.7) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons e é a origem da alta complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados. Isso ocorre pois a presença deste termo impede o uso das técnicas usuais de teoria de campos, tais como funções de Green, teorema de Wick, entre outras, uma vez que elas aplicam-se apenas a operadores que satisfazem relações de comutação ou anticomutação canônicas.

Analogamente, o fato dos comutadores $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ e $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$ não se anularem expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson, M_α e $M_\alpha^\dagger$, não são variáveis dinâmicas convenientes.

Seguindo do mesmo modo, a forma explícita do operador de criação de bárions $B_\alpha^\dagger$ é dada por

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{6}}\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \tag{3.10}$$

onde

$$\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\varepsilon^{c_1c_2c_3}}{\sqrt{6}}\zeta_\alpha^{f_1f_2f_3}\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} \tag{3.11}$$

é a função de onda do estado ligado do bárion cuja estrutura, assim como no caso do méson, é detalhada no Apêndice B.

A normalização da função de onda do bárion é dada por

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle 0|B_\alpha B_\beta^\dagger|0\rangle = \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\alpha\beta} \ . \tag{3.12}$$

De (3.3) pode-se mostrar que o operador B_α obedece as seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{B_\alpha, B_\beta\} &= 0 \\ \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$D_{\alpha\beta} = 3\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\nu_3}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\nu_3}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3} \quad . \tag{3.14}$$

Assim como no caso do méson a presença do operador $D_{\alpha\beta}$ na relação de anticomutação revela a natureza composta dos operadores de bárions. Outras relações importantes são as seguintes

$$\begin{aligned} \{q_\mu, B_\alpha\} &= 0 \\ \{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Em $\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\}$ também vemos a interferência da estrutura interna do bárion, revelando a falta de independência cinemática entre o operador de bárion e o de quarks.

Voltando para o estado méson-bárion $|\Lambda\,\rangle$ (3.1), a sua condição de normalização é dada por

$$\langle\Lambda'|\Lambda\rangle = \varphi_{\Lambda'}^{*\alpha\beta}\,N(\alpha\beta;\gamma\delta)\,\varphi_{\Lambda}^{\gamma\delta} \ , \tag{3.16}$$

onde $N(\alpha\beta;\gamma\delta)$ é o "kernel de normalização" que pode ser avaliado, sabendo que

$$\langle\,0|B_\beta M_\alpha M_\gamma^\dagger B_\delta^\dagger|0\,\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'} - 3\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\,\Psi_\beta^{*\rho\mu_2\mu_3}\,\Phi_\gamma^{\rho\nu}\,\Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \tag{3.17}$$

Assim,

$$N(\alpha\beta;\gamma\delta) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - N_E(\alpha\beta;\gamma\delta) \ , \tag{3.18}$$

onde

$$N_E(\alpha\beta;\gamma\delta) = 3\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\,\Psi_\beta^{*\rho\mu_2\mu_3}\,\Phi_\gamma^{\rho\nu}\,\Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3} \tag{3.19}$$

é o kernel de troca. A equação de movimento para $\varphi_\Lambda^{\alpha\beta}$ é obtida por meio do princípio variacional:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{\Lambda'}^{*}}\,\langle\,\Lambda'|(H_{\rm hip} - E_\Lambda)|\Lambda\,\rangle = 0 \ . \tag{3.20}$$

onde $H_{\rm hip}$ é o Hamiltoniano hiperfino, isto é,

$$\begin{aligned} H_{\rm hip} \;=\;& T\,(\mu)\,q_\mu^\dagger q_\mu + T\,(\nu)\,\bar{q}_\nu^\dagger\bar{q}_\nu + \frac{1}{2}V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\,q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ &+\frac{1}{2}V_{\bar{q}\bar{q}}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\,\bar{q}_\mu^\dagger\bar{q}_\nu^\dagger\bar{q}_\rho\bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\,q_\mu^\dagger\bar{q}_\nu^\dagger\bar{q}_\rho q_\sigma \ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ressaltamos que a escolha desta forma para $H_{\rm hip}$ não é arbitrária. Ela será devidamente justificada no capítulo seguinte, onde o potencial entre quarks para troca de um gluon será calculado.

Para calcular $\langle \Lambda' | H_{\rm hip} | \Lambda \rangle$ será necessário avaliar os seguintes termos

$$
\begin{array}{lll}
(a) & \langle \Lambda' | q^\dagger_\mu q_\mu | \Lambda \rangle & \\
(b) & \langle \Lambda' | \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\nu | \Lambda \rangle & \\
(c) & \langle \Lambda' | q^\dagger_\mu q^\dagger_\nu q_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle & \\
(d) & \langle \Lambda' | \bar{q}^\dagger_\mu \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma | \Lambda \rangle & \\
(e) & \langle \Lambda' | q^\dagger_\mu \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle \, . & \qquad (3.22)
\end{array}
$$

Para o cálculo do primeiro termo (a) é útil a seguinte identidade que pode ser demonstrada usando (3.9) e (3.15)

$$q_\mu \, M^\dagger_\gamma \, B^\dagger_\delta |0\rangle = \Phi^{\mu\nu}_\gamma \, \bar{q}^\dagger_\nu \, B^\dagger_\delta |0\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi^{\mu\mu_2\mu_3}_\delta q^\dagger_{\mu_2} q^\dagger_{\mu_3} M^\dagger_\gamma \, |0\rangle \qquad (3.23)$$

e da mesma forma

$$\langle 0 | \, B_\beta M_\alpha \, q^\dagger_\mu \; = \Phi^{*\mu\nu'}_\alpha \, \langle 0 | \, B_\beta \, \bar{q}'_\nu \, + \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi^{*\mu\mu'_2\mu'_3}_\beta \, \langle 0 | \, M_\alpha \, q^\dagger_{\mu'_3} \, q^\dagger_{\mu'_2} \, . \qquad (3.24)$$

Juntando (3.23) e (3.24) podemos obter

$$
\begin{aligned}
\langle \Lambda' | q^\dagger_\mu q_\mu | \Lambda \rangle \; &= \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \langle 0 | \, B_\beta M_\alpha \, q^\dagger_\mu \, q_\mu \, M^\dagger_\gamma \, B^\dagger_\delta |0\rangle \\
&= \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \Big[\delta_{\beta\delta} \, \Phi^{*\mu\tau}_\alpha \Phi^{\mu\tau}_\gamma + 3 \, \delta_{\alpha\gamma} \, \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Psi^{\mu\mu_2\mu_3}_\delta - 3 \, \Phi^{*\mu\tau}_\alpha \Psi^{*\mu_1\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_1\tau}_\gamma \Psi^{\mu\mu_2\mu_3}_\delta \\
& \quad -3 \, \Phi^{*\mu_1\tau}_\alpha \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\mu\tau}_\gamma \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\delta + 6 \, \Phi^{*\mu_1\tau}_\alpha \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_2\tau}_\gamma \Psi^{\mu_1\mu\mu_3}_\delta \; \Big] \, . \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

De maneira similar os outros termos de (3.22) ficam

$$
\begin{aligned}
\langle \Lambda' | \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\nu | \Lambda \rangle \; &= \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \Big[\delta_{\beta\delta} \, \Phi^{*\tau\nu}_\alpha \Phi^{\tau\nu}_\gamma - 3 \, \Phi^{*\mu_1\nu}_\alpha \Psi^{*\tau\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\tau\nu}_\gamma \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\delta \Big] \\
\langle \Lambda' | q^\dagger_\mu q^\dagger_\nu q_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle \; &= \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \Big[6 \, \delta_{\alpha\gamma} \Psi^{*\mu\nu\mu_3}_\beta \Psi^{\sigma\rho\mu_3}_\delta - 6 \, \Phi^{*\mu_1\tau}_\alpha \Psi^{*\mu\nu\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_3\tau}_\gamma \Psi^{\mu_1\sigma\rho}_\delta \\
& \quad -12 \, \Phi^{*\mu\tau}_\alpha \Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_1\tau}_\gamma \Psi^{\sigma\rho\mu_3}_\delta + 12 \, \Phi^{*\mu_1\tau}_\alpha \Psi^{*\mu\nu\mu_3}_\beta \Phi^{\rho\tau}_\gamma \Psi^{\mu_1\sigma\mu_3}_\delta \\
& \quad +6 \, \Phi^{*\nu\tau}_\alpha \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\rho\tau}_\gamma \Psi^{\sigma\mu_2\mu_3}_\delta - 6 \, \Phi^{*\mu\tau}_\alpha \Psi^{*\nu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\rho\tau}_\gamma \Psi^{\sigma\mu_2\mu_3}_\delta \; \Big] \\
\langle \Lambda' | \bar{q}^\dagger_\mu \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma | \Lambda \rangle \; &= \; 0 \\
\langle \Lambda' | q^\dagger_\mu \bar{q}^\dagger_\nu \bar{q}_\rho q_\sigma | \Lambda \rangle \; &= \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \Big[\; \delta_{\beta\delta} \, \Phi^{*\mu\nu}_\alpha \Phi^{\sigma\rho}_\gamma - 3 \, \Phi^{*\mu_1\nu}_\alpha \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\sigma\rho}_\gamma \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\delta \\
& \quad -3 \, \Phi^{*\mu\nu}_\alpha \Psi^{*\mu_1\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_1\rho}_\gamma \Psi^{\sigma\mu_2\mu_3}_\delta + 3 \, \Phi^{*\mu_1\nu}_\alpha \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_1\rho}_\gamma \Psi^{\sigma\mu_2\mu_3}_\delta \\
& \quad - 6 \, \Phi^{*\tau\nu}_\alpha \Psi^{*\mu_1\mu\mu_3}_\beta \Phi^{\mu_1\rho}_\gamma \Psi^{\tau\sigma\mu_3}_\delta \Big] \, . \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

De (3.25) e (3.26), finalmente obtemos $\langle \Lambda' | H_{\rm hip} | \Lambda \rangle$:

$$\langle \Lambda' | H_{\rm hip} | \Lambda \rangle \; = \; \varphi^{*\beta\alpha}_{\Lambda'} \, \varphi^{\gamma\delta}_\Lambda \, \Big[T(\mu) \, \delta_{\beta\delta} \, \Phi^{*\mu\tau}_\alpha \Phi^{\mu\tau}_\gamma + 3 \, T(\mu) \, \delta_{\alpha\gamma} \, \Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_\beta \Psi^{\mu\mu_2\mu_3}_\delta$$

$$
\begin{aligned}
&-3\,T(\mu)\,\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\tau}\Psi_\delta^{\mu\mu_2\mu_3}\\
&-3\,T(\mu)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\tau}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu\tau}\Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3}\\
&+6\,T(\mu)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\tau}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_2\tau}\Psi_\delta^{\mu_1\mu\mu_3}\\
&+T(\nu)\,\delta_{\beta\delta}\,\Phi_\alpha^{*\tau\nu}\Phi_\gamma^{\tau\nu}\\
&-3\,T(\nu)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\tau\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\tau\nu}\Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3}\\
&+3V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\delta_{\alpha\gamma}\,\Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3}\Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3}\\
&-3V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu_1\tau}\Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_3\tau}\Psi_\delta^{\mu_1\sigma\rho}\\
&-6V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\tau}\Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3}\\
&+6V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu_1\tau}\Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\tau}\Psi_\delta^{\mu_1\sigma\mu_3}\\
&+3V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\nu\tau}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\tau}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\\
&-3V_{qq}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\tau}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\\
&+V_{q\bar q}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\,\delta_{\beta\delta}\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\gamma^{\sigma\rho}\\
&-3V_{q\bar q}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\sigma\rho}\Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3}\\
&-3V_{q\bar q}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\\
&+3V_{q\bar q}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\\
&\left.-\,6V_{q\bar q}\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\Phi_\alpha^{*\tau\nu}\Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\tau\sigma\mu_3}\right]
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Reescrevemos então (3.27) da seguinte forma

$$
\langle\,\Lambda'|H_{\text{hip}}|\Lambda\,\rangle \;=\; \varphi_{\Lambda'}^{*\beta\alpha}\,\varphi_{\Lambda}^{\gamma\delta}\,\Big[\;V^{dir}(\alpha\beta;\gamma\delta)+V^{exc}(\alpha\beta;\gamma\delta)+V^{intra}(\alpha\beta;\gamma\delta)\Big]
\tag{3.28}
$$

onde

$$
V^{dir}(\alpha\beta;\gamma\delta) \;=\; -3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\nu\nu_2}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\nu_2}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} - 3V_{q\bar q}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\,,
\tag{3.29}
$$

corresponde à interação méson-bárion com troca de um glúon sem troca de quarks (termo direto).

$$
\begin{aligned}
V^{exc}(\alpha\beta;\gamma\delta) \;=\; &-3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu_2}\Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\nu_2}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} - 3V_{q\bar q}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\sigma\rho}\Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3}\\
&-3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu_2}\Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2}\Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} - 6V_{q\bar q}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\nu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}\,,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

corresponde à interação méson-bárion com troca de um glúon e com troca de quarks (termo de troca ou *exchange*). O último termo V^{intra} está relacionado com troca de um glúon entre constituíntes de um mesmo hádron e fica definido por

$$
V^{intra}(\alpha\beta;\gamma\delta) \;=\; H_M\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\delta_{\beta\delta}\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\gamma^{\sigma\rho} + H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho)\;\delta_{\alpha\gamma}\,\Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3}\Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3}
$$

$$
\begin{aligned}
& -3\, H_M\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Phi^{*\mu_1\nu}_{\alpha}\Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_{\beta}\Phi^{\sigma\rho}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\delta} \\
& -H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Phi^{*\mu_1\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_3\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\sigma\rho}_{\delta} \\
& -H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Phi^{*\mu\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\tau}_{\gamma}\Psi^{\sigma\rho\mu_3}_{\delta} \\
& +H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Phi^{*\mu_1\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\rho\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\sigma\mu_3}_{\delta}\,. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Os Hamiltonianos H_M e H_B em (3.31) são definidos como

$$
\begin{aligned}
H_M\,(\mu\nu;\sigma\rho) &= T(\mu)\,\delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\nu\rho} + T(\nu)\,\delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\nu\rho} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \\
H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho) &= 3\,\left[\,T(\mu)\,\delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\nu\rho} + V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\right] \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

e satisfazem equações de Schrödinger de estado ligado

$$
\begin{aligned}
H_M\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Phi^{\sigma\rho}_{\alpha} &= \epsilon^M_{[\alpha]}\ \Phi^{\mu\nu}_{[\alpha]} \\
H_B\,(\mu\nu;\sigma\rho)\ \Psi^{\sigma\rho\tau}_{\alpha} &= \epsilon^B_{[\alpha]}\ \Psi^{\mu\nu\tau}_{[\alpha]} \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

onde o índice entre colchetes $[\alpha]$ denota que não há soma sobre estes índices repetidos. Agora, usando (3.33) na definição do V^{intra} obtemos

$$
\begin{aligned}
V^{intra}(\alpha\beta;\gamma\delta) &= \epsilon^M_{[\gamma]}\,\delta_{\beta\delta}\,\Phi^{*\mu\nu}_{\alpha}\Phi^{\mu\nu}_{\gamma} + \epsilon^B_{[\delta]}\,\delta_{\alpha\gamma}\,\Psi^{*\mu\nu\mu_3}_{\beta}\Psi^{\mu\nu\mu_3}_{\delta} - 3\,\epsilon^M_{[\gamma]}\,\Phi^{*\mu_1\nu}_{\alpha}\Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu\nu}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\delta} \\
&\quad -\epsilon^B_{[\delta]}\,\Phi^{*\mu_1\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_3\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\mu\nu}_{\delta} - \epsilon^B_{[\delta]}\ \Phi^{*\mu\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu\nu\mu_3}_{\delta} \\
&\quad -\epsilon^B_{[\delta]}\ \Phi^{*\mu_1\tau}_{\alpha}\Psi^{*\rho\sigma\mu_3}_{\beta}\Phi^{\rho\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\sigma\mu_3}_{\delta}\,. \\
&= \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\delta_{\beta\delta}\,\delta_{\alpha\gamma} - 3\,\left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ \Phi^{*\mu\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu\nu\mu_3}_{\delta} \\
&= \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ \left[\delta_{\beta\delta}\,\delta_{\alpha\gamma} - 3\,\Phi^{*\mu\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu\nu\mu_3}_{\delta}\right] \\
&= \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ N(\alpha\beta;\gamma\delta)\,. \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

A equação do RGM (3.20) fica

$$
\left[\ V^{dir}(\alpha\beta;\gamma\delta) + V^{exc}(\alpha\beta;\gamma\delta) + \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]} - E_\Lambda\right)\ N(\alpha\beta;\gamma\delta)\right]\varphi^{\gamma\delta}_{\Lambda} = 0\,. \qquad (3.35)
$$

Podemos escrever (3.35) de uma forma alternativa separando V^{intra} em dois termos

$$
\begin{aligned}
V^{intra}(\alpha\beta;\gamma\delta) &= \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ \left[\delta_{\beta\delta}\,\delta_{\alpha\gamma} - 3\,\Phi^{*\mu\tau}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\tau}_{\gamma}\Psi^{\mu\nu\mu_3}_{\delta}\right] \\
&= T_{RGM} + h^{intra} \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

onde

$$
T_{RGM} = \left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ \delta_{\beta\delta}\,\delta_{\alpha\gamma} \qquad ; \qquad h^{intra} = -\left(\epsilon^M_{[\gamma]} + \epsilon^B_{[\delta]}\right)\ N_E(\gamma\delta;\alpha\beta)\,. \qquad (3.37)
$$

Assim, a equação (3.35) fica

$$
\left[H_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) - E_\Lambda N(\alpha\beta;\gamma\delta)\right]\varphi^{\gamma\delta}_{\Lambda} = 0\ , \qquad (3.38)
$$

onde

$$H_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) = T_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) + V_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta), \tag{3.39}$$

e

$$V_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) = V^{dir}(\alpha\beta;\gamma\delta) + V^{exc}(\alpha\beta;\gamma\delta)\,. \tag{3.40}$$

Os termos diretos V^{dir} são nulos por representarem contribuições pela troca de um glúon entre hádrons, sem, no entanto, haver troca de quarks o que levaria a hádrons não singletos de cor. Assim, o termo V_{RGM} se reduz ao V^{exc}. No nosso caso particular, chamaremos esse potencial de "potencial méson-bárion" V_{mb}:

$$V_{\text{mb}}(\alpha\beta;\delta\gamma) = V^{exc}(\alpha\beta;\delta\gamma) = \sum_{i=1}^{4} V_i(\alpha\beta;\delta\gamma) \tag{3.41}$$

onde

$$\begin{aligned}
V_1(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu_2}\Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\rho\nu_2}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}\\
V_2(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_\gamma^{\sigma\rho}\Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3}\\
V_3(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\mu\nu_2}\Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2}\Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3}\\
V_4(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi_\alpha^{*\nu_1\nu}\Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3}\Phi_\gamma^{\mu_1\rho}\Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}\,.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Estes termos de V_{mb} podem ser representados diagramaticamente conforme a figura (3.2)

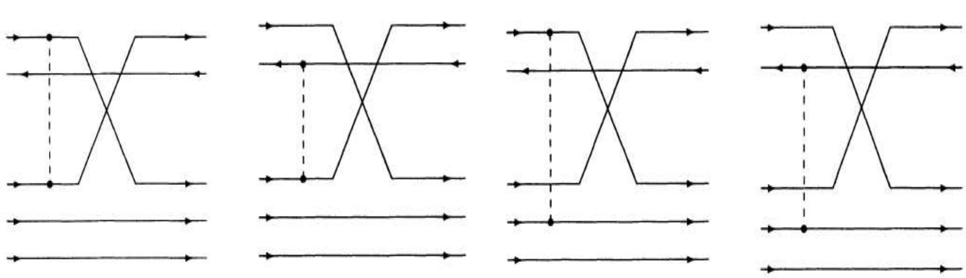

Fig. 3.2: *Diagramas correspondendo a V_1, V_2, V_3 e V_4*

O Hamiltoniano do RGM pode ser "renormalizado" :

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta;\alpha'\beta')H_{RGM}(\alpha'\beta';\gamma'\delta')N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta';\gamma\delta), \tag{3.43}$$

de modo que a equação de movimento RGM "renormalizada"pode ser escrita como:

$$\left[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) - E_\Lambda\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\right]\bar{\varphi}_\Lambda^{\gamma\delta} = 0\,. \tag{3.44}$$

Expandindo a matriz $N^{-\frac{1}{2}}$ de acordo com

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}N_E + \frac{3}{4}N_E^2 + \cdots \tag{3.45}$$

obtemos

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) = H_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta) \ , \tag{3.46}$$

onde $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta;\gamma\delta)$ contém potências de $\Phi_\alpha^{\mu\nu}\Phi_\alpha^{*\rho\sigma}$ e $\Psi_\alpha^{\mu\nu\tau}\Psi_\alpha^{*\rho\sigma\lambda}$.

Capítulo 4

O Potencial Microscópico

Neste capítulo calculamos o potencial microscópico H_{hip}. Nesse processo, justificaremos a escolha da forma utilizada em (3.20). Na seção 4.1 mostramos como o potencial de Fermi-Breit para a troca de um gluon (OGEP - *One Gluon Exchange Potential*) é usualmente obtido e em seguida, na seção 4.2 introduzimos correções relativísticas ao OGEP.

4.1 O Potencial de Troca de Um Glúon

Tradicionalmente o OGEP é obtido a partir de um potencial de interação relativístico de dois corpos no modelo de quarks. Faz-se uma expansão em potências de momento dos espinores constituíntes, que é truncada em segunda ordem. O resultado disso é conhecido como potencial de Fermi-Breit.

Assim, partimos de um hamiltoniano relativístico de dois corpos do modelo de quarks

$$H = H_{\text{hip}} + H_{\text{conf}} \tag{4.1}$$

Neste trabalho ignoraremos H_{conf}, que é o termo de confinamento do potencial, pois estamos interessados apenas na contribuição do termo spin-spin do potencial.

O outro termo, H_{hip}, pode ser separado em duas partes

$$H_{\text{hip}} = T + V \tag{4.2}$$

onde T é a parte cinética do hamiltoniano e a interação V são dados por

$$\begin{aligned} T &= \int d^3x \sum_{f,c} \bar{\psi}_{f,c}(\vec{x}) \left[-i\gamma \cdot \nabla + m_f\right] \psi_{f,c}(\vec{x}) && (4.3) \\ V &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \sum_{fca} \mathcal{J}_{12}^{\mu,a}(\vec{x}) \mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{y}) \mathcal{J}_{34}^{\nu,a}(\vec{y}) && (4.4) \end{aligned}$$

onde ψ_{fc} é o campo espinorial de Dirac, m_f é a massa de um quark de sabor f, γ são as matrizes de Dirac, $\mathcal{J}_{ij}^{\mu,a}$ é a densidade de corrente de quarks (2.15), $\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{y})$ é o potencial de troca de um gluon.

Os campos de quarks podem ser expandidos em um conjunto completo de estados de onda plana através da transformada de Fourier

$$\psi_{f,c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}\; e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s \left[u_{s,f}(\vec{p}) q_{s,f,c}(\vec{p}) + v_{s,f}(-\vec{p}) \bar{q}^{\dagger}_{s,f,c}(-\vec{p}) \right] \tag{4.5}$$

onde u e v são os espinores de Dirac dados por

$$u_{s_i,f_i}(\vec{p}_i) = \begin{pmatrix} f_i(\vec{p}_i)\chi_{s_i} \\ g_i(\vec{p}_i)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i\chi_{s_i} \end{pmatrix} \quad , \quad v_{s_i,f_i}(\vec{p}_i) = \begin{pmatrix} g_i(\vec{p}_i)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i\chi^c_{s_i} \\ f_i(\vec{p}_i)\chi^c_{s_i} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

com

$$f_i(\vec{p}_i) = \sqrt{\frac{E_{p_i}+m_{f_i}}{2E_{p_i}}} \quad , \quad g_i(\vec{p}_i) = \frac{1}{E_{p_i}+m_{f_i}} \sqrt{\frac{E_{p_i}+m_{f_i}}{2E_{p_i}}} \tag{4.7}$$

onde $E_{p_i} = \sqrt{p_i^2 + m_{f_i}^2}$ é a energia do quark i.

Os espinores são normalizados à unidade

$$u^{\dagger}_{s_i} u_{s_j} = v^{\dagger}_{s_i} v_{s_j} = \delta_{s_i s_j} \tag{4.8}$$

Em (4.6), χ_{s_i} são os espinores de Pauli para os quarks e $\chi^c_{s_i}$ são os espinores de Pauli para os antiquarks, obtidos por conjugação de carga

$$\chi^c_{s_i} = -i\sigma_2 \chi^*_{s_i} \tag{4.9}$$

e que obedecem às seguintes relações de ortonormalidade

$$\chi^{\dagger}_s \chi_{s'} = \chi^{c\dagger}_s \chi^c_{s'} = \delta_{ss'}\,. \tag{4.10}$$

Substituindo (4.5) na contribuição cinética (4.3), desconsiderando os termos $\bar{q}q$ e $q^{\dagger}\bar{q}^{\dagger}$ e fazendo o truncamento da expansão em potências de momento dos espinores de Dirac em segunda ordem, conforme

$$f_i(\vec{p}_i) \approx 1 - \frac{p_i^2}{8m_{f_i}} \quad ; \quad g_i(\vec{p}_i) \approx \frac{1}{2m_{f_i}} \tag{4.11}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} T &= \int d\vec{p} \sum_{ss'} [u^{\dagger}_s(\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)u_{s'}(\vec{p})q^{\dagger}_s(\vec{p})q_{s'}(\vec{p}) \\ &\qquad -v^{\dagger}_s(-\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)v_{s'}(-\vec{p})\bar{q}^{\dagger}_{s'}(-\vec{p})\bar{q}_s(-\vec{p})] \\ &\equiv T(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + T(\nu)q^{\dagger}_{\nu}q_{\nu} \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde está implícita soma sobre índices repetidos e integral sobre o momento. Ressaltamos que (4.13) apresenta parte da forma de (3.20).

Nos voltamos agora para contribuição da interação V para o hamiltoniano. Podemos escrever a corrente de quarks em (4.4) como

$$\mathcal{J}^{\mu,a}_{ij}(\vec{x}) = J^{\mu}_{ij}(\vec{x})\mathcal{F}^a \tag{4.13}$$

onde $\mathcal{F}^a = \lambda^a/2$ $(a = 1, ..., 8)$ e $J^{\mu}_{ij}(\vec{x}) = \bar{\psi}_{f_i c_i}(\vec{x})\gamma^{\mu}\psi_{f_i c_j}(\vec{x})$ é a parte de spin-espaço da corrente de quarks. Ressalta-se que a presença de um mesmo índice a nas duas correntes na equação (4.4) indica a conservação de cor no processo de troca de um glúon.

Escrevemos o potencial como

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{y}) = D_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{y})\ \delta_{f_1 f_2}\delta_{f_3 f_4} \tag{4.14}$$

onde as deltas indicam a conservação do sabor pela interação forte.

Da expansão dos espinores em momento, encontramos

$$\begin{aligned}
J^{\mu}_{ij}(\vec{x}) &= \bar{\psi}_i(\vec{x})\gamma^{\mu}\psi_j(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}_j\ d\vec{p}_i e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}_j-\vec{p}_i)}\sum_{s_i s_j} \\
&\times \Big[u^{\dagger}_{s_i f_i}(\vec{p}_i)\gamma^0\gamma^{\mu}u_{s_j f_j}(\vec{p}_j)q^{\dagger}_{s_i f_i c_i}(\vec{p}_i)q_{s_j f_j c_j}(\vec{p}_j) \\
&+ u^{\dagger}_{s_i,f_i}(\vec{p}_i)\gamma^0\gamma^{\mu}v_{s_j,f_j}(-\vec{p}_j)q^{\dagger}_{s_i,f_i,c_i}(\vec{p}_i)\bar{q}^{\dagger}_{s_j,f_j,c_j}(-\vec{p}_j) \\
&+ v^{\dagger}_{s_i,f_i}(-\vec{p}_i)\gamma^0\gamma^{\mu}u_{s_j,f_j}(\vec{p}_j)\bar{q}_{s_i,f_i,c_i}(-\vec{p}_i)q_{s_j,f_j,c_j}(\vec{p}_j) \\
&+ v^{\dagger}_{s_i,f_i}(-\vec{p}_i)\gamma^0\gamma^{\mu}v_{s_j,f_j}(-\vec{p}_j)\bar{q}_{s_i,f_i,c_i}(-\vec{p}_i)\bar{q}^{\dagger}_{s_j,f_j,c_j}(-\vec{p}_j)\Big]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Explicitaremos apenas as contribuições da corrente para o potencial proporcionais a $q^{\dagger}q$. Elas darão origem, como veremos, à contribuição $V_{\rm qq}$ de (3.21). As outras contribuições, $V_{\rm q\bar{q}}$ e $V_{\rm \bar{q}\bar{q}}$, são calculadas de forma análoga, levando em consideração os termos remanecentes das densidades de corrente. O termo $V_{\rm \bar{q}\bar{q}}$ será nulo para os casos considerados neste trabalho pela inexistência de antiquarks no núcleon.

Assim

$$\begin{aligned}
J^{\mu}_{ij}(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\ d\vec{p}\,' e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}\sum_{s_i s_j} u^{\dagger}_{s_i,f_i}(\vec{p}\,')\gamma^0\gamma^{\mu}u_{s_j,f_i}(\vec{p})q^{\dagger}_{s_i,f_i,c_i}(\vec{p}\,')q_{s_j,f_i,c_j}(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\ d\vec{p}\,' e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}\sum_{s_i s_j} \jmath^{\mu}_{s_i s_j}(\vec{p}\,',\vec{p})q^{\dagger}_{s_i,f_i,c_i}(\vec{p}\,')q_{s_j,f_i,c_j}(\vec{p})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde definimos $\jmath^{\mu}_{s_i s_j}(\vec{p}\,',\vec{p}) \equiv u^{\dagger}_{s_i,f_i}(\vec{p}\,')\gamma^0\gamma^{\mu}u_{s_j,f_i}(\vec{p})$.

Escrevendo o potencial no espaço de momento,

$$D_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}D_{\mu\nu}(\vec{p}) \tag{4.17}$$

encontramos a contribuição $V_{\rm qq}$ ao potencial de interação

$$\begin{aligned} V_{qq} &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathcal{F}^a\mathcal{F}^a \sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{p}_1\; d\vec{p}_2\; d\vec{p}_3\; d\vec{p}_4\; \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2+\vec{p}_3-\vec{p}_4)\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4} \\ &\times\; \jmath^{\mu}_{s_1s_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)D_{\mu\nu}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\jmath^{\nu}_{s_3s_4}(\vec{p}_3,\vec{p}_4) \\ &\times\; q^{\dagger}_{s_1f_1c_1}(\vec{p}_1)q_{s_2f_2c_2}(\vec{p}_2)q^{\dagger}_{s_3f_3c_3}(\vec{p}_3)q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}_4)\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Podemos colocar os operadores de criação e aniquilação em ordenamento normal

$$\begin{aligned} V_{qq} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathcal{F}^a\mathcal{F}^a \sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{p}_1\; d\vec{p}_2\; d\vec{p}_3\; d\vec{p}_4\; \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2+\vec{p}_3-\vec{p}_4)\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4} \\ &\times\; \jmath^{\mu}_{s_1s_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)D_{\mu\nu}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\jmath^{\nu}_{s_3s_4}(\vec{p}_3,\vec{p}_4) \\ &\times\; q^{\dagger}_{s_1f_1c_1}(\vec{p}_1)q^{\dagger}_{s_3f_3c_3}(\vec{p}_3)q_{s_2f_2c_2}(\vec{p}_2)q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}_4)\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Integramos, então, em $\vec{p}_3$ usando a propriedade da delta e fazemos a mudança de variáveis $\vec{q}=\vec{p}_1-\vec{p}_2$, $\vec{p}_2=\vec{p}$ e $\vec{p}_4=\vec{p}\,'$.

$$\begin{aligned} V_{qq} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathcal{F}^a\mathcal{F}^a \sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{q}\; d\vec{p}\; d\vec{p}\,'\; \delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4} \\ &\times\; \jmath^{\mu}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})D_{\mu\nu}(\vec{q})\jmath^{\nu}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,') \\ &\times\; q^{\dagger}_{s_1f_1c_1}(\vec{p}+\vec{q})q^{\dagger}_{s_3f_3c_3}(\vec{p}\,'-\vec{q})q_{s_2f_2c_2}(\vec{p})q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}\,') \end{aligned} \tag{4.20}$$

Escolhemos agora a forma do potencial $D_{\mu\nu}$ para a troca de um glúon:

$$D_{00}(\vec{q}) = -\frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \quad ; \quad D_{i0}(\vec{q}) = D_{0j}(\vec{q}) = 0 \quad ; \quad D_{ij} = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{q^2}\right) \tag{4.21}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} V_{qq} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathcal{F}^a\mathcal{F}^a \sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{q}\; d\vec{p}\; d\vec{p}\,'\; \delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4} \\ &\times\; \left[-\frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\jmath^{0}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\jmath^{0}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,') + \frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\vec{\jmath}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\cdot\vec{\jmath}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,')\right. \\ &-\; \left.\frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\left[\vec{\jmath}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\cdot\vec{q}\right]\left[\vec{\jmath}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,')\cdot\vec{q}\right]\right] \\ &\times\; q^{\dagger}_{s_1f_1c_1}(\vec{p}+\vec{q})q^{\dagger}_{s_3f_3c_3}(\vec{p}\,'-\vec{q})q_{s_2f_2c_2}(\vec{p})q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}\,')\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Para obter o potencial de Fermi-Breit fazemos a aproximação não-relativística (4.11) e encontramos:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{q}\; d\vec{p}\; d\vec{p}\,' V_{\rm qq}(\vec{q},\vec{p},\vec{p}\,')q^{\dagger}_{s_1f_1c_1}(\vec{p}+\vec{q})q^{\dagger}_{s_3f_3c_3}(\vec{p}\,'-\vec{q})q_{s_2f_2c_2}(\vec{p})q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}\,') \tag{4.23}$$

onde

$$V_{qq}(\vec{q},\vec{p},\vec{p}') \;=\; \mathcal{F}^a\mathcal{F}^a\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4}V^{\rm OGEP}_{\rm qq}(\vec{q},\vec{p},\vec{p}') \tag{4.24}$$

e

$$\begin{aligned} V^{\rm OGEP}_{\rm qq}(\vec{q},\vec{p},\vec{p}') \;=\; & \frac{1}{2\pi^2}\frac{\alpha_s}{q^2}\left[\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4} - \frac{1}{4m_1m_3}(\vec{\sigma}_{12}\cdot\vec{\sigma}_{34})q^2 - \left(\frac{1}{8m_1^2}+\frac{1}{8m_3^2}\right)q^2\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4}\right.\\ + \; & \frac{1}{4m_1^2}i\vec{q}\cdot(\vec{p}\times\vec{\sigma}_{12})\delta_{s_3s_4} - \frac{1}{4m_3^2}i\vec{q}\cdot(\vec{p}'\times\vec{\sigma}_{34})\delta_{s_1s_2}\\ + \; & \frac{1}{2m_1m_3}i\vec{p}\cdot(\vec{\sigma}_{34}\times\vec{q})\delta_{s_1s_2} - \frac{1}{2m_1m_3}i\vec{p}'\cdot(\vec{\sigma}_{12}\times\vec{q})\delta_{s_3s_4}\\ + \; & \frac{1}{m_1m_3q^2}(\vec{p}\cdot\vec{q})(\vec{p}'\cdot\vec{q})\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4} - \frac{1}{m_1m_3}(\vec{p}\cdot\vec{p}')\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4}\\ + \; & \left.\frac{1}{4m_1m_3}(\vec{\sigma}_{12}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}_{34}\cdot\vec{q})\right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde $\vec{\sigma}_{12} \equiv \chi^\dagger_{s_1}\vec{\sigma}\chi_{s_2}$ e $\vec{\sigma}_{34} \equiv \chi^\dagger_{s_3}\vec{\sigma}\chi_{s_4}$.

A interação microscópica pode ser encontrada no espaço de coordenadas pela transformada de Fourier, conforme [18]

$$\begin{aligned} U(\vec{r},\vec{p},\vec{p}') \;&=\; \int d^3q\; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\; V^{\rm OGEP}_{\rm qq}(\vec{q},\vec{p},\vec{p}')\\ &=\; U^{\rm orb} + U^{\rm hip} + U^{\rm corr} + U^{\rm so} + U^{\rm tens}\,, \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde

$$U^{\rm orb} = \alpha_s\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2m_1m_3}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}'}{r} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})(\vec{r}\cdot\vec{p}')}{r^3}\right)\right]\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4} \tag{4.27}$$

é o termo de interação orbital,

$$U^{\rm hip} = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_1m_3}\left(\frac{\vec{\sigma}_{12}}{2}\cdot\frac{\vec{\sigma}_{34}}{2}\right)\delta(\vec{r}) \tag{4.28}$$

é o termo de interação hiperfina spin-spin,

$$U^{\rm corr} = -\frac{\pi\alpha_s}{2}\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_3^2}\right)\delta(\vec{r})\delta_{s_1s_2}\delta_{s_3s_4} \tag{4.29}$$

é um termo de correção relativística de ordem mais baixa do que consideraremos na seção seguinte,

$$\begin{aligned} U^{\rm so} = \; & - \; \frac{\alpha_s}{4m_1^2r^3}((\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}_{12})\delta_{s_1s_2} + \frac{\alpha_s}{4m_3^2r^3}((\vec{r}\times\vec{p}')\cdot\vec{\sigma}_{34})\delta_{s_3s_4}\\ & - \; \frac{\alpha_s}{4m_1m_3r^3}\left[((\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}_{34})\delta_{s_1s_2} - ((\vec{r}\times\vec{p}')\cdot\vec{\sigma}_{12})\delta_{s_3s_4}\right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

é o termo de interação spin-órbita e

$$U^{\text{tens}} = -\frac{\alpha_s}{4m_1 m_3 r^3}\left[\frac{3(\vec{\sigma}_{12}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_{34}\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_{12}\cdot\vec{\sigma}_{34}\right] \tag{4.31}$$

é o termo de interação tensorial.

De (4.23), podemos escrever na nossa notação compacta

$$V_{\text{qq}} = \frac{1}{2}V_{\text{qq}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^\dagger_\mu q^\dagger_\nu q_\rho q_\sigma \tag{4.32}$$

que também possui a estrutura de um dos termos de (3.20). Os termos restantes podem ser encontrados de forma análoga.

4.2 Correção Relativística ao Potencial de Fermi-Breit

A principal proposta deste trabalho é a introdução de correções relativísticas ao termo de interação spin-spin do potencial de Fermi-Breit para a troca de um glúon, o que será feito nesta seção.

Esse potencial, também chamado de potencial microscópico, se dá entre os quarks constituíntes. Entretanto, o espalhamento específico que estudaremos é o η_c-núcleon. Assim, a interação se dá entre um charm (ou anti-charm) e um quark *up* ou *down*. Uma vez que o charm é muito mais pesado que os quarks do núcleon, ele não será tratado relativisticamente, ou seja, ainda usaremos a expansão (4.11) para a sua descrição. Já para os outros quarks, mais leves, consideraremos uma ordem a mais na expansão dos espinores. Assim podemos dizer que o potencial obtido será semi-relativístico.

Novamente, explicitaremos apenas a contribuição da interação V_{qq} entre quarks. O termo de interação quark-antiquark pode ser obtido pela substituição

$$\chi_s \longrightarrow \chi^c_s$$

nas correntes $\jmath^\mu$.

Tomamos como ponto de partida o potencial V_{qq} de (4.22), isto é,

$$\begin{aligned}
V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathcal{F}^a\mathcal{F}^a\sum_{s_1s_2s_3s_4}\int d\vec{q}\,d\vec{p}\,d\vec{p}\,'\;\delta_{f_1f_2}\delta_{f_3f_4}\\
&\times\left[-\frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\jmath^0_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\jmath^0_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,') + \frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\vec{\jmath}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\cdot\vec{\jmath}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,')\right.\\
&-\left.\frac{4\pi\alpha_s}{q^2}\left[\vec{\jmath}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\vec{p})\cdot\vec{q}\right]\left[\vec{\jmath}_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\vec{p}\,')\cdot\vec{q}\right]\right]\\
&\times q^\dagger_{s_1f_1c_1}(\vec{p}+\vec{q})q^\dagger_{s_3f_3c_3}(\vec{p}\,'-\vec{q})q_{s_2f_2c_2}(\vec{p})q_{s_4f_4c_4}(\vec{p}\,'),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

onde as correntes são dadas por

$$\jmath^0_{s_js_j}(\vec{p}_j,\,\vec{p}_k) = u^\dagger_{s_j}(\vec{p}_j)\gamma^0\gamma^0\,u_{s_k}(\vec{p}_k) = f_jf_k\,\delta_{s_js_k} + g_jg_k\chi^\dagger_{s_j}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_j)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_k)\chi_{s_k}$$

$$\jmath^i_{s_js_k}(\vec{p}_j,\,\vec{p}_k) = u^\dagger_{s_j}(\vec{p}_j)\gamma^0\gamma^i\,u_{s_k}(\vec{p}_k) = f_jg_k\chi^\dagger_{s_j}\sigma^i\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_k)\,\chi_{s_k} + f_kg_j\chi^\dagger_{s_j}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_j)\;\sigma^i\chi_{s_k}\,. \tag{4.34}$$

Reescreveremos as componentes espaciais das correntes de forma mais adequada aos nossos objetivos. Para isso precisamos das seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \sigma^i\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) &= p^i - i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})^i &\quad (4.35)\\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\sigma^i &= p^i + i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})^i\,, &\quad (4.36)\end{aligned}$$

de onde encontramos

$$\begin{aligned} \mathrm{J}^i_{s_1 s_2}(\vec{p}+\vec{q},\,\vec{p}) &= (f_1 g_2 + f_2 g_1)\,\delta_{12}\,p^i - i\,(f_1 g_2 - f_2 g_1)\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})^i + f_2 g_1\left[\delta_{12}\,q^i + i\,(\vec{\sigma}\times\vec{q})^i\right]\\ \mathrm{J}^j_{s_3 s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\,\vec{p}\,') &= (f_3 g_4 + f_4 g_3)\,\delta_{34}\,p'^j - i\,(f_3 g_4 - f_4 g_3)\,(\vec{\sigma}\,'\times\vec{p}\,')^j - f_4 g_3\left[\delta_{34}\,q^j + i\,(\vec{\sigma}\,'\times\vec{q})^j\right]\,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

onde

$$\vec{\sigma}_{12} \equiv \vec{\sigma} \quad ; \quad \vec{\sigma}_{34} \equiv \vec{\sigma}\,' \quad ; \quad \delta_{12} \equiv \delta \quad ; \quad \delta_{34} \equiv \delta\,' \tag{4.38}$$

Como já indicado, precisaremos distinguir duas correntes, uma pesada e uma leve. A corrente pesada será associada aos índices 1 e 2 e a corrente leve aos índices 3 e 4.

Para a corrente pesada faremos a mesma aproximação não-relativística da seção anterior, isto é,

$$f(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m_p^2} \quad ; \quad g(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m_p} \tag{4.39}$$

onde m_p é a massa do charm.

Para a corrente leve, consideraremos a próxima ordem na expansão dos espinores para intrduzir uma correção relativística, ou seja,

$$f(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m_l^2} + \frac{11p^4}{128m_l^4} \quad ; \quad g(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m_l} - \frac{3p^2}{16m_l^3} \tag{4.40}$$

onde m_l é a massa dos quarks up ou down, consideradas iguais.

Entretanto, estamos interessados na contribuição relativística apenas aos termos de interação spin-spin, ou seja, termos com uma estrutura operatorial do tipo

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}'\,.$$

A primeira contribuição das correntes para o potencial, o termo $\mathrm{J}^0\mathrm{J}^0$, gera contribuições do tipo

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_1})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_2}) \qquad \text{ou} \qquad [\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_1})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_2})\,]^2\,, \tag{4.41}$$

que podem ser avaliado através da identidade

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{4.42}$$

de onde vemos que $\mathrm{J}^0\mathrm{J}^0$ não gera termos do tipo desejado.

Usando (4.35) e (4.36), temos

$$\begin{aligned} \vec{J}\cdot\vec{q} &\sim [\,\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,]\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot\vec{q} - i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot\vec{q} \\ &\qquad\text{ou} \\ &\sim [\,(\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,)\,\vec{\sigma}\,]\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot\vec{q} + i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot\vec{q} \end{aligned} \tag{4.43}$$

e dessa forma

$$\begin{aligned} (\vec{J}\cdot\vec{q})\,(\vec{J}\cdot\vec{q}) &\sim [\,\vec{p}\cdot\vec{q} - i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot\vec{q}\,]^2 \\ &\qquad\text{ou} \\ &\sim [\,\vec{p}\cdot\vec{q} + i\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot\vec{q}\,]^2 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Portanto $(\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{q})(\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{q})$ também não gerará um termo do tipo $\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}\,'$.

Assim o único termo que contribuirá será o segundo, $\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{J}}$. De (4.37) vemos que surgem termos do tipo $(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot(\vec{\sigma}'\times\vec{p}\,')$ que podem ser avaliados usando a seguinte identidade

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})\,. \tag{4.45}$$

Assim, temos

$$(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot(\vec{\sigma}\,'\times\vec{p}\,') = (\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}\,')(\vec{p}\cdot\vec{p}\,') - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\,'\cdot\vec{p}\,') \tag{4.46}$$

onde aparece explicitamente o termo proporcional a $\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}\,'$. O segundo termo de (4.46) também poderá contribuir, lembrando a fórmula

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,\frac{4\pi(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}'\cdot\vec{q})}{q^2} = \frac{1}{r^3}\left[\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}' - 3\,\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}'\cdot\vec{r})}{r^2}\right] + \frac{4\pi}{3}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}'\,\delta(\vec{r})\,. \tag{4.47}$$

onde se vê estruturas do tipo desejado que não estavam aparentes no espaço de momento.

Assim, as únicas contribuições de corrente de interesse são

$$\mathrm{J}^i_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\,\vec{p}) \;\to\; -i\;(f_1g_2 - f_2g_1)\,(\vec{\sigma}\times\vec{p})^i + i\,f_2g_1(\vec{\sigma}\times\vec{q})^i \tag{4.48}$$

$$\mathrm{J}^j_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\,\vec{p}\,') \;\to\; -i\;(f_3g_4 - f_4g_3)\,(\vec{\sigma}'\times\vec{p}\,')^j - i\,f_4g_3(\vec{\sigma}'\times\vec{q})^j\,. \tag{4.49}$$

Substituindo a expansão (4.39) na corrente pesada (4.48), que deve ser no máximo de ordem 2 no momento, encontramos

$$\begin{aligned} \mathrm{J}^i_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\,\vec{p}) &= -i\left(-\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{8m_p^3} - \frac{q^2}{16m_p^3}\right)(\vec{\sigma}\times\vec{p})^i + i\left(\frac{1}{2m_p} - \frac{p^2}{16m_p^3}\right)(\vec{\sigma}\times\vec{q})^i \\ &\to\; i\,\frac{1}{2m_p}(\vec{\sigma}\times\vec{q})^i \end{aligned} \tag{4.50}$$

Já a corrente leve deve ser, no máximo, de ordem 4 em momento. Assim, usando a expansão (4.40) encontramos

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}^j_{s_3s_4}(\vec{p}\,'-\vec{q},\,\vec{p}\,') &= -i\,(f_3g_4-f_4g_3)\,(\vec{\sigma}'\times\vec{p}\,')^j - i\,f_4g_3(\vec{\sigma}'\times\vec{q})^j \qquad (4.51)\\
&\to -i\left[-\frac{\vec{p}\,'\cdot\vec{q}}{4m_l^3}+\frac{q^2}{8m_l^3}\right](\vec{\sigma}'\times\vec{p}\,')^j - i\left[\frac{1}{2m_l}-\frac{p\,'^2}{4m_l^3}+\frac{3\vec{p}\,'\cdot\vec{q}}{8m_l^3}-\frac{3q^2}{16m_l^3}\right](\vec{\sigma}'\times\vec{q})^j\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\,\vec{p})\cdot\vec{J}_{s_3s_4}(\vec{p}'-\vec{q},\,\vec{p}') \implies &\left[\frac{q^2}{16m_pm_l^3}-\frac{\vec{p}'\cdot\vec{q}}{8m_pm_l^3}\right]S(\vec{q},\vec{p}')\\
&+\left[\frac{1}{4m_pm_l}-\frac{p'^2}{8m_pm_l^3}+\frac{3\vec{p}'\cdot\vec{q}}{16m_pm_l^3}-\frac{3q^2}{32m_pm_l^3}\right]S(\vec{q},\vec{q})
\end{aligned} \qquad (4.52)$$

onde

$$S(\vec{A},\vec{B}\,)=(\vec{\sigma}\times\vec{A})\cdot(\vec{\sigma}\,'\times\vec{B}\,)\,. \qquad (4.53)$$

Mas, de (4.46), sabemos calcular $S(\vec{A},\vec{B}\,)$, resultando em

$$\begin{aligned}
S(\vec{q},\vec{p}') &= (\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}\,')(\vec{q}\cdot\vec{p}')-(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}')(\vec{\sigma}\,'\cdot\vec{q})\\
S(\vec{q},\vec{q}) &= (\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}')\,q^2-(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}'\cdot\vec{q})
\end{aligned} \qquad (4.54)$$

Não desprezaremos os termos $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}')(\vec{\sigma}\,'\cdot\vec{q})$ e $(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}'\cdot\vec{q})$ pois conforme (4.47) vemos que eles podem contribuir com termos do tipo $\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}'$.

Para avaliar isso, definimos um potencial

$$V=\frac{D_0}{q^2}\mathrm{j}_{s_1s_2}(\vec{p}+\vec{q},\,\vec{p})\cdot\mathrm{j}_{s_3s_4}(\vec{p}'-\vec{q},\,\vec{p}') \qquad (4.55)$$

ou seja

$$V = \frac{D_0}{q^2}\left[\frac{q^2}{16m_pm_l^3}-\frac{\vec{p}'\cdot\vec{q}}{8m_pm_l^3}\right]S(\vec{q},\vec{p}')+\frac{D_0}{q^2}\left[\frac{1}{4m_pm_l}-\frac{p'^2}{8m_pm_l^3}+\frac{3\vec{p}'\cdot\vec{q}}{16m_pm_l^3}-\frac{3q^2}{32m_pm_l^3}\right]S(\vec{q},\vec{q})\,. \qquad (4.56)$$

e escrevemos (4.56) da seguinte forma

$$V=\sum_{i=1}^{6}U_i \qquad (4.57)$$

onde

$$\begin{aligned}
U_1 &= b_1\,S(\vec{q},\vec{p}') \quad ; \quad U_2=b_2\,\frac{\vec{p}'\cdot\vec{q}}{q^2}\,S(\vec{q},\vec{p}') \quad ; \quad U_3=b_3\,\frac{1}{q^2}\,S(\vec{q},\vec{q}\,)\\
U_4 &= b_4\,\frac{p\,'^2}{q^2}\,S(\vec{q},\vec{q}\,) \quad ; \quad U_5=b_5\,\frac{\vec{p}'\cdot\vec{q}}{q^2}\,S(\vec{q},\vec{q}\,) \quad ; \quad U_6=b_6\,S(\vec{q},\vec{q}\,)
\end{aligned} \qquad (4.58)$$

com

$$b_1 = \frac{D_0}{16 m_p m_l^3} \quad ; \quad b_2 = -\frac{D_0}{8 m_p m_l^3} \quad ; \quad b_3 = \frac{D_0}{4 m_p m_l} \quad ; \quad b_4 = -\frac{D_0}{8 m_p m_l^3}$$
$$b_5 = \frac{3D_0}{16 m_p m_l^3} \quad ; \quad b_6 = -\frac{3D_0}{32 m_p m_l^3} \,. \tag{4.59}$$

Cada termo de (4.58) é transformado para o espaço de coordenadas e aqueles que não contribuem com estruturas do tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'$ são desprezados. Dessa forma:

- U_1:

$$U_1 = b_1\, S(\vec{q}, \vec{p}') = b_1\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')(\vec{q} \cdot \vec{p}') - b_1\, \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma}\,' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}}$$

  Assim a contribuição é

$$U_1 \longrightarrow b_1\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')(\vec{q} \cdot \vec{p}')$$

- U_2:

$$U_2 = b_2\, \frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2}\, S(\vec{q}, \vec{p}') = b_2\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')\, \underbrace{\frac{(\vec{p}' \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2}}_{\text{usando (A.9)}} - b_2\, \underbrace{\frac{\vec{p}' \cdot \vec{q}}{q^2}\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma}\,' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}}$$

  Assim a contribuição é

$$U_2 \longrightarrow \frac{b_2}{3}\, p'^2\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')$$

- U_3:

$$U_3 = b_3\, \frac{1}{q^2}\, S(\vec{q}, \vec{q}) = b_3 \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}\,' \cdot \vec{q})}{q^2} \right] = b_3 \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') - \frac{1}{3}(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') \right]$$

  Assim a contribuição é

$$U_3 \longrightarrow \frac{2}{3}\, b_3\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')$$

- U_4:

$$U_4 = b_4\, p'^2\, \underbrace{\frac{1}{q^2}\, S(\vec{q}, \vec{q})}_{\text{similar ao } \mathrm{U}_3} = \frac{2}{3}\, b_4\, p'^2\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')$$

  Assim a contribuição é

$$U_4 \longrightarrow \frac{2}{3}\, b_4\, p'^2\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')$$

- U_5:

$$U_5 = b_5 \, \frac{\vec{p}\,' \cdot \vec{q}}{q^2} \, S(\vec{q},\vec{q}\,) = b_5 \, (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')(\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) - b_5 \, \underbrace{(\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) \, \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}\,' \cdot \vec{q})}{q^2}}_{\text{não contribui}}$$

Assim a contribuição é

$$U_5 \longrightarrow b_5 \, (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,')(\vec{p}\,' \cdot \vec{q})$$

- U_6:

$$U_6 = b_6 \; S(\vec{q},\vec{q}\,) = b_6 \, \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') \; q^2 - \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}\,' \cdot \vec{q})}_{\text{não contribui}} \right]$$

Assim a contribuição é

$$U_6 \longrightarrow b_6 \, q^2 \, (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') \, .$$

Reunindo esses resultados, encontramos

$$\begin{aligned} V_{ss} &= \left[b_1 \, (\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) + \frac{b_2}{3} \; p'^{\,2} + \frac{2}{3} \, b_3 + \frac{2}{3} \, b_4 \; p'^{\,2} + b_5 \, (\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) + b_6 \, q^2 \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') \\ &= \left[\frac{2}{3} \, b_3 + b_6 \, q^2 + (b_1 + b_5) \, (\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) + \left(\frac{2}{3} \, b_4 + \frac{b_2}{3} \right) p'^{\,2} \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\,') \, . \end{aligned} \tag{4.60}$$

Considerando $D_0 = -4\pi\alpha_s$, obtemos finalmente o potencial pesado-leve de interação spin-spin com correção relativística:

$$V_{ss} = \left[a_1 + a_2 \, q^2 + a_3 \; (\vec{p}\,' \cdot \vec{q}) + a_4 \; p'^{\,2} \right] \vec{S} \cdot \vec{S}\,' \tag{4.61}$$

onde $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ e os coeficientes a_i novos

$$a_1 = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_p \, m_l} \quad ; \quad a_2 = \frac{3\pi\alpha_s}{2m_p \, m_l^3} \quad ; \quad a_3 = -\frac{4\pi\alpha_s}{m_p \, m_l^3} \quad ; \quad a_4 = \frac{2\pi\alpha_s}{m_p \, m_l^3} \tag{4.62}$$

Capítulo 5

O Potencial Méson-Bárion Corrigido e Resultados

5.1 Seção de Choque

Como já foi mostrado o potencial méson-bárion (3.41) é

$$V_{\rm mb}(\alpha\beta;\delta\gamma) = \sum_{i=1}^{4} V_i(\alpha\beta;\delta\gamma) \tag{5.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
V_1(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi^{*\mu\nu_2}_{\alpha}\Psi^{*\nu\mu_2\mu_3}_{\beta}\Phi^{\rho\nu_2}_{\gamma}\Psi^{\sigma\mu_2\mu_3}_{\delta}\\
V_2(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi^{*\mu_1\nu}_{\alpha}\Psi^{*\mu\mu_2\mu_3}_{\beta}\Phi^{\sigma\rho}_{\gamma}\Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\delta}\\
V_3(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi^{*\mu\nu_2}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\nu_2}_{\gamma}\Psi^{\sigma\rho\mu_3}_{\delta}\\
V_4(\alpha\beta;\delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi^{*\nu_1\nu}_{\alpha}\Psi^{*\mu_1\mu\mu_3}_{\beta}\Phi^{\mu_1\rho}_{\gamma}\Psi^{\nu_1\sigma\mu_3}_{\delta}\,.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A parte espacial do potencial quark-quark (ou quark-antiquark) que usaremos em (5.2) pode ser escrito na forma

$$V_{qq}(\vec{p}_\mu,\vec{p}_\nu,\vec{p}_\sigma,\vec{p}_\rho) = \delta(\vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu-\vec{p}_\sigma-\vec{p}_\rho)v_{qq}(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma,\vec{p}_\sigma) \tag{5.3}$$

onde v_{qq} será o potencial pesado-leve de spin-spin com correção relativística (4.61),

$$v_{qq}(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma,\vec{p}_\sigma) = \left[a_1 + a_2\,(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma)^2 + a_3\,\vec{p}_\sigma\cdot(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma) + a_4\,p_\sigma^2\right]\,\vec{S}\cdot\vec{S}' \tag{5.4}$$

A amplitude de espalhamento, na aproximação de Born do potencial em $V_{\rm mb}$, é uma delta de conservação vezes o elemento de matriz de $V_{\rm mb}$ entre estados independentes do tempo na representação de Heisenberg

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi\,i\,\delta(E_f-E_i)\;V_{\rm mb}(\alpha\beta;\delta\gamma)\,. \tag{5.5}$$

Devido à conservação de momento, o elemento de matriz de (5.5) pode ser escrito

$$V_{\mathrm{mb}}(\alpha\beta;\delta\gamma) = \delta(P_f - P_i)\, h_{fi}\,,$$

onde a amplitude de espalhamento h_{fi} pode ser escrita

$$(h_{fi})_k = \omega_k\, I_k^e \tag{5.6}$$

onde I_k^e são a integrais da parte espacial e ω_k o fator de cor-spin-sabor. A amplitude de espalhamento total será

$$h_{fi} = \omega_1\, I_1^e + \omega_2\, I_2^e + \omega_3\, I_3^e + \omega_4\, I_4^e\,. \tag{5.7}$$

Detalhes do cálculo de I_i^e pode ser encontrados no Apêndice D, que consiste em substituir v_{qq} e realizar as integrais restantes. Podemos expressar o resultado no referencial do centro de massa do sistema méson-bárion $\vec{p}_\alpha = \vec{p}$, $\vec{p}_\beta = -\vec{p}$, $\vec{p}_\gamma = \vec{p}\,'$ e $\vec{p}_\delta = -\vec{p}\,'$:

$$I_i^e = \vec{S}\cdot\vec{S}\,'\left[a_1\eta_1 + \eta_2\left(c_0 + c_1\,p^2 + c_2\,p'^2 + c_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right)\right]\,\exp\left[-A_1\,p^2 - A_2\,p'^2 + A_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right]\,. \tag{5.8}$$

A seção de choque diferencial para partículas não idênticas (no centro de massa) é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{5.9}$$

onde $\vec{p}$ e $\vec{p}\,'$ são os momentos dos estados inicial e final. Podemos realizar uma mudança de variáveis

$$d\Omega = 2\pi\, d\theta\, \mathrm{sen}\theta = -2\pi\, d(\cos\theta) = -2\pi\, dz\,.$$

Assim temos

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\,|\mathcal{M}|^2$$

ou seja

$$\sigma(s) = -\frac{1}{32\pi s}\,\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\int_{+1}^{-1} dz\,|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{32\pi s}\,\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\int_{-1}^{+1} dz\,|\mathcal{M}|^2 \tag{5.10}$$

mas

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\prod_{n=1}^{4}\sqrt{(2\pi)^3 2E_n}h_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3}\sqrt{[(2\pi)^3 2E_A][(2\pi)^3 2E_B][(2\pi)^3 2E_C][(2\pi)^3 2E_D]}\;h_{fi}\\ &= 4\,(2\pi)^3\sqrt{E_A E_B E_C E_D}\;h_{fi}\end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) em (5.10)

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \frac{1}{32\pi s}\,\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\int_{-1}^{+1} dz\,[16\,(2\pi)^6 E_A E_B E_C E_D]\;|h_{fi}|^2\\ &= \frac{32\pi^5}{s}\;E_A E_B E_C E_D\;\frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|}\int_{-1}^{+1} dz\;\;|h_{fi}|^2\end{aligned} \tag{5.12}$$

mas, no centro de massa temos

$$\sqrt{s} = (E_A + E_B) = (E_C + E_D)$$

e assim podemos escrever $s = \sqrt{s}\,\sqrt{s}$, ou seja,

$$s = (E_A + E_B)(E_C + E_D)\,. \tag{5.13}$$

Definimos

$$\mu_{AB} \equiv \frac{E_A\, E_B}{E_A + E_B}\,. \tag{5.14}$$

Usando (5.13) e (5.14) em (5.12), obtemos finalmente

$$\sigma(s) \;=\; 32\pi^5\; \mu_{AB}\, \mu_{CD}\, \frac{|\vec{p}\,'|}{|\,\vec{p}\,|} \int_{-1}^{+1} dz\;\; |h_{fi}|^2 \tag{5.15}$$

onde agora $|\vec{p}\,'| = p'(s)$, $|\,\vec{p}\,| = p(s)$, definidos em (C.4)-(C.5) e $h_{fi} = h_{fi}(s,z)$.

5.2 Resultados

Nesta seção calcularemos as seções de choque com e sem correção relativísticas na parte hiperfina das seguintes reações:

1. $\eta_c + p \to \bar{D}^0 + \Lambda_c^+$
2. $\eta_c + p \to \bar{D}^0 + \Sigma_c^+$
3. $\eta_c + p \to \bar{D}^{0*} + \Lambda_c^+$
4. $\eta_c + p \to \bar{D}^{0*} + \Sigma_c^+$
5. $\eta_c + p \to D^- + \Sigma_c^{++}$
6. $\eta_c + p \to D^{-*} + \Sigma_c^{++}$
7. $\eta_c + p \to \bar{D}^{0*} + \Sigma_{c3/2}^+$
8. $\eta_c + p \to D^{-*} + \Sigma_{c3/2}^{++}$.

Devido à simetria de isospin, correspondentes processos η_c-nêutron apresentarão os mesmos resultados, podendo assim ser imediatamente avaliados.

Para tanto substituimos h_{fi} de (5.7) na expressão (5.15), isto é

$$\sigma(s) \;=\; 32\pi^5\; \mu_{AB}\, \mu_{CD}\, \frac{p\,'(s)}{p(s)} \sum_{i,j=1}^{4} \omega_i\, \omega_j \int_{-1}^{+1} dz\;\; I_i^e(s,z)\, I_j^e(s,z)\,. \tag{5.16}$$

O cálculo da seção de choque de dissociação $\sigma(s)$, em (5.16), será obtida numericamente e se utiliza de informações dos apêndices (B)-(E) e dos coeficientes a_i em (4.62) do potencial pesado-leve. O coeficiente a_1 está associado à parte não-relativística e os três coeficientes a_2, a_3 e a_4 à relativística. Todos eles dependem da constante de acoplamento forte α_s. Na física hadrônica, α_s é uma quantidade efetiva e é comum ser tomado como um parâmetro a ser ajustado, como faremos. Assim, diferenciamos as constante de acoplamento escrevendo

$$a_1 = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_p\, m_l} \quad ; \quad a_2 = \frac{3\pi\alpha_s^R}{2m_p\, m_l^3} \quad ; \quad a_3 = -\frac{4\pi\alpha_s^R}{m_p\, m_l^3} \quad ; \quad a_4 = \frac{2\pi\alpha_s^R}{m_p\, m_l^3}\,, \tag{5.17}$$

onde vamos variar, independentemente, α_s não-relativístico em relação ao α_s^R das contribuições relativísticas.

Temos ainda outros parâmetros livres, como por exemplo as larguras das gaussinas nas partes espaciais das funções de onda. Para os mésons temos β, definido em (B.2). Para os bárions, temos α_λ e α_ρ, relacionados por $x = \alpha_\rho/\alpha_\lambda$, definidos em (B.27).

Além desses, temos também os parâmetros de massa m_1, m_2, M_1 e M_2 que estão associados à distribuição da massa do méson ou bárion entre os quarks constituintes. Estes não são parâmetros livres, mas fixos e definidos em (B.3) e (B.14). O valores assumidos por m_1, m_2, M_1 e M_2 são fixos e estão listados na tabela (5.2).

Os valores de ω_i dependem do processo estudado, sendo os possíveis valores apresentados na tabela (5.3) e são calculados conforme o Apêndice E.

Com isso, (5.4) fica

$$v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) = \left[-\frac{8\pi\alpha_s}{3m_p\, m_l} + \frac{3\pi\alpha_s^R}{2m_p\, m_l^3}\,(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma)^2 - \frac{4\pi\alpha_s^R}{m_p\, m_l^3}\,\vec{p}_\sigma \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma) + \frac{2\pi\alpha_s^R}{m_p\, m_l^3}\, p_\sigma^2\right] \times \vec{S}\cdot\vec{S}\,'\,, \tag{5.18}$$

onde o primeiro termo é o potencial de interação spin-spin não-relativístico e os outros três termos são as correções relativísticas introduzidas.

Como já foi descrito, há a perspectiva de num futuro próximo existirem dados experimentais do FAIR-PANDA quando será possível estudar a produção e absorção de hádrons charmosos em alvos nucleares [19]. Neste contexto, um dos interesses centrais será a determinação destas seções choque de dissociação e permitirá uma determinação experimental mais precisa dos parâmetros do modelo. No momento, no ausência de tais dados, será tomado como base para o ajuste dos parâmetros α_λ,α_ρ, β, α_s, α_s^R o resultado do cáculo da seção de choque do processo $\eta_c\, p \to D^-\Sigma_c^{++}$ obtida na referência de J. P. Hilbert et al. [1], cujo resultado foi reproduzido na figura (5.1). Este processo foi escolhido por ter suas curvas apresentadas e discriminadas em termos das contribuições.

Em [1], o hamiltoniano de interação entre quarks usado foi

$$H_I = \sum_{ij} \mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j \left(\frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{3}{4} b r_{ij} - \frac{8\alpha_s\sigma^3}{3\sqrt{\pi} m_i m_j} e^{-\sigma^2 r_{ij}^2} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j\right)\,, \tag{5.19}$$

m_c	$m_{u,d}$	m_{η_c}	m_{nucleon}	m_D	m_{D^*}	m_{Λ_c}	m_{Σ_c}	$m_{\Sigma_{c3/2}}$
1.50	0.33	2.98	0.93	1.86	2.01	2.28	2.45	2.52

Tab. 5.1: Massas em GeV

onde o primeiro termo é a interação Coulombiana de cor, o segundo é o termo de confinamento linear e o terceiro é a contribuição hiperfina spin-spin.

Assim, no nosso modelo, tomamos $\alpha_s^R = 0$ e ajustamos os outros parâmetros, com certo grau de discricionariedade, de forma a reproduzir o melhor possível a contribuição spin-spin da figura (5.1). Os melhores parâmetros encontrados foram

$$\alpha_s = 0.4 \qquad ; \qquad \beta = 0.3 \text{ GeV} \qquad ; \qquad \alpha_\lambda = 0.35 \text{ GeV} \qquad ; \qquad x = \frac{\alpha_\rho}{\alpha_\lambda} = \frac{2}{3}. \qquad (5.20)$$

Nas figuras (5.2) e (5.3), este ajuste corresponde às curvas sólidas (preta). A correção relativística é introduzida elevando o valor de α_s^R, cujo efeito é apresentado nas mesmas figuras para $\alpha_s^R = 0.15$ e corresponde às curvas pontilhadas (vermelhas). Uma terceira curva é apresenta, tracejada (verde), esta sendo uma contribuição puramente relativística com $\alpha_s = 0$ e $\alpha_s^R = 0.15$.

Destacamos o processo $\eta_c\, p \to D^- \Sigma_c^{++}$, na fig.5.4, com uma maior gradação de α_s^R para observar melhor o seu comportamento.

Todos os canais apresentam um comportamento bastante semelhante, possuindo um máximo para a seção de choque em valores de energia bem próximos ao limiar, apesar de terem ordens de grandeza de diferença no valor da seção de choque.

Além disso, todos os canais respondem de forma semelhante ao apresentado na fig.5.4. Conforme aumentamos α_s^R, a seção de choque cai até quase se anular para $\alpha_s^R \approx 0.05$ e então rapidamente sobe, como podemos ver no gráfico. Interpretamos essa queda na seção de choque como um interferência destrutiva entre as contribuições relativística e não-relativística. Ressaltamos a alta sensibilidade da seção de choque com variações de α_s^R.

	η_c	Nucleon	D	D^*	Λ_c	Σ_c	$\Sigma_{c3/2}$
m_1	1	-	1.63	1.63	-	-	-
m_2	1	-	0.36	0.36	-	-	-
M_1	-	$\frac{1}{3}$	-	-	0.15	0.15	0.15
M_2	-	$\frac{1}{3}$	-	-	0.70	0.70	0.70

Tab. 5.2: Parâmetros das funções de onda

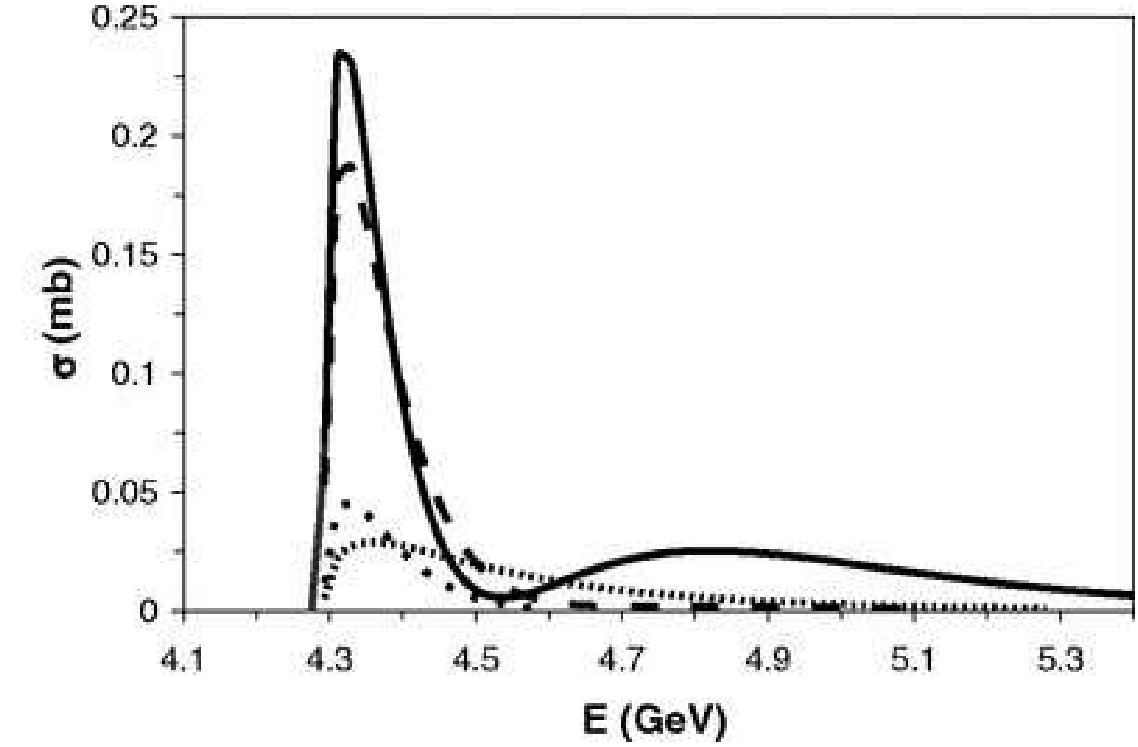

Fig. 5.1: $\eta_c\, p \to D^- \Sigma_c^{++}$. Extraído de J. P. Hilbert et al. [1], onde as curvas são as seções de choque total (sólida), spin-spin (pontos), confinamento linear (traço) e Coulomb (traço pequeno).

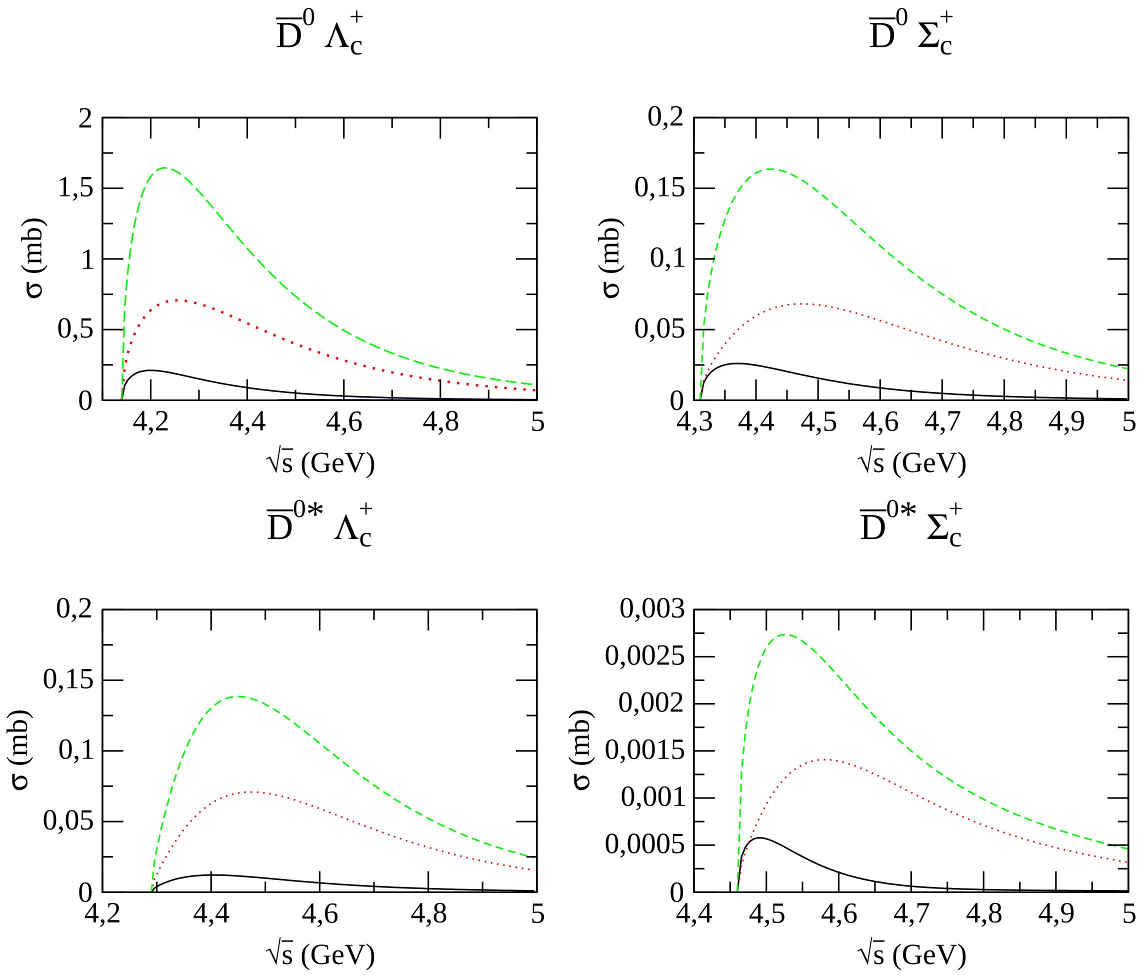

Fig. 5.2: Linha sólida: $\alpha_s = 0.4$, $\alpha_s^R = 0$; linha pontilhada: $\alpha_s = 0.4$, $\alpha_s^R = 0.15$; linha tracejada: $\alpha_s = 0$, $\alpha_s^R = 0.15$

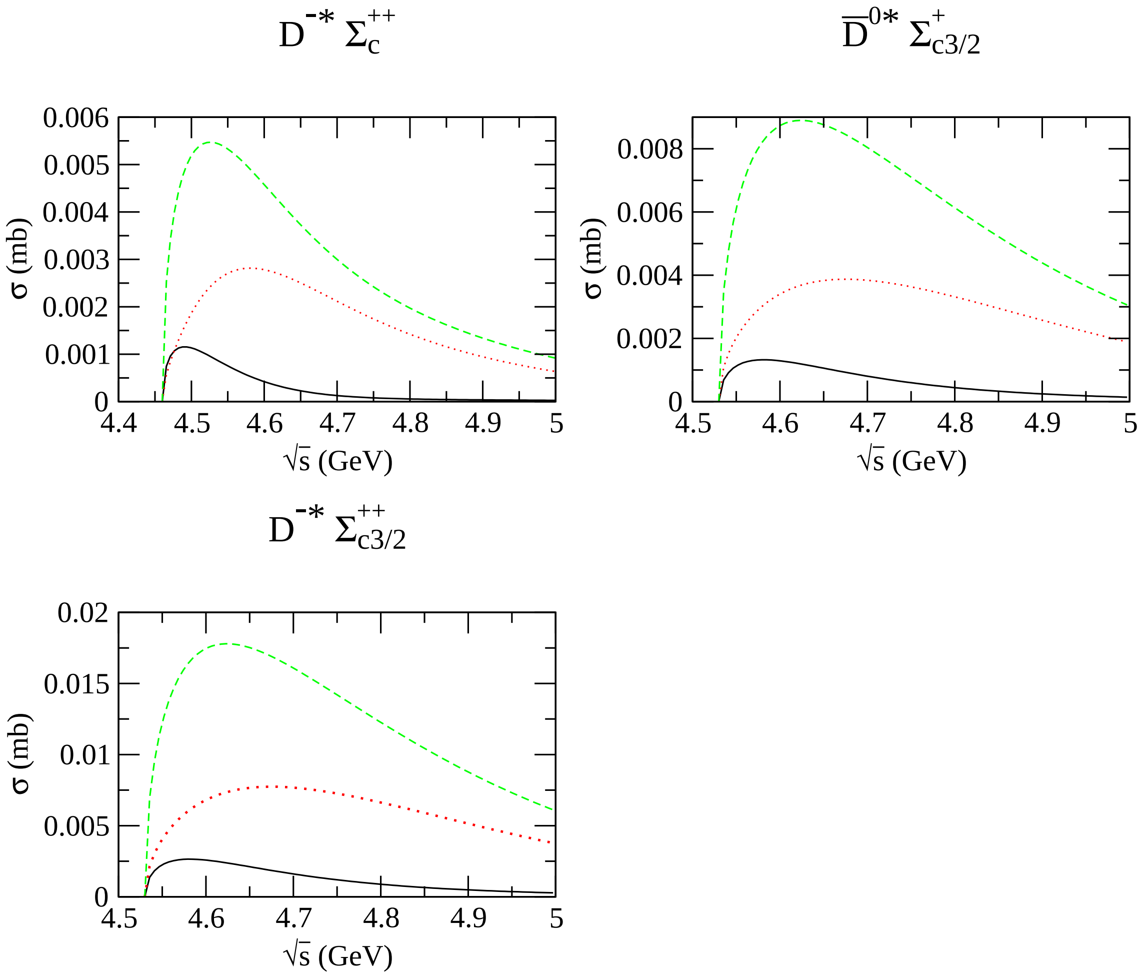

Fig. 5.3: Linha sólida: $\alpha_s = 0.4$, $\alpha_s^R = 0$; linha pontilhada: $\alpha_s = 0.4$, $\alpha_s^R = 0.15$; linha tracejada: $\alpha_s = 0$, $\alpha_s^R = 0.15$

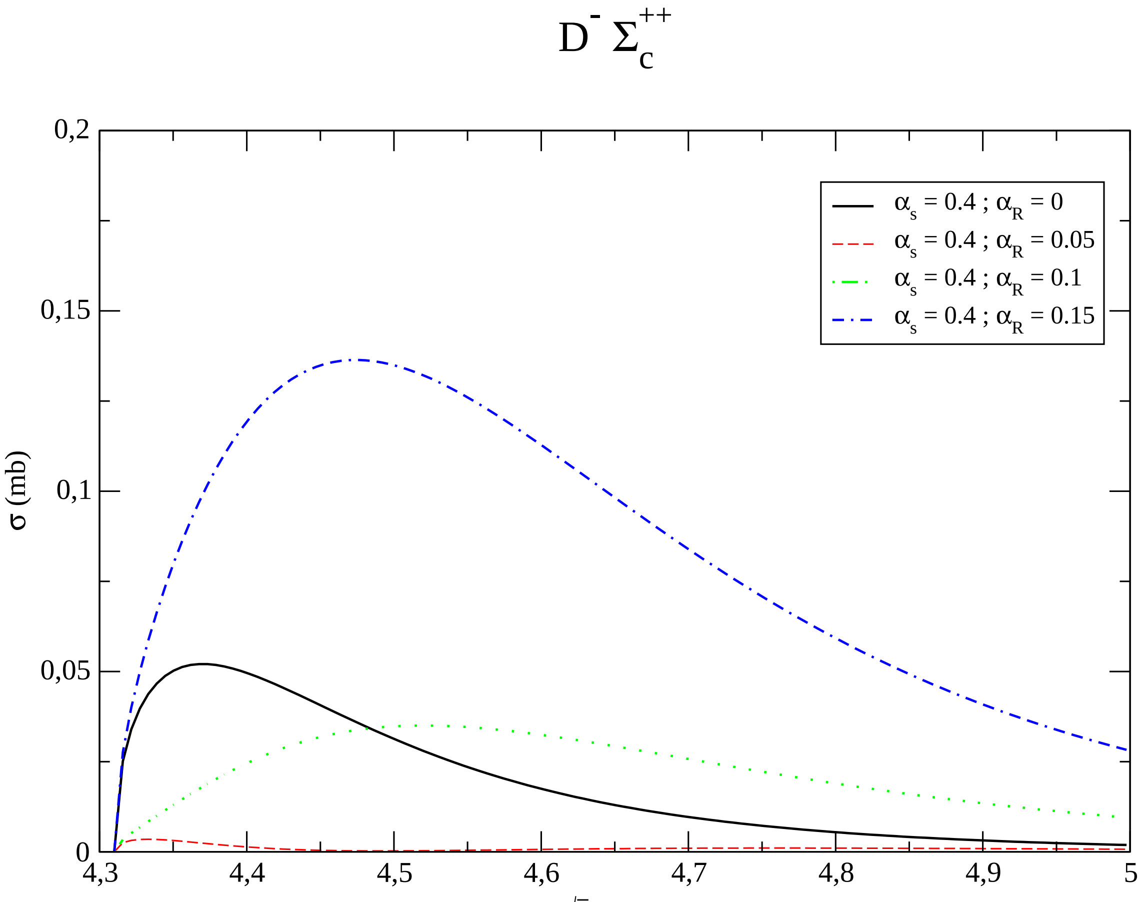

Fig. 5.4: Seção de choque do processo $\eta_c\ p \to D^-\ \Sigma_c^{++}$ para diversos valores de α_s^R

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\bar{D}^0\ \Lambda_c^+$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	0	0
$\bar{D}^0\ \Sigma_c^+$	$\frac{3\sqrt{2}}{36}$	$\frac{3\sqrt{2}}{36}$	$\frac{2\sqrt{2}}{36}$	$\frac{2\sqrt{2}}{36}$
$\bar{D}^{0\,*}\,\Lambda_c^+$	$-\frac{\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{\sqrt{2}}{12}$	0	0
$\bar{D}^{0\,*}\,\Sigma_c^+$	$\frac{\sqrt{6}}{108}$	$\frac{\sqrt{6}}{108}$	$-\frac{\sqrt{6}}{54}$	$-\frac{\sqrt{6}}{54}$
$D^-\ \Sigma_c^{++}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$
$D^{-\,*}\,\Sigma_c^{++}$	$-\frac{\sqrt{3}}{54}$	$-\frac{\sqrt{3}}{54}$	$\frac{\sqrt{3}}{27}$	$\frac{\sqrt{3}}{27}$
$\bar{D}^{0\,*}\,\Sigma_{c3/2}^{++}$	$\frac{\sqrt{12}}{54}$	$\frac{\sqrt{12}}{54}$	$\frac{\sqrt{12}}{54}$	$\frac{\sqrt{12}}{54}$
$D^{-\,*}\,\Sigma_{c3/2}^{++}$	$-\frac{\sqrt{6}}{27}$	$-\frac{\sqrt{6}}{27}$	$-\frac{\sqrt{6}}{27}$	$-\frac{\sqrt{6}}{27}$

Tab. 5.3: $\eta_c + p \to C + D$

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Apesar de se acreditar que a QCD seja a teoria mais correta para o tratamento de sistemas hadrônicos, sua alta complexidade por muitas vezes torna impraticável a sua aplicação no regime de energia desejado. Frente a isso, o modelo de quarks se mostra uma alternativa viável e satisfatória para uma abordagem efetiva do problema. De acordo com ele os mésons são compostos por um par $q\bar{q}$ e os bárions por um trio qqq, ligados por um potencial de interação.

Estudamos o espalhamento η_c-núcleon utilizando o método do grupo ressonante (RGM) para calcular o potencial de interação V_{mb} entre méson e bárion. Para isso um potencial microscópico de Fermi-Breit para a troca de um glúon (OGEP) foi utilizado. Como o η_c é composto de charm, e o charm é muito mais pesado que o os outros quarks presentes, up e down, dintinguimos as correntes em "leve" e "pesada". Os espinores da corrente pesada foram expandidos em potências de momento e truncados em segunda ordem, correspondendo ao regime não-relativístico, enquanto que os da corrente leve foram truncados em quarta ordem, o que adicionou correções relativísticas ao OGEP. Desse potencial, apenas a parte correspondente à interação spin-spin foi retida para uso no RGM. O potencial V_{mb}, na aproximação de Born, forneceu a amplitude de espalhamento h_{fi} com a qual calculamos a seção de choque de dissociação $\sigma(s)$.

Esperávamos que o efeito da introdução de correções relativísticas fosse pequeno. Entretanto, e como nosso principal resultado, constatamos que as seções de choque dos diversos processos são, no nosso modelo, altamente sensíveis a α_s^R, com os valores de pico podendo mais que dobrar, como podemos ver em cada um dos gráficos. Além disso, com a introdução das correções, o pico das seções de choque é deslocado para valores de enegia do centro de massa mais altos.

Isso sugere que a dinâmica não relativística implementada por J. P. Hilbert et al. [1] não é adequada para os processos em questão. Além disso a alta sensibilidade a α_s^R também sugere a possível necessidade de se considerar mais altas ordens nas expansões dos espinores em momentum.

O passo seguinte pretendido a este estudo é a inclusão dos termos coulombianos de cor e o confinamento linear no potencial microscópico para que tenhamos uma visão mais completa da interação. Com isso, uma comparação mais adequada com os resultados de J. P. Hilbert et al. [1] será possível. Ademais, o potencial completo será necessário para compararmos as previsões do modelo aos dados experimentais do FAIR-PANDA que devem ser gerados nos próximos anos, onde a produção e absorção de hádrons charmosos serão estudadas.

Outra possibilidade ainda é tomar a constante de acoplamento α_s não mais como um parâmetro a ser ajustado, mas como uma função da energia, conforme previsto pela QCD. Isso, acreditamos, produziria um resultado mais fiel à realidade, apesar de tornar os cálculos substancialmente mais difíceis.

Apêndice A

Identidade

Demonstraremos uma igualdade importante para a identificação dos termos de interação spin-spin no Capítulo 4:

$$\overline{(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})} = \frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})\nabla^2 \tag{A.1}$$

onde a "barra" sobre o lado esquerdo da igualdade significa média sobre todas as direções de r, ou seja,

$$\overline{(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \sin\theta \, (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}) \tag{A.2}$$

Podemos escrever $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})$ e $(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})$ em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a\left[\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}\right] \equiv a\left[X\,\hat{i} + Y\,\hat{j} + Z\,\hat{k}\right] && \text{(A.3)}\\
\vec{b} &= b\left[\sin(\theta+\varphi)\cos\phi\,\hat{i} + \sin(\theta+\varphi)\sin\phi\,\hat{j} + \cos(\theta+\varphi)\,\hat{k}\right] \equiv b\left[X'\,\hat{i} + Y'\,\hat{j} + Z'\,\hat{k}\right] && \text{(A.4)}\\
\vec{\nabla} &= \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z} && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}) &= ab\left[X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[X'\frac{\partial}{\partial x} + Y'\frac{\partial}{\partial y} + Z'\frac{\partial}{\partial z}\right]\\
&= ab\left[XX'\frac{\partial^2}{\partial x^2} + YY'\frac{\partial^2}{\partial y^2} + ZZ'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + ab\left[XY'\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + XZ'\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\right.\\
&\left.+YX'\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + YZ'\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + ZX'\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + ZY'\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right] && \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

Calculando os termos individualmente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, XX' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, [\sin\theta\cos\phi\sin(\theta+\varphi)\cos\phi] = \frac{1}{3}\cos\varphi \\
\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, YY' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, [\sin\theta\sin\phi\sin(\theta+\varphi)\sin\phi] = \frac{1}{3}\cos\varphi \\
\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, ZZ' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, [\cos\theta\cos(\theta+\varphi)] = \frac{1}{3}\cos\varphi \\
\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, XY' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, XZ' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, YZ' \\
&= \cdots = 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Do que segue

$$\overline{(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})} = \frac{1}{3}\, a\, b\cos\varphi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})\nabla^2 \tag{A.8}$$

Logo

$$-\overline{(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})}\frac{1}{r} = -\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\nabla^2\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\,\delta(\vec{r}) \tag{A.9}$$

Apêndice B

Funções de Onda

As funções de onda do méson e do bárion, utilizadas em (5.2) para o cálculo da seção de choque, podem ser escritas como um produto tensorial das funções de onda dos quarks de cor ($\delta^{c_\mu c_\nu}$ ou $\varepsilon^{c_1 c_2 c_3}$), spin-sabor ($\xi_\alpha^{f_\mu\, f_\nu}$ ou $\zeta_\alpha^{f_1 f_2 f_3}$) e espaço [20] [21].

B.1 Função de Onda do Méson

B.1.1 Espaço

Para o méson temos

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)\ \frac{\delta^{c_\mu c_\nu}}{\sqrt{3}}\ \xi_\alpha^{f_\mu\, f_\nu}\ \ \varphi(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \tag{B.1}$$

A parte espacial da função de onda do méson é tomada como sendo uma gaussiana

$$\varphi(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}) = \left(\pi\beta^2\right)^{-\frac{3}{4}}\ \exp\left[-\frac{\left(m_1\vec{p}_q - m_2\vec{p}_{\bar{q}}\right)^2}{8\,\beta^2}\right] \tag{B.2}$$

com

$$m_1 = \frac{2\,m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \qquad ; \qquad m_2 = \frac{2\,m_q}{m_q + m_{\bar{q}}}\,, \tag{B.3}$$

onde é fácil verificar

$$m_1 + m_2 = 2\,. \tag{B.4}$$

B.1.2 Spin-Sabor

Méson η_c

$$|J=0,J_z=0\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\uparrow}\,c_{\downarrow}\,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\downarrow}\,c_{\uparrow}\,\rangle \tag{B.5}$$

Méson D

• **Função de onda de spin do D**

O méson D tem $J=0$, escrito na base quark-antiquark $|J,M\,\rangle_D = |S^z_q, S^z_{\bar{q}}\,\rangle$:

$$|0,0\,\rangle_D \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}|+1/2,-1/2\,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2,+1/2\,\rangle \tag{B.6}$$

• **Função de onda de sabor D**

A função de onda de sabor do méson D é

$$\begin{aligned} |D^-\,\rangle_f &= |\,\bar{c}\,d\,\rangle \\ |\overline{D}^0\,\rangle_f &= |\,\bar{c}\,u\,\rangle \\ |D^+\,\rangle_f &= |\,c\,\bar{d}\,\rangle \\ |D^0\,\rangle_f &= -|\,c\,\bar{u}\,\rangle \end{aligned} \tag{B.7}$$

A combinação da função de onda spin-sabor é uma combinação da Eq. (B.6) $\otimes$ Eq. (B.7):

1. D^-

$$|D^-\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\uparrow}\,d_{\downarrow}\,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\downarrow}\,d_{\uparrow}\,\rangle \tag{B.8}$$

2. $\bar{D}^0$

$$|\bar{D}^0\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\uparrow}\,u_{\downarrow}\,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\,\bar{c}_{\downarrow}\,u_{\uparrow}\,\rangle \tag{B.9}$$

3. D^+

$$|D^+\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}|\,c_{\uparrow}\,\bar{d}_{\downarrow}\,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\,c_{\downarrow}\,\bar{d}_{\uparrow}\,\rangle \tag{B.10}$$

4. D^0

$$|D^0\,\rangle \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}|\,c_{\uparrow}\,\bar{u}_{\downarrow}\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\,c_{\downarrow}\,\bar{u}_{\uparrow}\,\rangle \tag{B.11}$$

B.2 Função de Onda do Bárion

A função de onda do bárion pode ser escrita como

$$\Psi_{\alpha}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\varepsilon^{c_1c_2c_3}}{\sqrt{6}}\zeta_{\alpha}^{f_1f_2f_3}\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\,\vec{p_2}\,\vec{p_3}} \tag{B.12}$$

B.2.1 Espaço

Para obter $\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\,\vec{p_2}\,\vec{p_3}}$ vamos considerar um bárion constituido por dois quarks leves de massa m_l e uma quark pesado de massa m_p, isto é,

$$\text{quarks } (u,d) \quad \longrightarrow \quad m_l \quad ; \quad \text{quark } c \quad \longrightarrow \quad m_p$$

e definir a coordenada do centro de massa $\vec{R}$ e relativas $\vec{\rho}$ e $\vec{\lambda}$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= M_1\,(\vec{r}_1+\vec{r}_2)+M_2\,\vec{r}_3 \qquad \longrightarrow \qquad \text{Centro de massa} \\ \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad ; \qquad \vec{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\vec{r}_1+\vec{r}_2-2\vec{r}_3) \end{aligned} \tag{B.13}$$

onde

$$M_1=\frac{m_l}{2m_l+m_p} \qquad ; \qquad M_2=\frac{m_p}{2m_l+m_p}\,. \tag{B.14}$$

Desta definição (B.14) é fácil ver que

$$2M_1+M_2=1 \tag{B.15}$$

A função de onda total definida por Isgur e Karl [22, 23]

$$\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{\rho},\,\vec{\lambda},\,\vec{R}) \;=\; \frac{e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}}}{(2\pi)^{3/2}}\;\psi(\vec{\rho},\,\vec{\lambda}) \tag{B.16}$$

sendo $\vec{P}$ o momento do centro de massa e a função de onda relativa $\psi(\vec{\rho},\,\vec{\lambda})$ é dada por

$$\psi(\vec{\rho},\,\vec{\lambda}) \;=\; \frac{\alpha_\rho^{3/2}}{\pi^{3/4}}\,\frac{\alpha_\lambda^{3/2}}{\pi^{3/4}}\,e^{-\alpha_\rho^2\rho^2/2}\,e^{-\alpha_\lambda^2\lambda^2/2} \tag{B.17}$$

É fácil verificar que a função de onda (B.16) é normalizada:

$$\int d\vec{R}\,d\vec{\rho}\,d\vec{\lambda}\;\;\Psi^*_{\vec{P}}\,(\vec{\rho},\,\vec{\lambda},\,\vec{R})\,\Psi_{\vec{P}'}\,(\vec{\rho},\,\vec{\lambda},\,\vec{R}) = \int d\vec{R}\;\frac{e^{-i\vec{R}\cdot(\vec{P}-\vec{P}')}}{(2\pi)^3}\int d\vec{\rho}\,\frac{\alpha_\rho^3}{\pi^{3/2}}\,e^{-\alpha_\rho^2\rho^2}\int d\vec{\lambda}\;\frac{\alpha_\lambda^3}{\pi^{3/2}}\,e^{-\alpha_\lambda^2\rho^2}$$

$$=\;\delta(\vec{P}-\vec{P}')\;\frac{\alpha_\rho^3}{\pi^{3/2}}\left(\frac{\pi}{\alpha_\rho^2}\right)^{3/2}\;\frac{\alpha_\lambda^3}{\pi^{3/2}}\left(\frac{\pi}{\alpha_\lambda^2}\right)^{3/2} = \delta(\vec{P}-\vec{P}') \tag{B.18}$$

A norma de Ψ nas variáveis $\vec{r_1}\,, \vec{r_2}\,, \vec{r_3}$ tem que ser a mesma que nas variáveis $\vec{R}\,, \vec{\rho}\,, \vec{\lambda}$. Para verificar este fato precisamos realizar a integral da norma nas variáveis $\vec{r_1}\,, \vec{r_2}\,, \vec{r_3}$, ou seja,

$$\int d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, d\vec{r}_3 \;\; \Psi^*_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)\Psi_{\vec{P}'}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{B.19}$$

onde

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \;\; &= \;\; \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2}\right)^{3/2} \exp\left[i\vec{P}\cdot(M_1\,(\vec{r_1}+\vec{r_2}) + M_2\,\vec{r_3})\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{4}\alpha_\rho^2(\vec{r_1}-\vec{r_2})^2 - \frac{1}{12}\alpha_\lambda^2(\vec{r_1}+\vec{r_2}-2\vec{r_3})^2\right]\end{aligned} \tag{B.20}$$

Realizando esta integral, encontramos

$$\int d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, d\vec{r}_3 \;\; \Psi^*_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \;\; \Psi_{\vec{P}'}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 3\sqrt{3} \;\; \delta(\vec{P} - \vec{P}\prime) \tag{B.21}$$

Desta forma para garantir a normalização basta substituir

$$\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \longrightarrow \frac{1}{3^{3/4}}\,\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{B.22}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \;\; &= \;\; \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2\sqrt{3}}\right)^{3/2} \exp\left[i\vec{P}\cdot(M_1\,(\vec{r_1}+\vec{r_2}) + M_2\,\vec{r_3})\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{4}\alpha_\rho^2(\vec{r_1}-\vec{r_2})^2 - \frac{1}{12}\alpha_\lambda^2(\vec{r_1}+\vec{r_2}-2\vec{r_3})^2\right]\end{aligned} \tag{B.23}$$

A transformada de Fourier de (B.23) é definida por

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\;\vec{p_2}\;\vec{p_3}} = \int \frac{d\vec{r_1}}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{d\vec{r_2}}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{d\vec{r_3}}{(2\pi)^{3/2}}\Psi_{\vec{P}}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)\, e^{-i(\,\vec{p_1}\cdot\vec{r_1}+\vec{p_2}\cdot\vec{r_2}+\vec{p_3}\cdot\vec{r_3})}\,. \tag{B.24}$$

Agora

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2\sqrt{3}}\right)^{3/2} = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

Substituindo (B.23) em (B.24)

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\;\vec{p_2}\;\vec{p_3}} \;\; &= \;\; \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5\sqrt{3}}\right)^{3/2} \int d\vec{r_1}\, d\vec{r_2}\, d\vec{r_3}\, \exp\left[i\vec{P}\cdot(M_1\,(\vec{r_1}+\vec{r_2}) + M_2\,\vec{r_3})\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{4}\alpha_\rho^2(\vec{r_1}-\vec{r_2})^2 - \frac{1}{12}\alpha_\lambda^2(\vec{r_1}+\vec{r_2}-2\vec{r_3})^2\right] \\ &\times \exp\left[-i(\,\vec{p_1}\cdot\vec{r_1}+\vec{p_2}\cdot\vec{r_2}+\vec{p_3}\cdot\vec{r_3})\right]\,.\end{aligned} \tag{B.25}$$

Integrando em $\vec{r}_1$, obtemos

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5\sqrt{3}}\right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}}\right)^3$$
$$\times \int d\vec{r}_3 \exp\left[\frac{i\vec{r}_3 \cdot \left(\alpha_\lambda^2(2M_1\vec{P} + M_2\vec{P} - 2\vec{p}_1 - \vec{p}_3) + 3{\alpha_\rho}^2(M_2\vec{P} - \vec{p}_3)\right) - {\alpha_\lambda}^2{\alpha_\rho}^2\vec{r}_3^{\,2} - 3(\vec{p}_1 - M_1\vec{P})^2}{{\alpha_\lambda}^2 + 3{\alpha_\rho}^2}\right]$$
$$\times \int d\vec{r}_2\ \exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}\, r_2^2 + \vec{r}_2 \cdot \frac{\left(\alpha_\rho^2\left(2\alpha_\lambda^2\vec{r}_3 + 6iM_1\vec{P} - 3i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\right) + i\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\right)}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}\right]$$

Integrando em $\vec{r}_2$, obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5\sqrt{3}}\right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda\alpha_\rho}\right)^3 \\ &\times \exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1\vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}\right] \\ &\times \int d\vec{r}_3 \exp\left[i\vec{r}_3 \cdot (\ \vec{P}\ \underbrace{(2M_1 + M_2)}_{=1} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)\right]\end{aligned}$$

Integrando em $\vec{r}_3$, obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} &= \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5\sqrt{3}}\right)^{3/2} \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda\alpha_\rho}\right)^3 \\ &\times \exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1\vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}\right] \\ &\times (2\pi)^3\,\delta(\ \vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)\end{aligned}$$

ou seja

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} = \delta(\ \vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda\alpha_\rho}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1\vec{P})^2}{4\,\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}\right].$$

Finalmente encontramos a função de onda (substituindo $\vec{P}$ no expoente)

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}} = \delta(\ \vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda\alpha_\rho}\right)^{3/2}$$

$$\times \exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+3\alpha_\rho^2[\,(1-2M_1)\,\vec{p}_1+(1-2M_1)\,\vec{p}_2-2M_1\,\vec{p}_3\,]^2}{4\,\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}\right],$$

(B.26)

mas por (B.15) temos que

$$1-2M_1=M_2$$

assim função de onda fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1\;\vec{p}_2\;\vec{p}_3} \;=\; \delta(\,\vec{P}-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda\alpha_\rho}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{\alpha_\lambda^2(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+3\alpha_\rho^2[\,M_2\,\vec{p}_1+M_2\,\vec{p}_2-2M_1\,\vec{p}_3\,]^2}{4\,\alpha_\lambda^2\alpha_\rho^2}\right] \tag{B.27}$$

ou equivalentemente definindo $x=\alpha_\rho/\alpha_\lambda$

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1\;\vec{p}_2\;\vec{p}_3} \;=\; \delta(\,\vec{P}-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi x\alpha_\lambda^2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+3x^2[\,M_2\,\vec{p}_1+M_2\,\vec{p}_2-2M_1\,\vec{p}_3\,]^2}{4\,\alpha_\lambda^2x^2}\right]. \tag{B.28}$$

Uma simplificação que pode ser introduzida é considerar $x=1$,

$$\alpha_\lambda=\alpha_\rho\equiv\alpha$$

Assim a função de onda (B.26) fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1\;\vec{p}_2\;\vec{p}_3} \;=\; \delta(\,\vec{P}-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+3[\,M_2\,\vec{p}_1+M_2\,\vec{p}_2-2M_1\,\vec{p}_3\,]^2}{4\,\alpha^2}\right]. \tag{B.29}$$

No caso particular do nucleon,

$$m_l \;=\; m_p \qquad\longrightarrow\qquad M_1=M_2=\frac{1}{3} \tag{B.30}$$

e a função de onda (B.29) se reduz ao resultado conhecido no modelo de quarks

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1\;\vec{p}_2\;\vec{p}_3} \;=\; \delta(\,\vec{P}-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{-p_1^2-p_2^2-p_3^2+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_3+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_3}{3\alpha^2}\right]. \tag{B.31}$$

B.2.2 Spin-Sabor

<u>**Núcleon**</u>

1. Proton spin-up

$$|p_\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\Big[\,2\,|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle + 2\,|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle + 2\,|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle - |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - |u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle - |d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle - |u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle - |u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle\Big] \tag{B.32}$$

2. Proton spin-down

$$|p_\downarrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}}\Big[\,2\,|u_\downarrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle + 2\,|u_\downarrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle + 2\,|d_\uparrow u_\downarrow u_\downarrow\rangle - |u_\downarrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle - |u_\uparrow u_\downarrow d_\downarrow\rangle - |u_\downarrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle - |u_\uparrow d_\downarrow u_\downarrow\rangle - |d_\downarrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle - |d_\downarrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle\Big] \tag{B.33}$$

3. Neutron spin-up

$$|n_\uparrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}}\Big[\,2\,|d_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle + 2\,|d_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle + 2\,|u_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow\rangle - |d_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle - |u_\uparrow d_\uparrow d_\downarrow\rangle - |d_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle - |d_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle - |u_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle\Big] \tag{B.34}$$

4. Neutron spin-down

$$|n_\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\Big[\,2\,|d_\downarrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle + 2\,|d_\downarrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle + 2\,|u_\uparrow d_\downarrow d_\downarrow\rangle - |d_\downarrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - |u_\downarrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle - |d_\downarrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle - |u_\downarrow d_\uparrow d_\downarrow\rangle - |d_\uparrow d_\downarrow u_\downarrow\rangle - |d_\uparrow u_\downarrow d_\downarrow\rangle\Big] \tag{B.35}$$

Para as funções de onda se spi-sabor dos bárions Λ e Σ, apresentaremos apenas as de spin mais alto.

<u>**Bárion Λ_c^+**</u>

A função de onda de spin é

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\right)$$

A função de onda de sabor é

$$\Lambda_c^f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(udc - duc\right)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^+_{c\uparrow} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\Lambda^f_c\,\chi + (\text{quark 1} \leftrightarrow \text{quark 3}) + (\text{quark 2} \leftrightarrow \text{quark 3})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\left[u_\uparrow d_\downarrow c_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow c_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow c_\uparrow + d_\downarrow u_\uparrow c_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{\sqrt{12}}\left[c_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - c_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow - c_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow + c_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\right] \\
&+\frac{1}{\sqrt{12}}\left[u_\uparrow c_\uparrow d_\downarrow - u_\downarrow c_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow c_\uparrow u_\downarrow + d_\downarrow c_\uparrow u_\uparrow\right]
\end{aligned}$$

Bárion Σ^+_c

A função de onda de spin é

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\right)$$

A função de onda de sabor é

$$\Sigma^{+f}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(udc + duc\right)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^+_{c\uparrow} &= \frac{1}{6}\left[\Sigma^f_c\,\chi + (\text{quark 1} \leftrightarrow \text{quark 3}) + (\text{quark 2} \leftrightarrow \text{quark 3})\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[2u_\uparrow d_\uparrow c_\downarrow - u_\uparrow d_\downarrow c_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow c_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{6}\left[2d_\uparrow u_\uparrow c_\downarrow - d_\uparrow u_\downarrow c_\uparrow - d_\downarrow u_\uparrow c_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{6}\left[2c_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow - c_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - c_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{6}\left[2c_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow - c_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - c_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{6}\left[2u_\uparrow c_\uparrow d_\downarrow - u_\uparrow c_\downarrow d_\uparrow - u_\downarrow c_\uparrow d_\uparrow\right] \\
&+\frac{1}{6}\left[2d_\uparrow c_\uparrow u_\downarrow - d_\uparrow c_\downarrow u_\uparrow - d_\downarrow c_\uparrow u_\uparrow\right]
\end{aligned}$$

Bárion Σ^{++}_c

A função de onda de spin é

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\right)$$

A função de onda de sabor é

$$\Sigma^{++f}_c = uuc$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{++}_{c\uparrow} &= \frac{1}{\sqrt{18}}\,\left[\Sigma^{++f}_c\,\chi + (\text{quark } 1 \leftrightarrow \text{quark } 3) + (\text{quark } 2 \leftrightarrow \text{quark } 3)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}}\,[2u_\uparrow u_\uparrow c_\downarrow - u_\uparrow u_\downarrow c_\uparrow - u_\downarrow u_\uparrow c_\uparrow] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{18}}\,[2c_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow - c_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - c_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{18}}\,[2u_\uparrow c_\uparrow u_\downarrow - u_\uparrow c_\downarrow u_\uparrow - u_\downarrow c_\uparrow u_\uparrow]
\end{aligned}
$$

Bárion $\Sigma^{+}_{c3/2}$

A função de onda de spin é

$$\chi_{3/2} = \uparrow\uparrow\uparrow$$

A função de onda de sabor é

$$\Sigma^{+f}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(udc + duc)$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{+}_{c3/2\uparrow} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\,\left[\Sigma^{+f}_c\,\chi_{3/2} + (\text{quark } 1 \leftrightarrow \text{quark } 3) + (\text{quark } 2 \leftrightarrow \text{quark } 3)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\,[u_\uparrow d_\uparrow c_\uparrow - d_\uparrow u_\uparrow c_\uparrow] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{6}}\,[c_\uparrow d_\uparrow u_\uparrow - c_\uparrow u_\uparrow d_\uparrow] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{6}}\,[u_\uparrow c_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow c_\uparrow u_\uparrow]
\end{aligned}
$$

Bárion $\Sigma^{++}_{c3/2}$

A função de onda de spin é

$$\chi = \uparrow\uparrow\uparrow$$

A função de onda de sabor é

$$\Sigma^{++f}_c = uuc$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{++}_{c3/2\uparrow} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\left[\Sigma^{++f}_c\,\chi_{3/2} + (\text{quark } 1 \leftrightarrow \text{quark } 3) + (\text{quark } 2 \leftrightarrow \text{quark } 3)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\,[u_\uparrow u_\uparrow c_\uparrow + c_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow + u_\uparrow c_\uparrow u_\uparrow]
\end{aligned}
$$

Apêndice C

Variáveis de Mandelstam

Neste apêndice deduzimos algumas relações para os momentos $\vec{p}$ e $\vec{p}'$ necessárias ao cálculo da seção de choque no Capítulo 5.

Consideremos o seguinte processo

$$A + B \to C + D$$

Seja $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$ o quadrivetor energia-momento da partícula i. As variáveis de Mandelstam s, t, u ficam definidas como

$$\begin{aligned}
s &= (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \\
&= (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 = (E_C + E_D)^2 - (\vec{p}_C + \vec{p}_D)^2 \\
t &= (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 \\
&= (E_A - E_C)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2 = (E_B - E_D)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_D)^2 \\
u &= (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2 \\
&= (E_A - E_D)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_D)^2 = (E_B - E_C)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_C)^2
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Estudaremos apenas a relação entre as variáveis s e t.

No referencial do centro de massa, temos

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p} \qquad ; \qquad \vec{p}_C = -\vec{p}_D = \vec{p}' \tag{C.2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
s &= (E_C + E_D)^2 = (E_A + E_B)^2 \\
t &= (E_A - E_C)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \\
&= (E_B - E_D)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \,.
\end{aligned}$$

Mas também temos

$$\begin{aligned}
E_A &= \sqrt{p_A^2 + m_A^2} \Rightarrow \sqrt{p^2 + m_A^2} \\
E_B &= \sqrt{p_B^2 + m_B^2} \Rightarrow \sqrt{p^2 + m_B^2} \\
E_C &= \sqrt{p_C^2 + m_C^2} \Rightarrow \sqrt{p'^2 + m_C^2} \\
E_D &= \sqrt{p_D^2 + m_D^2} \Rightarrow \sqrt{p'^2 + m_D^2} \, .
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
s &= (E_A + E_B)^2 = E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B = p^2 + m_A^2 + p^2 + m_B^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)} \\
&= 2p^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)} \, . \qquad \text{(C.3)}
\end{aligned}$$

Resolvendo para p^2, temos

$$p^2 = \frac{1}{4s}[(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2] \qquad \text{(C.4)}$$

e analogamente para p'^2

$$p'^2 = \frac{1}{4s}[(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2] \, . \qquad \text{(C.5)}$$

Para t temos

$$t = (E_A - E_C)^2 - (\vec{p} - \vec{p}\,')^2 = E_A^2 + E_C^2 - 2E_A E_C - p^2 - p'^2 + 2\,\vec{p} \cdot \vec{p}\,' \, .$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\vec{p} \cdot \vec{p}\,' &= \frac{1}{2}\left[t - E_A^2 - E_C^2 + 2E_A E_C + p^2 + p'^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(m_A^2 - m_B^2 + s)(m_C^2 - m_D^2 + s)}{s} - 2(m_A^2 + m_c^2 - t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t - m_A^2 - m_c^2 + \frac{1}{2s}(s + m_A^2 - m_B^2)(s + m_C^2 - m_D^2)\right]
\end{aligned}$$

ou seja

$$\vec{p} \cdot \vec{p}\,' = \frac{1}{2}\left[t - m_A^2 - m_c^2 + \frac{1}{2s}(s + m_A^2 - m_B^2)(s + m_C^2 - m_D^2)\right] .$$

Definimos agora a variável $z = \cos\theta$ onde θ é o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{p}\,'$

$$\vec{p} \cdot \vec{p}\,' = |\vec{p}||\vec{p}\,'| \cos\theta = |\vec{p}||\vec{p}\,'| z \, . \qquad \text{(C.6)}$$

Assim usando (C.4) e (C.5) em (C.6), obtemos

$$\vec{p} \cdot \vec{p}\,' = \frac{z}{4s}\sqrt{[(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2][(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2]} \, . \qquad \text{(C.7)}$$

Apêndice D

Parte espacial de V_{mb}

Calculamos agora as integrais espaciais dos quatro termos de V_{mb}, sendo a primeira contribuição, o termo V_1, mostrada com algum detalhe

$$
\begin{aligned}
V_1(\vec{p}_\alpha,\vec{p}_\beta,\vec{p}_\delta,\vec{p}_\gamma) = -3\int & d\vec{p}_\mu\, d\vec{p}_\nu\, d\vec{p}_\sigma\, d\vec{p}_\rho\, d\vec{p}_{\nu_2}\, d\vec{p}_{\mu_2}\, d\vec{p}_{\mu_3} \quad \delta(\vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu-\vec{p}_\sigma-\vec{p}_\rho)\;\; v_{qq}(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma,\vec{p}_\sigma) \\
&\times\left\{\delta(\vec{p}_\alpha-\vec{p}_\mu-\vec{p}_{\nu_2})\left(\frac{1}{\pi\beta^2}\right)^{3/4}\exp\left[-\frac{(m_f\,\vec{p}_\mu-(2-m_f)\,\vec{p}_{\nu_2})^2}{8\,\beta^2}\right]\right\} \\
\times&\left\{\delta(\,\vec{p}_\beta\;-\vec{p}_\nu-\vec{p}_{\mu_2}-\vec{p}_{\mu_3})\;\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}\right)^{3/2}\right. \\
&\times\;\exp\left[-\frac{(\vec{p}_\nu-\vec{p}_{\mu_2})^2+3[\;(1-2M_f)\,\vec{p}_\nu+(1-2M_f)\,\vec{p}_{\mu_2}-2M_f\,\vec{p}_{\mu_3}\;]^2}{4\,\alpha^2}\right]\left.\vphantom{\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}}\right\} \\
&\times\left\{\delta(\vec{p}_\gamma-\vec{p}_\rho-\vec{p}_{\nu_2})\left(\frac{1}{\pi\beta^2}\right)^{3/4}\exp\left[-\frac{(m_i\,\vec{p}_\rho-(2-m_i)\,\vec{p}_{\nu_2})^2}{8\,\beta^2}\right]\right\} \\
\times&\left\{\delta(\,\vec{p}_\delta\;-\vec{p}_\sigma-\vec{p}_{\mu_2}-\vec{p}_{\mu_3})\;\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}\right)^{3/2}\right. \\
&\times\exp\left[-\frac{(\vec{p}_\sigma-\vec{p}_{\mu_2})^2+3[\;(1-2M_i)\,\vec{p}_\sigma+(1-2M_i)\,\vec{p}_{\mu_2}-2M_i\,\vec{p}_{\mu_3}\;]^2}{4\,\alpha^2}\right]\left.\vphantom{\frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2}}\right\}
\end{aligned}
$$

onde m_i, m_f, M_i e M_f são os parâmetros do estado inicial e do estado final do méson e do bárion, respectivamente. Após a integração nas deltas obtemos

$$
\begin{aligned}
V_1(\vec{p}_\alpha,\vec{p}_\beta,\vec{p}_\delta,\vec{p}_\gamma) &= -3\delta(\vec{p}_\alpha+\vec{p}_\beta-\vec{p}_\gamma-\vec{p}_\delta)\;\frac{3\sqrt{3}}{\pi^{9/2}\alpha^6\beta^3}\int d\vec{p}_\mu\, d\vec{p}_\sigma\, d\vec{p}_{\mu_3}\quad v_{qq}(\vec{p}_\mu-\vec{p}_\sigma,\vec{p}_\sigma) \\
\times\;\exp&\left[-\frac{((m_f-2)\vec{p}_\alpha+2\vec{p}_\mu)^2+(m_i\vec{p}_\gamma-2\vec{p}_\alpha+2\vec{p}_\mu)^2}{8\beta^2}\right] \\
\times\;\exp&\left[-\frac{(3(M_i-1)M_i+1)p_\delta^2-\vec{p}_\delta\cdot[(2-3M_i)\vec{p}_{\mu_3}+\vec{p}_\sigma]+p_{\mu_3}^2+\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{p}_\sigma+p_\sigma^2}{\alpha^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$\times\ \exp\left[-\frac{(3(M_f-1)M_f+1)p_\beta^2-\vec{p}_\beta\cdot[\vec{p}_\delta-\vec{p}_\sigma+(1-3M_f)\vec{p}_{\mu_3}]}{\alpha^2}\right.$$
$$\left.-\frac{+p_\delta^2-\vec{p}_\delta\cdot(\vec{p}_{\mu_3}+2\vec{p}_\sigma)+p_{\mu_3}^2+\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{p}_\sigma+p_\sigma^2}{\alpha^2}\right]$$

Substituindo v_{qq} e realizando as integrais restantes, o resultado final pode ser expresso no referencial do centro de massa do sistema méson-bárion $\vec{p}_\alpha=\vec{p}$, $\vec{p}_\beta=-\vec{p}$, $\vec{p}_\gamma=\vec{p}\,'$ e $\vec{p}_\delta=-\vec{p}\,'$:

$$I_1^e=\vec{S}\cdot\vec{S}\,'\left[a_1\eta_1+\eta_2\left(c_0+c_1\,p^2+c_2\,p'^2+c_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right)\right]\,\exp\left[-A_1\,p^2-A_2\,p'^2+A_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right]\qquad\text{(D.1)}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\alpha^2m_f^2+8\beta^2(3(M_f-1)M_f+1)}{16\alpha^2\beta^2}\\
A_2 &= \frac{\alpha^2m_i^2+8\beta^2(3(M_i-1)M_i+1)}{16\alpha^2\beta^2}\\
A_3 &= \frac{2\alpha^2m_fm_i-8\beta^2(-6M_fM_i+3M_f+3M_i-2)}{16\alpha^2\beta^2}\\
c_0 &= \frac{1}{4}\alpha^2\left(3x^2+1\right)(a_2-a_3+a_4)+\frac{3a_2\beta^2}{2}\\
c_1 &= \frac{1}{16}a_2(m_f-2M_f-2)^2+\frac{1}{8}a_3(M_f-1)(m_f-2(M_f+1))+\frac{1}{4}a_4(M_f-1)^2\\
c_2 &= \frac{1}{16}a_2(m_i-2M_i-2)^2+\frac{1}{8}a_3(M_i+1)(m_i-2(M_i+1))+\frac{1}{4}a_4(M_i+1)^2\\
c_3 &= \frac{1}{8}a_2(m_f-2M_f-2)(m_i-2M_i-2)+\frac{1}{8}a_3(M_i+1)(m_f-2(M_f+1))\\
&\quad+\frac{1}{8}a_3(M_f-1)(m_i-2(M_i+1))+\frac{1}{2}a_4(M_f-1)(M_i+1)\\
\eta_1 &= \eta_2=1
\end{aligned}\qquad\text{(D.2)}$$

Podemos realizar o mesmo procedimento para os termos V_2, V_3 e V_4 obtendo

$$I_2^e=\vec{S}\cdot\vec{S}\,'\left[a_1\eta_1+\eta_2\left(c_0+c_1\,p^2+c_2\,p'^2+c_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right)\right]\,\exp\left[-A_1\,p^2-A_2\,p'^2+A_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right]\qquad\text{(D.3)}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\alpha^2\left(3m_f^2-6m_f(M_f+1)+3M_f(5M_f-2)+7\right)+12\beta^2(3(M_f-1)M_f+1)}{8\alpha^2\left(\alpha^2+3\beta^2\right)}\\
A_2 &= \frac{\alpha^2(3M_i(5M_i-2)+7)+12\beta^2(3(M_i-1)M_i+1)}{8\alpha^2\left(\alpha^2+3\beta^2\right)}\\
A_3 &= \frac{\alpha^2(3m_f(M_i+1)+9(M_f-1)M_i-9M_f+1)+6\beta^2(M_f(6M_i-3)-3M_i+2)}{4\alpha^2\left(\alpha^2+3\beta^2\right)}\\
c_0 &= 12\beta^2\left[\alpha^2\left(3x^2+1\right)+12\beta^2\right]\left[\alpha^2\left(3x^2+1\right)(2a_2-a_3+a_4)+12\beta^2(a_2-a_3+a_4)\right]\\
c_1 &= a_2\left[\alpha^2m_f\left(3x^2+1\right)+12\beta^2(M_f+1)\right]^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \alpha^4\left(3x^2+1\right)^2\left(m_i(a_2m_i-a_3(m_i-2))+a_4(m_i-2)^2\right)\\
&\quad -12\alpha^2\beta^2\left(3x^2+1\right)\left(2a_2m_i(-m_i+M_i+1)+a_3(m_i-2)(2m_i-M_i-1)-2a_4(m_i-2)^2\right)\\
&\quad +144\beta^4\left(a_2(-m_i+M_i+1)^2+(m_i-2)(a_3(-m_i+M_i+1)+a_4(m_i-2))\right)\\
c_3 &= \left(\alpha^2m_f\left(3x^2+1\right)+12\beta^2(M_f+1)\right)\left[\alpha^2\left(3x^2+1\right)(a_3(m_i-2)-2a_2m_i)\right.\\
&\quad \left.+12\beta^2(2a_2(-m_i+M_i+1)+a_3(m_i-2))\right]\\
\eta_1 &= \frac{48\sqrt{6}\beta^3}{\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+12\beta^2\right)^{3/2}}\\
\eta_2 &= \frac{12\sqrt{6}\beta^3}{\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+12\beta^2\right)^{7/2}}\,.
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

$$
I_3^e=\vec{S}\cdot\vec{S}'\left[a_1\eta_1+\eta_2\left(c_0+c_1\,p^2+c_2\,p'^2+c_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right)\right]\,\exp\left[-A_1\,p^2-A_2\,p'^2+A_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right]
\tag{D.5}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{7\alpha^4m_f^2+36\beta^4(1-2M_f)^2+12\alpha^2\beta^2(4-m_f+m_f^2-2(6+m_f)M_f+16M_f^2)}{16\alpha^2\beta^2(7\alpha^2+6\beta^2)}\\
A_2 &= \frac{(7\alpha^4m_i^2+36\beta^4(1-2M_i)^2+12\alpha^2\beta^2(8-3m_i+m_i^2-2(4+m_i)M_i+16M_i^2))}{(16\alpha^2\beta^2(7\alpha^2+6\beta^2))}\\
A_3 &= \frac{7\alpha^4m_fm_i+36\beta^4(2M_f-1)(2M_i-1)+A'}{8\alpha^2\beta^2(7\alpha^2+6\beta^2)}\\
A' &= 6\alpha^2\beta^2(4+3m_f-20M_f+m_i+2M_fm_i+2(m_f+12M_f-8)M_i\\
c_0 &= 24\alpha^2(\alpha^2(6x^2+1)+6\beta^2)(2x^2(\alpha^2(a_2-a_3+a_4)+3\beta^2(2a_2-a_3+a_4))+6\alpha^2x^4(a_2-a_3+a_4)+a_4\beta^2)\\
c_1 &= \alpha^4(4a_2(x^2(-3m_f+6M_f+9)+1)^2\\
&\quad +(m_f+6(2M_f-1)x^2-2)(6x^2(a_3(m_f-2M_f-3)+a_4(2M_f-1))\\
&\quad -2a_3+a_4(m_f-2)))+12a^2\beta^2(-3x^2(4a_2(m_f-2M_f-3)+(2M_f-1)(a_3(-m_f+2M_f+5)\\
&\quad -4a_4M_f+2a_4))+4a_2-a_3(m_f+2M_f-3)+a_4(m_f-2)(2M_f-1))\\
&\quad +36\beta^4(4a_2-4M_f(a_3+a_4)+2a_3+4a_4{M_f}^2+a_4)\\
c_2 &= \alpha^4(4a_2(3x^2(m_i-2M_i-1)+1)^2+(m_i+6(2M_i+1)x^2-2)(6x^2(a_3(m_i-2M_i-1)+2a_4M_i+a_4)\\
&\quad +2a_3+a_4(m_i-2)))+12\alpha^2\beta^2(3x^2(4a_2(m_i-2M_i-1)\\
&\quad +(2M_i+1)(a_3m_i-2a_3M_i+a_3+4a_4M_i+2a_4))\\
&\quad +4a_2+a_3(m_i+2M_i-1)+a_4(m_i-2)(2M_i+1))+36\beta^4(4a_2+(2M_i+1)(2a_3+2a_4M_i+a_4))\\
c_3 &= 2(\alpha^4(4a_2(3x^2(m_f-2M_f-3)-1)(3x^2(m_i-2M_i-1)+1)\\
&\quad +a_3(18x^4(2m_fM_i+m_f+2M_f(m_i-4M_i-2)\\
&\quad -m_i-4M_i-2)+3x^2(m_f(2m_i-2M_i-3)-2M_fm_i+8M_f-5m_i+4)+m_f-m_i)\\
&\quad +a_4(m_f+6(2M_f-1)x^2-2)(m_i+6(2M_i+1)x^2-2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6\alpha^2\beta^2(3x^2(4a_2(m_f-2M_f-m_i+2M_i-2)\\
&+a_3(2M_i(m_f-4M_f-4)+m_f+2M_fm_i-m_i-6)+4a_4(2M_f-1)(2M_i+1))\\
&-8a_2+a_3(m_f+2M_f-m_i-2M_i-2)+a_4(2m_fM_i+m_f+2M_f(m_i-2)-m_i-4M_i))\\
&-36\beta^4(4a_2+2a_3(-M_f+M_i+1)-a_4(2M_f-1)(2M_i+1)))\\
\eta_1 &= \frac{24\sqrt{3}\alpha^3x^2\sqrt{3x^4+x^2}}{\sqrt{3x^2+1}\left(\alpha^2\left(6x^2+1\right)+6\beta^2\right)^{3/2}}\\
\eta_2 &= \frac{3\sqrt{3}\alpha^3\left(3x^4+x^2\right)^{7/2}}{2x^4\left(3x^2+1\right)^{7/2}\left(\alpha^2\left(6x^2+1\right)+6\beta^2\right)^{7/2}}\,.
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

$$
I_4^e=\vec{S}\cdot\vec{S}\,'\left[a_1\eta_1+\eta_2\left(c_0+c_1\,p^2+c_2\,p'^{\,2}+c_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right)\right]\,\exp\left[-A_1\,p^2-A_2\,p'^{\,2}+A_3\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,'\right] \tag{D.7}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{3(m_f-2(M_f+1))^2}{8\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)}+\frac{(m_f-1)^2}{8\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)}+\frac{3(1-2M_f)^2}{8\alpha^2}\\
A_2 &= \frac{3(m_i-2(M_i+1))^2}{8\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)}+\frac{(m_i-1)^2}{8\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)}+\frac{3(1-2M_i)^2}{8\alpha^2}\\
A_3 &= -\frac{3(m_f-2(M_f+1))(m_i-2(M_i+1))}{4\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)}+\frac{(m_f-1)(m_i-1)}{4\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)}+\frac{3(2M_f-1)(2M_i-1)}{4\alpha^2}\\
c_0 &= 12\alpha^2\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)\left(\beta^2x^2(2a_2-a_3)\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)\right.\\
&\left.+a_4\left(\alpha^4x^4+3\alpha^2\beta^2x^2\left(x^2+1\right)+\beta^4\left(6x^2+1\right)\right)\right)\\
c_1 &= \alpha^8x^4(a_4(3x^2(m_f-2M_f-1)+1)^2\\
&-m_f(3x^2+1)(-3x^2(a_2m_f+a_3(-m_f)+2a_3M_f+a_3)-a_2m_f+a_3))\\
&+\alpha^6\beta^2x^2(2(2a_2m_f(3x^2+1)(3(m_f+1)x^2+1)\\
&+a_4(3x^2(2m_f-6M_f-1)-m_f+3)(3x^2(m_f-2M_f-1)+1))\\
&+a_3(9x^4(-4{m_f}^2+10m_fM_f+m_f+4M_f+2)\\
&-3x^2(m_f(m_f-6M_f+6)-4M_f)+(m_f-3)m_f-2))\\
&+\alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_f(m_f+4)+1)+a_3(-4m_f(m_f-4M_f+2)+20M_f+6)\\
&+4a_4({m_f}^2-8m_fM_f+M_f(13M_f+3))-3a_4)\\
&+6x^2(a_2(8m_f+4)+a_3(m_f(m_f+2M_f-5)+6M_f-4)\\
&+a_4(m_f(-2m_f+6M_f+7)-22M_f-1))+4a_2+(m_f-3)(2a_3+a_4(m_f-3)))\\
&+12\alpha^2\beta^6(4a_2(3(m_f+1)x^2+1)+a_3(3x^2(2(m_f+4)M_f-3m_f)+m_f+2M_f-4)\\
&+a_4(2M_f-1)(3x^2(-2m_f+6M_f+1)+m_f-3))+36\beta^8(4a_2+(2M_f-1)(2a_3+a_4(2M_f-1)))\\
c_2 &= \alpha^8x^4(m_i(3x^2+1)(-3x^2(-a_2m_i+2a_3M_i+a_3)+a_2m_i-a_3m_i+a_3)+a_4(m_i+(6M_i+3)x^2-1)^2)\\
&-\alpha^6\beta^2x^2(a_3({m_i}^2+9(5m_i+2)(2M_i+1)x^4+3(3m_i+2)x^2(m_i+2M_i)+m_i-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -2(2a_2m_i(3x^2+1)(3(m_i+1)x^2+1)+a_4(m_i+9(2M_i+1)x^2-1)(m_i+(6M_i+3)x^2-1))) \\
& +\alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_i(m_i+4)+1)+(2M_i+1)(13(2a_4M_i+a_4)-2a_3(4m_i+5))) \\
& +6x^2(a_2(8m_i+4) \\
& -a_3(m_i+3)(m_i+2M_i)+5a_4(m_i-1)(2M_i+1))+4a_2+(m_i-1)(a_4(m_i-1)-2a_3)) \\
& +12\alpha^2\beta^6(3x^2(4a_2(m_i+1)+(2M_i+1)(3a_4(2M_i+1)-a_3(m_i+4))))+4a_2-a_3(m_i+2M_i) \\
& +a_4(m_i-1)(2M_i+1))+36\beta^8(4a_2+(2M_i+1)(-2a_3+2a_4M_i+a_4)) \\
c_3 \;=\; & \alpha^8(-x^4)(2a_4(3x^2(m_f-2M_f-1)+1)(m_i+(6M_i+3)x^2-1) \\
& -(3x^2+1)(a_3(3x^2(m_fm_i+2m_fM_i+m_f-2M_fm_i-m_i)+m_f(m_i-1)+m_i) \\
& -2a_2m_fm_i(3x^2+1))) \\
& -\alpha^6\beta^2x^2(9x^4(4a_2(2m_fm_i+m_f+m_i) \\
& +a_3(-m_f(4m_i+10M_i+7)+10M_fm_i+4M_f+3m_i-4M_i) \\
& +2a_4(2M_i+1)(5m_f-12M_f-4))+6x^2(4a_2(m_fm_i+m_f+m_i) \\
& -a_3(2m_fm_i+3m_fM_i+m_f-3M_fm_i-2M_f+3m_i+2M_i) \\
& +a_4(m_f(3m_i-2M_i-4)-8M_fm_i+8M_f-2m_i+12M_i+8)) \\
& +4a_2(m_f+m_i)+a_3(m_f-5m_i)-2a_4(m_f-4)(m_i-1)) \\
& -2\alpha^4\beta^4(9x^4(4a_2(m_f(m_i+2)+2m_i+1) \\
& -2a_3(m_f(m_i+4M_i+4)-4M_fm_i-5M_f+5M_i+1) \\
& +a_4(2M_i+1)(8m_f-26M_f-3))+3x^2(8a_2(m_f+m_i+1) \\
& -a_3(2m_fM_i+m_f-2M_f(m_i+3)+7m_i+6M_i+4) \\
& +a_4(m_f(2m_i-6M_i-5)-10M_f(m_i-1)+m_i+22M_i+10)) \\
& +4a_2+a_3(m_f-m_i-2)-a_4(m_f-3)(m_i-1))-12\alpha^2\beta^6(3x^2(4a_2(m_f+m_i+2) \\
& -a_3(m_f(2M_i+3)-2M_f(m_i+4)+m_i+8M_i+4)+2a_4(2M_i+1)(m_f-6M_f+1)) \\
& +8a_2+a_3(m_f+2M_f-m_i-2M_i-4) \\
& +a_4(-m_f(2M_i+1)-2M_f(m_i-1)+m_i+6M_i+2)) \\
& -72\beta^8(4a_2+2a_3(M_f-M_i-1)-a_4(2M_f-1)(2M_i+1)) \\
\eta_1 \;=\; & \frac{48\sqrt{6}\alpha^3\beta^3x^3}{\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)^{3/2}\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)^{3/2}} \\
\eta_2 \;=\; & \frac{12\sqrt{6}\alpha^3\beta^3x^3}{\left(\alpha^2x^2+2\beta^2\right)^{7/2}\left(\alpha^2\left(3x^2+1\right)+6\beta^2\right)^{7/2}}
\end{aligned}
\tag{D.8}
$$

Apêndice E

Parte spin-sabor-cor de V_{mb}

No apêndice anterior calculamos a parte espacial do potencial de interação méson-bárion V_{mb}. Agora calcularemos os termos restantes, os fatores de spin, sabor e cor do potencial.

O fator de cor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \left(\frac{\lambda^a_{\mu\sigma}}{2}\frac{\lambda^a_{\nu\rho}}{2}\right)\frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\nu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}}\frac{\delta^{\rho\nu_2}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\sigma\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
\mathcal{C}_2 &= \left(\frac{\lambda^a_{\mu\sigma}}{2}\frac{\lambda^a_{\nu\rho}}{2}\right)\frac{\delta^{\mu_1\nu}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\mu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}}\frac{\delta^{\sigma\rho}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
\mathcal{C}_3 &= \left(\frac{\lambda^a_{\mu\sigma}}{2}\frac{\lambda^a_{\nu\rho}}{2}\right)\frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\mu_1\nu\mu_3}}{\sqrt{6}}\frac{\delta^{\mu_1\nu_2}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\sigma\rho\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
\mathcal{C}_4 &= \left(\frac{\lambda^a_{\mu\sigma}}{2}\frac{\lambda^a_{\nu\rho}}{2}\right)\frac{\delta^{\nu_1\nu}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\mu_1\mu\mu_3}}{\sqrt{6}}\frac{\delta^{\mu_1\rho}}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon^{\nu_1\sigma\mu_3}}{\sqrt{6}}\,.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

O resultado é escrito como $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$:

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{4}{9}\,,\,-\frac{4}{9}\,,\,-\frac{2}{9}\,,\,\frac{2}{9}\right\}. \tag{E.2}$$

É importante observar que pelo resultado não depender dos índices de méson ou bárion, ele vale para qualquer interação méson-bárion descrito dentro do contexto do nosso formalismo. O fator de spin-sabor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1(\alpha\beta;\delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma^i_{s_\mu\, s_\sigma}}{2}\frac{\sigma^i_{s_\nu\, s_\rho}}{2}\right)\left(\delta_{f_\mu\, f_\sigma}\delta_{f_\nu\, f_\rho}\right)\xi^{*\mu\nu_2}_{\alpha}\zeta^{*\nu\mu_2\mu_3}_{\beta}\xi^{\rho\nu_2}_{\gamma}\zeta^{\sigma\mu_2\mu_3}_{\delta} \\
\mathcal{S}_2(\alpha\beta;\delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma^i_{s_\mu\, s_\sigma}}{2}\frac{\sigma^i_{s_\nu\, s_\rho}}{2}\right)\left(\delta_{f_\mu\, f_\sigma}\delta_{f_\nu\, f_\rho}\right)\xi^{*\mu_1\nu}_{\alpha}\zeta^{*\mu\mu_2\mu_3}_{\beta}\xi^{\sigma\rho}_{\gamma}\zeta^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\delta} \\
\mathcal{S}_3(\alpha\beta;\delta\gamma) &= \left(\frac{\sigma^i_{s_\mu\, s_\sigma}}{2}\frac{\sigma^i_{s_\nu\, s_\rho}}{2}\right)\left(\delta_{f_\mu\, f_\sigma}\delta_{f_\nu\, f_\rho}\right)\xi^{*\mu\nu_2}_{\alpha}\zeta^{*\mu_1\nu\mu_3}_{\beta}\xi^{\mu_1\nu_2}_{\gamma}\zeta^{\sigma\rho\mu_3}_{\delta}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_4(\alpha\beta;\delta\gamma) \;=\; \left(\frac{\sigma^i_{s_\mu\, s_\sigma}}{2}\frac{\sigma^i_{s_\nu\, s_\rho}}{2}\right)\left(\delta_{f_\mu\, f_\sigma}\delta_{f_\nu\, f_\rho}\right)\xi^{*\nu_1\nu}_{\alpha}\zeta^{*\mu_1\mu\mu_3}_{\beta}\xi^{\mu_1\rho}_{\gamma}\zeta^{\nu_1\sigma\mu_3}_{\delta}\,. \tag{E.3}$$

Estes fatores $\mathcal{S}$ podem ser calculados facilmente, usando a seguinte propriedade das matrizes do $SU(N)$

$$M^a_{\mu\sigma}\, M^a_{\nu\rho} = 2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - f\,\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \qquad \text{com} \qquad f = \begin{cases} 1, & \text{se } M^a = \sigma^a,\ (a=1,2,3) \\ \frac{2}{3}, & \text{se } M^a = \lambda^a,\ (a=1,\ldots,8) \end{cases} \tag{E.4}$$

Os fatores de spin-sabor-cor ω_i que aparecem na amplitude de espalhamento h_{fi} em (5.7) são obtidos a partir de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$:

$$\Big\{\ \omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\omega_3\,,\,\omega_4 \Big\} = \Big\{\ 3\,\mathcal{C}_1\,\mathcal{S}_1\,,\ 3\,\mathcal{C}_2\,\mathcal{S}_2\,,\ 6\,\mathcal{C}_3\,\mathcal{S}_3\,,\ 6\,\mathcal{C}_4\,\mathcal{S}_4 \Big\}\,. \tag{E.5}$$

Os índices $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ são os números quânticos de espaço, spin e isospin dos mésons ou dos bárions do problema. Eles vão ser determinados de acordo com o respectivo processo a ser estudado, sendo muitas vezes necessário usar regras de soma de momento angular para representar o estado em questão.

Apêndice F

Matrizes de Pauli, Dirac e Gell-Mann

Neste Apêndice, apresentamos as matrizes de Pauli, Dirac e Gell-Mann, necessárias no curso deste trabalho.

F.1 Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli $\vec{\sigma}$, presentes nos espinores de Dirac no Capítulo 4, são dados por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{F.1}$$

F.2 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são β e $\vec{\alpha}$ são dadas por

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{F.2}$$

As matrizes γ^μ são dadas em termos das matrizes de Dirac $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$. Elas são utilizadas no lagrangiano no Capítulo 2 e no hamiltoniano no Capítulo 4.

F.3 Matrizes de Gell-Mann

As matrizs de Gell-Mann, necessárias para o cálculo dos fatores de cor, são

$$\lambda_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{F.3}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Bibliografia

[1] Hilbert J. P., Black N., Barnes T., Swanson E.S., Phys. Rev. C **75**, 064907 (2007)

[2] Swanson E. S., Ann. Phys. (NY), **220**, 73 (1992).

[3] Barnes T., Swanson E. S., Phys. Rev. D **46**, 131 (1992);

[4] Barnes T., Capstick S., Kovarik M. D., Swanson E. S. , Phys. Rev. C **48**, 539 (1993).

[5] Hadjimichef D. , Krein G., Szpigel S., Veiga J. S. da , *Ann. Phys.*,Nova York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.

[6] Oka M., Yazaki K., Phys. Let. B **90**, 41 (1980).

[7] Aitchison I., Hey A., *Gauge Theories in Particle Physics: a Practical Introduction - Fourth Edition*. CRC Press, 2013

[8] Gell-Mann M. , Phys. Lett. **8**, 214 (1964).

[9] Zweig G. , CERN Rep. 8182/TH, p. 401; CERN Rep. 8419/TH, p. 412 (1964).

[10] Greenberg O. W. , of Baryons and Mesons. Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).

[11] Han M. Y., Nambu Y. ,Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).

[12] Mandl F., Shaw G., *Quantum Field Theory - Second Edition*. Wiley, 2010

[13] Griffiths D., *Introduction to Elementary Particles - Second edition*. Wiley, 2008

[14] FAIR - Baseline Technical Report (2005), www.fair-center.de/fileadmin/fair/publications_FAIR/FAIR_BTR_1.pdf.

[15] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 010009 (2014).

[16] Wheeler, J. A., Phys. Rev. **52** 1083, 1107 (1937).

[17] Wildermuth K., Kanellopoulos Th., Nucl. Phys. **7**, 150 (1958); Nucl. Phys. **9** 449 (1958/59).

[18] S. Szpigel: *Interação méson-méson no formalismo Fock-Tani.* Tese de doutorado IF-USP, 1995.

[19] Paul Bühler, *Measuring the JPsi-Nucleon dissociation cross section with PANDA*, arXiv:1109.3857 (2011).

[20] R. Pérez-Marcial, R. Huerta, A. Garcia, M. Avila-Aoki, Phys. Rev. D 40, 2955 (1989).

[21] R. Pérez-Marcial, R. Huerta, A. Garcia, M. Avila-Aoki, Phys. Rev. D 44, 2203 (1991).

[22] Isgur N., Karl G., Phys Rev D **18**, 4187 (1978)

[23] Faiman D., hendry A. W., Phys Rev. **173**, 1720 (1968)

[24] Halzen F., Martin A. D., *Quarks and Leptons: An introdutory Course in Modern Particle Physics.* John Wiley, 1984.